Técnicas especiales para el cálculo de campos electrostáticos

★Las ecuaciones de Poisson y Laplace: Capitulo 3 (RMC)

- Propiedades generales de la solución
- Soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones

★ Método de las imágenes

★Problemas de contorno en magnetostática

★Métodos numéricos

Ecuaciones fundamentales. Electrostática

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla.V$$

Relación constitutiva

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E}$$

$$\nabla.(-\nabla.V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon}$$ Ecuación de Poisson

$$\rho = 0 \rightarrow \nabla^2.V = 0$$ Ecuación de Laplace

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 . V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Solución general es:

Solución general de la homogénea (**Laplace**)+ Particular de la completa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

+ Particular de la completa

Funciones armónicas

Ecuación de Laplace
Propiedades generales de su solución

$$\nabla^2 . V(x, y, z) = 0$$

Th 1.- *Si* $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ *son soluciones de la ecuación de Laplace, cualquier combinación lineal de las mismas es también solución de la ecuación de Laplace.*

Sea $V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + .. C_n V_n + ..$ la combinación lineal

$$\nabla^2 . V(x, y, z) = C_1 \nabla^2 . V_1 + C_2 \nabla^2 . V_2 + ... = 0$$

$\nabla^2 . V_i = 0$ ya que todas las V_i son solución de la ecuación de Laplace.

Luego V *es solución, cqd*

Th 2.- Teorema de unicidad *Si* V_1 *y* V_2 *son dos soluciones de la ecuación de Laplace que cumplen las condiciones de contorno, a lo sumo difieren en una constante.*

$$V_1 - V_2 = C$$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

=Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\nabla^2 . V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$ **+ Condiciones de contorno**[*)]

= un potencial que satisface la ecuación de Poisson y las condiciones de contorno es el único potencial posible

[*)] *Valor del potencial (o del campo) en las superficies (contorno) que encierran el espacio del problema.*
Eventualmente una de estas superficies puede estar en el infinito.

Solución general de la ecuación de Laplace
unidimensional

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 . V(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dV}{dr}) = 0 \rightarrow r^2\frac{dV}{dr} = cte$$

$$V(r) = \frac{a}{r} + b$$

cargas puntuales, esferas....

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 . V(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr}) = 0 \rightarrow r\frac{dV}{dr} = cte$$

$$V(r) = a\ln(r) + b$$

Líneas y cilindros cargados,...

Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 . V(z) = \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \rightarrow \frac{dV}{dz} = cte$$

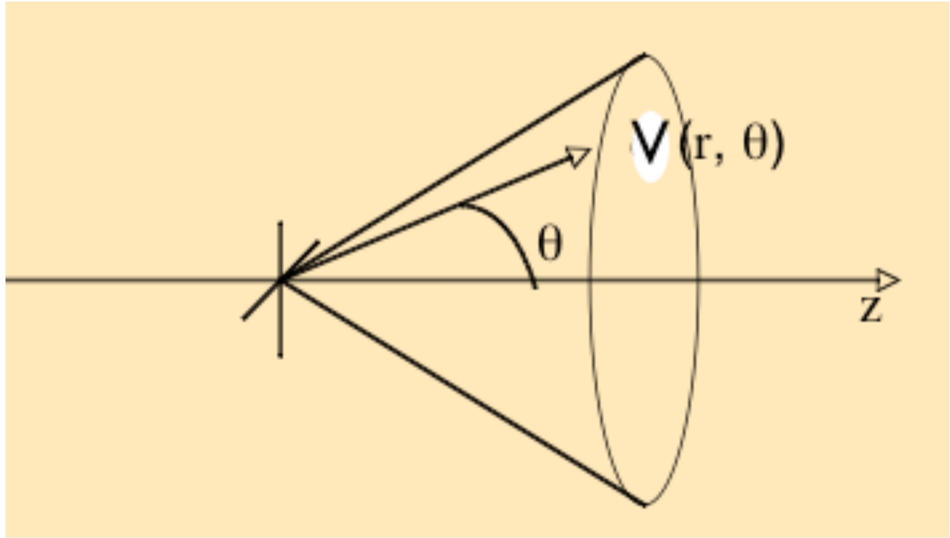
$$V(z) = a.z + b$$

Planos cargados.....

Solución general de la ecuación de Laplace

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$



Campo con simetría axial

$$\nabla^2 .V(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})$$

funciones armónicas esféricas

Para resolverla usamos el **método de separación de variables**

$$V(r,\theta) = R(r).P(\theta)$$

$$V(\mathbf{r}) = V(r,\theta) = R(r).P(\theta) \qquad \nabla^2 .V(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta})$$

$$\nabla^2 .V(r,\theta) = \frac{P(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r}) + \frac{R(r)}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta}) = 0$$

Dividiendo por $V(r,\theta) = R(r).P(\theta)$ y multiplicando por r^2

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR(r)}{dr}) = -\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}) = k = cte$$

La unica forma de que una función en r pueda ser igual a una función en   es que ambas sean ctes

Dividimos la ecuación inicial en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR(r)}{dr}) = k$$

Ecuación radial

$$\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}) = -k$$

Ecuación polar

Solución general de la ecuación de Laplace

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR(r)}{dr}) = k$$

Ecuación radial

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR(r)}{dr}) = kR(r)$$

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2r\frac{dR(r)}{dr} - kR(r) = 0$$

Dos soluciones independientes

k=n(n+1)

r^n

$r^{-(n+1)}$

La solución final es de la forma:

$$R_n(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos k=n(n+1)

lo que limita los valores de k para la ecuación polar

Solución general de la ecuación de Laplace

$$\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}) = -k = -n(n+1)$$ **Ecuación polar**

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}) + n(n+1).\sin\theta.P(\theta) = 0$$

cambio de variable $s = \cos\theta \rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-s^2}$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dP}{ds} = -\sqrt{(1-s^2)}\frac{dP}{ds}$$

La ecuación en se transforma en :

$$\frac{d}{ds}[(1-s^2)\frac{dP_n}{ds}] + n(n+1)P_n = 0$$ **Ecuación de Legendre**

La solución de la Ecuación de Legendre son los *Polinomios de Legendre*

Conjunto completo y ortogonal de funciones

Generación de los Polinomios

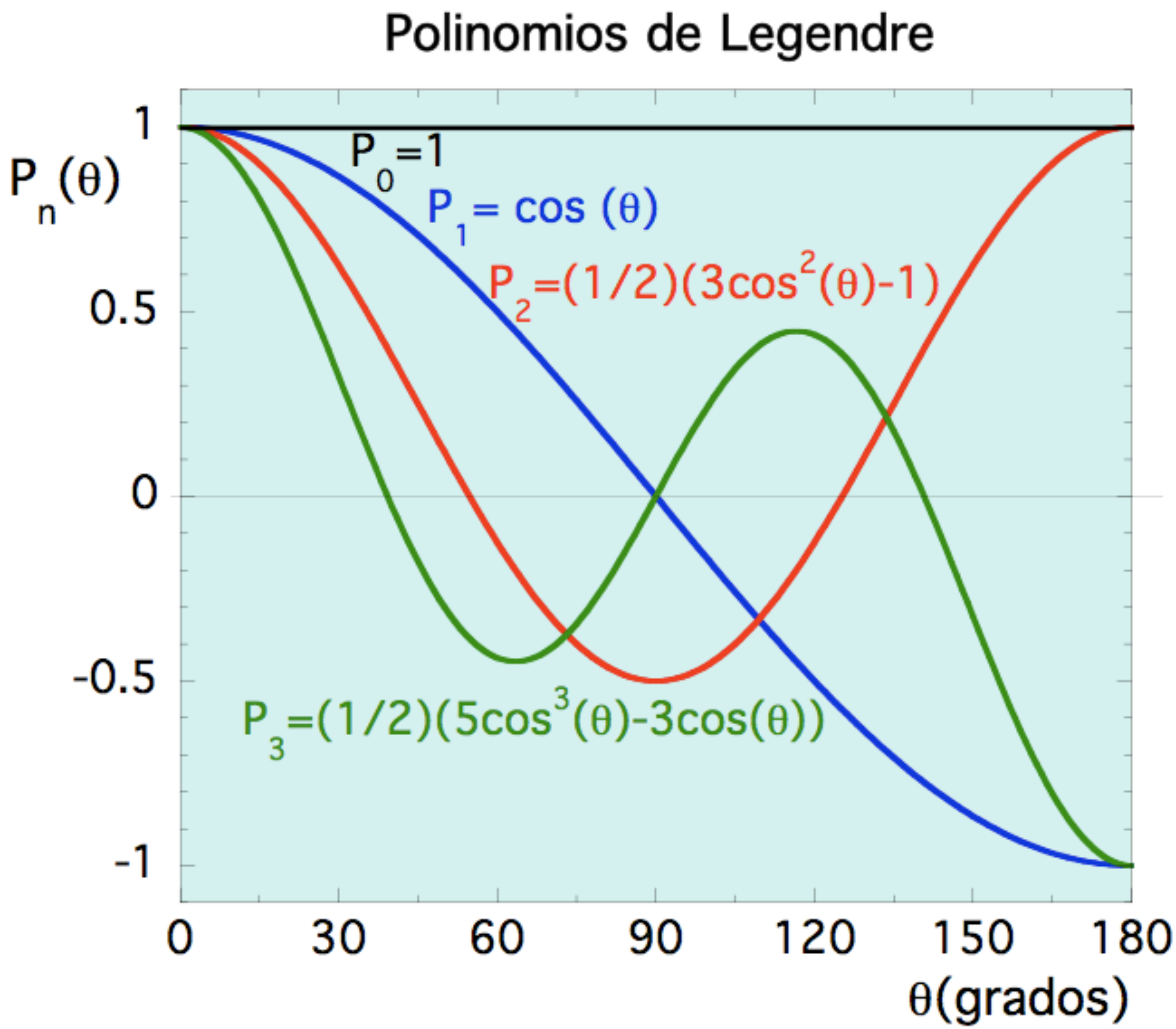
$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}(\cos\theta^2 - 1)^n$$

