

### 3.-Ondas electromagnéticas en medios limitados:

3.0.- Condiciones de contorno de las ondas EM [RMC, § 16.6]

3.1.- Reflexión y refracción de las ondas EM, fórmulas de Fresnel. [RMC, § 18.4][LC § I2.1-I2.2]

3.2.- Propagación de ondas guiadas: líneas de transmisión, modos TEM [FLS § 22.6-24.1]

3.3.- Guías de onda rectangulares: modos TE, frecuencia de corte [FLS § 24.2-24.3-24.4-24-8] [RMC, § 18.7]

3.4.- Cavidades resonantes. [FLS § 23.2-23.3] [RMC, § 18.8]

# Ecuaciones de Maxwell dinámicas

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{ley de Gauss}$$

Medios lineales

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere con la corrección de Maxwell}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

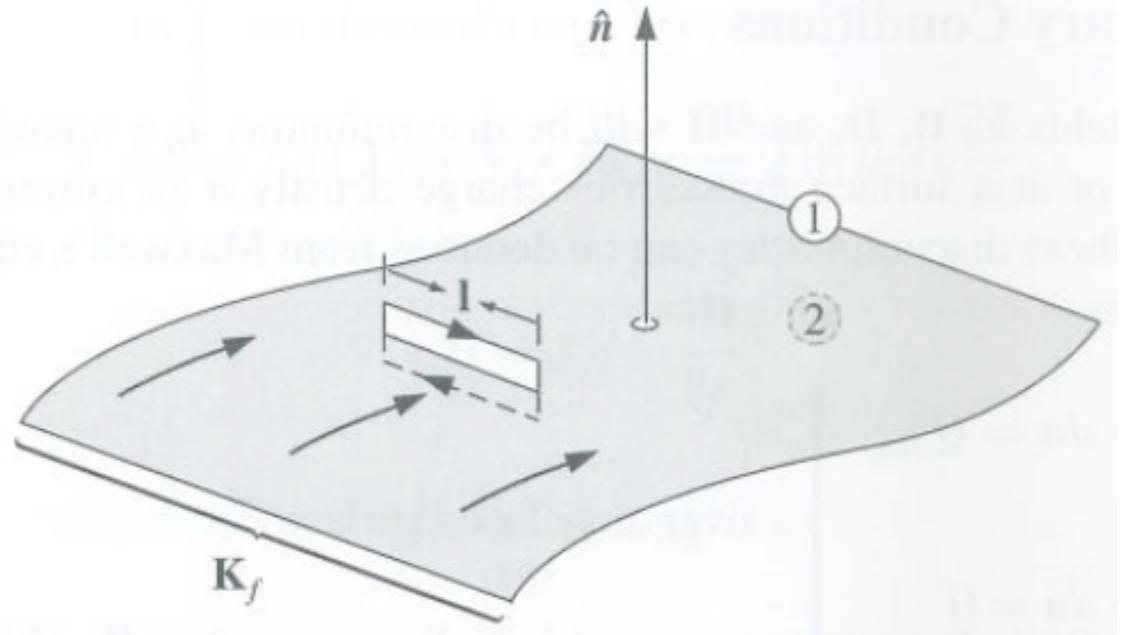
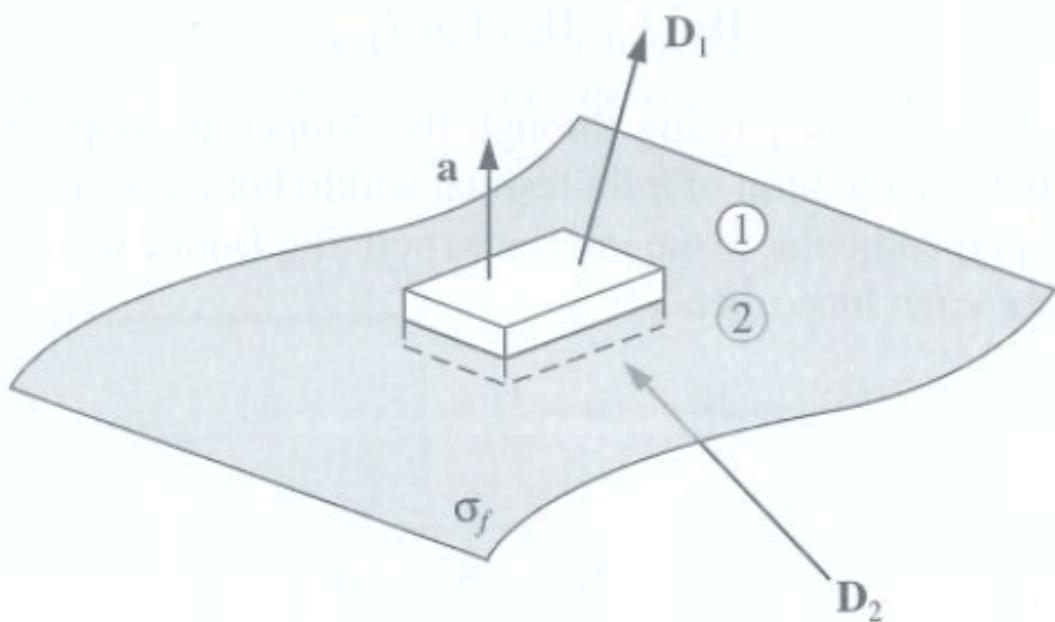
Una diferencia que hemos encontrado es que el campo Electrostático no penetra en los conductores mientras que las ondas electromagnéticas penetran una distancia:  $\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$

El campo magnético y las corrientes penetran la misma distancia.

El caso electrostático solo se encuentra para  $\sigma = \infty$  (conductores “perfectos”)

¿Cuales son las condiciones de contorno?

# Condiciones de contorno en electrodinámica



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{fenc}$$

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a} = \sigma_f a$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$$

$$\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \rho_s$$

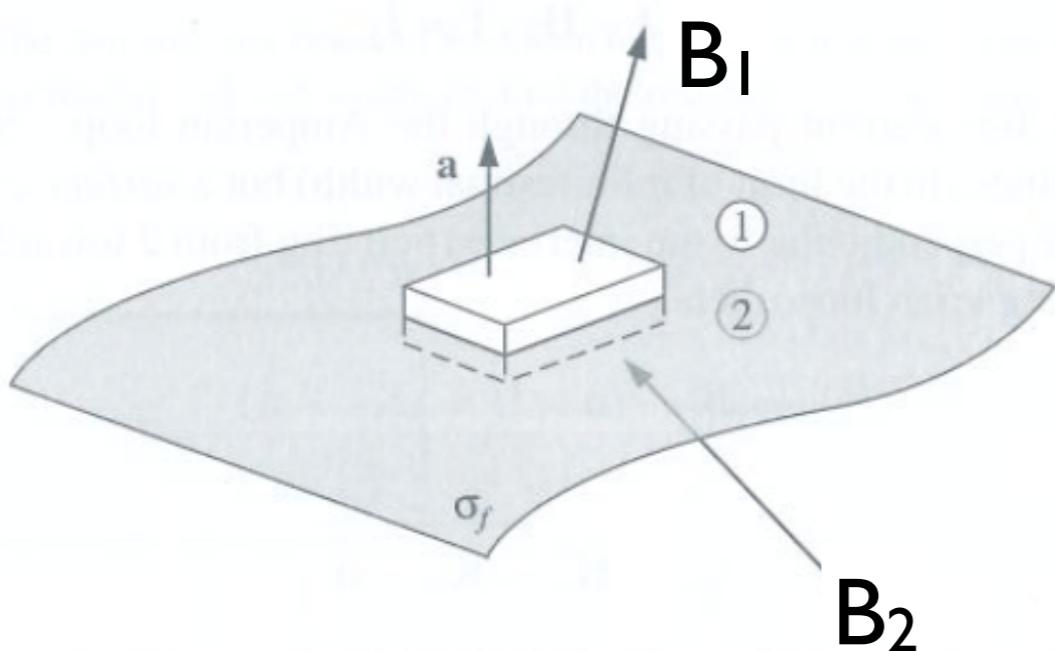
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

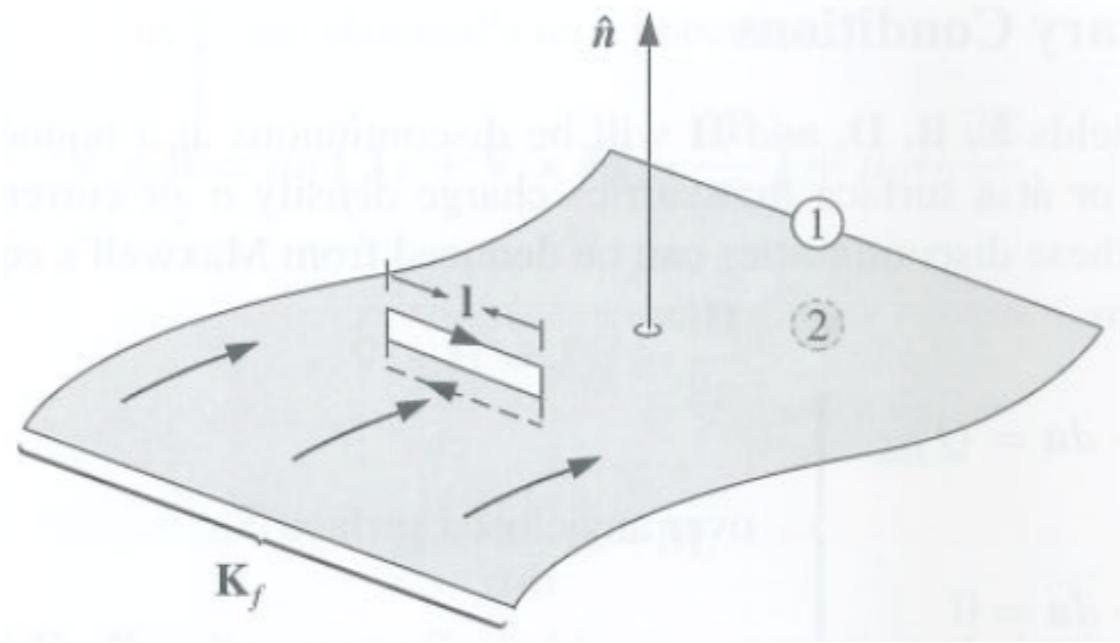
# Condiciones de contorno en electrodinámica



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{fenc} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{fenc}$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{t1} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

## Condiciones de contorno en electrodinámica

Caso general:  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \infty$

Vamos a re-escribir esta condición de contorno en función de  $\sigma$   $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

Como:  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \rightarrow \epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \rho_s$  (1)  $D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$

En ondas electromagnéticas, el campo, la densidad de corriente y de carga son proporcionales a:  $\propto e^{-i\omega t}$   $(\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega)$

La ecuación de continuidad es:  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = i\omega \rho_v$

Las condiciones de contorno para  $\mathbf{J}$  son:  $J_{1n} - J_{2n} = i\omega \rho_s$

Como:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \rightarrow \sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = i\omega \rho_s$  (2) Caso general

Haciendo uso de (1) y (2):

$$(\epsilon_2 - \frac{\sigma_2}{i\omega}) E_{2n} = (\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{i\omega}) E_{1n}$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

Casos particulares: a)  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  dieléctricos perfectos  $\rho_s = 0$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

b)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \infty$  conductor perfecto  $\rho_s = 0$

$$D_{n1} = D_{n2}$$

c)  $\sigma_2 = \infty$   $\rho_s \neq 0$   $E_{t1} = E_{t2} = 0$   $E_{n2} = 0$   $\epsilon_1 E_{n1} = \rho_s$

## Condiciones de contorno en electrodinámica

Caso general:  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \infty$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{re-escribir:} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} - i\omega\epsilon \mathbf{E} \quad \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon) \mathbf{E}$$

$$H_{t1} - H_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$

condición de contorno

Casos particulares:

