COMPARACIÓN DE MÉTODOS

Método de Newton-Raphson vs. Método de la secante

29 DE SEPTIEMBRE DE 2021

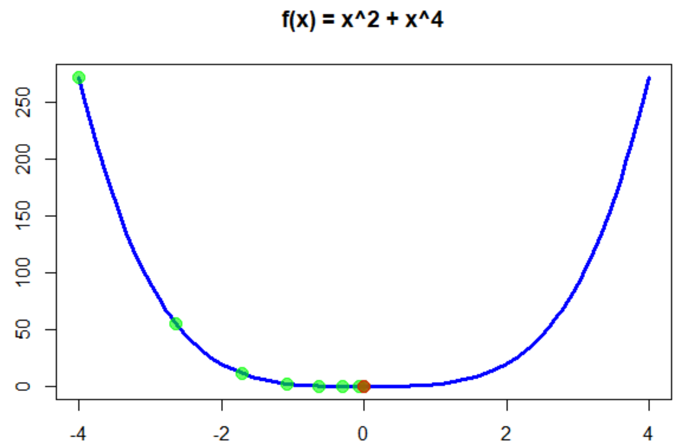
ALAN SAMUEL AGUIRRE SALAZAR - 0227221
UNIVERSIDAD PANAMERICANA

Ejercicio 1

Comparar el método de Newton-Raphson y el método de la Secante en la función $f(x) = x^2 + x^4$. Para Newton-Raphson inicializar $x = -4$. Para Secante inicializar $a = -4$ y $b = -3$. Para ambos métodos usar un $\epsilon = 1e^{-8}$. Ejecutar cada método con 10 iteraciones. Hacer dos gráficos:

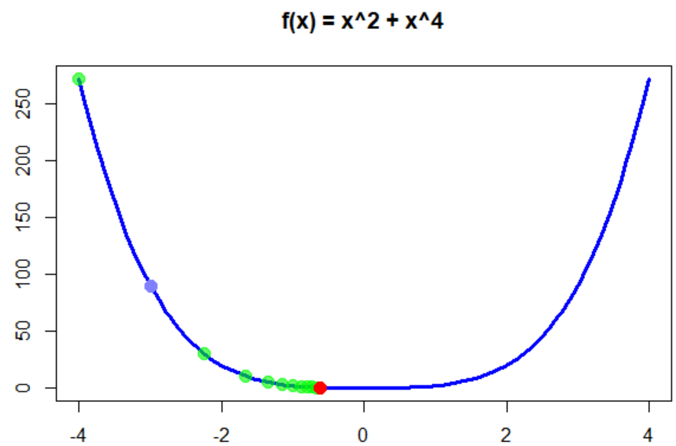
1. Graficar f vs. la iteración para cada método.

Utilizando el código relacionado al método de Newton-Raphson se obtuvo la siguiente gráfica:



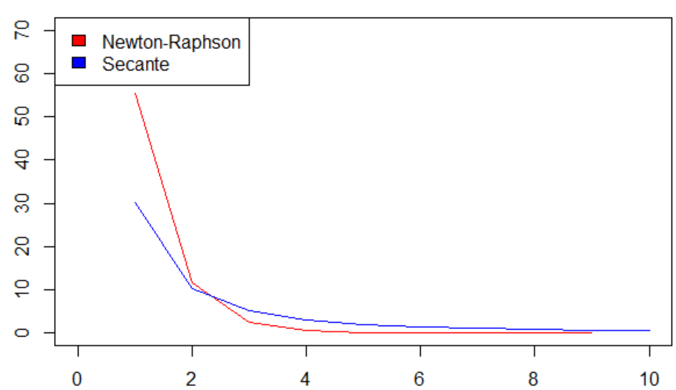
Donde cada punto de color verde representa cada iteración antes de llegar al final del algoritmo, donde, en este caso, se representa con el punto de color rojo.

