DISTR. STUD.

PIER con SOLUZIONI !!!

[redacted]

[redacted] degli Studi di Brescia
Facoltà di Ingegneria

Esercizio 1 (5 PUNTI)
Si consideri il codice di Hamming (7,4) caratterizzato dal polinomio generatore $g(D)=D^3+D+1$, e si supponga di aggiungere un'ottava cifra di parità complessiva in modo che il numero di uni risulti pari.
2 1) Determinare le parole del codice e la distanza minima. Quale è il potere correttore e rivelatore?
1 2) Considerando il codice di Hamming originale, se i bit codificati vengono trasmessi con forme d'onda antipodali in presenza di rumore AWGN, quali sono le prestazioni di un ricevitore in cui si prendessero decisioni binarie prima del decodificatore?
2 3) E quelle del ricevitore ottimo?

Esercizio 2 (5 PUNTI)
Si consideri il codice convoluzionale a due stati con Rate 1/3 e con generatori (ottali) 2, 3, 1.
1 1) Disegnare lo schema a blocchi del codificatore, il diagramma di stato, il diagramma a traliccio, e la sequenza in uscita quando in ingresso si applichi la sequenza 010101100.
2 2) Ipotizzando che in ricezione (hard decision) a causa del rumore il bit ricevuto in nona posizione sia errato e tutti gli altri corretti, determinare, applicando l'algoritmo di Viterbi, la stima a massima verosimiglianza della sequenza trasmessa partendo da quella sequenza ricevuta.
2 3) Stimare la probabilità di errore sul bit che si può ottenere usando tale codice nell'ipotesi di *soft decision* in ricezione.

Esercizio 3 (9 PUNTI)
Su di un canale lineare tempo-invariante, in presenza di rumore AWGN indipendente dal segnale, si trasmette una sequenza di simboli indipendenti ed equiprobabili $a_k = \pm 1$ usando la forma d'onda $s(t)=\sum_k a_k\, g(t-kT)$.
Il canale di trasmissione, non ideale, introduce interferenza intersimbolica. All'uscita dal campionatore in ricezione il canale discreto ha risposta all'impulso: $h(n)=0.5\delta(n+1)+\delta(n)+0.2\delta(n-1)$.
3 1) Si determini la risposta all'impulso dell'equalizzatore Zero-Forcing stabile che inverte il canale (se esiste), stimando la varianza del rumore in uscita dall'equalizzatore (si assuma che i campioni del rumore all'ingresso dell'equalizzatore siano indipendenti e con varianza σ^2).
3 2) Si disegni la struttura di un equalizzatore con due prese Zero-Forcing ed una Decision-Feedback, e si determinino i relativi coefficienti. Si determini la caratteristica ingresso-uscita del sistema complessivo che include l'equalizzatore.
2 3) Con i valori dei coefficienti calcolati al punto precedente, quale è la varianza dell'interferenza intersimbolica residua?
1 4) Quale è la varianza del rumore in uscita dall'equalizzatore ?

Esercizio 4 (5+3 PUNTI)
Si consideri il codice TCM per modulazione d'ampiezza PAM a otto livelli (con mapping naturale) in cui i due bit meno significativi sono codificati usando un codice convoluzionale a quattro stati con Rate 1/2 e con generatori (ottali) 5, 2.
3 1) Quale è la struttura del codificatore, del trasmettitore e del ricevitore?
2 2) Tenendo conto delle transizioni parallele, quanti sono gli eventi errore a distanza minima e quanti bit di informazione errati producono ? Che banda viene richiesta per trasmettere 10 Mb/s?
3 3) Si calcoli il guadagno asintotico rispetto ad una modulazione d'ampiezza PAM non codificata di pari efficienza spettrale, ed il valore di E_b/N_0 richiesto per ottenere $P(E) = 10^{-8}$.

DOMANDE (9 PUNTI)
1 D1. Descrivere la relazione che permette di rendere sistematico un codice lineare a blocco caratterizzato da un polinomio generatore g(D) che usato direttamente darebbe un codice non sistematico.
2 D2. Descrivere, servendosi di un semplice esempio, la differenza tra *hard decision* e *soft decision* per la decodifica di codici lineari a blocco.
3 D3. Descrivere il significato della funzione "Esponente di Errore" e del "Cut-off Rate".
3 D4. Descrivere in dettaglio la tecnica di equalizzazione adattativa MMSE che usa il metodo del gradiente stocastico nel caso di trasmissione di un segnale in banda-passante. Indicare come va scelto il passo di aggiornamento.

TNA : 10/7/2003

HAMM (7,4)

1

$$g(D) = D^3 + D + 1$$

\+ PARITÀ degli "1"

~~Possiamo dunque stabilire la seguente tabella~~

	PAROLA DI INFORMAZIONE	HAMMING (7,4)		HAMMING + BIT DI PARITÀ	DISTANZA da 0000000
0	0000	0000000	0	00000000	0
1	0001	0001011	3	00010111	4
2	0010	0010110	3	00101101	4
3	0011	0011101	4	00111010	4
4	0100	0101100	3	01011001	4
5	0101	0100111	4	01001110	4
6	0110	0111010	4	01110100	4
7	0111	0110001	3	01100011	4
8	1000	1011000	3	10110001	4
9	1001	1010011	4	10100110	4
10	1010	1001110	4	10011100	4
11	1011	1000101	3	10001011	4
12	1100	1110100	4	11101000	4
13	1101	1111111	7	11111111	8
14	1110	1100010	3	11000101	4
15	1111	1101001	4	11010010	4

NON SISTEMATICO

TNA : 10/7/2003

$\boxed{1}$

(2)

$\boxed{1}$

1) $d^H_{MIN} = 4 \rightarrow t = 1$, rileva fino a 3 errori

2) $$P_w(E) \leq \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$P_w(E) \simeq \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-t-1}$$

$$P_b(E) \simeq \frac{2t+1}{n} P_w(E)$$

HARD DECISION

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N}}\right) \rightarrow P_w(E) \simeq Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N}\underbrace{(t+1)}_{2}}\right)$$

SOFT decisione $\rightarrow d^2_{MIN} = 4 E_S d^H_{MIN}$; $E_S = E_b \frac{K}{N}$

$$d^2_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (a_{ik} - a_{jk})^2 E_S$$

$$P_w(E) \leq 15\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N} \cdot d^H_{MIN}}\right)$$

3

$$P_w(E) \leq 7\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N} \cdot 3}\right) + 7\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N} \cdot 4}\right) + 1 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{K}{N} 7}\right)$$

