2.- Ondas electromagnéticas en medios ilimitados:

2.1.- Propagación del campo EM: La ecuación de ondas. Ondas planas en el vacío [RMC § 16.4]

2.2.- Ondas planas monocromáticas en dieléctricos, Polarización [RMC § 16.5-17.1-17.2]

2.3.- Energía y momento en el campo EM. Presión de la radiación, vector de Poynting complejo [RMC § 16.3 -17.3] [FLS § 27.6]

2.4.- Ondas planas en conductores: índice de refracción complejo, efecto pelicular [RMC §17.4]

2.- Ondas electromagnéticas en medios ilimitados:

2.1.- Propagación del campo EM: La ecuación de ondas. Ondas planas en el vacío [RMC § 16.4]

2.2.- Ondas planas monocromáticas en dieléctricos, Polarización [RMC § 16.5-17.1-17.2]

2.3.- Energía y momento en el campo EM. Presión de la radiación, vector de Poynting complejo [RMC § 16.3 -17.3] [FLS § 27.6]

2.4.- Ondas planas en conductores: índice de refracción complejo, efecto pelicular [RMC §17.4]

Ecuaciones de Maxwell en el vacio (: sin cargas ni corrientes)

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Vamos a buscar una ecuación donde B y E estén desacoplados

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \underbrace{\nabla(\nabla \mathbf{E})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \underbrace{\nabla(\nabla \mathbf{B})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Ecuación de una onda: $\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Onda electromagnética: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \mathrm{m/s} = \mathrm{c}$

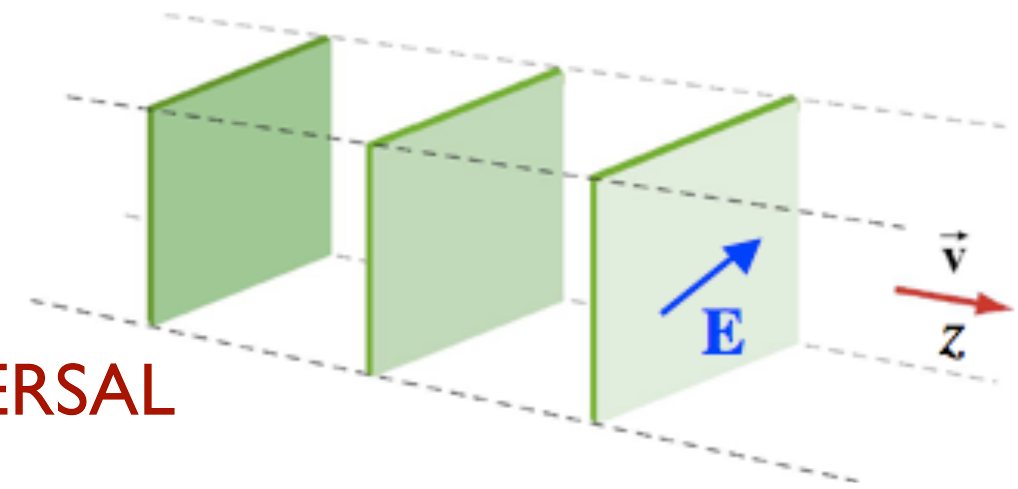
No son independientes, **E** y **B** están acoplados a través de las ecuaciones de Maxwell

Caso particular: Ondas planas E (z,t) y B(z, t) en el vacio

La onda viaja en dirección z y no hay dependencia en x, y, los campos son uniformes en el plano perpendicular a la dirección de propagación: **Ondas planas**

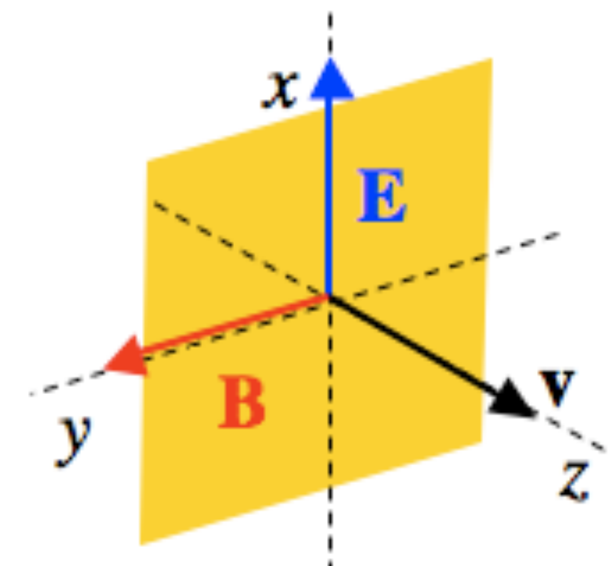
1. $$\nabla.\mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \rightarrow E_z = cte$$

2. $$\nabla.\mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \rightarrow B_z = cte$$



Onda TRANSVERSAL

Por simplicidad elegimos $E_y = 0 \rightarrow \mathbf{E} = E_x(z,t)\hat{u}_x$



3. $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ Ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{u}_y = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{u}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{u}_y \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \rightarrow B_x = cte$$

B_y es la única componente del campo B $\longrightarrow$ B y E son perpediculares

4. Ley de Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (1) \\ -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} & (2) \end{array}}$$

De las ecuaciones de Maxwell obtenemos que las componentes de E y B están relacionadas

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

Solución general de la ecuación diferencial

$$E_x = f(z-ct) + g(z+ct)$$

$$B_y = h(z-ct) + j(z+ct)$$

propagación hacia +z
u= z-ct

propagación hacia -z
v=z+ct

$$E_x(z,t) = f(z-ct)$$

$$B_y(z,t) = h(z-ct)$$

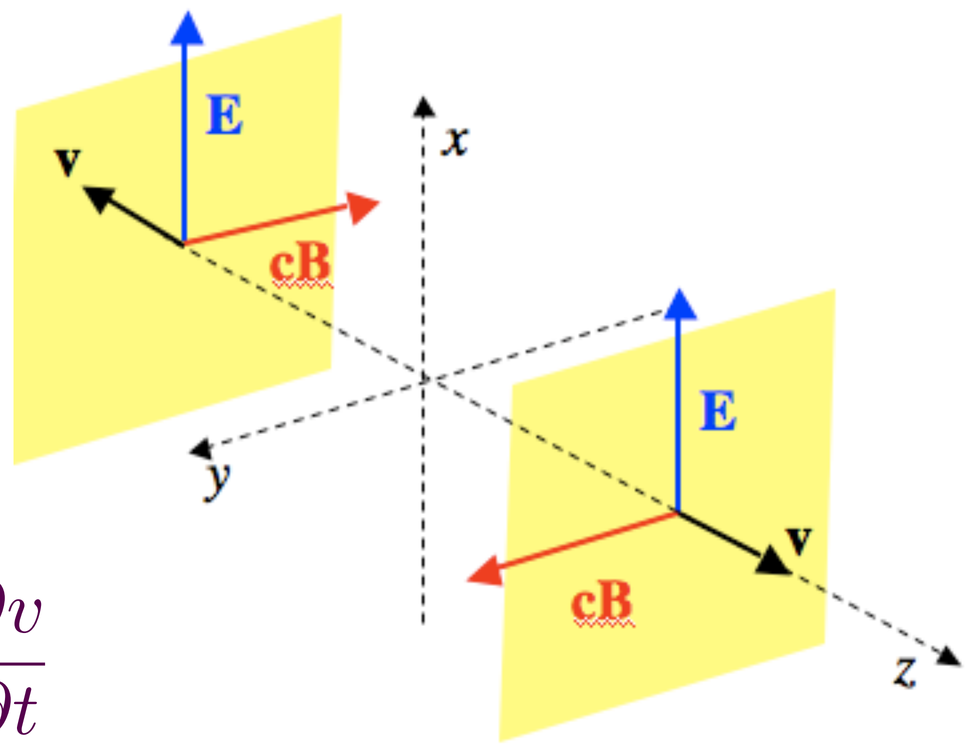
Si la propagación es propagación hacia +z; u= z-ct

$$(\text{De } 1) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{dh}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{df}{du} = c\frac{dh}{du} \rightarrow f = ch + cte$$

$$\boxed{E_x = cB_y}$$

Si la propagación es hacia -z; v=z+ct



$$E_x(z,t) = g(z+ct)$$

$$B_y(z,t) = j(z+ct)$$

$$\text{(De 1)} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{dj}{dv}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{dg}{dv} = -c\frac{dj}{dv} \rightarrow g = -cj + cte$$

$$\boxed{E_x = -cB_y}$$

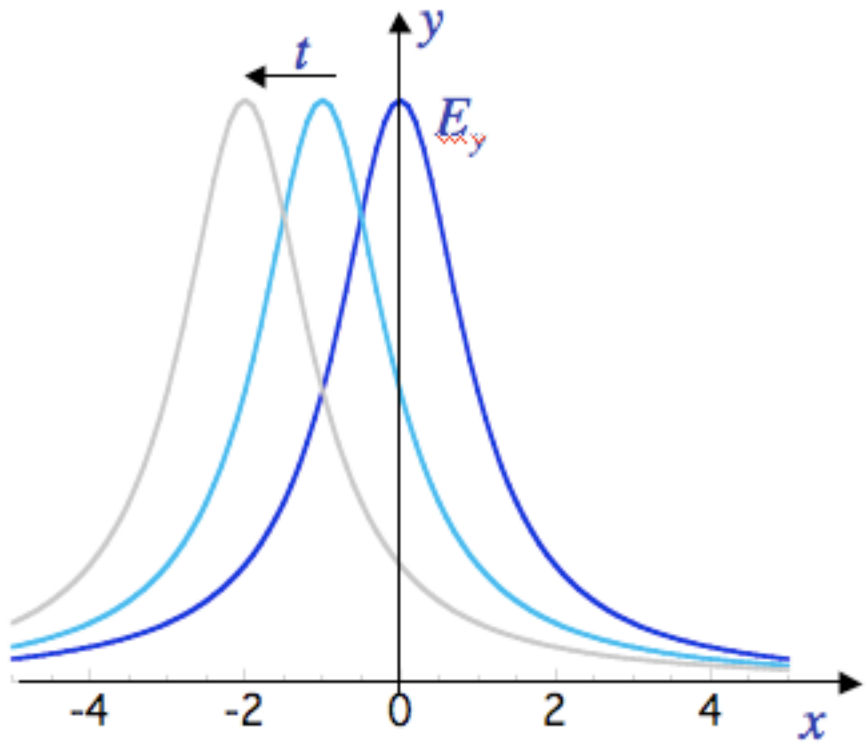
No hay ninguna restricción para elegir las funciones f(u) /g(v), pero si necesariamente:

E_x (z,t)= f(z-ct) + g(z+ct)
B_y (z,t)= (1/c) [f(z-ct) - g(z+ct)]