Para el algoritmo relacionado al método de la Secante se obtuvo la siguiente gráfica:



Donde los puntos verdes representan al punto “a” del algoritmo y los azules al punto “b”, dichos puntos se van moviendo dependiendo de cómo lo vea mejor el algoritmo. De igual forma el punto rojo hace alusión al punto final del algoritmo.

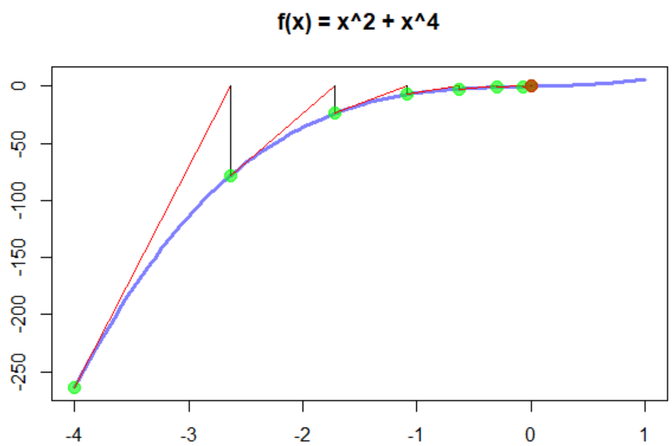
También podemos superponer los progresos de ambos métodos en una misma gráfica, quedando de la siguiente manera:



Donde la línea roja hace referencia al progreso del método de Newton-Raphson en f(x) y la línea de color azul al método de la secante en f(x). Como se puede visualizar, el método de Newton-Raphson solamente necesitó de 9 iteraciones para cumplir con la condición de Épsilon.

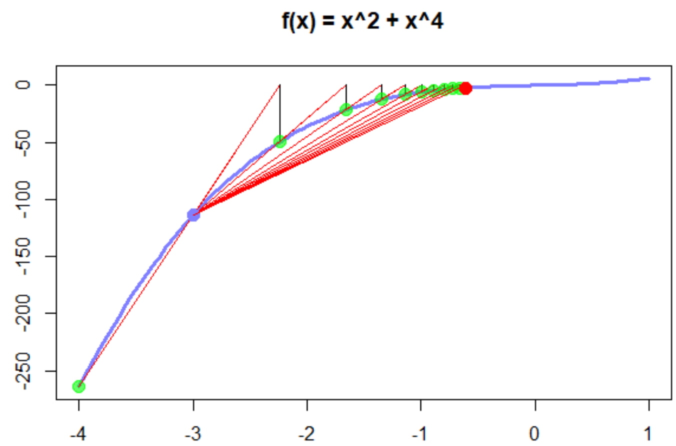
2. Graficar f' vs. x. Superponga la progresión de cada método, dibujando líneas desde $(x^i, f'(x^i))$ hasta $(x^{i+1}, 0)$ para cada iteración i.

El método de Newton-Raphson visto desde la primera derivada queda de la siguiente forma:



Donde cada punto verde representa cada iteración previa al culmen del algoritmo (llegar a 0) y el punto rojo hace alusión al final de dicho algoritmo (cuando se acerca demasiado a 0). Las rectas de color rojo van desde el punto de cada iteración hasta el siguiente punto x_{i+1} en 0, por este motivo existe una segunda recta de color negro que va desde $(x_{i+1}, 0)$ a $(x_{i+1}, f'(x_{i+1}))$.

Por otra parte, el método de la Secante visto desde la primera derivada queda de esta otra forma:

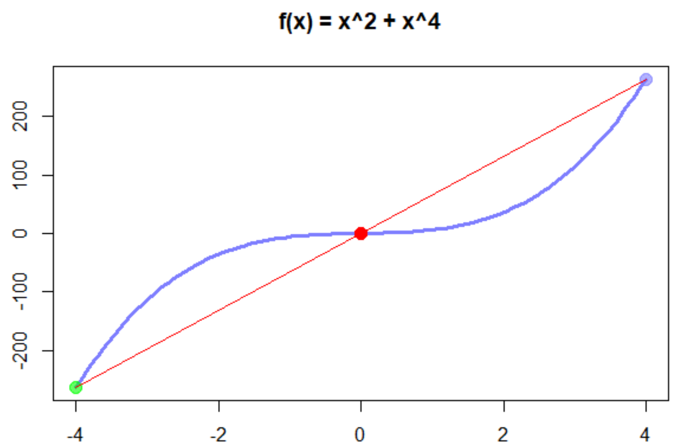


Donde cada punto de color verde representa a los puntos “a” relacionados con dicho método, el punto de color azul al punto “b” también relacionado con el algoritmo de dicho método y el punto de color rojo hace de igual forma alusión al final (cuando se aproxima a 0). Las rectas de color rojo van desde el punto de cada iteración hasta el siguiente punto x_{i+1} en 0, por este motivo existe una segunda recta de color negro que va desde (x_{i+1}, 0) a (x_{i+1}, f’(x_{i+1})).

¿Qué podemos concluir sobre esta comparación?

Ambos métodos se corrieron con parámetros prácticamente iguales y, en esta ocasión el método de Newton-Raphson fue el más eficaz al encontrar la solución en tan solo 9 iteraciones de las 10 que tenía disponibles, mientras que el método de la secante requirió de las 10 iteraciones en su totalidad y quedó muy lejos de aproximarse a la solución (lejos en el sentido de que aún le faltaban muchas iteraciones para cumplir con el parámetro de Épsilon), de hecho, para que el método de la secante cumpliera con el parámetro de Épsilon (1e-8) se requerirían en total unas 353 iteraciones, prácticamente 344 iteraciones más que en el caso del método de Newton-Raphson. Mientras que el método de Newton-Raphson llegó a x=0 óptimo, el método de la secante se quedó en x= -0.6127394.

Entonces, ¿quiere esto decir que el método de la secante es ineficiente? No, todo depende de los parámetros de arranque que se le hayan puesto y el tipo de función que se quiere resolver. Por ejemplo, si al método de la secante, en este caso, se le hubiera puesto un arranque en a=-4 y en b=4 se resolvería en una sola iteración, 8 veces menos que el método de Newton-Raphson.



Además, viendo la gráfica del progreso (del punto 1), nos podemos percatar que el progreso del método de Newton-Raphson llega más rápido al punto óptimo, esto debido a que su línea de progreso decae de forma abrupta desde la primera iteración hasta llegar a cero en la iteración 9. Mientras que el método de la secante se queda estancado desde la iteración 7 y se sigue extendiendo hasta las 353 iteraciones, no cayendo de forma abrupta a cero como el método de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson arrojó lo siguiente:

```
[1] 9
x*= -3.308722e-24 f(x*)= 1.094764e-47 f1(x*)= -6.617445e-24 f2(x*)= 2
```

Mientras que el de la secante arrojó esto en las 10 iteraciones:

```
[1] 10
x*= -0.6127394 f(x*)= 0.516412
```

Y esto otro en las 353 iteraciones donde por fin cumple con el parámetro de Épsilon:

```
[1] 353
x*= -4.80428e-09 f(x*)= 2.308111e-17
```

Para comparar cada iteración de los dos métodos se realizó esta tabla comparativa de resultados, donde se puede ver claramente que el método Newton-Raphson se acercó muchísimo más al resultado óptimo.

	Ejercicio 1			
	Newton Raphson		Secante	
Iteraciones	x	f(x)	x	f(x)
1	-2.639175	55.4799	-2.24	30.19391
2	-1.718333	11.67093	-1.65804	10.30664
3	-1.084348	2.558343	-1.345257	5.084791
4	-0.633152	0.5615875	-1.142777	3.011413
5	-0.2981467	0.09679317	-0.9977896	1.986771
6	-0.06913678	0.00480274	-0.8871599	1.406505
7	-0.00128501	6.51E-07	-0.7989784	1.045878
8	-8.49E-09	7.20E-17	-0.7264209	0.8061411
9	-3.31E-24	1.09E-47	-0.6652644	0.638451
10			-0.6127394	0.516412

