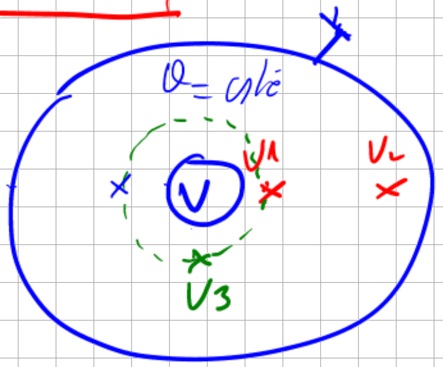
$$\boxed{V(r, \ldots)}$$

$V > 0$

$V_1 \neq V_2$

$V_1 = V_3$



$$V(r,\theta) = V(r) \quad \text{ind}^{t} \text{ de } \theta$$

$$\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

b –Résoudre l'équation de Poisson sachant que l'opérateur Laplacien se développe dans un repère 2D cylindro-polaire de la manière suivante :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$f(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} f(r) = 0$$

$f(r) \neq 0$

$$\int \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} dr = -\int \frac{1}{r} dr$$

$$f(r) = \frac{A}{r}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}$$

$$V(r) = A \ln r + B$$

Conditions aux limites :

- $r = b \quad V(b) = 0$

$$\Rightarrow \quad B = -A \ln b$$

- $r = a \quad V(a) = V$

$$A \ln a - A \ln b = V$$

$$A = \frac{V}{\ln \frac{a}{b}} = \frac{-V}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$V(r) = -\frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \ln r + \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \ln b$$

$$V(r) = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}$$

× $\vec{E}_t(r,\theta) = -\vec{\nabla}_t V(r,\theta)$

$$= -\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

repère $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \underset{\vec{e_z}}{\vec{u}})$

$$f(r) = \frac{\partial V_1(r)}{\partial r} = \frac{A}{r} = -\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

$$\vec{E}_t(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e_r}$$

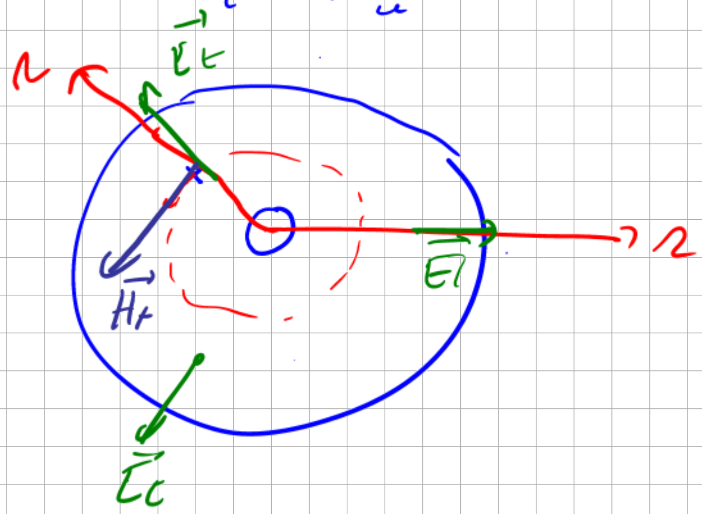
$$\vec{E}_t(r) = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\vec{e_r}$$

* $\vec{H}_t(r,\theta) = \frac{1}{Z}\left(\vec{u} \wedge \vec{E}(r,\theta)\right)$ à connaître

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$$

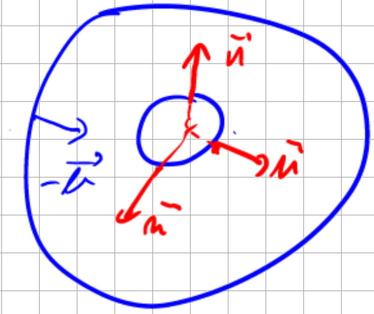
$$\vec{H}_t(r,\theta) = \frac{1}{Z}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\vec{e_\theta}$$



* $\vec{J_S}$ sur conducteur $r = a$

$$\vec{J_S} = \vec{n} \wedge \vec{H}_t(r)$$

$\vec{n} = \vec{e_r}$



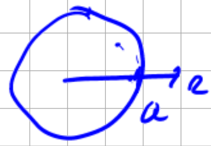
$$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{u}$$

$$\vec{J_S} = \frac{1}{Z}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{a}\vec{u}$$

