3.-Ondas electromagnéticas en medios limitados:

3.0.- Condiciones de contorno de las ondas EM [RMC, § 16.6]

3.1.- Reflexión y refracción de las ondas EM, fórmulas de Fresnel. [RMC, § 18.4][LC §12.1-12.2]

3.2.- Propagación de ondas guiadas: líneas de transmisión, modos TEM [FLS § 22.6-24.1]

3.3.- Guías de onda rectangulares: modos TE, frecuencia de corte [FLS § 24.2-24.3-24.4-24-8] [RMC, § 18.7]

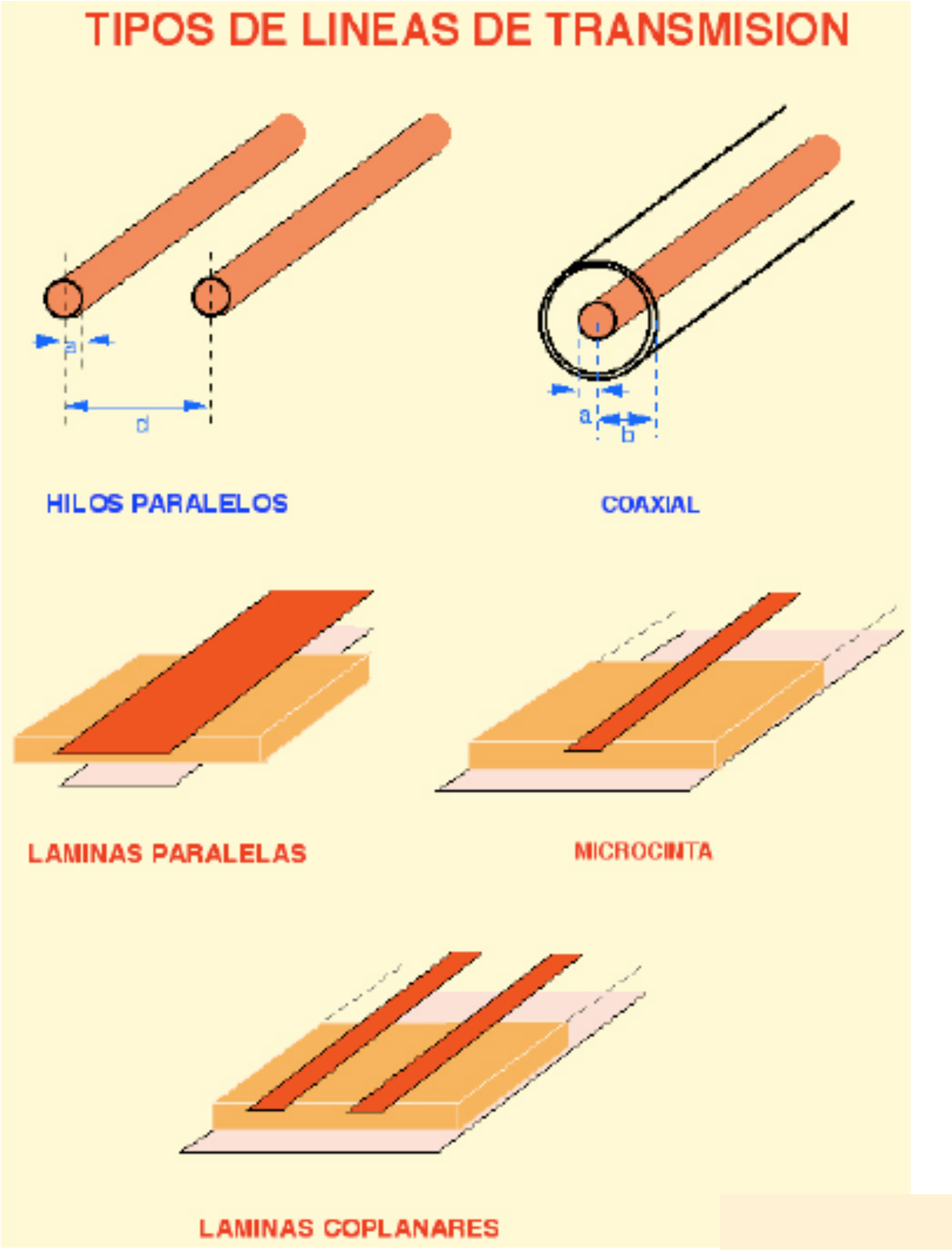
3.4.- Cavidades resonantes. [FLS § 23.2-23.3] [RMC, §18.8]

Propagación de ondas guiadas

La reflexión de las ondas EM en conductores permite la propagación de ondas guiadas.

Líneas de transmisión

hasta MHz



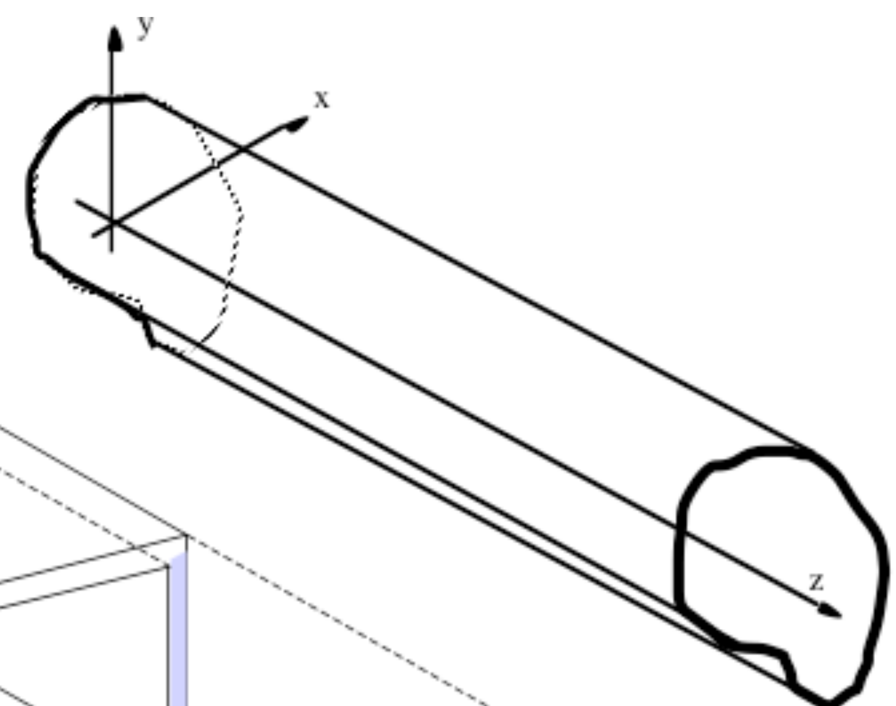
Propagación de ondas guiadas

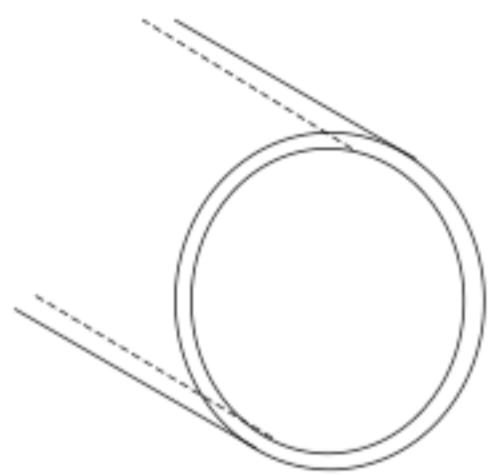
Vamos a considerar ahora ondas confinadas en el interior de una de guía.

Vamos a estudiar la propagación de una onda plana a lo largo de un tubo conductor dirección de propagación, eje z.