Ejercicio 2

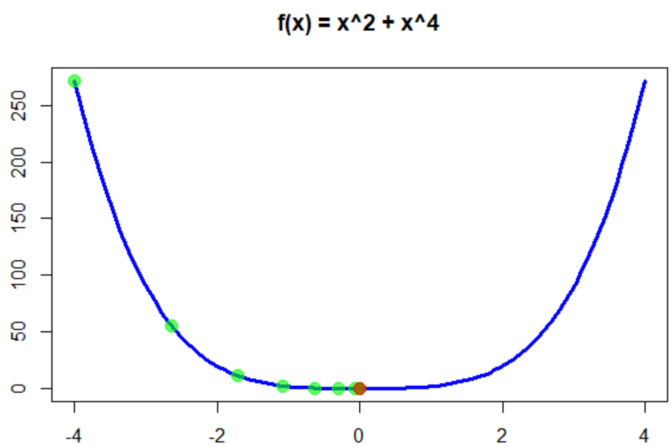
Realizar lo mismo que el ejercicio anterior, sin usar las derivadas explicitas y en su lugar usar las siguientes aproximaciones:

- $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- $f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$

donde $\Delta x = (x + \Delta x) - (x)$.

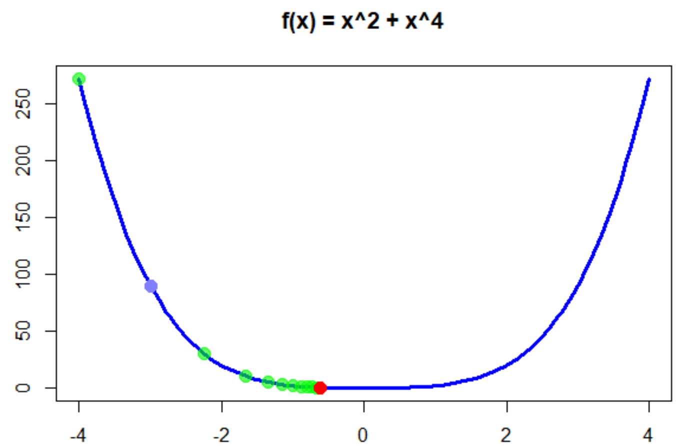
1. Graficar f vs. la iteración para cada método.

Utilizando el código relacionado al método de Newton-Raphson se obtuvo la siguiente gráfica:



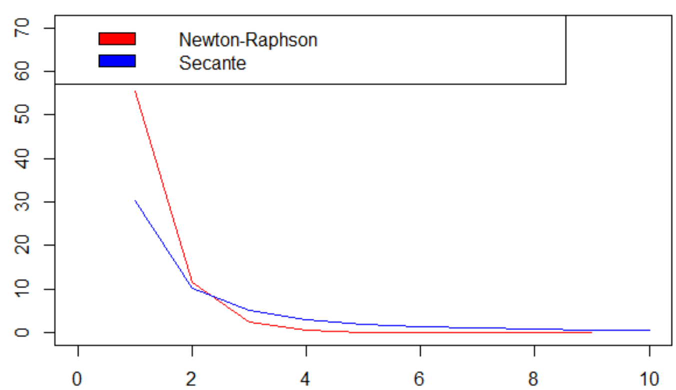
Donde cada punto de color verde representa cada iteración antes de llegar al final del algoritmo, donde, en este caso, se representa con el punto de color rojo.

Para el algoritmo relacionado al método de la Secante se obtuvo la siguiente gráfica:



Donde los puntos verdes representan al punto “a” del algoritmo y los azules al punto “b”, dichos puntos se van moviendo dependiendo de cómo lo vea mejor el algoritmo. En este caso, de igual forma el punto rojo hace alusión al punto final del algoritmo.

