Курузов Илья, 678
Задание 4

Задача 1.

10.

1)

$$f(x) = ||x| - 1|$$

Данная фунция не является выпуклой. Возьмем $x_1 = -1{,}5, x_2 = 1{,}5, \alpha = 0{,}5$ и получаем:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(0) = 1 \geq 0{,}5 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

2)

$$f(x, y) = x^2y^2$$

Функция f определена на $\mathbb{R}^2$, а потому $\mathrm{relint}(X_f) = \mathbb{R}^2$.Гессиан f:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2y^2 \geq 0, \forall x, y$$

$$\Delta_2 = (2y^2)(2x_2) - (4xy)(4xy) = -12(xy)^2 < 0, \forall x, y \neq 0$$

Из дифференциального критерия второго порядка следует, что $f(x, y)$ не является выпуклой.

11.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = -\sin(x), X = [0, \pi]$$

Тогда

$$f^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, X = [0, \pi]$$

Для этих функций $\mathrm{relint}(X) = (0, \pi)$. Найдем вторые производные, которые собственно и являются единственной компонентой гессиана, наших функций:

$$f''(x) = \sin(x) \geq 0, \forall x \in \operatorname{relint}(X)$$
$$(f^2(x))'' = 2\cos(2x) < 0, x = \frac{\pi}{2} \in \operatorname{relint}(X)$$

Значит, мы привели пример выпуклой f, для которой f^2 не выпукла.

11.

$$f(x) = -\sin(x), X_f = [0, \pi]$$
$$g(x) = x^2, X_g = [-1, 0]$$

Функия g выпукла, поскольку

$$g''(x) = 2 \geq 0, \forall x \in \operatorname{relint}(X_g)$$

Выпуклость функции f доказана в предыдущем пункте.

$$g(f(x)) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, X = [0, \pi]$$

Функция $g \circ f$ не является выпуклой, что доказано в предыдущем пункте.

Задача 2.

Докажем обратное неравенство Йенсена по индукции.

I. База индукции при $n = 2$. Докажем ее от противного.

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1) < \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1), \forall \lambda > 0$$

Зафиксируем $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ из $\operatorname{dom} f$ и рассмотрим $\lambda = \frac{3}{2}$.

Тогда из нашего предположения и из условия о выпуклости функции получаем два неравенства:

$$f\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right) < \frac{3}{2} f(\mathbf{x}_1) - \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_1)$$
$$f\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right) \leq \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_1)$$

Далее пользуясь этими неравенствами и выпуклостью функции, получаем следующее:

$$
\begin{gathered}
f(\mathbf{x}_1) = \\
= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right)\right) \leq \\
\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1\right) < \\
< \frac{3}{4}f(\mathbf{x}_1) - \frac{1}{4}f(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{4}f(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{4}f(\mathbf{x}_1) = \\
= f(\mathbf{x}_1)
\end{gathered}
$$

Иными словами, мы получили, что $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_1)$, т.е. противоречие. На этом базу индукции можно считать доказанной.

II. Пусть обратное неравенство Йенсена верно для n точек. Докажем для $n+1$. Далее предполагается, что $\lambda_{n+1} \neq 0$, иначе данное неравенство совпадает с неравенством для n точек, которое верно по предположению индукции.

$$
\begin{gathered}
f\left(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n + \lambda_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}\right) = \\
= f\left(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\mathbf{x}_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\mathbf{x}_{n+1}\right)\right) = \\
= \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f(\mathbf{x}_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\, f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\mathbf{x}_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\mathbf{x}_{n+1}\right) = \\
= \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(\mathbf{x}_i)
\end{gathered}
$$

Стоит заметить, что $\lambda_n + \lambda_{n+1} < 0$ в силу условия и сделанного предположения отличности от нуля второго слагаемого. Из этого следует то, что $\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}, \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}} \geq 0$. Переход от предпоследней к последней строчки выполнен в силу выпуклости функции f.

Полученное неравенство есть обратное неравенство Йенсена для $n+1$ точки.

Значит, обратное неравенство Йенсена верно. $\square$

Задача 3.

3.1.

Пользуясь ограничением на прямую, докажем, что f - выпуклая функция.

Рассмотрим функцию для фиксированных $(t_1, \mathbf{u}), (t_2, \mathbf{v}) \in E$:

$$g(\alpha) = f((t_1, \mathbf{u}) + \alpha(t_2, \mathbf{v})),$$
$$\alpha \in \{\alpha | (t_1 + \alpha t_2)^2 - (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v})^\top (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) > 0\}$$

Обозначим:

$$C_1 = t_2^2 - \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$$
$$C_2 = t_1 t_2 - \mathbf{u}^\top \mathbf{v}$$
$$C_3 = t_1^2 - \mathbf{u}^\top \mathbf{u}$$

В этих обозначениях получаем выражение для g:

$$g(\alpha) = -\log(C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha + C_3)$$

Для определения выпуклости найдем ее вторую производную:

$$g''(\alpha) = \frac{2C_1}{C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha + C_3} + 4\frac{C_2^2 - C_1C_3}{(C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha + C_3)^2}$$

