

# Técnicas especiales para el cálculo de campos electrostáticos

1.1.- Ecuaciones de Maxwell para campos estáticos

1.2.- Las ecuaciones de Poisson y Laplace:  
propiedades generales de la solución.

1.3.- Soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

1.4.- El método de las Imágenes

**1.5.- Problemas de contorno en magnetostática.**

1.6.- Introducción a los métodos numéricos.

# Problemas de contorno en magnetostática

- Ecuaciones en magnetostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

- Método del potencial vector:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- En un medio lineal e isótropo  $\mu = cte$

Ecuación vectorial de Poisson

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

- Potencial escalar magnético (en ausencia de corrientes libres)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = -\vec{\nabla} V^* \quad \text{similitud a la electrostática}$$

- Medio lineal e isótropo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = -\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} V^*) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V^* = 0 \quad \text{LAPLACE}$$

- Medio imanado  $\vec{J} = 0$

a) Potencial escalar

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

$$\vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = -\vec{\nabla} V^*$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V^* = -\nabla^2 V^* = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \rho_M$$

POISSON

$$\nabla^2 V^* = -\rho_M = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

densidad de carga magnética

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

b) Potencial vector:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = 0 \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_M$$

POISSON

densidad de corriente magnética

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

- Material uniformemente imanado y sin corrientes libres,  $\vec{J} = 0$        $\vec{M} = cte$

$$\nabla^2 V^* = -\rho_M = \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0 \quad \nabla^2 V^* = 0 \quad \text{LAPLACE}$$

Las misma soluciones que en la electrostática

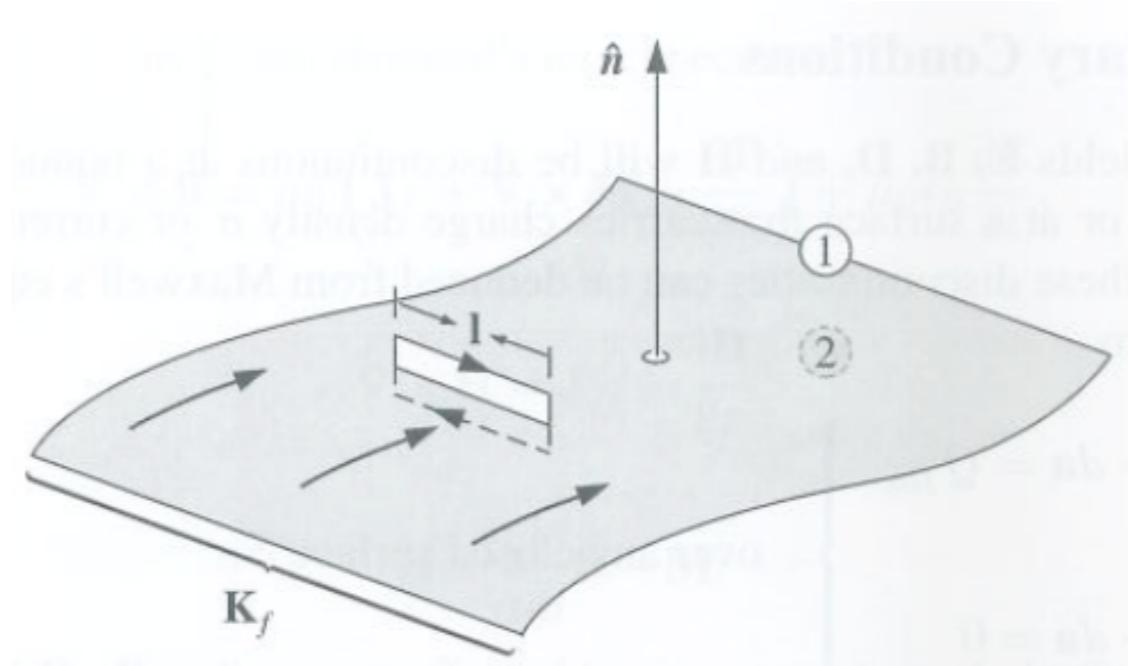
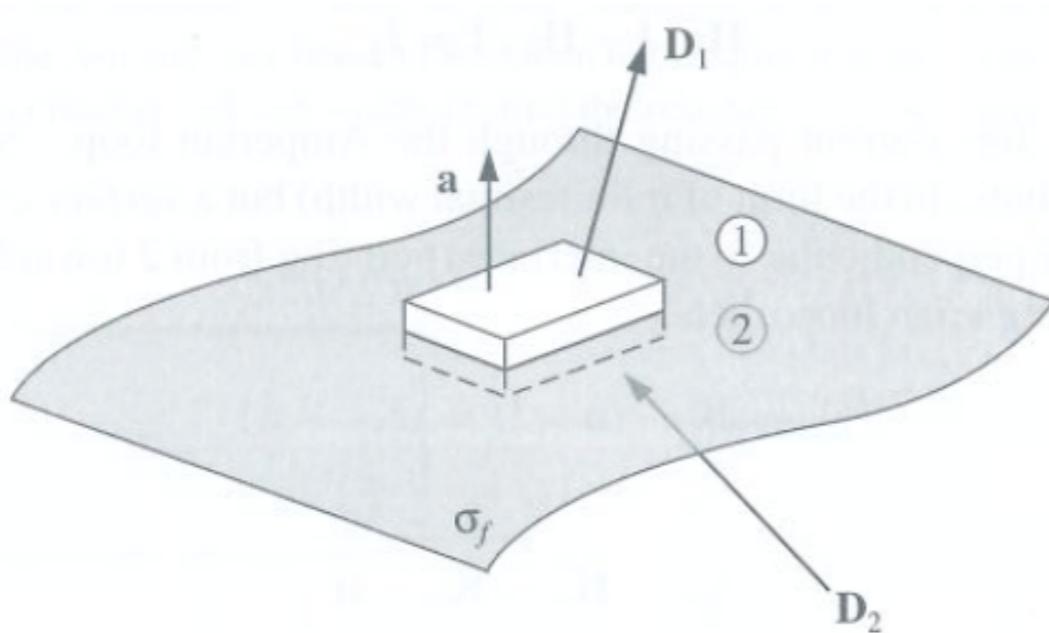
- Sistema con simetría esférica:

$$V^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

$P_n(\cos\theta)$  , polinomios de Legendre

$A_n, B_n$  , vendrán dados por las condiciones de contorno

# Condiciones de contorno



$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{fenc} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}$$

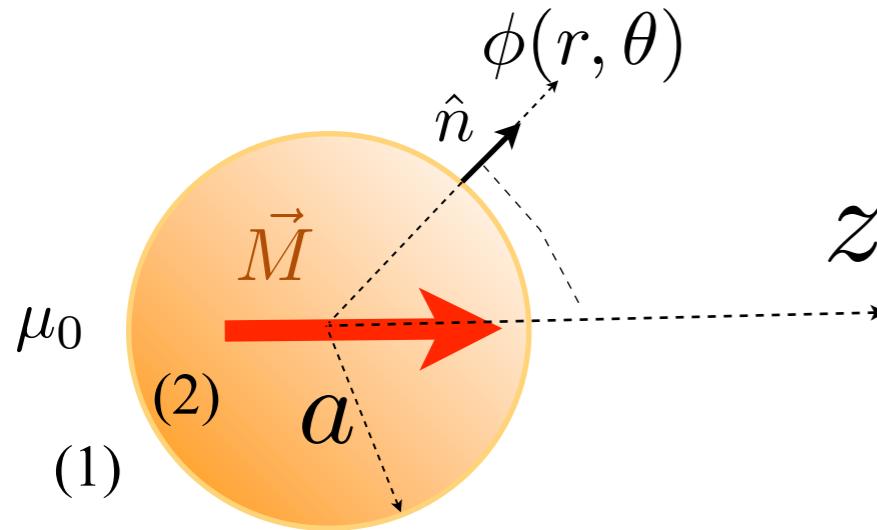
$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{fenc}$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{t1} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{t2} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}$$

## 10. Ejemplo: esfera uniformemente imanada (1.29)



$$V^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

(1) Fuera,  $r \geq a$

$$V_1^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

(2) Dentro,  $r \leq a$

$$V_2^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Condiciones de contorno,  $r = a$

a)  $H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow [V_1^*(r, \theta) = V_2^*(r, \theta)]_{r=a}$

b)  $B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow -\mu_0 \left[ \frac{\partial V_1^*}{\partial r} \right]_{r=a} = \mu_0 \left[ -\frac{\partial V_2^*}{\partial r} + M_r \right]_{r=a}$

$$B_{1n} = \mu_0 H_{1n}$$

$$B_{2n} = \mu_0 (H_{2n} + M_r)$$

$$M_r = \vec{M} \cdot \hat{n} = M \cos\theta$$

$$\left. \begin{array}{ll} V_1^*(r, \theta) = M \frac{a^3}{3} \frac{\cos \theta}{r^2} & r \geq a \\ V_2^*(r, \theta) = \frac{M}{3} r \cos \theta & r \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{H} &= -\vec{\nabla} \phi_M \\ &= -\frac{\partial \phi_{M_1}}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{M_1}}{\partial \theta} \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{H}_1(r > a, \theta) = \frac{1}{3} M \left( \frac{a}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \\ \vec{H}_2(r < a, \theta) = -\frac{1}{3} M (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = -\frac{M}{3} \hat{k} = -\frac{\vec{M}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{B}_1(r > a, \theta) = \mu_0 \vec{H}_1 = \mu_0 \frac{M}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \\ \vec{B}_2(r < a, \theta) = \mu_0 (\vec{H}_2 + \vec{M}) = \mu_0 \left( -\frac{\vec{M}}{3} + \vec{M} \right) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \end{cases}$$

