Курузов Илья
Задание 5

Задача 1.

Как было доказано на семинаре:

$$\phi_X(t) = e^{it\mu_1 - \frac{(t\sigma_1)^2}{2}}$$

$$\phi_Y(t) = e^{it\mu_2 - \frac{(t\sigma_2)^2}{2}}$$

По свойству хар. функции:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

В силу биективности характеристической функции и функции распределения, получаем:

$$\boxed{X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

Задача 3.

1) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$\phi_X(t) = \int\limits_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\phi'_X(t) = \int\limits_0^\infty ixe^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{it-\lambda} ixe^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \frac{i}{it-\lambda}\int\limits_0^\infty ixe^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\phi'_X(t) = -\frac{i}{it-\lambda}\phi(x)$$

$$\phi_X(t) = \frac{C}{it-\lambda}$$

$$\phi_X(0) = \frac{C}{\lambda} = 1 \Rightarrow C = \lambda$$

$$\boxed{\phi_X(t) = \frac{\lambda}{it - \lambda}}$$

2) $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\phi_X(t) = \int\limits_0^\infty e^{itx} \frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$\phi_X'(t) = \int\limits_0^\infty ixe^{itx} \frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\, dx = \frac{i}{it-\lambda} e^{itx} \frac{x^{\alpha}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\Big|_0^\infty - \frac{i\alpha}{it-\lambda} \int\limits_0^\infty e^{itx} \frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$\phi_X'(t) = -\frac{i\alpha}{it-\lambda}\phi_X(t)$$

$$\phi_X(t) = \frac{C}{(it-\lambda)^\alpha}$$

$$\phi_X(0) = \frac{C}{\lambda^\alpha} = 1 \Rightarrow C = \lambda^\alpha$$

$$\boxed{\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{it-\lambda}\right)^\alpha}$$