Из того, что $(t_2, \mathbf{v}) \in E$, следует:

$$C_1 > 0, \forall (t_1, \mathbf{u}), (t_2, \mathbf{v}) \in E$$

Исходя из определения области определения g, получаем неотрицательность знаменателей. Значит, если мы докажем, что числитель второго слагаемого в производной неотрицателен, то мы докажем, что вторая производная неотрицательна. Так займемся же этим.

$$C_2^2 - C_1C_3 =$$
$$= (t_1t_2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 - (t_2^2 - \|\mathbf{v}\|^2)(t_1^2 - \|\mathbf{u}\|^2) =$$
$$= -2t_1t_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 + t_2^2\|\mathbf{u}\| + t_1^2\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 =$$
$$= (t_1\|\mathbf{v}\| - t_2\|\mathbf{u}\|)^2 + 2t_1t_2(\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| - (\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 =$$

$$= (t_1 \|\mathbf{v}\| - t_2 \|\mathbf{u}\|)^2 + (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| - (\mathbf{u}, \mathbf{v}))(2t_1t_2 - \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| - (\mathbf{u}, \mathbf{v})) \geq$$
$$\geq (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| - (\mathbf{u}, \mathbf{v}))(2t_1t_2 - \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| - (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

Пользуясь неравенством КБШ в обоих скобках, получаю:

$$C_2^2 - C_1C_3 \geq 2c(t_1t_2 - \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|),$$

где c - неотрицательная константа. Скобка не меньше нуля, в силу определения множества E. Значит,

$$C_2^2 - C_1C_3 \geq 0, \forall (t_1, \mathbf{u}), (t_2, \mathbf{v}) \in E$$

Как было отмечено выше, это означает неотрицательность второй производной g:

$$g''(\alpha) \geq 0, \forall (t_1, \mathbf{u}), (t_2, \mathbf{v}) \in E$$

Из чего следует, что g выпукла для любых $(t_1, \mathbf{u}), (t_2, \mathbf{v}) \in E$. Тогда по теореме об ограничении на прямую исходная функция $f(t, \mathbf{x})$ тоже выпукла.

3.2.

Область определения p_{ij} есть множество векторов $X \in \mathbb{R}^n$ такое, что для любого вектора весов из этого множества выполняется, что любой цикл G, для которого есть его содержащий путь из i в j, имеет неотрицательный вес. Если не выдвинуть этого условия, то вес кратчайшего пути может быть сколь угодно мал, а, значит, функция не определена. Отметим, что X не пусто, т.к. $\mathbb{R}^n_+ \in X$ (в таком случае функцию можно однозначно вычислить при помощи алгоритма Дейкстры).

Докажу, что функция p_{ij} вогнута.

Далее для вектора $\mathbf{c}$ индекс внизу означает номер вектора, индекс вверху - номер компоненты этого вектора. Так же подразумевается, что α - произвольное число из отрезка $[0, 1]$.

I.Рассмотрим два произвольных вектора $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in X$. Для этого сначала докажу, что X - выпуклое множество. Заметим, что если s_1, s_2 -веса одного и того же пути S(S множество номеров ребер в этом пути) из одной вершины в другую(не обязательно i и j) для векторов $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ соответственно, то вес этого пути для вектора $\alpha\mathbf{c}_1 + (1-\alpha)\mathbf{c}_2$ равен:

$$c(S) = \sum_{i \in S} [\alpha \mathbf{c}_1^i + (1-\alpha)\mathbf{c}_2^i] = \alpha \sum_{i \in S} \mathbf{c}_1^i + (1-\alpha) \sum_{i \in S} \mathbf{c}_2^i = \alpha s_1 + (1-\alpha) s_2$$

Мы можем утверждать, что для любого цикла, для которого есть содержащий его путь из i в j, верно, что его вес для вектора весов $\alpha \mathbf{c}_1 + (1-\alpha)\mathbf{c}_2$ неотрицателен. Действительно, это верно в силу написанного выше неравенства и того, что $\alpha \in [0,1]$ и для $_1, c_2 \in X$ верно $s_1, s_2 \geq 0$ по определению X, где s_1, s_2 - вес этого цикла для веторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$.

II. Введем обозначения: S_1, S_2, S - множества номеров ребер в кратчайшем пути из i в j для векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ и $\alpha \mathbf{c}_1 + (1-\alpha)\mathbf{c}_2$ соответственно. В случае если кратчайших путей несколько, то выбирается любой.

В таких обозначениях, получаем следующие выражения для значений функций на этих векторах:

$$p_{ij}(\mathbf{c}_k) = \sum_{m \in S_k} c_k^m, k = 1, 2$$

$$p_{ij}(\alpha \mathbf{c}_1 + (1-\alpha)\mathbf{c}_2) = \sum_{m \in S} (\alpha \mathbf{c}_1^m + (1-\alpha)\mathbf{c}_2^m) = \alpha \sum_{m \in S} c_1^m + (1-\alpha) \sum_{m \in S} c_2^m$$

По определению кратчайшего пути:

$$\sum_{m \in S_1} c_1^m \leq \sum_{m \in S} c_1^m$$

Из выше написанного следует:

$$p_{ij}(\alpha \mathbf{c}_1 + (1-\alpha)\mathbf{c}_2) \geq \alpha p_{ij}(\mathbf{c}_1) + (1-\alpha) p_{ij}(\mathbf{c}_2)$$

Что и означает то, что функция вогнута. $\square$