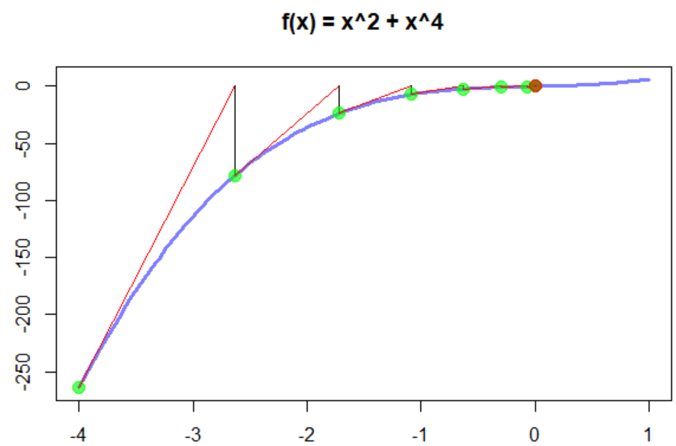
También podemos superponer los progresos de ambos métodos en una misma gráfica, quedando de la siguiente manera:



Donde la línea roja hace referencia al progreso del método de Newton-Raphson en f(x) y la línea de color azul al método de la secante en f(x). Como se puede visualizar, el método de Newton-Raphson, al igual que el ejercicio anterior, solamente necesitó de 9 iteraciones para cumplir con la condición de Épsilon.

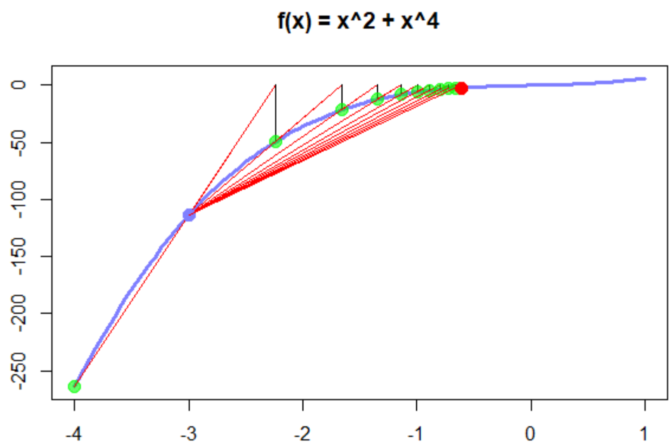
2. Graficar f' vs. x. Superponga la progresión de cada método, dibujando líneas desde $(x^i, f'(x^i))$ hasta $(x^{i+1}, 0)$ para cada iteración i.

El método de Newton-Raphson hecho con "límites" visto desde la primera derivada queda de la siguiente forma:



Donde cada punto verde representa cada iteración previa al culmen del algoritmo (llegar a 0) y el punto rojo hace alusión al final de dicho algoritmo (cuando se acerca demasiado a 0). Las rectas de color rojo van desde el punto de cada iteración hasta el siguiente punto x_{i+1} en 0, por este motivo existe una segunda recta de color negro que va desde $(x_{i+1}, 0)$ a $(x_{i+1}, f'(x_{i+1}))$.

Por otra parte, el método de la Secante hecho con "límites" visto desde la primera derivada queda de esta otra forma:



Donde cada punto de color verde representa a los puntos “a” relacionados con dicho método, el punto de color azul al punto “b” también relacionado con el algoritmo de dicho método y el punto de color rojo hace de igual forma alusión al final (cuando se aproxima a 0). Las rectas de color rojo van desde el punto de cada iteración hasta el siguiente punto x_{i+1} en 0, por este motivo existe una segunda recta de color negro que va desde (x_{i+1}, 0) a (x_{i+1}, f’(x_{i+1})).

¿Qué podemos concluir sobre esta comparación?

Básicamente arrojaron el mismo resultado (con pequeñas diferencias de resultados), pero podemos concluir lo mismo, el método de Newton-Raphson se sigue desempeñando mejor y no es de extrañar, ya que sustituir el método de las derivadas no cambia drásticamente el resultado, simplemente se utilizó una forma más “arcaica” pero que sigue arrojando valores similares (con pequeñas diferencias obviamente). De hecho, no cambió en nada, el método de Newton-Raphson sigue terminando en la iteración número 9 y el de la secante en la iteración número 353.