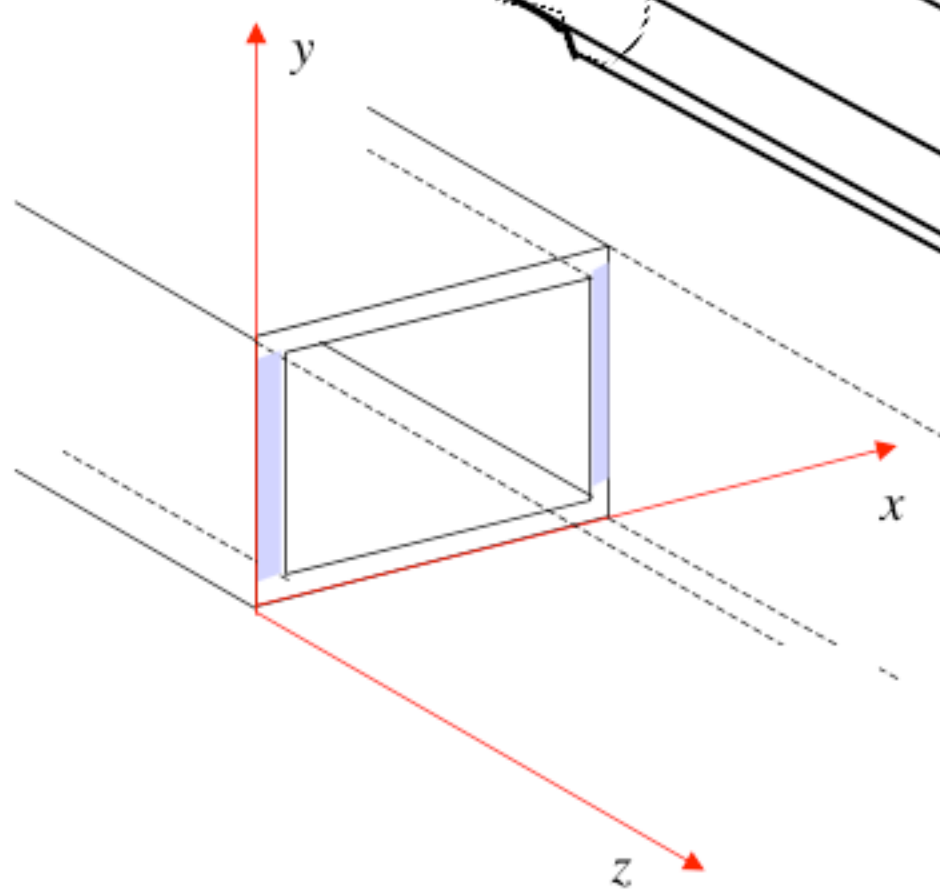
1 - 100 GHz

$\sim 500\ THz = 5\times 10^{14}\ Hz$: **fibras ópticas**





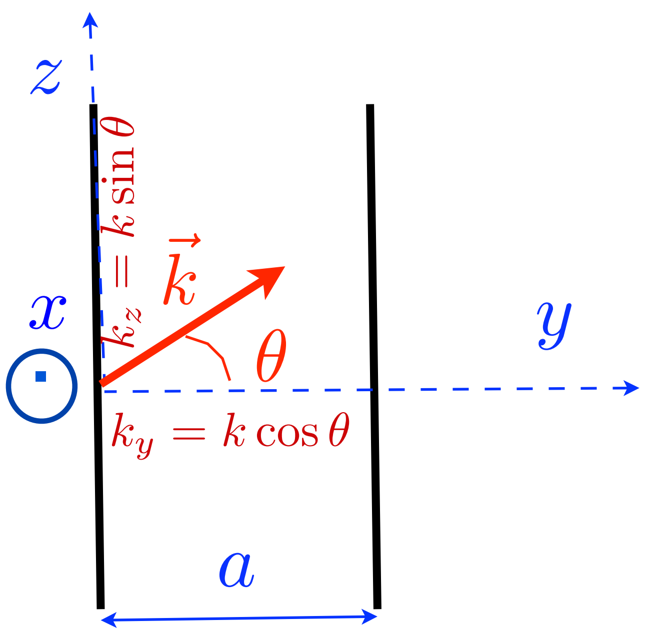
Guía cilíndrica hueca

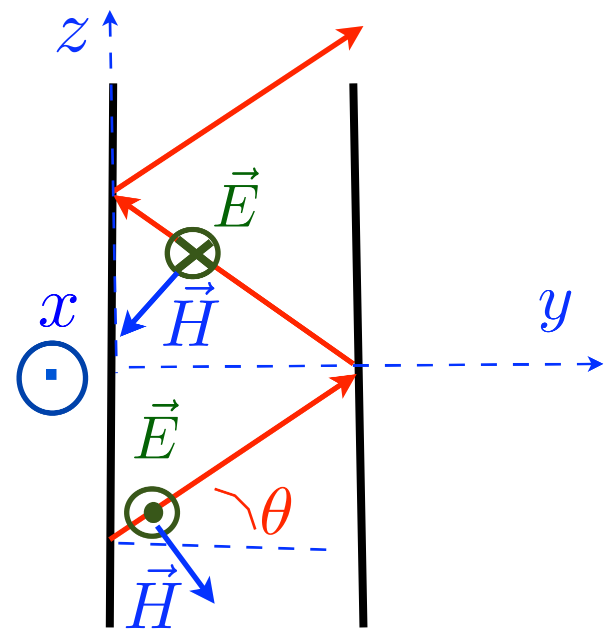


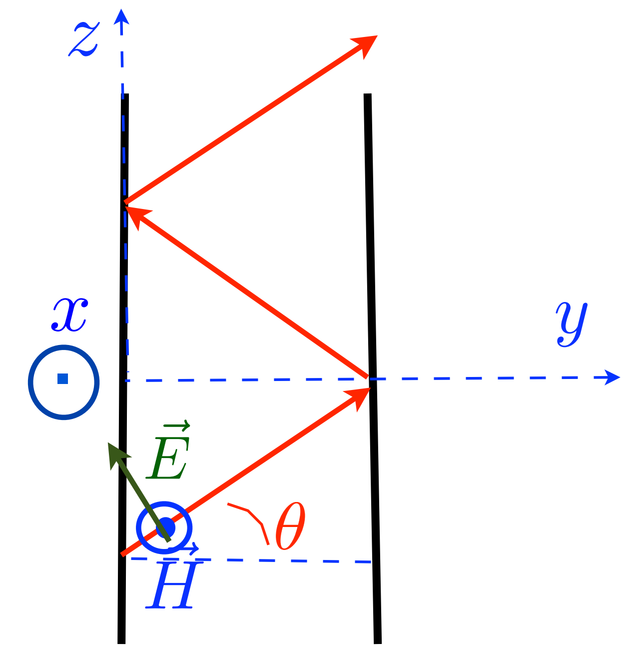
Guía cilíndrica resctangular

Propagación entre placas conductoras

En conductores huecos pueden existir ondas TE o ondas TM.







E_z=0 "transversales eléctricas" TE *B_z=0 "transversales magnética" TM*

$$\vec{E} = \hat{u}_x \left\{ E_i e^{i[k(y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t]} + E_r e^{i[k(-y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t]} \right\}$$ onda TE

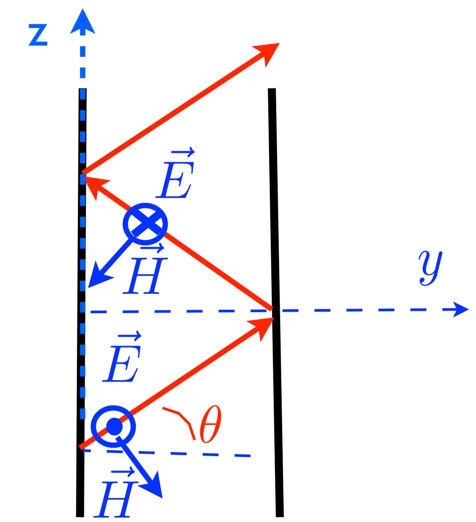
$E_{\parallel} = 0$ $B_{\perp} = 0$ Condiciones de contorno en un conductor perfecto

$$E_x(y=0) = 0 \;\Rightarrow\; E_i + E_r = 0 \;\Rightarrow\; E_i = -E_r = E$$

$$\vec{E} = \hat{u}_x E \left(e^{iky\cos\theta} - e^{-iky\cos\theta} \right) e^{i(kz\sin\theta - \omega t)} = \hat{u}_x 2iE \sin(ky\cos\theta) e^{i(kz\sin\theta - \omega t)}$$

$$E_x(y=a) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(ka\cos\theta) = 0 \;\Rightarrow\; ka\cos\theta = n\pi \qquad k\cos\theta = \frac{n\pi}{a}$$

$$\vec{E} = \hat{u}_x 2iE \sin(ky\cos\theta)e^{i(kz\sin\theta - \omega t)}$$



Vamos a calcular la velocidad de fase en la dirección z

$$v_{fz} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k\sin\theta} = \frac{c}{\sin\theta} > c$$!!! no conlleva transporte de energía

Vamos a calcular las longitudes de onda en z y y

En la dirección z $\Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda_0}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g} = \frac{\sin\theta}{\lambda_0}$ longitud de onda de grupo

En la dirección y $\Rightarrow \lambda_c = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{2\pi}{k\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_c} = \frac{\cos\theta}{\lambda_0}$ longitud de onda de corte

Podemos re-escribir la onda: $k\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ $\quad k\cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda_c}$

$$\vec{E} = \hat{u}_x 2iE \sin(ky\cos\theta)e^{i(kz\sin\theta - \omega t)} \qquad \vec{E} = \hat{u}_x 2iE \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}y\right)e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}z - \omega t\right)}$$

Debe de cumplir esta condición de contorno:

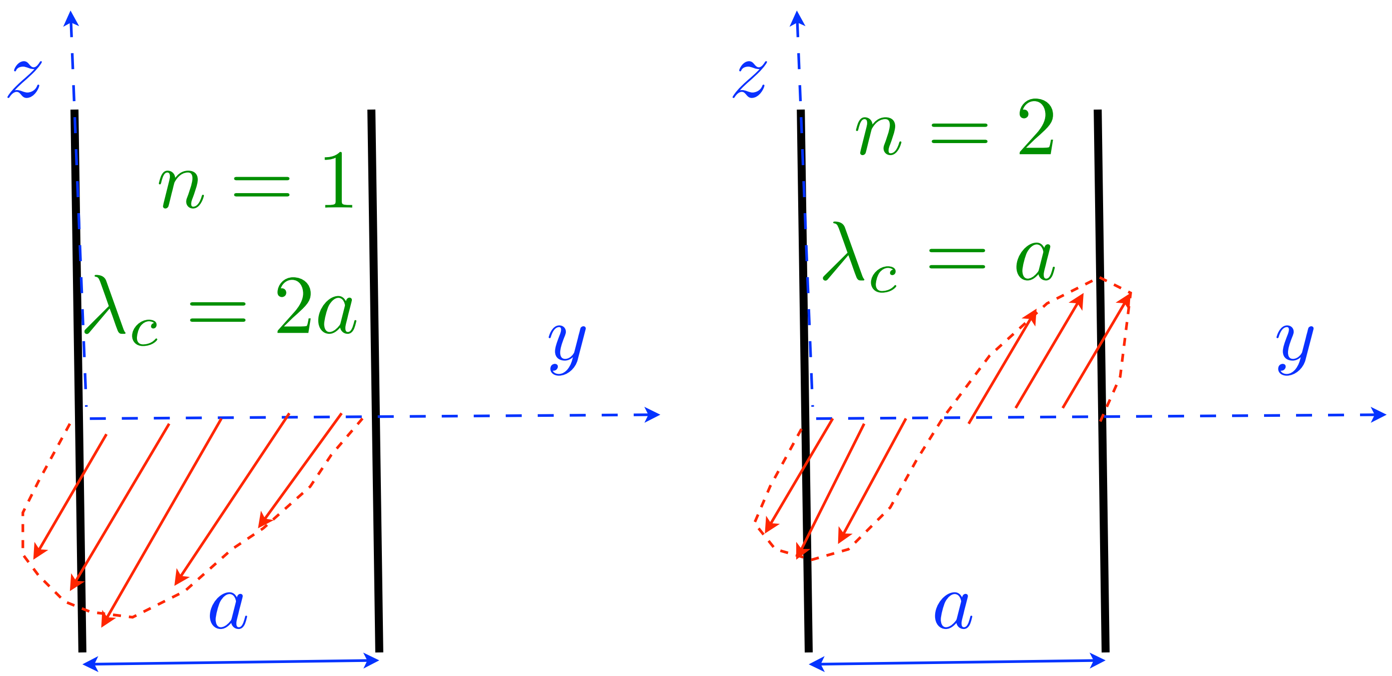
$$E_x(y=a) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi a}{\lambda_c} = n\pi$$ n: 1, 2, 3..

$$\lambda_c = \frac{2a}{n} \qquad k_c = \frac{n\pi}{a}$$

longitud de onda de corte toma valores concretos

$$\vec{E} = \hat{u}_x 2iE \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_c} y\right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} z - \omega t\right)}$$

$$\lambda_c = \frac{2a}{n} \qquad k_c = \frac{n\pi}{a}$$



n: 1, 2, 3..

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{\sin\theta}{\lambda_0}$$

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{\cos\theta}{\lambda_0}$$

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \qquad k_g^2 = k_o^2 - k_c^2$$

La onda que se establece en el interior de las placas conductoras

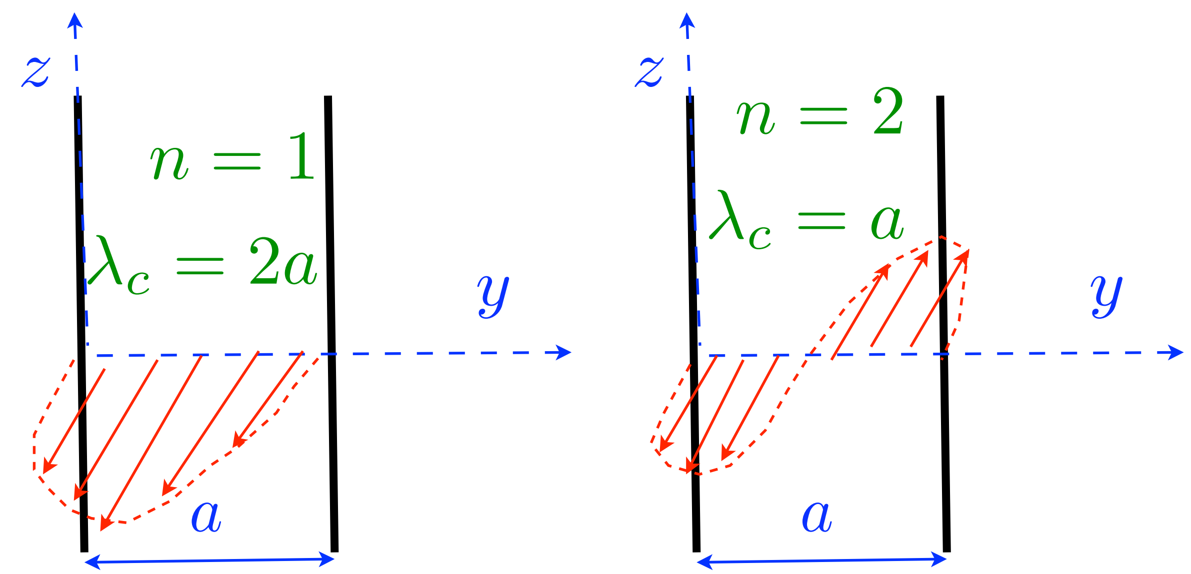
$$\vec{E} = \hat{u}_x E_0 \sin(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$k_g^2 = k_o^2 - k_c^2 \qquad k_c = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \qquad \lambda_c = \frac{2a}{n}$$

A medida $\omega \downarrow \Rightarrow \; k_0 \downarrow \,, \; \lambda_0 \uparrow$

$$\vec{E} = \hat{u}_x E_0 \sin(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$



$$k_g^2 = k_o^2 - k_c^2 \qquad k_c = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \qquad \lambda_c = \frac{2a}{n}$$

A medida $\omega \downarrow \Rightarrow k_0 \downarrow , \lambda_0 \uparrow$ Hay una frecuencia de corte, ω_{cn}, para la cual $k_0 = k_c$

$$\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a} \Rightarrow k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{n\pi}{a} = k_c \Rightarrow k_g = 0$$

Hay una frecuencia de corte para la cual la onda no se propaga en z

Si la frecuencia de la onda es $\omega < \omega_{cn} \Rightarrow k_0 < k_c \Rightarrow k_g^2 < 0$

$$\omega < \omega_c = \frac{n\pi c}{a} \; ; \; k_0 < k_c = \frac{n\pi}{a} \; ; \; \lambda_0 > \lambda_c = \frac{2a}{n}$$

La onda no entra, literalmente, entre las placas

$$k_g = i|k_g| \Rightarrow \vec{E} = \hat{u}_x E_0 e^{-|k_g|z} \sin(k_c y) e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