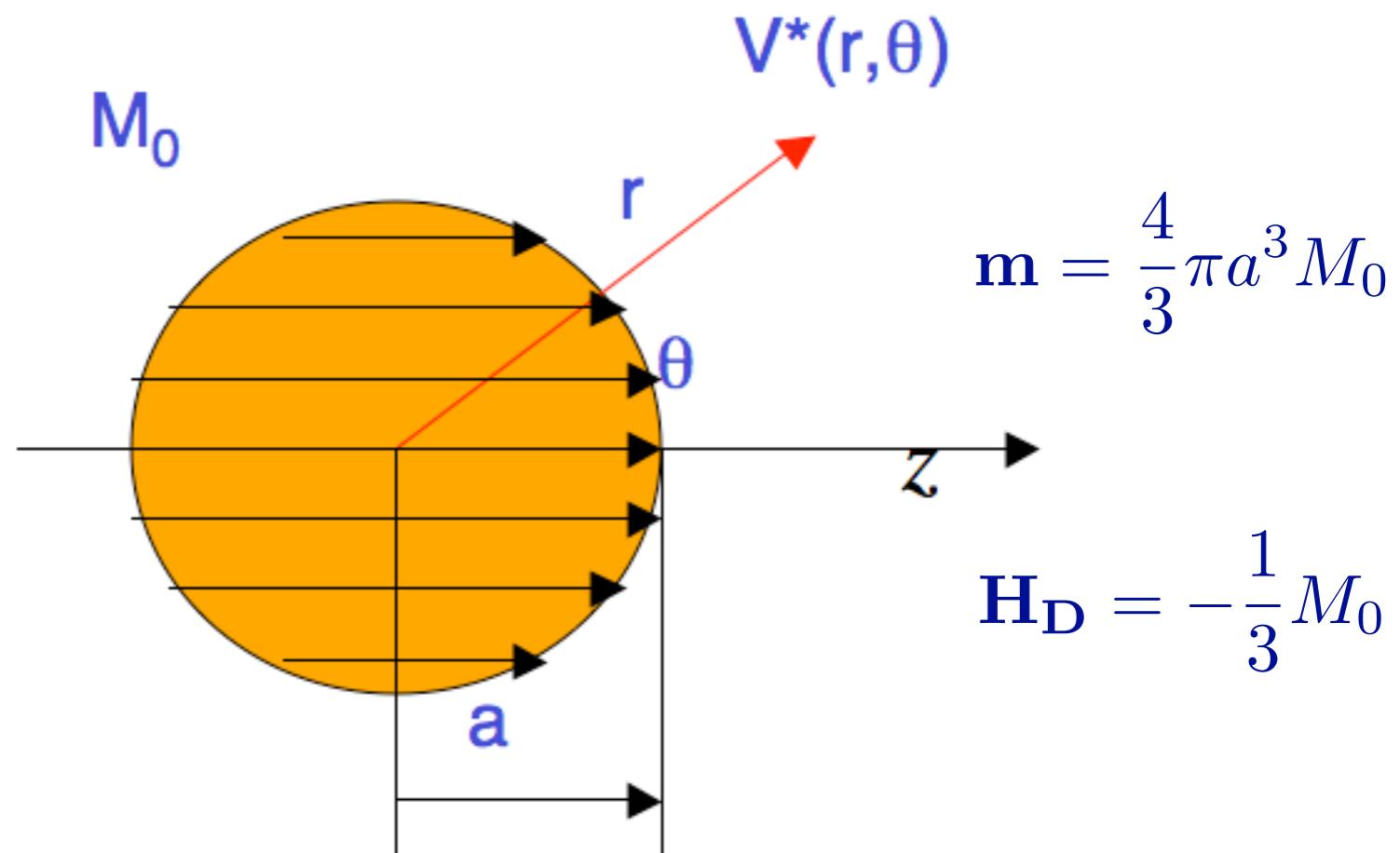
Momento dipolar magnético,  $\vec{m}_{esf.} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M}$

$$\vec{B}_r(r > a, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3} \cos \theta \hat{r}$$

$$\vec{B}_\theta(r > a, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3} \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{B}(r > a, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right]$$

# ESFERA UNIFORMEMENTE IMANADA (imán esférico)



$$\vec{B}_1(r > a, \theta) = \mu_0 \vec{H}_1 = \mu_0 \frac{M}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

$$\vec{B}_2(r < a, \theta) = \mu_0 (\vec{H}_2 + \vec{M}) = \mu_0 \left(-\frac{\vec{M}}{3} + \vec{M}\right) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

# ESFERA UNIFORMEMENTE IMANADA (imán esférico)

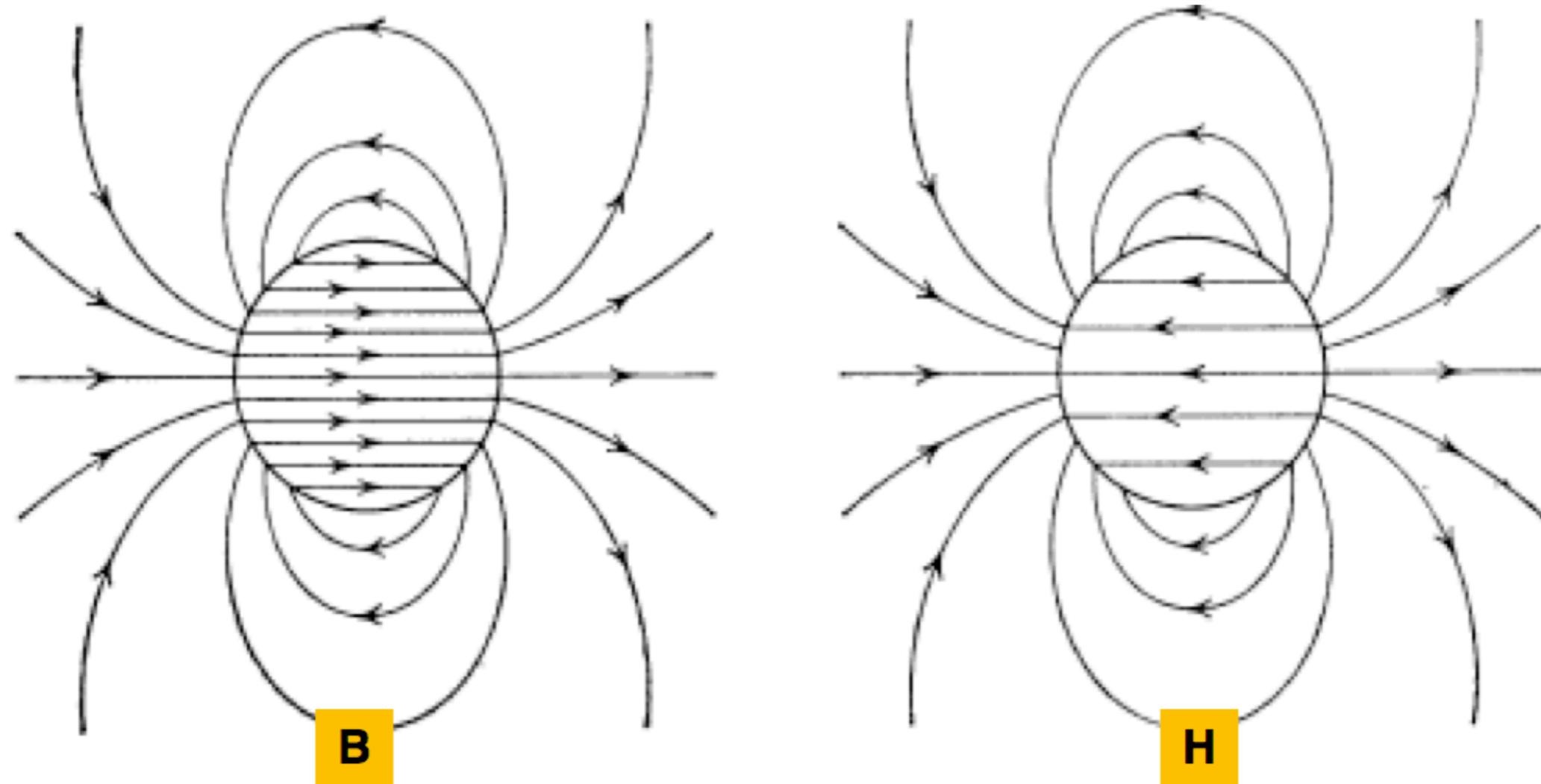
Fuera:

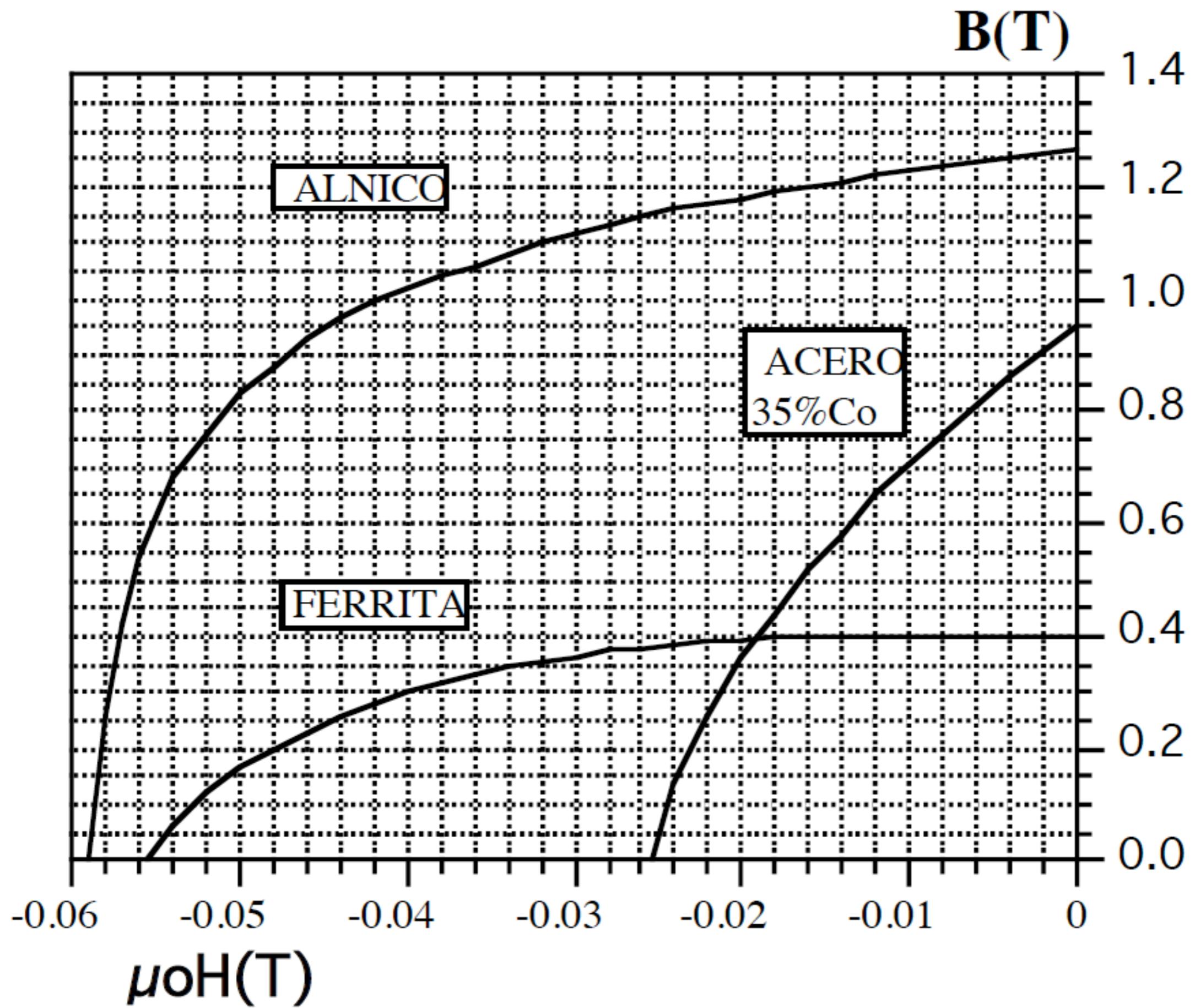
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

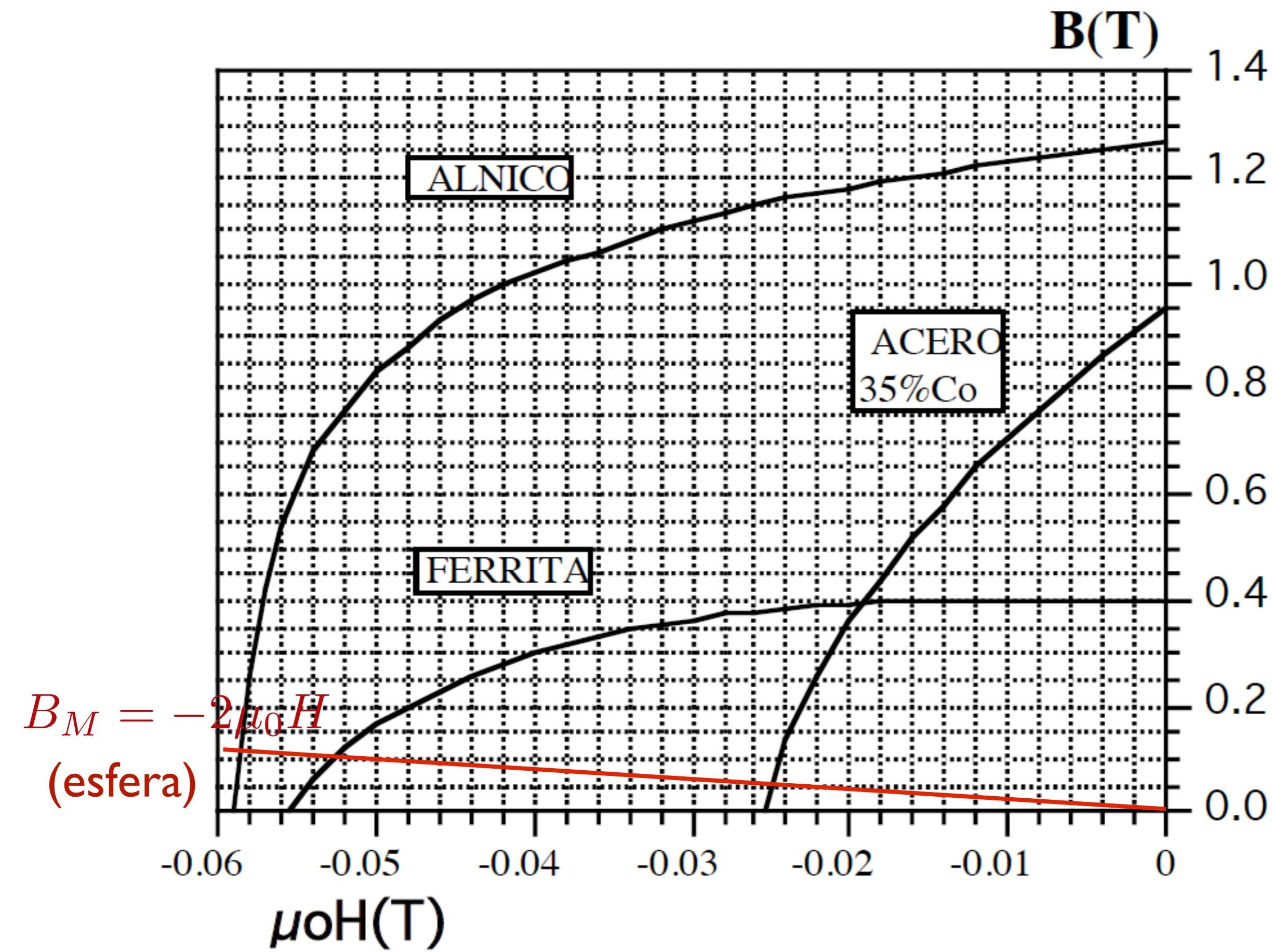
dipolo

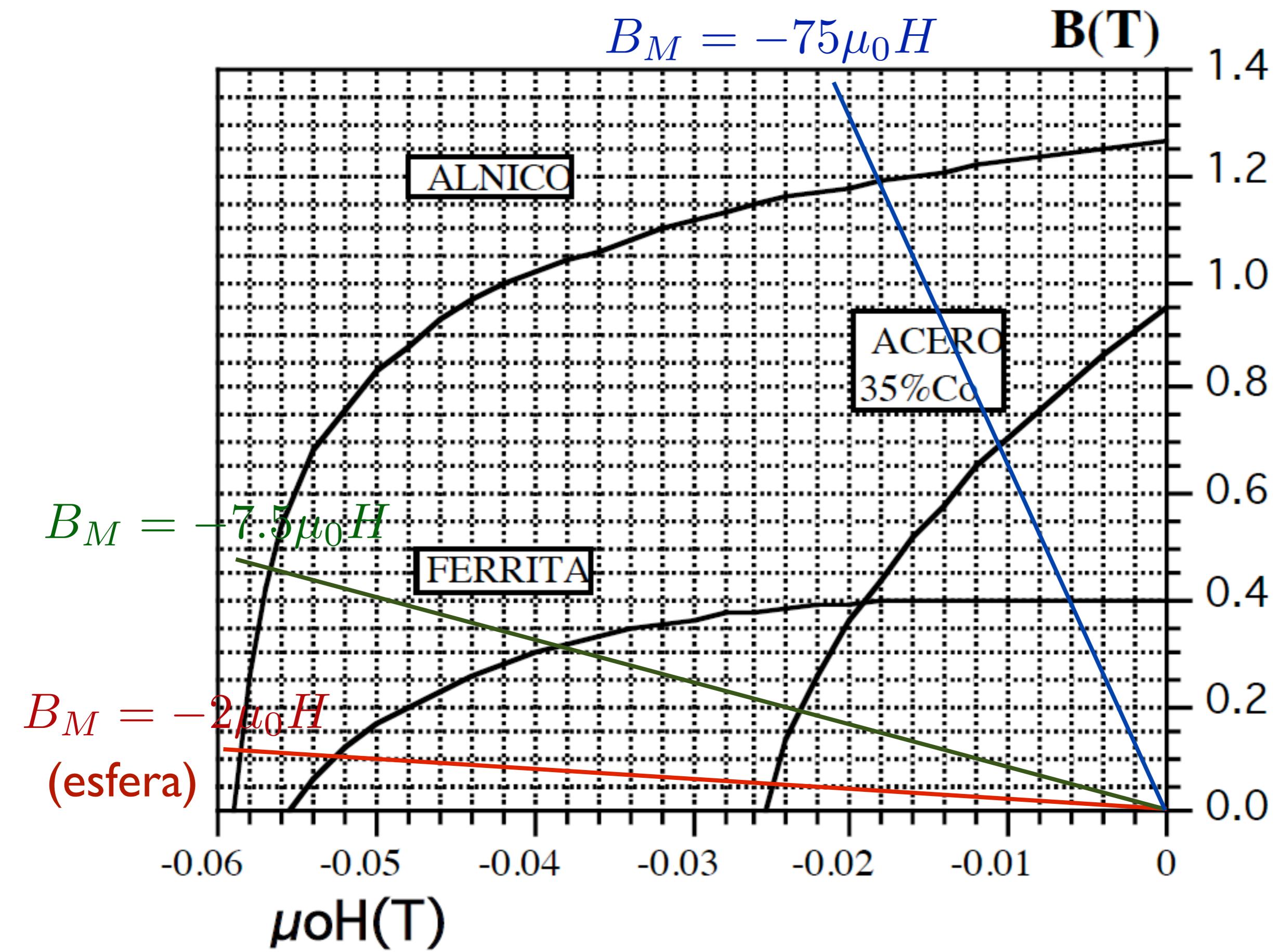
Dentro:  $\mathbf{H}_D = \frac{1}{3} \mathbf{M}_0$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_D + \mathbf{M}_0) = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}_0$$

