

1.1.- Ecuaciones de Maxwell para campos estáticos

1.2.- Las ecuaciones de Poisson y Laplace:
propiedades generales de la solución.

1.3.- Soluciones de la ecuación de Laplace en dos
dimensiones.

1.4.- El método de las Imágenes. [RMC § 3.9-4.10]

1.5.- Problemas de contorno en magnetostática.

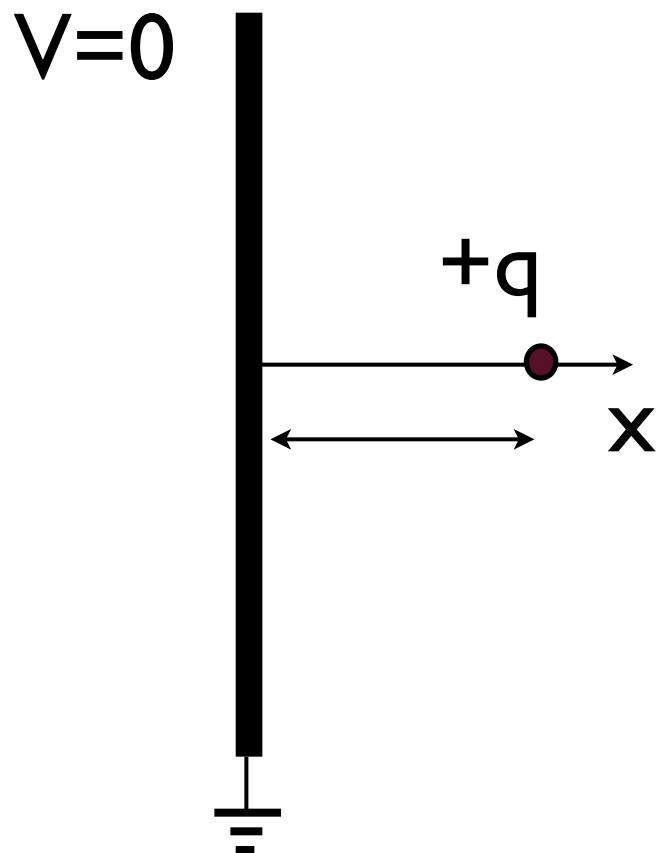
1.6.- Introducción a los métodos numéricos.

I.4.- El método de las Imágenes.

Teorema de unicidad: un potencial que satisface la ecuación de Poisson y las condiciones de contorno es el único potencial posible.

Método de la imágenes: es un procedimiento para obtener el V sin resolver las ecuaciones diferenciales. Conversión de un campo eléctrico es otro más fácil de calcular. No se aplica de forma universal a a todo los tipos de problemas electrostáticos: cargas puntuales en las cercanías de un conductor.

Un ejemplo: Supongamos una carga q a una distancia d de un plano conductor. ¿ Calcular el V para $z > 0$?.



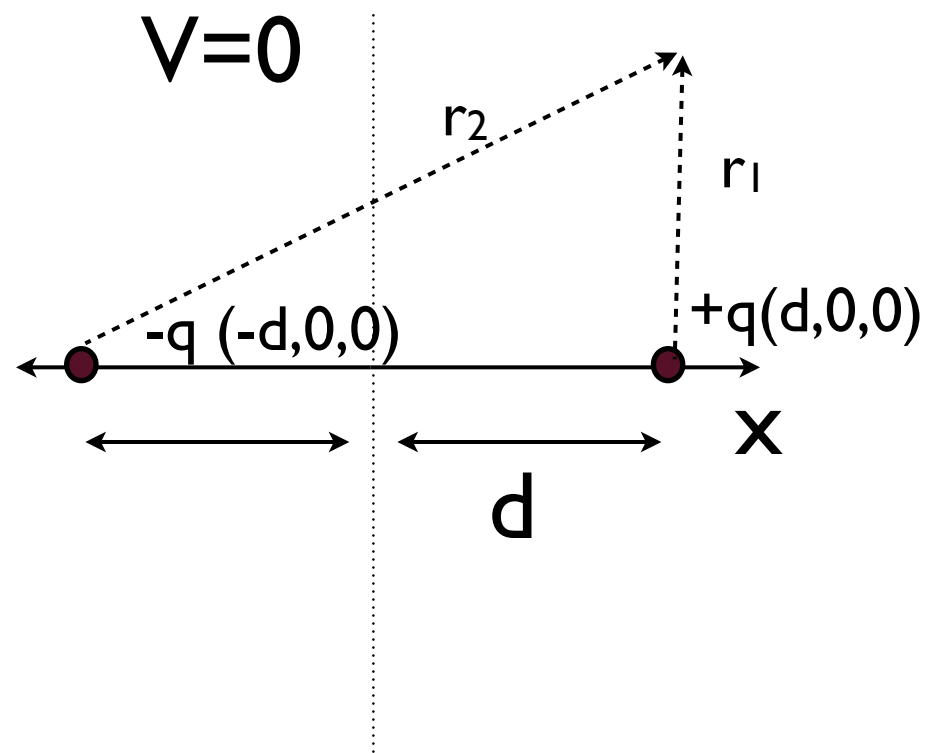
q induce una cantidad de carga negativa en la superficie más cercana del conductor. El potencial total es debido a q y a la carga inducida.

$$\nabla^2 V = \rho / \epsilon_0 \quad + \text{ condiciones de contorno}$$

$$V = 0 \quad \text{cuando} \quad z = 0$$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$$

I.4.- El método de las Imágenes.



Sustituimos el plano por una carga $-q$ a una posición d con respecto a la posición del plano. Con esta situación se cumplen las condiciones de contorno

$$V = 0 \quad \text{cuando} \quad z = 0$$

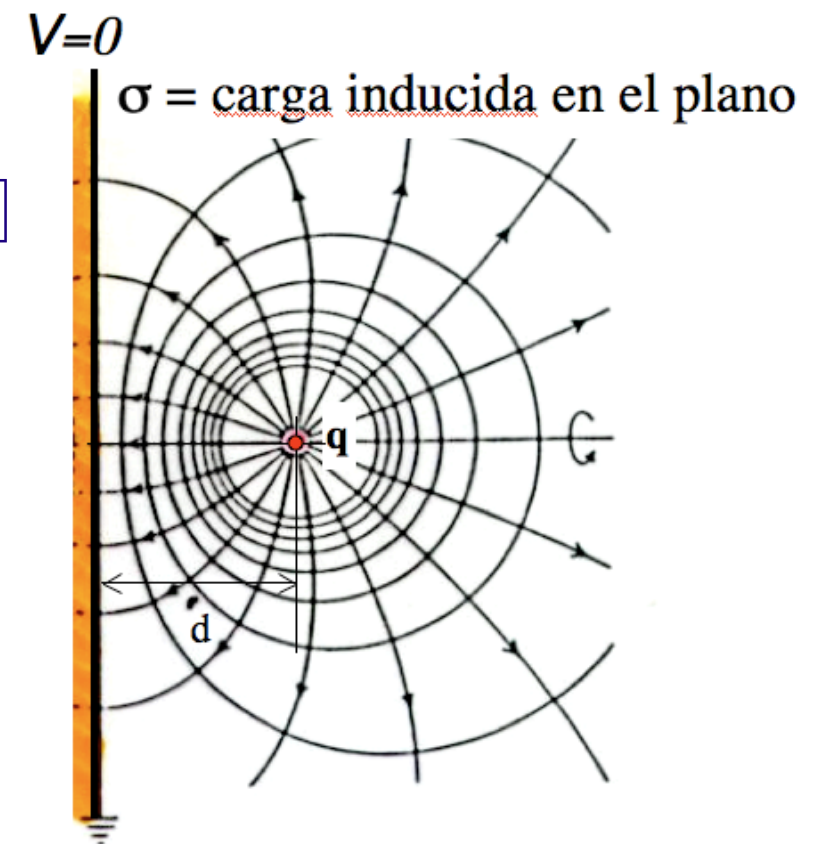
$$V \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$$

$$z > 0$$

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Este potencial cumple las condiciones de contorno y la única carga para $z > 0$ es q



I.4.- El método de las Imágenes.