La onda no se propaga y se atenúa exponencialmente en z

siempre, $v_{fz} = \dfrac{\omega}{k_g} > c$ además si $k_0 = k_c$ $\longrightarrow$ $v_{fz} \to \infty$

Esta es la velocidad de fase, o la velocidad de un punto de fase constante de la onda. La energía se propaga por la guía con la velocidad de grupo, que es siempre menor que c

problema: 3.16, 3.17

Propagación entre placas conductoras: velocidad de propagación de la energía

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \hat{u}_x E_0 \sin(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

$$\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z$$

$$\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{ikE_y} = \cancel{i\omega B_x}$$

$$ikE_x - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} - = i\omega B_y$$

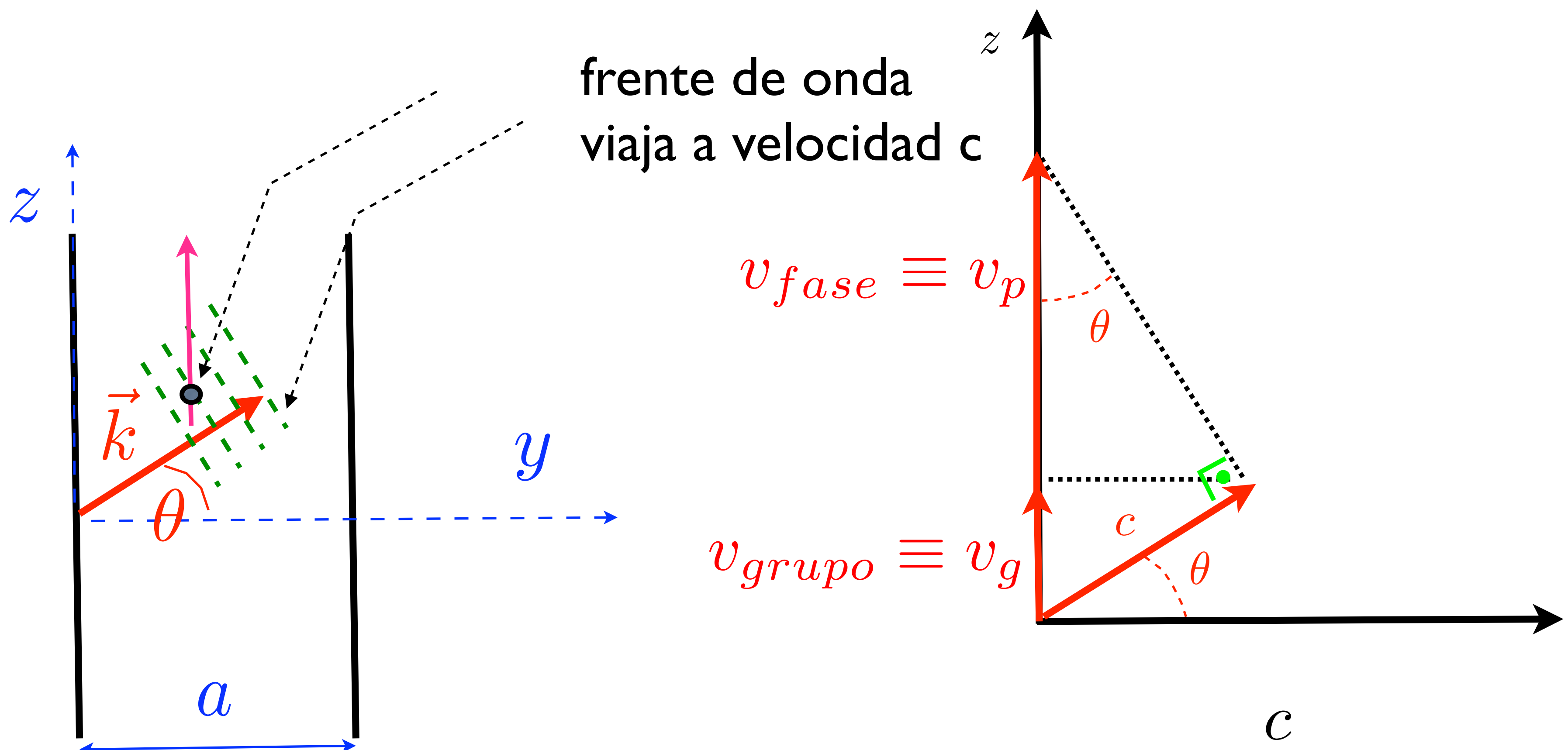
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{u}_y E_0 \frac{k_g}{\omega} \sin(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)} + i\hat{u}_z E_0 \frac{k_c}{\omega} \cos(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$< u >= \frac{1}{4} Re[\vec{E}^* \cdot \vec{D} + \vec{B}^* \cdot \vec{H}] \quad \Longrightarrow \quad \int_0^a < u > dy = \frac{1}{4} E_0^* E_0 \epsilon_0 a$$

$$< S_z >= \frac{1}{2} Re[E_x^* H_y] \quad \Longrightarrow \quad \int_0^a < S_z > dy = \frac{1}{4} E_0^* E_0 \frac{k_g}{\mu_0 \omega} a$$

$$v_{grupo} = \frac{\int_0^a < S_z > dy}{\int_0^a < u > dy} = \frac{k_g}{k_0} c = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{grupo} = c \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 / \sin\theta} = c \sin\theta < c \\ v_f = \dfrac{c}{\sin\theta} \end{array} \right\} \quad v_f \cdot v_{grupo} = c^2$$

La velocidad de fase, v_p, es la velocidad de un punto de fase constante de la onda en el eje z



$$v_p = \frac{c}{\sin\theta}$$

$$v_g = c\sin\theta$$

Propagación de ondas guiadas

Consideraremos que la onda de guía es un conductor perfecto, E=0, B=0 en el interior del conductor. Esto implica que la condición de contorno en la pared interna debe ser:

$$E_{\parallel} = 0 \qquad B_{\perp} = 0$$

La reflexión de las ondas EM en conductores permite la propagación de ondas guiadas.

Vamos a estudiar la propagación de una onda plana a lo largo de un tubo conductor dirección de propagación, eje z.

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

El campo magnético y el campo eléctrico deben de satisfacer las ecuaciones de Maxwell en el interior de la guía de onda. Consideramos: $\rho = 0; \quad \mathbf{J} = 0$

i) $\nabla . \mathbf{E} = 0$

iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

ii) $\nabla . \mathbf{B} = 0$

iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Hay que buscar los valores de E_0, B_0 que cumplan las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno.
Como vamos a ver, las ondas electromagnéticas confinadas en un espacio **NO** son, por lo general, ondas transversales

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell iii) y iv):

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2}E_z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_g E_y = i\omega B_x \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ik_g B_y = -\frac{i\omega}{c^2}E_x$$

$$ik_g E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} - = i\omega B_y \qquad ik_g B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} - = -\frac{i\omega}{c^2}E_y$$

Podemos re-escribir las componentes Ex, Ey, Bx, By en función de las componentes en z:

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y})$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x})$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y})$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x})$$

Es suficiente, por tanto, determinar las *componentes longitudinales* Ez, Bz. Aplicando las ecuaciones de Maxwell i) y ii):

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k_g^2]E_z = 0$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k_g^2]B_z = 0$$

Si Ez=0 llamamos a esa ondas “transversales eléctricas” TE; si Bz=0 son “transversales magnéticas” TM; si Ez=0 y Bz=0 son transversales eléctricas y magnéticas, TEM.

3.-Ondas electromagnéticas en medios limitados:

3.0.- Condiciones de contorno de las ondas EM [RMC, § 16.6]

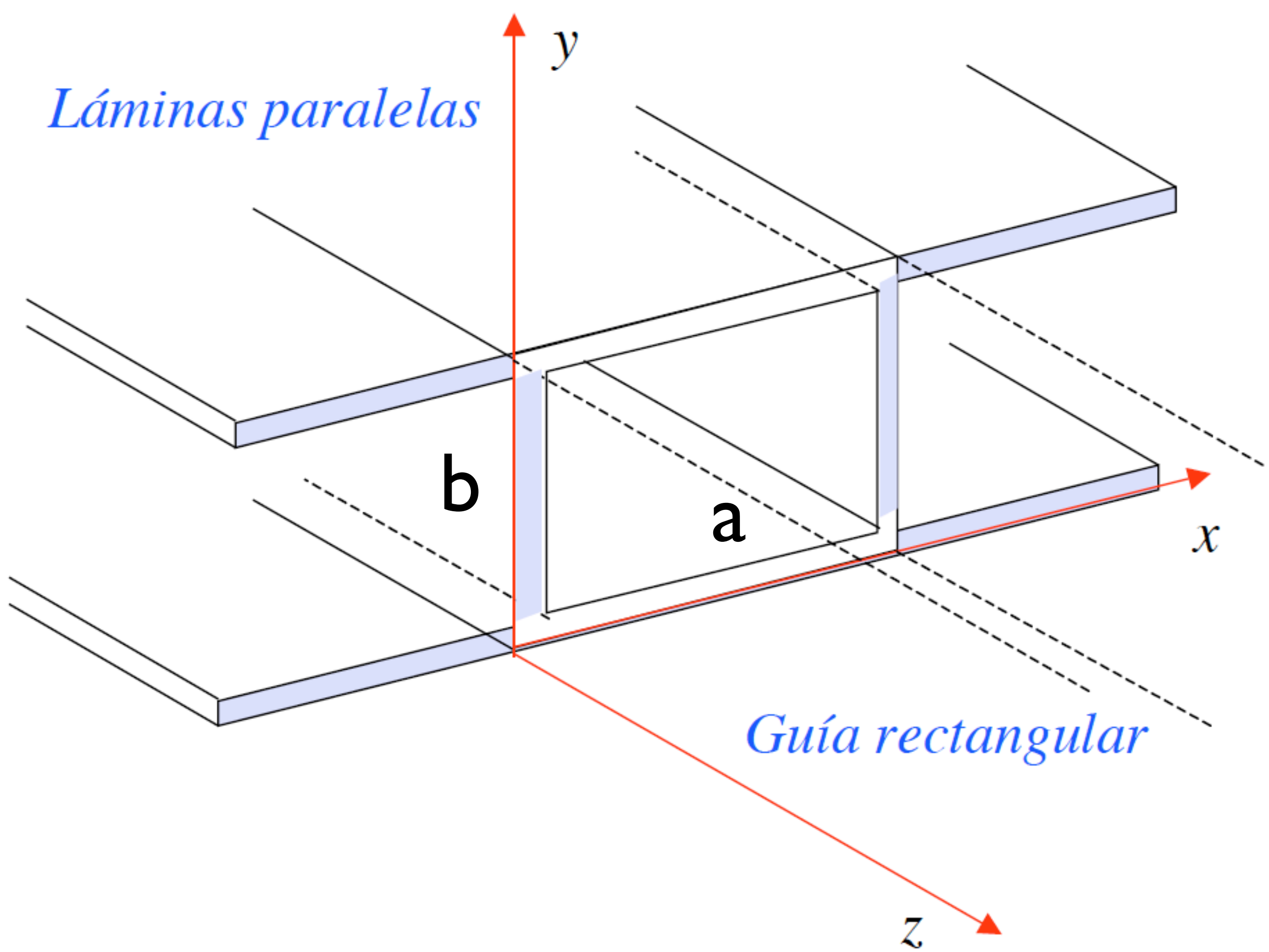
3.1.- Reflexión y refracción de las ondas EM, fórmulas de Fresnel. [RMC, § 18.4][LC §12.1-12.2]

3.2.- Propagación de ondas guiadas: líneas de transmisión, modos TEM [FLS § 22.6-24.1]

3.3.- Guías de onda rectangulares: modos TE, frecuencia de corte [FLS § 24.2-24.3-24.4-24-8] [RMC, § 18.7]

3.4.- Cavidades resonantes. [FLS § 23.2-23.3] [RMC, §18.8]

Ondas TE en guía de ondas rectangulares



$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x,y)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$$

A partir del resultado general, pag.5

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k_g^2]B_z = 0$$

podemos obtener B_z y a partir de ahí, el resto de las componentes del campo E y B (según ecuación pag.5)

Utilizando el método de separación de variables, resolvemos la ecuación diferencial:

$$B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k_g^2]B_z = 0 \qquad B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

