Курузов Илья, 678

Задание 1

1.

Далее используются обозначения ρ_i - приблизительное расстояние от путешественника до i-ого объекта, a_i - радиус-вектор i-ого объекта, x - искомый радиус-вектор путешественника

Оптимизационная задача:

$$\underset{x}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{m} \left| \rho_i - \|x - a_i\|_2 \right|,$$

$$x \in \mathbb{R}^3.$$

Решением будет точка в $\mathbb{R}^3$, расстояния до которой от объектов "близки"к заданным. Для i-ого объекта степенью такой близости будет являться разница $\left| \rho_i - \|x - a_i\|_2 \right|$. Для того чтобы учесть разницу между всеми расстояниями, была выбрана целевая функция равная сумме этих разностей(т. е. l_1 норму вектора разностей).

2.

Характеристикой поселения будет вектор x, в котором x_i - номер комнаты i-ого студента. В этой задаче рассмотрим функцию выгоды от данного поселения. Она вычисляется следующим образом: изначально она равна нулю, если студенты i и j живет в одной комнате, т.е. $x_i = x_j$, то она увеличивается на p_{ij}, если студент i живет в комнате k, то значение функции увеличивается на b_{ij}. Тогда выражение ждя функции выгоды:

$$f(x) = \left(\sum_{x_i = x_j} p_{ij} + \sum_{x_i = j} b_{ij} \right)$$

и наша задача ее макисимизировать. Тогда как целевую функцию будем использовать $-f(x)$ и минизировать её.

При построении считается, что удовлетворить желание жить вместе каких-то двух студентов в данной системе так же важно, как и удовлетворить желание жить в определнной комнате. В случае если не так, то предлагается использовать поправочные коэффициенты для b_{ij} и p_{ij}, зависящие от уточнений к задаче.

В случае если нет некоторых значений p_{ij}, предлагается считать данные значения равными нулю. Т.е. если их поселить вместе, поселяющий ничего не выигрывает.

Оптимизационная задача:

$$\underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(-\sum_{x_i=x_j} p_{ij} - \sum_{x_i=j} b_{ij} \right), \tag{1}$$

$$x \in \mathbb{N}^n, \tag{2}$$

$$\forall i = \overline{1,n}\, x_i \leq m, \tag{3}$$

$$\max_j \sum_{x_i=j} 1 \leq 3 \tag{4}$$

Ограничения 2 и 3 связаны с тем, что номера комнат, которыми и являются элементы вектора x, есть натуральные числа, не превышающие m. Ограничение 4 есть следствие того, что в одной комнате не может жить больше трех человек.

3.

Далее количество магазином переобозначено как M(вместо m).

Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{R}^{MN}$, в котором на месте координаты $(n-1)M+k$ стоит количество единиц товара, доставленное с n-ого склада в k-ый магазин. Для описания целевой функции будем использовать ещё два вектора из $\mathbb{R}^{MN}$: вектор c, в котором на месте $(n-1)M+k$ стоит c_{nk}, и t, в котором на месте $(n-1)M+k$ стоит t_{nk}.

Функция денежных расходов определяется, как $\sum\limits_{i=1}^{MN} x_i c_i = (x, c)$. Аналогично, функция временных расходов определяется как (x, t). Считая, что потери денег и времени в данных единицах одинаково плохо, будем использовать как целевую функцию следующее скалярное произведение: $(x, c+t)$.

Оптимизационная задача:

$$\underset{x}{\operatorname{argmin}} (x, c+t), \tag{1}$$

$$x \in \mathbb{R}^{MN}, \tag{2}$$

$$\forall n = \overline{1, N} \sum_{i=1}^{M} x_{(n-1)M+i} \leq a_i, \tag{3}$$

$$\forall m = \overline{1, M} \sum_{i=1}^{N} x_{(i-1)M+m} = b_i. \tag{4}$$

Ограничение 3 появилось из-за ограниченности товара на складе, ограничение 4 есть выражение необходимости доставить всем магазинам требуемое количество товара.

4.