Carga inducida

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{x=0} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q(x-d)}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{q(x+d)}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

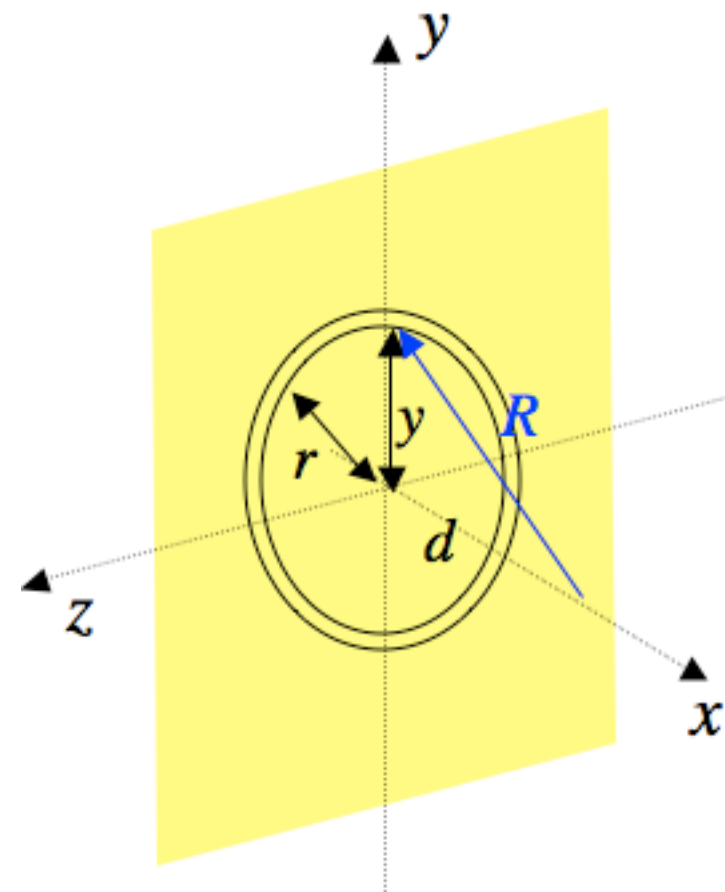
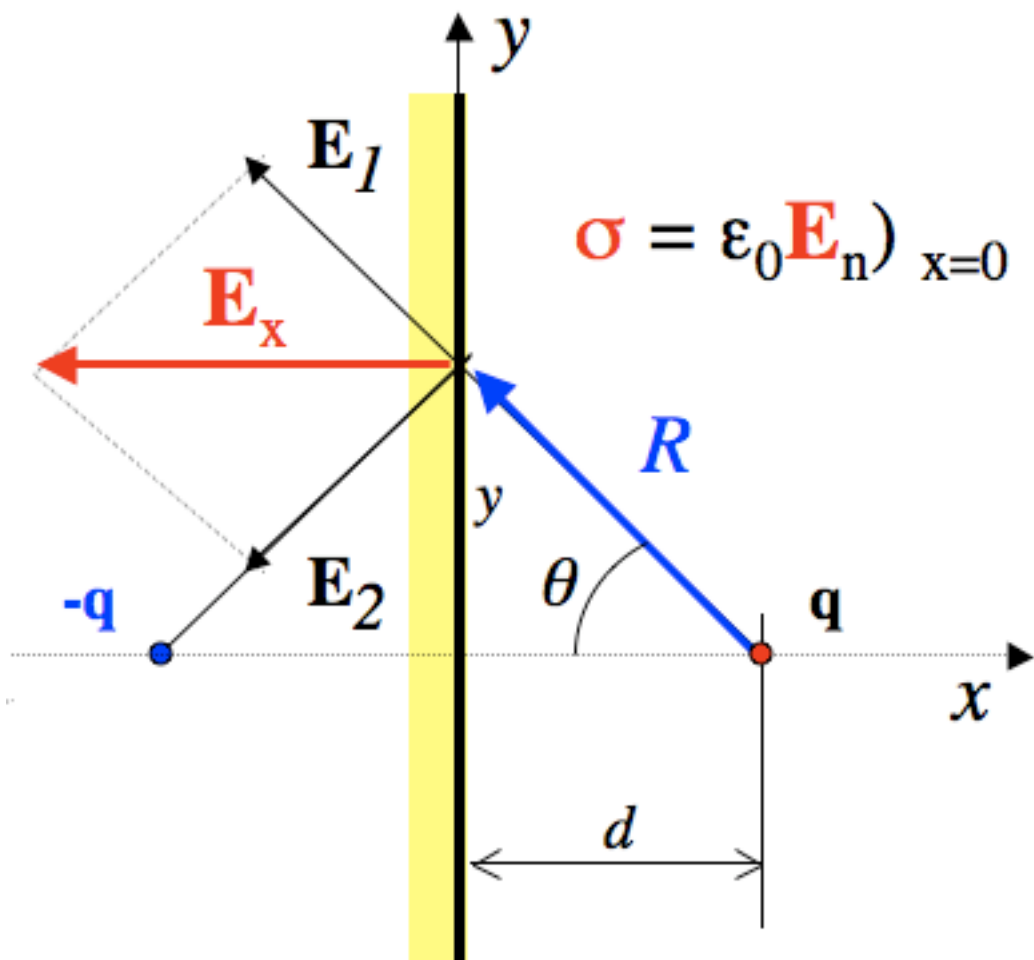
$$\sigma(y, z) = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$Q = \int \sigma da$$

$$da = dydz$$

$$da = r dr d\theta$$

$$r^2 = y^2 + z^2$$



I.4.- El método de las Imágenes.