$$P_b(E) \simeq \frac{2t+1}{N} P_w(E)$$

TMA 10/7/03

2

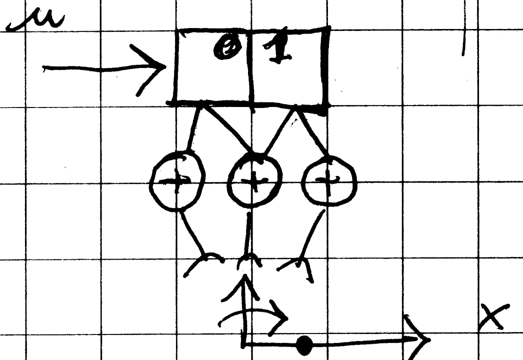
3

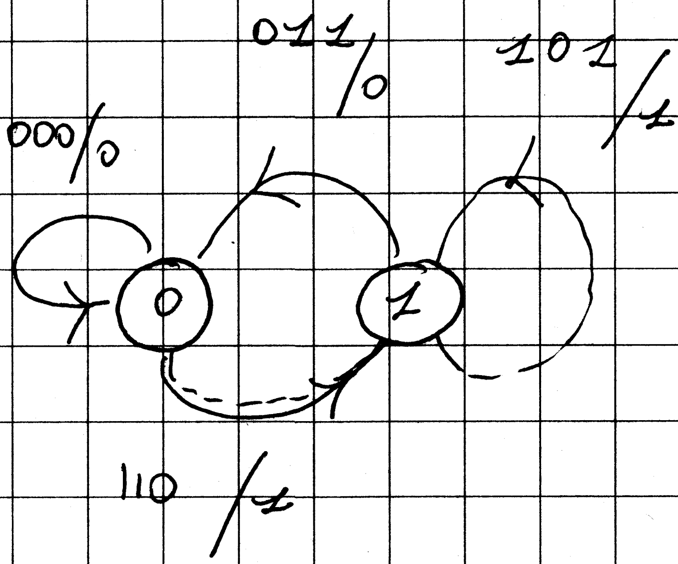
010

001

R = 1/3 , (2, 3, 1) , 2 STATI

011





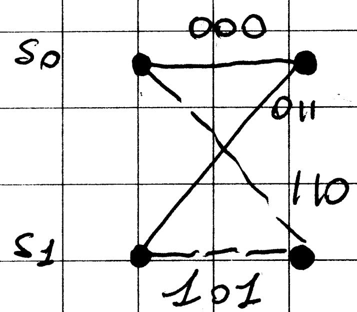
0 1 0 1 0 1 1 0 0

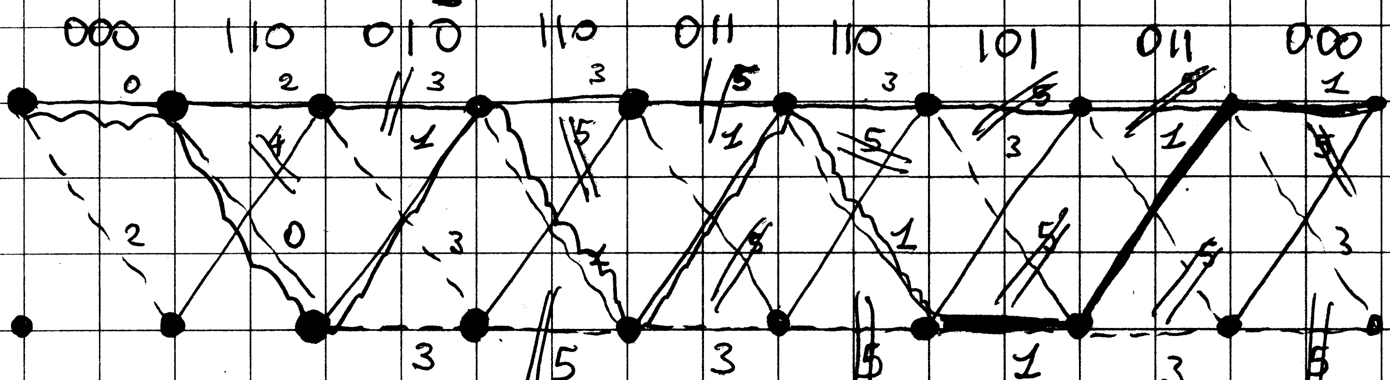
0 1 | 0 1 | 0 1 | 1 0 0

000 011 011 011 000

110 110 110 101

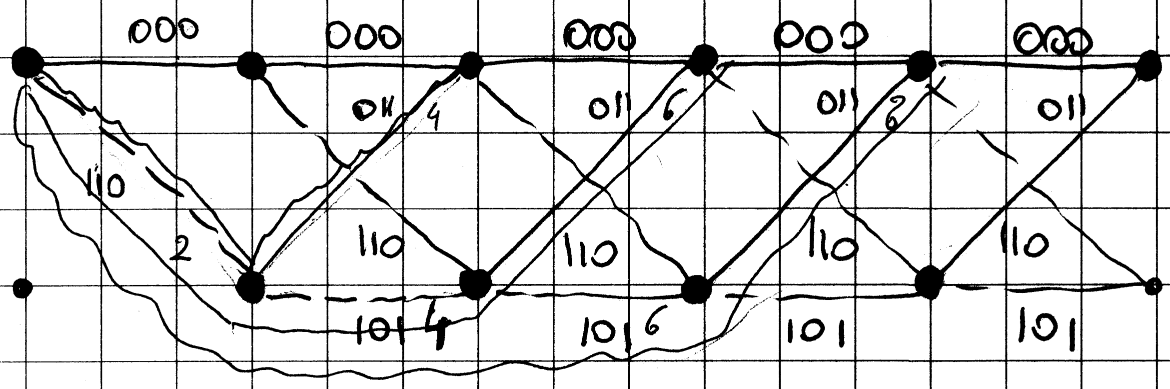
010





0 1 0 1 0 1 1 0 0

THA 10/7/03



				000	000	000	000
Errore lungo 2	$\rightarrow$	$d = 4$	$\rightarrow$	$\overset{1}{110}$	$\overset{0}{011}$	$\overset{0}{000}$	$\overset{0}{000}$
Errore lungo 3	$\rightarrow$	$d = 6$	$\rightarrow$	$\overset{1}{110}$	$\overset{1}{101}$	$\overset{0}{110}$	$\overset{0}{000}$
Errore lungo 4	$\rightarrow$	$d = 8$	$\rightarrow$	$\overset{1}{110}$	$\overset{1}{101}$	$\overset{1}{101}$	$\overset{0}{011}$

$d_1 = 4 \Rightarrow$ 1 bit SBAGLIATO

$d_2 = 6 \Rightarrow$ 2 bit ε

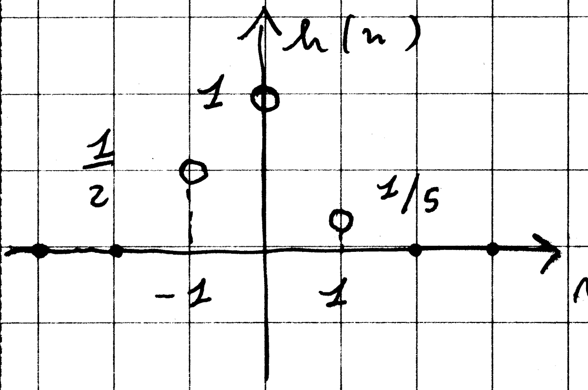
$d_3 = 8 \Rightarrow$ 3 bit ε

$$P_b(E) \simeq 1 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} 4R}\right) + 1 \cdot 2\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} 6R}\right) +$$

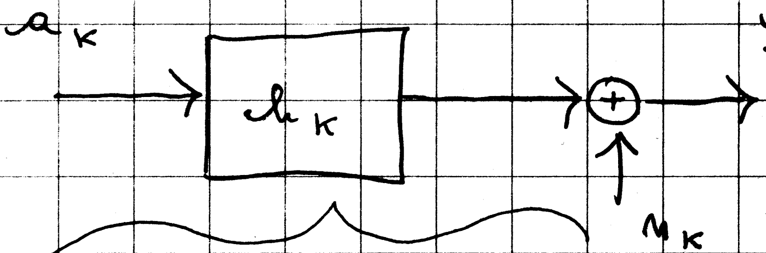
$$+ \, 1 \cdot 3\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot 8R_c}\right) + \dots$$

TMA : 10/7/2003 $\boxed{3}$ (5)

$$h(n) = \frac{1}{2}\,\delta(\overbrace{n}^{+1}) + \delta(n) + \frac{1}{5}\,\delta(n-1)$$



$$\begin{cases} \cancel{y(k) = \sum_i h(i)\, a(k-i) + n(k)} \\ y_k = \sum_i h_i \cdot a_{k-i} + n_k \end{cases}$$