I. Dieléctricos perfectos  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$   $\mathbf{K}_f \times \hat{n} = 0$   $H_{t1} = H_{t2}$   $B_{n1} - B_{n2} = 0$

2. Un medio es conductor perfecto  $\sigma_2 = \infty$   $\mathbf{K}_{f2} \times \hat{n} \neq 0$

$$E_{2n} = 0 \quad E_{2t} = 0 \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\nabla \times \mathbf{H}_2}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega \right)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_2}{-i\omega} = 0 \rightarrow \mathbf{H}_2 = 0 \rightarrow H_{2t} = 0; \quad H_{1n} = H_{2n} = 0$$

$$H_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

# Condiciones de contorno en electrodinámica

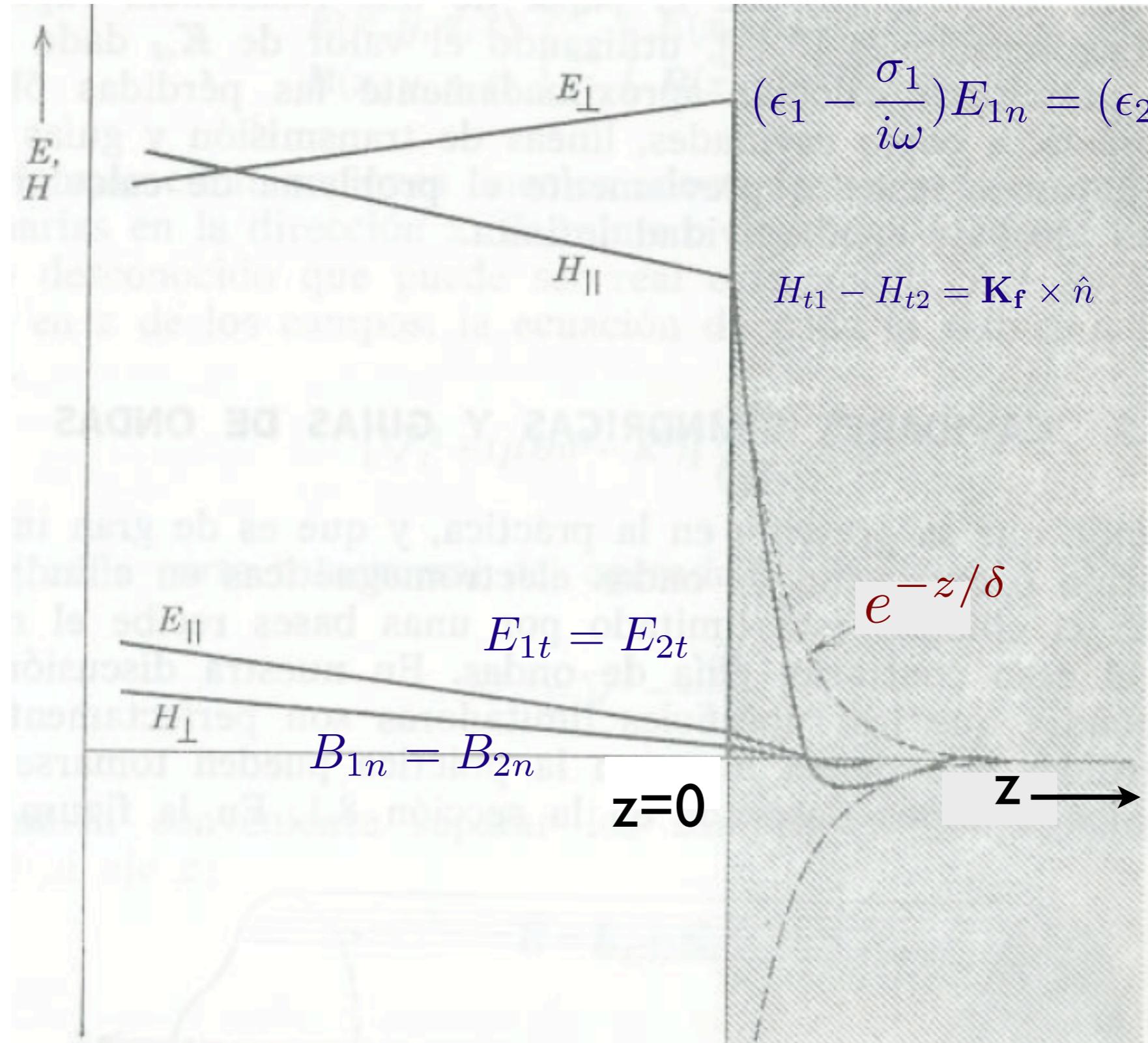
$\sigma_1/\sigma_2$	$E_t$	$D_n$	$H_t$	$B_n$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{t1} = H_{t2}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$\sigma_2 = \infty$	$E_{1t} = E_{2t} = 0$	$D_{1n} = \rho_s$ $D_{2n} = 0$	$H_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$ $H_{2t} = 0$	$B_{1n} = B_{2n} = 0$
$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \infty$	$E_{1t} = E_{2t}$	$(\epsilon_2 - \frac{\sigma_2}{i\omega})E_{2n} =$ $= (\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{i\omega})E_{1n}$	$H_{t1} - H_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$	$B_{1n} = B_{2n}$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  Dieléctricos perfectos

$\sigma_2 = \infty$  Uno de los medio es un conductor perfecto

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \infty$  El caso más general

# Campos en las cercanías de un buen conductor, aunque no perfecto



$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

### **3.-Ondas electromagnéticas en medios limitados:**

3.0.- Condiciones de contorno de las ondas EM [RMC, § 16.6]

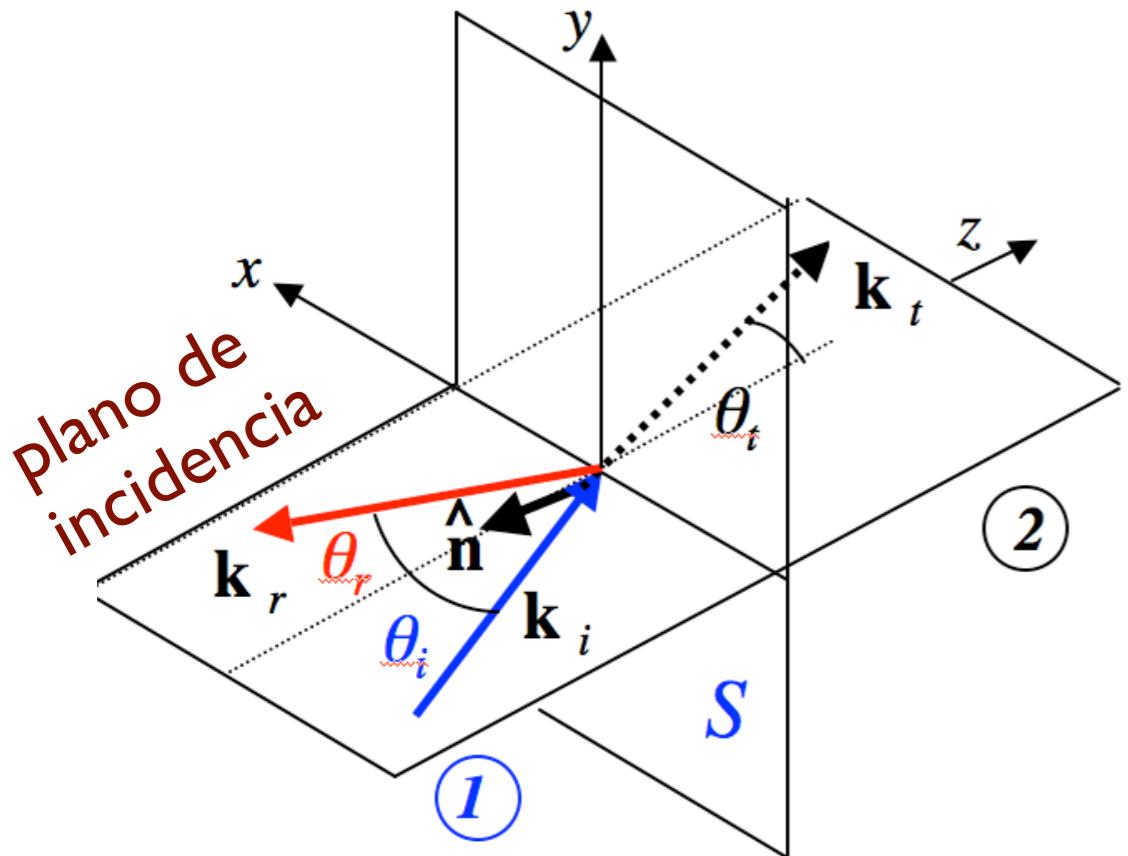
**3.1.- Reflexión y refracción de las ondas EM, fórmulas de Fresnel. [RMC, § 18.4][LC § I2.1-I2.2]**

3.2.- Propagación de ondas guiadas: líneas de transmisión, modos TEM [FLS § 22.6-24.1]

3.3.- Guías de onda rectangulares: modos TE, frecuencia de corte [FLS § 24.2-24.3-24.4-24-8] [RMC, § 18.7]

3.4.- Cavidades resonantes. [FLS § 23.2-23.3] [RMC, § 18.8]

# Reflexión - Refracción de ondas electromagnéticas



## Condiciones de cinemática

Para cumplir las condiciones de contorno para todo  $(\mathbf{r}, t)$  la fase ha de ser la misma en todas las ondas:  $\omega_i = \omega_r = \omega_t; \quad \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$  en la interfase  $S$

$\mathbf{k}_i; \quad \mathbf{k}_r; \quad \mathbf{k}_t \quad \text{y} \quad \hat{n}$  son coplanares y definen el **plano de incidencia**

**reflexión**  $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \times \hat{n} = 0 \rightarrow k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r \rightarrow \theta_i = \theta_r$  ley de reflexión

**refracción**  $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \times \hat{n} = 0 \rightarrow k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$

incidente  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

reflejada  $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

transmitida  $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{\omega} \times \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}_r}{\omega} \times \mathbf{E}_r \quad k_i = k_r = k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$$

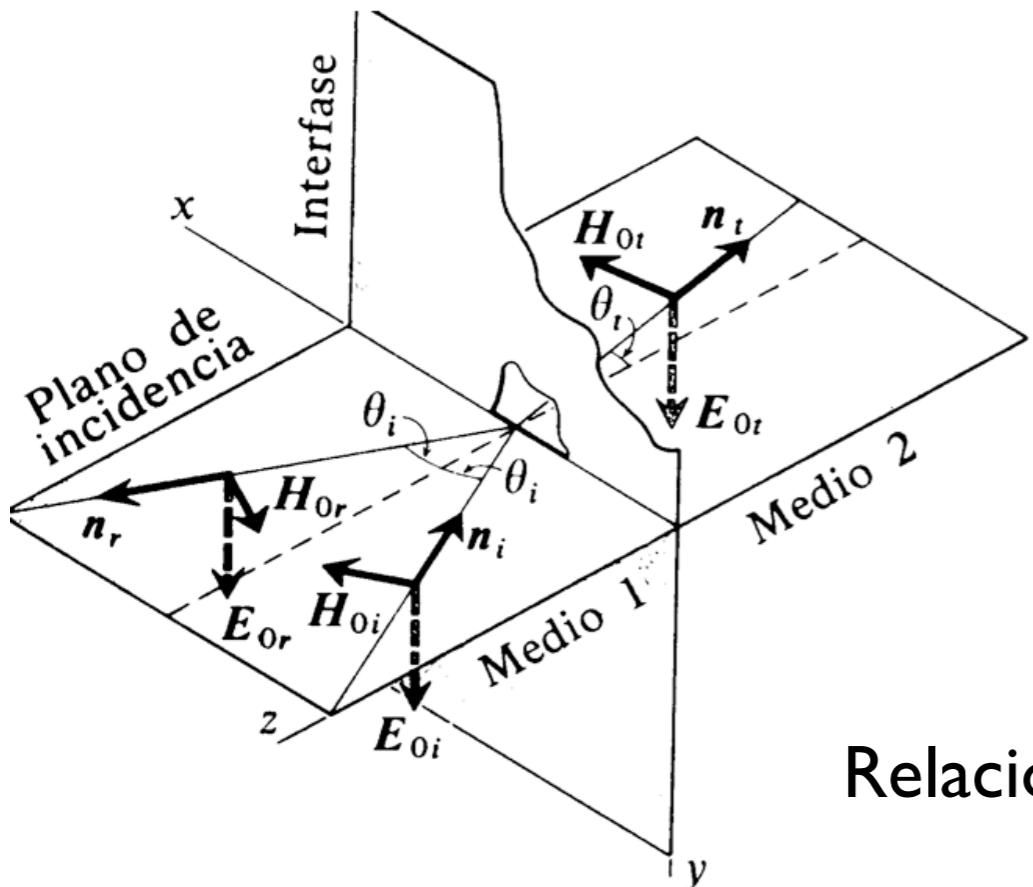
$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}_t}{\omega} \times \mathbf{E}_t \quad k_t = k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ley de snell o ley de refracción}$$