Lo que sí hay que aclarar es que en las últimas iteraciones el método de Newton-Raphson comenzó a tener diferencias más marcadas, esto se debe principalmente a que se utilizó un “salto” entre ‘x_i’ y ‘x_{i+1}’ de 1e-4, también se hizo uso de este valor de salto en el método de la secante. Se podría aproximar más el valor y disminuir la diferencia entre ambos ejercicios si ese tamaño de salto fuera más diminuto, ya que mientras más cercano sea a cero, más precisión de resultados se obtendrán.

Además, viendo la gráfica del progreso (del punto 1), nos podemos percatar que el progreso del método de Newton-Raphson llega más rápido al punto óptimo, esto debido a que su línea de progreso decae de forma abrupta desde la primera iteración hasta llegar a cero en la iteración 9. Mientras que el método de la secante se queda estancado desde la iteración 7 y se sigue extendiendo hasta las 353 iteraciones, no cayendo de forma abrupta a cero como el método de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson arrojó lo siguiente:

```
[1] 9
x*= -5e-05 f(x*)= 2.5e-09 f1(x*)= -2.953655e-16 f2(x*)= 2
```

Mientras que el de la secante arrojó esto en las 10 iteraciones:

```
[1] 10
x*= -0.6127746 f(x*)= 0.5164875
```

Y esto otro en las 353 iteraciones donde por fin cumple con el parámetro de Épsilon:

```
[1] 353
x*= -5.00048e-05 f(x*)= 2.50048e-09
```

Para comparar cada iteración de los dos métodos se realizó esta tabla comparativa de resultados, donde se puede ver claramente que el método Newton-Raphson se acercó muchísimo más al resultado óptimo.

	Ejercicio 2			
	Newton Raphson		Secante	
Iteraciones	x	f(x)	x	f(x)
1	-2.639158	55.47853	-2.240015	30.19467
2	-1.718303	11.67022	-1.658063	10.30712
3	-1.084308	2.558047	-1.345283	5.085118
4	-0.6330994	0.5614675	-1.142805	3.011651
5	-0.2980827	0.09674818	-0.9978202	1.986954
6	-0.06909914	0.00479749	-0.8871919	1.406651
7	-0.00132749	1.76E-06	-0.7990114	1.045998
8	-5.00E-05	2.50E-09	-0.7264547	0.8062423
9	-5.00E-05	2.50E-09	-0.665299	0.6385377
10			-0.6127746	0.5164875

Ejercicio 3

Con $\mathbf{x} = (-5, -5)$ use los métodos unidimensionales de Newton-Raphson y de la Secante para resolver la siguiente función:

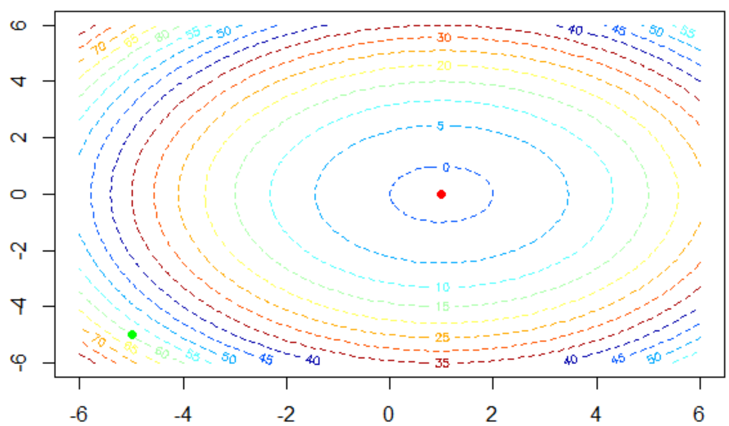
$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$$

¿Qué podemos concluir sobre esta comparación?