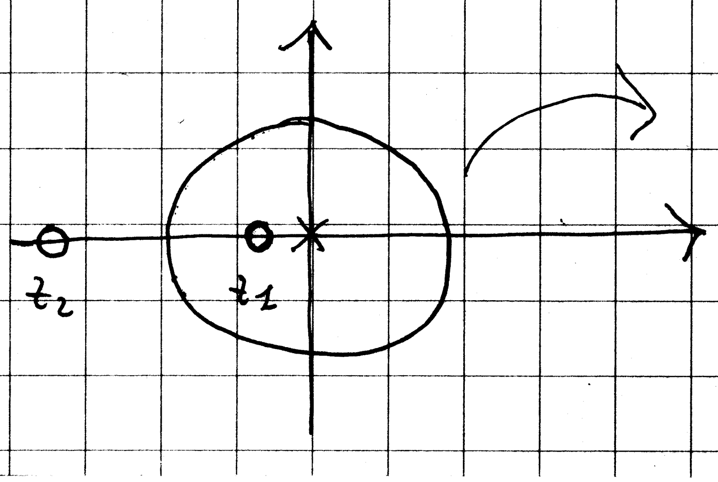


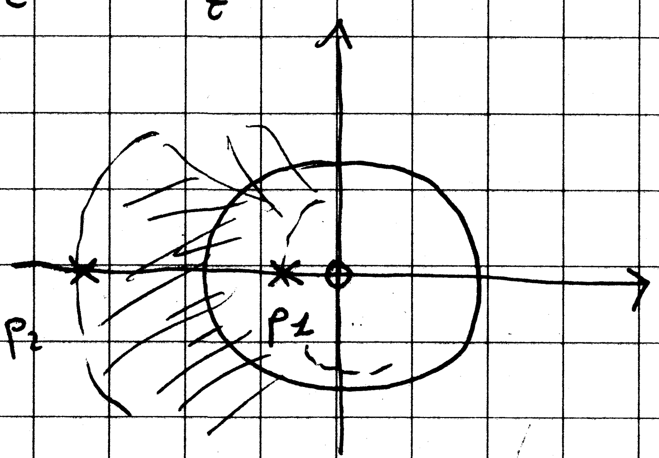
$$H(z) = \frac{1}{2} z + 1 + \frac{1}{5} z^{-1} = \frac{5z^2 + 10z + 2}{10z}$$

$$5z^2 + 10z + 2 = 0 \longrightarrow z_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} =$$

$$z_{1,2} = -1 \pm \underbrace{\frac{\sqrt{60}}{10}}_{0,77} = \begin{cases} -0,23 \\ -1,77 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{5\,(z-z_1)(z-z_2)}{10z} = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{(z-z_1)(z-z_2)}^{(z+0,23)(z+1,77)}}{z}$$





TMA : 10/7/2003

$$H_I(z) = \frac{2z}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{2z}{(z+0,23)(z+1,77)} =$$

$p_1 = -0,23$; $p_2 = -1,77$

$$\frac{H_I(z)}{z} = \frac{2}{(z+0,23)(z+1,77)} = \frac{A}{(z-p_1)} + \frac{B}{(z-p_2)}$$

$$= \frac{Az - Ap_2 + Bz - Bp_1}{(z-p_1)(z-p_2)} \longrightarrow \begin{cases} Az + Bz = 0 \\ -Ap_2 - Bp_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ -Ap_2 + Ap_1 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -B = 1,3 \\ A = \dfrac{2}{p_1 - p_2} = \dfrac{2}{-0,23 + 1,77} \cong 1,3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \longrightarrow (a)^n \varepsilon(n) \rightarrow \text{Causale},\ |z| < a$$

$$\longrightarrow -(a)^n \varepsilon(-n-1) \rightarrow \text{Anticausale}\ |z| > a$$

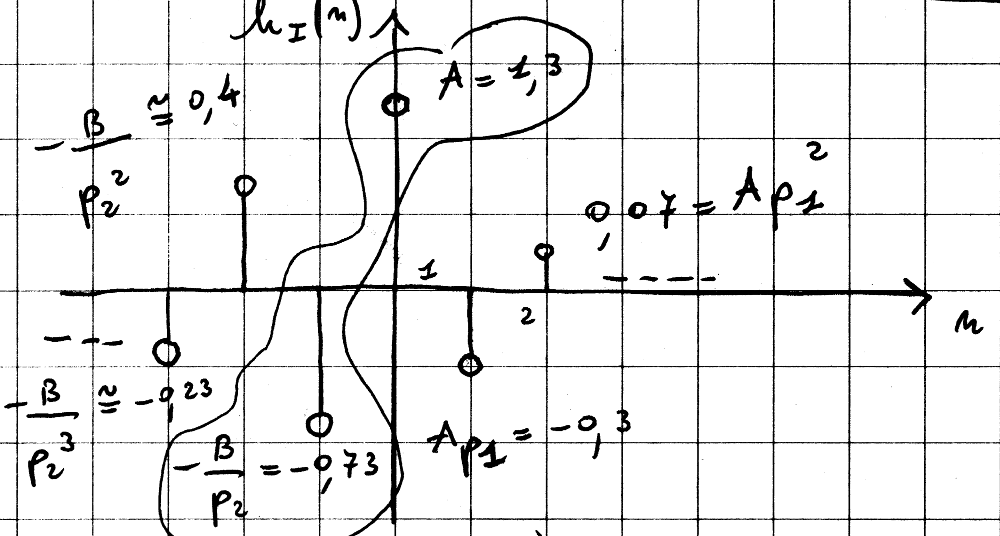
$$H_I(z) = \frac{Az}{z-p_1} + \frac{Bz}{z-p_2} = \frac{A}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2 z^{-1}}$$

$$H_I(z) = \frac{1,3\, z}{z+0,23} + \frac{(-1,3)\, z}{z+1,77} = \frac{1,3}{1+0,23 z^{-1}} + \frac{(-1,3)}{1+1,77 z^{-1}}$$

TNA : 10/7/2003

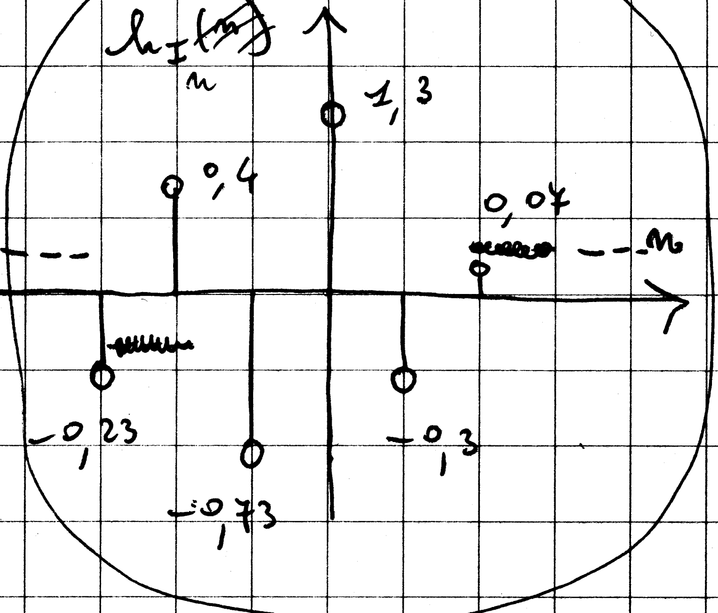
$$h_{I_n}(\cancel{n}) = A\,(p_1)^n\,\varepsilon(n) - B\,(p_2)^n\,\varepsilon(-n-1) =$$

$$h_{I_n}(\cancel{n}) = 1,3\,(-0,23)^n\,\varepsilon(n) + 1,3\,(-1,77)^n\,\varepsilon(-n-1) =$$

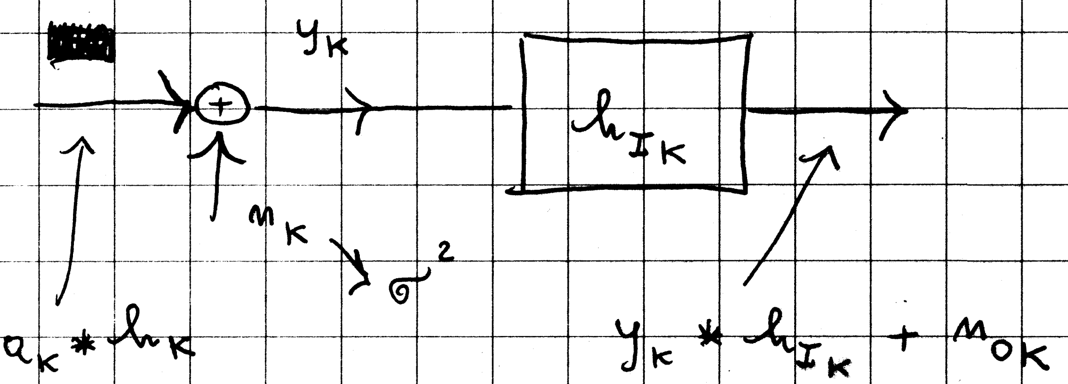


$$A p_1 = 1,3 \cdot (-0,23) \cong -0,3 \rightarrow A p_1^2 \cong 0,07$$

$$-\frac{B}{p_2} = \frac{1,3}{-1,77} \cong -0,73$$



$$\cancel{h_I(n) = 1,3\,[\delta(n) + 0,23\,\delta(n-1) - 0,56\,\delta(n+1) + \dots\ + - - -] =}$$



$$E[n_{o_k}] = E[n_k] \cdot H_I(0) = 0$$

$$\sigma^2_{n_o} = \sigma^2 \cdot \sum_n |h_{I_n}|^2 \cong \sigma^2 \Big(\underbrace{1{,}3^2}_{1{,}69} + \underbrace{0{,}3^2}_{0{,}09} + \underbrace{0{,}73^2}_{0{,}53} + \underbrace{0{,}4^2}_{0{,}16} + \underbrace{0{,}23^2}_{0{,}05} + \dots \Big)$$

$$\boxed{\sigma^2_{n_o} \cong 2{,}5\, \sigma^2}$$

$$H_I(z) = \frac{C}{(z+1{,}77)} + \frac{D}{(z+0{,}23)} = \frac{2{,}29}{1{,}77(1+0{,}56z)} - \frac{0{,}29}{0{,}22(1+4{,}44z)} =$$