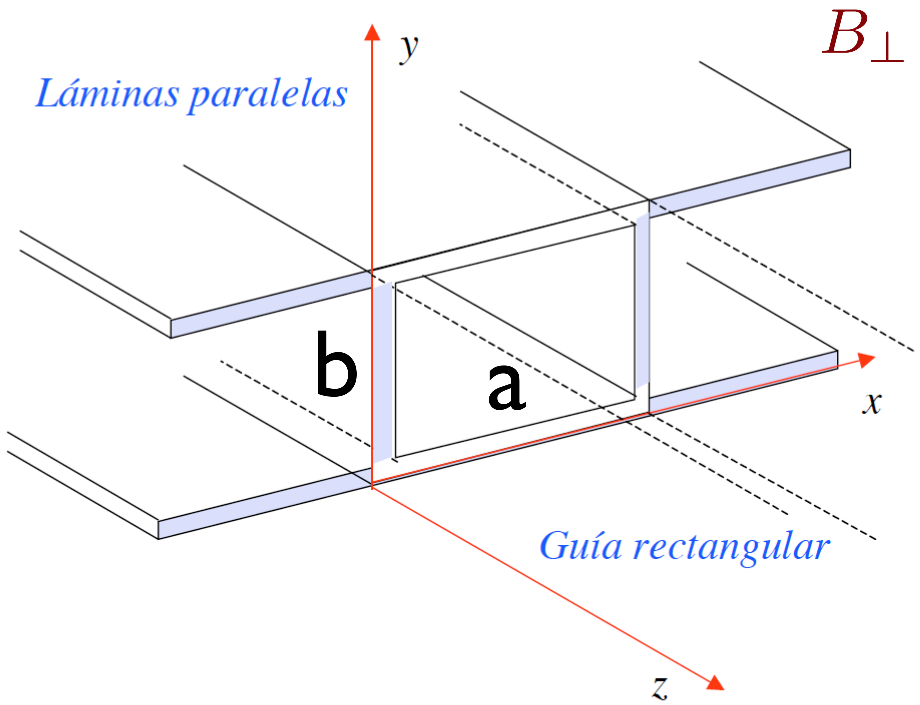
$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + [(\omega/c)^2 - k_g^2]XY = 0$$

Dividiendo por XY: $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \qquad -k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k_g^2 = 0$

La solución general:

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x) \qquad Y(y) = C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

Determinamos las constantes con las condiciones de contorno:



$$B_\perp = 0 \Rightarrow B_x = 0 \quad (x=0,\ x=a) \Rightarrow B_y = 0 \quad (y=0,\ y=b)$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}) = 0 \ (x=0,\ x=a)$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}) = 0 \quad (y=0,\ y=b)$$

Ondas TE: $E_z = 0$ $\qquad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$

$$B_x = 0 \quad (x=0,\ x=a) \Rightarrow \frac{dX}{dx} = 0 \Rightarrow A = 0; \quad k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = m\pi/a$$

$$B_y = 0 \quad (y=0,\ y=b) \Rightarrow \frac{dY}{dy} = 0 \Rightarrow C = 0; \quad k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = n\pi/b$$

La solución general: $B_z = B_0 \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)$

modo TE_{mn} (primer índice se asocia a la dimensión más grande)

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k_g^2 = 0 \qquad \Rightarrow k_g = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]}$$

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn}$$

el vector de onda es imaginario

ω_{mn} es la frecuencia de corte para el modo TE_{mn}

problema: 3.16, 3.17

La frecuencia de corte más baja corresponde a: $\mathrm{TE}_{10} \Rightarrow \omega_{10} = c\pi/a$

problema: 3.19

A frecuencias menores de la frecuencia de corte, la onda no se propaga.

$$k_g = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)}} > c$$

la velocidad de fase

La onda se propaga a la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = c\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)}^2 < c$$

Conocido *Bz*, a partir de estas expresiones, determinamos el resto de las componentes de campo E y B. Ondas TE: $E_z=0$. *Pagina 5*

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y})$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x})$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y})$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k_g^2}(k_g \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x})$$

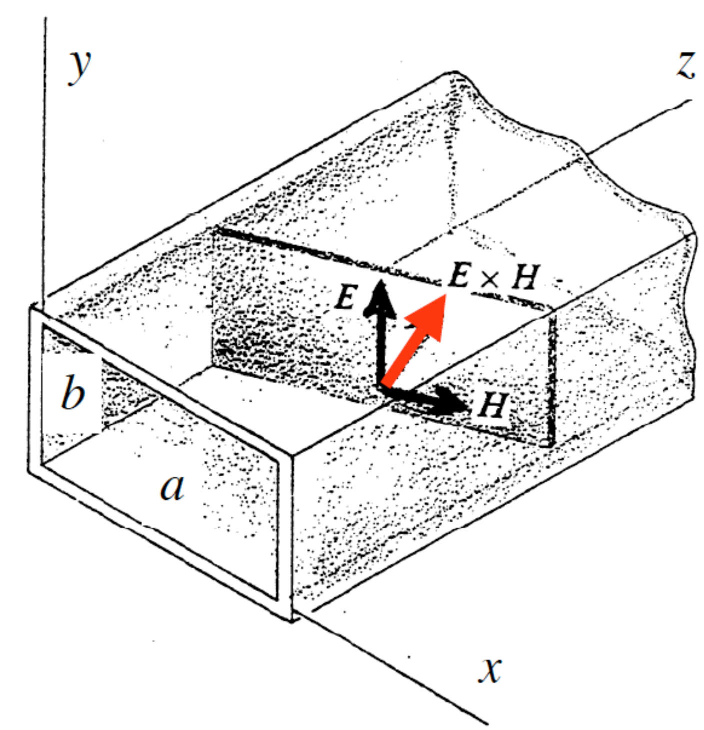
Veamos ahora el transporte de energía. Para ello vamos a considerar este caso particular:

Las **partes reales** de los campos para el modo TE_{10}

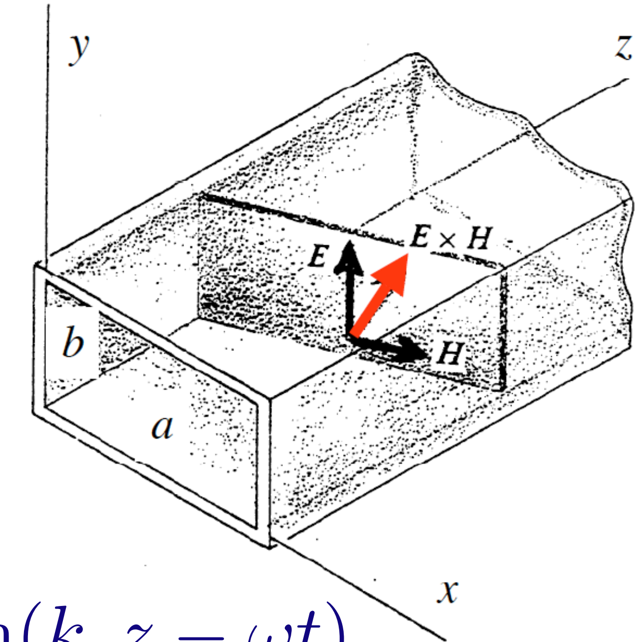
$$E_y = E_0 \sin(\frac{\pi}{a}x) \cos(k_z z - \omega t)$$

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin(\frac{\pi}{a}x) \cos(k_z z - \omega t)$$

$$B_z = -\frac{\pi}{\omega a} E_0 \cos(\frac{\pi}{a}x) \sin(k_z z - \omega t)$$



El vector de Poynting es:



$$\vec{S} = \mathrm{Re}[\vec{E} \times \vec{H}] = -E_y H_x \hat{u}_z + E_y H_z \hat{u}_x$$

$$-E_y H_x = S_z = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2(\frac{\pi}{a} x) \cos^2(k_z z - \omega t)$$

$$E_y H_z = S_x = \frac{\pi}{\mu_0 \omega a} E_0^2 \sin(\frac{\pi}{a} x) \cos(\frac{\pi}{a} x) \cos(k_z z - \omega t) \sin(k_z z - \omega t)$$

El valor medio del vector de Poynting en la sección de guía: $0<x<a$ y en un semi-período es:

$$\langle S_z \rangle = \frac{k_z}{\mu_0 \omega} E_0^2 \frac{1}{a} \frac{2}{T} \int_0^a \sin^2(\frac{\pi}{a} x) dx \int_0^{T/2} \cos^2(k_z z - \omega t) dt = \frac{1}{4} \frac{k_z}{\mu_0 \omega} E_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{k_z c^2}{\omega} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 . v_g$$

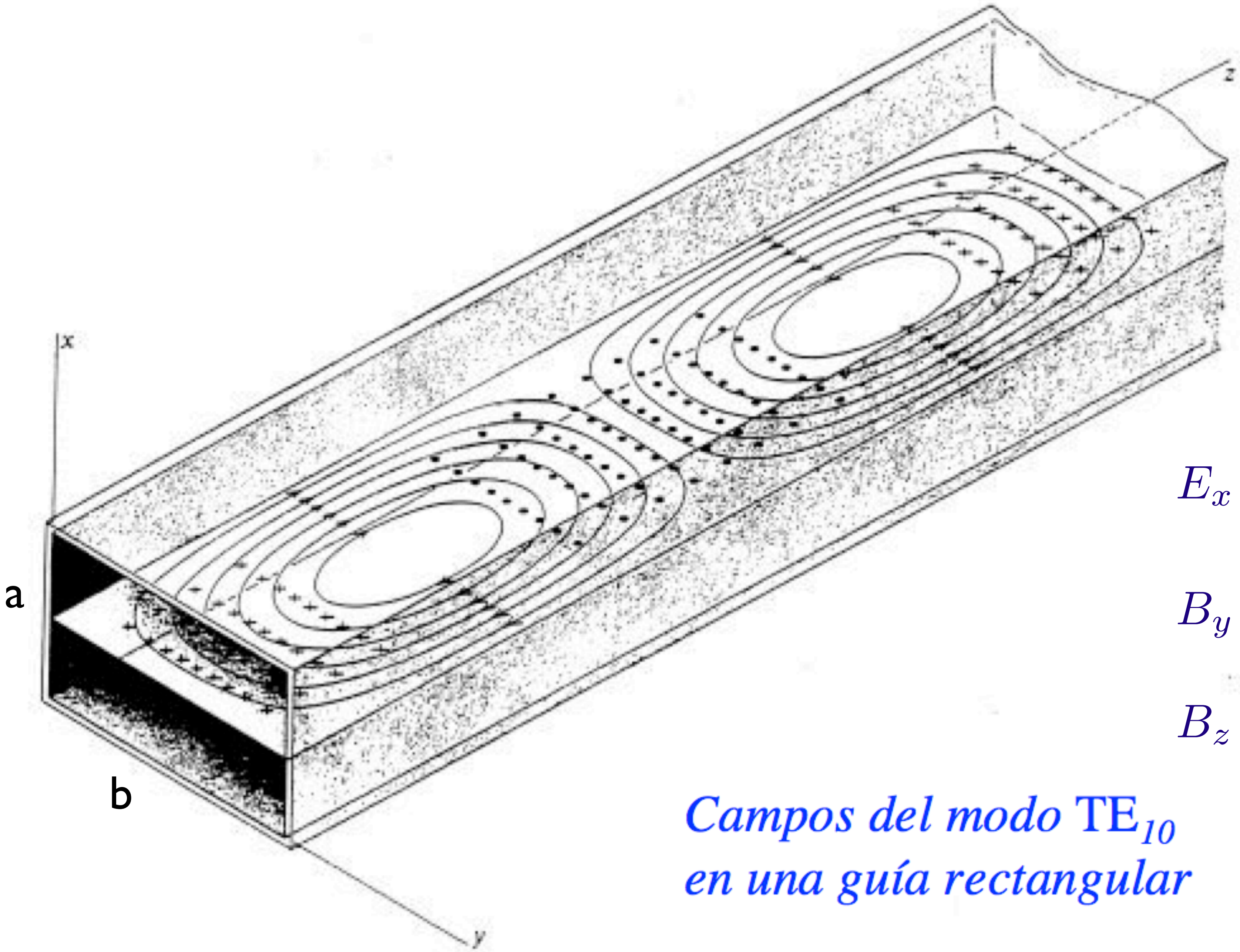
$$\langle S_x \rangle = \langle \frac{\pi}{\mu_0 \omega a} E_0^2 \sin(\frac{\pi}{a} x) \cos(\frac{\pi}{a} x) \cos(k_z z - \omega t) \sin(k_z z - \omega t) \rangle = 0$$