Carga inducida

$$\sigma(y, z) = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

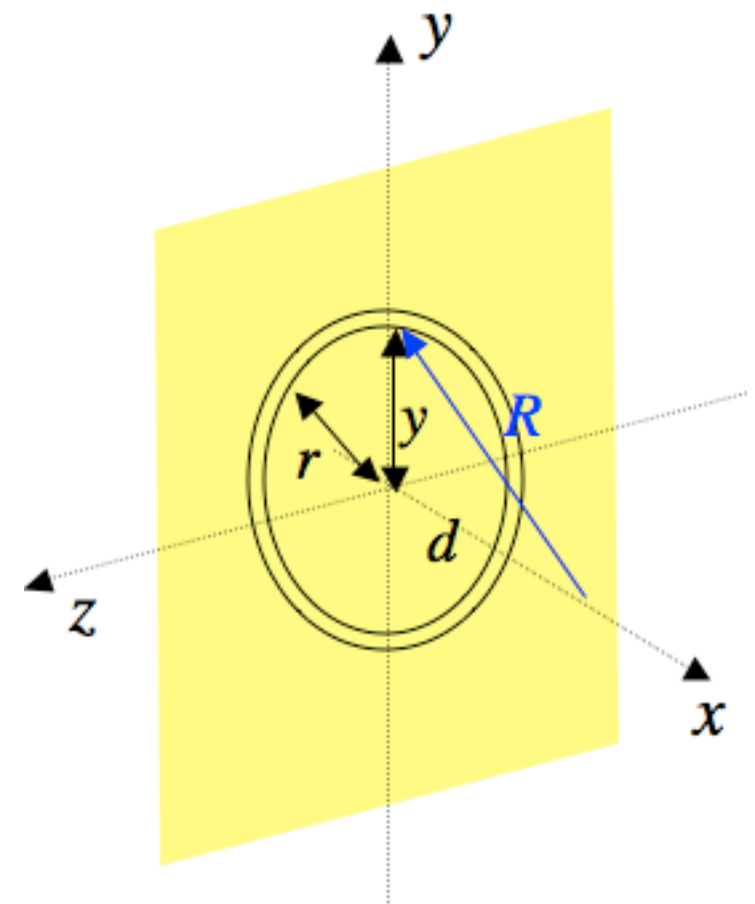
$$Q = \int \sigma da$$

$$da = dydz$$

$$da = r dr d\theta$$

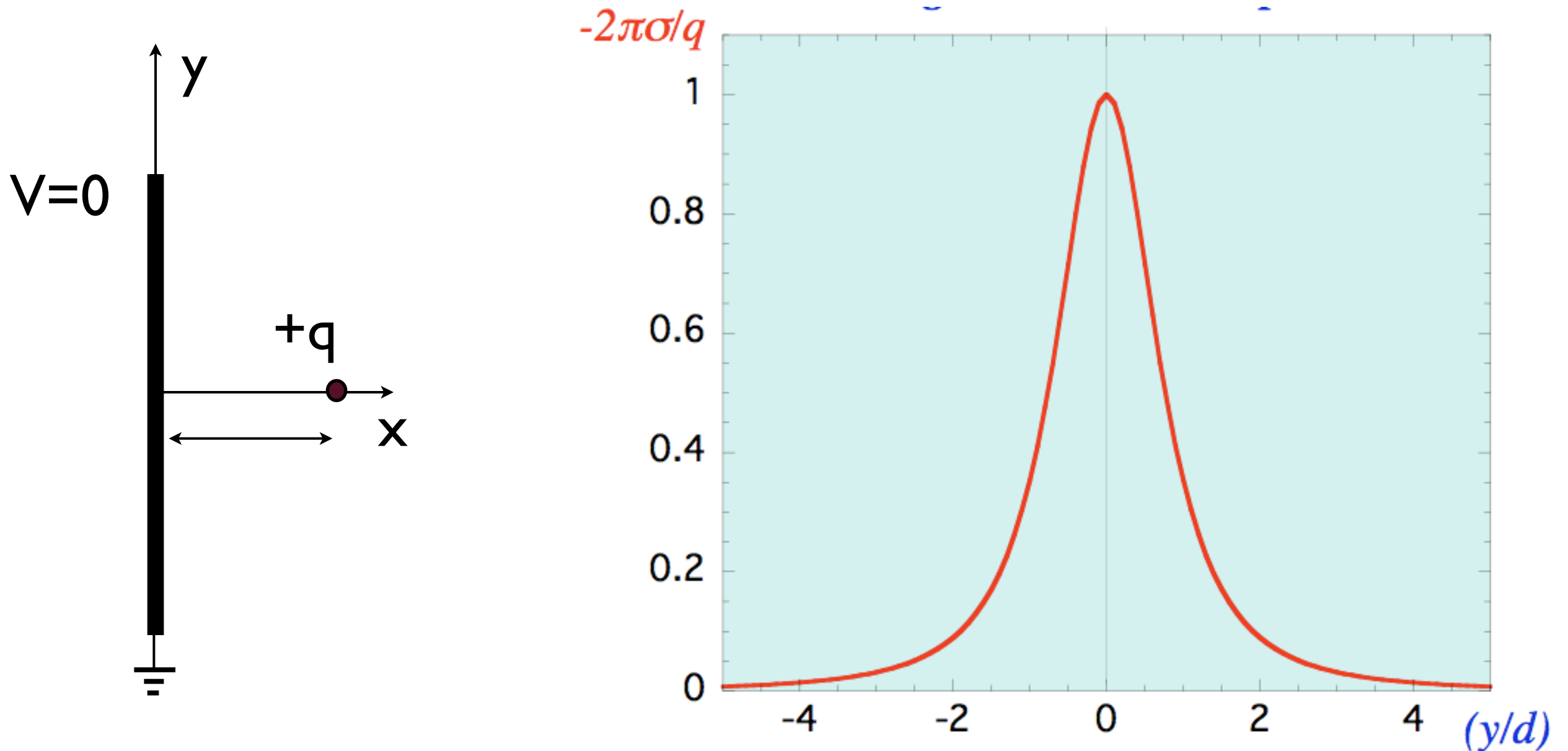
$$r^2 = y^2 + z^2$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\theta = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^\infty = -q$$



I.4.- El método de las Imágenes.

