Курузов Илья, 678
Задание 7

Задача 1.

1) Пусть $p > 1$. Тогда найдем супремум при помощи производной.

$$(yx - x^p)' = 0$$
$$y - px^{p-1} = 0$$
$$x* = \left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Данная точка дает максимум:

$$f^*(y) = y\left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}, \operatorname{dom} f^* = \mathbb{R}$$

2) Пусть $p < 0$. Тогда рассмотрим 2 случая:

а) $y \neq 0$. Тогда $\sup(yx - x^p) = (yx - x^p)|_{x=\operatorname{sign}(y)\infty} = \infty$. Значит, при $y \neq 0$ сопряженная функция не определена.

б) $y = 0$. Тогда $\sup(yx - x^p) = -\inf(x^p) = 0$

Тогда

$$\boxed{f^*(y) = 0, \operatorname{dom} f^* = \{0\}}$$

Задача 2.

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{x_j > 0, \forall j}\left(\sum_{j=1}^n y_j x_j + \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

1) Если $\exists j : y_j \geq 0$, то

$$\sup_{x_j > 0, \forall j}\left(\sum_{j=1}^n y_j x_j + \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x_j \to \infty}\left(\sum_{j=1}^n y_j x_j + \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}}\right)\Big|_{x_i = 1, \forall i \neq j} = \infty$$

Значит, если $\exists j : y_j \geq 0$, то функция не определена.

2) Рассмотрим случай, когда $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j > -1$. Докажу, что в этом случае сопряженная функция не определена. Положим, все компоненты вектора $\mathbf{x}$ равными $m > 0$ и рассмотрим выражение под супремумом

$$\sum_{j=1}^{n} y_j x_j + \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} = \tag{1}$$

$$= m\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + 1\right) = \tag{2}$$

$$= mq, \tag{3}$$

где $q > 0$. В силу того, что m - произвольная положительная константа, верно, что выражение под супремумом может принимать сколь угодно большое значение, а, значит, в этом случае супремум бесконечен и функция не определена.

3) Теперь рассмотрим случай, когда $y_i \leq -\frac{1}{n}, \forall i$.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j x_j + \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq \tag{4}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} y_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} = \tag{5}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(y_j + \frac{1}{n}\right) x_j \leq \tag{6}$$

$$\leq \min_j x_j \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + 1\right) \leq 0 \tag{7}$$

Переход от первой ко второй строчке осуществлен в силу неравенства о средних, а неравенство в четвертой строчке осуществлено в силу области определения y_i. Верхняя оценка достигается при $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Значит,

$$f(\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{y}|y_i \leq -\frac{1}{n}, \forall i} = 0, \operatorname{dom} f^* = \left\{\mathbf{y} | y_i \leq -\frac{1}{n}, \forall i\right\}$$

Задача 3.

По определению:

$$g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - g(\mathbf{x}) \right)$$

$$g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \right)$$

Пусть далее A не вырожденная матрица.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top \mathbf{x} &= \\ = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}) &= \\ = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{b}) &= \\ = (\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y})^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} & \end{aligned} \tag{8}$$

В результате получаем:

$$g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left((\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y})^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) - f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \right) - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

$$g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left((\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y})^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \right) - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\boxed{g^*(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y}) - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}$$

Задача 4.

$$f^*(\mathbf{Y}) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}} (\mathrm{tr}(\mathbf{Y}\mathbf{X}) + \log\det \mathbf{X})$$

Найдем производную выражения под супремумом и приравняем ее нулю. В силу того, что производные слагаемых уже были найдены в курсе, воспользуемс выражениями для них без приведения вывода:

$$(\mathrm{tr}(\mathbf{Y}\mathbf{X}) + \log\det \mathbf{X})' = \mathbf{Y}^\top + X^{-\top} = 0$$

1) Рассмотрим случай, когда Y - невырожденная матрица. Тогда $X = -Y^{-1}$ дает экстремум, причем, в силу выпуклости функций (доказано в курсе), - глобальный. Данный экстремум дает максимум.

$$f^*(\mathbf{Y}) = -n + \log\det(-\mathbf{Y}^{-1})$$

$$f^*(\mathbf{Y}) = -n - \log\det(-\mathbf{Y}), \forall \mathbf{Y} : \det(-\mathbf{Y}) > 0$$

2) Пусть теперь Y - матрица, такая что $\det(-\mathbf{Y}) \leq 0$. Докажу, что в этом случае сопряженная функция не определена. Для случая если на диагонали $\mathbf{Y}$ есть неотрицательный элемент (без ограничения общности будем считать, что это y_{11}), то рассмотрим выражение под супремумом для $\mathbf{X} = diag(k\lambda_1 \dots \lambda_n)$, где $k > 0$, $\lambda_i > 0, \forall i$. Заметим, что $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$\operatorname{tr}(\mathbf{YX}) + \log\det\mathbf{X} = k\lambda_1 y_1 + \sum_{j=2}^{n} y_i\lambda_i + \log\prod_{j=1}^{n}\lambda_j + \log k$$

Как видим, устремляя k к бесконечности, получаем сколь угодно большое значение для выражения под супремумом. А, значит, супремум бесконечен и функция не определена.