Курузов Илья, 678
Задание 10

Задача 1

Заметим, что задача $\min |x|$ равносильна следующей задаче:

$$\min y \tag{1}$$
$$\text{s. t. } y \geq x \tag{2}$$
$$y \geq -x \tag{3}$$

Заметим, что добавление условий на неотрицательность переменных не изменит решения этой задачи. Далее это свойство будет активно использоваться

а)

$$\min 2x_1 + 3|x_2 - 10| \tag{4}$$
$$\text{s. t. } |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \tag{5}$$

Заменим $|x_2 - 10|, |x_1 + 2|, |x_2|$ на y_1, y_2, y_3.

$$\min 2x_1 + 3y_1 \tag{6}$$
$$\text{s. t. } y_2 + y_3 \leq 5 \tag{7}$$
$$y_1 \geq x_2 - 10 \tag{8}$$
$$y_1 \geq -(x_2 - 10) \tag{9}$$
$$y_2 \geq x_1 + 2 \tag{10}$$
$$y_2 \geq -(x_1 + 2) \tag{11}$$
$$y_3 \geq x_2 \tag{12}$$
$$y_3 \geq -x_2 \tag{13}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \tag{14}$$
$$x_1 + 2, x_2, x_2 - 10 \geq 0 \tag{15}$$

Или полностью по канону:

$$
\begin{aligned}
& \min 2x_1 + 3y_1 && (16)\\
& \text{s. t. } y_2 + y_3 \leq 5 && (17)\\
& y_1 \geq x_2 - 10 && (18)\\
& y_1 \geq -(x_2 - 10) && (19)\\
& y_2 \geq x_1 + 2 && (20)\\
& y_2 \geq -(x_1 + 2) && (21)\\
& y_3 \geq x_2 && (22)\\
& y_3 \geq -x_2 && (23)\\
& x_2 \geq 10 && (24)\\
& x_1 - v \geq -2 && (25)\\
& v \leq 2 && (26)\\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0 && (27)\\
& x_1, x_2, v \geq 0 && (28)
\end{aligned}
$$

Переходим к равенствам и записываем полностью в каноническом виде

$$
\begin{aligned}
& \min 2x_1 + 3y_1 && (29)\\
& \text{s. t. } y_2 + y_3 \leq 5 && (30)\\
& y_1 - x_2 + z_1 = -10 && (31)\\
& y_1 + x_2 + z_2 = 10) && (32)\\
& y_2 - x_1 + z_3 = 2 && (33)\\
& y_2 + x_1 + z_4 = -2 && (34)\\
& y_3 - x_2 + z_5 = 0 && (35)\\
& y_3 + x_2 + z_6 = 0 && (36)\\
& x_2 + z_7 = 10 && (37)\\
& x_1 - v + z_8 = -2 && (38)\\
& -v + z_9 = -2 && (39)\\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0 && (40)\\
& x_1, x_2, v \geq 0 && (41)\\
& \mathbf{z} \geq 0 && (42)
\end{aligned}
$$

б)

$$\min \|\mathbf{x}\| \tag{43}$$
$$\text{s. t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{44}$$

Переходим от $|x_i|$ к y_i.

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{45}$$
$$\text{s. t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{46}$$
$$y_i \geq x_i \tag{47}$$
$$y_i \geq -x_i \tag{48}$$

Замена $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0$

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{49}$$
$$\text{s. t. } \mathbf{Au} - \mathbf{Av} = \mathbf{b} \tag{50}$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{u} - \mathbf{v} \tag{51}$$
$$\mathbf{y} \geq -\mathbf{u} + \mathbf{v} \tag{52}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y} \geq 0 \tag{53}$$

Перейдем к канонической форме:

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{54}$$
$$\text{s. t. } \mathbf{Au} - \mathbf{Av} = \mathbf{b} \tag{55}$$
$$\mathbf{y} - \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}_1 = 0 \tag{56}$$
$$\mathbf{y} + \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{z}_2 = 0 \tag{57}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \geq 0 \tag{58}$$

в) Полиэдральное множество $P = \left\{ \mathbf{x} \middle| \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \right\}$

$$\max_{\mathbf{x}_c} R \tag{59}$$

$$\text{s.t. } B(\mathbf{x}_c, R) \subset P \tag{60}$$

Шар $B(\mathbf{x}_c, R)$ лежит в P, тогда и только тогда, когда граница шара лежит в P. Необходимость следует из определения вложенности в одного множества в другое. Достаточность можно доказать от противного.

Радиус наибольшей сферы с центром $\mathbf{x}_c$ равен минимальному расстоянию от $\mathbf{x}_c$ до P. Теперь получаем следующую эквивалентную оптимизационную задачу:

$$\min_{\mathbf{x}_c} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \tag{61}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x} \in P \tag{62}$$

Выше и далее под нормой подразумевается вторая норма. Очевидное замечание: x_c должно лежать в P.

$$\min \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \tag{63}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x}, \mathbf{x}_c \in P \tag{64}$$

$$\min \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \tag{65}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}_c \leq \mathbf{b} \tag{66}$$