Los primeros Polinomios de Legendre

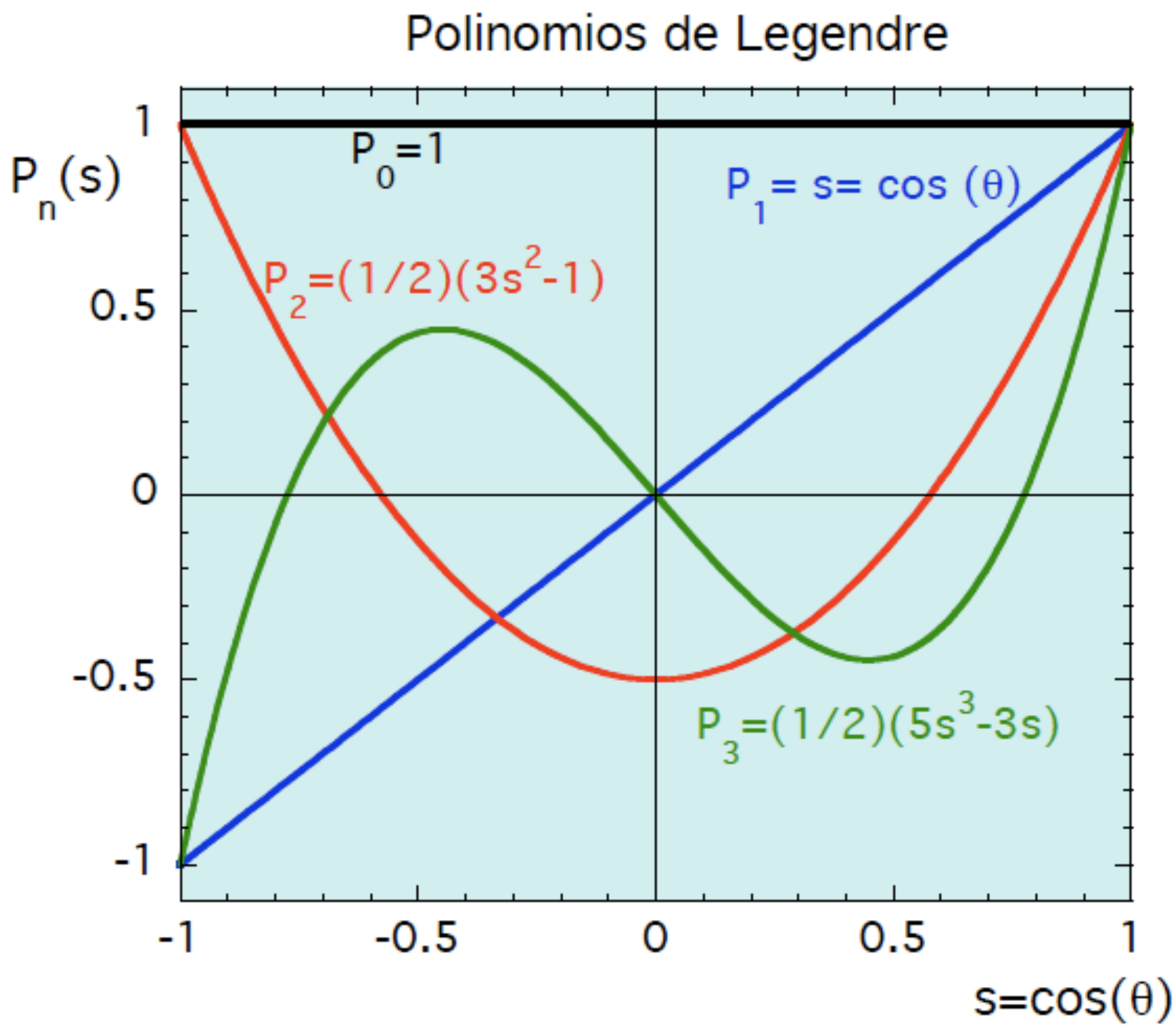
$$\begin{aligned}
n = 0 &\rightarrow P_0 = 1\\
n = 1 &\rightarrow P_1 = \cos\theta\\
n = 2 &\rightarrow P_2 = (3\cos^2\theta - 1)/2\\
n = 3 &\rightarrow P_3 = (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)/2\\
n = 4 &\rightarrow P_4 = (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)/8\\
n = 5 &\rightarrow P_5 = (63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)/8
\end{aligned}$$

Condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_m(\cos\theta).P_n(\cos\theta)d(\cos\theta) = \begin{array}{ll} 0 \quad \text{si} & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} \quad \text{si} & m = n \end{array}$$



Polinomios de Legendre
$P_n(\theta)$
1
0.5
0
-0.5
-1
$P_0=1$
$P_1= \cos(\theta)$
$P_2=(1/2)(3\cos^2(\theta)-1)$
$P_3=(1/2)(5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta))$
0
30
60
90
120
150
180
θ(grados)



Polinomios de Legendre
$P_n(s)$
$P_0=1$
$P_1= s= \cos(\theta)$
$P_2=(1/2)(3s^2-1)$
$P_3=(1/2)(5s^3-3s)$
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
$s=\cos(\theta)$

$$V(r,\theta) = R(r).P(\theta)$$

$$R_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{(n+1)}}$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}(\cos\theta^2 - 1)^n$$

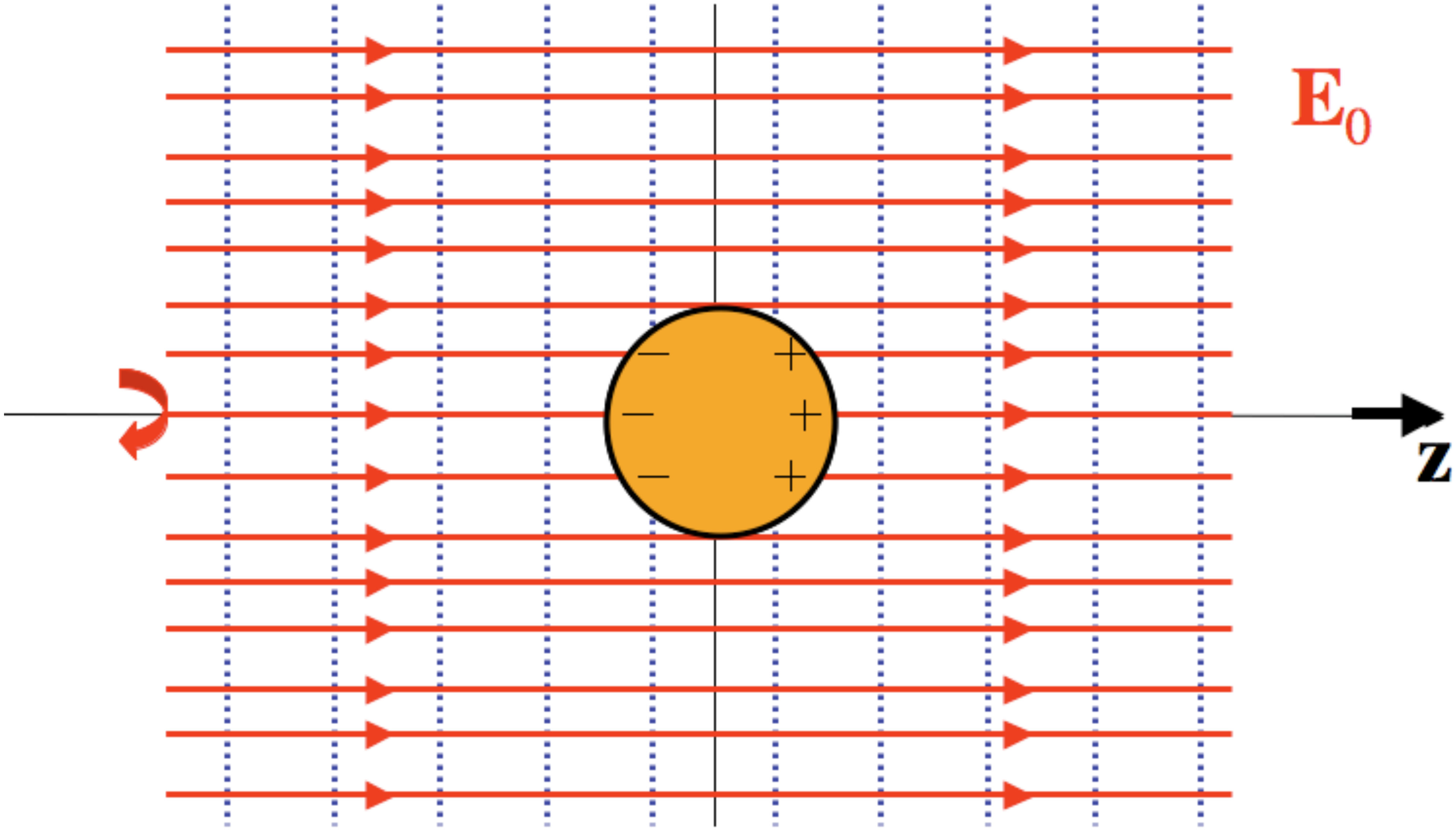
La solución general es una combinación lineal de las soluciones elementales:

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}})P_n(\cos\theta)$$

Los coeficientes deben elegirse de forma que la solución elegida cumpla las condiciones de contorno.*
¡Entonces la solución es única!

Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme

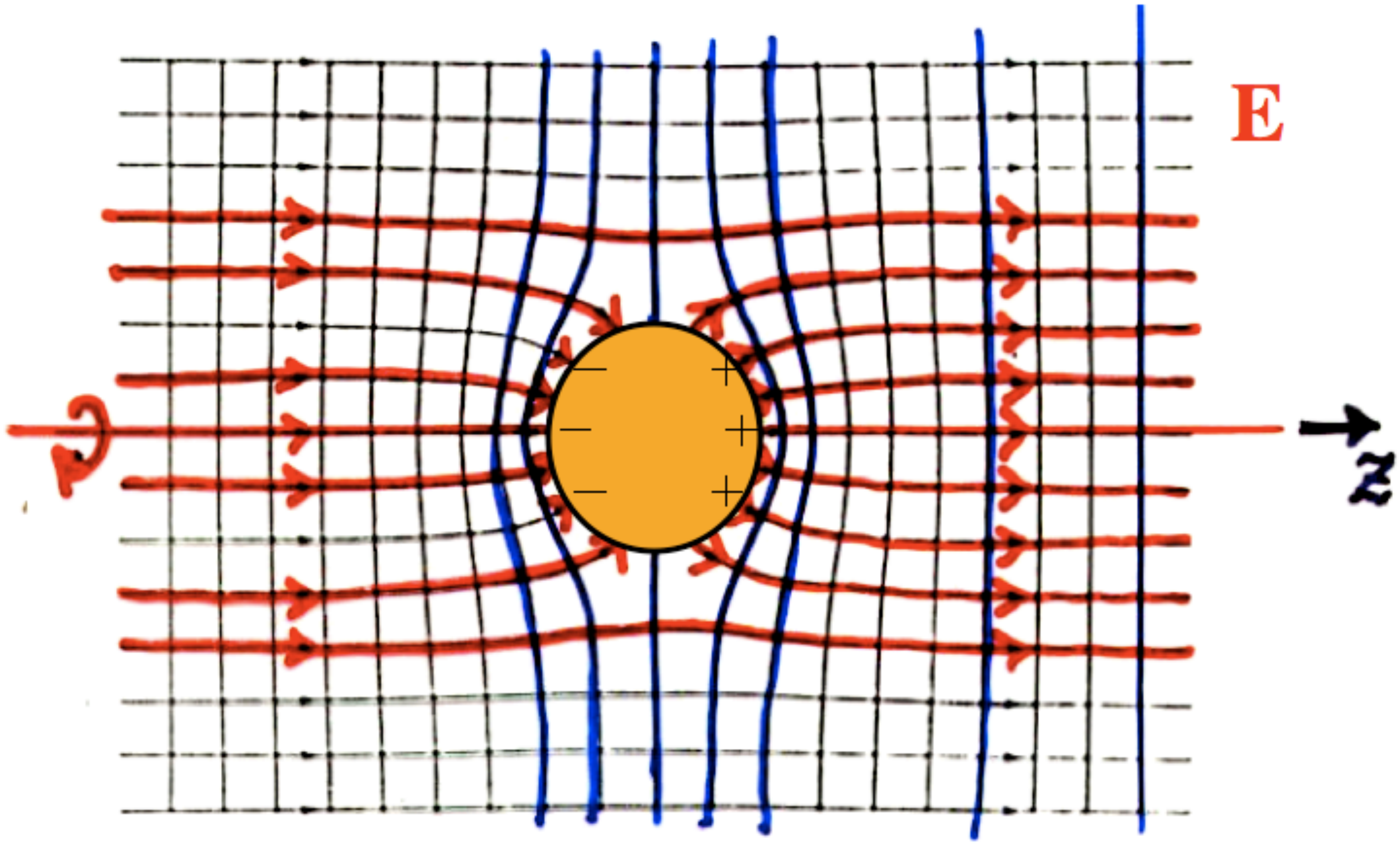
Ejemplo: Una esfera de metal descargada de radio R, se coloca en un campo eléctrico uniforme



El campo eléctrico desplazará las cargas positivas a la derecha y las negativas a la izquiera

Las cargas inducidas distorsionarán el campo eléctrico

Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme



$\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$

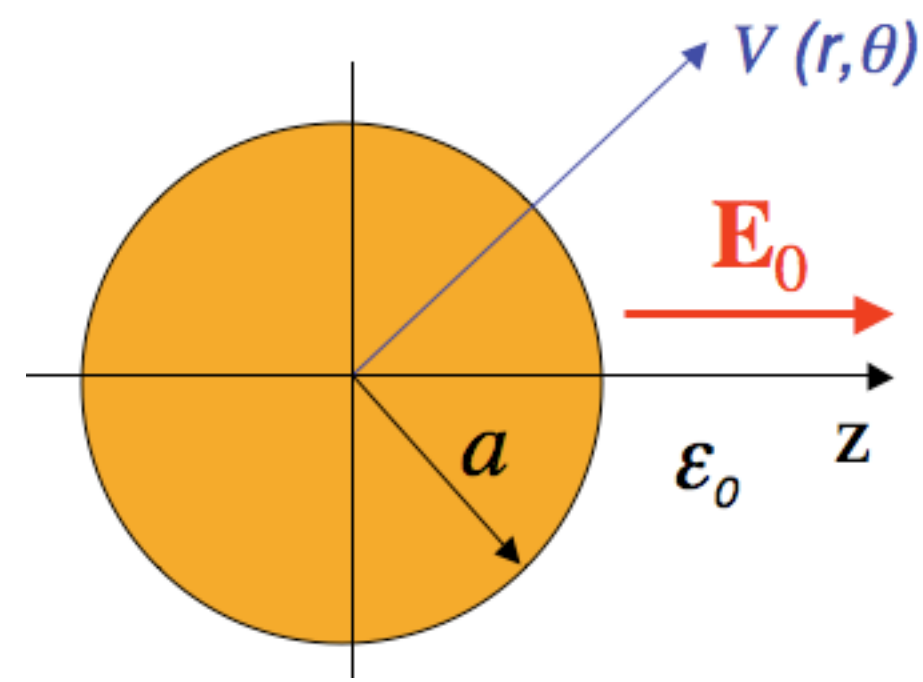
Las cargas inducidas se distribuyen sobre la esfera de tal forma que el campo E en el interior es cero.