Lo que indica que la energía se propaga en dirección z con la velocidad de grupo, pues

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

mientras la componente x no transporta energía neta, ya que promedia a cero

problema: 3.20



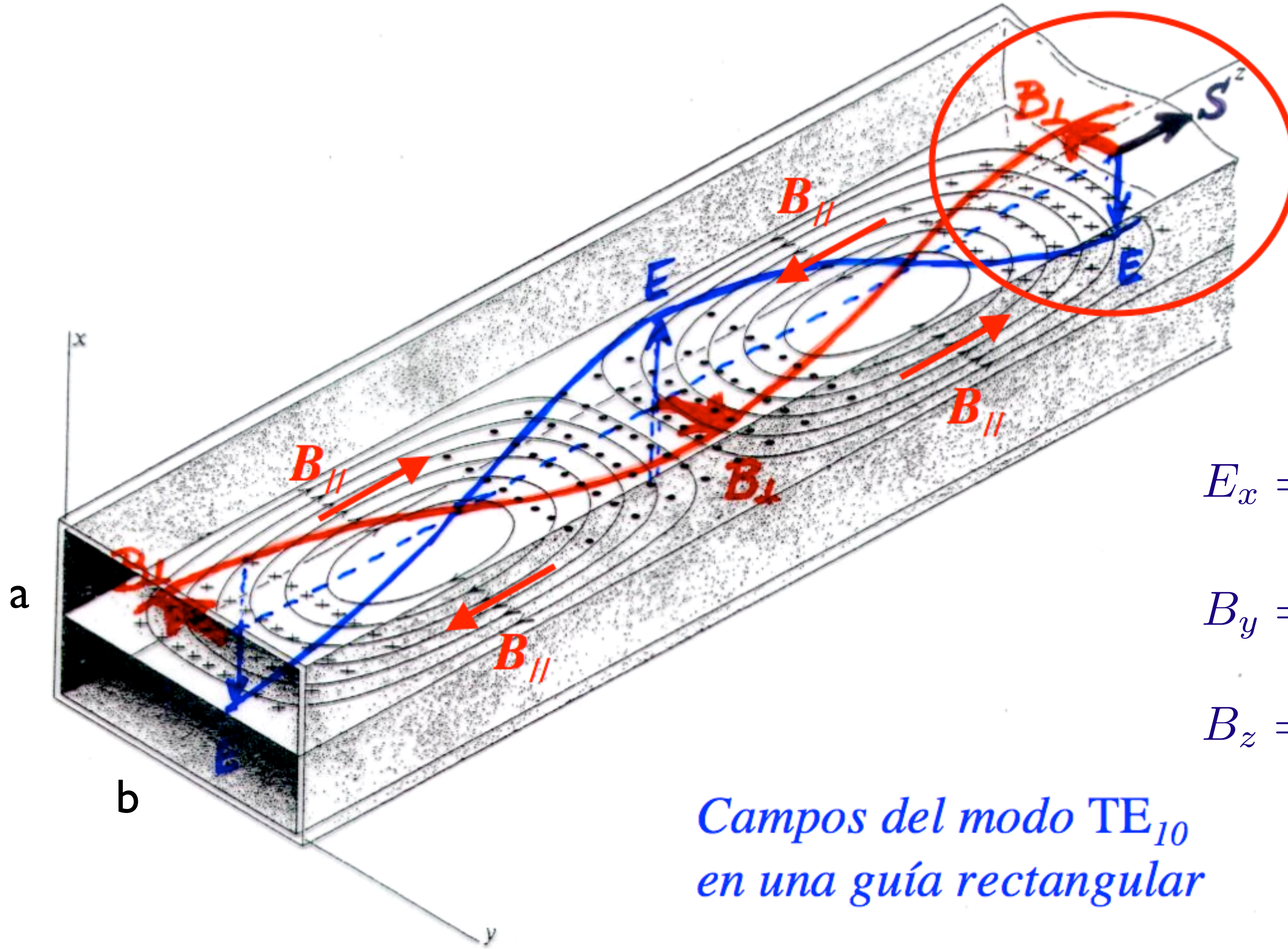
$$E_x = E_0 \sin(\frac{\pi}{b} y) \cos(k_g z - \omega t)$$

$$B_y = -\frac{k_g}{\omega} E_0 \sin(\frac{\pi}{b} y) \cos(k_g z - \omega t)$$

$$B_z = -\frac{\pi}{\omega b} E_0 \cos(\frac{\pi}{b} y) \sin(k_g z - \omega t)$$

Campos del modo TE_{10}
en una guía rectangular

Líneas E y H correspondientes a la propagación de una onda TE_{10}. Los óvalos son líneas de H. Las líneas de E son rectas verticales representadas por los puntos y cruces



Campos del modo TE_{10} en una guía rectangular

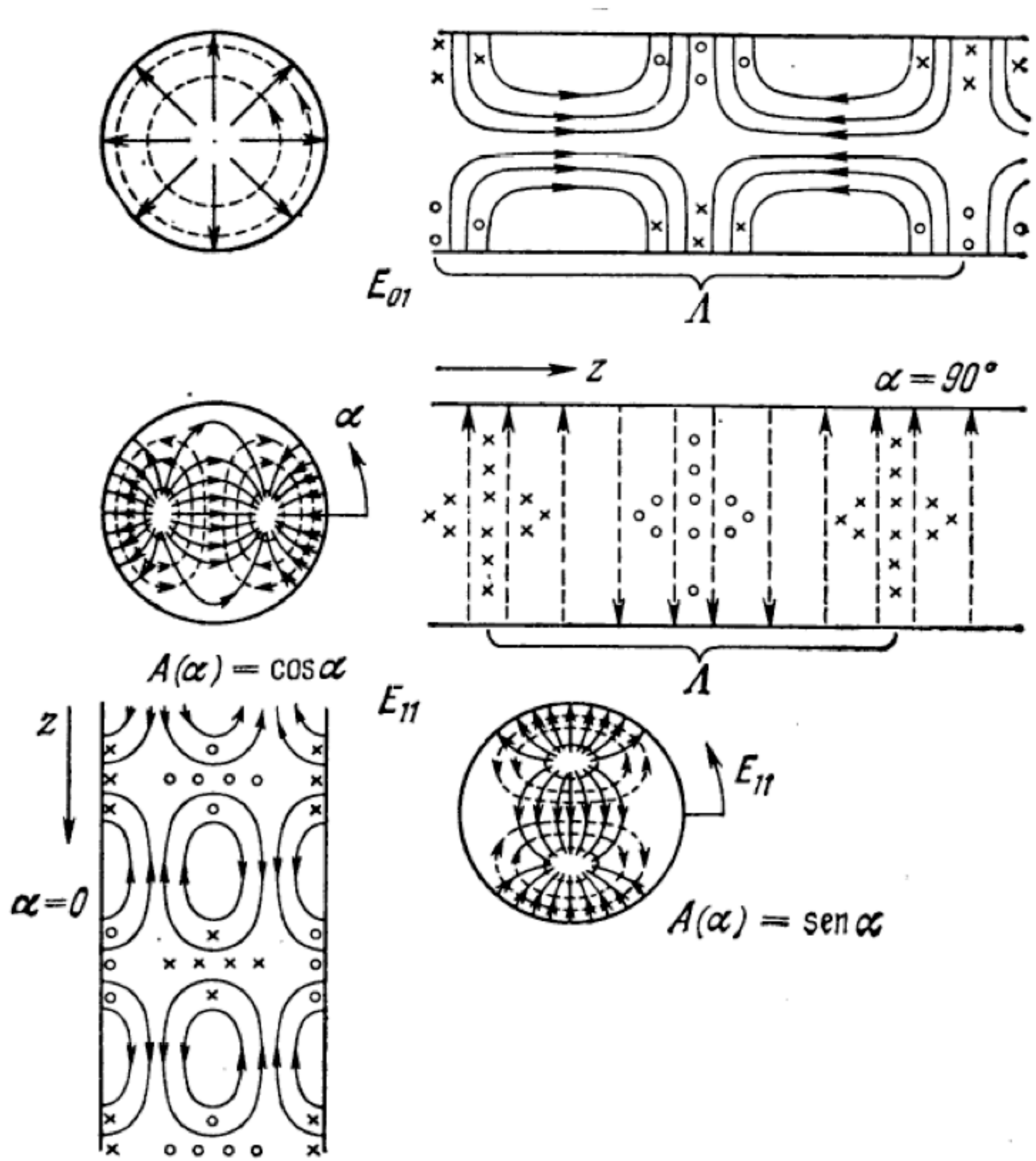
$$E_x = E_0 \sin(\frac{\pi}{b}y)\cos(k_g z - \omega t)$$

$$B_y = -\frac{k_g}{\omega}E_0 \sin(\frac{\pi}{b}y)\cos(k_g z - \omega t)$$

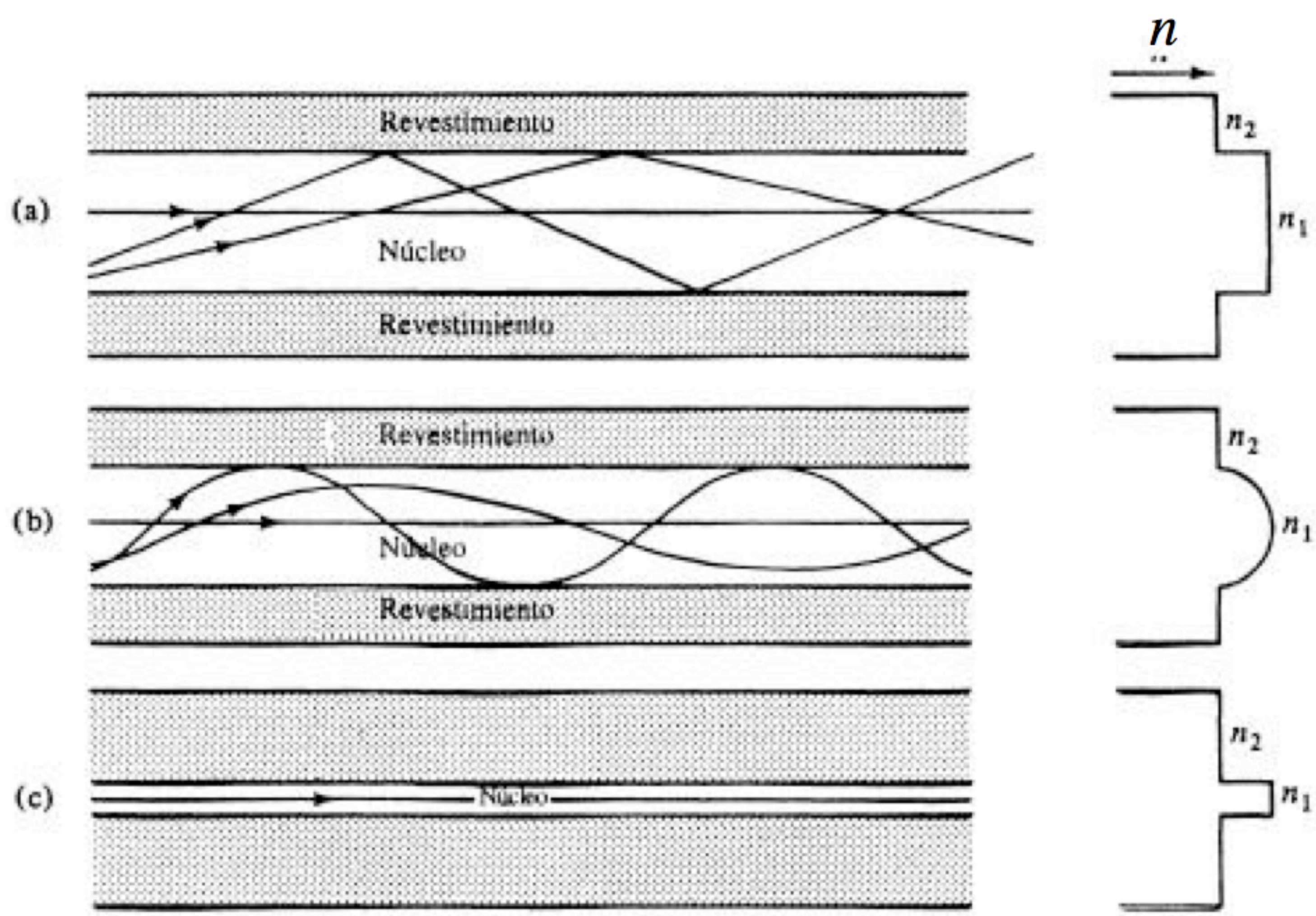
$$B_z = -\frac{\pi}{\omega b}E_0 \cos(\frac{\pi}{b}y)\sin(k_g z - \omega t)$$

Líneas E y H correspondientes a la propagación de una onda TE_{10}. Los óvalos son líneas de H. Las líneas de E son rectas verticales representadas por los puntos y cruces

Guías cilíndricas, modos TM



Guía dieléctrica: fibra óptica



Fibra multimodo, índice escalonado

Fibra multimodo, índice progresivo

Fibra unimodo, índice escalonado

Las ondas transversales eléctricas y magnéticas, TEM, no se propagan por las ondas de guía huecas.