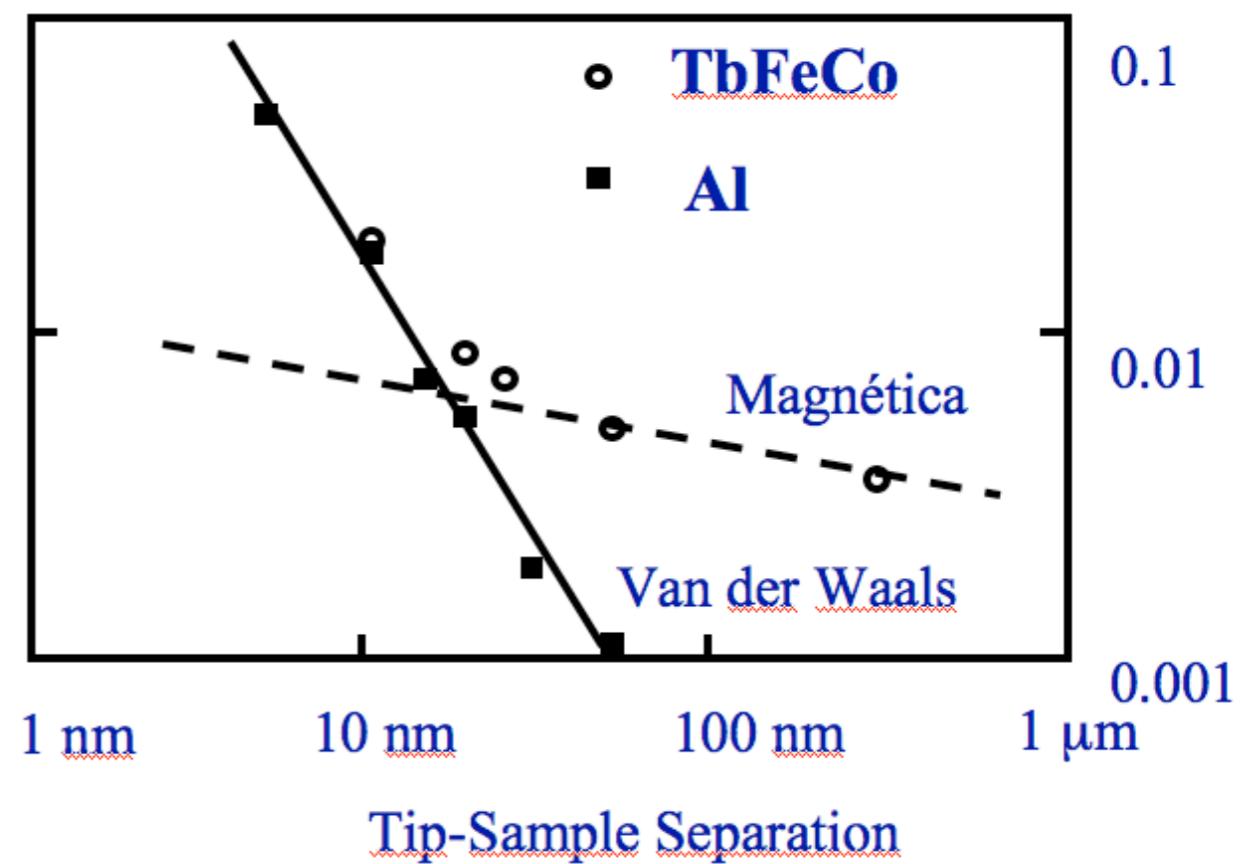
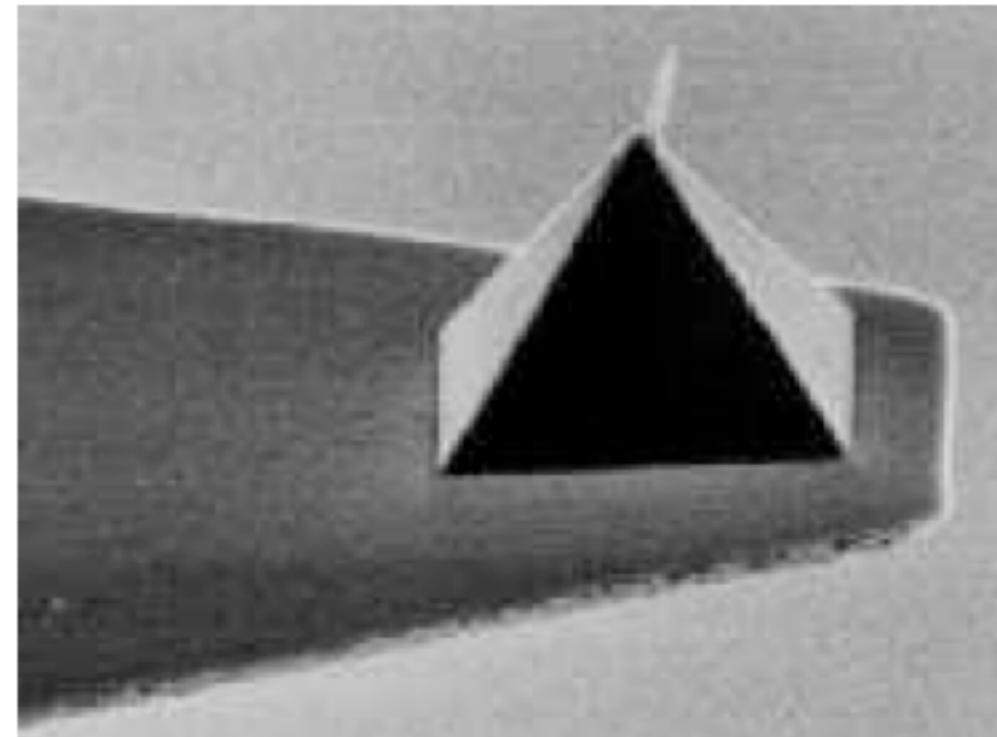
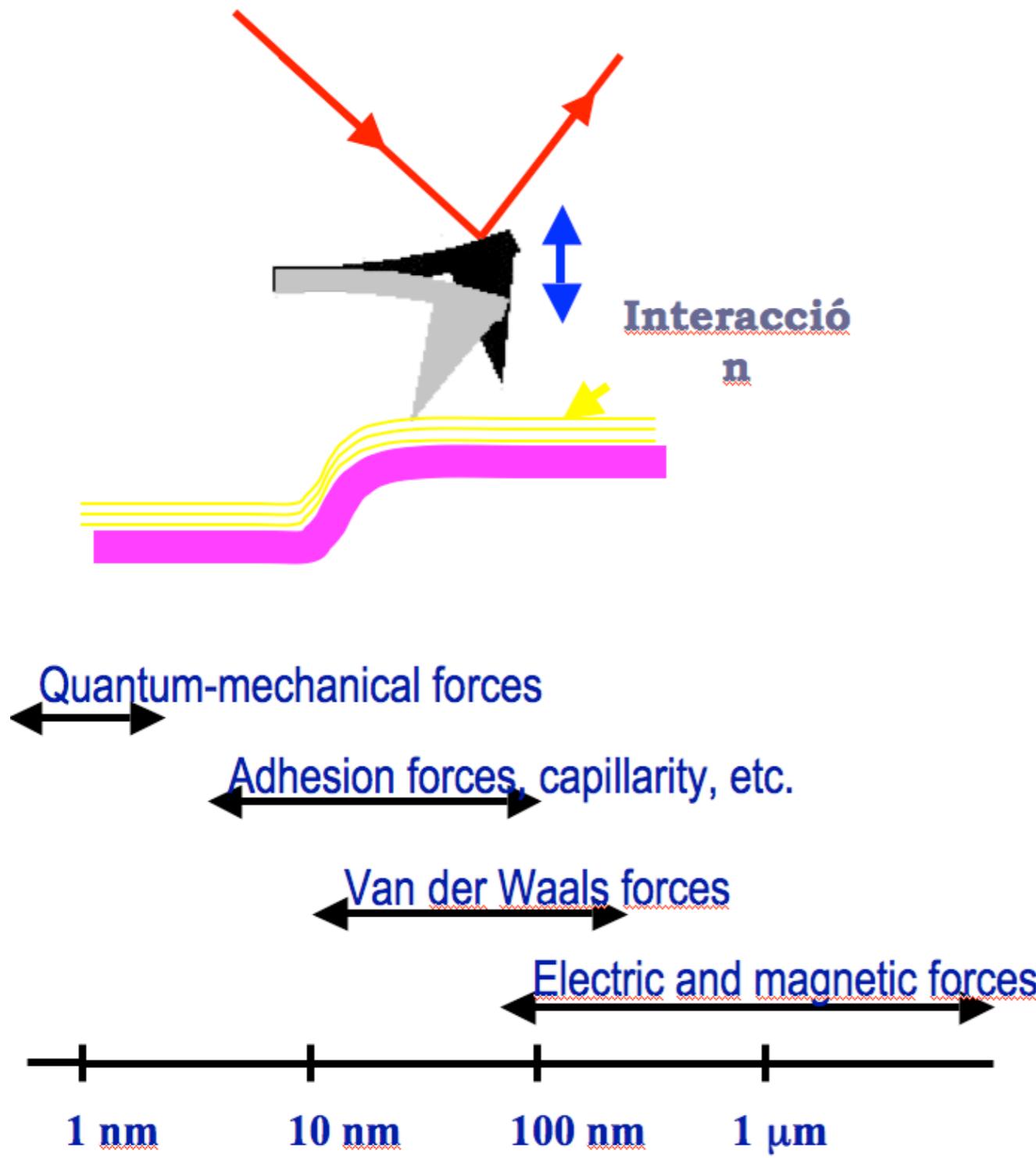