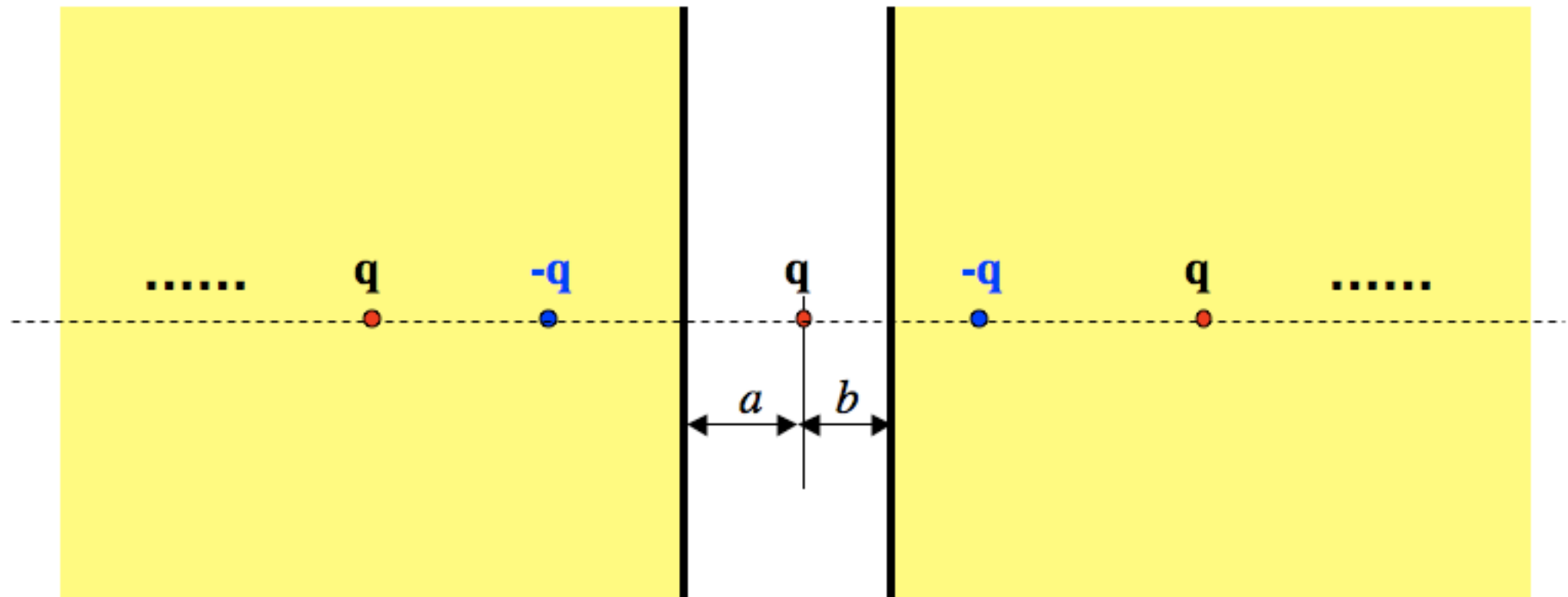
Carga inducida en el plano



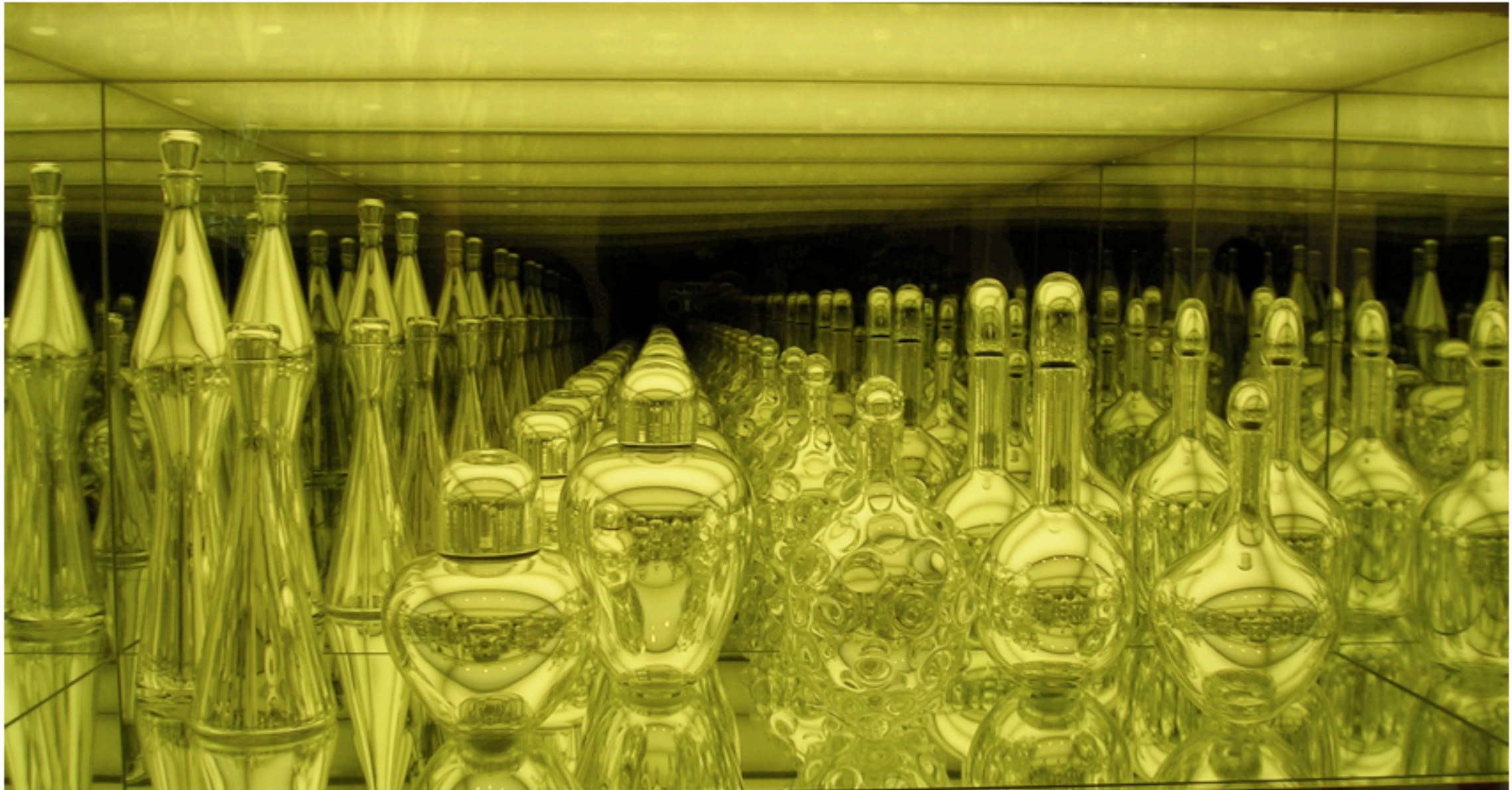
$$\sigma(y/d) = \frac{-q}{2\pi(1 + (y/d)^2)^{3/2}}$$

I.4.- El método de las Imágenes.

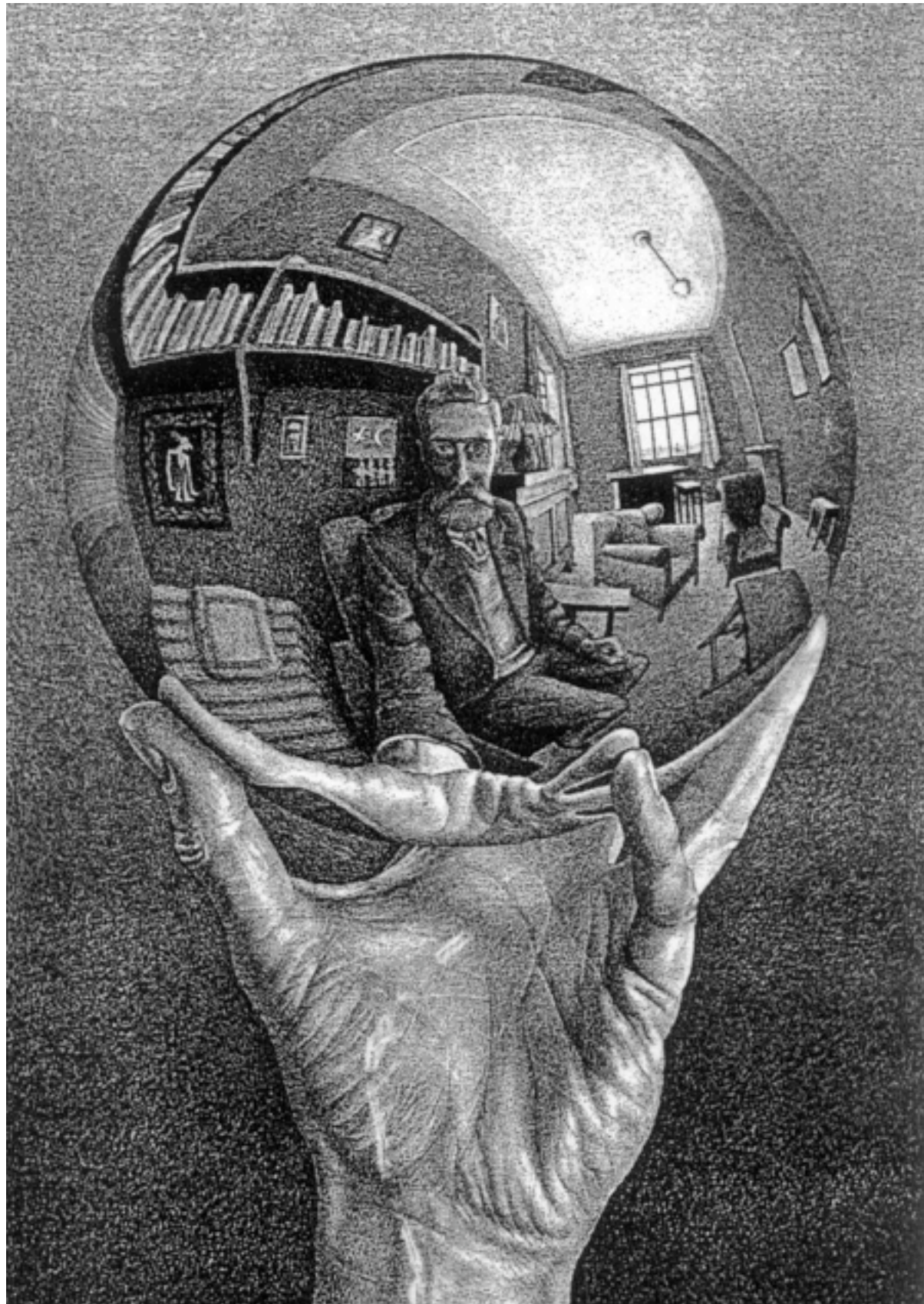
Ejemplo: carga puntual entre dos planos conductores paralelos



Es necesario un número infinito de imagenes en los planos conductores pero la carga total inducida en cada uno es cero.