# Condiciones de dinámicas

a) E perpendicular al plano de incidencia

condiciones de contorno



$$1) \quad \mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$2) \quad \mathbf{H}_{0i} \cos \theta_i - \mathbf{H}_{0r} \cos \theta_i = \mathbf{H}_{0t} \cos \theta_t \quad H_{t1} = H_{t2}$$

Relación entre campo eléctrico y campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$$

De las ecuaciones 1) y 2'):

$$2') \quad \frac{k_1}{\omega \mu_1} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{k_2}{\omega \mu_2} E_{0t} \cos \theta_t$$

## Fórmulas de Fresnel

$$\left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}$$

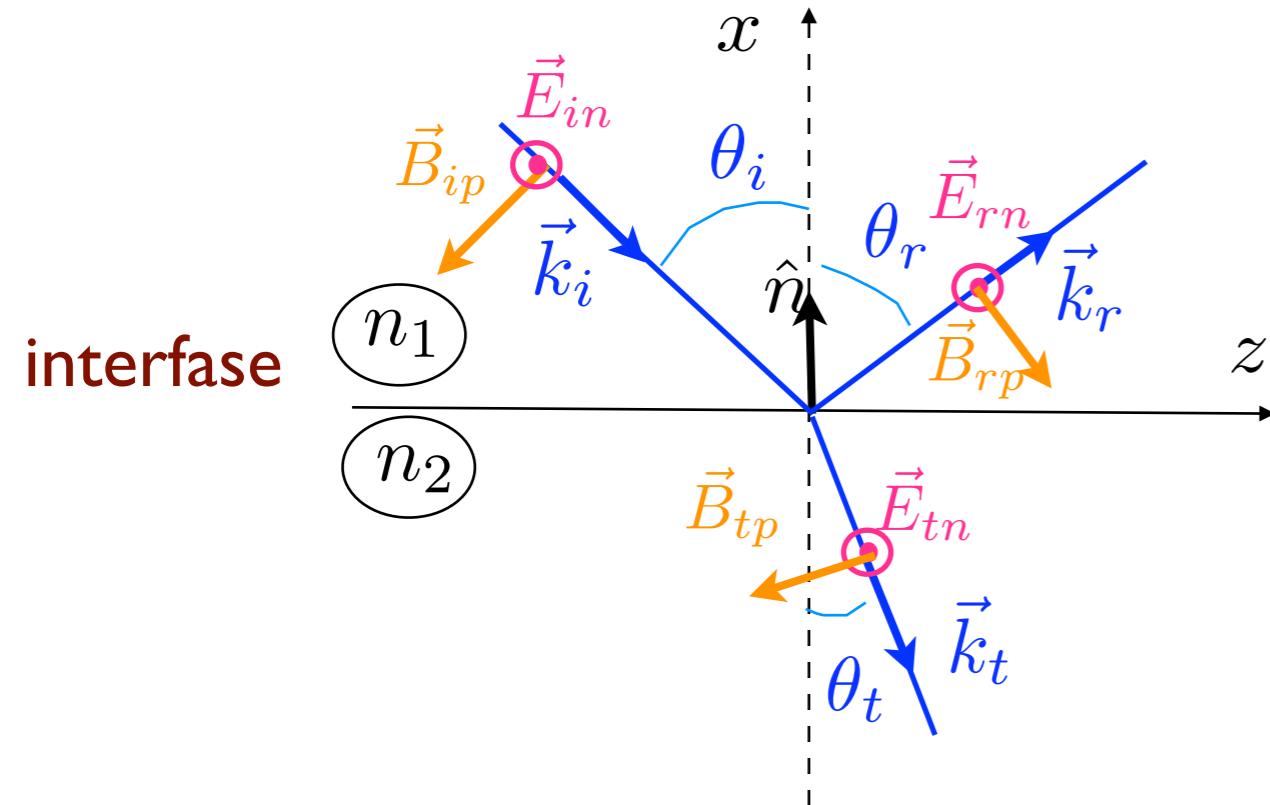
$$\left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = 1 + \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}$$

$$k_i = k_r = k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$$

$$k_t = k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

Caso particular: entre medios no magnéticos y no conductores:

a) onda polarizada con el vector **E** normal al plano de incidencia.



condiciones de contorno en la interfase

$$(1) \quad E_{t1} = E_{t2}$$

$$E_{in} + E_{rn} = E_{tn} \quad (1)$$

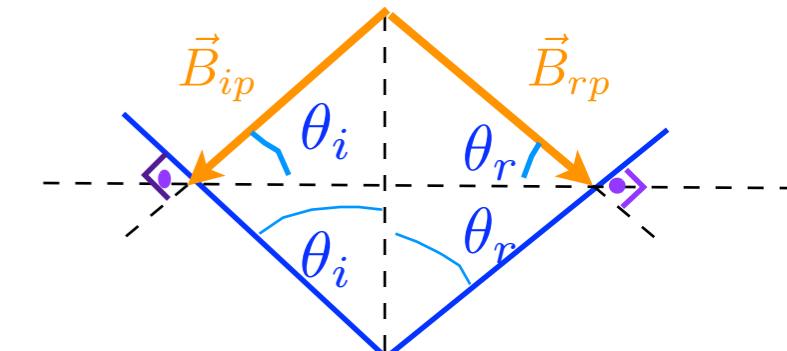
$$(2) \quad B_{t1} = B_{t2} \quad \text{no hay corrientes}$$

$$-B_{ip} \cos \theta_i + B_{rp} \cos \theta_r = -B_{tp} \cos \theta_t \quad (2)$$

$$\theta_i = \theta_r ; \quad \vec{B}_{1p} = \hat{k} \times \frac{\vec{E}_n}{v_1} = \hat{k} \times \frac{n_1 \vec{E}_n}{c}$$

$$\vec{B}_{2p} = \hat{k} \times \frac{\vec{E}_n}{v_2} = \hat{k} \times \frac{n_2 \vec{E}_n}{c}$$

$$(2) \rightarrow -\frac{n_1 E_{in}}{c} \cos \theta_i + \frac{n_1 E_{rn}}{c} \cos \theta_i = -\frac{n_2 E_{tn}}{c} \cos \theta_t$$



$$\rightarrow -\frac{n_1 E_{in}}{c} \cos \theta_i + \frac{n_1 E_{rn}}{c} \cos \theta_i = -\frac{n_2 E_{tn}}{c} \cos \theta_t$$

$E_{in} + E_{rn} = E_{tn} \quad (1)$



$\frac{E_{rn}}{E_{in}}$ 
 $\frac{E_{tn}}{E_{in}}$

$$(1), (2) \rightarrow n_1 E_{in} \cos \theta_i - n_1 E_{rn} \cos \theta_i = n_2 (E_{in} + E_{rn}) \cos \theta_t$$

$$E_{in} (n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t) = E_{rn} (n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)$$

### Fórmulas de Fresnel

$$\frac{E_{rn}}{E_{in}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$(\frac{E_r}{E_i})_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$(\frac{E_{0t}}{E_{0i}})_{\perp} = 1 + (\frac{E_{0r}}{E_{0i}})_{\perp}$$

$$(\frac{E_{0t}}{E_{0i}})_{\perp} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}$$

**Caso particular:** entre medios no magnéticos y no conductores:  
 a) onda polarizada con el vector **E** normal al plano de incidencia.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i - \cos \theta_t}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i + \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i + \cos \theta_t}$$

$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp > 0$  y real  $\rightarrow E_{0i}; E_{0t}$  estan en fase

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = 0.66 \rightarrow \theta_t < \theta_i \rightarrow \cos \theta_i < \cos \theta_t$$

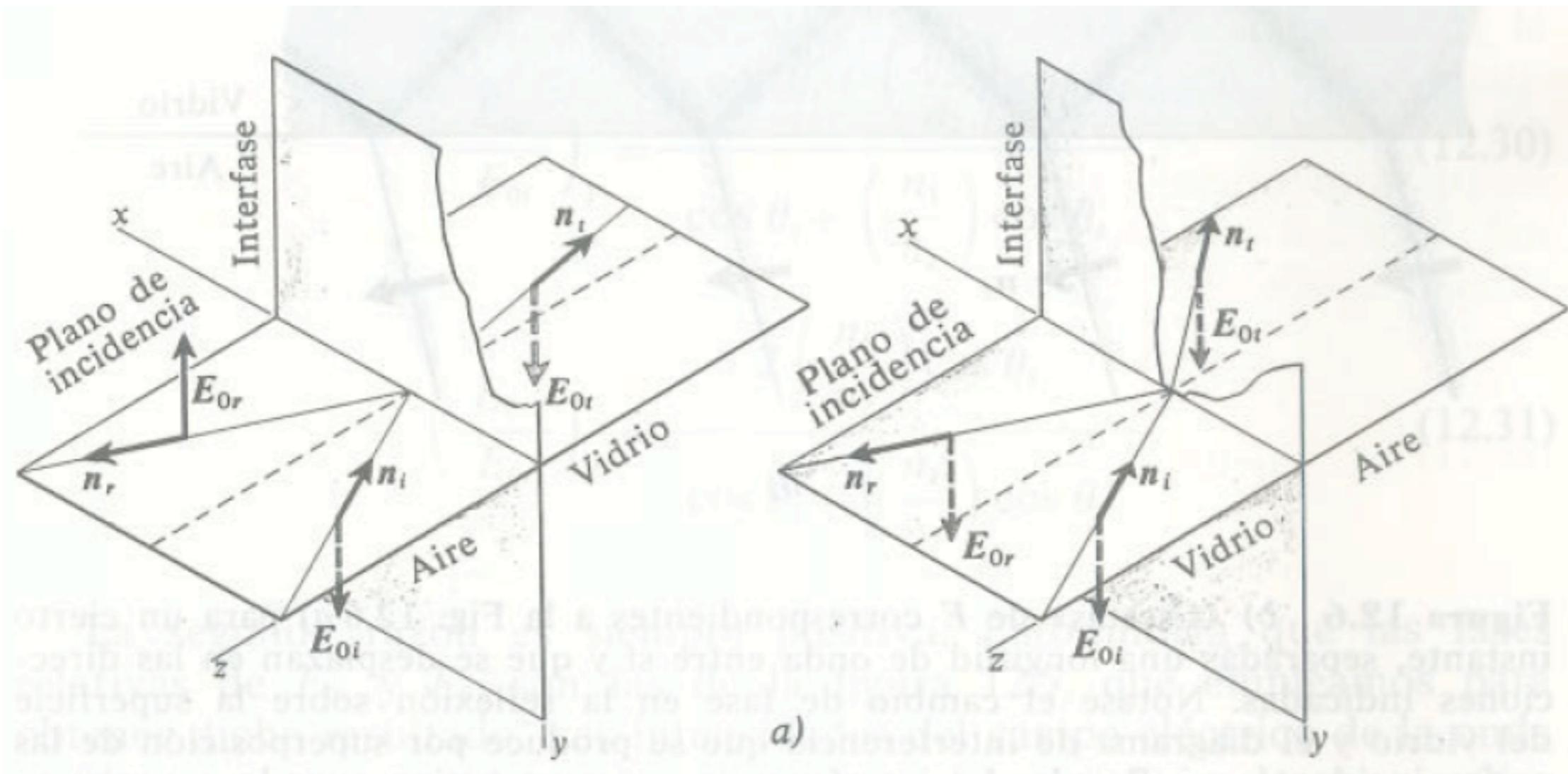
$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp < 0$  y real  $\rightarrow E_{0i}$  y  $E_{0r}$  están desfasadas  $\pm \pi$

depende de  $n_1/n_2$

a) onda polarizada con el vector **E** normal al plano de incidencia

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i - \cos \theta_t}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i + \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i + \cos \theta_t} > 0$$