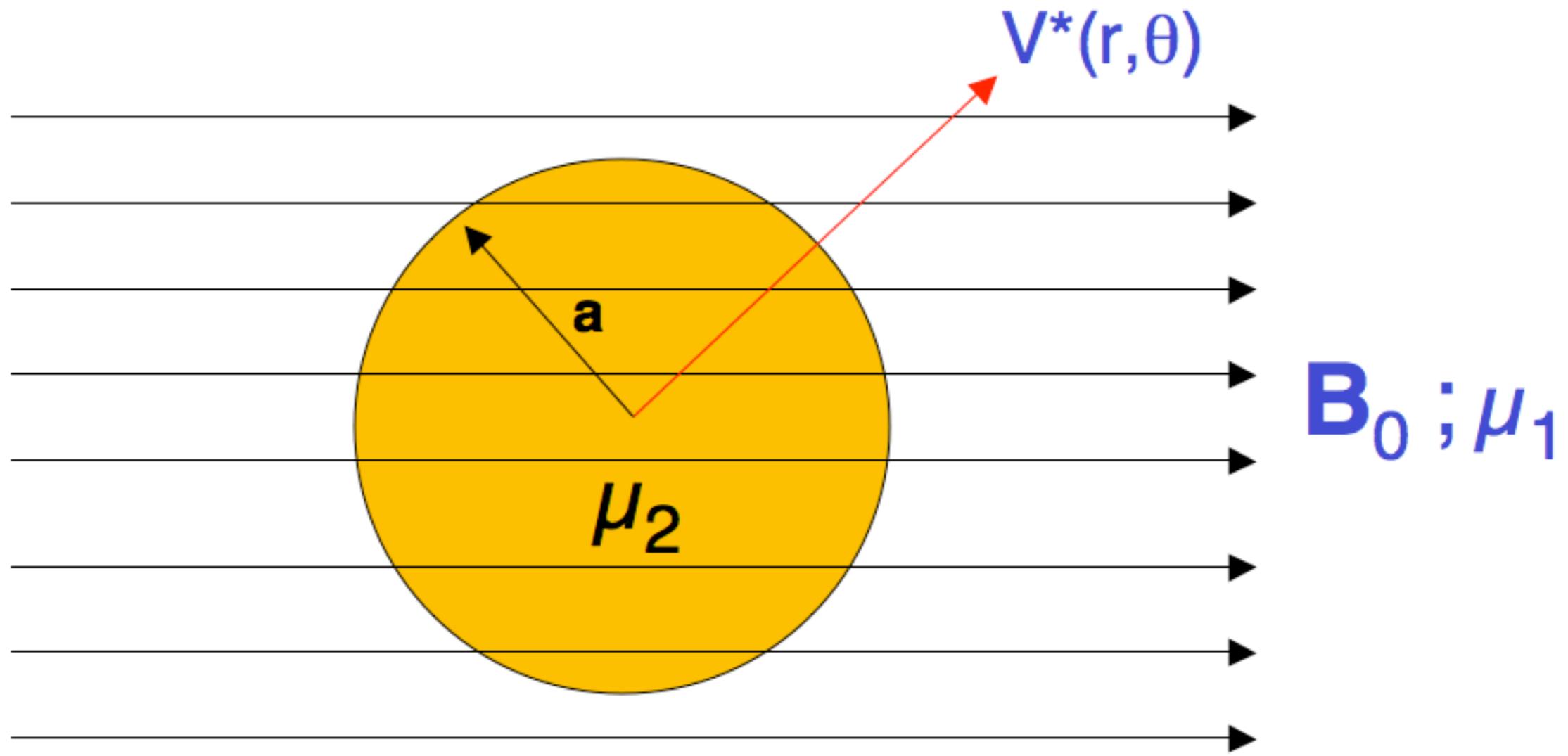




# Microscopía de Fuerza Magnética



# ESFERA de PERMEABILIDAD $\mu_2 = \text{cte}$ CAMPO “inicialmente” UNIFORME $B_0$



$$V_1^* = -\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}}{\mu_1} + \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \right) a^3 \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}}{\mu_1 r_1^3}$$

$$\mathbf{m} = -4\pi a^3 \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_1} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}$$

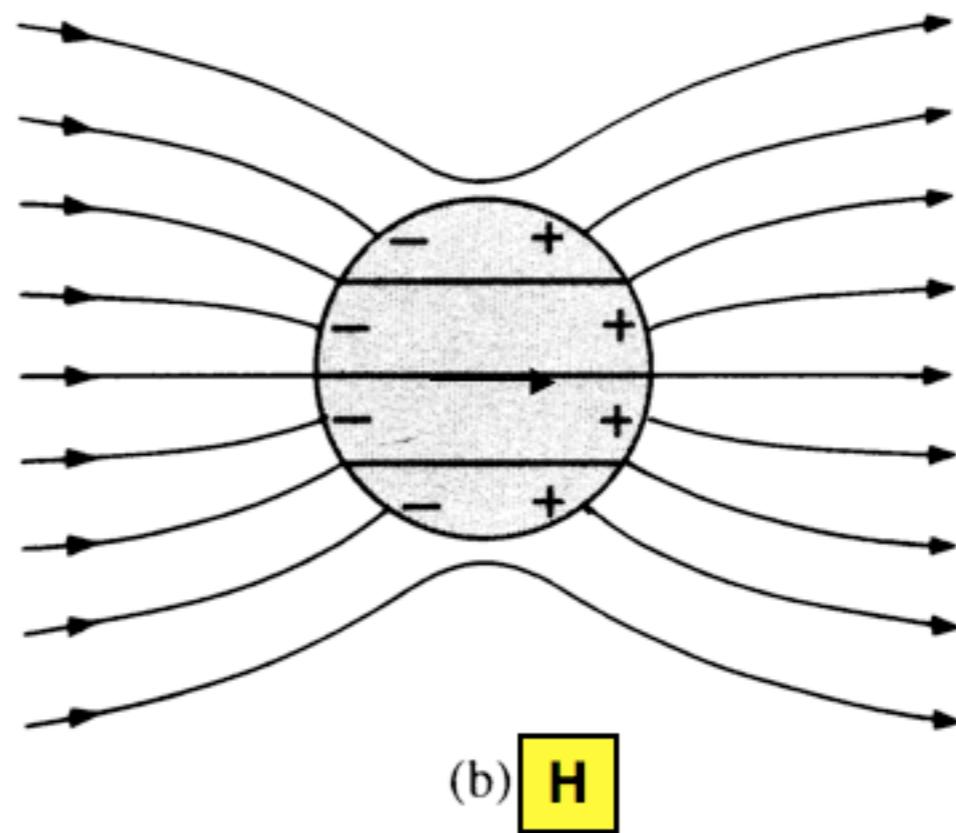
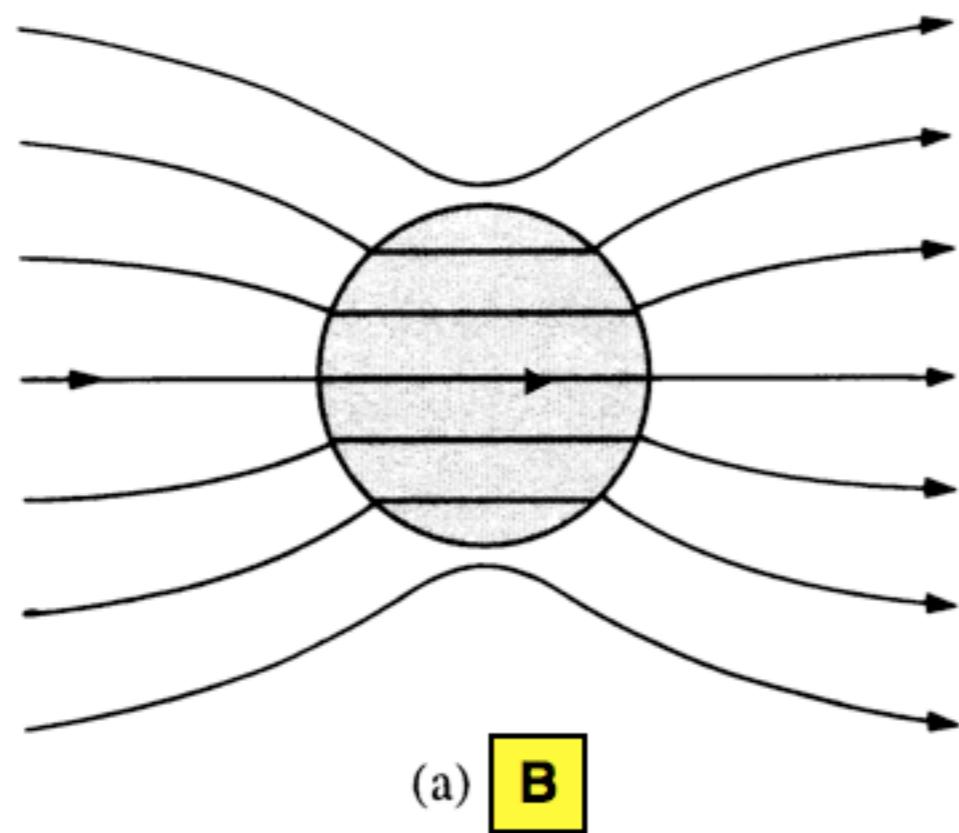
$$V_2^* = -\frac{3\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}}{2\mu_1 + \mu_1}$$