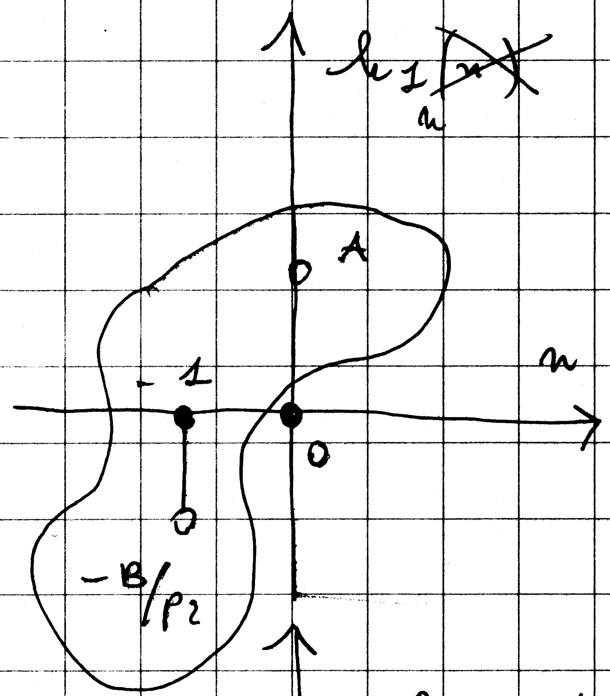
$$\begin{cases} C = 2{,}29 \\ D = -0{,}29 \end{cases}$$

$$\frac{1{,}29}{1+0{,}56z} = 1{,}29 \left(\sum_0^{\infty} (-0{,}56z)^n \right) = 1{,}29 - 0{,}72z + 0{,}4z^2 + \dots$$

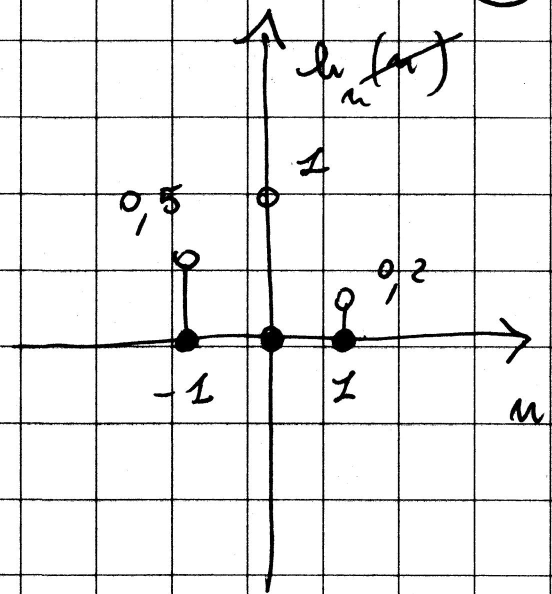
$$\frac{1{,}29}{1+4{,}44z} = 1{,}29 \left(\sum_{-\infty}^{-1} (-4{,}44z)^n \right) = -0{,}29z^{-1} + 0{,}07z^{-2} + \dots$$

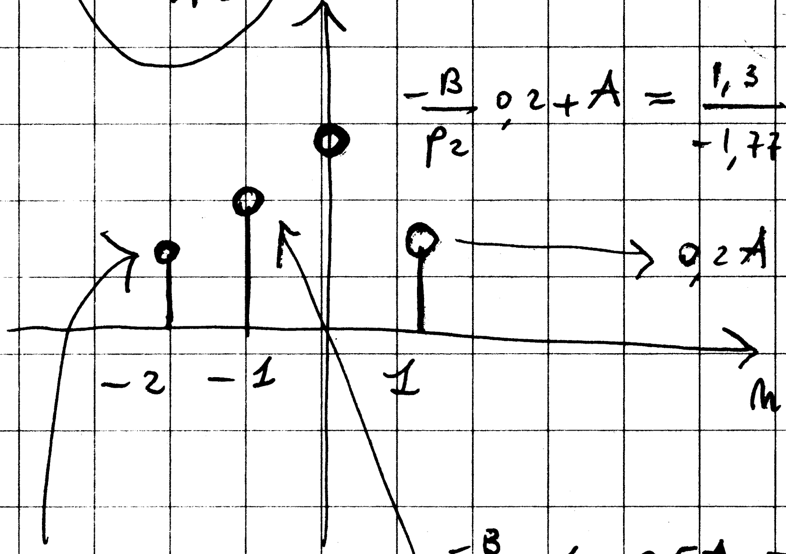
TNA : 10/7/03

1)



$*$



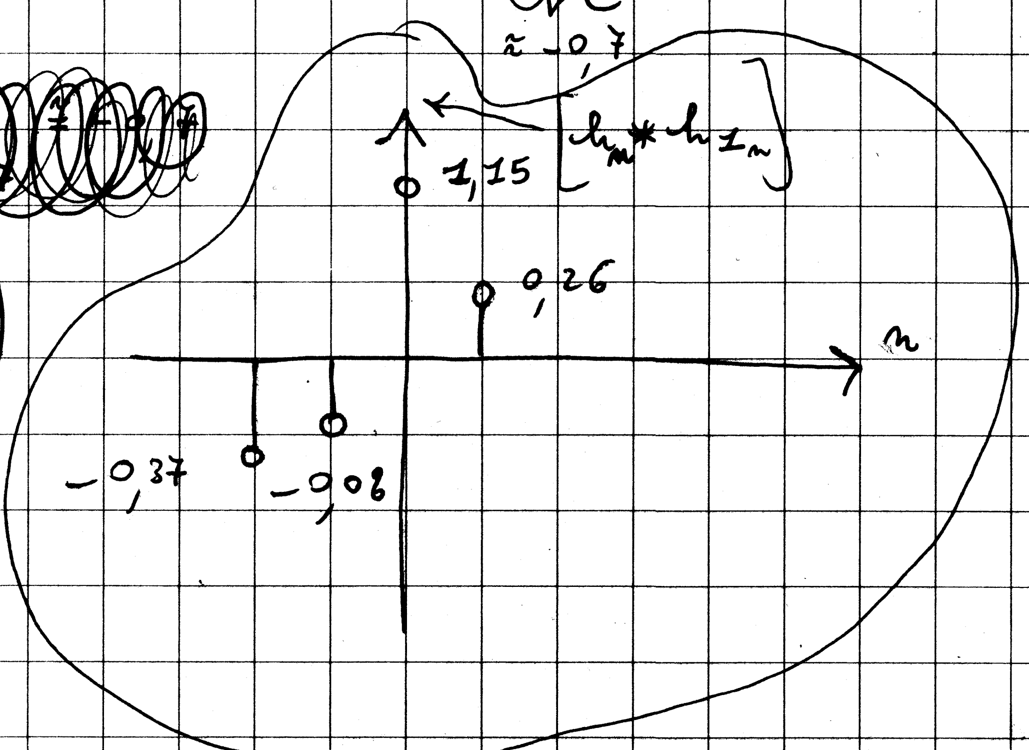


$$-\frac{B}{p_2}0{,}2+A=\frac{1{,}3}{-1{,}77}0{,}2+1{,}3\simeq 1{,}15$$

$$0{,}2A=0{,}26$$

$$-\frac{B}{p_2}\cdot 1+0{,}5A=\underbrace{\frac{1{,}3}{-1{,}77}}_{\simeq -0{,}7}+0{,}5\cdot 1{,}3\simeq -0{,}08$$

