Курузов Илья Задание 1

Задача 1.

1. Множество элементарных исходов: Ω - все перестановки набора букв.

$$|\Omega| = 10!$$

2. Мощность интересующего нас множества событий (с учетом трех букв "А"и двух "Т") равна

$$|A| = 3! * 2!$$

3. $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{10!}$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{12}{10!}}$$

Задача 2.

1. Множество всех элементарных исходов: Ω - множество n-мерных векторов(n=23), в котором i-ая компонента - день рождения - i-ого ученика.

$$|\Omega| = 365^{23}$$

.

2. Событие A - найдется две равные компоненты в случайном векторе. Событие $\Omega \backslash B$ - все дни рождение различны.

$$|A| = |\Omega| - |\Omega \backslash B| = |\Omega| - C_{365}^{23} * 23!$$

3.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{342!365^{23}}}$$

Задача 3.

I. Шары различимы.

1. Множество всех элементарных исходов - множество n-мерных векторов, у которых на месте каждой компоненты стоит номер ящика в котором находится данный шар.

$$|\Omega| = m^n$$

2. Интересующее нас подмножество - в компонентах вектора нет первого ящика.

$$|A| = (m-1)^n$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n}$$

II. Шары неразличимы.

1. Множество всех элементарных исходов - все вектора, сумма компонент каждого из которых равна n. В итоге получаем, что мощность множества равна количеству способов разбить число n на m упорядоченных целых неотрицательных слагаемых:

$$|\Omega| = \binom{n+m-1}{m-1}$$

2. Интересующее нас подмножество - первая компонента равна нулю. Отсюда получаем

$$|A| = \binom{n+m-2}{m-2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{m-1}{n+m-1}}$$

Задача 4.

1. Множество всех элементарных исходов $\Omega = \{(A, B) | A, B \subset 2^N\}$.

$$|\Omega| = 2^{2N}$$

2. Множество благоприятных исходов - такие пары, пересечение элементов которых равно пустому множеству. Построим эти пары следующим способом: выберем k элементов для A и для B будем выбирать из оставшихся. И так для всех k. Из этой идеи получаем мощность данного множества:

$$|A| = \sum_{j=0}^{N} C_n^j \left(\sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j}^i \right) = \sum_{j=0}^{N} C_n^j 2^{N-j} = 3^N$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^N}$$

Задача 5.

1. Данное семейство не является σ-алгеброй. Докажу, что это семейство не замкнуто относительно счетного объединения.

Рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$b_n = \begin{cases} 2b_{n-1} & \text{if } n \mod 2 = 0 \\ \frac{3}{2} b_{n-1} & \text{if } n \mod 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$b_1 = 2$$

Далее рассмотрим подпоследовательность множеств:

$$A_n = \begin{cases} \{1 \dots \frac{3}{4} b_n\} & \text{if } n \mod 2 = 0 \\ \{1 \dots \frac{1}{2} b_n\} & \text{if } n \mod 2 \neq 0 \end{cases}$$

Каждый из элементов последовательности принадлежит семейству(множество конечно, а, следовательно, предел для него равен нулю).

Покажем, что $A_{n-1} \cup A_n = A_{n+1}$. В случае, если $n \mod 2 \neq 0$ это очевидно, докажем другой случай.

$$A_{n-1} \cup A_n = \{1 \dots \frac{3}{4} b_{n-1}\} \cup \{1 \dots \frac{1}{2} b_n\} = \{1 \dots \frac{3}{4} b_{n-1}\} \cup \{1 \dots \frac{3}{4} b_{n-1}\} = A_n$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим числовую последовательность.

$$a_n = \frac{| \cup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \{1 \dots b_n\}|}{b_n}$$

Видно, что для существования предела из условия для $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ должен существовать предел для выше описанной последовательности.

Однако, как видим

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{if } n \mod 2 = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } n \mod 2 \neq 0 \end{cases}$$

Откуда следует, что не существует предела последовательности a_n, а, следовательно, и предела из условия для $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

А, значит, данное семейство не является σ-алгеброй, поскольку это семейство не замкнуто относительно счетного объединения.