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla V_2^* = cte$$

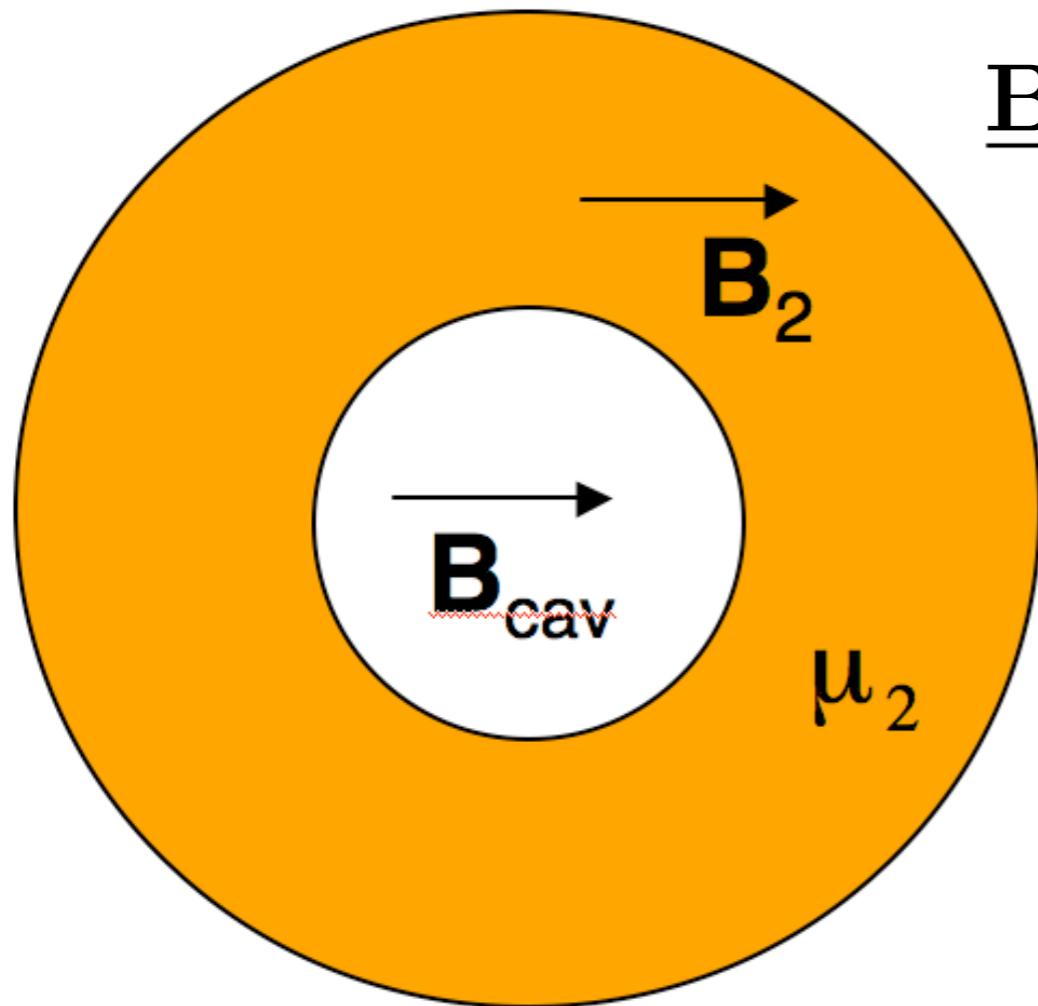
# ESFERA de PERMEABILIDAD $\mu_2=\text{cte}$ CAMPO “inicialmente” UNIFORME $B_0$

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{3\mu_2 B_0}{\mu_2 + 2\mu_1}$$

B uniforme en el interior



# APANTALLAMIENTO MAGNETICO



$$\underline{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_0 \quad \mu_1 = \mu_0$$

$$B_2 = \mu_1 H_2 = \frac{3B_0}{1 + 2\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$$\mu_r = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$B_{cav} = \frac{9\mu_r B_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2)} \quad \mu_r \gg 1 \quad B_{cav} \approx \frac{9B_0}{2\mu_r}$$

# APANTALLAMIENTO MAGNETICO. Solución Exacta (Jackson p.206)

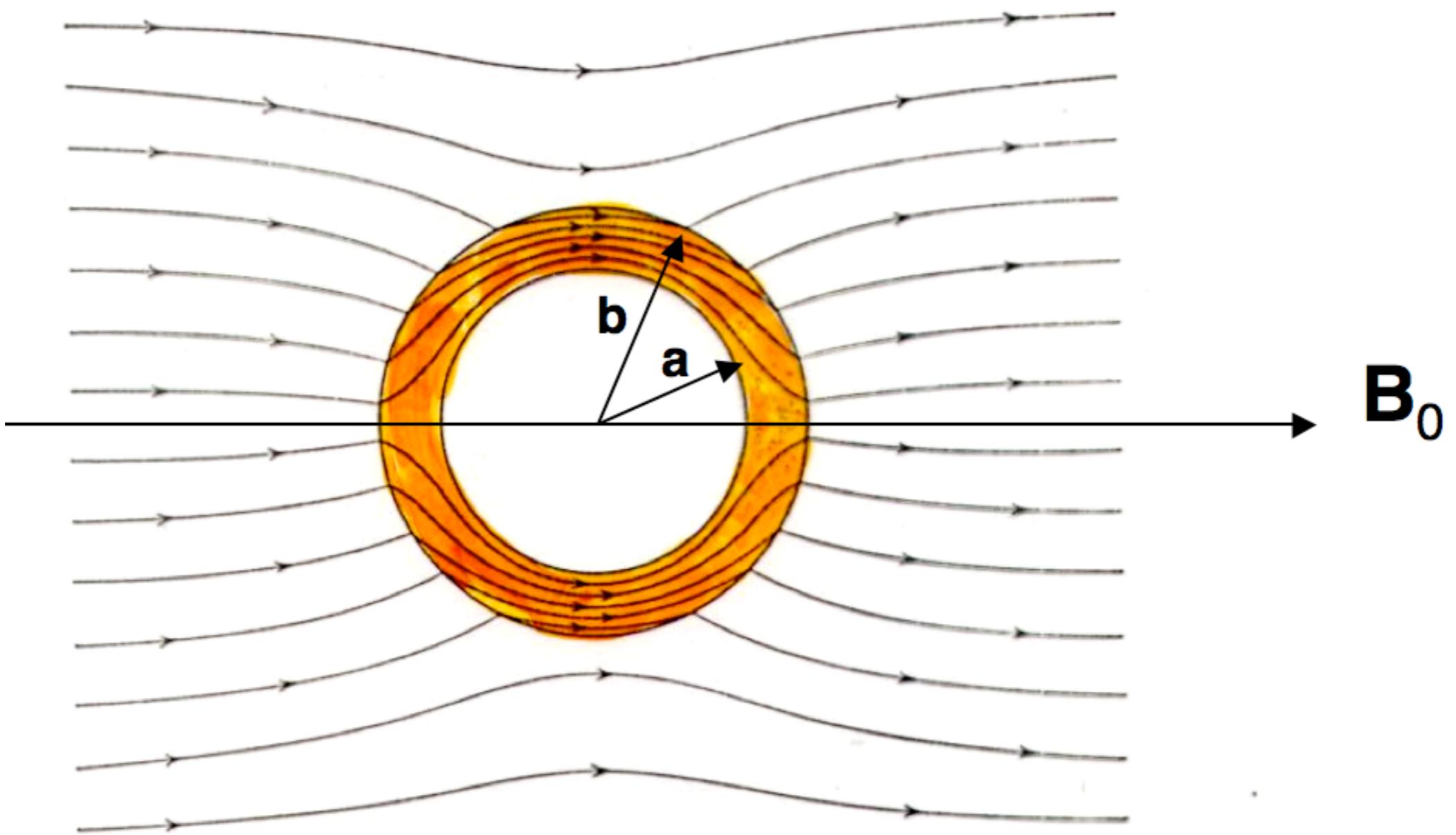


FIG. 5.14. Efecto de apantallamiento por una capa esférica de material muy permeable.

$$B_{cav} = \frac{9\mu_r B_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2(\mu_r - 1)^2(a/b)^3}$$

$$B_{cav} \approx \frac{9B_0}{2\mu_r(1 - (a/b)^3)}$$

# Técnicas especiales para el cálculo de campos electrostáticos

1.1.- Ecuaciones de Maxwell para campos estáticos

1.2.- Las ecuaciones de Poisson y Laplace:  
propiedades generales de la solución.

1.3.- Soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

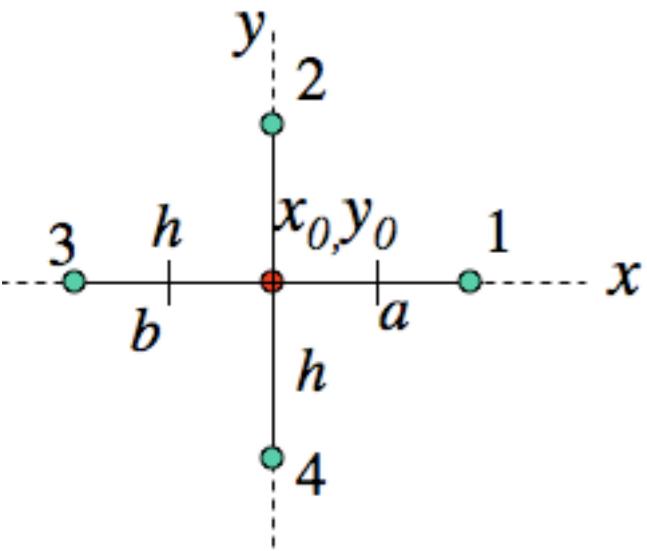
1.4.- El método de las Imágenes.

1.5.- Problemas de contorno en magnetostática.