Imágenes “Infinitas” entre dos espejos (MOMA, NYC)



La esfera deforma las imágenes

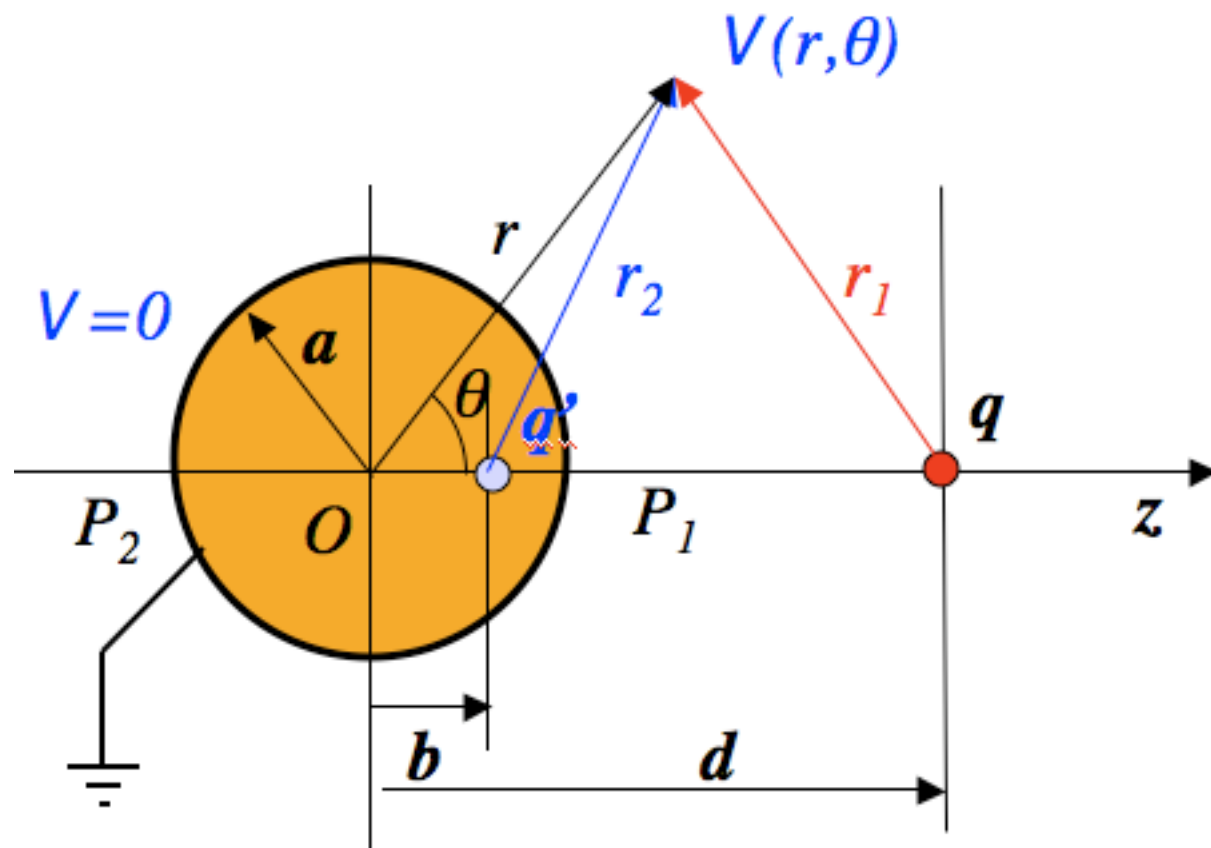
¿Qué pasará con las cargas?

M.C. Escher:

“Mano con esfera reflectante”

Litografía (1935)

Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial cero



$$V(r, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}$$

¿Cuánto valen q' y b ?

$$P_1 \rightarrow V_{P_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d-a} + \frac{q'}{a-b} \right) = 0$$

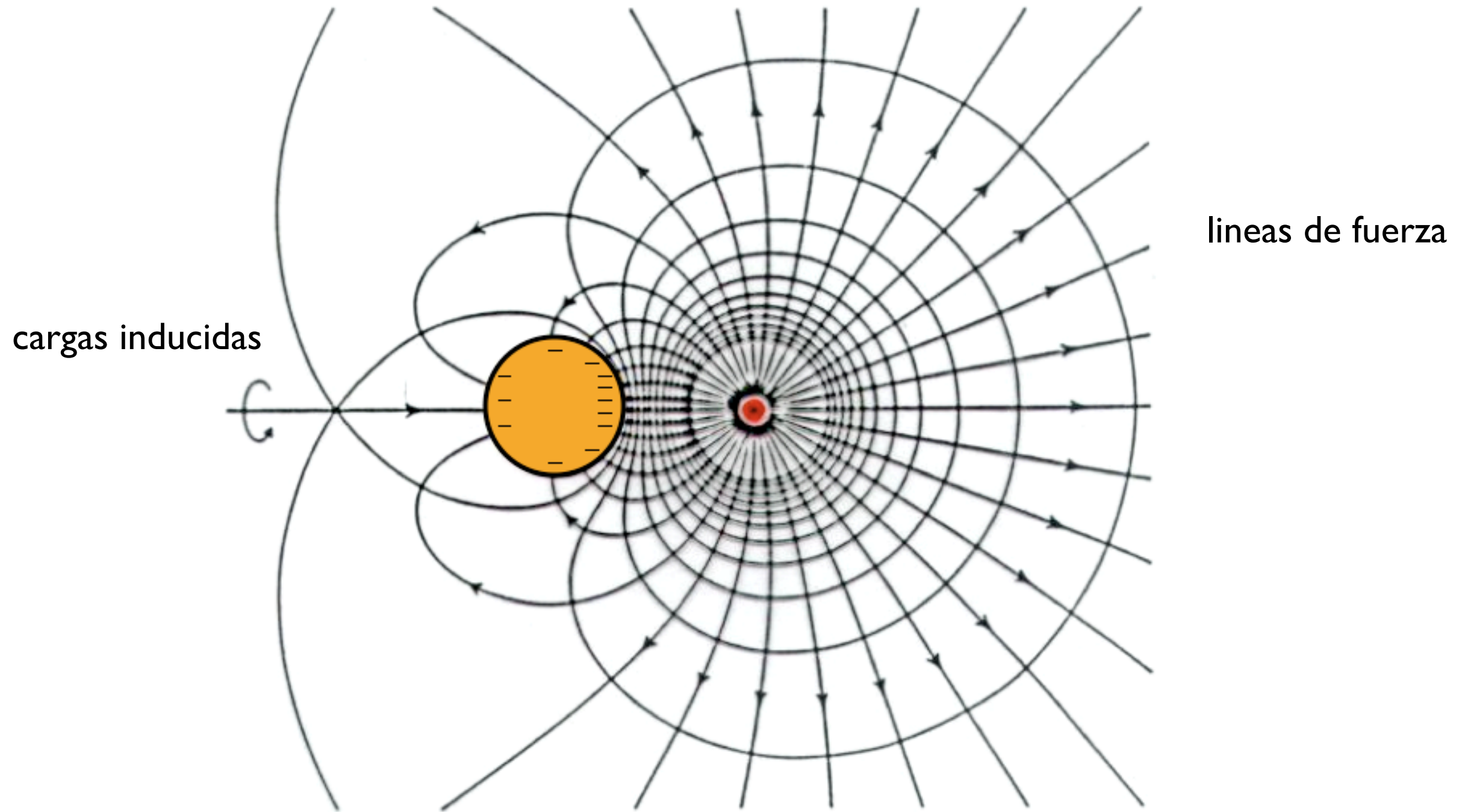
$$P_2 \rightarrow V_{P_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d+a} + \frac{q'}{a+b} \right) = 0$$



$$q' = -\frac{a}{d}q \quad b = \frac{a^2}{d}$$

$$V(r, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta}} - \frac{a/d}{\sqrt{(a^2/d^2) + r^2 + 2(a^2/d)r \cos \theta}} \right)$$