Ejemplo de ondas planas

problema 2.9

Onda plana propagándose hacia -x



$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{1+4(x+ct)^2}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{B_0}{1+4(x+ct)^2}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$$

$$B_0 = 10^{-4} \quad Tesla(\equiv 1Gauss)$$

$$E_0 = cB_0 = 3.10^4 \quad V/m$$

Densidad de energía electromagnética

$$U_{em} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{[1+4(x+ct)^2]^2}$$

En toda la onda plana, la energía se reparte por igual entre E y B

$$\epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{\mu_0}B^2$$

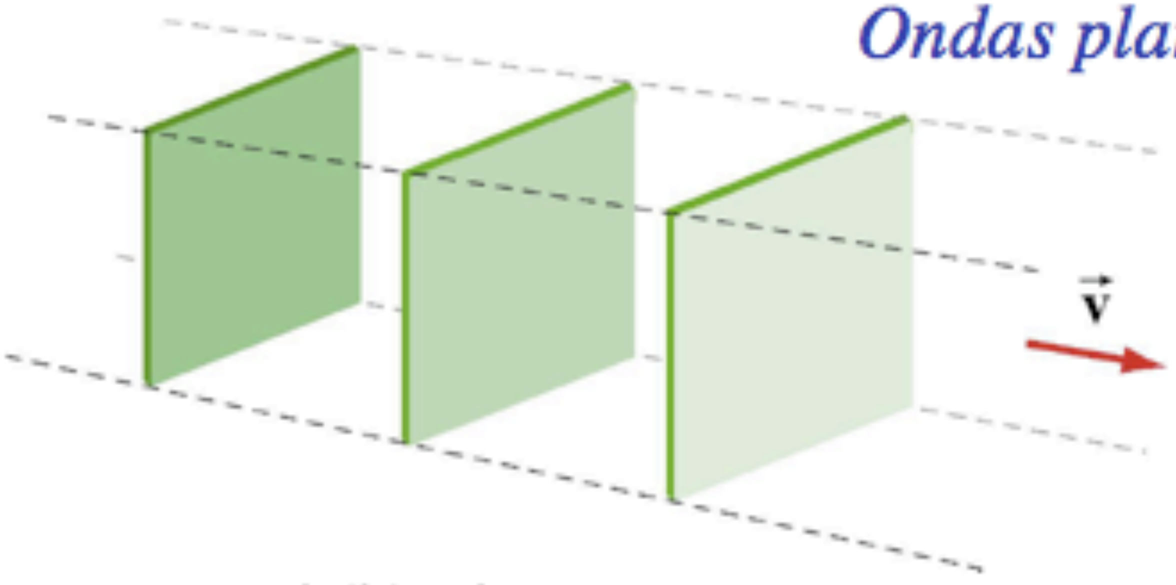
Vector de Poynting

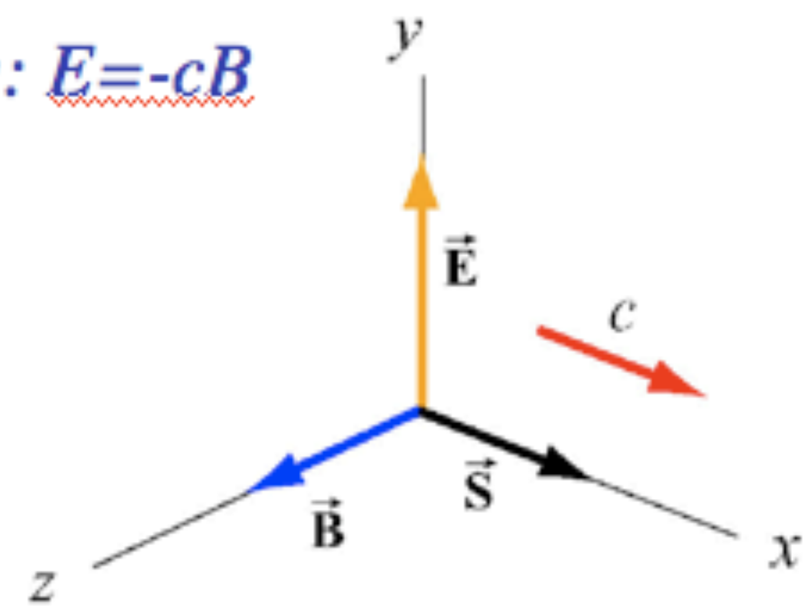
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} =$$

$$= \frac{E_0 B_0}{\mu_0[1+4(x+ct)^2]^2}(-\hat{u}_x)$$

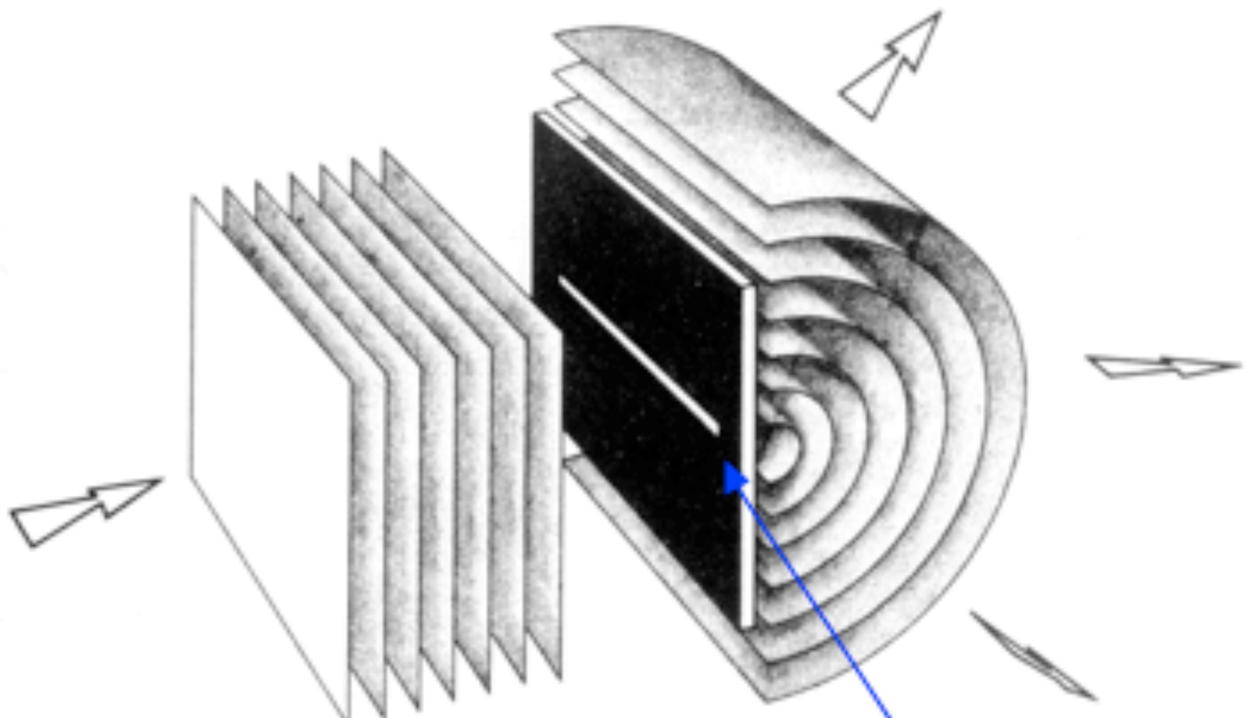
Para ondas planas tanto los campos como la energía son constantes en los planos de igual fase: x±ct=cte

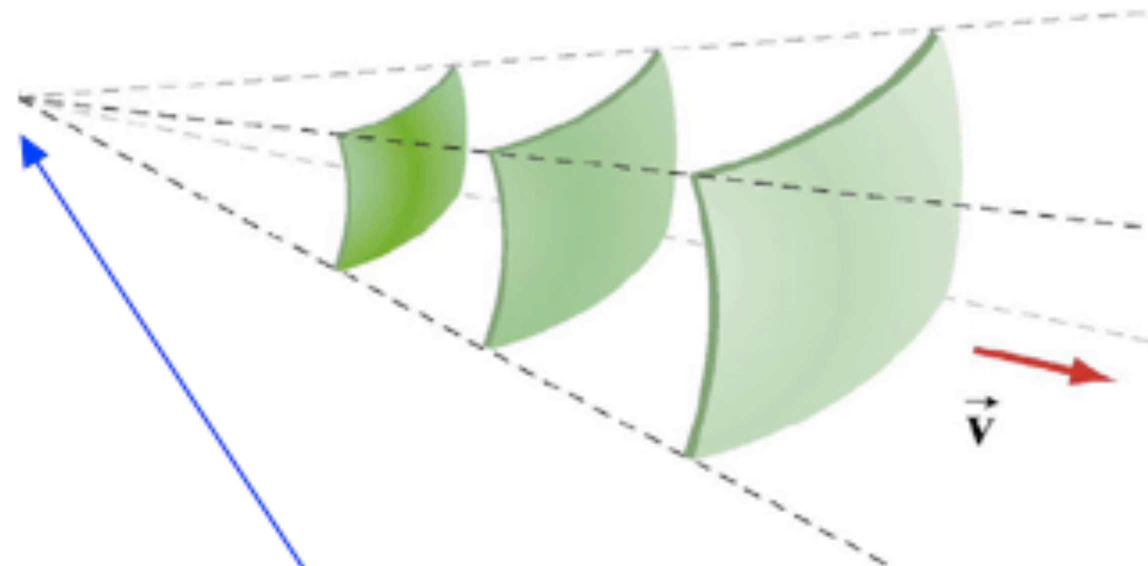
Ondas planas: E=-cB





¿Otros tipos de Ondas ?





Ondas esféricas

Fuente radiante

Ondas cilíndricas

Pantalla

Ecuaciones de Maxwell en medios lineales:

$\nabla.\mathbf{D} = \rho_f$ ley de Gauss

$\nabla.\mathbf{B} = 0$

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Ley de Faraday

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J_f} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ Ley de Ampere con la corrección de Maxwell

Medios lineales

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

Ecuación de ondas:

En ausencia de cargas y corrientes, salvo en los conductores ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$)

3. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla.\mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ecuación de ondas para el campo E y B:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Amortiguación

propagación

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$ velocidad de propagación

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

n: indice de refracción

<u>Onda electromagnética amortiguada</u>

2.- Ondas electromagnéticas en medios ilimitados:

2.1.- Propagación del campo EM: La ecuación de ondas. Ondas planas en el vacío [RMC § 16.4]

2.2.- Ondas planas monocromáticas en dieléctricos, Polarización [RMC § 16.5-17.1-17.2]

2.3.- Energía y momento en el campo EM. Presión de la radiación, vector de Poynting complejo [RMC § 16.3 -17.3] [FLS § 27.6]

2.4.- Ondas planas en conductores: índice de refracción complejo, efecto pelicular [RMC §17.4]

Ondas planas monocromáticas en dieléctricos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

En dieléctricos perfectos ($\sigma = 0$) todo es igual al vacío salvo la velocidad de propagación de las ondas que ahora vale: $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

Se define el índice de refracción, $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} > 1$

Si $\mu \approx \mu_0 \rightarrow \mu_r \approx 1 \quad n \approx \sqrt{\epsilon_r}$

Para estudiar las soluciones más simples de la ecuación de ondas usaremos el método de separación de variables, como en la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \psi(z,t) = Z(z).T(t) \rightarrow \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{Tv^2}\frac{d^2T}{dt^2} = -k^2(cte)$$

Tenemos dos ecuaciones diferenciales separadas:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \quad y \quad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad \text{con} \quad \omega^2 = k^2v^2 \quad o \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\omega = (\text{frecuencia angular}) = 2\pi f$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \quad y \quad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

Soluciones son:

$$Z(z) = e^{\pm ikz}; \quad T(t) = e^{\pm i\omega t}$$

solución general es $\Psi(z,t) = Z(z)T(t) = e^{\pm i(kz \pm \omega t)}$

Funciones solamente de las variables generales de las ondas planas: *(z±vt)*

$kz \pm \omega t = kz \pm kvt = k(z \pm vt)$ siendo $k = \omega / v$ la constante de propagación

El campo eléctrico, E, y magnético, B, serán la parte real de la función:

$\Psi(z,t) = Re[Ce^{i(kz - \omega t)}] = C\cos(kz - \omega t)$ C puede ser compleja

Si k>0 la onda se propaga según +z; Si k<0 la onda se propaga según -z

Como expresamos los campos E y B:

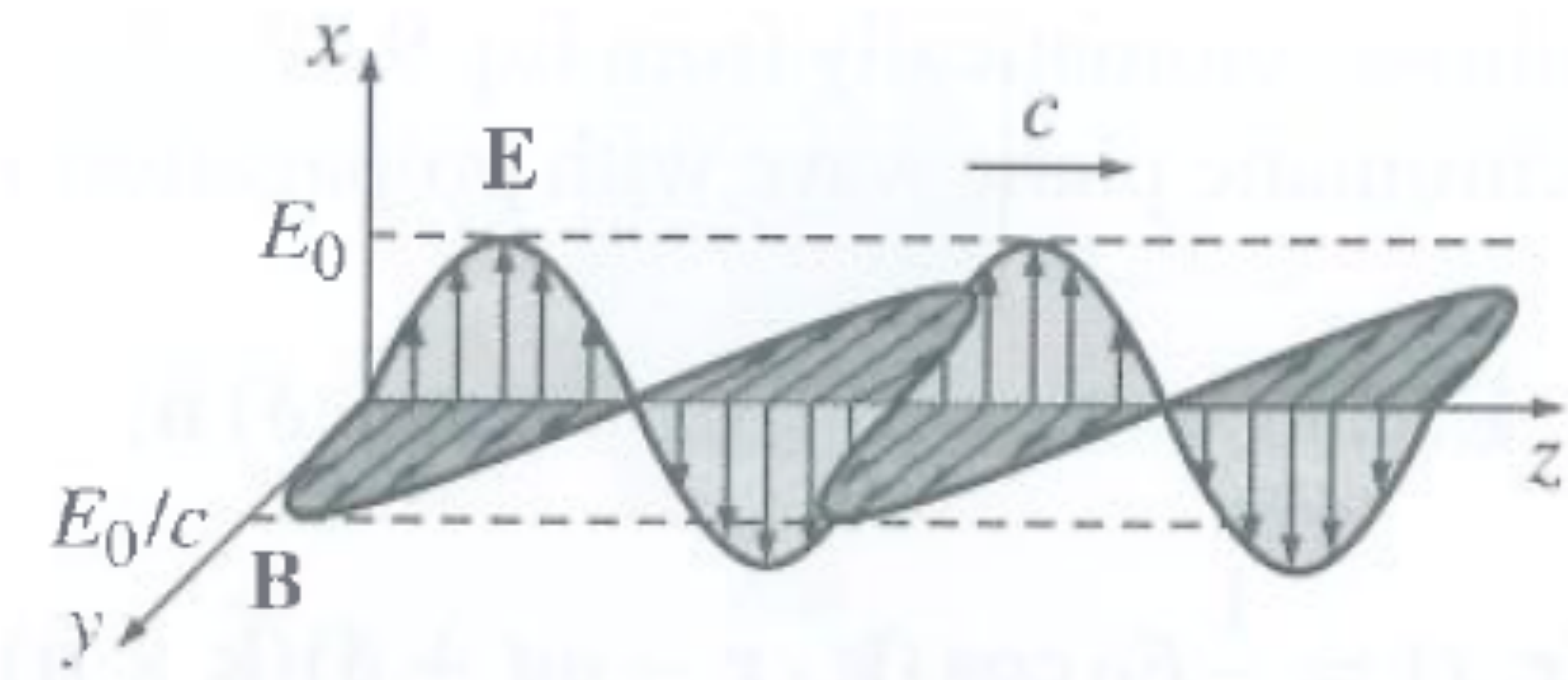
$$\mathbf{E}(z,t) = Re[\tilde{\mathbf{E}}e^{i(kz-\omega t)}]; \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E_0}e^{i\delta}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_0}\cos(kz-\omega t+\delta)$$ siendo E_0 un vector constante en el plano xy

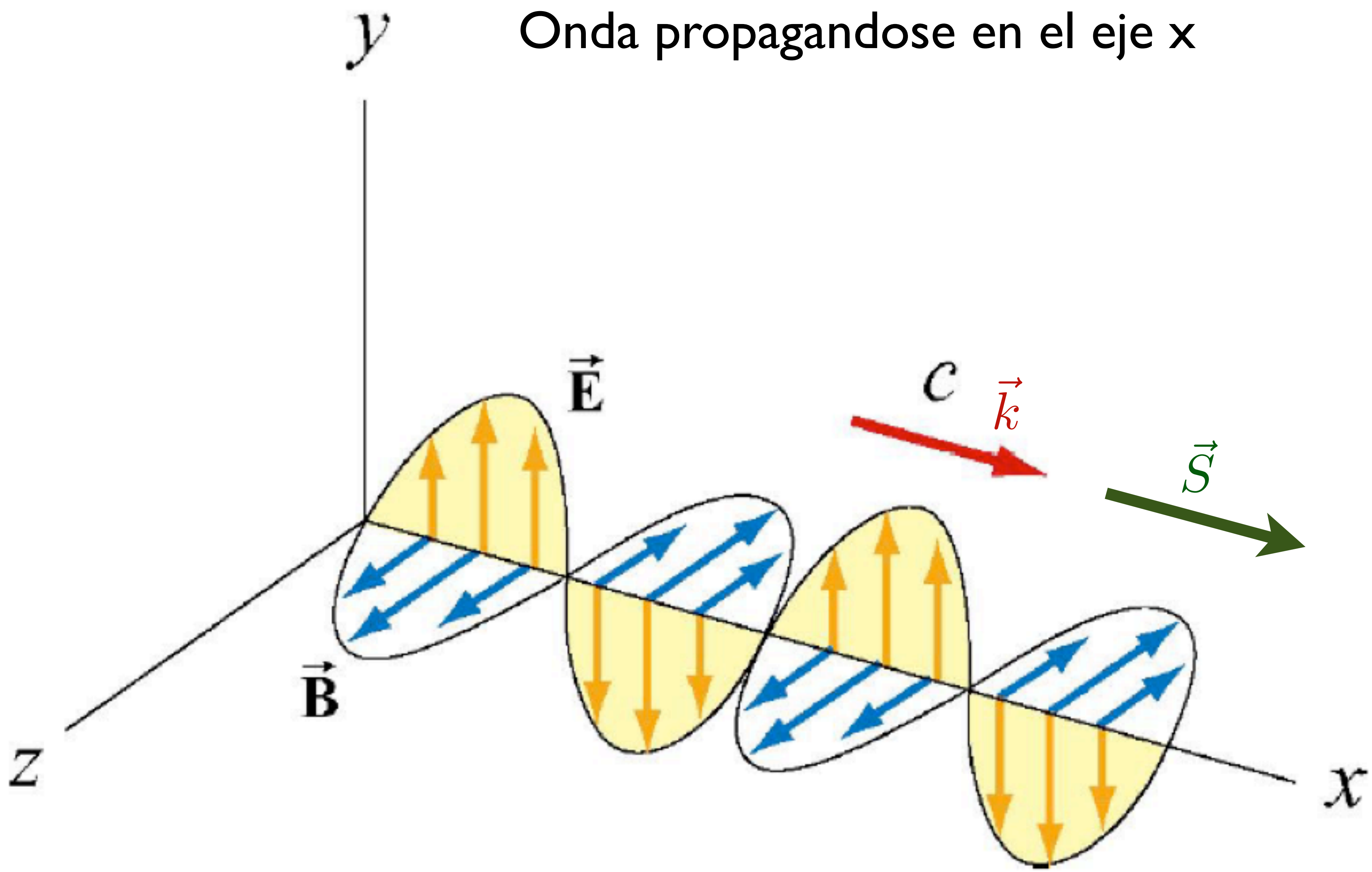
Se sobreentiende que hay que tomar la parte real de la función y, por tanto, los campos eléctricos y magnéticos se escriben como:

$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}e^{i(kz-\omega t)} = \mathbf{E_0}e^{i(kz-\omega t+\delta)}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}e^{i(kz-\omega t)} = \mathbf{B_0}e^{i(kz-\omega t+\delta)}$$



Onda propagandose en el eje x

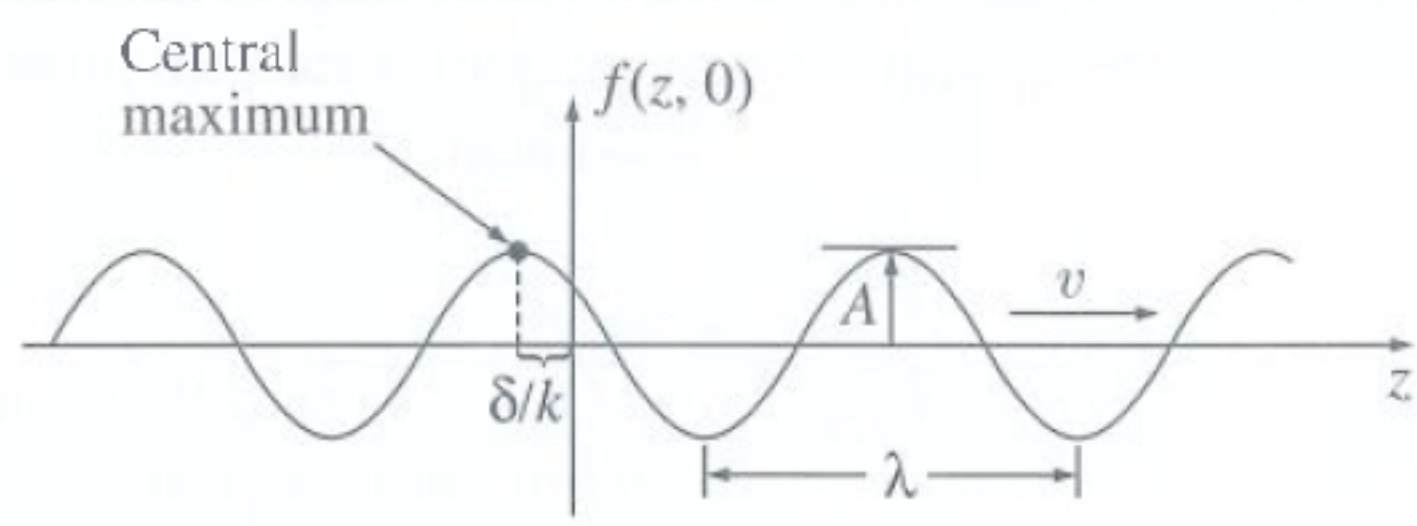


$$\mathbf{E}(x,t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_y = \mathbf{E_0} e^{i(kx-\omega t+\delta)} \hat{u}_y$$

$$\mathbf{B}(x,t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_z = \mathbf{B_0} e^{i(kx-\omega t+\delta)} \hat{u}_z$$

$$\mathbf{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \delta) \hat{u}_y$$

$$\mathbf{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t + \delta) \hat{u}_z$$



$$E(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta)$$

amplitud

fase

periodo espacial: longitud de onda

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{|k|}}$$

k

cte de propagación

periodo temporal

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}}$$

ω, ν

frecuencia angular, frecuencia

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda}$$

velocidad de propagación

velocidad de fase

$$kz - \omega t + \delta = cte \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{fase}}$$

Notación vectorial, independiente del sistema de coordenadas

Introducimos el vector de propagación, k, (o vector de onda). El producto k.r es la generalización de k.z, y vamos a indicar **n** como el vector de polarización, es decir la dirección del vector eléctrico, E

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\hat{\mathbf{n}} \qquad \tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta}$$