Si Ez=0 y Bz=0:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})\hat{z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z} = 0$$

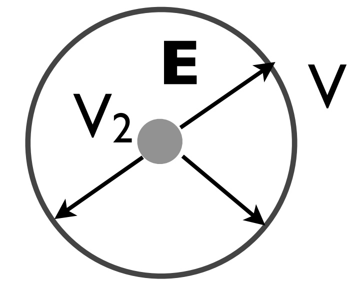
Tenemos un vector que tanto la divergencia como el rotacional es cero , es un vector que satisface la ecuación de Laplace. Las condiciones de contorno requieren que

$$E_{\parallel} = 0 \qquad B_{\perp} = 0$$

Como la ecuación de Laplace no admite máximos ni mínimos, el potencial es cte y por tanto el campo eléctrico es cero, no existe onda TEM en una guía hueca.

Necesitamos al menos dos conductores (línea de transmisión) para establecer un campo eléctrico entre ellos. También habrá campo magnético cuando lleven corriente.

Línea de transmisión coaxial (modo TEM)



Necesitamos al menos dos conductores (línea de transmisión) para establecer un campo eléctrico entre ellos.

Supongamos que trabajamos con ondas TEM, $E_z = B_z = 0$. Aplicando las ecuaciones de Maxwell, página 4

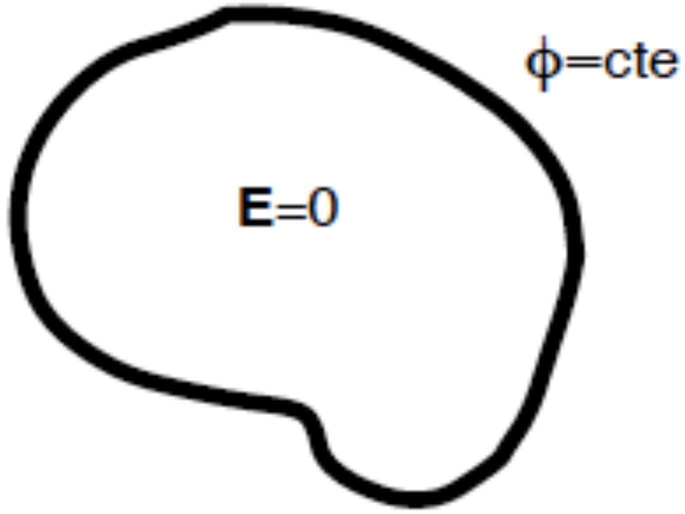
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

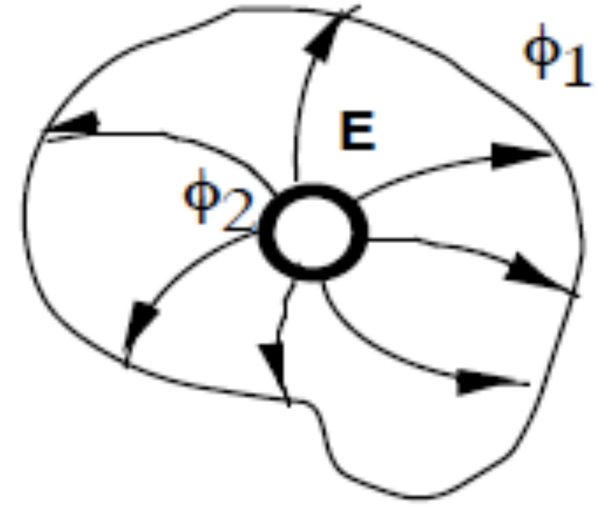
Ecuaciones de la electrostática y magnetostática

$$cB_y = E_x \quad cB_x = -E_y$$

volveremos sobre las onda TEM mas adelante



guía de onda



línea de transmisión

problema 3.5

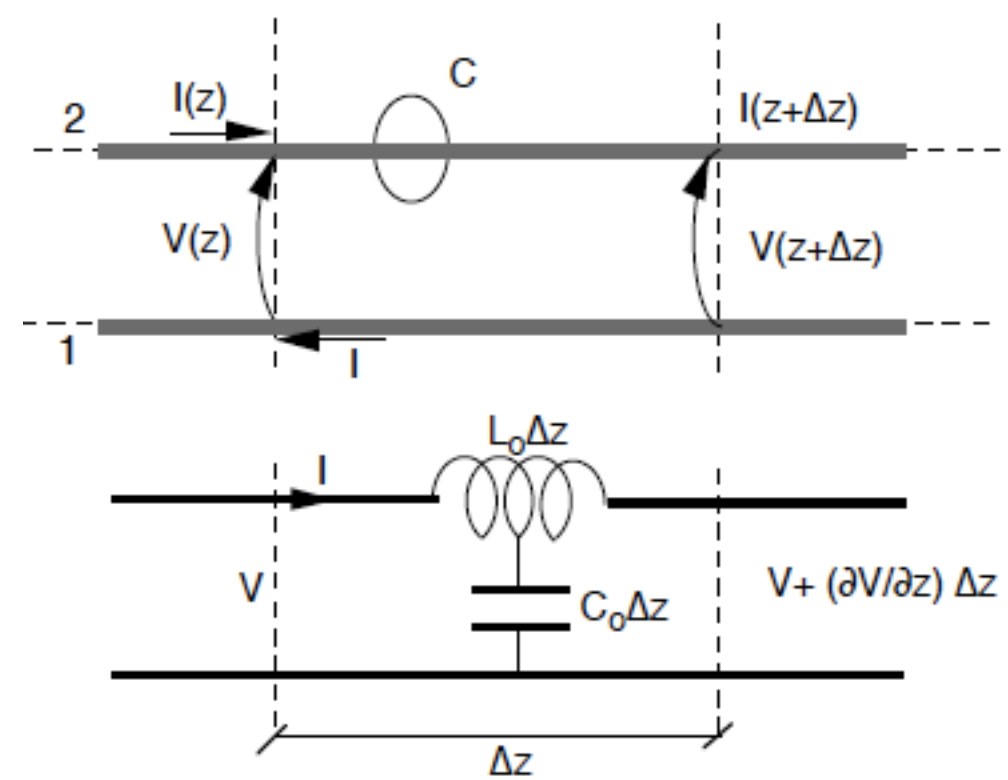
La formulación estática transversal permite estudiar las líneas como circuitos con parámetros (Capacidad y Autoinducción) distribuidos a lo largo de la misma.

Voltaje entre los conductores
(no d.p.p. campos variables!)

$$V(z,t) = \int_1^2 \mathbf{E}.d\mathbf{l}$$

$$I(z,t) = \oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{l}$$

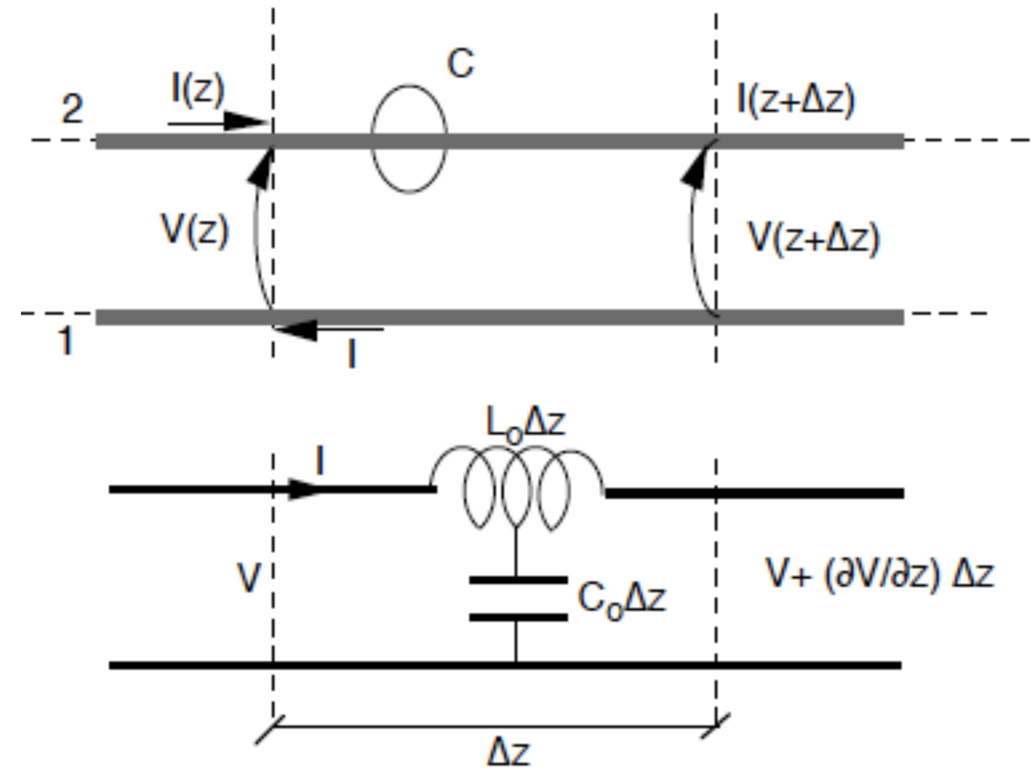
intensidad en el conductor



Podemos analizar la línea como un filtro con una inductancia, L_0, y una capacidad, C_0 por unidad de longitud

Si la corriente de la línea va variando, *I(z, t)*, la inductancia nos dará una caída de potencial:

$$\Delta V = V(z+\Delta z) - V(z) = -L_0 \Delta z \frac{dI}{dt}$$



En el límite: $\Delta z \to 0$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L_0 \frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \int I dt$$

