MUTTI ANDREA 88645 16/07/2013 1

① a) $H^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N}$

Ricordo che per un codice sistematico è possibile definire la matrice H^T che è formata dalla matrice di parità e dalla matrice identità di lunghezza N-K

$$\begin{bmatrix} P \\ I_{N-K} \end{bmatrix}$$

Poiché $N-K = 3$ e $N = 7 \Rightarrow K = 4 \rightarrow$ avrò 2^k parole possibili cioè 16

Inoltre sempre per la sistematicità del codice la matrice generatrice sarà data da $G = [\, I_k \;\; P \,]$ quindi

$$G = \begin{bmatrix} 1000110 \\ 0100011 \\ 0010111 \\ 0001101 \end{bmatrix}$$

Per ottenere le possibili codewords posso agire in questo modo: $\underline{x} = m\underline{G}$ ma più semplicemente posso trovare le parole 1, 2, 4 e 8 e combinarle tra loro per trovare le altre possibili codeword, poiché il codice è sistematico infatti tali parole corrispondono alle righe della matrice.

m(t)		x(t)	
0000	→	0000000	
0001		0001101	riga 4
0010		0010111	
0011		0011010	
0100		0100011	
0101		0101110	
0110		0110100	
0111		0111001	
1000		1000110	
1001		1001011	
1010		1010001	
1011		1011100	
1100		1100101	
1101		1101000	
1110		1110010	
1111		1111111	

Per verificare che il codice sia ciclico analizzo il polinomio generatore ottenuto dall'ultima riga di G:

$$1 + D^2 + D^3$$

La prima condizione è che sia di grado $N-K = 7-4 = 3$ OK RISPETTATA

La seconda è che sia divisore del polinomio $D^N + 1 = D^7 + 1$

$$D^7 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + 1 \quad | \quad D^3 + D^2 + 1$$
$$D^7 + D^6 + \cdot + D^4$$
$$/ \quad D^6 + D^4 + 1 \quad | \quad D^4 + D^3 + D^2 + 1$$
$$D^6 + D^5 + D^3$$
$$// \quad D^5 + D^4 + D^3 + 1$$
$$D^5 + D^4 + D^2$$
$$// \quad // \quad D^3 + D^2 + 1$$
$$D^3 + D^2 + 1$$
$$/ \quad // \quad //$$

RESTO = ∅ È DIVISORE

quindi il codice è ciclico

b) $N = 7$ $\qquad g(D) = (D+1)(D^3+D+1) = D^4 + D^2 + \cancel{D} + D^3 + \cancel{D} + 1$

$$= D^4 + D^3 + D^2 + 1$$

Controllo che sia divisore di $D^7 + 1$:

$$\begin{array}{cccccccc|l}
D^7 & & & & & & & 1 & D^4+D^3+D^2+1 \\
D^7 & D^6 & D^5 & & D^3 & & & & \\ \hline
// & D^6 & D^5 & & D^3 & & & 1 & D^3+D^2+1 \\
 & D^6 & D^5 & D^4 & & D^2 & & & \\ \hline
 & // & // & D^4 & D^3 & D^2 & & 1 & \\
 & & & D^4 & D^3 & D^2 & & 1 & \\ \hline
 & & & // & // & // & & // &
\end{array}$$

RESTO = 0 $\quad$ SÌ, È CICLICO

Abbiamo un codice $(7;3)$.

Le parole possono essere ottenute moltiplicando i polinomi delle parole da codificare per il polinomio generatore.

000	$0(D) \Rightarrow$	$0 \cdot g(D) =$	0000000	
001	$g(D) \rightarrow$	$1 \cdot g(D) =$	0011101	$d=4$
010	$g(D) \rightarrow$	$D \cdot g(D) =$	0111010	$d=4$
011	$g(D) \rightarrow$	$(D+1)g(D)$	0100111	$d=4$
100	$g(D) \rightarrow$	$D^2 \cdot g(D) =$	1110100	
101	$g(D) \rightarrow$	$(D^2+1)g(D) =$	1101001	
110	$g(D) \rightarrow$	$(D^2+D)\,g(D) =$	1001110	
111	$g(D) \rightarrow$	$(D^2+D+1)\,g(D) =$	1010011	

Come posso notare ogni parola è ottenuta SHIFTANDO CIRCOLARMENTE L'ALTRA. Quindi il codice È CICLICO

La distanza può essere stimata rispetto alla parola "tutti 0". Tutte le parole hanno distanza 4 perciò è anche la distanza minima.

c) Hamming $\qquad N = 127 \qquad$ Determinare la probabilità di errore in caso di hard e soft decision.

Poiché è un codice di Hamming rispetto le caratteristiche 1) $N = 2^{N-K} - 1$
Dalla prima possiamo ottenere $\qquad$ 2) $d_{min} = 3$

$$127 = 2^{N-K} - 1 \Rightarrow N-k = 7 \Rightarrow \boxed{K = 120}$$

E quindi il rate di codice $\quad R = \dfrac{K}{N} = \dfrac{120}{127}$

Nel caso di soft decoding si analizza direttamente ~~......~~ la sequenza ricevuta completa e le si assegna quella con distanza minore. La probabilità di errore è perciò

$$P(E) \simeq Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} R \cdot d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \frac{120}{127} \cdot 3}\right)$$

Nel caso di hard decision invece si sceglie una decisione sul singolo bit ricevuto. Si avrà perciò errore nel caso in cui il numero di cecità errate superi la capacità correttiva del codice, data da

$$t = \frac{d_{min}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad \text{quindi si avrà} \qquad P(E) = \sum_{1}^{127} \varepsilon^{h}(1-\varepsilon)^{N-h}$$

dove h è il numero di errori e ε la probabilità di decisione errata. Se però come auspicabile, ε è molto piccolo, si possono trascurare i termini ε^h piccoli rispetto $1 \cdot \varepsilon^{N-h}$ e ottenere dopo alcuni passaggi

$$P(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} R\,(t+1)}\right) \quad \text{in questo caso} \quad Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \frac{120}{127}\, 2}\right)$$