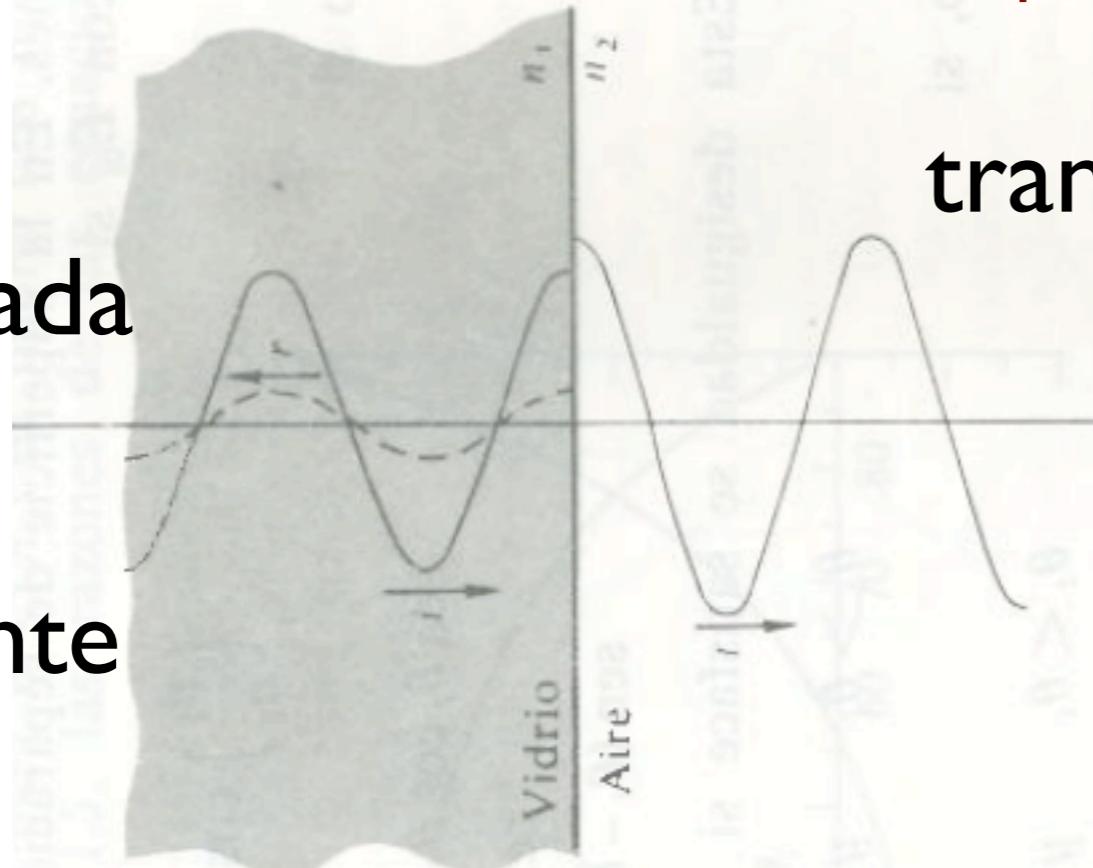


$$\frac{n_1}{n_2} < 1 \rightarrow \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp < 0$$

$$\frac{n_1}{n_2} > 1 \rightarrow \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp > 0$$

a) onda polarizada con el vector **E** normal al plano de incidencia en incidencia normal a la interfase