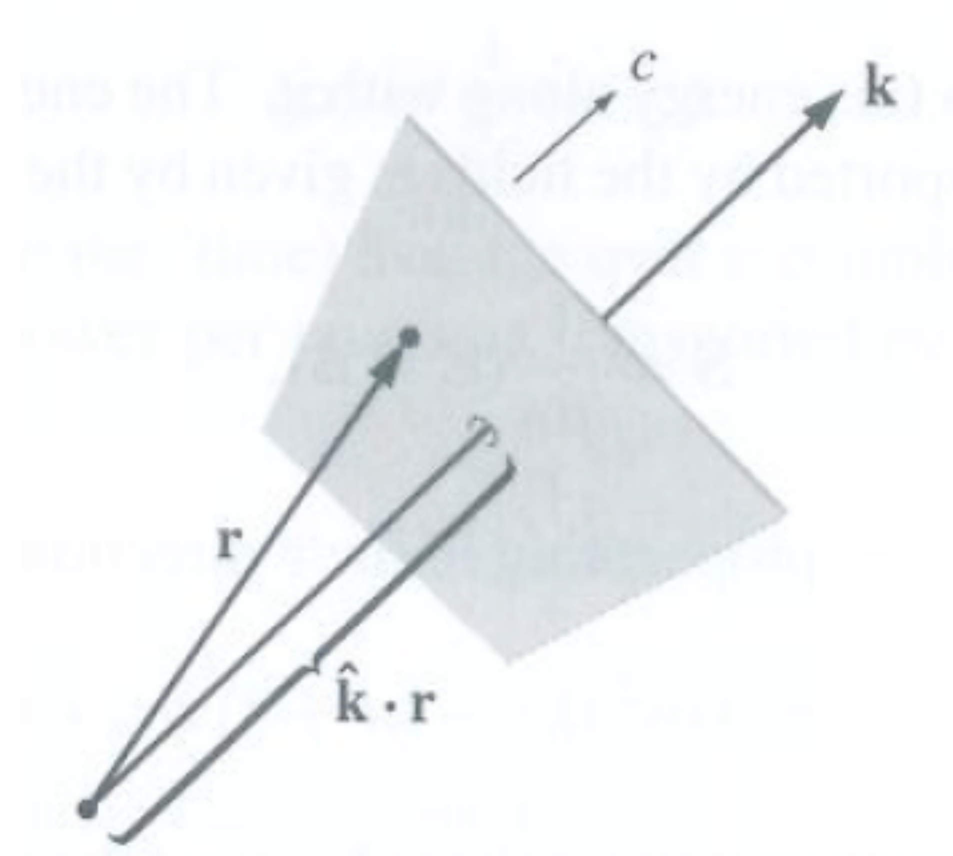
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \tilde{B}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}}$$

Como la onda electromagnética es transversal, es decir, la oscilación del campo eléctrico y magnético es perpendicular a la propagación de la onda.

$$\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \cos(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t + \delta)\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{c} \cos(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t + \delta)(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$$



Las Ecuaciones de Maxwell para ondas planas monocromáticas

Si los campos vienen dados por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\delta)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = \mathbf{B_0} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\delta)}$$

los operadores diferenciales equivalen a meros productos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega; \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv ik; \quad \nabla \equiv i\mathbf{k}$$

Las Ecuaciones de Maxwell para los campos (o los fasores) son:

$$\nabla.\mathbf{D} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{k}.\mathbf{D} = 0; \quad \nabla.\mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{k}.\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Longleftrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Longleftrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$$

Las relaciones entre los campos y con el vector de propagación son evidentes

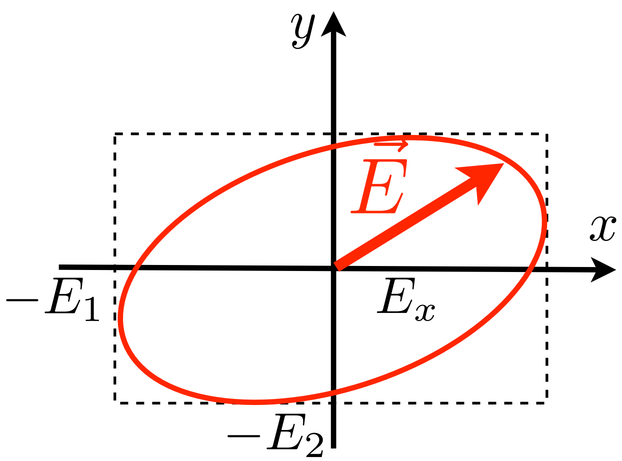
$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}; \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$$

Polarización

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = (E_1 e^{i\theta_1}\hat{x} + E_2 e^{i\theta_2}\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{k} = k\hat{z}$$



$$E_x = E_1 \cos(kz - \omega t + \theta_1) \qquad (E_1, E_2)$$

$$E_y = E_2 \cos(kz - \omega t + \theta_2) \qquad (\theta_1, \theta_2)$$

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\cos(\theta_1-\theta_2) + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \sin^2(\theta_1-\theta_2)}$$

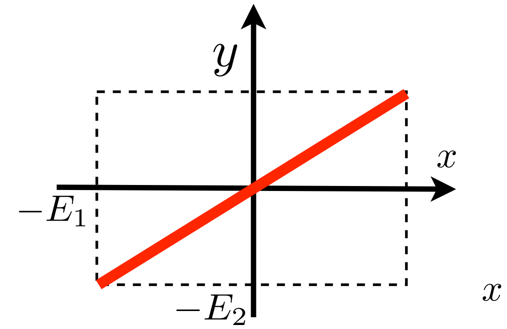
eliminando $kz - \omega t$

elipse inscrita en un rectángulo de lados $2E_1$ y $2E_2$

la relación entre θ_1 y θ_2 determina la polarización

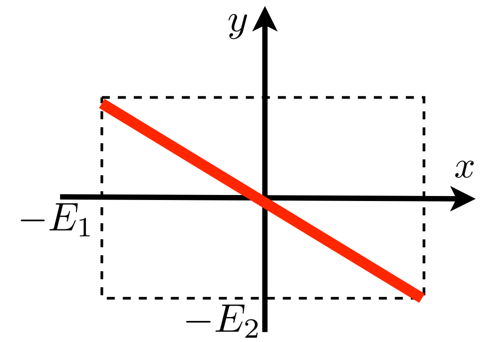
Casos particulares

1) $\theta_1 - \theta_2 = 0 \longrightarrow \dfrac{E_x}{E_1} = \dfrac{E_y}{E_2}$



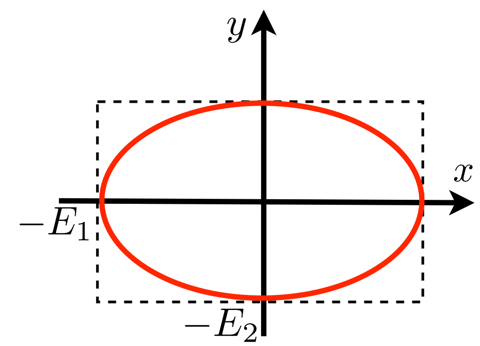
Polarización lineal

2) $|\theta_1 - \theta_2| = \pi \longrightarrow \dfrac{E_x}{E_1} = -\dfrac{E_y}{E_2}$



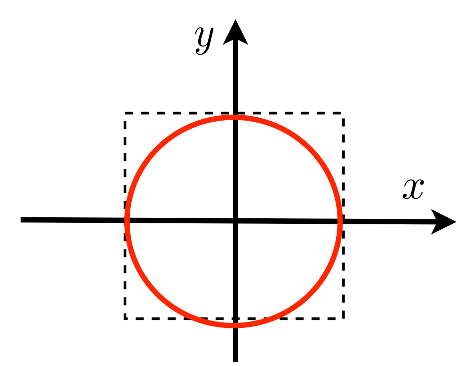
Polarización lineal

3) $|\theta_1 - \theta_2| = \dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \left(\dfrac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\dfrac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1$



Polarización elíptica

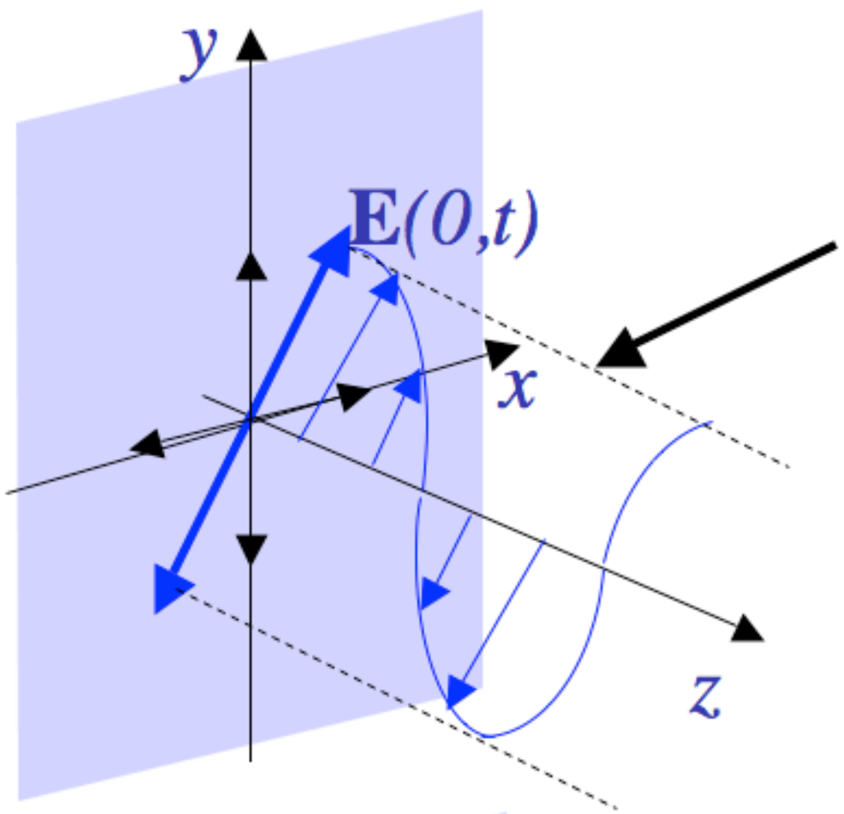
4) $|\theta_1 - \theta_2| = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad E_1 = E_2 \quad \longrightarrow \quad E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$