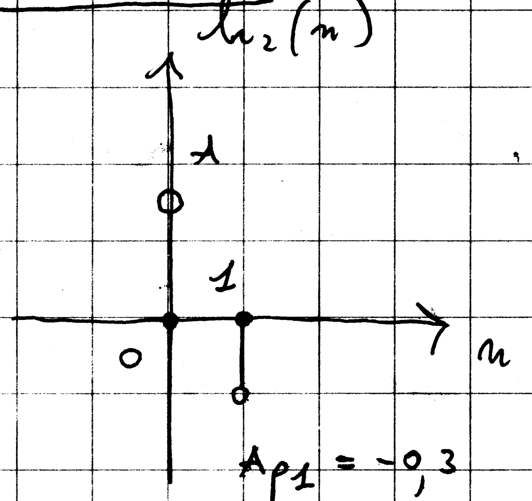
$$-\frac{B}{p_2}0{,}5=-0{,}37$$



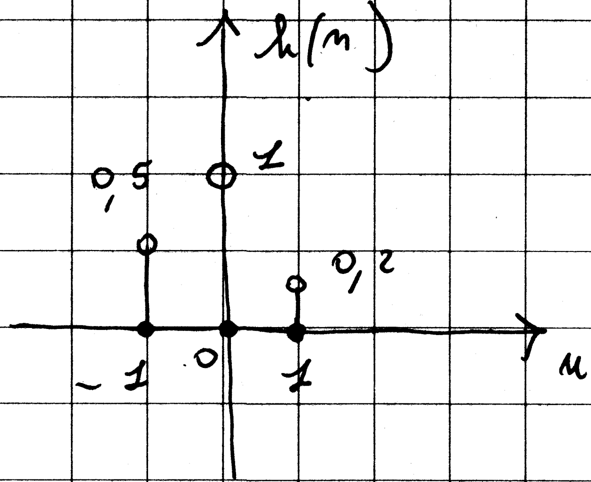
TNA : 10/7/03

10

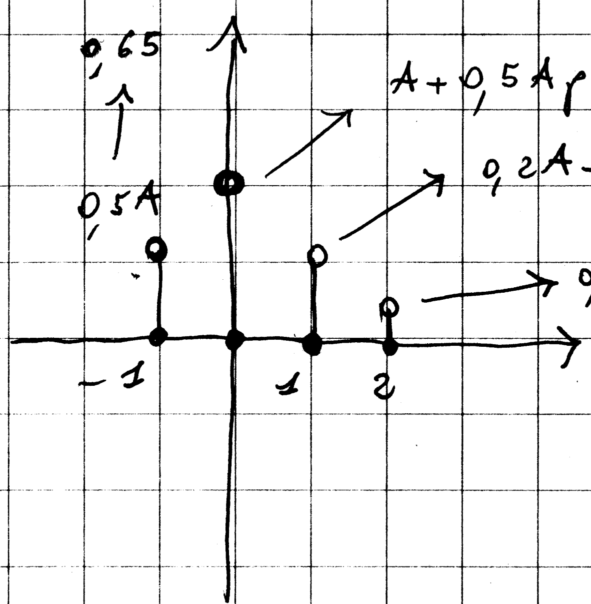
2)



$*$



$A p_1 = -0,3$



$A + 0,5 A p_1 = 1,3 - 0,15 = 1,15$

$0,2 A + A p_1 = 0,26$ [redacted] $0,3 \cong -0,04$

$0,2 A p_1 = 0,2 \cdot (-0,3) = -0,06$

$A = 1,3 = -B$

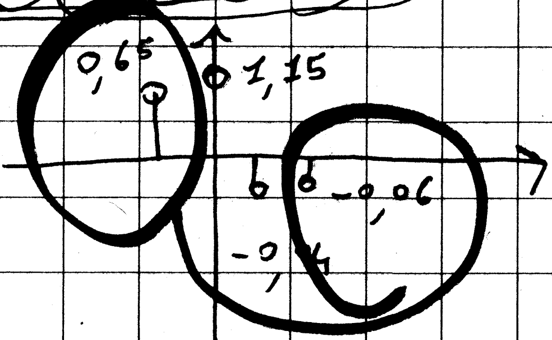
$p_1 = -0,23$

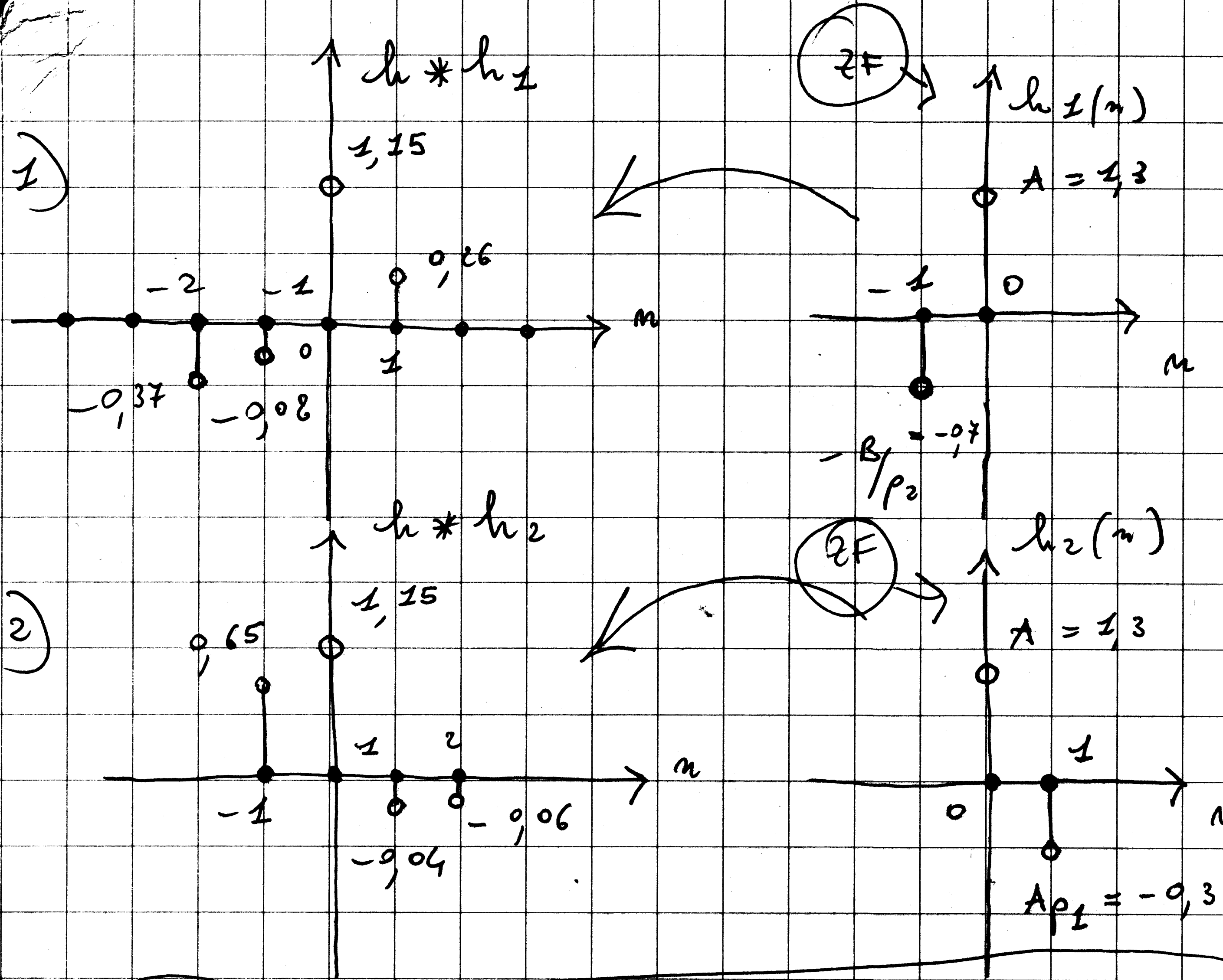
$p_2 = -1,77$

$A p_1 = 1,3 \cdot (-0,23) \cong -0,3$

$0,2 \cdot A = 0,2 \cdot 1,3 = 0,26$

$0,5 A p_1 = 0,5 \cdot (-0,3) = -0,15$





1) Bruit résidu $\sigma_{o1}^2 = \sigma^2 \cdot \left(A^2 + \left(\frac{-B}{\rho_2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{(1,15)^2} = \quad = 1,65\,\sigma^2$

$$= \frac{\sigma^2}{1,32}\left((1,3)^2 + \left(\frac{-1,3}{1,77}\right)^2\right) = \frac{\sigma^2}{1,32}\left((1,3)^2 + (0,7)^2\right) = \frac{\sigma^2}{1,32}\left(1,69 + 0,49\right)$$

