Université d'Orléans — L3 Info
Informatique — 2017 - 2018

Travaux Dirigés sur Machine n°6 — Tas, tri et Dijkstra (TD6.tgz sous Celene) — 4h noté

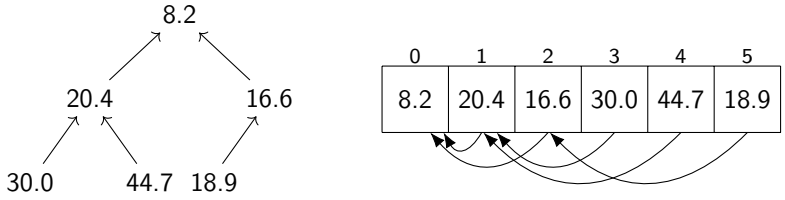
---

1 Structure de tas

Un tas est une structure de données qui stocke un ensemble d'éléments comparables et qui permet de :
— extraire le minimum en temps logarithmique,
— ajouter un élément en temps logarithmique et
— mettre à jour la position d'un élément en temps logarithmique.

L'idée principale est de travailler avec un arbre équilibré où chaque nœud contient une valeur plus grande que celle de son père. La valeur minimale est donc à la racine. De plus, il n'y a pas de *trou* dans l'arbre : tous les niveaux sont complets, sauf le dernier où toutes les feuilles sont à gauche. Cela est illustré sur la Fig. 1(a).

L'idée complémentaire est de replier cet arbre dans un tableau (Fig. 1(b)) ce qui permet une navigation simple. Les nœuds sont rangés par profondeur dans le tableau : d'abord la racine, puis ses fils, puis les fils de ses fils... à chaque fois le niveau est rangé de gauche à droite.



(a) tas sous forme d'arbre (b) tas sous forme de tableau

FIGURE 1 – Structure de tas.

Quand on ajoute une valeur à un tas, elle est ajoutée à gauche dans la partie libre du dernier niveau, soit la première case vide du tableau. Ensuite, tant qu'elle est plus petite que celle du père, les deux valeurs sont échangées et on remonte dans l'arbre.

Quand on enlève la première valeur, on la remplace par celle la plus à droite dans le dernier niveau, c.-à-d. la dernière valeur du tableau. À chaque fois on regarde ses deux fils, tant qu'il y en a un qui contient une valeur plus petite, on l'échange avec la plus petite des trois et on descend.

Répondre dans le compte-rendu aux questions suivantes :

1 Que deviennent l'arbre et le tableau de la Fig. 1 quand on ajoute la valeur 12.2 puis la valeur 7.3 ?

2 Que deviennent l'arbre et le tableau de la Fig. 1 (après les ajouts de 1) quand on retire le minimum ?

3 Expliquer pourquoi l'extraction du minimum est en temps logarithmique alors que connaître sa valeur est en temps constant.

4 Quelle est l'expression mathématique donnant le numéro de la case du tableau stockant le fils gauche d'un nœud stocké dans la case i ? De même pour le fils droit et le père.

Écrire le code des méthodes dans heap.hpp (à tester avec test_heap). Les méthodes les plus élémentaires sont définies dans la classe, les autres en dehors. Il faut utiliser au maximum les méthodes élémentaires afin de simplifier l'écriture de la version avancée (heap_id plus bas).

Le code utilise des template (patrons) et toutes les déclarations attenantes sont données. À l'intérieur des patrons, il faut considérer les paramètres (des types ici) comme définis et utilisables (comme des arguments d'une fonction qui n'ont de valeur que lors d'un appel). Une des particularités des template est que leur code doit être disponible à la compilation (avant l'édition de liens) et donc être présent dans le .hpp.

Illustration simple : tri

Le programme de test réalise un tri en mettant tout dans un tas puis en retirant tout (dans l'ordre). Il est essayé sur deux types de données.

5 Expliquer dans le compte-rendu la complexité de ce tri.

2 Algorithme de Dijkstra

Il s'agit de l'algorithme classique de *recherche du plus court chemin*. Il n'est pas rappelé ici, mais il se trouve sur internet, dans les manuels classiques ou dans votre cours de réseau.

2.1 Graphes

Un graphe est un ensemble de sommets (vertex/vertices) reliés par des arêtes (edges). Chaque arête a une distance. Cela se représente sur un dessin comme sur la Fig.2.

La classe graph est fournie en entier à l'exception de la méthode print_dijkstra qui calcule un plus court chemin par l'algorithme de Dijkstra et l'affiche.

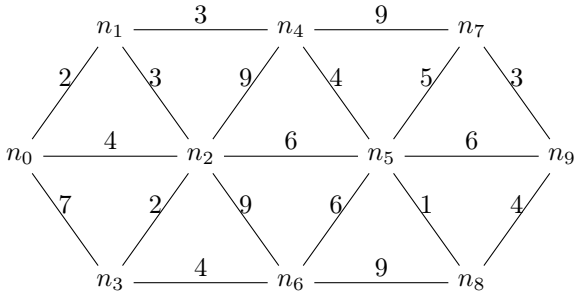


FIGURE 2 – Exemple de graphe avec des distances.

6 Donner dans le compte-rendu le plus court chemin de n_0 à n_9.

Avant de programmer, il faut être clair sur les différentes structures de données annexes nécessaires à chaque niveau. En effet, si les concepts sont simples, leur implantation n'est pas forcément évidente et il y a beaucoup d'indirections. Pour garder des complexités logarithmiques, il faut des tableaux annexes pour retrouver la place dans le tas ou d'autres informations pour ne pas avoir à parcourir en entier la moindre structure.

2.2 Aménagement du tas

Il faut pouvoir intervenir sur n'importe quelle valeur contenue dans le tas et demander au tas de la repositionner correctement (en la montant ou en la descendant). La classe heap_id permet cela en rajoutant un tableau id_to_pos permettant de lier les éléments à leur position dans le tas. Elle utilise également un autre tableau pour gérer les id déjà attribués à des éléments et les id non utilisés.

Ainsi lorsqu'on fait un push, un unsigned int est retourné. Celui-ci sert d'identifiant id pour l'élément rajouté dans le tas. Cette valeur ne bouge pas alors que la position du nœud dans le tableau varie. Pour toute opération sur le tas push, pop... il faut faire attention à mettre à jour id_to_pos.

La classe heap_id utilise donc le tableau pour faire la correspondance entre cet id et la position dans le tableau. De même, elle utilise un autre tableau pour gérer les id non utilisés.

7 Expliquer dans le compte-rendu le sur-coût de complexité lié à la mise en place de ces tableaux. Donner des exemples de sur-coût sur des méthodes s'il n'y avait pas ces tableaux.

8 Expliquer dans le compte-rendu ce qui doit être fait en plus pour vérifier que la structure est valide.

Écrire le code des méthodes dans heap_id (à tester avec test_heap_id). Attention, certaines peuvent faire l'objet de simple copier-coller de heap, d'autres non !

2.3 Implantation de la méthode print_dijkstra

Écrire le code de la méthode print_dijkstra dans graph.cpp (à tester avec test_graph). Il peut y avoir encore un tableau à faire pour passer entre les données du graphe et celle du tas. **Attention c'est de loin le code le plus complexe du TDM et c'est le moins documenté...**