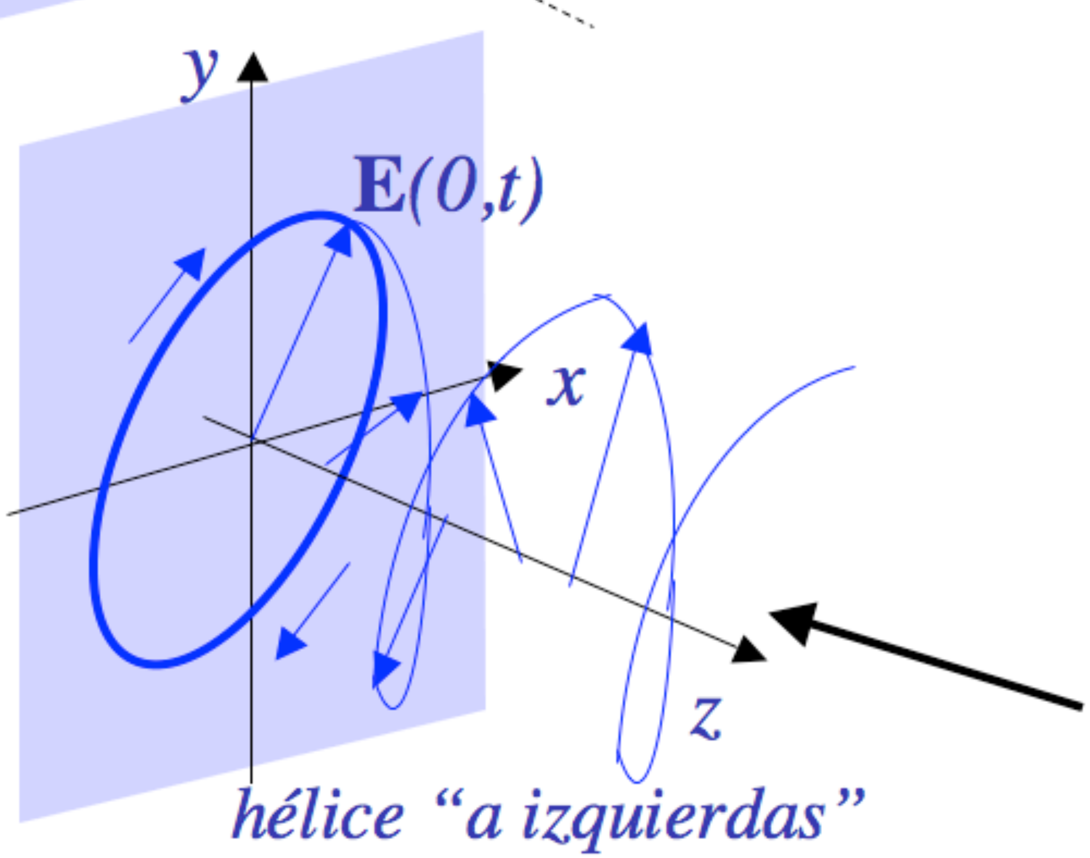
Polarización circular

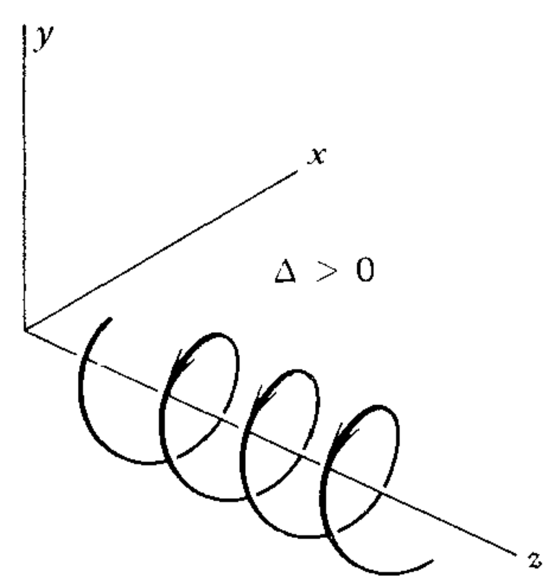
Polarización

E está siempre en un plano que contiene el eje z onda plano-polarizada.
También se llama linealmente polarizada, pues **E** describe una recta en el plano XY.