La esfera es equipotencial

Distorsión del campo es solo en las proximidades de la esfera

Calcular el potencial en el exterior de la esfera

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}) P_n(\cos\theta)$$



1. $V = 0 \quad \text{cuando} \quad r = a$

2. $V = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \quad \text{cuando} \quad r \to \infty$

2. $V(r \to \infty, \theta) = -E_0 r\cos\theta = \sum_{n=0} (A r^n P_n(\theta) + \frac{B}{r^{(n+1)}} P_n(\theta))$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$0 \quad r \to \infty$$

$$\boxed{A_1 = -E_0; \quad A_n = 0 \quad (\forall \quad n \neq 1)}$$

1. r = a $\quad V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n a^n + \frac{B_n}{a^{(n+1)}}) P_n(\cos\theta) = 0$ condición ortogonalidad

$$\to 0$$

$$-E_0 a P_1(\cancel{\cos\theta}) + a^{-2} B_1 P_1(\cancel{\cos\theta}) = 0 \longrightarrow \boxed{B_1 = E_0 a^3}$$

La solución es única:

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3\cos\theta}{r^2} = -E_0 r\cos\theta(1-\frac{a^3}{r^3}) = -\mathbf{E_0}.\mathbf{r}(1-\frac{a^3}{r^3})$$

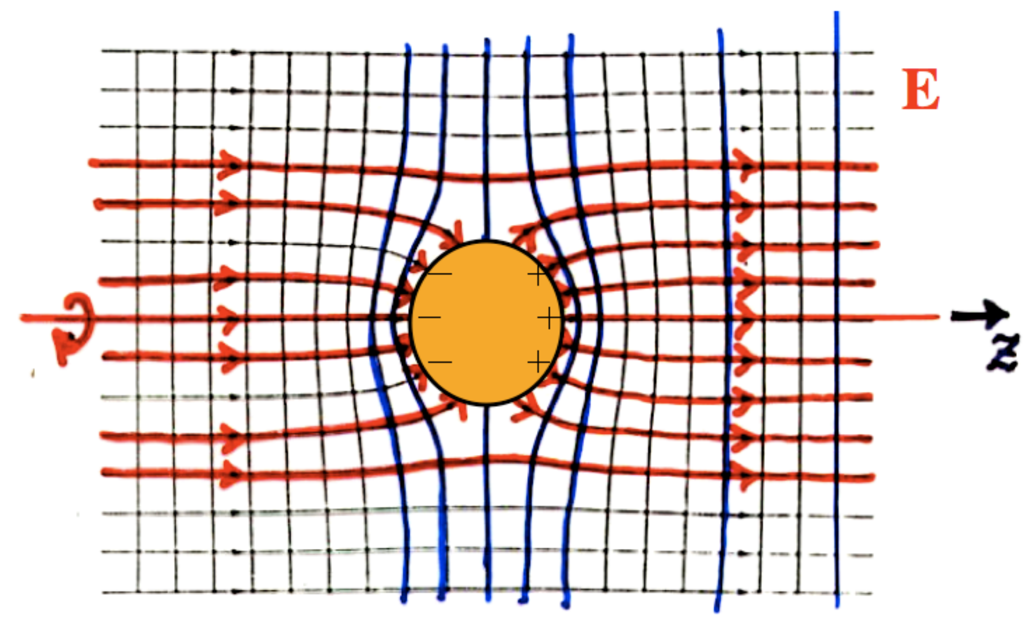
Potencial debido a E0

Potencial debido a la cargas inducidas en la esfera

Las componentes del campo eléctrico:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0(1+\frac{2a^3}{r^3})\cos\theta$$

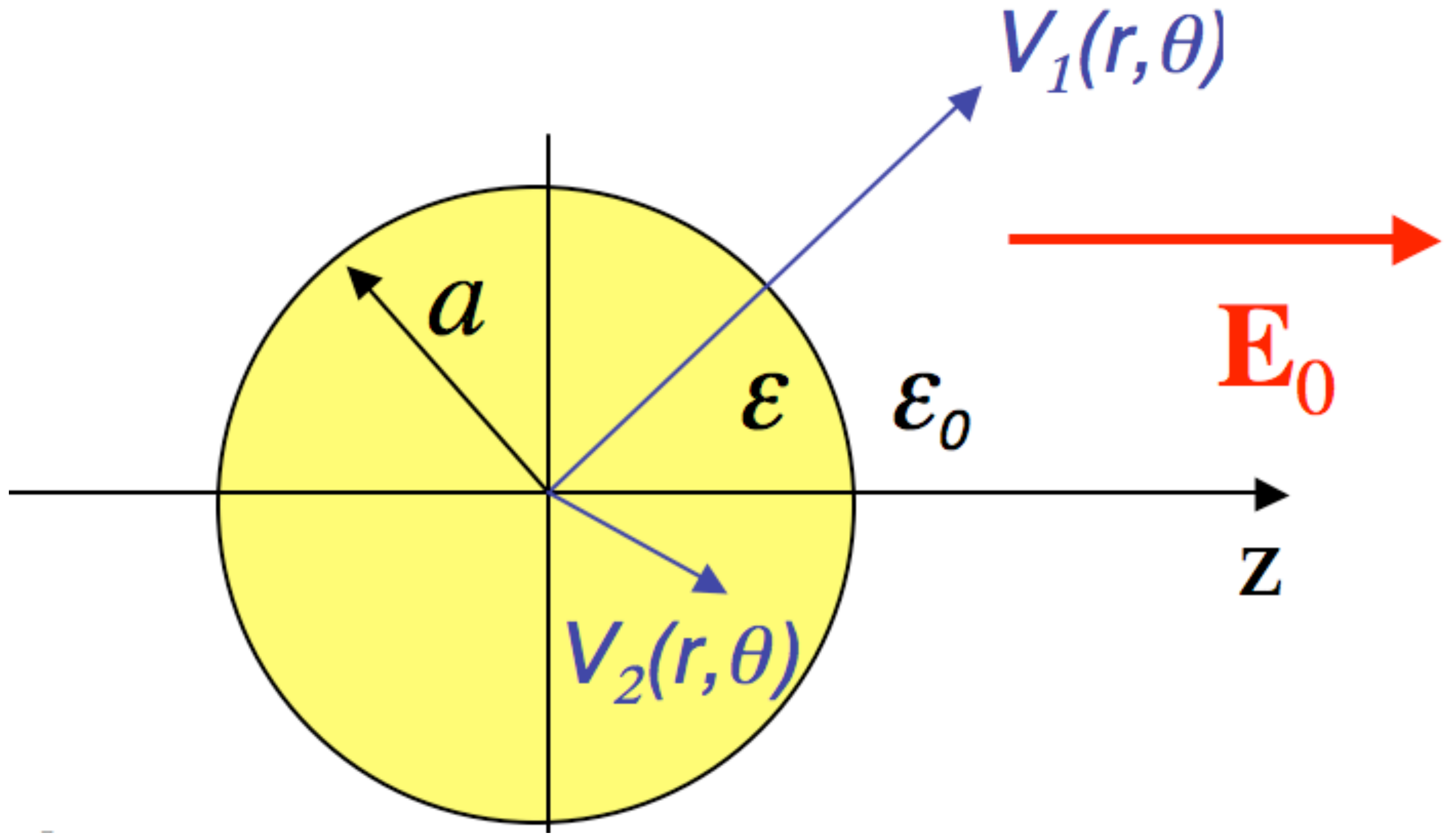
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0(1-\frac{a^3}{r^3})\sin\theta$$



y la densidad de carga inducida es: $\sigma = \epsilon_0 E_r)_{r=a} = 3\epsilon_0 E_r\cos\theta$

y carga total inducida es: $q = \int \sigma ds = 0$

Esfera de permitividad en un campo "inicialmente" uniforme E_0



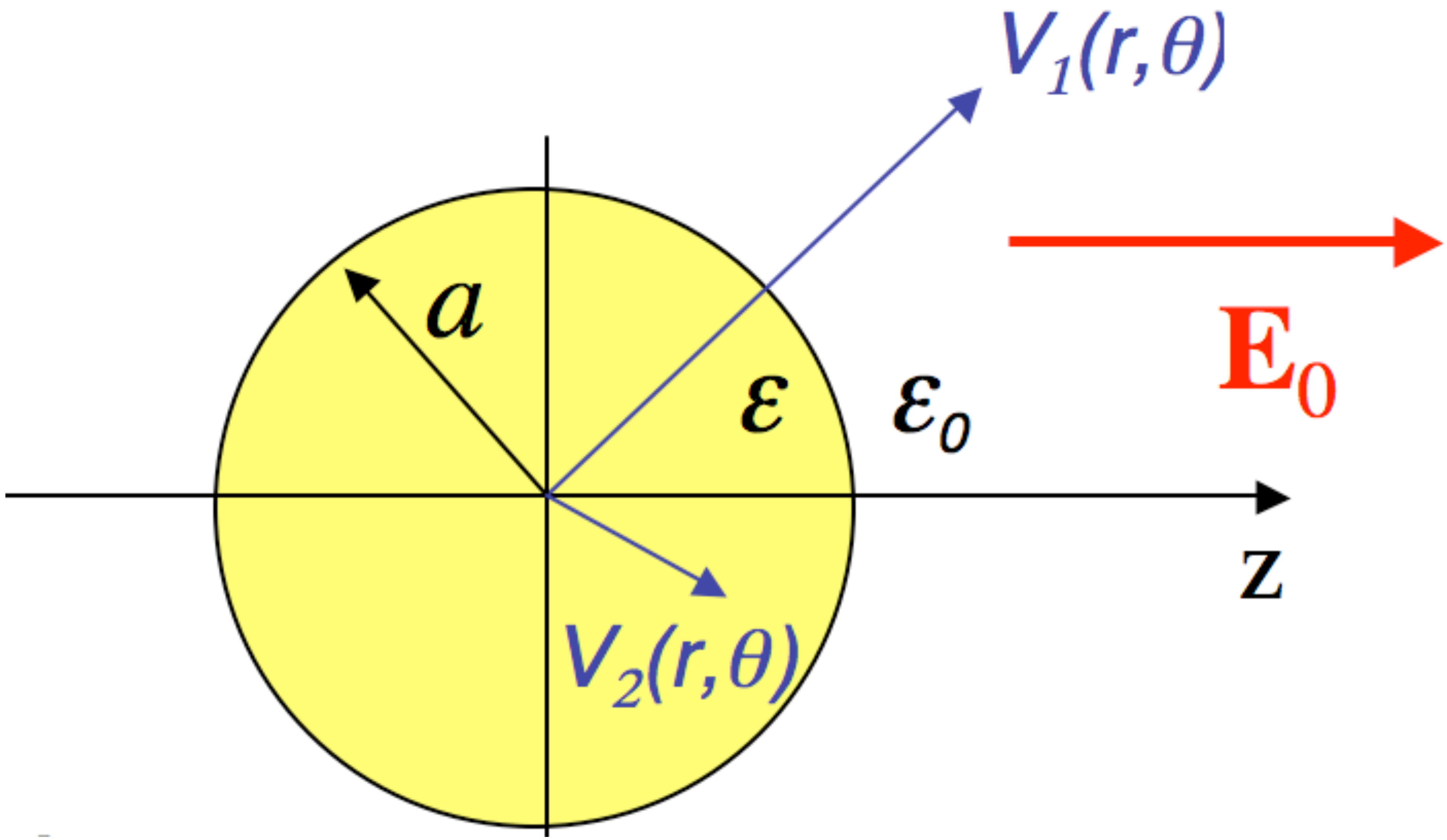
Condiciones de contorno:

$V_1(a,\theta) = V_2(a,\theta)$ Continuidad del potencial

$V_2(r >> a) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$

$D_{n1}(r=a) = D_{n2}(r=a)$ Componente normal del vector desplazamiento, **no hay corrientes libres**

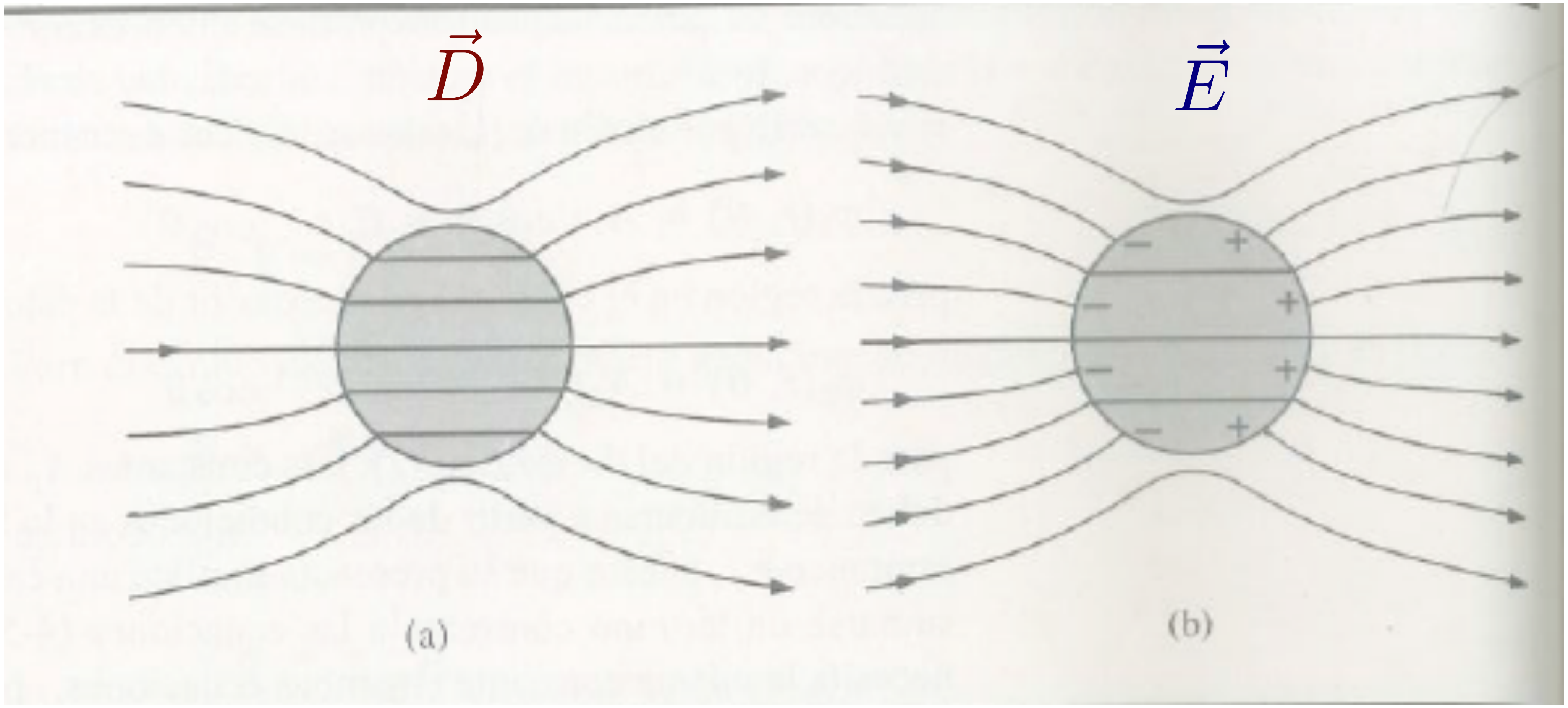
Esfera de permitividad en un campo "inicialmente" uniforme E_0



$$V_1 = -\mathbf{E_0}.\mathbf{r} + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right)a^3 \frac{\mathbf{E_0}.\mathbf{r}}{r^3}$$

$$V_2 = -\frac{3\epsilon_0 \mathbf{E_0}.\mathbf{r}}{\epsilon + 2\epsilon_0}$$

Esfera de permitividad en un campo “inicialmente” uniforme E_0



$$\mathbf{E_{int}} = \frac{3}{2+\epsilon_r}\mathbf{E_0}$$

Solución general de la ecuación de Laplace

Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$YZ\frac{d^2X(x)}{dx^2} + XY\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + XY\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0$$

dividiendo por XYZ

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0 \qquad f(x) + g(y) + h(z) = 0$$

El segundo y tercer término son independientes de x, y como la suma de los tres términos debe ser cero, $\rightarrow$ cada término debe ser cte.

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = C_1$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = C_2$$

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = C_3$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

La solución depende del signo de C, vendrá dada por las condiciones de contorno.

Caso particular de dos variables: V(x, y)

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=C_1 \qquad \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=C_2 \longrightarrow C_1+C_2=0$$

Si C_1 es positivo, **vendrá determinado por las condiciones de contorno**:

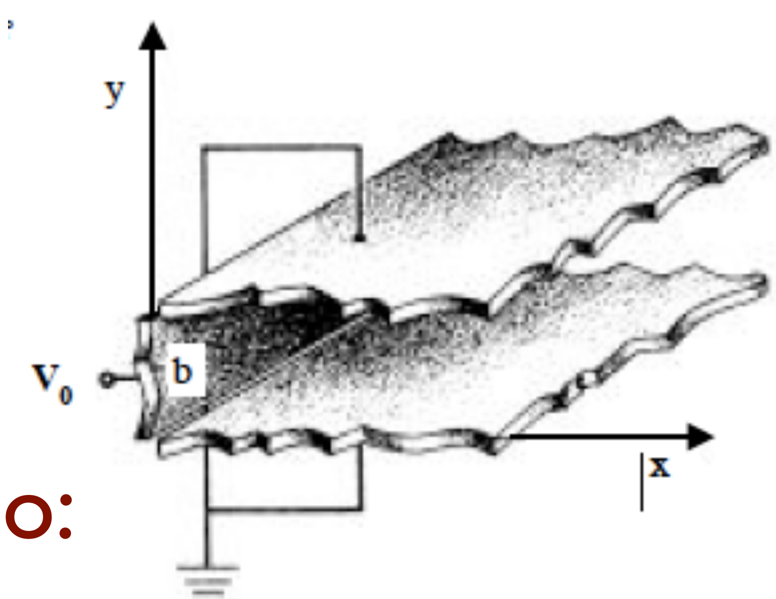
$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=k^2X(x) \qquad X(x)=Ge^{kx}+He^{-kx}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=-k^2Y(y) \qquad Y(y)=A\sin ky+B\cos ky$$

$$V(x,y)=(Ge^{kx}+He^{-kx})(A\sin ky+B\cos ky)$$

(Lorrain, pág. 167)

