1. **(A)**
   $t^3 - 15t^2 + 90t - 324 = 0$

   まず, t - 15 = a とすると, t = a + 5 より, (A) は

   $(a+5)^3 - 15(a+5)^2 + 90(a+5) - 324 = 0$
   $a^3 + 15a^2 + 75a + 125 - 15(a^2 + 10a + 25) + 90(a+5) - 324 = 0$
   $a^3 + 15a + 125 - 375 + 450 - 324 = 0$
   $a^3 + 15a - 250 + 126 = 0$
   $a^3 + 15a - 124 = 0$

   上式の a の係数 15=p, 定数項 $-124 = q$ とおいておく.
   また, 新しく a = u + v とすると

   $(u+v)^3 + 15(u+v) - 124 = 0$
   $u^3 + v^3 + (3uv + 15)(u+v) - 124 = 0$

   ここで, $u + v \neq 0$ のとき
   $u^3 + v^3 - 124 = 0$
   $uv = -5$

   となり, u と v は二次方程式の解と係数の関係を使って
   $X^2 + qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ の解なので

   $X = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

   これを使うと

   $u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$
   $= 62 \pm \sqrt{62^2 + 5^3}$
   $= 62 \pm \sqrt{3844 + 125}$
   $= 62 \pm \sqrt{3969}$
   $= 62 \pm 63$
   $= 125, -1$

   $1, \omega, \omega^2$ を 1 の 3 乗根 ($\omega^3 = 1$ の解) だとすると
   $u, v = 5, 5\omega, 5\omega^2, -1, -\omega, -\omega^2$

ここで, $uv = -5$ という関係を使うと

$(u, v) = (5, -1), (5\omega, -\omega^2), (5\omega^2, -\omega)$ と分かる.
a=u+v, t=a+5 だったので

$a = u + v = 4, -2 \pm 3\sqrt{3}i$
$\rightarrow t = a + 5 = 9, 3 \pm 3\sqrt{3}i$

よって答えは
$\underline{t = 9, 3 \pm 3\sqrt{3}i}$

2. **(B)**
$y^4 + 4y^2 + 24y - 20 = 0$

まず, y^3 の項が 0 なので, y^2 以降の項を移項して

$y^4 = -4y^2 - 24y + 20$

また, 両辺に $2ty^2 + t^2$ を足し合わせると

$y^4 + 2ty^2 + t^2 =$
$(y^2 + t)^2 = (2t - 4)y^2 - 24y + (20 + t^2)$

上の式で両辺が等しい重解 t を持つには判別式 D=0 が必要なので
$D = 24^2 - 4(2t - 4)(20 + t^2)$
$= 576 - 4(40t + 2t^3 - 80 - 4t^2)$
$= 576 - 160t - 8t^3 + 320 + 16t^2$
$= -8t^3 + 16t^2 - 160t + 896$

$$= t^3 - 2t^2 + 20t - 112 = 0 \tag{1}$$

この 3 次方程式を解き, t の重解を見つける.
$t - \frac{2}{3} = a$ と置くと, $t = a + \frac{2}{3}$ より

$\left(a + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 + 20\left(a + \frac{2}{3}\right) - 112 = 0$
$= a^3 + 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{8}{27} - 2\left(a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{9}\right) + 20a + \frac{40}{3} - 112$

$= a^3 - \frac{4}{3}a + 20a + \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{40}{3} - 112$
$= a^3 + \frac{56}{3}a + \frac{344}{27} - 112$
$= a^3 + \frac{56}{3}a - \frac{2680}{27} = 0$

a=u+v とすると

$(u+v)^3 + \frac{56}{3}(u+v) - \frac{2680}{27} = 0$

$u+v \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{2680}{27} \\ uv = -\frac{56}{9} \end{cases}$$

となり, u と v は二次方程式の解と係数の関係を使って
$X^2 + qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ の解の解なので

$X = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$
これを使うと

$u^3, v^3 = \frac{1340}{27} \pm \sqrt{\left(\frac{1340}{27}\right)^2 + \left(\frac{56}{9}\right)^3}$
$= \frac{1340}{27} \pm \sqrt{\frac{1795600}{729} + \frac{175616}{729}}$
$= \frac{1340}{27} \pm \frac{1404}{27}$
$= \frac{2744}{27}, -\frac{64}{27}$

考えられる u, v の範囲のうち, 今は四次方程式を解こうとしているから整数部分だけで良く,
$u, v = \frac{14}{3}, -\frac{4}{3}$
よって, u+v=a, $t = a + \frac{2}{3}$ より
t=4
と求まる. これを (1) 式に代入して,

$(y^2+4)^2 = 4y^2 - 24y + 36$
$= 4(y^2 - 6y + 9)$
$= 4(y-3)^2$

よって

$y^2 + 4 = \pm 2(y-3)$

この式を解くと

$$\begin{cases} y^2+4=2y-6 \to y^2-2y+10=0 \\ y=\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{2\pm 6i}{2}=1\pm 3i \\ y^2+4=-2y+6 \to y^2+2y-2=0 \\ y=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

よって答えは

$\underline{y=1\pm 3i, -1\pm\sqrt{3}}$