2) $\sigma_{o2}^2 = \frac{\sigma^2}{1,32}\left(A^2 + (A\rho_1)^2\right) = \frac{\sigma^2}{1,32}\left((1,3)^2 + (-0,3)^2\right) = \frac{\sigma^2}{1,32}\left(1,69 + 0,09\right)$

$$= 1,35\,\sigma^2$$

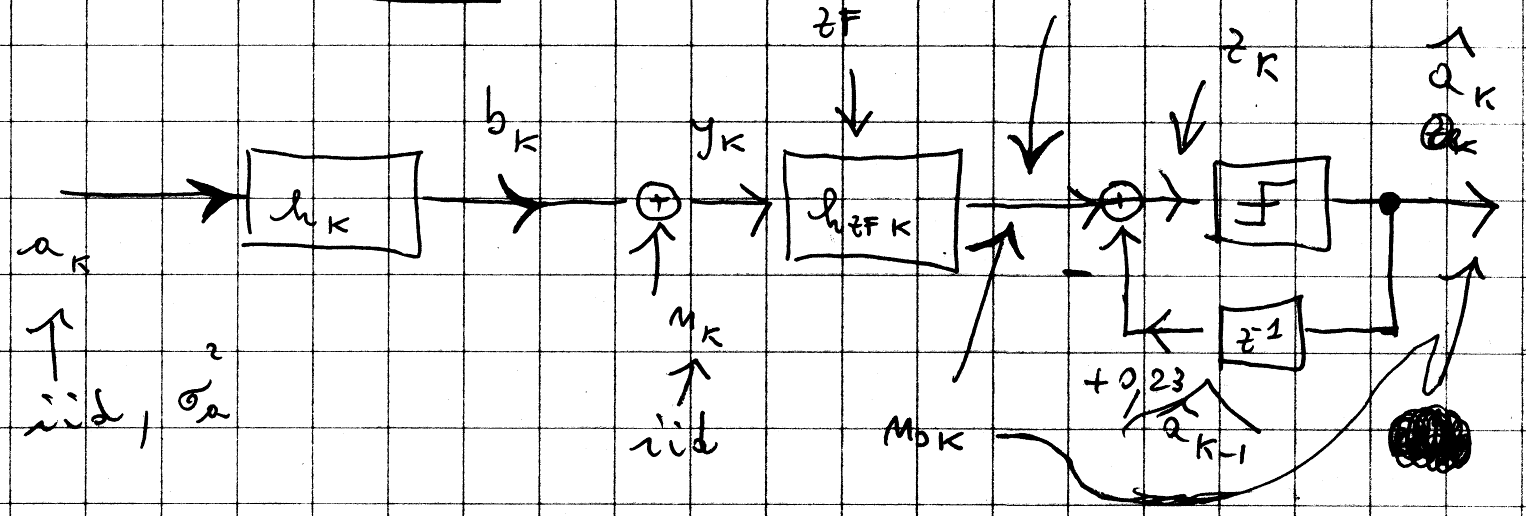
<u>ISI résidu :</u>

1) $\left((0,37)^2 + (0,08)^2\right)\left(\frac{1}{1,15}\right)^2 = (0,14 + 0,0064)\frac{1}{1,32} \simeq 0,11$

2) $\left((0,65)^2 + (0,06)^2\right) \cdot \frac{1}{1,32} = (0,42 + 0,0036)\frac{1}{1,32} \simeq 0,32$

$(1,15)^2 = 1,32$!!! ...

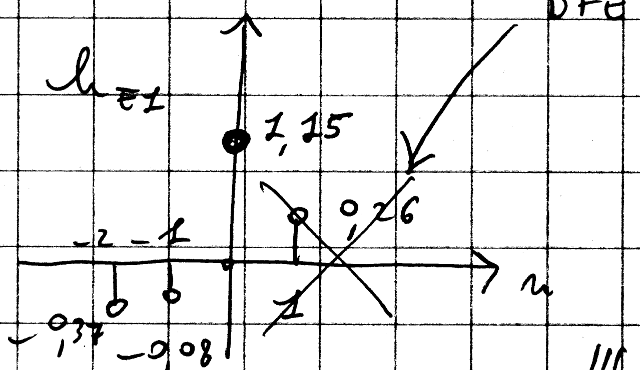
$\boxed{\text{ISI residua}}$



$$u_k = \underbrace{y_k * h_{ZF\,k}}_{\sum_{-N_1}^{N_2} h_{ZF_m}\, y_{k-m}} + n_{0k} = a_k * \underbrace{h_k * h_{ZF\,k}}_{h_{E_k}} + n_{0k}$$

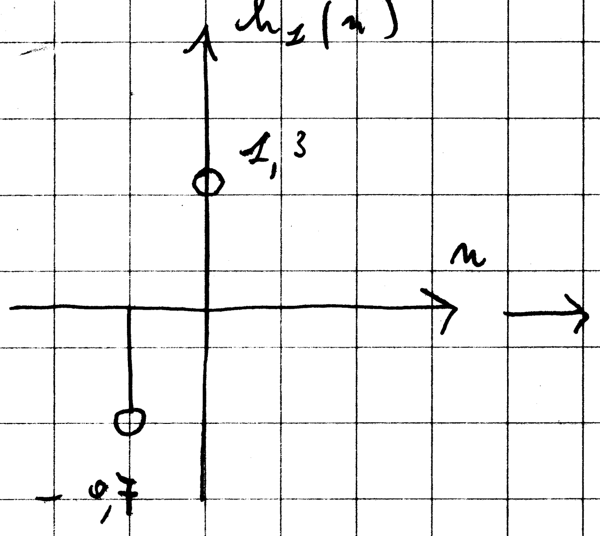
$$h_{E_m} = h_m * h_{ZF\,m}$$

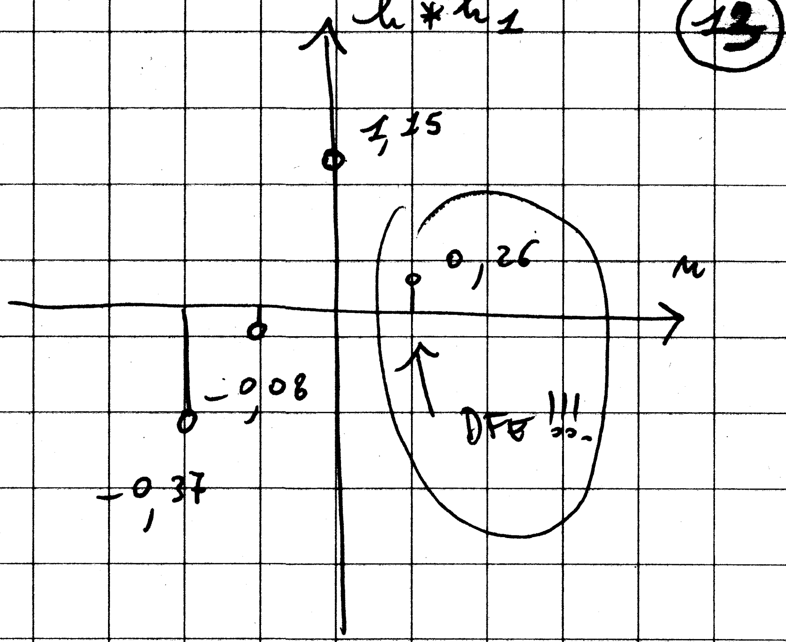
Esempio: h_{E1}



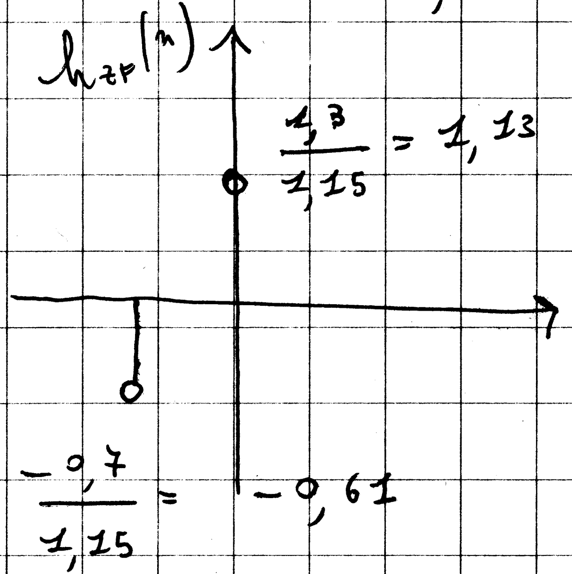
1 !!!