Si el potencial está variando, *V(z, t)*, debe haber cierta carga que se suministra a la capacidad. Si tomamos un trozo de línea, la carga sobre él es: $q = -C_0 \Delta z V$. La carga varía si la corriente en $I(z)$ es distinta a la corriente en $I(z+\Delta z)$

$$\Delta I = I(z+\Delta z) - I(z) = -C_0 \Delta z \frac{dV}{dt}$$

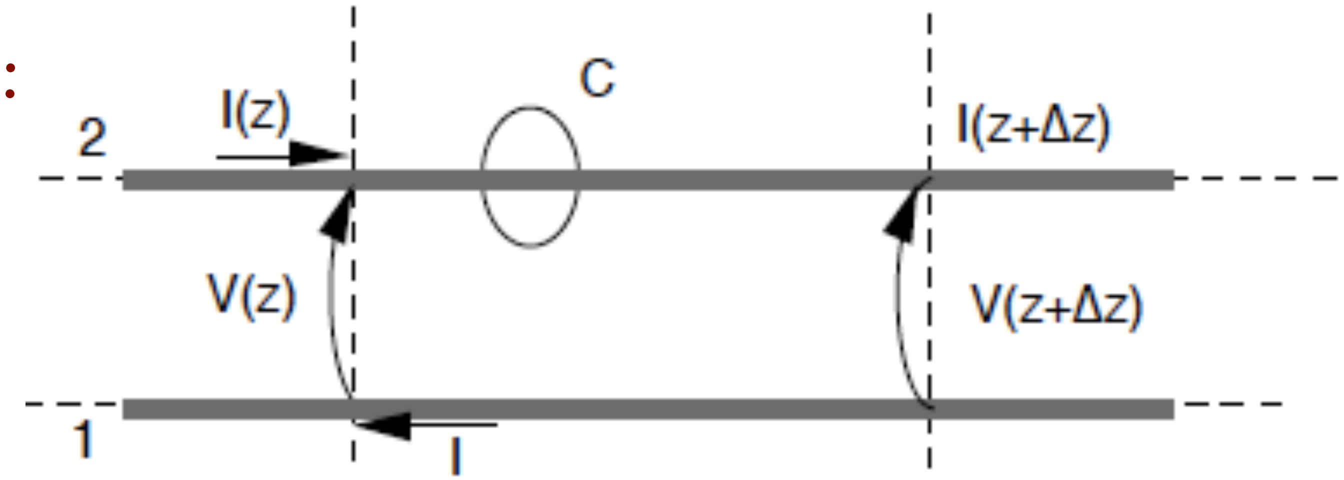
En el límite: $\Delta z \to 0$

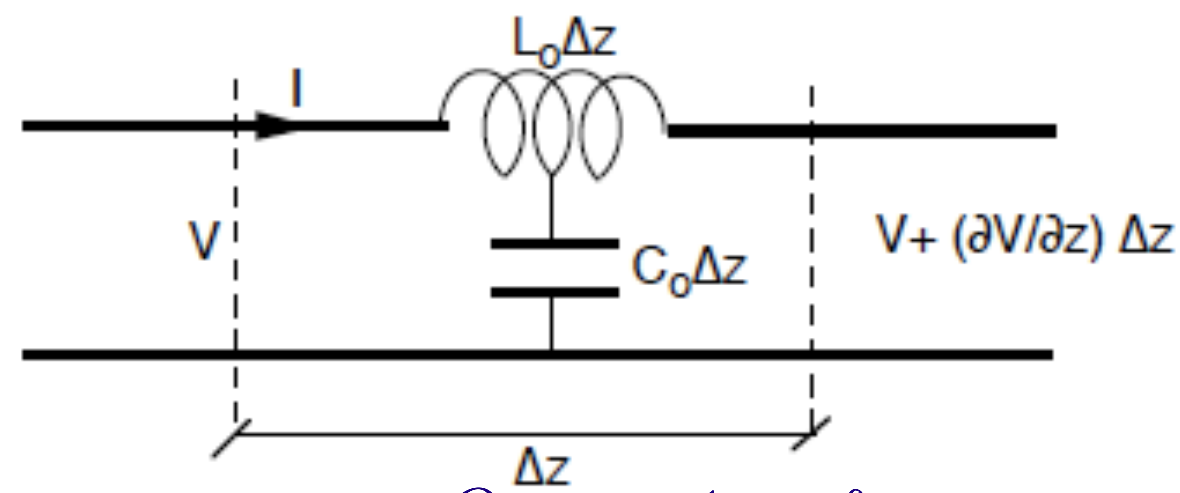
$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Ecuaciones básicas de línea de transmisión:

Capacidad por unidad de longitud

Autoinducción por unidad de longitud





$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V} \qquad L_0 = \frac{\Phi_0}{I}$$

$Q_0, \quad \Phi_0$ carga y flujo magnético por unidad de longitud inducidas por las ondas.

ΔV se debe a la fuerza electromotriz, f.e.m, inducida

ΔI se debe a la carga acumulada

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\int I dt$$

$$\Delta V = L\frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z = -L_0 \Delta z \frac{\partial I}{\partial t} \rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}}$$

la corriente variable da un gradiente de voltaje

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial z}\Delta z = -C_0 \Delta z \frac{\partial V}{\partial t} \rightarrow \boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$

el gradiente de corriente es proporcional a la variación del voltaje respecto del tiempo

Es fácil deducir una ecuación de onda para V y para I

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ecuación unidimensional de la onda que se propaga con velocidad:

$$v = \frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$$

La solución general para el voltaje: $V(z,t)=V^+(z-vt)+V^-(z+vt)$

y para la intensidad: $I(z,t) = I^+(z-vt)+I^-(z+vt)$

$V^+(z-vt)$, $I^+(z-vt)$ se propagan hacia $+z$

$V^-(z+vt)$, $I^-(z+vt)$ se propagan hacia $-z$ (onda reflejada)

$$I(z,t) = \frac{1}{Z_0}(V^+(z-vt) - V^-(z+vt))$$

Siendo Z_0 la impedancia característica de la línea: la relación entre voltaje y la corriente de cada onda individual.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

impedancia de un circuito LC (filtro)

$$Z_0 = \frac{V^i}{I^i}$$ onda incidente

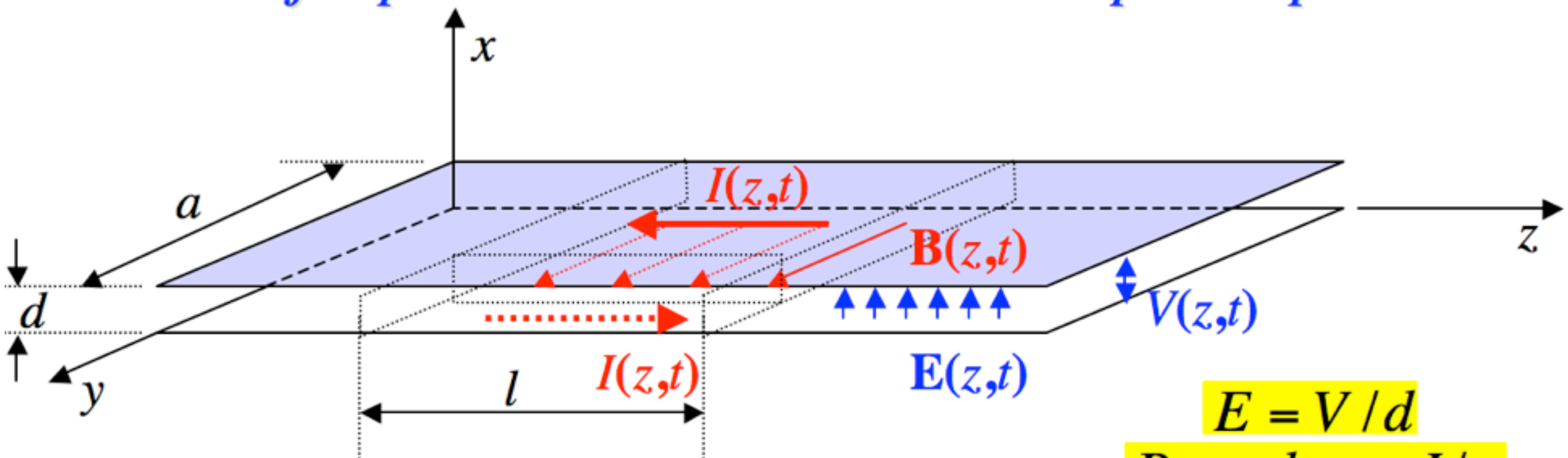
$$Z_0 = -\frac{V^r}{I^r}$$ onda reflejada

problema 3.5, 3.6

Línea de transmisión placas paralelas (modo TEM)

problema: 3.7, 3.8, 3.9

Ejemplo: Línea de transmisión de placas paralelas



$$E = V/d$$

$$B = \mu_0 k = \mu_0 I/a$$

$$C \approx \varepsilon \frac{a \cdot l}{d} \Rightarrow C_0 = \frac{C}{l} \approx \varepsilon \frac{a}{d}$$

$$L = \Phi/I = \frac{B \cdot d.l}{I} \approx \mu_0 \frac{\cancel{I} \cdot d.l}{a \cdot \cancel{I}} \Rightarrow L_0 = \frac{L}{l} \approx \mu_0 \frac{d}{a}$$

Velocidad de propagación: $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ *(Igual que en un dieléctrico infinito)*

Impedancia característica: $Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{d}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ *Depende de las dimensiones de la línea*

3.-Ondas electromagnéticas en medios limitados:

3.0.- Condiciones de contorno de las ondas EM [RMC, § 16.6]

3.1.- Reflexión y refracción de las ondas EM, fórmulas de Fresnel. [RMC, § 18.4][LC §12.1-12.2]

3.2.- Propagación de ondas guiadas: líneas de transmisión, modos TEM [FLS § 22.6-24.1]

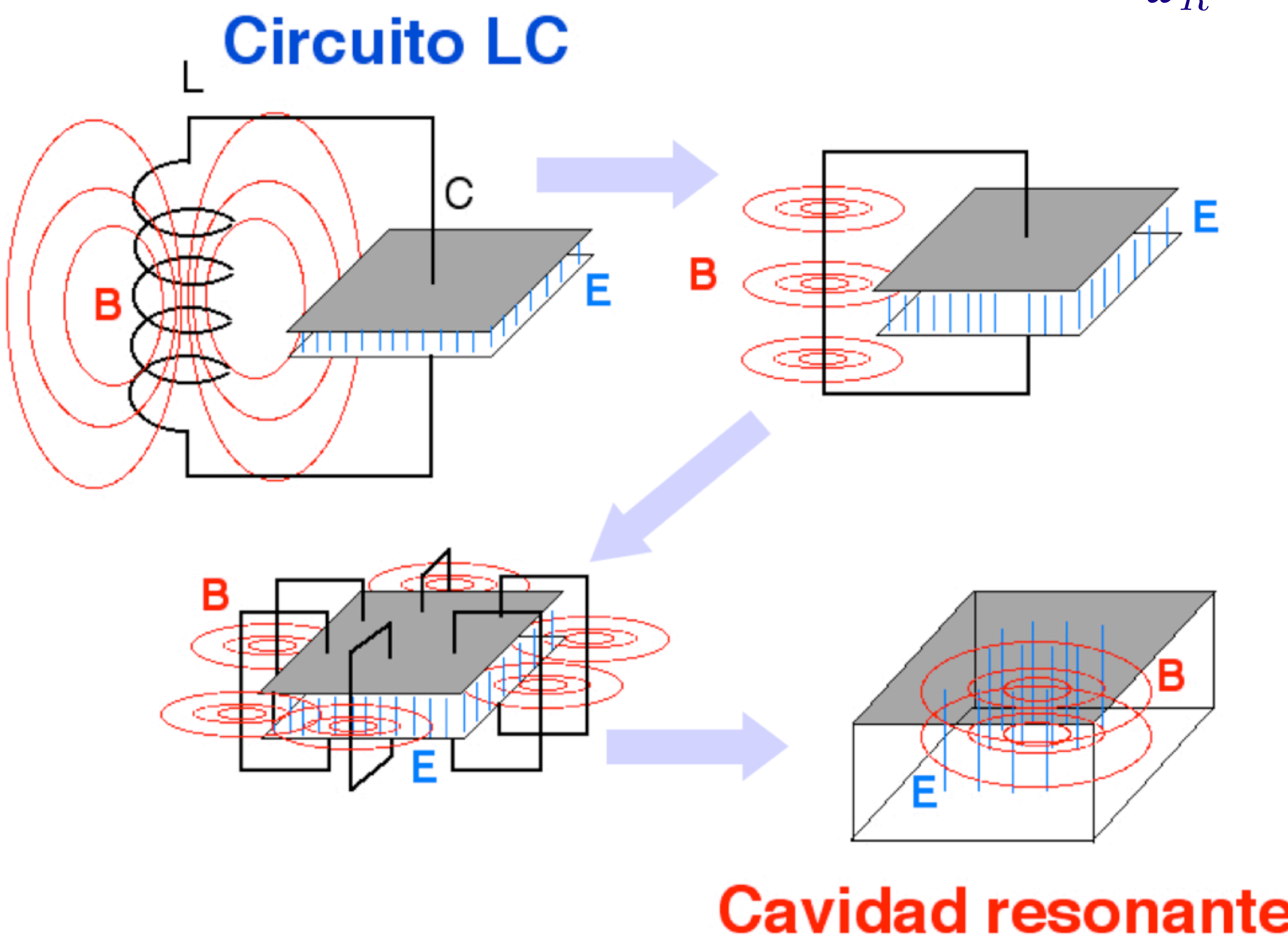
3.3.- Guías de onda rectangulares: modos TE, frecuencia de corte [FLS § 24.2-24.3-24.4-24-8] [RMC, § 18.7]

3.4.- Cavidades resonantes. [FLS § 23.2-23.3] [RMC, §18.8]