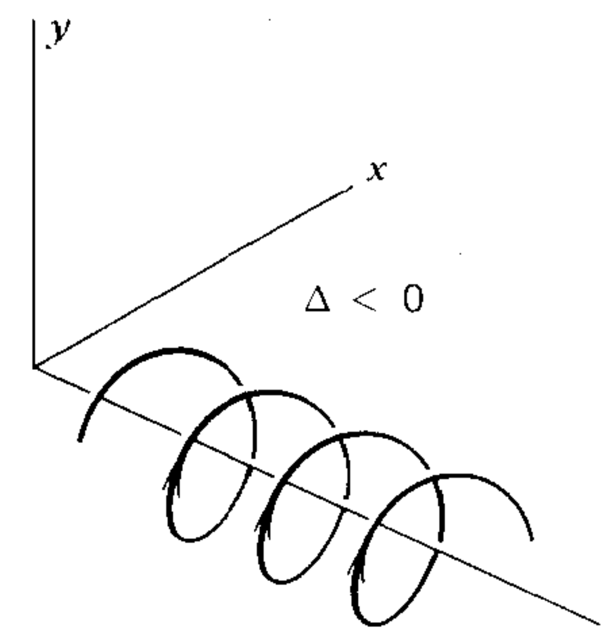


$$\Delta = \theta_1 - \theta_2$$

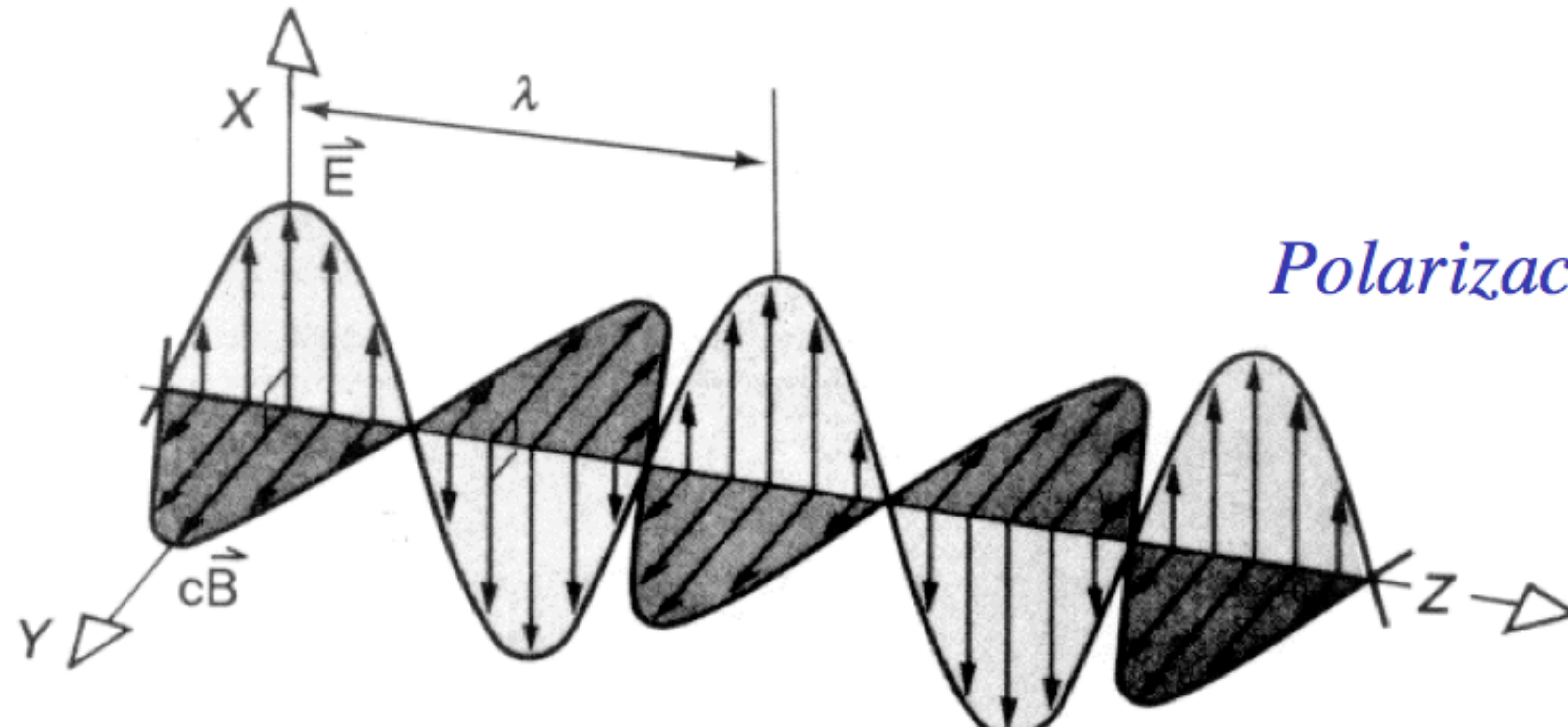




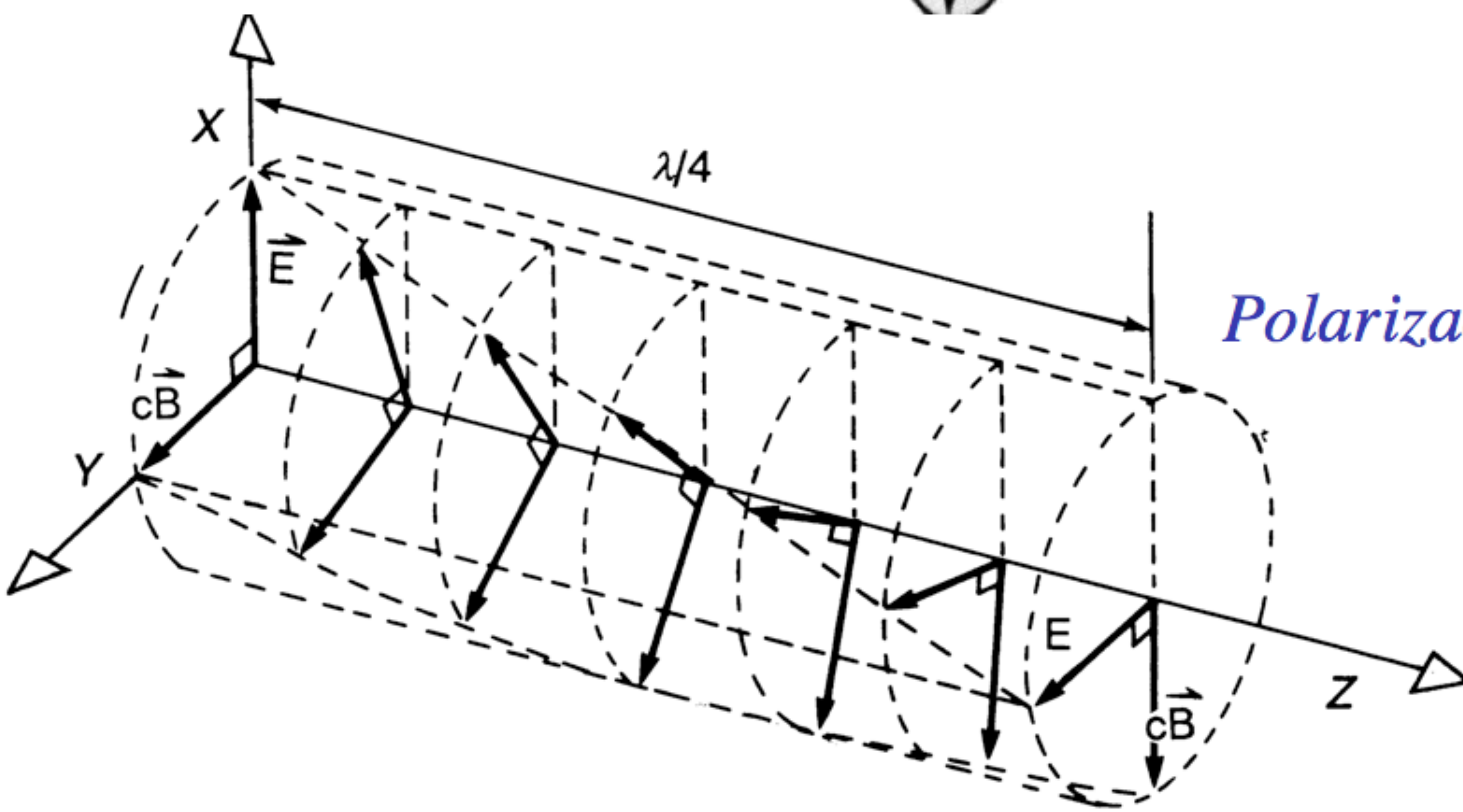
derechas



izquierdas



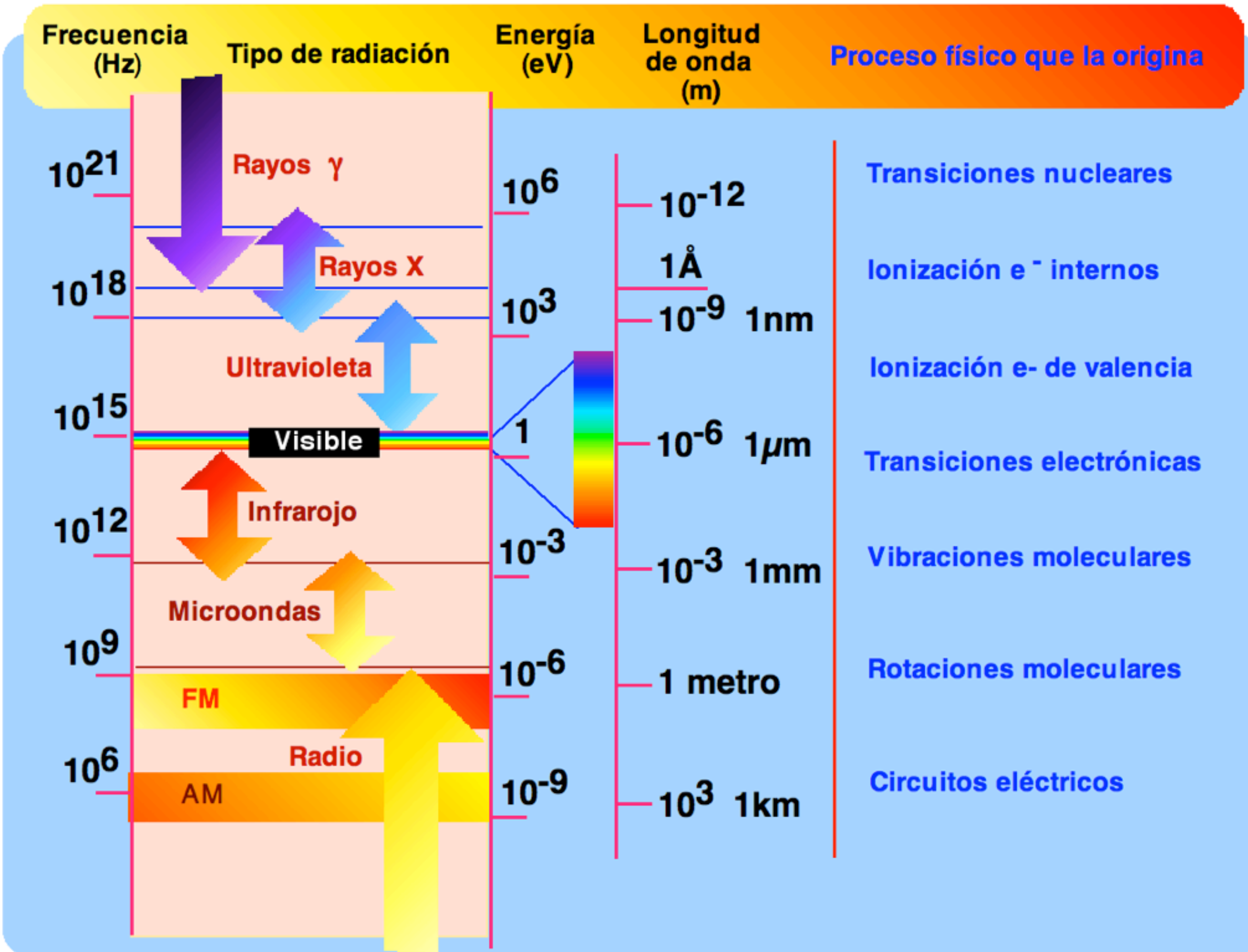
Polarización lineal



Polarización circular

(La radiación no-monocromática no tiene por qué estar polarizada)

Espectro de la radiación Electromagnética



2.- Ondas electromagnéticas en medios ilimitados:

2.1.- Propagación del campo EM: La ecuación de ondas. Ondas planas en el vacío [RMC § 16.4]

2.2.- Ondas planas monocromáticas en dieléctricos, Polarización [RMC § 16.5-17.1-17.2]

2.3.- Ondas planas en conductores: índice de refracción complejo, efecto pelicular [RMC §17.4]

2.4.- Energía y momento en el campo EM. Presión de la radiación, vector de Poynting complejo [RMC § 16.3 -17.3] [FLS § 27.6]

Ecuación de ondas en un medio conductor:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

En una onda plana monocromática: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$

El operador diferencial equivale a un producto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv ik; \quad \nabla \equiv i\mathbf{k}$$

La ecuación de ondas se re-escribe como:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\omega\sigma\mu \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (i\omega\sigma\mu + \omega^2 \epsilon\mu) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Si consideramos que la onda se propaga en dirección z, E_z:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} = -\omega^2 \tilde{\epsilon}\mu \mathbf{E}(z) = -\tilde{k}^2 \mathbf{E}(z)$$

donde $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{k}$ son :

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}); \quad \tilde{k} = \omega\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}, \qquad \tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Es decir, tanto la permitividad como la constante de propagación son complejas!

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{dz^2} = -\tilde{k}^2\mathbf{E}(z)$$

La ecuación diferencial que tenemos es exactamente igual que la ecuación en un dieléctrico. La solución es, por tanto, la misma pero el vector de onda es complejo

$$\mathbf{E}(z) = \tilde{\mathbf{E}}e^{i\tilde{k}z}$$

Generalizando: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}e^{i\tilde{k}.\mathbf{r}}$ $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}e^{i(\tilde{k}.\mathbf{r}-\omega t)}$

Pero ahora, tanto el vector de propagación como el índice de refracción son complejos:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2(1+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon})$$

$$\tilde{n} = \tilde{k}\frac{c}{\omega} \qquad \tilde{n}^2 = \epsilon_r\mu_r(1+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon})$$

La parte imaginaria de la permitividad es precisamente el cociente entre la (densidad de) corriente de conducción (**J**) y de desplazamiento (**∂D/∂**t)

$$\frac{\mathbf{J}}{\partial\mathbf{D}/\partial t} = \frac{\sigma\mathbf{E}}{-i\omega\epsilon\mathbf{E}} = \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}$$

$$\tilde{k} = \beta + i\alpha \qquad \tilde{n} = n + i\kappa$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}+1\right)} \qquad n = \sqrt{\frac{\epsilon_r\mu_r}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}+1\right)}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}-1\right)} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{\epsilon_r\mu_r}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}-1\right)}$$

Donde n es índice de refracción normal y κ el índice de absorción

El campo eléctrico (magnético) de la onda vendrá dada por:

$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \mathbf{B}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

α la constante de atenuación

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

β es la constante de propagación (determina la longitud de onda, la velocidad de propagación, índice de refracción

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad v = \frac{\omega}{\beta}; \quad n = \frac{c\beta}{\omega}$$

La amplitud de la onda disminuye a 1/e de la inicial en una distancia $z = 1/\alpha$.
La intensidad ($\sim E^2$) lo hace en $1/2\alpha$. 2α = COEFICIENTE DE ATENUACION
α: Es una medida de lo que penetra una onda en un conductor.

Vamos a ver que implica que el vector de propagación se complejo.

$$\tilde{k} = \beta + i\alpha \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}+1\right)$$

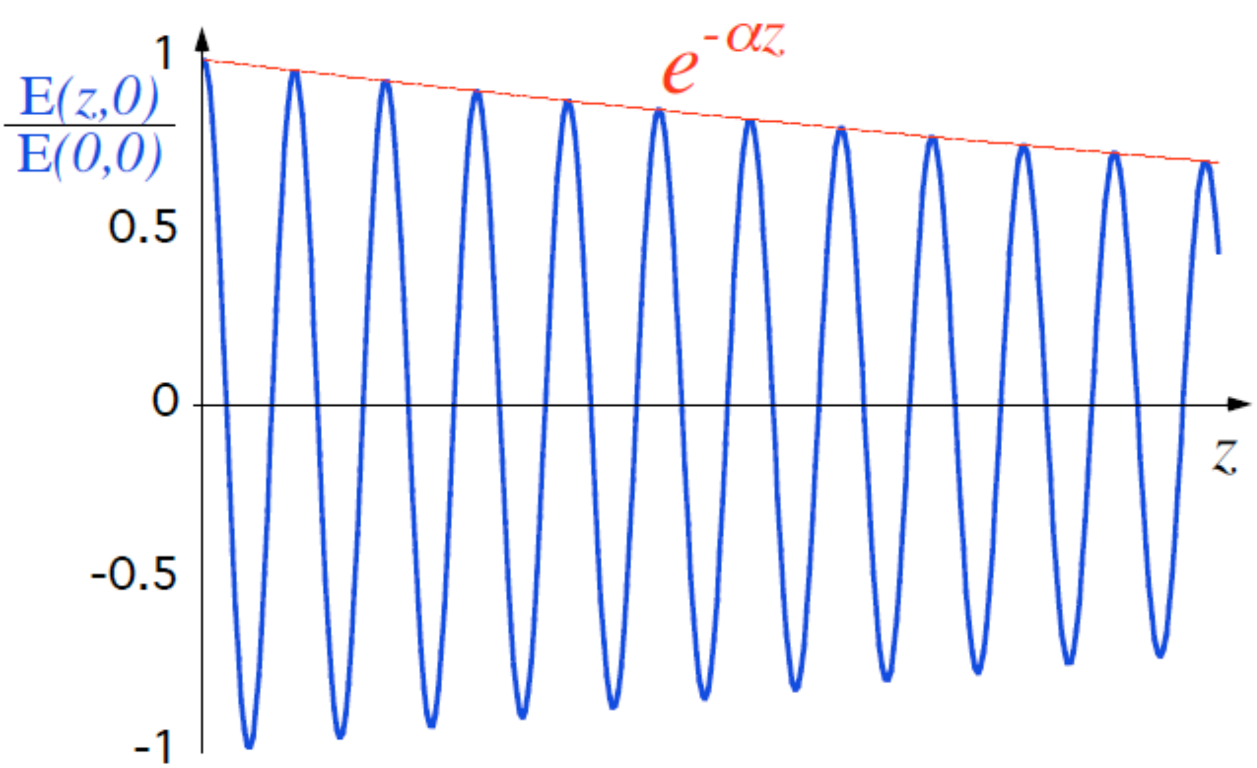
$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \alpha = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}-1\right)$$

Vamos a considerar dos casos limite:

a) Malos conductores o dieléctricos imperfectos $\sigma/\epsilon\omega << 1 \qquad \alpha \rightarrow 0 \qquad \tilde{k} \approx \beta$

$$\tilde{k} \approx \boxed{\beta} \approx \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v}$$

Como en dieléctricos perfectos, pero no podemos despreciar la atenuación por completo



$$\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \rightarrow \boxed{\alpha} \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

α es pequeña e independiente de la frecuencia

La propagación es como en dieléctricos, salvo por una pequeña atenuación. E y B están en fase y la energía eléctrica y magnética son casi iguales

$$\tilde{k} = \beta + i\alpha \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}+1\right)}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \alpha = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}-1\right)}$$

b) Buenos conductores, metales $\sigma/\epsilon\omega >> 1$

$$\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \pm 1 \approx \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \rightarrow \boxed{\alpha \approx \beta} \approx \omega\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

La atenuación es muy fuerte, y los campos están confinados en una película o piel cerca de la superficie, a este fenómeno se llama "efecto pelicular" (skin effect).