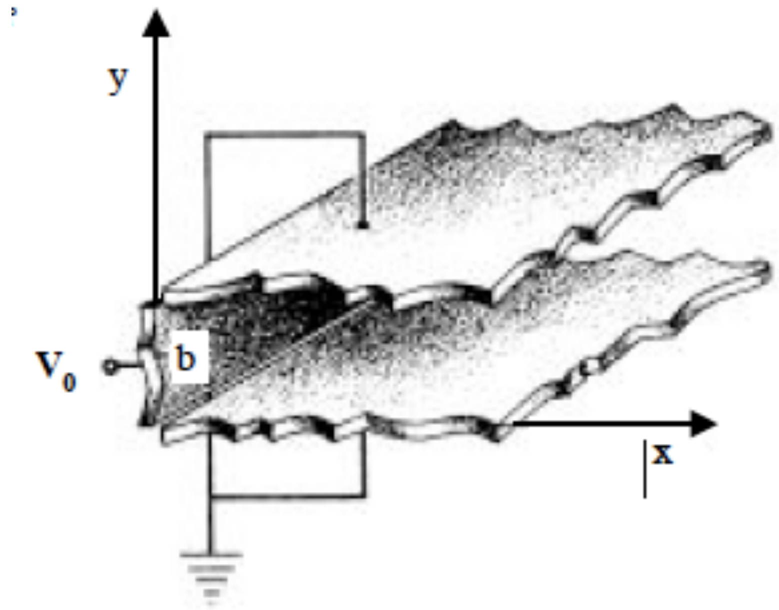
Ejemplo:



Solución general de la ecuación de Laplace

Ejemplo: Dos planos infinitos en xz derivados a tierra, uno en y=0 y el otro en y=b. En el lado izquierdo, x=0, lámina infinita aislada de los otros planos y se mantiene a potencial V_0. Calcular el V en cualquier punto entre los planos. V(x, y)

(Lorrain, pág. 167)



$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=C_1X(x)=k^2X(x)$$

$$C_1+C_2=0 \quad C_1=-C_2=k^2$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=C_2Y(y)=-k^2Y(y)$$

Condiciones de contorno:

1. $V=0$ cuando $y=0$
2. $V=0$ cuando $y=b$
3. $V=V_0$ cuando $x=0$
4. $V\to 0$ cuando $x\to\infty$

Solución general de la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = C_2Y(y) = -k^2Y(y)$$

$$Y(y) = A\sin ky + B\cos ky$$

De las condiciones de contorno 1 y 2:

$$B = 0$$
$$kb = n\pi \quad (n = 1, 2...)$$

$$Y = A\sin\tfrac{n\pi}{b}y$$

De las condiciones de contorno 4: G=0

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = k^2X(x)$$

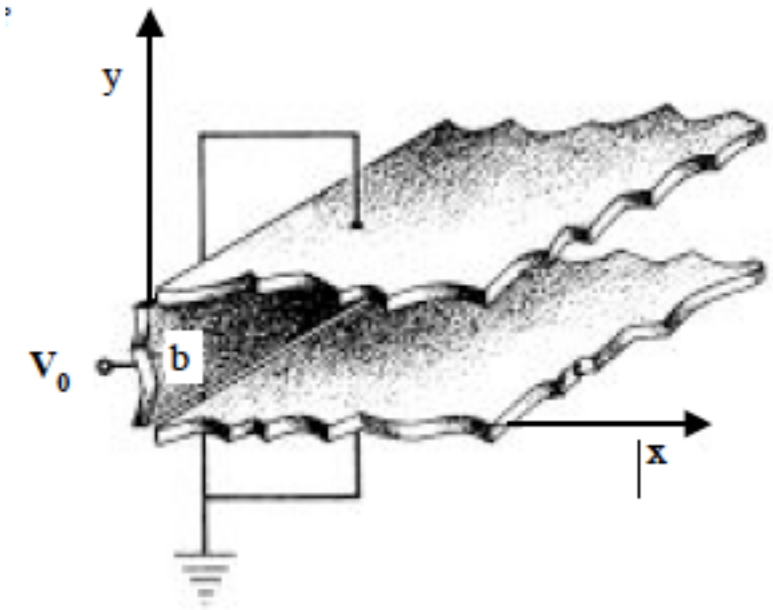
$$X = He^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

$$X = Ge^{kx} + He^{-kx}$$

$$V = C\sin(\frac{n\pi}{b}y).e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

No cumple la condiciones de contorno 3

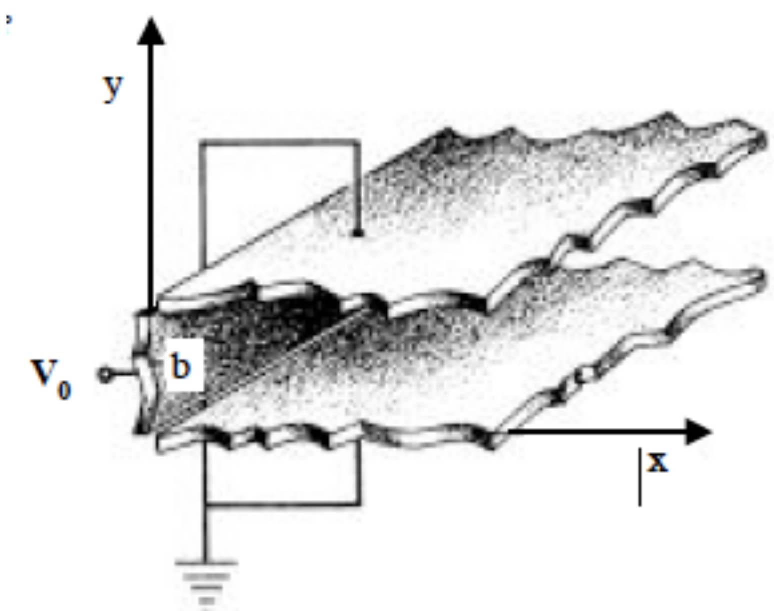
(Lorrain, pág. 167)



1. $V = 0$ cuando $y = 0$
2. $V = 0$ cuando $y = b$
3. $V = V_0$ cuando $x = 0$
4. $V \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

Solución general de la ecuación de Laplace

(Lorrain, pág. 167)



$$V = C\sin(\frac{n\pi}{b}y).e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

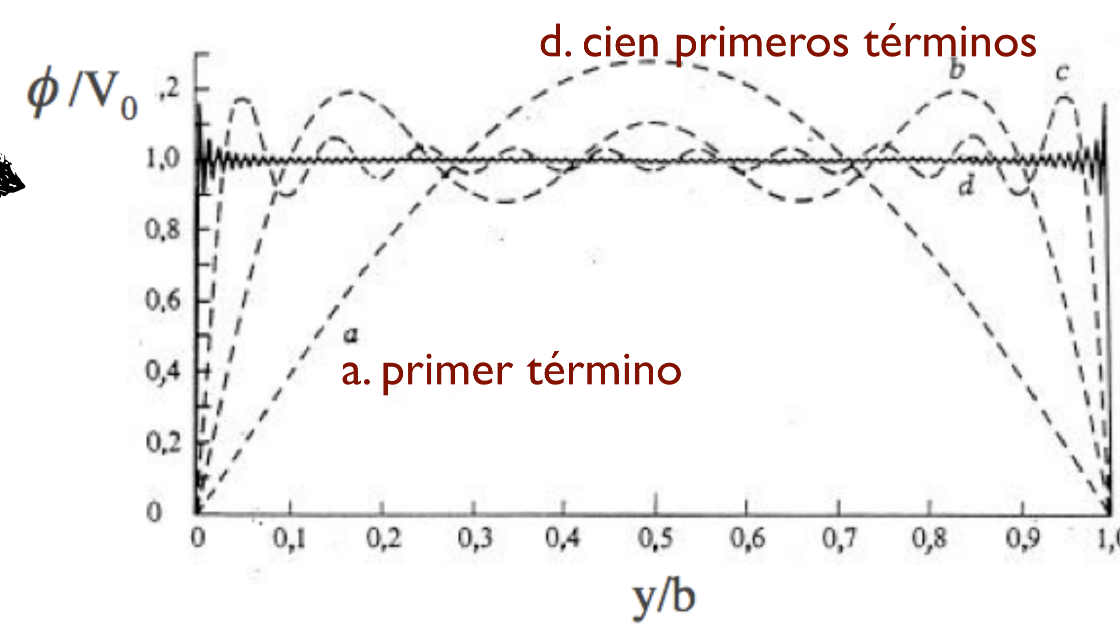
La combinación lineal

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{b}y).e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

Busquemos ahora un valor de C que satisfaga la condición de contorno 3

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{b}y = V_0$$

Serie de Fourier



Multiplicando ambos miembros por $\sin(\frac{n'\pi}{b})y$
e integrando entre y=0 - y =b

$$\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{n'\pi}{b}y)dy = \int_0^b V_0 \sin(\frac{n'\pi}{b}y)dy$$