1.6.- Introducción a los métodos numéricos. [RMC § 3.12]

# Métodos numéricos: diferencias finitas

Derivadas —————→ diferencias finitas      →      Ecuaciones diferenciales —————→ ecuac. algebraicas



$$\frac{\partial V}{\partial x})_a = -E_{xa} \approx \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x})_b = -E_{xb} \approx \frac{V_0 - V_3}{h}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2})_0 \approx -\frac{E_{xa} - E_{xb}}{h} = \frac{V_1 + V_3 - 2V_0}{h^2}$$

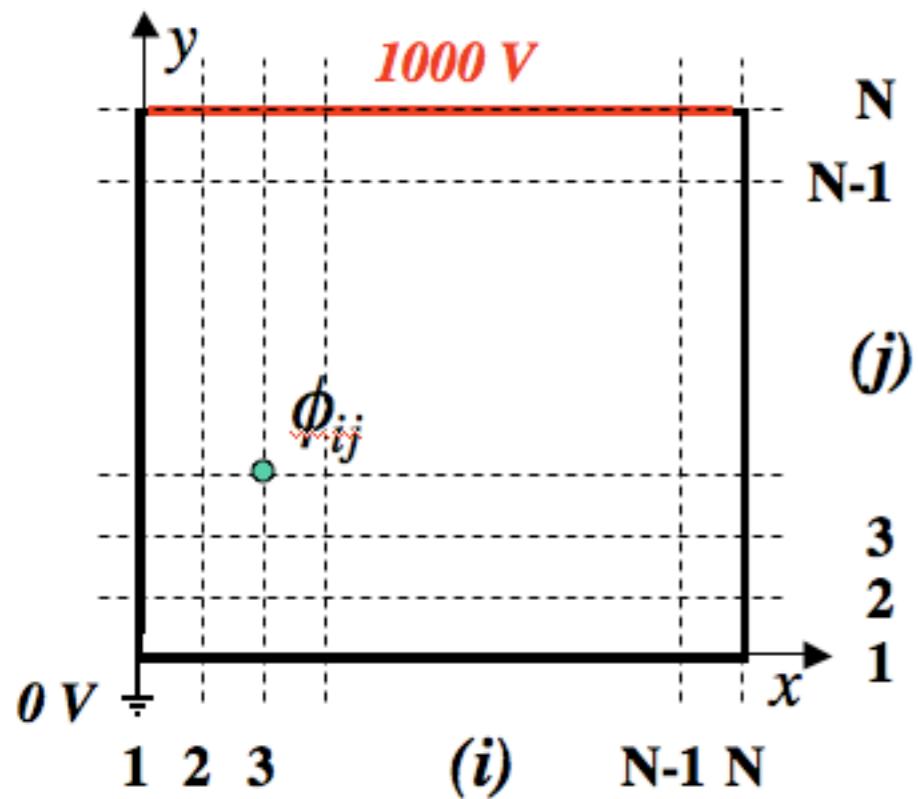
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})_0 \approx \frac{V_2 + V_4 - 2V_0}{h^2}$$

$$\nabla^2 V)_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2})_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2})_0 \approx \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

El valor de una función “armónica” en un punto es el promedio de sus valores en los puntos de alrededor

# Métodos numéricos: diferencias finitas



$N^2$  puntos:  $4(N-1)$  conocidos (Condiciones de contorno)  
 $(N-2)^2$  ecuaciones algebraicas:

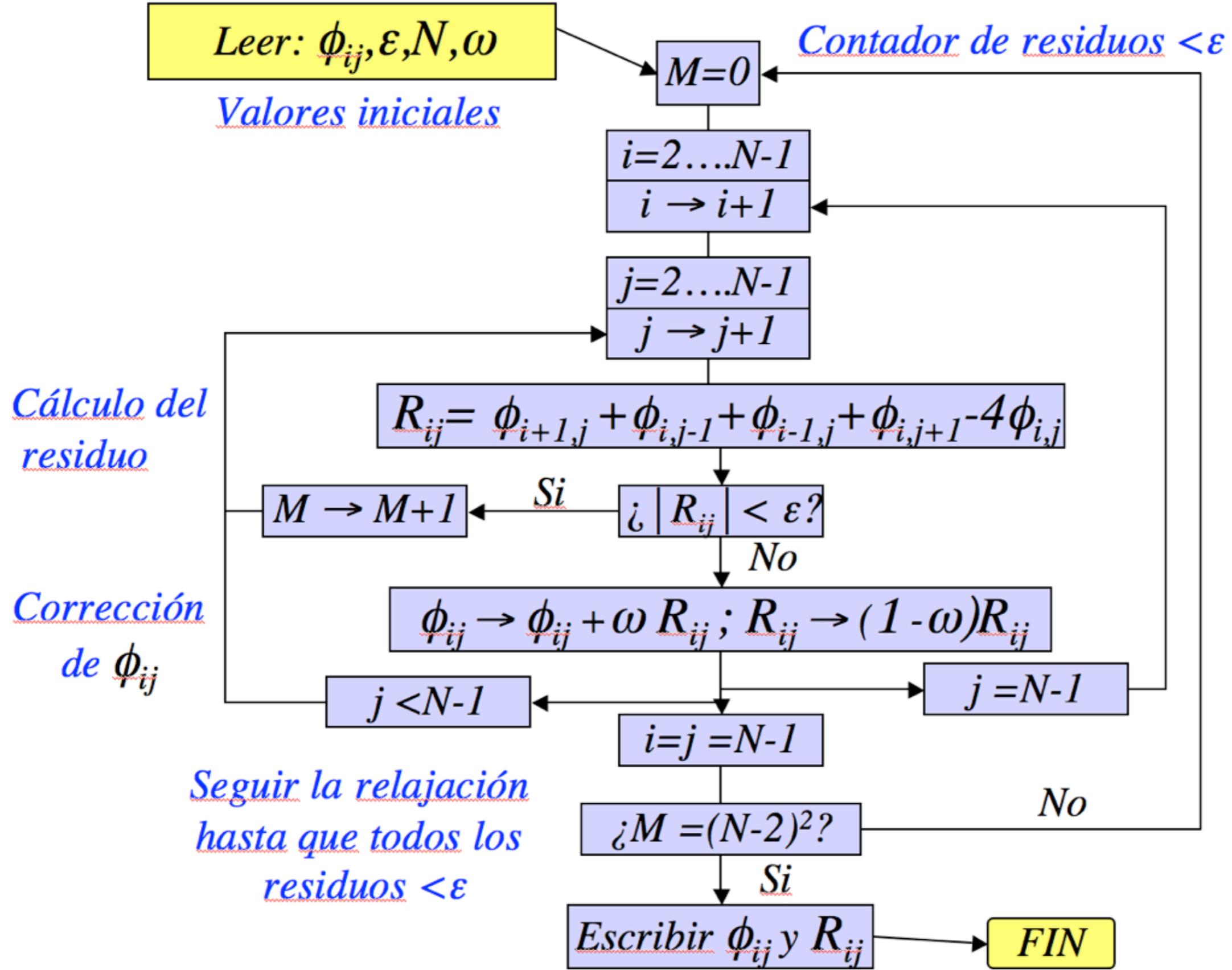
$$\phi_{ij} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}$$

En lugar de resolver las ecuaciones se puede utilizar un método iterativo: METODO DE RELAJACION

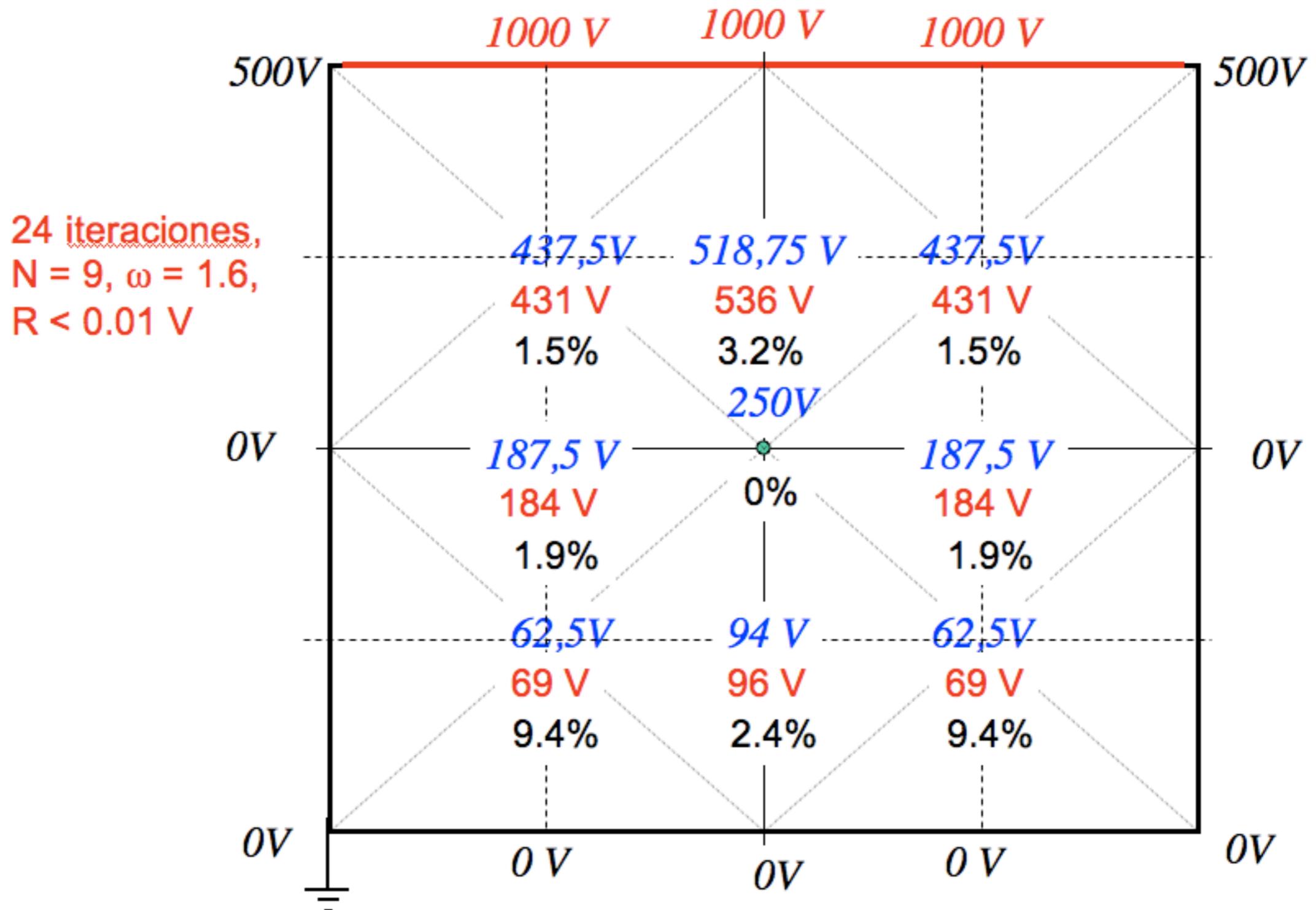
## METODO DE RELAJACION:

- 1.- Dar valores iniciales a todos los  $\phi_{ij}$
- 2.- Calcular el “residuo” en cada punto:  $R_{i,j} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{ij}$   
y corregir el valor de  $\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij} + R_{i,j}/4$  “relajación” \*)
- 3.- Repetir hasta que todos los residuos sean menores que un valor dado  $R_{i,j} < \epsilon$

\*) Para acelerar el proceso suele utilizarse una “sobre-relajación”:  $\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij} + \omega R_{i,j}/4$  ( $1 < \omega < 2$ )



# Métodos numéricos: diferencias finitas



# METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

- 1.- La región problema se divide en un número arbitrario de elementos mediante un malla también arbitrario.
- 2.- En cada sub-elemento el potencial se aproxima mediante una función analítica sencilla (no es necesario que cumpla siquiera la ec. de Laplace) que depende de una serie de parámetros.
- 3.- Las funciones se eligen para que cumplan las condiciones de contorno y sean continuas en las frontera entre elementos.
- 4.- Los parámetros de las funciones prueba se determinan de forma que se minimice la energía (electrostática o magnetostática)

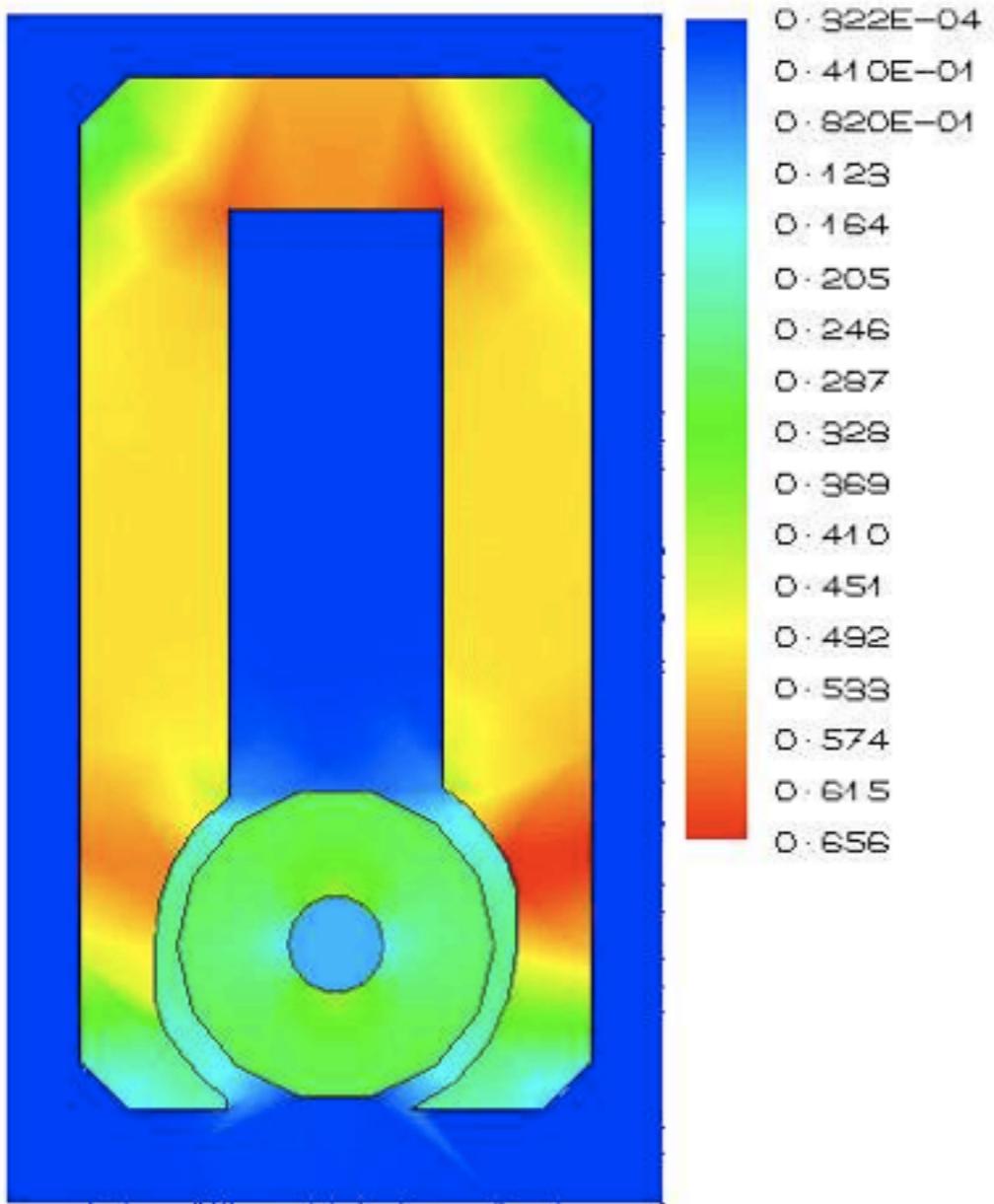
El Método de E.F. es más aplicable a geometrías complicadas, pues no es necesario que la malla sea de dimensiones iguales, ni siquiera cuadrada.

Esto permite ajustarla a fronteras irregulares y la malla puede hacerse más fina en los lugares donde el potencial varía más deprisa y más gruesa donde varía más lentamente.

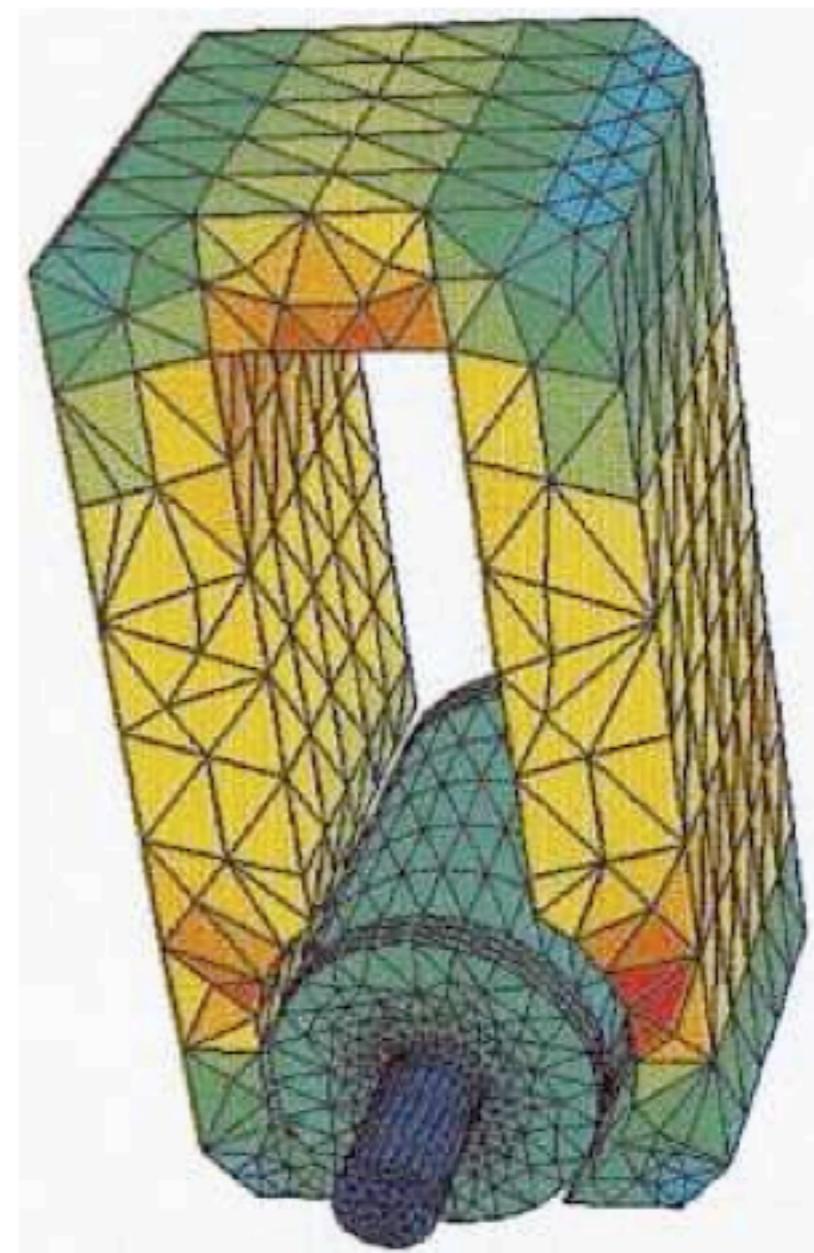
Además proporciona un expresión aproximada del potencial en toda la región problema y no solamente en los nodos (D.F.).

# METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

**2-D**



**3-D**



# METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Programa “libre” para cálculo por E.F.

<http://femm.foster.miller.net/>