reflejada

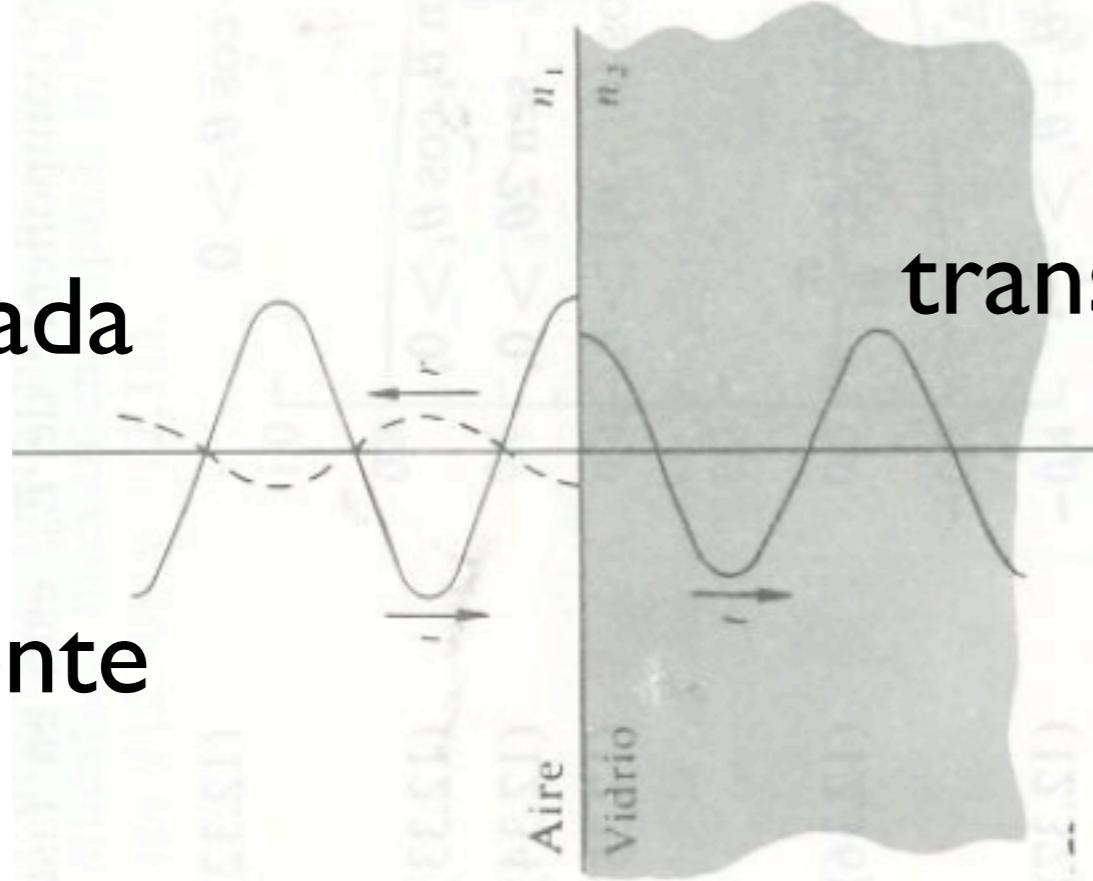


transmitida

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp > 0$$

$$\frac{n_1}{n_2} > 1$$

incidente



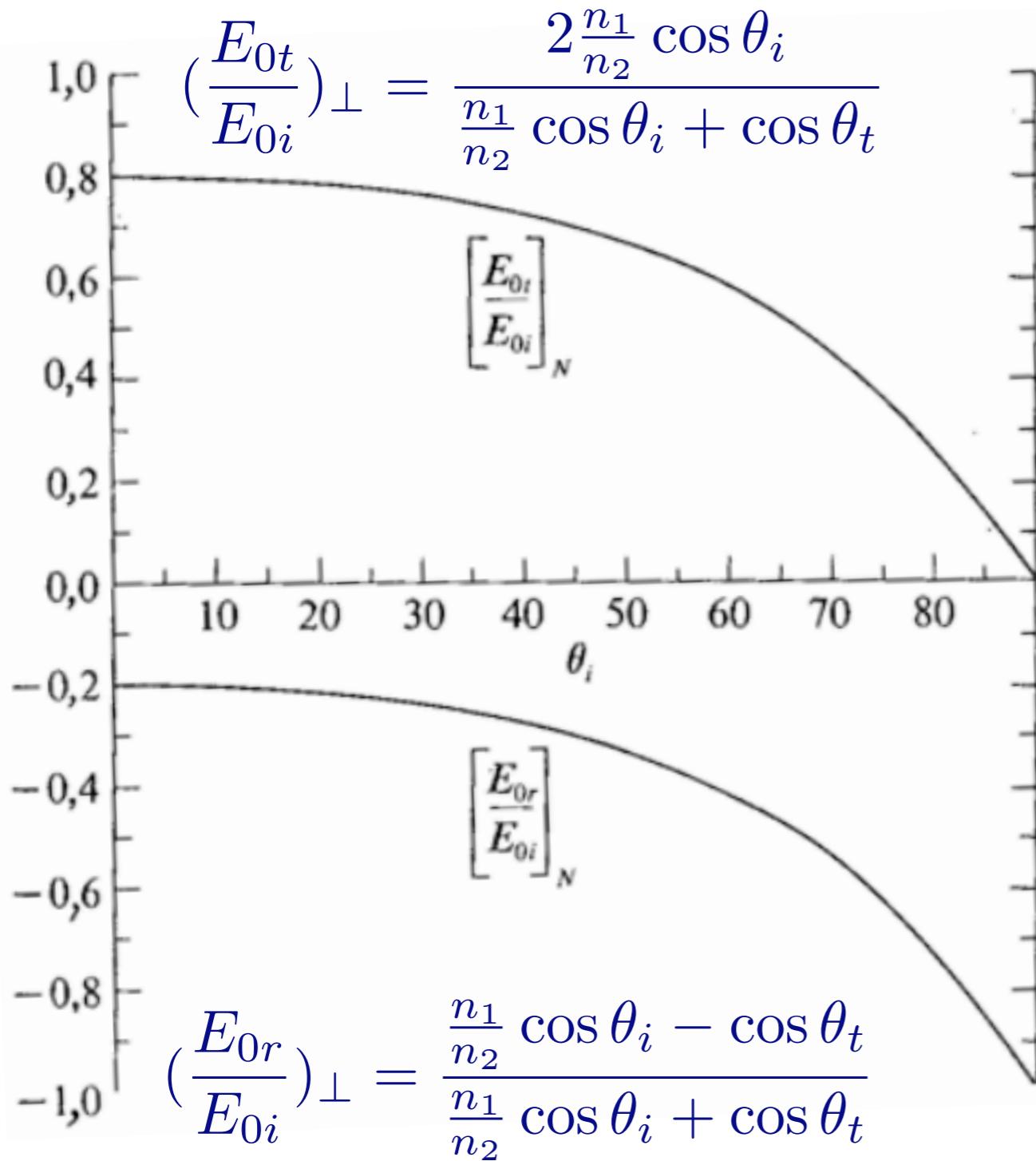
transmitida

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp < 0$$

$$\frac{n_1}{n_2} < 1$$

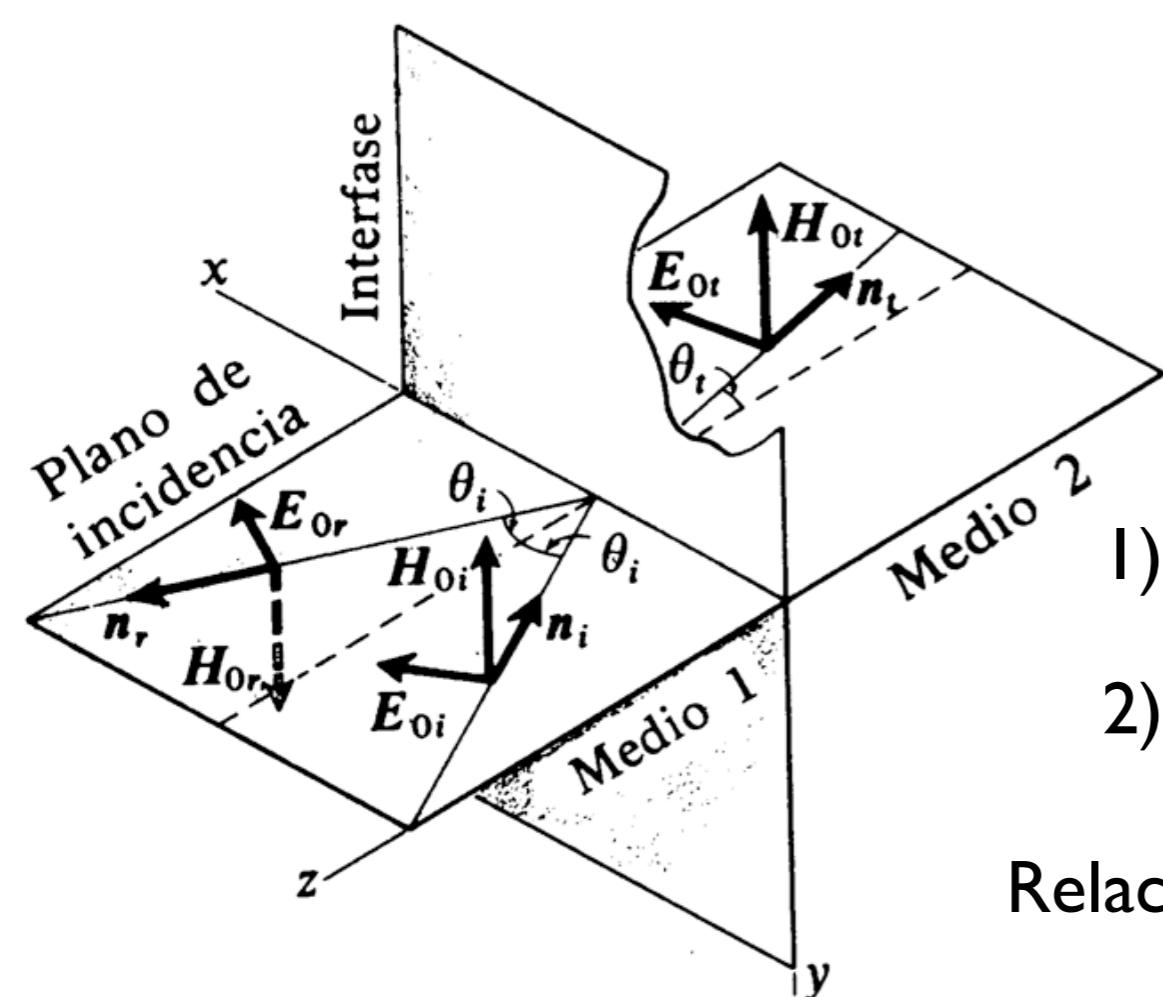
Caso particular: entre medios no magnéticos y no conductores:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$



Este término es positivo siempre, por tanto, la transmitida y la incidente están en fase

Este término es puede ser positivo o negativo, depende de  $n_1/n_2$ .  
En este caso concreto  $n_1/n_2 < 1$  es negativo



Fórmulas de Fresnel:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{||} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{||} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i}$$

## Condiciones de dinámicas

a) E paralelo al plano de incidencia

condiciones de contorno

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_i = E_{0t} \cos \theta_t \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$2) \quad H_{0i} - H_{0r} = H_{0t} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

Relación entre campo eléctrico y campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$$

$$2') \quad \frac{k_1}{\omega \mu_1} (E_{0i} - E_{0r}) = \frac{k_2}{\omega \mu_2} E_{0t}$$

Problema 3.2: Particularizar las fórmulas de Fresnel para el caso de incidencia normal. ¿Hay diferencia entre el campo paralelo y perpendicular?

Caso particular: entre medios no magnéticos y no conductores:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$

a) onda polarizada con el vector **E** paralelo al plano de incidencia.

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t + \cos \theta_i}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t} > 0$$

$E_{0r}, E_{0i}$  estarán en fase si:

$$\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t - \cos \theta_i > 0 \rightarrow \sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i > 0$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

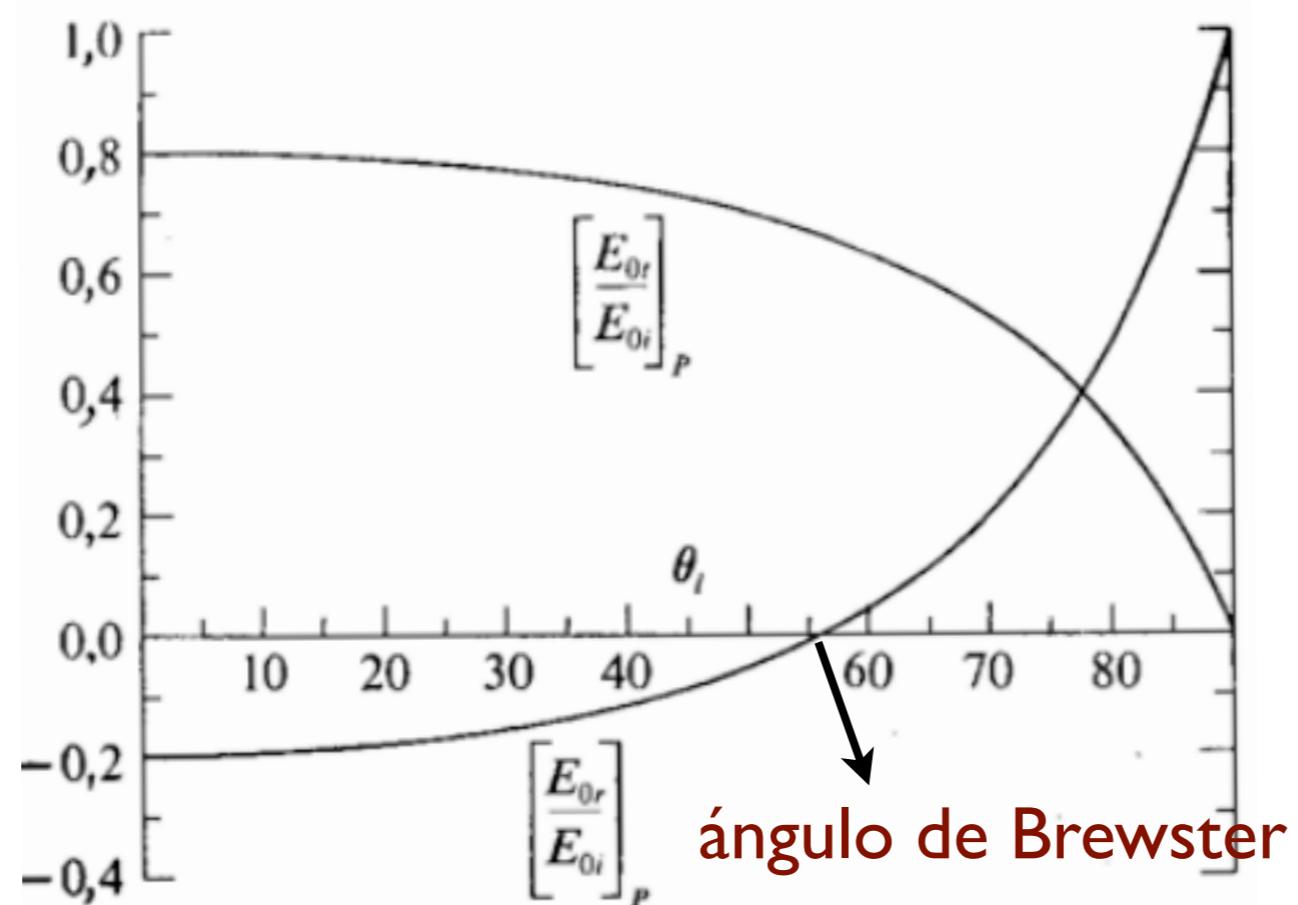
$$\sin 2\theta_t - \sin 2\theta_i > 0 \rightarrow \sin(\theta_t - \theta_i) \cos(\theta_t + \theta_i) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_t > \theta_i \quad y \quad \theta_t + \theta_i < \frac{\pi}{2} \\ \theta_t < \theta_i \quad y \quad \theta_t + \theta_i > \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\parallel > 0$$

**Caso particular:** entre medios no magnéticos y no conductores:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{||} = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t}$$



$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{||} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t + \cos \theta_i}$$

Caso particular:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  interfase entre medios no magnéticos. Las fórmulas de Fresnel se simplifican mucho:

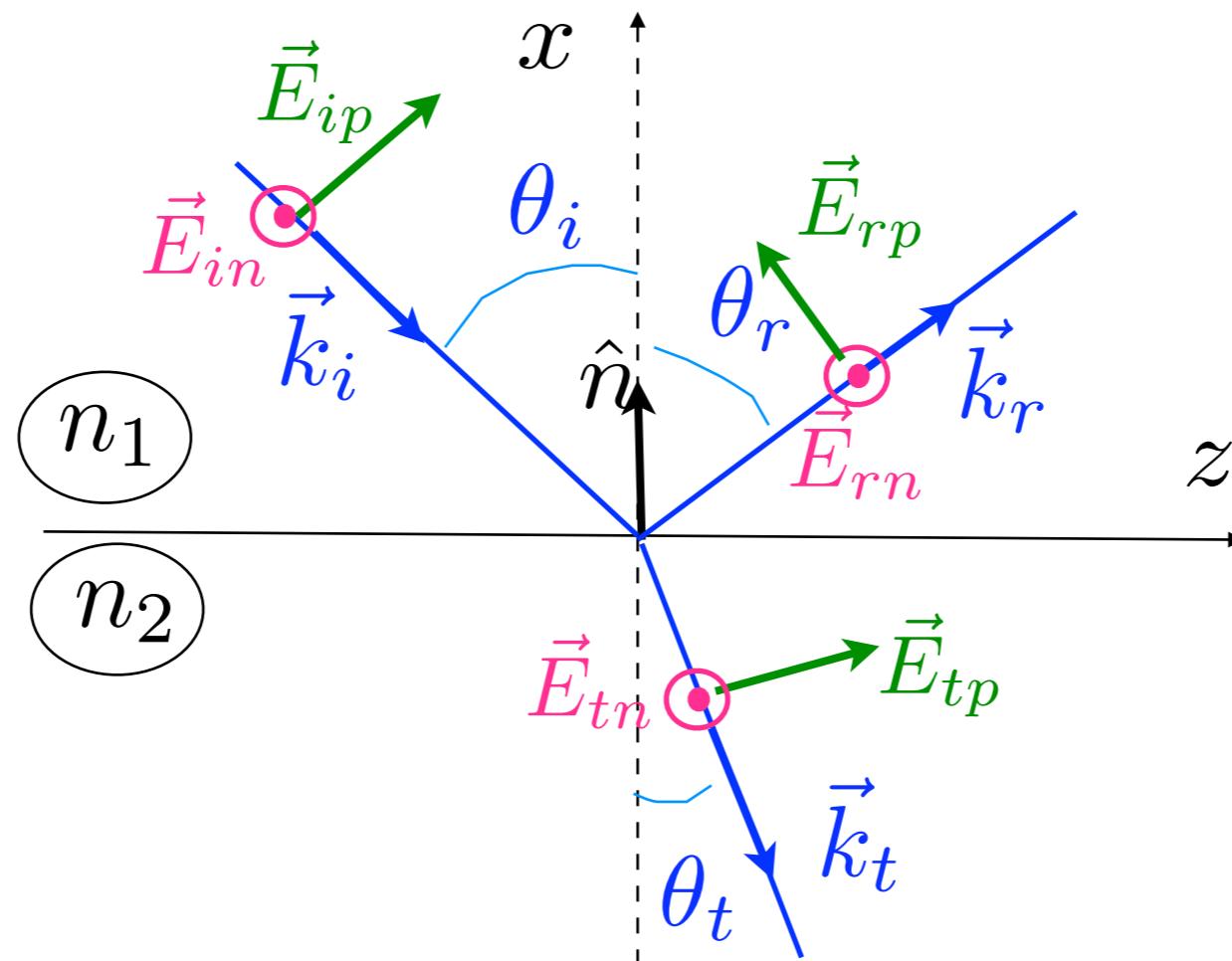
$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

Cualquier vector de campo eléctrico podemos descomponer en componentes normal,  $E_n$ , y paralelo,  $E_p$ , al plano de incidencia



Problema 3.4: Para la reflexión entre dos dieléctricos puede existir un ángulo para el que no existe onda reflejada en la componente del campo eléctrico paralelo.