Solución general de la ecuación de Laplace

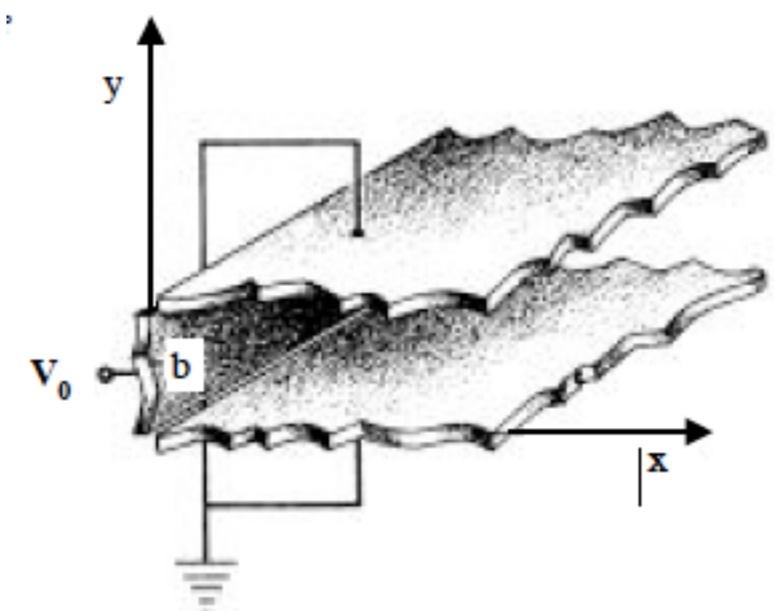
$$\int_0^b C_n \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{n'\pi}{b}y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n' \neq n \\ C_n \dfrac{b}{2} & \text{si} \quad n' = n \end{cases}$$

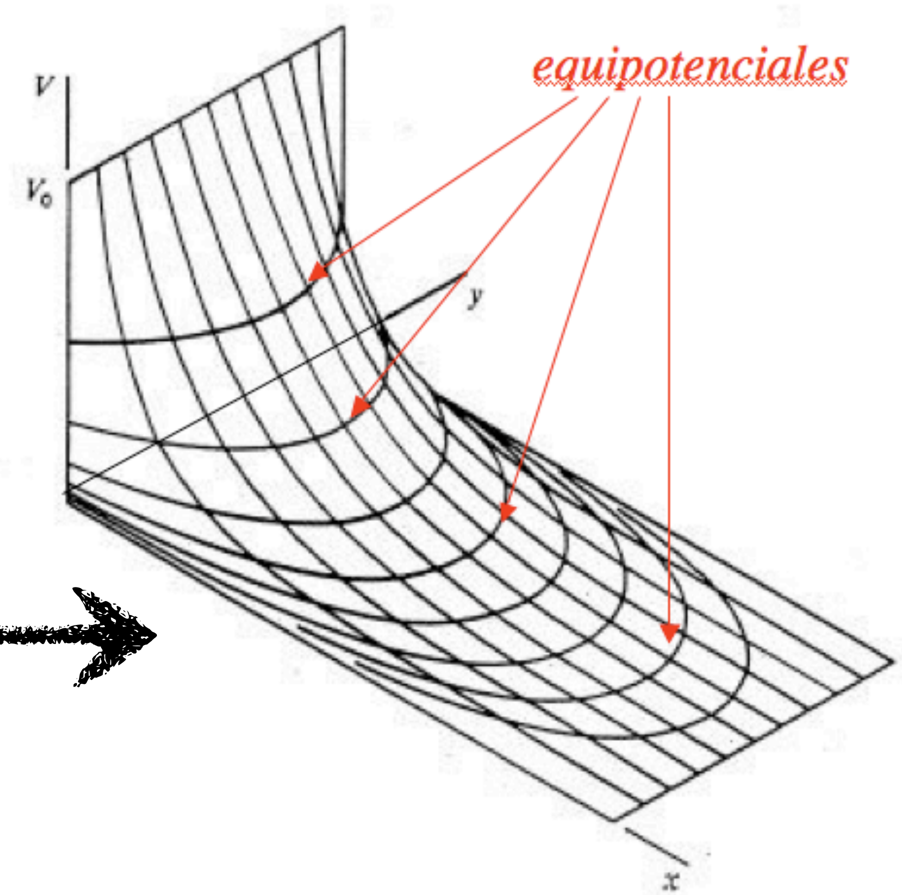
$$\int_0^b V_0 \sin(\frac{n'\pi}{b}y)dy = \begin{cases} 0 \text{ si n' es par} \\ \dfrac{2bV_0}{n'\pi} \text{ si n' es impar} \end{cases}$$

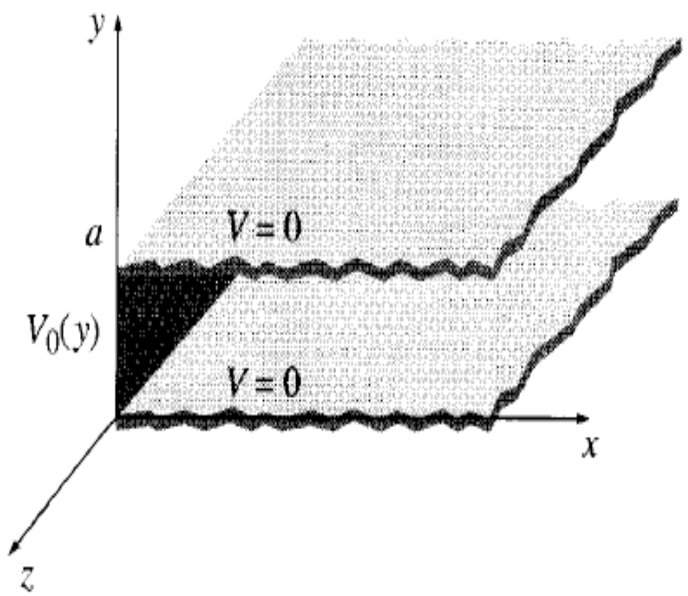
$$C_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad \text{si n es impar;} \quad C_n = 0 \quad \text{si n es par}$$

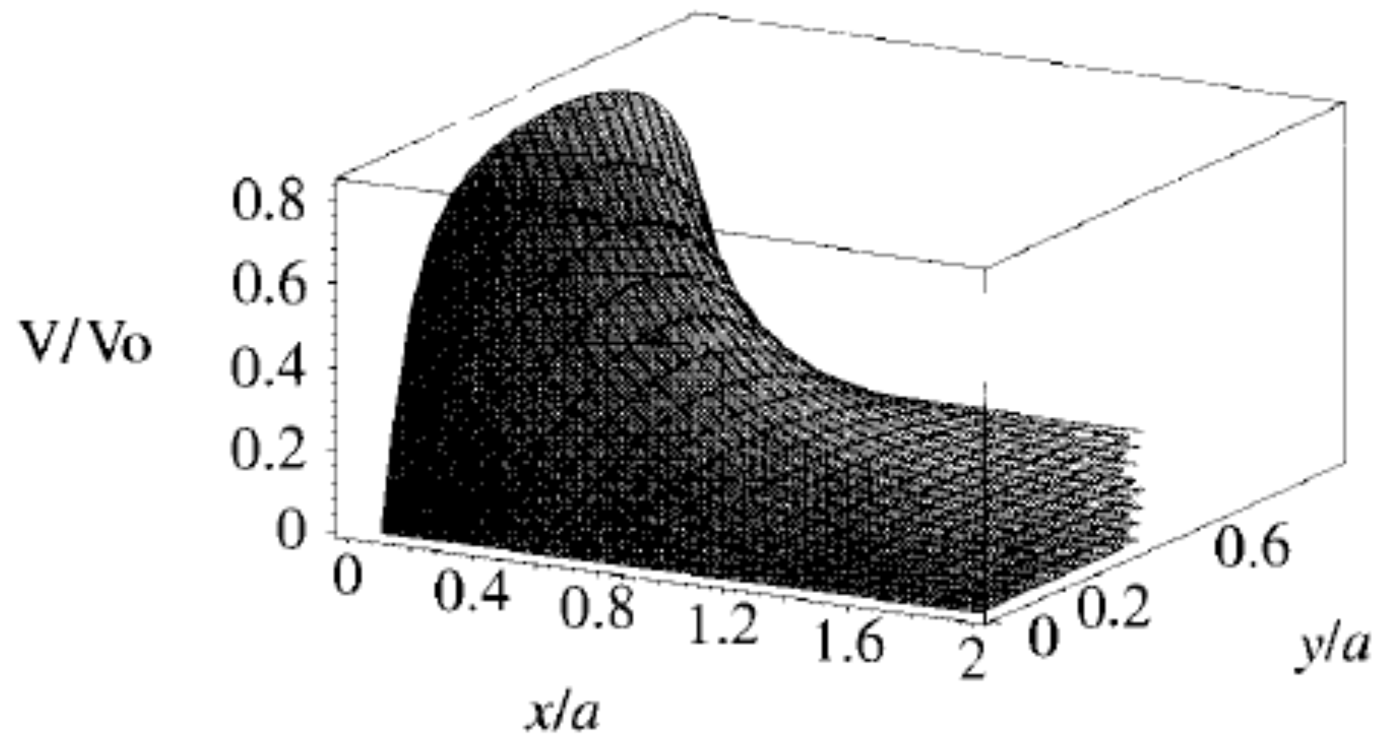
$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{b}y).e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

(Lorrain, pág. 167)