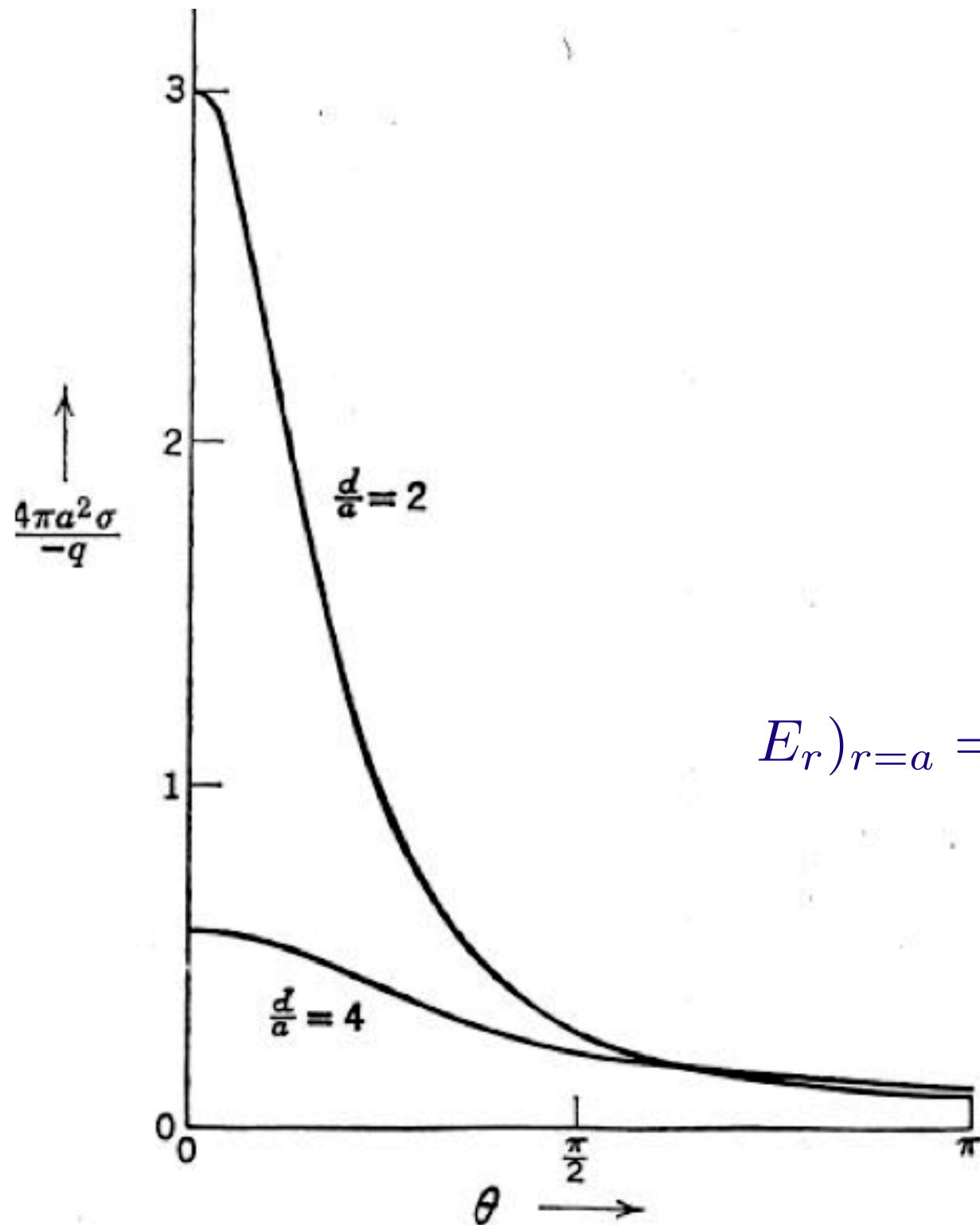
Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial cero



Las superficies equipotenciales se generan al girar la figura alrededor del eje

Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial cero

Carga inducida en la esfera

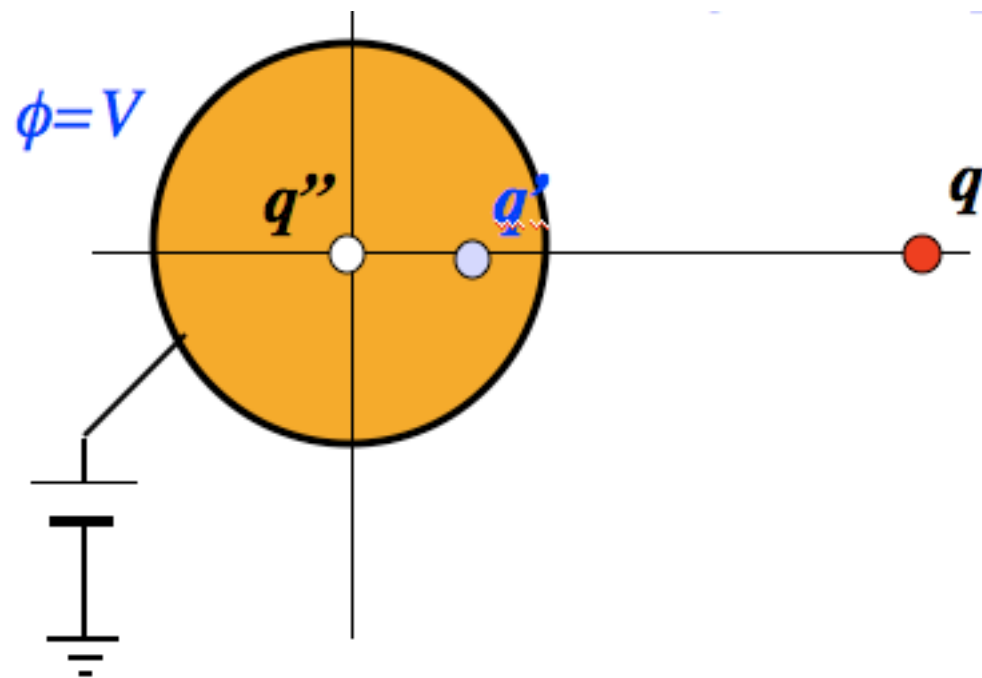


$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r)_{r=a}$$

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a}$$

$$E_r)_{r=a} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{d^2 - a^2}{(d^2 + a^2 + 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial V



Sustituimos la esfera por una carga imagen q'

$$q' = -\frac{a}{d}q \quad b = \frac{a^2}{d}$$

superficie equipotencial a $V=0$. Problema anterior

Después añadimos una segunda carga, q'' en el centro para que se encuentre al potencial deseado, V .

$$V = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} \quad q'' = 4\pi\epsilon_0 a V$$

Carga puntual próxima a una esfera conductora con carga superficial q_s

Sustituimos la esfera por una carga imagen q'