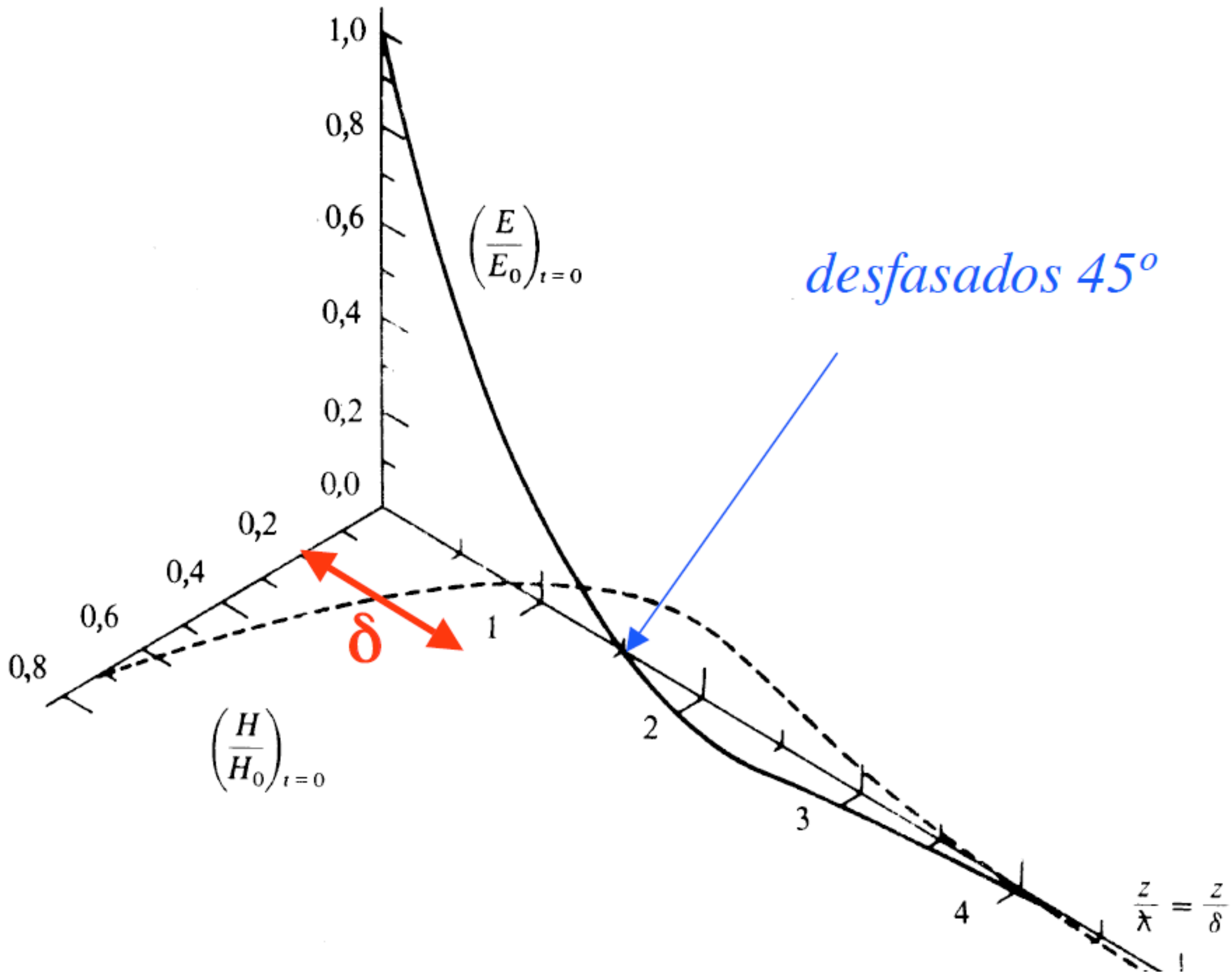
La profundidad de penetración, es la distancia para la cual el valor del campo disminuye en 1/e es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

*Relación entre los módulos y fase entre **E** y **B***

$$\mathbf{B} = \frac{\tilde{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \qquad \tilde{k} = \beta + i\alpha = (1+i)\alpha \rightarrow \tilde{\mathbf{k}} = (\sqrt{\omega\sigma\mu})e^{i\frac{\pi}{4}}\hat{u}_z$$

E y B están desfasados 45° y la relación entre sus módulos es:



$$B = \frac{k}{\omega} E \approx \frac{\sqrt{\omega\sigma\mu}}{\omega} E = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\omega}} E$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

Para el Cu: $\sigma = 5.8x10^7$

$\delta = 1cm \quad f = 50Hz$
$\delta = 2mm \quad f = 10^3 Hz$
$\delta = 0.5mm \quad f = 1.5 \times 10^4 Hz$
$\delta = 10^{-4} cm \quad f = 10^{10} Hz$

¡En un buen conductor la energía magnética es mucho mayor que la eléctrica!

Ejemplo: 2.15; 2.16

$$u_{magn} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega}E^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega\epsilon}(\epsilon E^2) >> \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

Propagación de ondas en la ionosfera: (problema 2.16)

Ionosfera: región superior de la atmósfera (≈ 50 y 1000 Km). La radiación ultravioleta del Sol produce una ionización suficiente para interferir con la propagación de las ondas electromagnéticas. En la ionosfera la conductividad se debe a los electrones libres cuya densidad crece primero con la altura para después decrecer, distribuyéndose en capas. La altura y la intensidad de la ionización depende de la hora del día, de las estaciones, de los ciclos de manchas solares etc. La densidad media de electrones es de $10^{11}/m^3$ $(10^{10}$-10^{12} $/m^3)$.

Ecuación de movimiento de los electrones (si v<<c, solamente fuerza eléctrica) en un campo eléctrico E(t):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE(t) = qE_0\cos\omega t = qRe[E_0e^{-i\omega t}]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m}E_0e^{-i\omega t}$$

$$x = x_0e^{-iwt} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{q}{m}E_0e^{-iwt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{i}{\omega}\frac{q}{m}E(t)$$ velocidad de los electrones

$$J(t) = Nev(t) = Ne\frac{dx}{dt} = \frac{iNe^2}{\omega m}E(t) = \sigma E(t)$$ densidad de corriente

Ejemplo: Propagación de ondas en la ionosfera

La conductividad del medio es compleja: $$\sigma = \frac{iNe^2}{\omega m}$$

La constante de propagación de onda en un medio conductor es:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon})$$

$\epsilon :$ la permitividad del gas ionizado o (plasma)

$\mu :$ la permeabilidad del gas ionizado o (plasma)

Por lo tanto, sustituyendo el valor de la conductividad de la ionosfera:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}) = \mu\epsilon\omega^2(1 - \frac{Ne^2}{\omega^2\epsilon m}) = \mu\epsilon\omega^2(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$$

donde la frecuencia del plasma que representa la frecuencia de oscilación del conjunto de electrones e iones vale:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon m}$$

Para frecuencias de ondas electromagnéticas menores que la frecuencia del plasma, la constante de propagación es imaginaria pura, por lo tanto, da lugar a una atenuación de la onda sin propagación.

Las ondas de baja frecuencia se reflejan en la ionosfera, lo que permite escuchar emisoras de las antípodas por reflexiones sucesivas, pero no comunicarse con satélites.

Ejemplo: Propagación de ondas en la ionosfera

Para frecuencias de ondas electromagnéticas mayores que la frecuencia del plasma, la constante de propagación es real y las ondas se propagan sin atenuación, con una velocidad de fase:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \approx \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

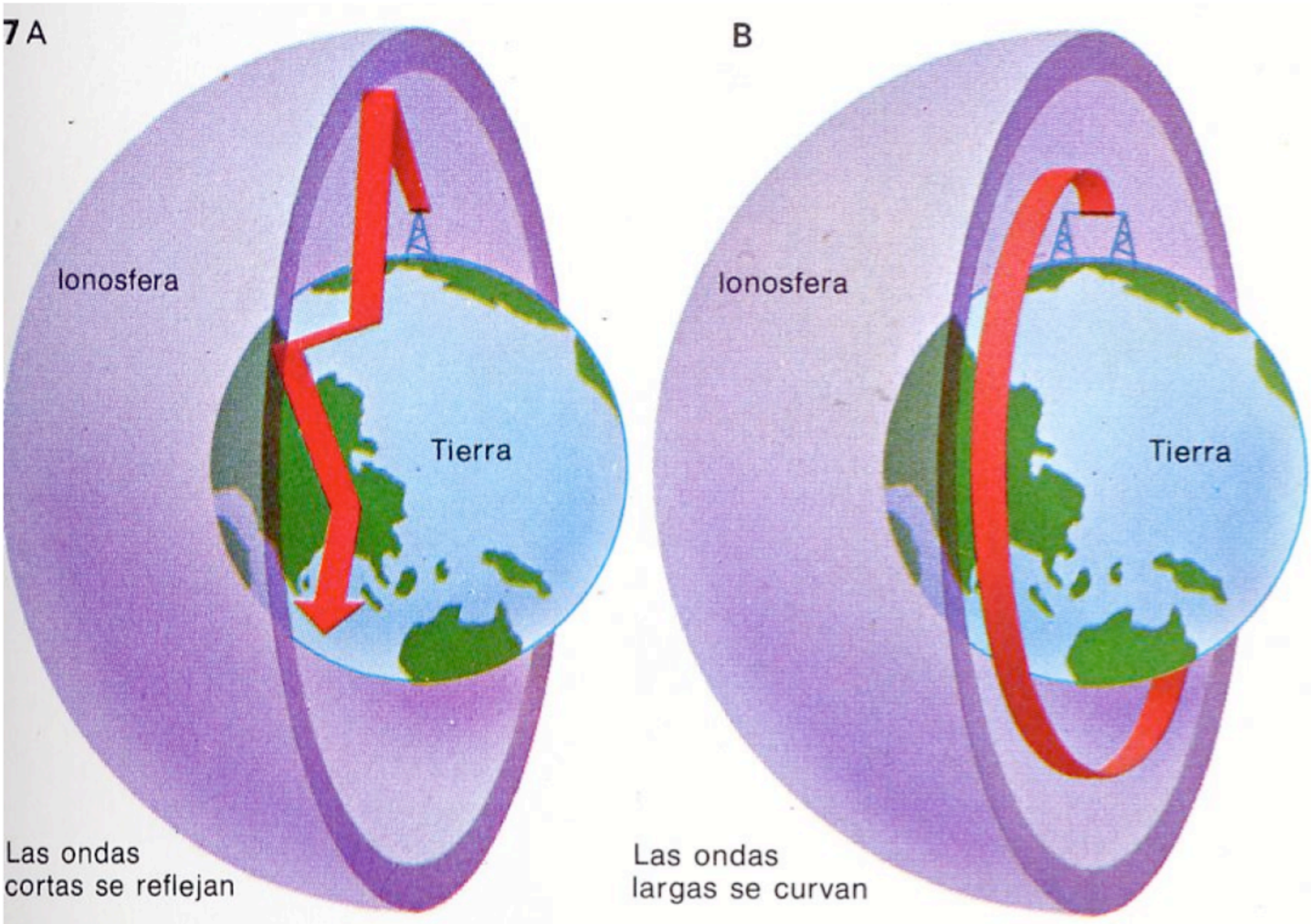
Para la ionosfera (N $\approx 10^{11}$ m^{-3}): $f_p = \omega_p / 2\pi \approx 3MHz$

En la región de descarga eléctrica (N $\approx 10^{15}$ m^{-3}): $f_p \approx 10^4 MHz = 10GHz$

En un metal (N $\approx 10^{28}$ m^{-3}): $f_p \approx 10^{15} Hz$ (en la región del ultravioleta)

Ondas de radio: FM ($\approx$100MHz) propagación sin atenuación

Ejemplo: Propagación de ondas en la ionosfera



$$\omega < \omega_p \qquad f \leq 3MHz$$

2.- Ondas electromagnéticas en medios ilimitados:

2.1.- Propagación del campo EM: La ecuación de ondas. Ondas planas en el vacío [RMC § 16.4]

2.2.- Ondas planas monocromáticas en dieléctricos, Polarización [RMC § 16.5-17.1-17.2]

2.3.- Ondas planas en conductores: índice de refracción complejo, efecto pelicular [RMC §17.4]

2.4.- Energía y momento en el campo EM. Presión de la radiación, vector de Poynting complejo [RMC § 16.3 -17.3] [FLS § 27.6]

leyes de conservación

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\int_S \mathbf{J}.d\mathbf{a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla.\mathbf{J}$$

Conservación de la carga

$$\frac{d\ (U_{mec} + U_{em})}{dt} = -\oint_S \mathbf{S}.d\mathbf{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{mec} + u_{em}) = -\nabla.\mathbf{S}$$

Conservación de la energía

$$\frac{d(\mathbf{p_{mec}} + \mathbf{p_{em}})}{dt} = \oint \mathbf{T}d\mathbf{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p_{mec}} + \mathbf{p_{em}}) = \nabla.\mathbf{T}$$

Conservación del momento

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\frac{dU_T}{dt} = \frac{d(U_M + U_{EM})}{dt} = -\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\frac{dU_M}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

$$U_{EM} = \int_V \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_M + \vec{p}_{EM})_i = \oint_S \sum_j T_{ij} n_j da$$

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\left[\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}\right] \delta_{ij}$$

$$\frac{d\vec{p_M}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

$$\vec{p}_{EM} = \epsilon_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int_V g_{\vec{EM}} dV$$

$$\vec{g}_{EM} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Energía y momento en el campo EM

Si no hay transferencia de energía a cargas: **vacío**

$$\frac{d}{dt}\int_v U_{em} = -\oint_S \mathbf{S}.d\mathbf{a}$$

Conservación de la energía

La variación de energía electromagnética en un volumen es igual a la variación de flujo de energía a través de una superficie cerrada

$$u_{em} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)$$

energía por unidad de volumen

En ondas planas: $B^2 = \frac{E^2}{c^2} = \mu_0\epsilon_0 E^2$

La contribución a la energía EM del campo eléctrico y magnético son iguales.