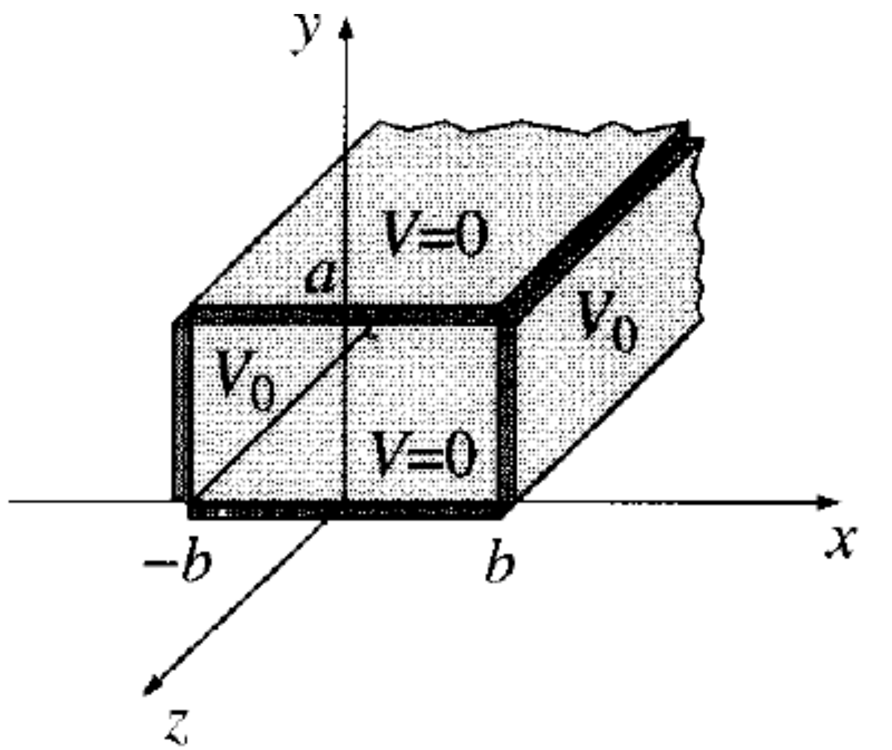


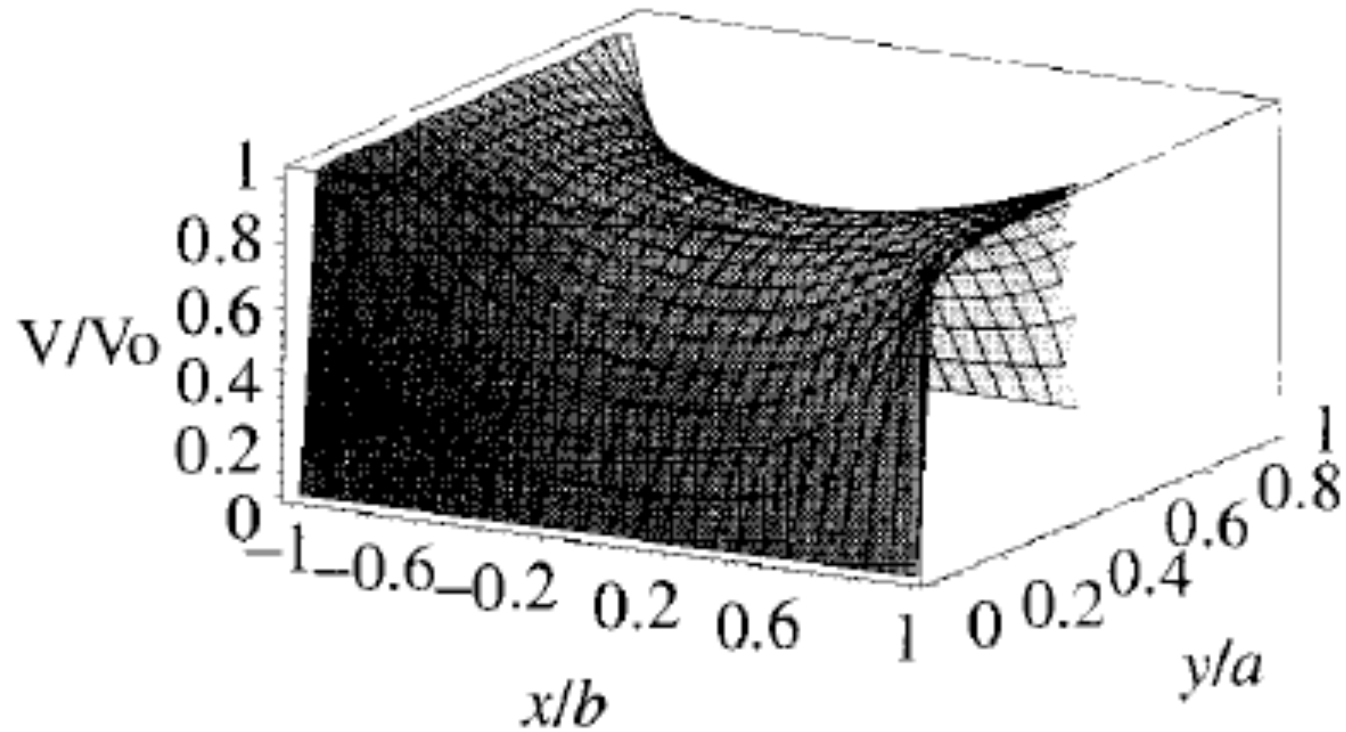






$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a).$$



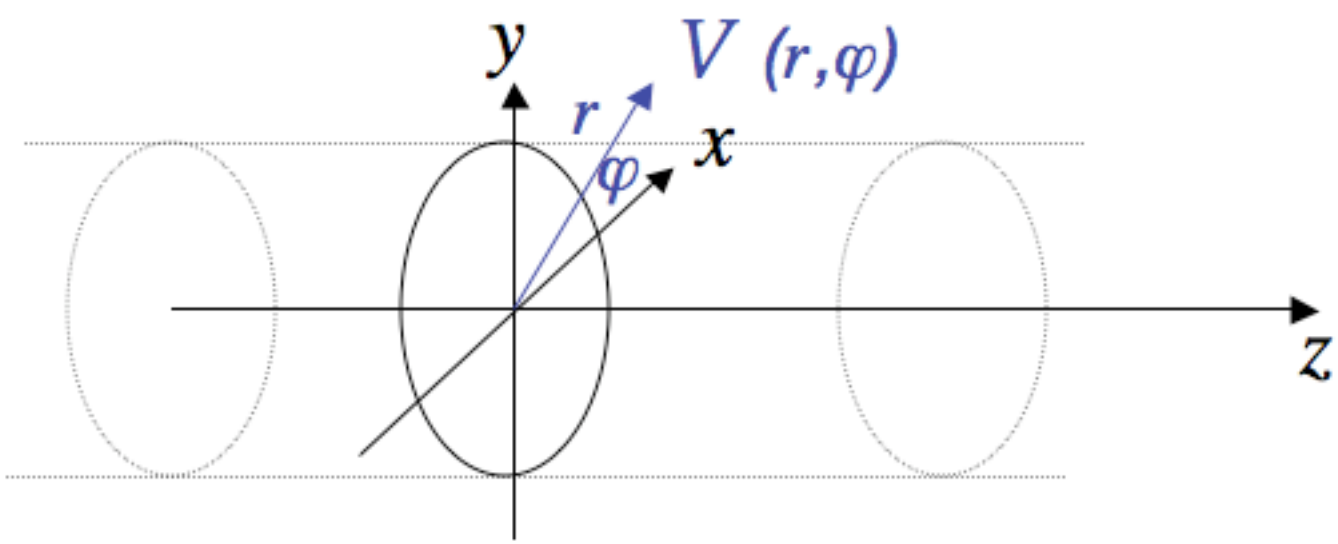


$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{1}{n} \frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a).$$

Solución general de la ecuación de Laplace

Coordenadas cilíndricas

Problemas con simetría de traslación, es decir independientes de z : $V(r,\varphi)$



$$\nabla^2 V(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

$$V(r,\varphi) = R(r)S(\varphi)$$

$$\nabla^2 V(r,\varphi) = \frac{S}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{S}\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = k$$

radial azimutal

Dividiendo por $V(r,\varphi) = R(r)S(\varphi)$ y multiplicando por r^2

Solución general de la ecuación de Laplace

Coordenadas cilíndricas

Ecuación azimutal

solución

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = -kS \quad \longrightarrow \quad S(\varphi) = \sin(\sqrt{k}\varphi) \qquad \text{con} \quad k = n^2 \quad \text{ya que} \quad S(\varphi) = S(\varphi + 2\pi)$$

$$\cos(\sqrt{k}\varphi)$$

Ecuación radial

solución

$$r\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) = n^2 R \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{lll} R(r) = r^n; & r^{-n} & (n \neq 0) \\ R(r) = \text{cte}; & \ln r & (n = 0) \end{array}$$

$$V(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_n^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cos n\varphi]$$

Armónicos cilíndricos