Después añadimos una segunda carga, $q'' = q_s - q'$ en el centro. La densidad

superficial de carga es $\sigma' + \sigma''$

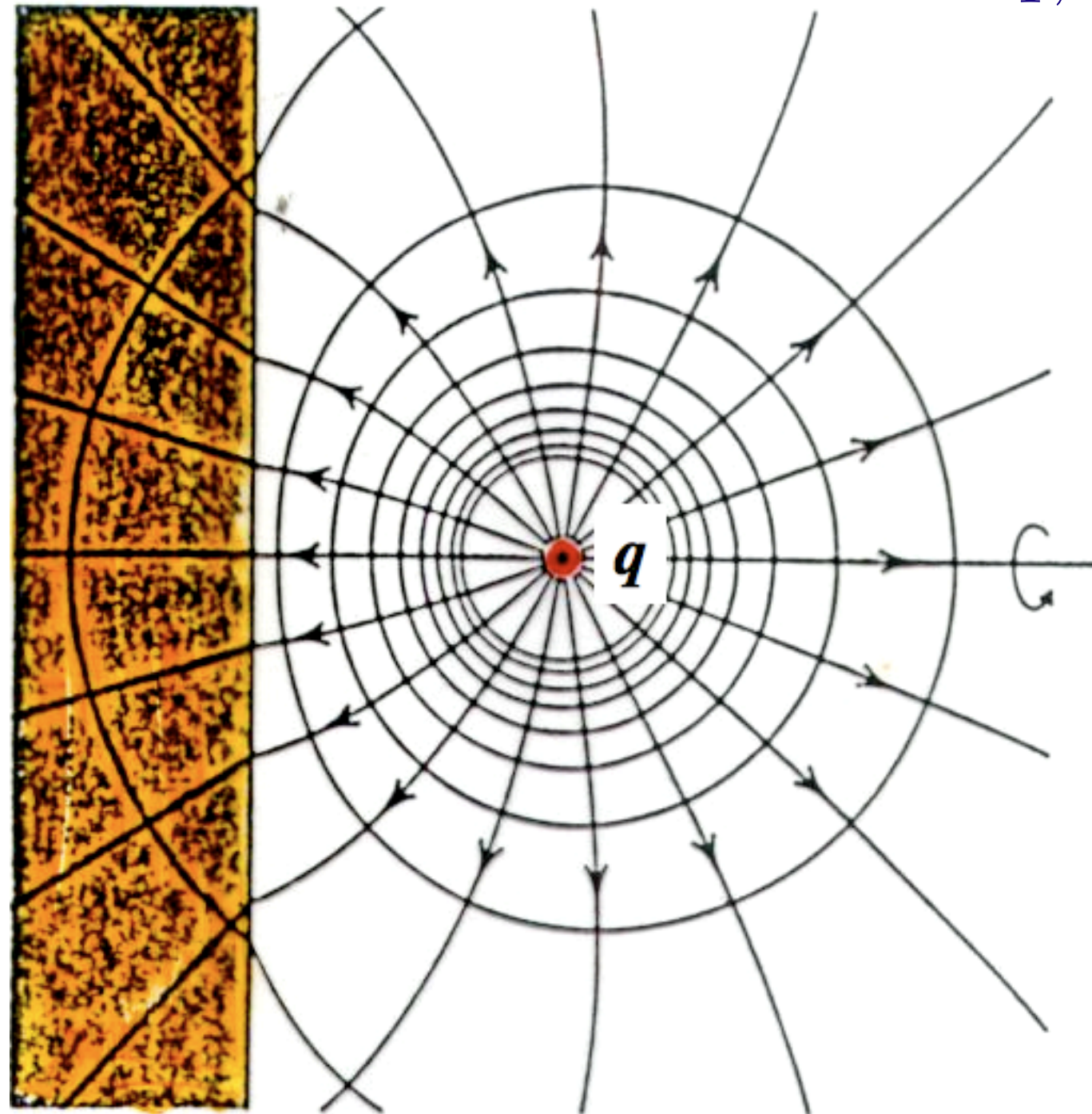
σ' es la distribución de carga no uniforme generada por q , q'

σ'' es la distribución de carga uniforme generada por q''

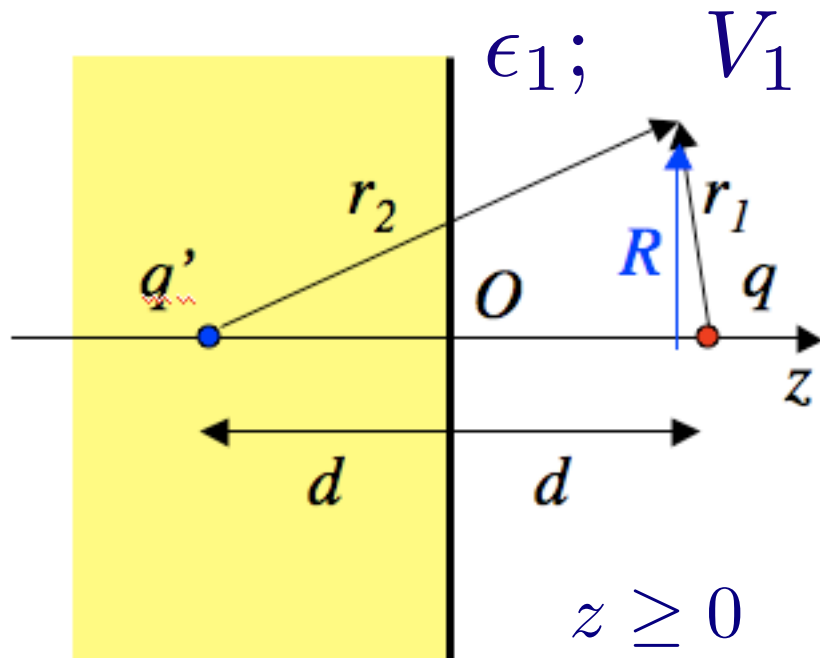
Carga puntual frente a un plano dieléctrico

$\epsilon_2;$ V_2

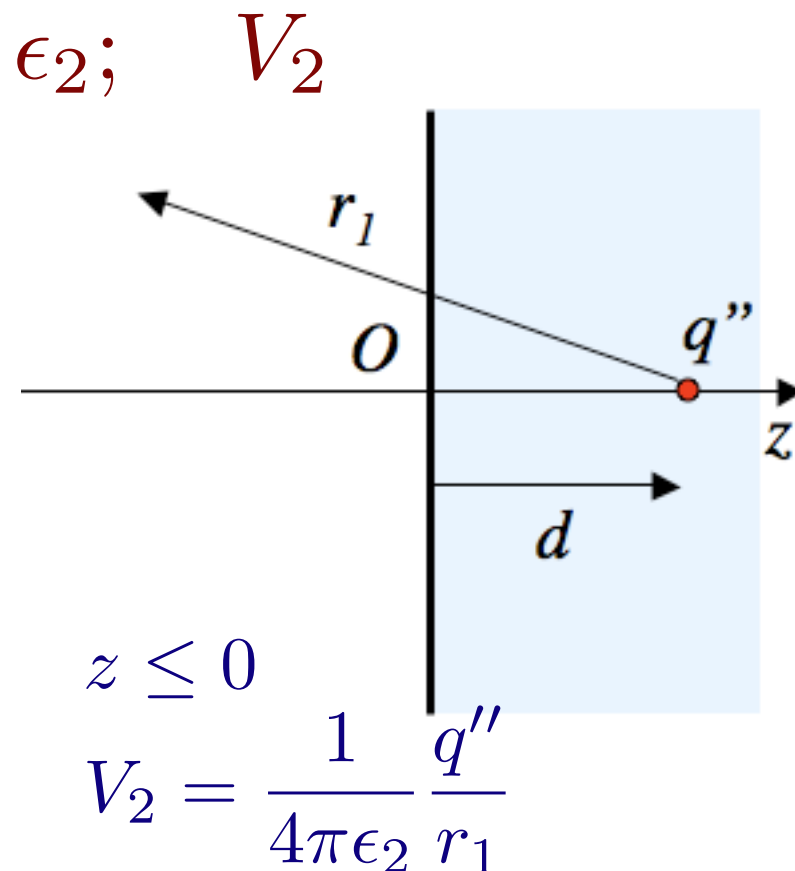
$\epsilon_1;$ V_1



Carga puntual frente a un plano dieléctrico



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{r_1}$$

Condiciones de contorno:

1.- $V_1)_{z=0} = V_2)_{z=0}$

2.- $D_{1n})_{z=0} = D_{2n})_{z=0}$ *carga libre es cero*

$$r_1 = \sqrt{(d - z)^2 + R^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(d + z)^2 + R^2}$$