Utilizando el método de Newton-Raphson se encuentra el valor óptimo de ‘x’ y de ‘y’ en 2 iteraciones, donde x=1, y=0 y f(x,y)=-1.

```
x*= 1 f(x*)= -1 f1(x*)= 0 f2(x*)= 2
y*= 0 f(y*)= 0 f1(y*)= 0 f2(y*)= 2
f(x,y) =  -1
```

La representación gráfica es de la siguiente manera:

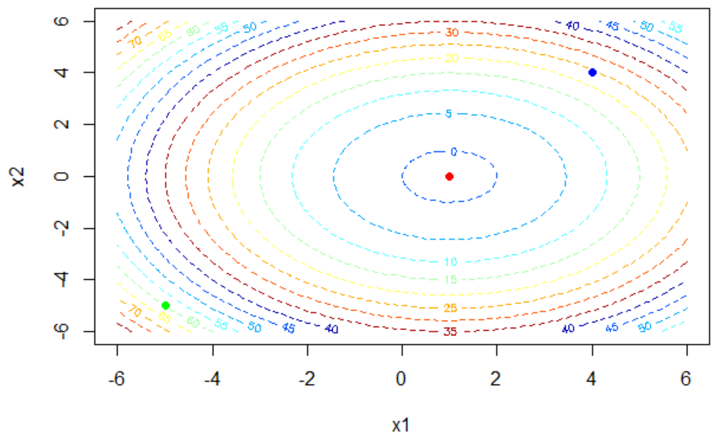


Donde los puntos verdes son las iteraciones y el punto rojo el final de dicho algoritmo donde se encuentra un valor de 0 en la primera derivada.

En el caso del método de la secante se encontró el valor óptimo de ‘x’ y de ‘y’ en una sola iteración, desde el punto (-5, -5) al punto (4, 4), dando como resultado x=1, y=0 y f(x,y)=-1.

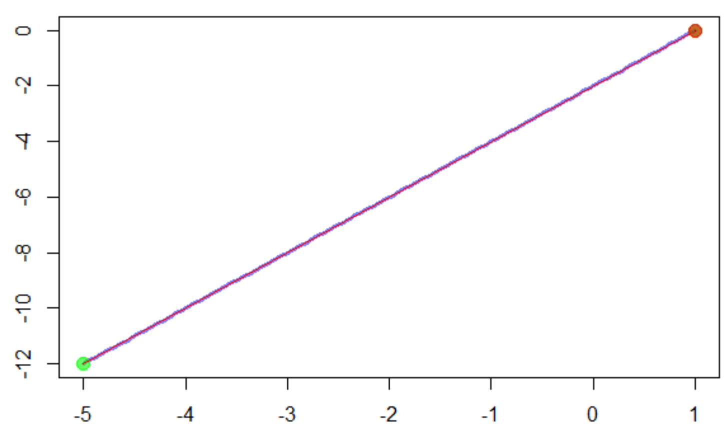
```
x*= 1 f(x*)= -1
y*= 0 f(y*)= 0
f(x,y)*= -1
```

La representación gráfica es de la siguiente manera:

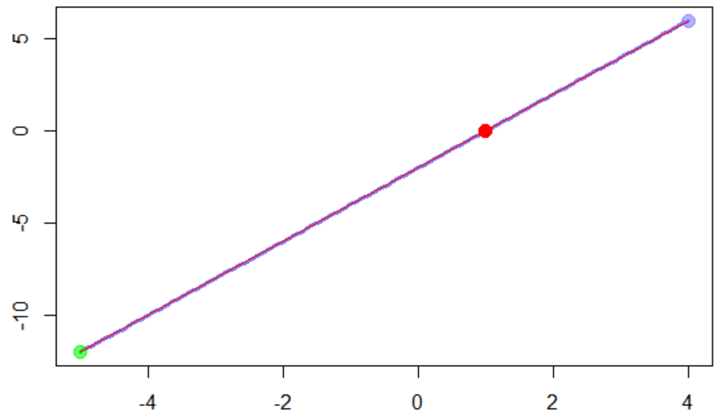


Donde el punto verde hace referencia al punto ‘a’ (-5,-5) del algoritmo y el punto azul al punto ‘b’ (4,4) del algoritmo.