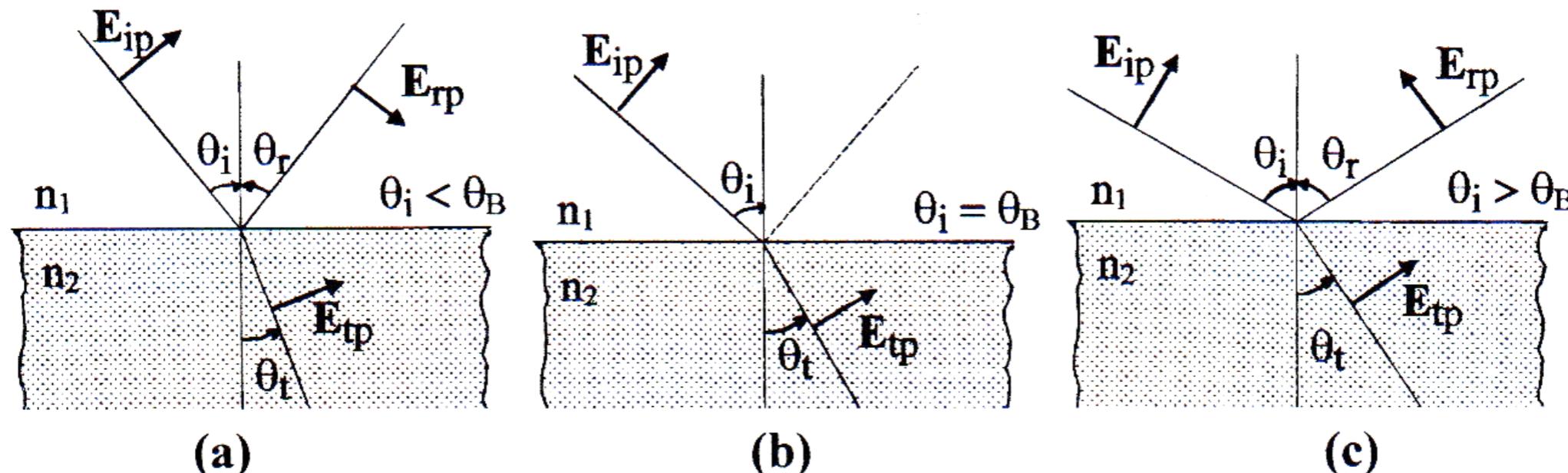
Ángulo de Brewster:  $\theta_t + \theta_i = \frac{\pi}{2}$

no tenemos onda reflejada paralela, solo la componente perpendicular. (Por eso se llama también ángulo polarizante) ¿Pero cual es su coeficiente de reflexión?

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_B = 56,30^\circ$$



la componente de  $E_i$ ,  $E_r$  están en desfasadas  $180^\circ$

No hay componente  $E_r$

la componente de  $E_i$ ,  $E_r$  están en fase

Problema 3.3: Las relaciones de Fresnel se establecen entre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida respecto de la incidente. Es interesante conocer las relaciones entre las intensidades (módulo del vector de Poynting) de la onda reflejada e incidente ( $R$ =reflectancia) y transmitida ( $T$ =transmitancia)

$$R = \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i}$$

$$T = \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}$$

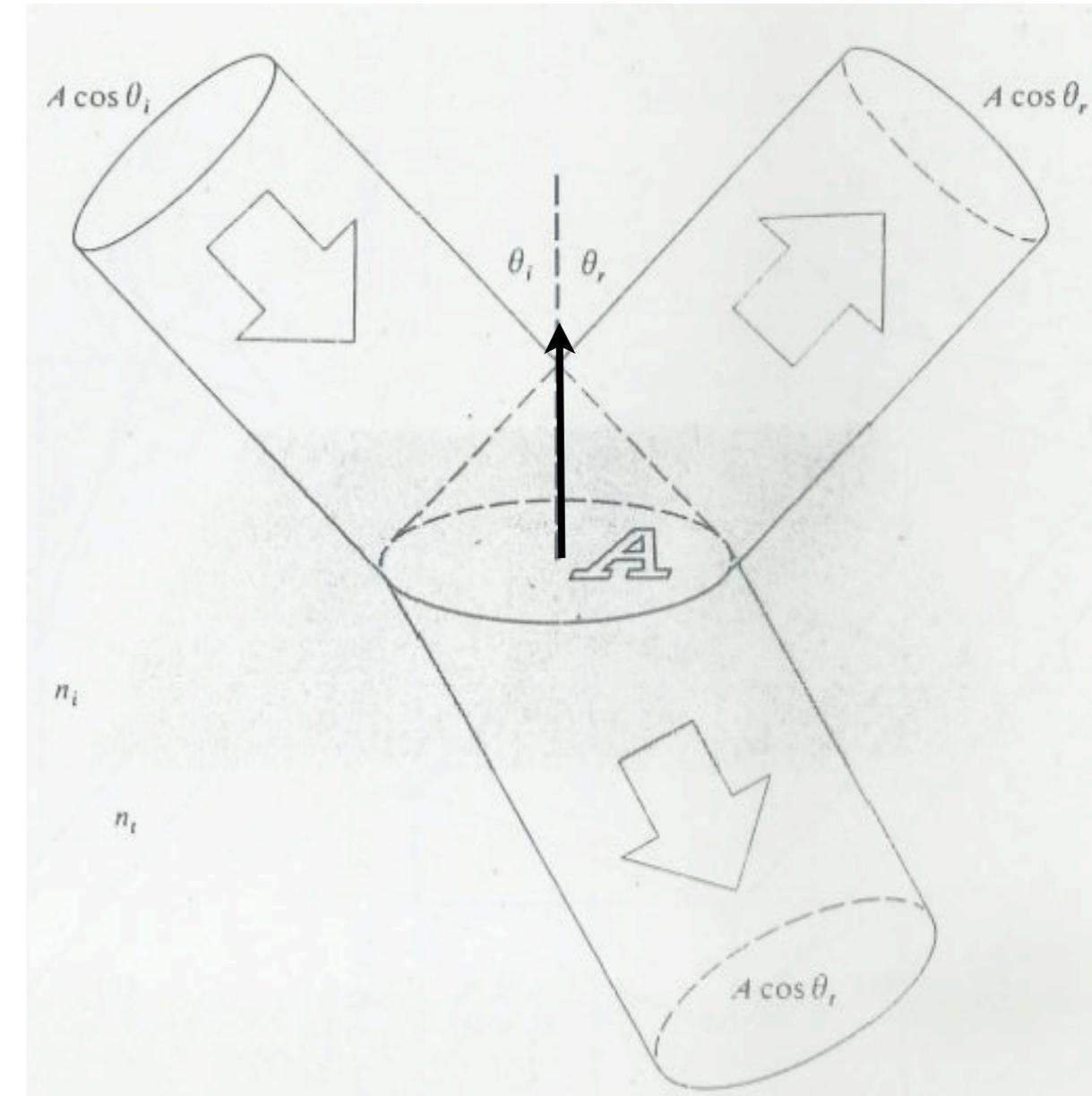
$$I_r = \langle S_r \rangle = \frac{1}{2} v_r \epsilon_1 E_{0r}^2$$