* I sur conducteur $r=a$

$$I = \int_C \vec{J_s}(r) \cdot \vec{u}\, dC$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Z} \frac{V}{\ln\frac{b}{a}} \frac{1}{a} \underbrace{a\,d\theta}_{r\,d\theta}$$



$$I = \frac{2\pi}{Z} \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}$$

* $$Z_c = \frac{V}{I} \neq \cancel{\frac{V(a)}{I}} = \frac{V_1 - V_2}{I_1}$$

V, 0, I

$$\frac{V}{I} = \frac{Z}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = Z_c$$

* $$L = \frac{Z_c}{v}$$

$$L = \frac{Z}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$= \frac{\mu}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \quad H/m$$

$$C = \frac{1}{Z_c v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\ 2\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \quad F/m$$

$$LC = \varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$$

Pour un matériau donné, μ, ε connus

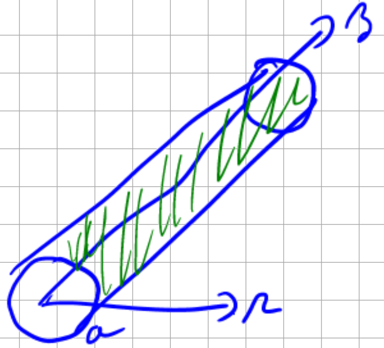
$$Z_c = \frac{Z}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = 50\,\Omega$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \downarrow \quad C \nearrow \Rightarrow b-a \downarrow$$

3) Les conducteurs métalliques sont caractérisés par une conductivité finie σ. Les champs électromagnétiques calculés dans la partie précédente sont considérés non modifiés par ces pertes.
Calculer les pertes métalliques de ce support par unité de longueur, puis l'expression de la résistance par unité de longueur de la ligne.

$\varepsilon_r - \varepsilon_0$

$$\overline{P_{met}} = \frac{1}{2} R_s \iint_{S_{met}} |\vec{H}_\theta(r)|^2 \, dS_{met}$$



sur conducteur en $r = a$ 1 m

$$\overline{P_{met1}} = \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi}\int_0^{z=1} |\vec{H}_\theta(r)|^2 \, a \, d\theta \, dz$$

$$= \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left(\frac{1}{Z}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{a}\right)^2 a \, d\theta \, dz$$

$$= \frac{1}{2} R_s \, 2\pi \left(\frac{1}{Z}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\right)^2 \frac{1}{a}$$

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

$$\overline{P_{met2}} = \frac{1}{2} R_s \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{Z}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}} 2\pi\right)^2 \frac{1}{b}$$

$$\overline{P_{met}} = \overline{P_{met1}} + \overline{P_{met2}}$$

$$= \frac{1}{2} R |I|^2$$

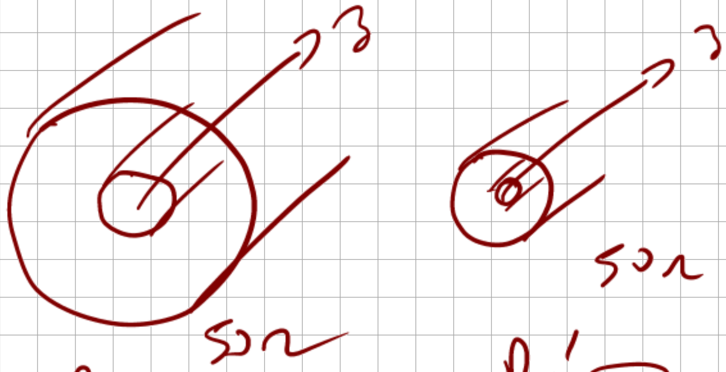
$$\overline{P_{met1}} = \frac{1}{4\pi} R_s \, |I|^2 \frac{1}{a}$$

$$\overline{P_{met}} = \frac{1}{4\pi} R_s |I|^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} R |I|^2$$

$$R = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$\ln\frac{b}{a}$ fixe $Z_c = 50\,\Omega$



R $\qquad$ $R' > R$

$D \ll \lambda$