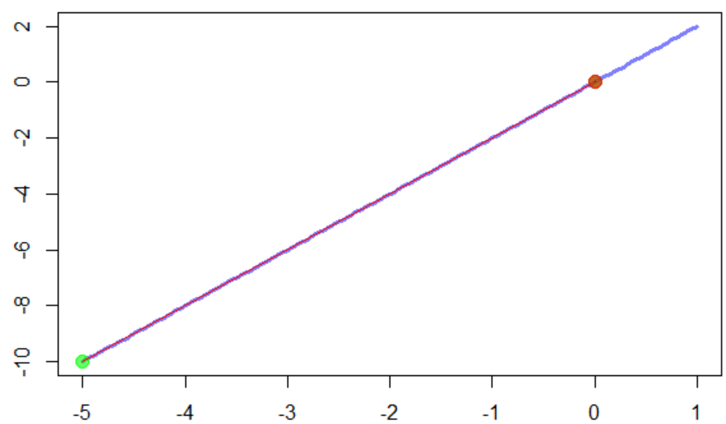
Me sorprendió que se haya resuelto tan pronto, pero ya investigando más a fondo nos podemos percatar que es porque en la derivada de dicha función respecto a ‘x’ y ‘y’ se encuentra una “recta”, por lo tanto, al aplicar los métodos se encuentra muy rápido dicha solución por estar en la misma pendiente. Por ejemplo, optimizar la función $f(x) = x^2-2x$ (función respecto a ‘x’ de la función f(x,y)), queda lo siguiente visto desde la primera derivada:



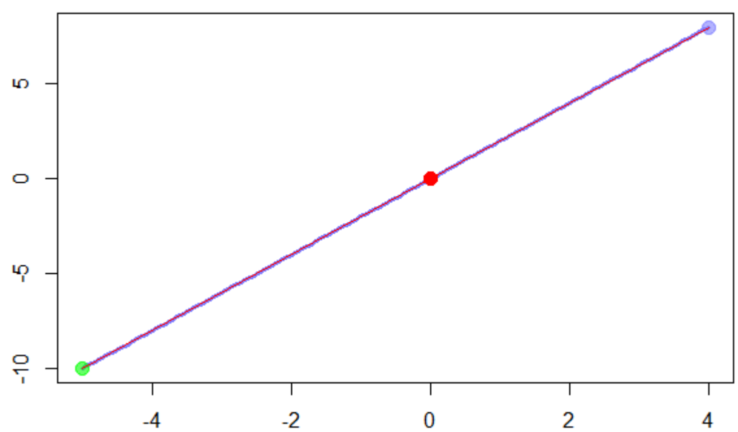
Así queda en el método Newton-Raphson y así en el método de la secante:



Mientras que optimizando la función $f(y) = y^2$ (función respecto a 'y' de la función f(x,y)), queda lo siguiente visto desde la primera derivada:



Así queda en el método Newton-Raphson y así en el método de la secante:



Esto explica la rapidez de dichos algoritmos en la búsqueda del resultado, ya que no importa cuáles puntos se le introduzca, al final por ser una misma recta con una misma pendiente, los algoritmos no tardarán nada en encontrar la respuesta y llegar al punto en 0.

Además, nos podemos percatar de que este problema es “divisible”, ya que las variables implicadas (x, y) no interactúan entre sí por medio de multiplicaciones, divisiones, etcétera, esto facilita su resolución al poder tratar cada variable de forma independiente, así que resolviendo para cada variable al final el resultado será lo mismo que si se resolviera de forma “general”. Así que al final basta con resolver para ‘x’ la función $f(x) = x^2-2x$ y para ‘y’ la función $f(y)=y^2$.