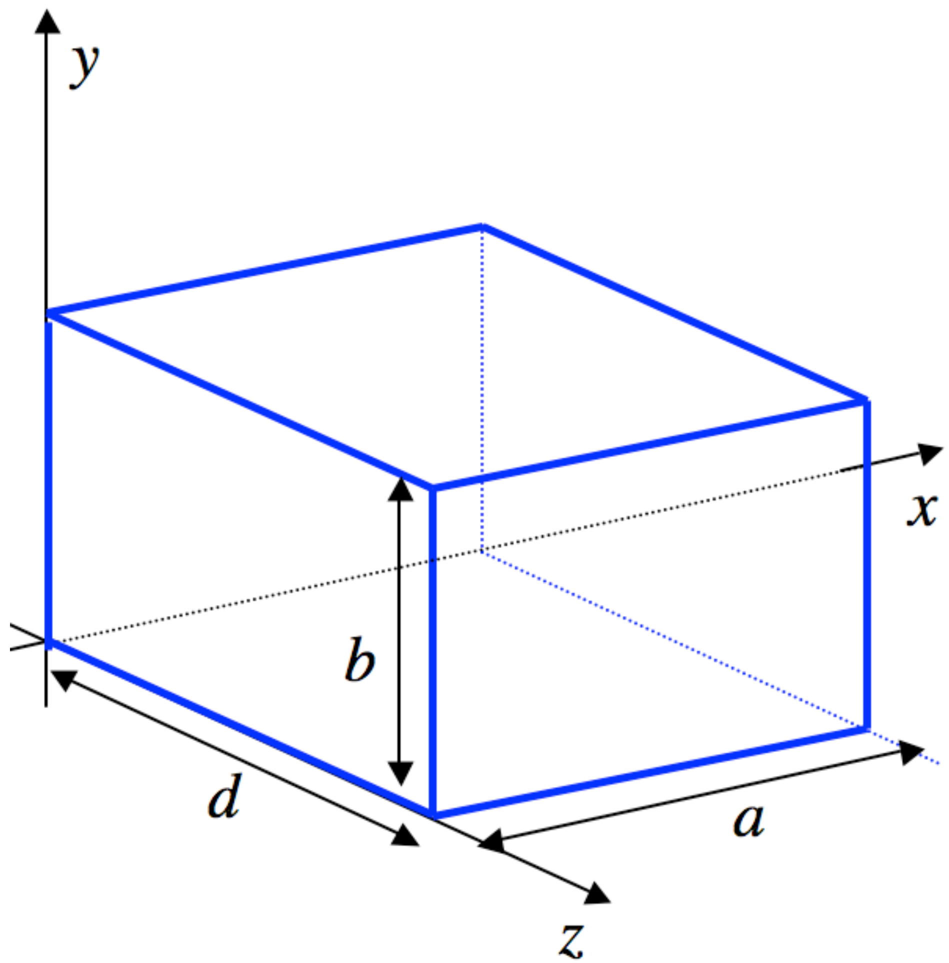
Cavidades resonantes

Una cavidad resonante puede analizarse como el límite de un circuito

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



O bien, como un trozo de guía corto-circuitado en sus extremos z=0 ; z=d. La ecuación de Maxwell y las condiciones de contorno nos dan la solución:



$$E_t = 0, \quad B_n = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

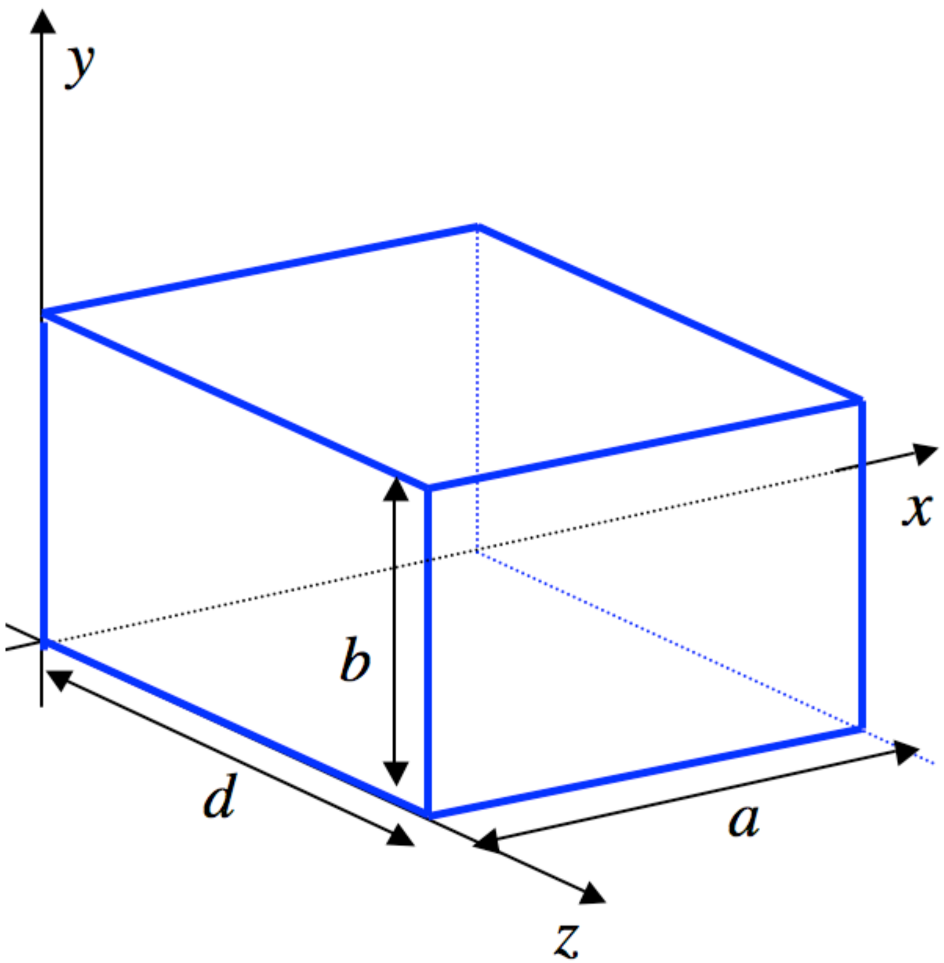
$$(1.\mathrm{a}) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0$$

$$E_t = 0 \qquad \begin{array}{l} E_x(y=0) = 0 \text{ y } E_x(z=0) = 0 \\ E_x(y=b) = 0 \text{ y } E_x(z=d) = 0 \end{array}$$

Solución general:

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin k_y y \sin k_z z e^{-i\omega t}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \qquad\qquad k_z = \frac{n\pi}{d}$$



$$(1.b) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$E_t = 0 \qquad \begin{array}{l} E_y(x=0) = 0 \;\text{ y }\; E_y(z=0) = 0 \\ E_y(x=a) = 0 \;\text{ y }\; E_y(z=d) = 0 \end{array}$$

$$E_y = E_2 f_2(y) \sin k_x x \sin k_z z e^{-i\omega t} \qquad\qquad k_x = \frac{l\pi}{a}$$

$$(1.c) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0$$

$$E_t = 0 \qquad \begin{array}{l} E_z(x=0) = 0 \;\text{ y }\; E_z(y=0) = 0 \\ E_z(x=a) = 0 \;\text{ y }\; E_z(y=b) = 0 \end{array}$$

$$E_z = E_3 f_3(z) \sin k_x x \sin k_y y e^{-i\omega t}$$

$$\nabla . \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1 = \cos k_x x \ ; \ f_2 = \cos k_y y \ ; \ f_3 = \cos k_z z$$

$$k_x E_1 + k_y E_2 + k_z E_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k} \perp \vec{E}$$

$$(1.a) \ \Rightarrow \ k_x^2 E_x + k_y^2 E_x + k_z^2 E_x - \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2} - \frac{4\nu^2}{c^2} = 0$$

Los campos magnéticos pueden obtenerse de igual forma, pero anulando las componentes normales de B en las paredes de la cavidad. Obtenemos así:

$$B_x = B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$B_y = B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$B_z = B_{0z} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{-i\omega t}$$

Las frecuencias de resonancia valen, como antes:

$$\omega_R = c\sqrt{\frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{d^2}}$$

Los campos y las frecuencias de resonancia quedan así determinados para cualquier combinación de índices l,m,n. La única condición que deben de cumplir es que solamente uno de ellos puede anularse cada vez, pues de lo contrario se anularían todos los campos.

P.ej. si las dimensiones de la guía son: $a>b>d$, La frecuencia de resonancia más baja (fundamental) y los campos valen:

$$\omega_{1,1,0} = c\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

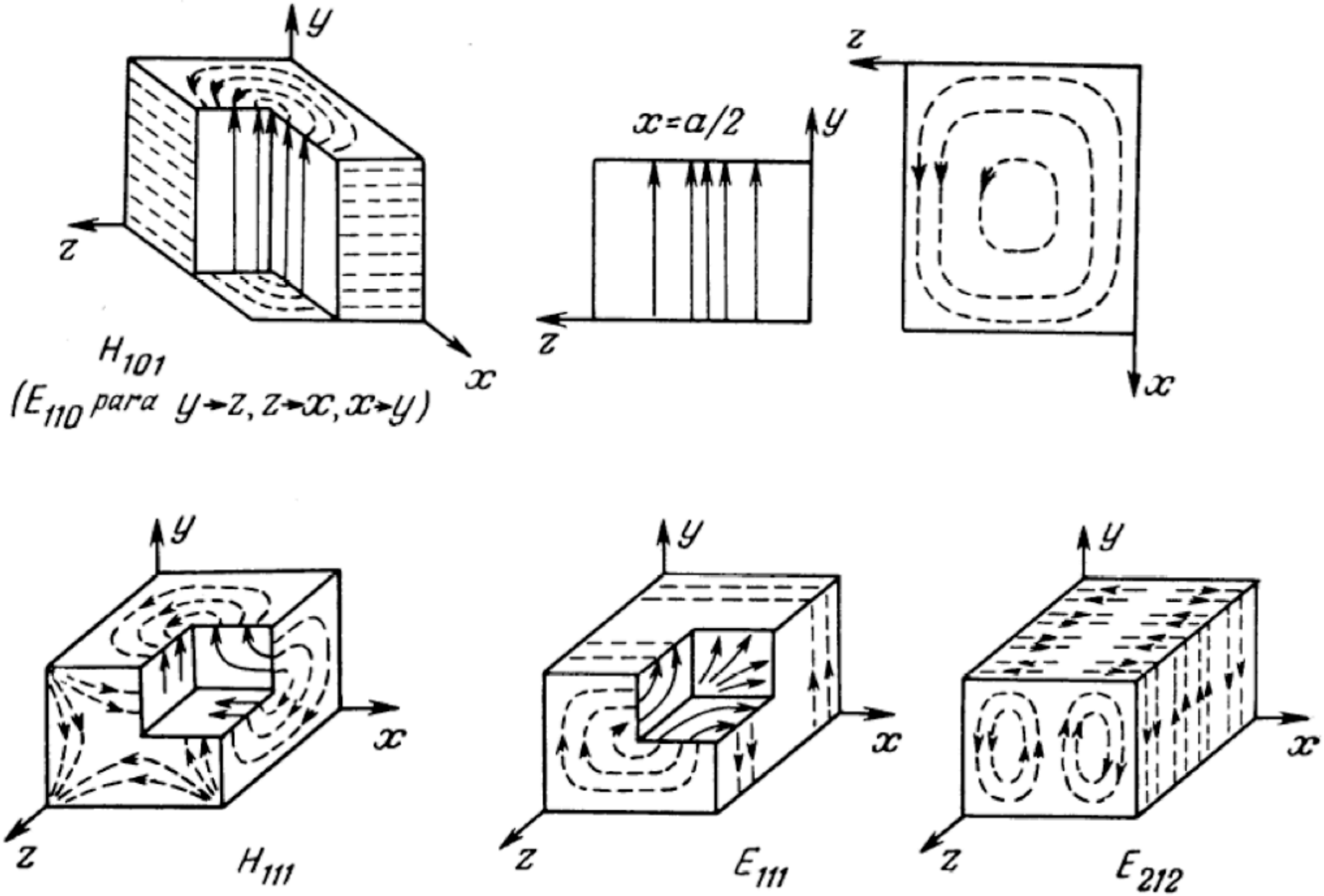
$$B_x = B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$B_y = B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

problema: 3.21

Cavidades rectangulares, varios modos



Cavidades cilíndricas, varios modos