Si los campos eléctrico y magnético se puede expresar como:

$$E = E_0\cos(kz - \omega t + \delta)$$

$$B = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t + \delta)$$

$$u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2\cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

La densidad de energía electromagnética

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

Densidad de flujo de energía (Energía por unidad de área y de tiempo)

En ondas planas propagándose en la dirección z:

$$\mathbf{S} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)\hat{z} = cu\hat{z}$$

densidad de energía por velocidad de fase

Las ondas EM no solo llevan **energía** sino que también llevan **momento**

$$\mathbf{g_{em}} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

densidad de momento almacenado en los campos

En ondas planas propagándose en la dirección z:

$$\mathbf{g_{em}} = \frac{1}{c}\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)\hat{z} = \frac{u}{c}\hat{z}$$

Lo que nos interesa son los valores **promedio en el tiempo** :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kz - \frac{2\pi}{T}t + \delta)dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 \hat{u} \qquad I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2$$

$$\langle \mathbf{g_{em}} \rangle = \frac{1}{2c}\epsilon_0 E_0^2 \hat{u}$$

Presión de la radiación

La onda electromagnética ejercerá una presión, P, sobre una superficie:

La transferencia de momento, $\mathbf{p_{em}}$, de la radiación EM a una superficie, A, en un intervalo de tiempo, t, será (en incidencia normal a la superficie):

$$\Delta \mathbf{p_{em}} = \langle \mathbf{g_{em}} \rangle A c \Delta t$$

La presión dependerá de si estamos en un absorbente o en un reflectante :

Si estamos un un absorbente perfecto, todo el momento será transferido a la superficie: :

$$P = \frac{1}{A}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = u_{em}$$

En un reflectante perfecto, la presión será doble, ya que el momento cambia de dirección, en lugar de ser absorbido:

$$P = 2u_{em}$$

Ejemplo: problema 2.5

radiómetro de Crookes

Velero solar. Cosmos

The Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA)   IKAROS project

Ejemplo: problema 2.6

Particle levitation and guidance in hollow-core photonic crystal fiber

F. Benabid, J. C. Knight, P. St. J. Russell
Optoelectronics Group, Department of Physics, University Of Bath,
Claverton Down, Bath BA27AY, U.K;

21 October 2002 / Vol. 10, No. 21 / OPTICS EXPRESS 1203

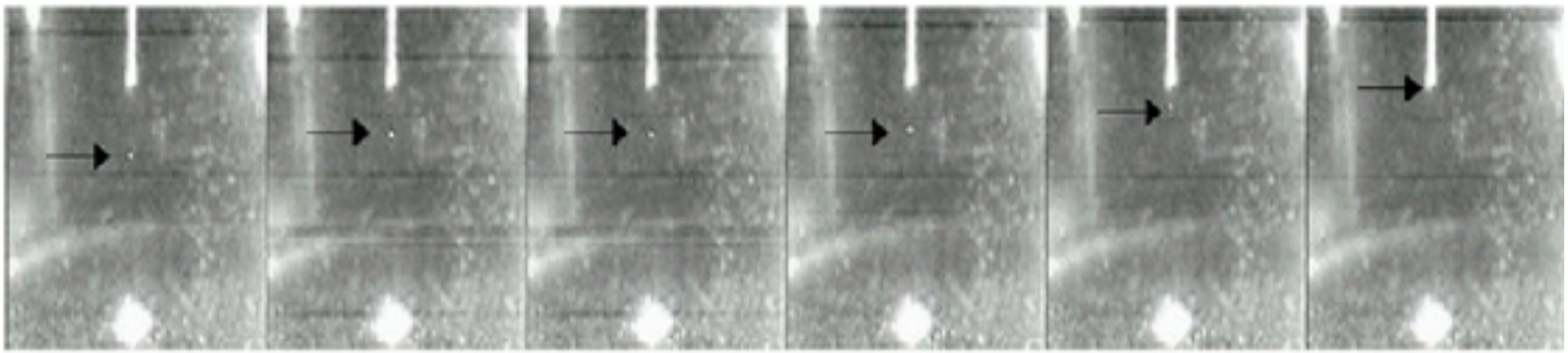
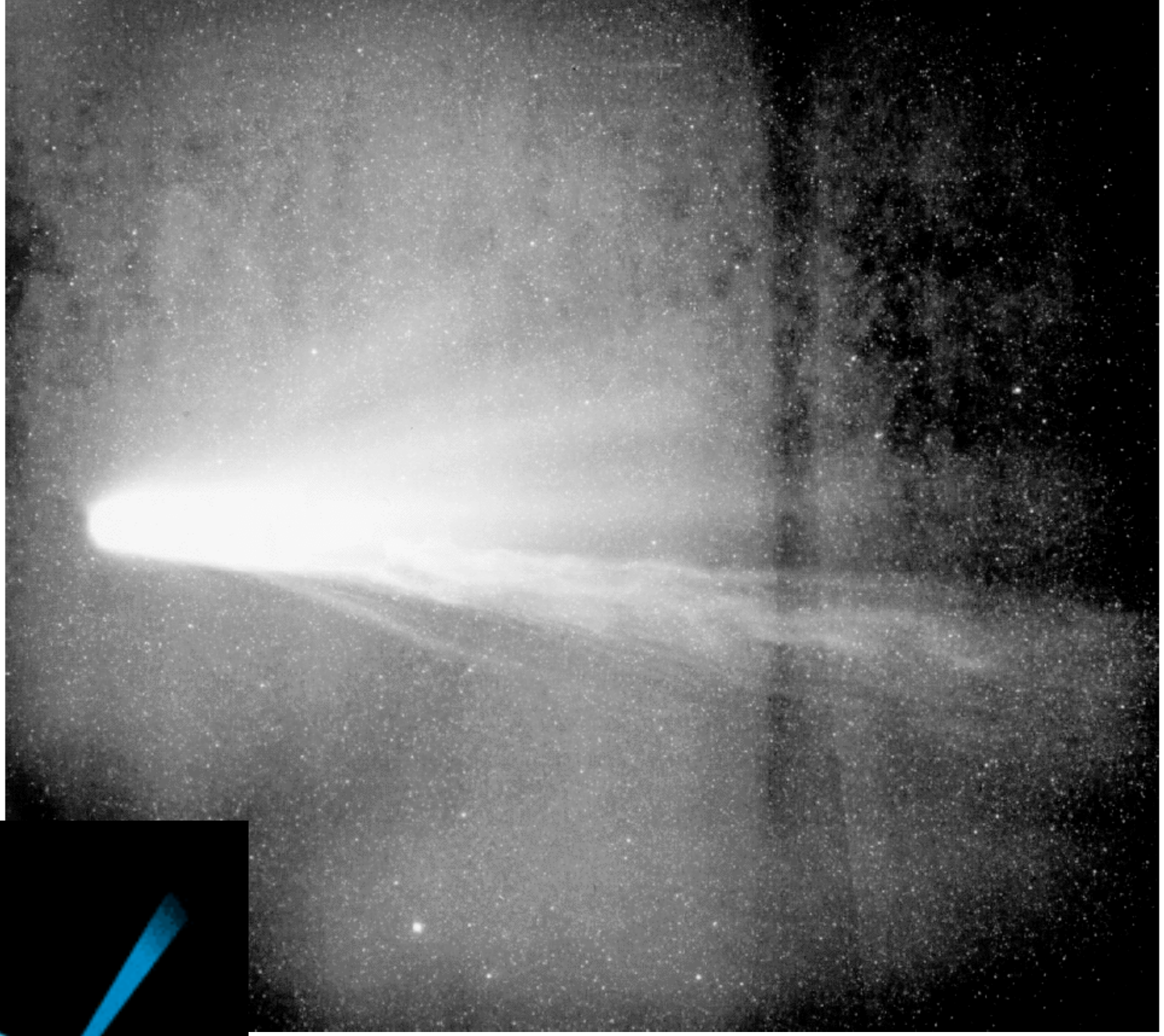


Fig. 4. A sequence of a polystyrene particle (pointed out by an arrow) being levitated. The time spacing between consecutive frames is 67 ms, and each frame corresponds to a captured scene size of 2.5x2.5 mm^2. The sequence is extracted from the movie (2.24 MB) (see fig. 5) of levitated particles and coupled to the fiber.

Ejemplo: problema 2.7, 2.10

Cometa Halley



Vector de Poynting complejo. Caso general

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$$

Campos electromagnéticos de frecuencia, ω

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = Re[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \times Re[\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$$

Vector de Poynting

La parte real de un número complejo $Re[\tilde{Z}] = \frac{1}{2}(\tilde{Z} + \tilde{Z}^*)$

$$u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

densidad de energía electromagnética en un medio lineal

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].Re[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{4}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})e^{+i\omega t}].[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{D}}^*(\mathbf{r})e^{+i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{4}[\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}] + \frac{1}{4}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}^*(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t).\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}]$$

Valor medio

Término oscilante de frecuencia 2ω

Si estamos interesados en el valor medio basta tomar la parte espacial, pues el término temporal desaparece:

$$\langle \mathbf{E}.\mathbf{D} \rangle = \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}).\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})]$$

El promedio temporal de la densidad de energía electromagnética vendría dada por:

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4}Re[\tilde{\mathbf{D}}^*.\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{B}}^*.\tilde{\mathbf{H}}]$$

De igual manera el vector de Poynting queda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}]$$

Valor medio

Término oscilante de frecuencia 2ω

$$< \mathbf{S} >= \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2\mu_0}Re[\tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{B}}]$$

promedio temporal

Ejemplo: El campo eléctrico de una onda electromagnética linealmente polarizada es:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{-i(kz-wt)}\mathbf{u_x} + 2E_0 e^{-i(kz-wt-\phi)}\mathbf{u_x}$$

a) Calcular el campo magnético, H
b) Calcular el vector de Poynting S y su valor medio

Solución: $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$ $\qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{k}{\omega\mu}[E_0 e^{-i(kz-wt)}\mathbf{u_y} + 2E_0 e^{-i(kz-wt-\phi)}\mathbf{u_y}]$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = [Re(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t})] \times [Re(\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t})]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}]$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu}E_0^2(5+4\cos\phi) + \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu}E_0^2[\cos(2\omega - kz) + 4\cos 2(\omega - kz + \phi) + 4\cos 2(\omega - kz + \frac{\phi}{2})]$$

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu}E_0^2(5+4\cos\phi)$$