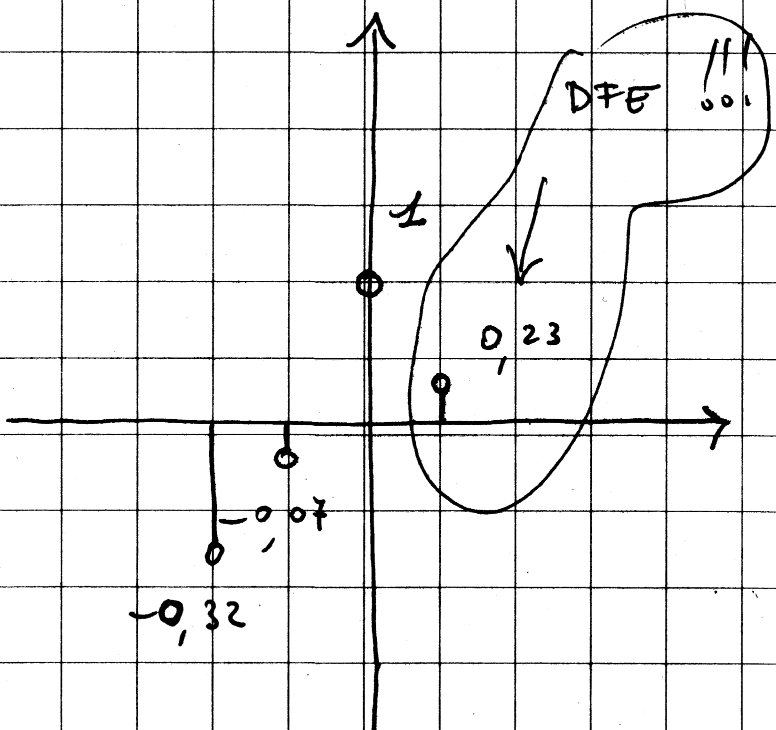
ISI residua $\longrightarrow$ $\sigma^2_{ISI1} = \sigma_A^2 \cdot \left(\left((0,37)^2 + (0,08)^2\right)\left(\frac{1}{1,15}\right)^2\right) \simeq 0,11$





NORMALIZZO con $\frac{1}{1,15}$





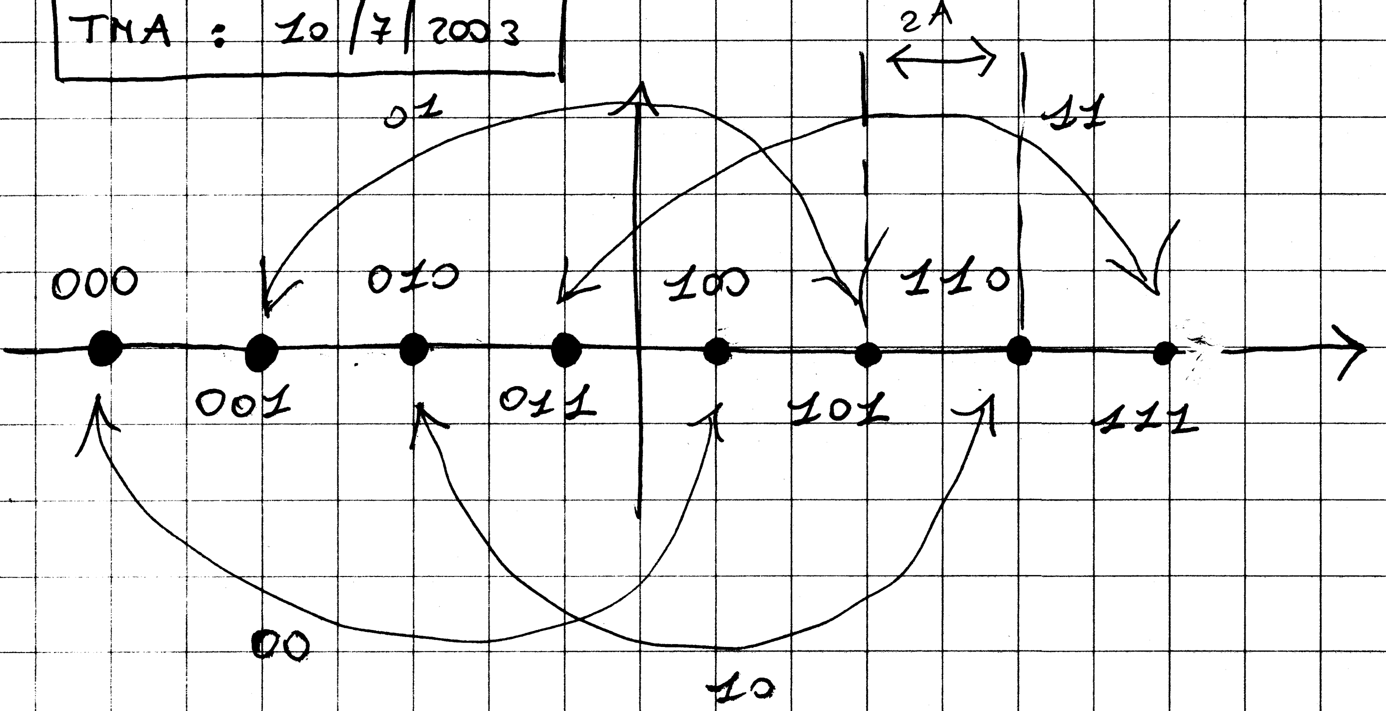
$$y_k * h_{ZF\,k} = -0{,}32\, a_{k+2} - 0{,}07\, a_{k+1} + 1 \cdot a_k + 0{,}23\, a_{k-1} + n_{0k}$$

$\hookrightarrow$ DF $\longrightarrow -0{,}23\, \hat{a}_{k-1}$!!!!

$$z_k = -0{,}32\, a_{k+2} - 0{,}07\, a_{k+1} + a_k + 0{,}23\left(a_{k-1} - \hat{a}_{k-1}\right) + n_{0k} =$$