En $z=0$

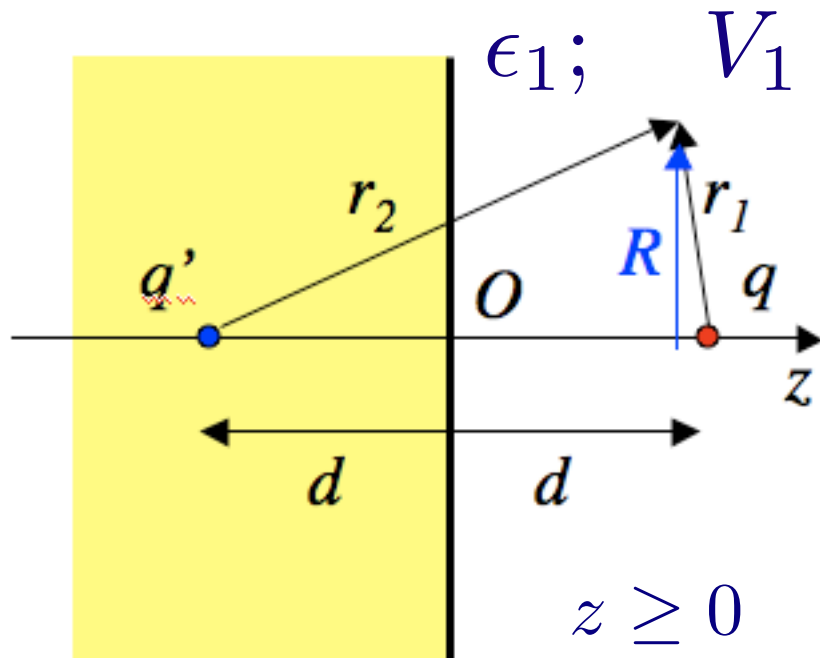
$$r_1 = r_2 = \sqrt{d^2 + R^2} = r$$

1.- $V_1)_{z=0} = V_2)_{z=0}$

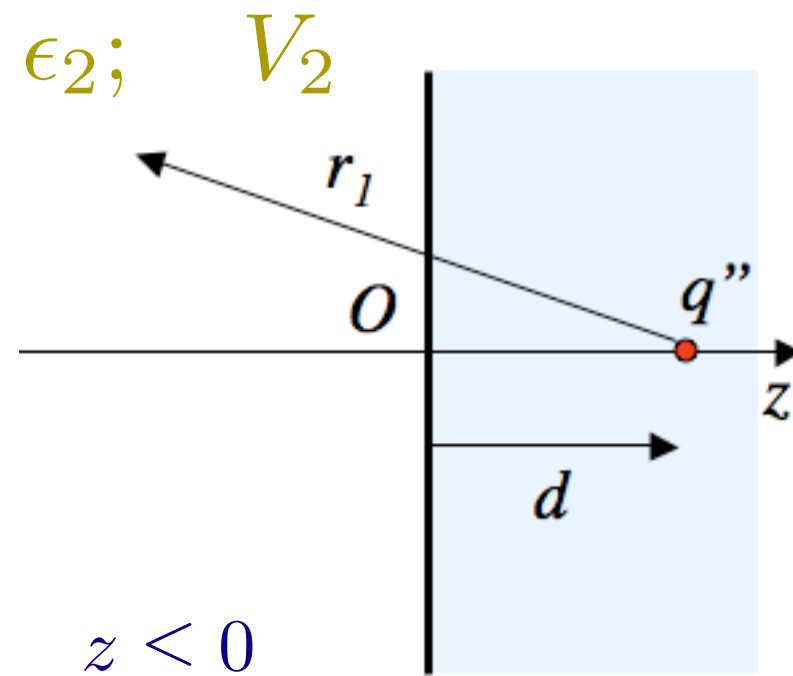
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{r}$$

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}$$

Carga puntual frente a un plano dieléctrico



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{r_1}$$

$$r_1 = \sqrt{(d - z)^2 + R^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(d + z)^2 + R^2}$$

En $z=0$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{d^2 + R^2} = r$$

$$2.- D_{1n})_{z=0} = D_{2n})_{z=0}$$

$$D_{1n})_{z=0} = \epsilon_1 \left(-\frac{\partial V_1}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{qd}{r^3} - \frac{q'd}{r^3} \right)$$

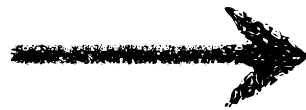
$$D_{2n})_{z=0} = \epsilon_2 \left(-\frac{\partial V_2}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \frac{q''d}{r^3}$$

$$q - q' = q''$$

cargas imágenes

$$q - q' = q''$$

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}$$



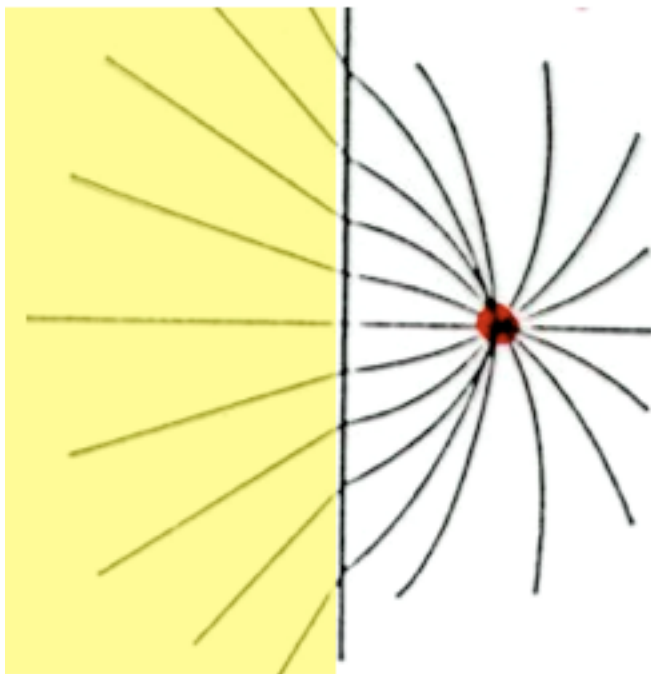
$$q' = q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$q'' = q \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

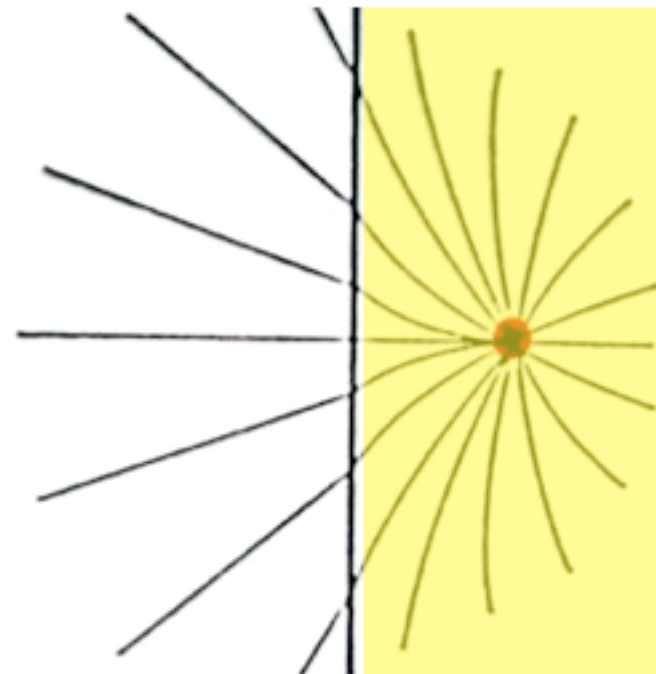
cargas polarización

$$\sigma_p = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = (P_{2z} - P_{1z})_{z=0}$$

$$\sigma_p = \frac{q}{4\pi} \frac{d}{r^3} \frac{2\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$



$$\epsilon_2 > \epsilon_1$$



$$\epsilon_2 < \epsilon_1$$