Курузов Илья, 678
Задание 9

Задача 1

1. Решим оптимизационную задачу:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} x^2+1 \tag{1}$$
$$\text{s. t.}\ (x-2)(x-4)\le 0 \tag{2}$$

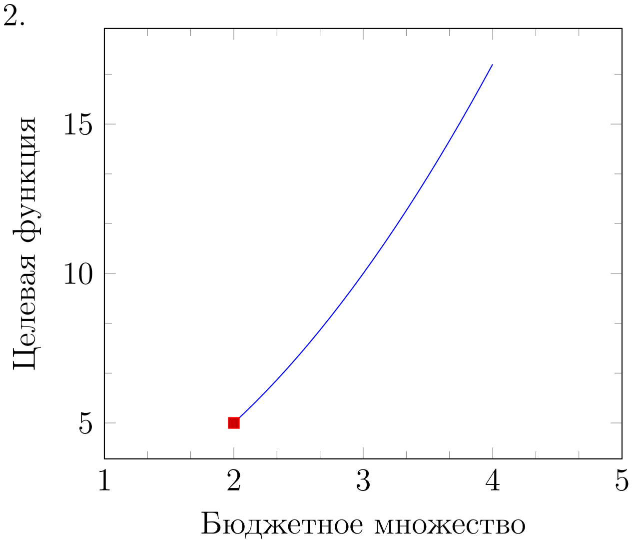
Условный субдифференциал:

$$\begin{aligned}\partial_X f(x) = \partial f(x) + N(x|X) = \\ = 2x+1+\begin{cases}\alpha, \alpha\le 0, x=2\\ \alpha, \alpha\le 0, \text{if } x=2\\ 0, \text{else}\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

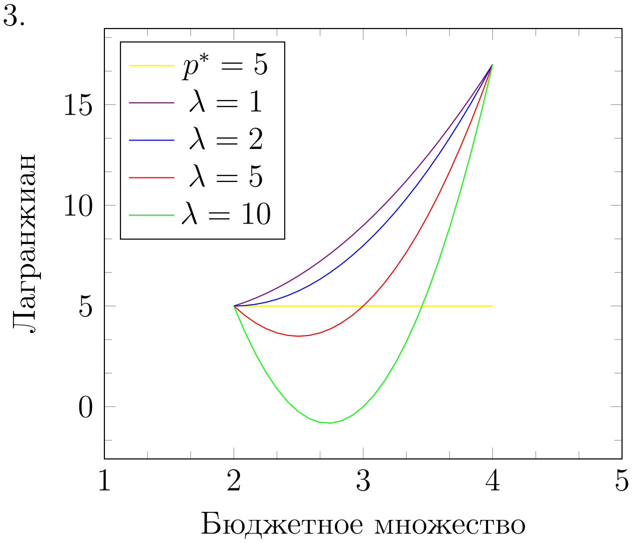
Получаем, что $0\in\partial_X f(2)$. В силу выпуклости целевой функции и бюджетного множества, это точка минимума:

$$\boxed{\min f(x) = f(2) = 5}$$

2.



3.



Как видно из рисунка, $p^* \geq \inf\limits_x L(x, \lambda)$

4.

$$\begin{aligned} g(\lambda) = \inf_{x \in X} (x^2 + 1 + \lambda(x-2)(x-4)) = \\ = 1 + 8\lambda + \inf_{x \in X}((\lambda+1)x^2 - 6\lambda x) = \\ = 1 + 8\lambda + \big((\lambda+1)x^2 - 6\lambda x\big)\Big|_{x=\max\left(2, \frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)} = \\ = \begin{cases} \frac{-\lambda^2+9\lambda+1}{\lambda+1}, \text{if } \lambda \geq 2, \\ 5, \text{if } 0 \leq \lambda \leq 2 \end{cases} = \\ = \begin{cases} -\lambda + 10 - \frac{9}{\lambda+1}, \text{if } \lambda \geq 2, \\ 5, \text{if } 0 \leq \lambda \leq 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Функция всюду g дифференцируема, причем $g'(\lambda) \leq 0, \forall \lambda \geq 0$. Значит, $g(0)$ дает максимум, т.е. решение двойственной задачи:

$$\boxed{\max_{\lambda : \lambda \geq 0} g(\lambda) = g(0) = 5}$$

$d^* = p^*$ и поэтому свойство сильной двойственности выполнено.