TMA : 10/7/2003

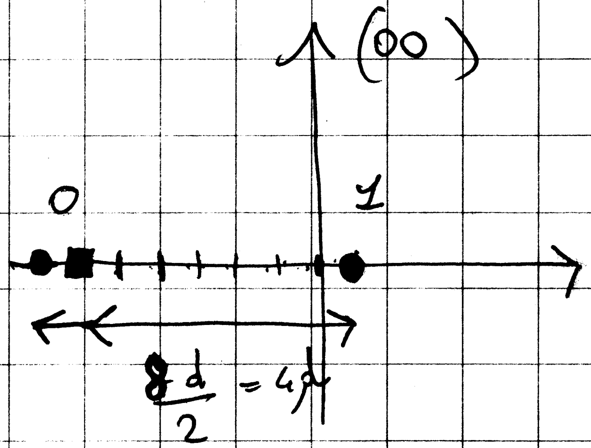
14

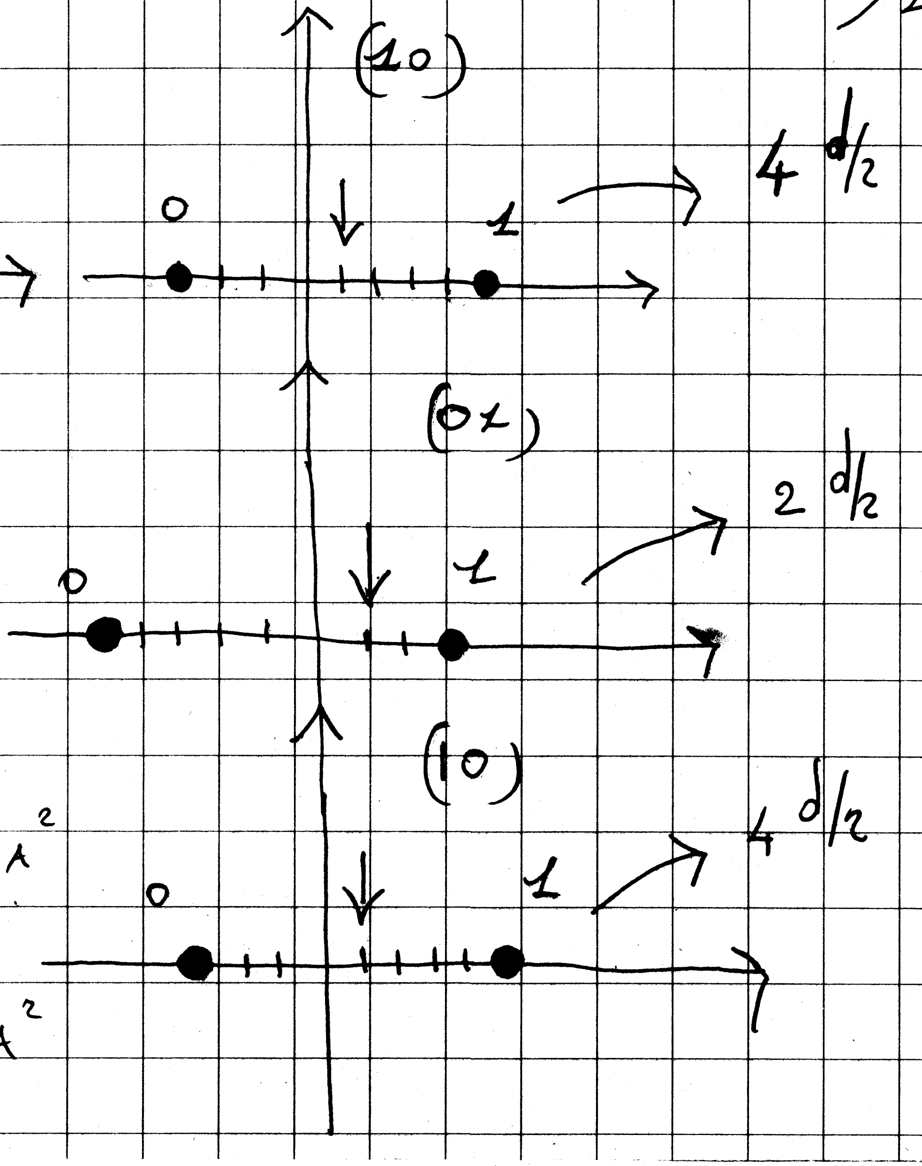


$$E_M = \frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{5d}{2}\right)^2 + \left(\frac{7d}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{9}{4}d^2 + \frac{25}{4}d^2 + \frac{49}{4}d^2\right) = \frac{84}{16}d^2 = 5{,}25\,d^2 = \cancel{3E_b}$$

$2E_b$





$$d^2_{MIN} = (16+4+16)\frac{d^2}{4}$$

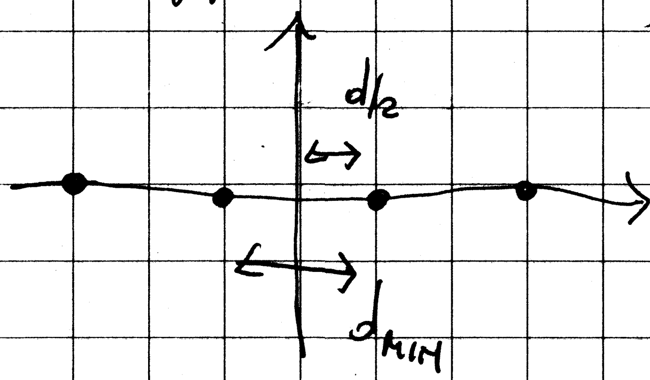
$$d^2_{MIN} = 36\frac{d^2}{4} = 9d^2 = 36A^2$$

$$d^2_{MIN\ PAR} = 16d^2 = 64A^2$$

TMA : 10/7/2003

PAM a 4 livelli (poco efficiente [illegible])

$$P(E) \cong Q\left(\sqrt{\frac{\cancel{8}\,4}{5}\frac{E_b}{N_0}\frac{1}{\cancel{2}}}\right)$$



$$d^2_{MIN} = 4\frac{d^2}{4} = d^2 = \frac{8}{5}E_b$$

$$\frac{84}{16}d^2 = 2E_b \longrightarrow d^2 = \frac{32}{84}E_b$$

$$P(E) = [illegible] = Q\left(\sqrt{\frac{9\cdot\cancel{32}}{\cancel{84}\ \cancel{42}\ 21}\frac{E_b}{\cancel{2}N_0}}\right)$$

$$P(E) \cong Q\left(\sqrt{\frac{36}{21}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

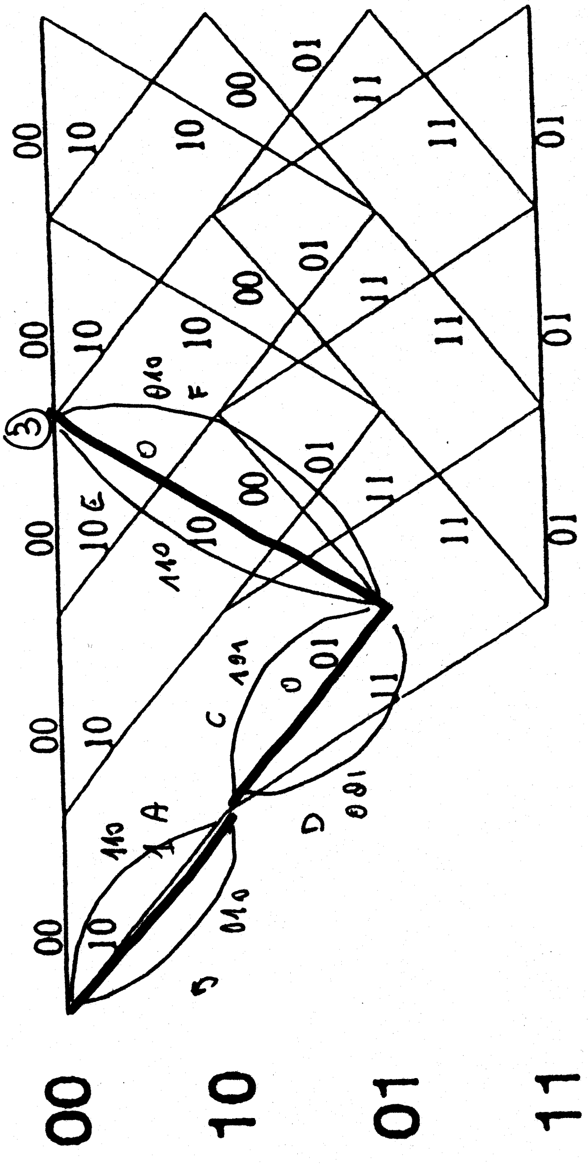
$$\frac{36/21}{4/5} = 2,14 \Rightarrow 3,31\ dB\ !!! \longleftarrow$$ Guadagno Asintotico

$$B_T = \frac{r_s}{2}(1+\delta) = \left(\frac{r_b}{\cancel{\log_2 8}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(1+\delta) = 2,5(1+\delta)$$

$r_b = 10\ Mb/s$

$\downarrow$

PAM 4 livelli $\longrightarrow B_T = \frac{r_b}{\log_2 4}\frac{1}{2}(1+\delta) = 2.5(1+\delta)$


00
10
01
11