$$I_i = \langle S_i \rangle = \frac{1}{2} v_i \epsilon_1 E_{0i}^2$$

$$I_t = \langle S_t \rangle = \frac{1}{2} v_t \epsilon_2 E_{0i}^2$$

$$R = \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2}$$

$$T = \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad R + T = 1$$

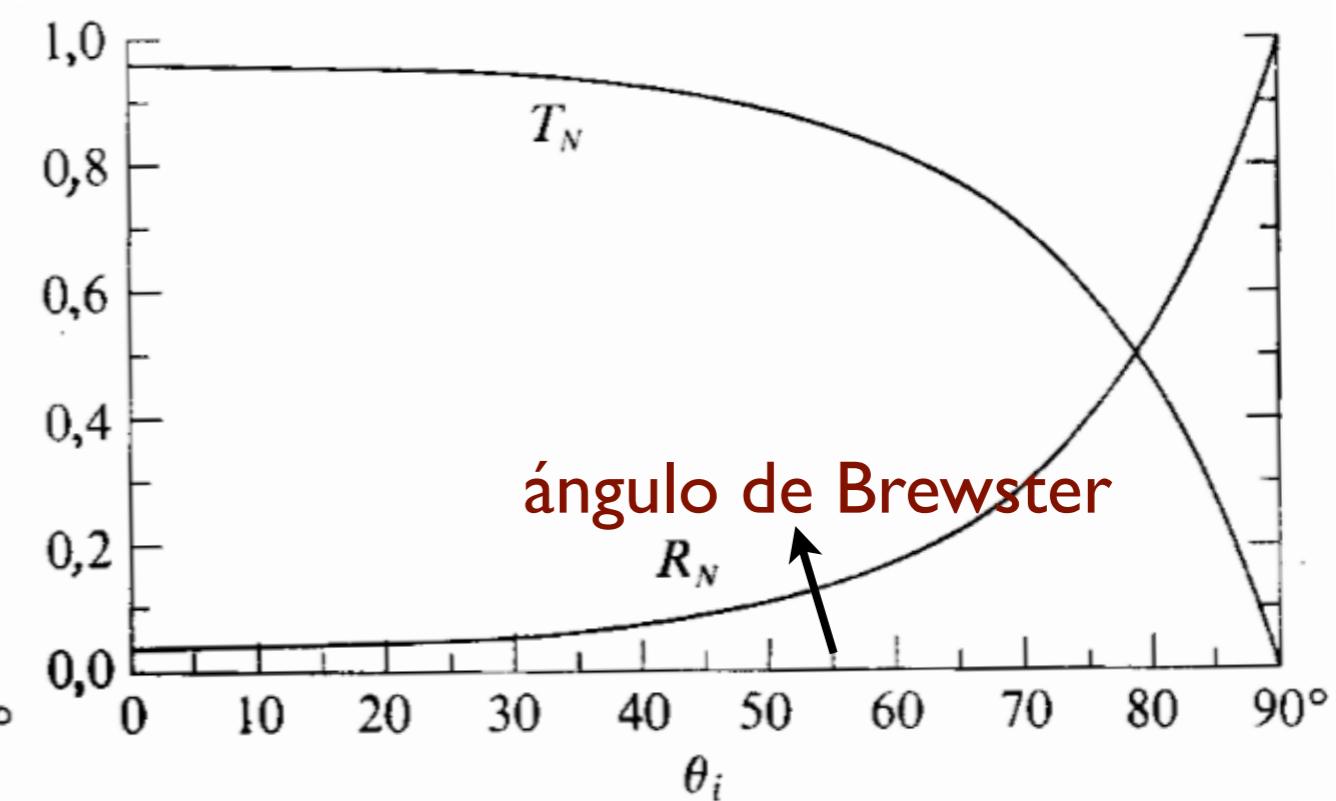
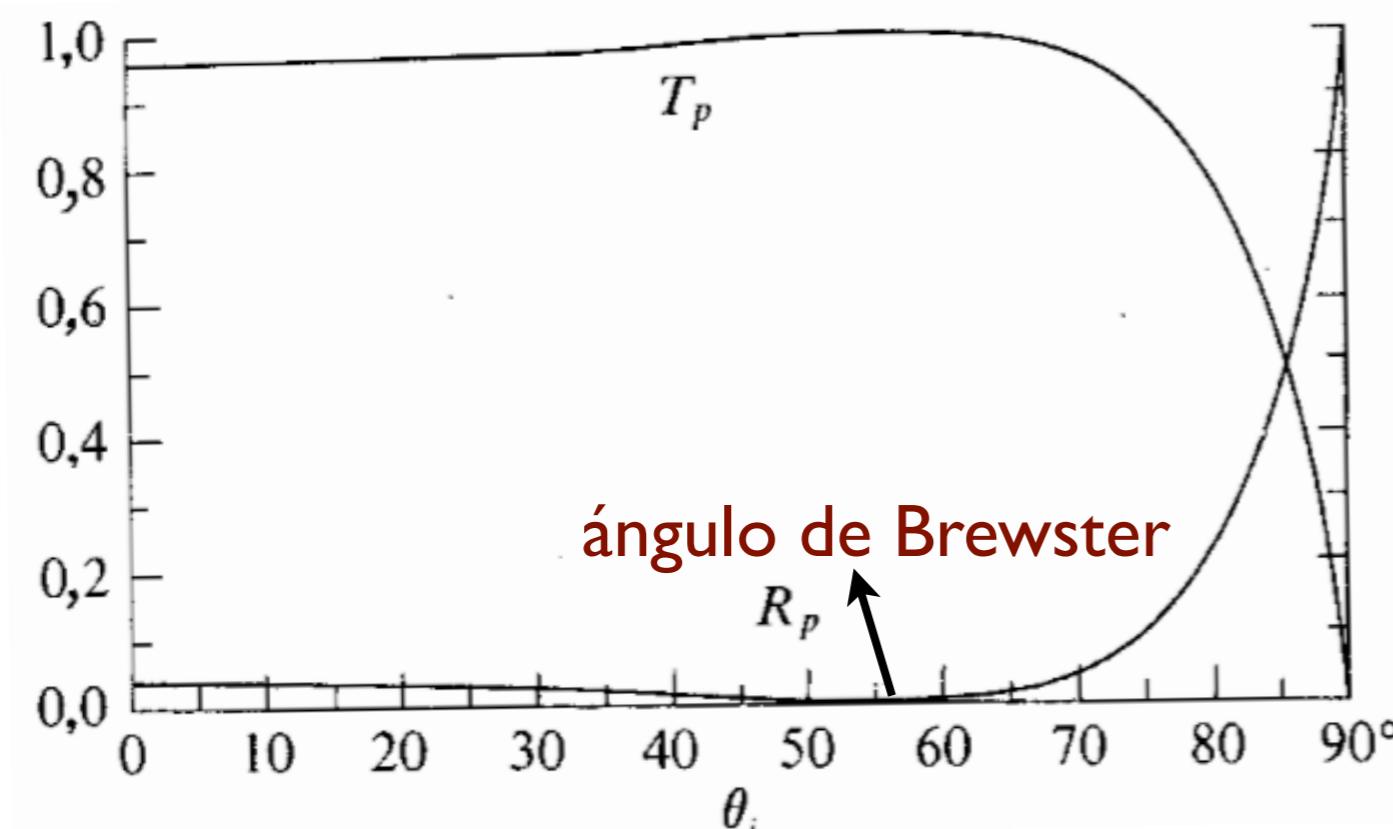


Problema 3.3: Las relaciones de Fresnel se establecen entre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida respecto de la incidente. Es interesante conocer las relaciones entre las intensidades (módulo del vector de Poynting) de la onda reflejada e incidente ( $R$ =reflectancia) y transmitida ( $T$ =transmitancia)

$$R = \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2}$$

$$T = \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = 0.66$$

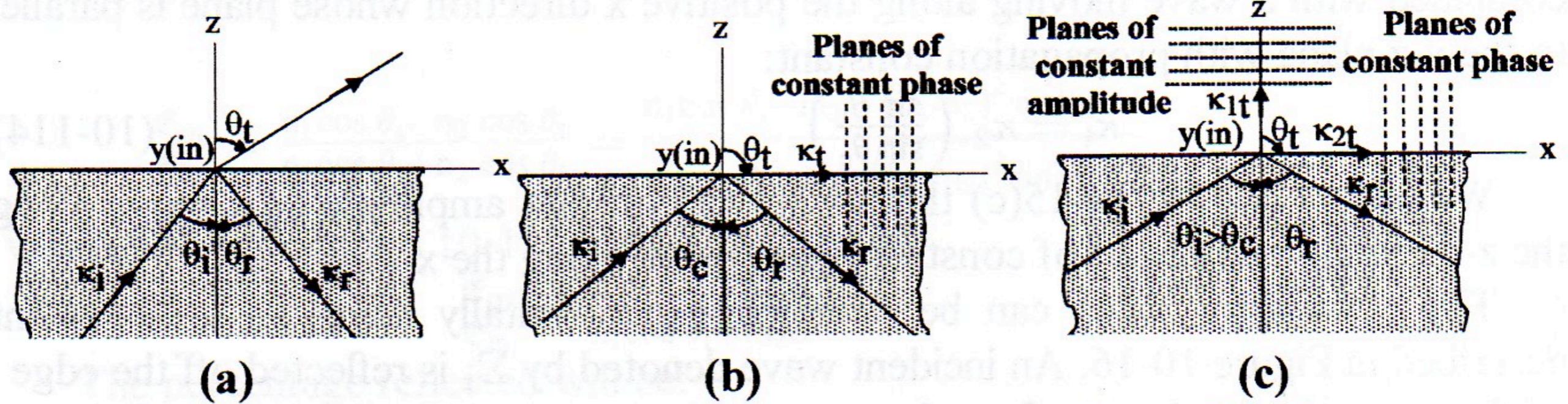


**Ángulo de crítico:** ángulo para el cual la reflexión es total

Si  $n_1 > n_2$  y  $\theta_i$  es suficientemente grande, podría ocurrir que:  $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$

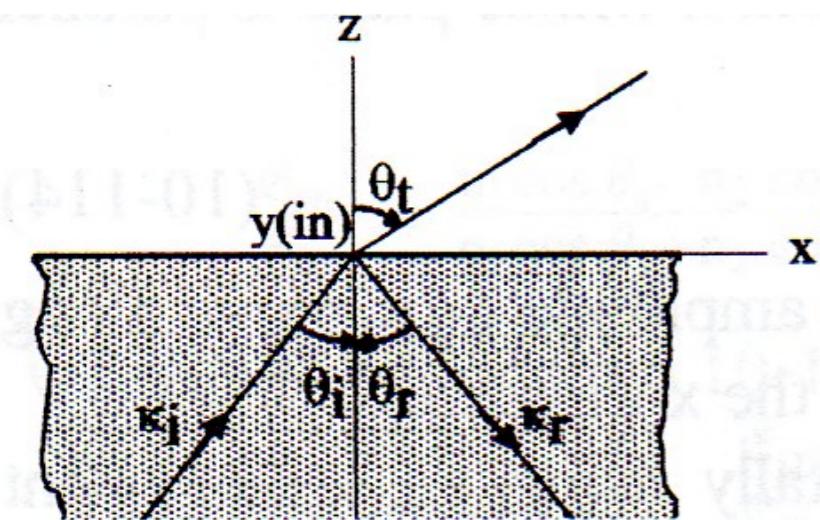
El ángulo de incidencia crítico para el que  $\sin \theta_t = 1$  y  $\theta_t = 90^\circ$

$$\sin \theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{reflexión es total}$$



$$\sin \theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1}$$

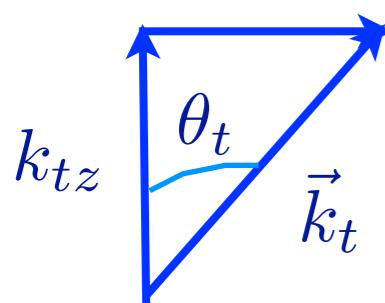
$$\sin \theta_t = 1 \quad \text{y} \quad \theta_t = 90^\circ$$



$$\vec{E}_t = \vec{E}_{ot} \exp \{i[k_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) - \omega t]\}$$

$$\theta_i > \theta_{ic} \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i} = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1} = i\alpha$$



$$\vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{-k_2 \alpha z} \exp \left\{ i \left[ k_2 \left( \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \right) x - \omega t \right] \right\}$$

$$\theta_i = \theta_c \text{ entonces } \Rightarrow \alpha = 0 ; e^{-k_2 \alpha z} = 1$$

$$\vec{E}_t(\theta_c) = \vec{E}_{ot} e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

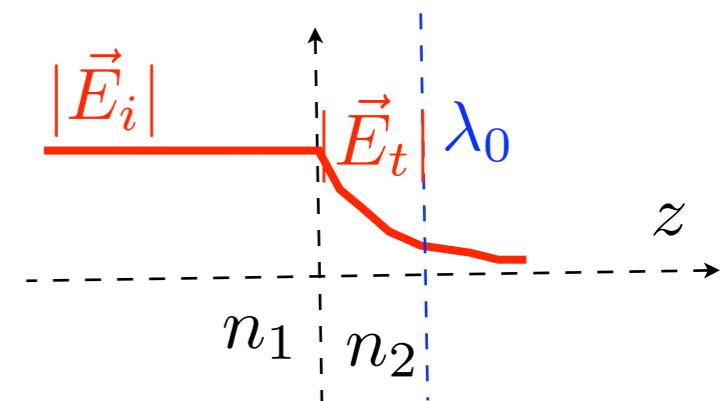
$$\theta_i > \theta_c \text{ entonces } \Rightarrow \vec{E}_t(\theta_i > \theta_c) = \vec{E}_{ot} e^{-k_2 \alpha z} e^{i \left[ k_2 \left( \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \right) x - \omega t \right]}$$

$$\frac{E_{0t}}{e} \rightarrow \Delta z = \frac{1}{k_2 \alpha} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \approx \lambda_0$$

