Курузов Илья, 678
Задание 8

Задача 1

Найдем условный субдифференциал:

$$\begin{aligned}
\partial_X f(x,y) =& \partial f(x,y) + N((x,y)|X) = \\
&= \begin{cases} (1,0)^\top, \text{if } x > 0 \\ (\alpha,0)^\top, \alpha \in [-1,1], \text{if } x = 0 \end{cases} + \\
&+ \begin{cases} (0,1)^\top, \text{if } y > 0 \\ (0,\alpha)^\top, \alpha \in [-1,1], \text{if } y = 0 \end{cases} + N((x,y)|X) = \\
&= \begin{cases} (1,0)^\top, \text{if } x > 0 \\ (\alpha,0)^\top, \alpha \in [-1,1], \text{if } x = 0 \end{cases} + \\
&+ \begin{cases} (0,1)^\top, \text{if } y > 0 \\ (0,\alpha)^\top, \alpha \in [-1,1], \text{if } y = 0 \end{cases} + \\
&+ \begin{cases} \alpha\mathbf{n}, \alpha > 0, \text{if } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 0, \text{else} \end{cases},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{n} = (x-1, y-1)^\top$ - внешняя нормаль к окружности в точке (x,y). Выше не расматривались случаи $x < 0$ и $y < 0$, т.к. такие точки не удовлетворяют ограничению.

1) На границе. 1.1)$x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} 1 + \alpha(x-1) = 0, \\ 1 + \alpha(y-1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{\alpha}, \\ y = 1 - \frac{1}{\alpha} \end{cases} \tag{3}$$

Найдем α из того условия, что это граница:

$$\frac{2}{\alpha^2} = 1$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

$$(x^*, y^*)^\top = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$$

В силу выпуклости целевой функции и бюджетного множества, можно утверждать, что в точке $(x^*, y^*)^\top = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ достигается минимум, равный $2 - \sqrt{2}$.

Задача 2.

1) Исследуем на выпуклость целевую функцию.

$$H(f) = \left\| \begin{matrix} 2 + e^{x_1+x_2} & -1 + e^{x_1+x_2} \\ -1 + e^{x_1+x_2} & 4 + e^{x_1+x_2} \end{matrix} \right\|$$

$$\Delta_1 = 2 + e^{x_1+x_2} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Delta_2 = (2 + e^{x_1+x_2})(4 + e^{x_1+x_2}) - (-1 + e^{x_1+x_2})^2 = 7 + 7e^{x_1+x_2} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

Значит, целевая функция действительно выпуклая. Значит, любая стационарная точка даст нам минимум.

2)

$$\mathbf{grad} f = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + e^{x_1+x_2} = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + e^{x_1+x_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решение этой системы - $(-0.385, -0.231)$ дает минимум, равный 0.706.

Задача 3

Построим лагранжиан:

$$L(x, y, \lambda, \mu) = (x-3)^2 - (y-2)^2 + \lambda(y - x - 1) + \mu(y + x - 3)$$

Используем теорему Каруша-Куна-Такера:

$$\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ y + x - 3 \le 0, \\ \mu(y + x - 3) = 0, \\ \mu \ge 0, \\ 2(x-3) - \lambda + \mu = 0, \\ -2(y-2) + \lambda + \mu = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1) $\mu = 0$

$$\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ y + x - 3 \leq 0, \\ 2(x-3) - \lambda = 0, \\ -2(y-2) + \lambda = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ -2(y-2) + \lambda = 0; \end{cases} \tag{7}$$

Система не совместна.
2) $\mu > 0$

$$\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ y + x - 3 = 0, \\ \mu \geq 0, \\ 2(x-3) - \lambda + \mu = 0, \\ -2(y-2) + \lambda + \mu = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ x - y - 1 + \mu = 0 y + x - 3 = 0, \\ \mu \geq 0, \\ 2(x-3) - \lambda + \mu = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \mu = 2, \\ y = 2, \\ x = 1 \mu \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

Точка $(1, 2)$ - стационарная точка, а в силу выпуклости задачи, эта точка дает минимум.

$$\boxed{\min_X f(x, y) = f(1, 2) = 4}$$

Задача 4

Перепишем оптимизационную задачу в следующем виде:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3 \tag{11}$$

$$s.t. x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4 \leq 0 \tag{12}$$

$$-(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - 4 \leq 0 \tag{13}$$

Целевая функция и функции, задающие ограничения, дифференцируемы. Применим теорему Каруша-Куна-Такера:

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3 + \mu_1(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4) + \mu_2(-(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - 4)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4 \leq 0 \\ -(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - 4 \leq 0, \\ \mu_1(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4) = 0, \\ \mu_2(-(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - 4) = 0, \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0, \\ 2x_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ 4x_2 - 2\mu_1 + 2\mu_2 = 0, \\ 1 + 3\mu_1 - 3\mu_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

1) $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0.$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4 \leq 0 \\ -(x_1 - 2x_2 + 3x_3) - 4 = 0, \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0, \\ 2x_1 - \mu_2 = 0, \\ 4x_2 + 2\mu_2 = 0, \\ 1 - 3\mu_2 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4 \le 0 \\
x_3 = -\frac{3}{2}, \\
\mu_2 \ge 0, \\
x_1 = \frac{1}{6}, \\
x_2 = -\frac{1}{6}, \\
\mu_2 = \frac{1}{3}.
\end{cases}
\tag{16}
$$

Точка $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{3}{2})^\top$ - решение этой системы. В силу выпуклости задачи, она дает минимум.

$$
\boxed{\min_{\mathbf{x}\in X} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3\Big|_{\mathbf{x}=(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{3}{2})^\top} = -\frac{13}{9}}
$$