I.Нормой вектора называется функция $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0.$
2. $\|x\| \geq 0$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

Две нормы $p(x)$ и $q(x)$ называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ C_1 p(x) \leq q(x) \leq C_2 p(x)$$

.

Доказательство эквивалентности l_1 и l_∞ норм:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

$$n\,\|x\|_\infty = n \max_i |x_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

Доказательство эквивалентности l_∞ и l_2 норм:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n \max_i |x_i|^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq \sqrt{\max_i |x_i|^2} = \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

Эквивалентность l_1 и l_2 норм следует из доказанного и из того, что эквивалентность норм - это отношение эквивалентности.

II. Норма матрицы $\|A\|$ называется порожденной векторной нормой $\|x\|$, если она определена как

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

.

L_∞ норма:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_j |x_j| \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Данная оценка достигается при $x = \{x_i = \operatorname{sign}(a_{ji})\}$, где j - номер строки, на которой достигается максимум $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

L_1 норма:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \leq \max_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} \left(\max_j |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)$$

$$\|A\| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Это оценка достигается, если взять такой вектор x, что на i-ой позиции стоит 1, а на остальных нули, где i - номер, на котором достигается максимум $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Норма Фробениуса(аналог векторной l_2 нормы):

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

5.

I. Пусть x, y - элементы линейного простанства L со скалярным произведением (x, y) и с нормой $x = \sqrt{(x, x)}$, тогда верно неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Доказательство:

$$(\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2 \|x\|^2 - 2\alpha(x, y) + \|y\|^2 \geq 0$$

В случае, если $x = 0$, неравенство верно. Иначе положим $\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|^2}$. Тогда получим неравенство, эквивалентное неравенству Коши-Буняковского-Шварца. $\square$

II. SVD разложение матрицы A - представление матрицы в виде произведения трех матриц:

$$A = U \Sigma V^T,$$

где U и V - ортогональные матрицы состоящие из левых и правых сингулярных векторов, Σ - матрица, на диагонали которой стоят соответствующие сингулярные числа.

QR разложение матрицы A - представление матрицы в виде произведения двух матриц:

$$A = QR,$$

где Q - ортогольная матрица, R - треугольная матрица.

Для решения данной системы $Ax = b$ можно использовать SVD разложение для матрицы A и умножать обе части на обратные матрицы для матриц в умножении (для ортогональной и диагональной нахождение обратной занимает $O(n^2)$). И далее сложность зависит от способа умножения матриц(к примеру, при помощи алогоритма Штрассена сложность $O(n^{\log_2 7})$). Таким образом, без учета сложности вычислений

SVD разложения, решение линейных систем данным методом быстрее, чем методом Гаусса(кубическое время).

При применении QR разложения умножим обе части на Q^T(умножение матрицы на вектор и вычисление транспонированной матрицы - $O(n^2)$) и используем метод Гаусса для R(поскольку матрица треугольная - $O(n^2)$). Значит, использование QR разложения, без учета времени на нахождение этого разложения, требует $O(n^2)$.

III. Разреженная матрица - матрица, большАя часть элементов которой равны нулю. Точная граница между разреженными и неразреженными матрицами отсутствует.

Способ хранения: хранение по строкам пар (значение элемента, индекс стобца). Способ нахождения элемента с данным индексом может осущетвляться с помощью бинарного поиска по строке. Аналогично можно хранить по столбцам пар.

IV. Доказательство ассоциативности матричного умножения. Далее используется обозначение $[A]_{ij}$, a_{ij} - элемент матрицы A с индексами i и j. Рассмотрим три матрицы $A_{m,n}, B_{n,k}, C_{k.l}$ и два их произведения $(AB)C$ и $A(BC)$.

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{p=1}^{k} [AB]_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{d=1}^{n} a_{id} b_{dp} \right) c_{pj} = \sum_{d=1}^{n} a_{id} \sum_{p=1}^{k} b_{dp} c_{pj} =$$

$$= \sum_{d=1}^{n} a_{id} [BC]_{dj} = [A(BC)]_{ij}$$

Из выше написанного покомпонентного равенства следует ассоциативность матричного умножения.