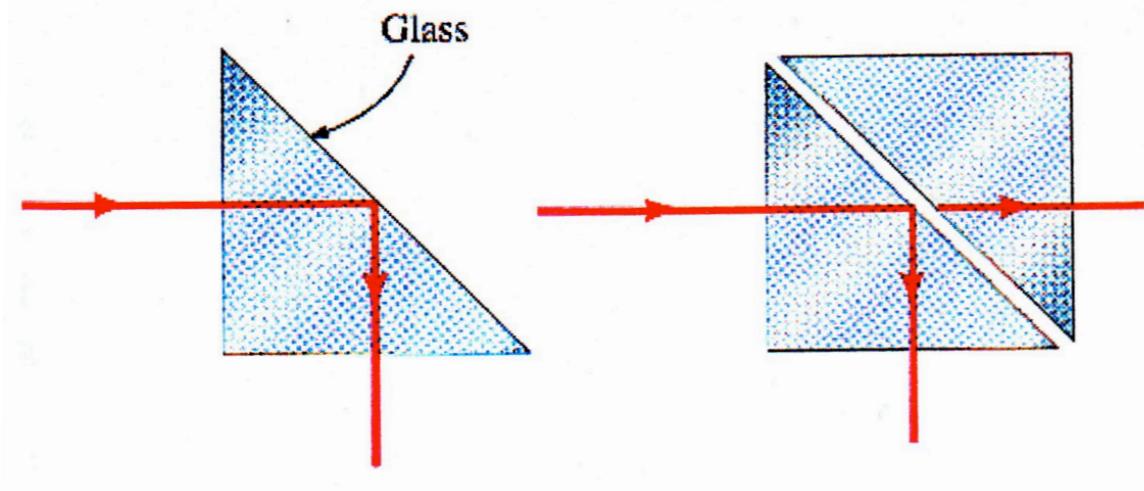
se atenua en z

*se propaga  
por x sin  
atenuación*

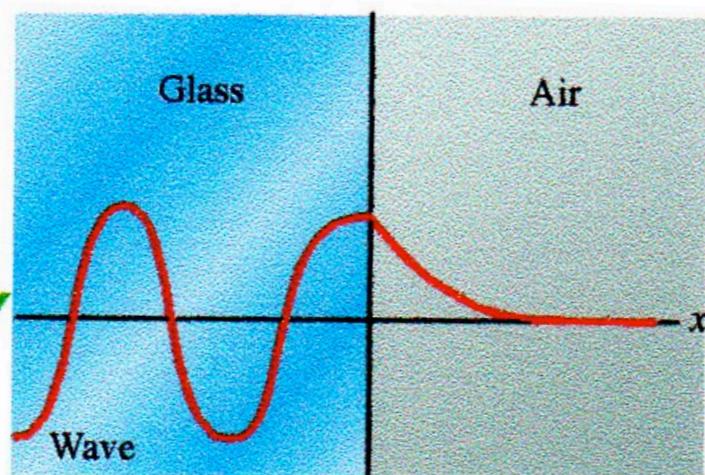
$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}$$



# Reflexión interna total frustrada

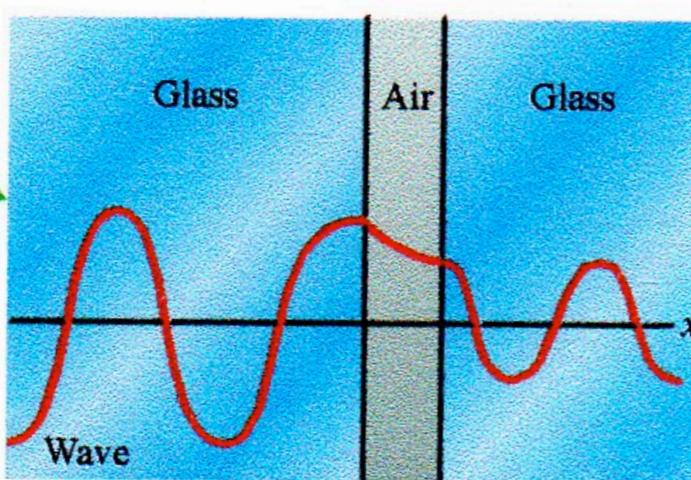


Divisor de haz



$$\vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{-k_2 \alpha z} \exp \left\{ i \left[ k_2 \left( \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \right) x - \omega t \right] \right\}$$

$$\sqrt{\left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i - 1} = \alpha$$



$$\frac{E_0 t}{e} \rightarrow \Delta z = \frac{1}{k_2 \alpha} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \approx \lambda_0$$

## Reflexión - Refracción en la superficie de un buen conductor

vector de propagación y el indice de refracción son complejos:

$$\tilde{k} = \beta + \alpha i \rightarrow \tilde{n} = n + \kappa i$$

$$\tilde{n} = \tilde{k} \frac{c}{\omega}$$

$$\tilde{n} = \tilde{k} \frac{c}{\omega} = \frac{c}{\omega} (\beta + \alpha i)$$

Para un buen conductor:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} = \frac{1}{\delta}$$

$$\tilde{n} = \tilde{k} \frac{c}{\omega} = \frac{c}{\omega} (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma \mu}{2 \omega \epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\text{Si } \mu = \mu_0$$

$$\tilde{n} = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma}{2 \omega \epsilon_0}}$$

el índice de refracción es muy grande en un conductor

## Reflexión - Refracción en la superficie de un buen conductor

$$n_1 = k_1 \frac{c}{\omega} \quad \text{medio 1}$$

$$\tilde{n}_2 = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} \quad \text{medio 2, medio conductor}$$

La ley de Snell:

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \approx 0 \quad \cos \theta_t \approx 1 \quad \theta_t \approx 0$$

La onda se propaga en una dirección casi normal a la separación y su amplitud se atenúa un factor  $e$  al recorrer una distancia  $\delta$

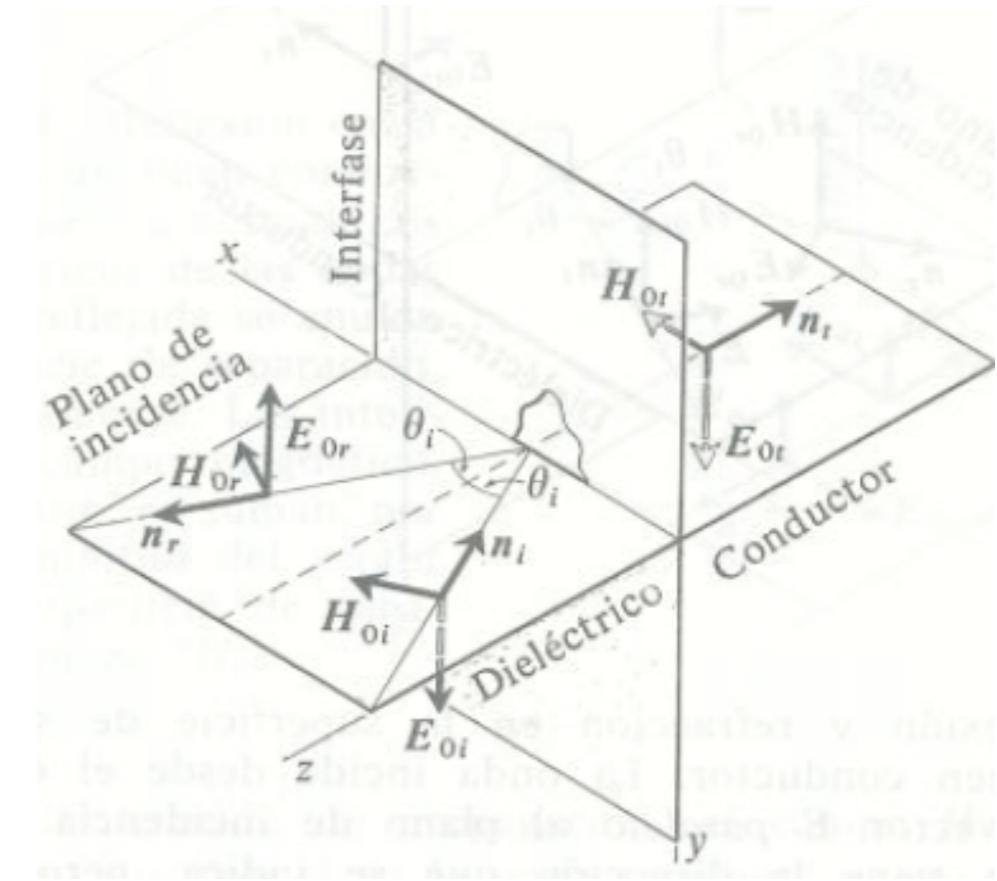
Calcular la reflectancia en incidencia normal

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \approx -1 \text{ desfase } \pi$$

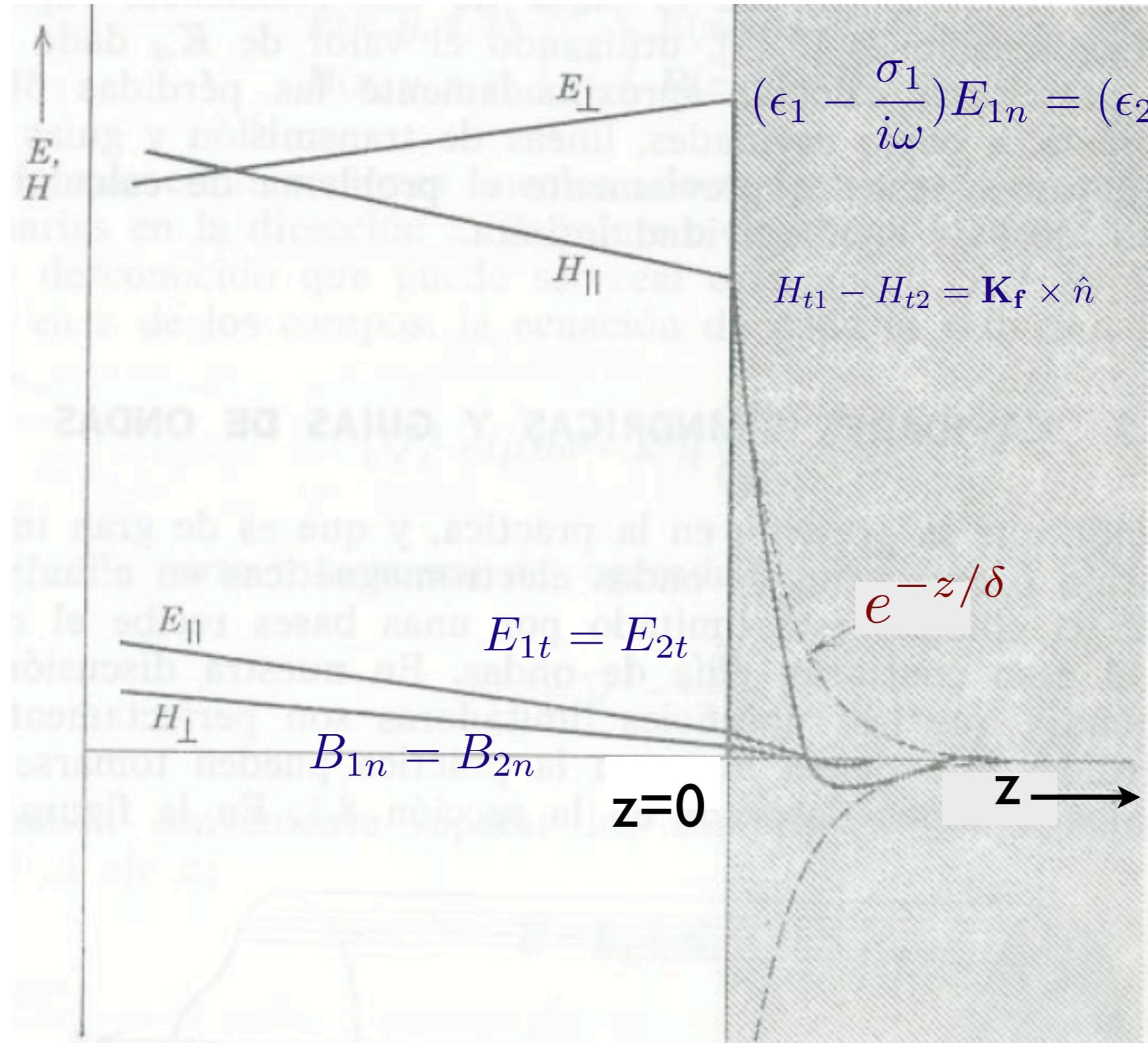
$$T = 1 - R$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \approx 0$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2}\right) \cdot \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2}\right)^* \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon}{\sigma}} \approx 1$$



# Campos en las cercanías de un buen conductor, aunque no perfecto



$$(\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{i\omega})E_{1n} = (\epsilon_2 - \frac{\sigma_2}{i\omega})E_{2n}$$

$$H_{t1} - H_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$