Курузов Илья, 678
Задание 2

1.

Далее индекс нормы отброшен, в силу того что используется только $l2$ норма.

I. Рассмотрим две точки x_0 и x_i. Далее отождествляется понятие точки в пространстве и соответствующего ей радиус-вектора. Докажу эквивалентность следующих условий:

$$\|x_0 - x\| \leq \|x_i - x\| \tag{1}$$

$$(x, x_i - x_0) \leq \frac{1}{2}\left(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2\right) \tag{2}$$

Из неотрицательности нормы и неравенства (1) следует:

$$2(x, x_i - x_0) \leq \|x_i\|^2 - \|x_0\|^2$$

Деля обе части на 2, получаю неравенство (2). Из выше написанного следует, что совокупность всех ограничений (1) равносильна следующему условию:

$$Ax \preceq b,$$

где $a_{ij} = [x_i - x_0]_j$, $b_i = \frac{1}{2}\left(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2\right)$. Значит, область Вороного действительно многоугольник.□

II. Докажем обратное. Пусть a_i - i-ая строка матрицы. Выберем точку x_0, удовлетворяющую условию

$$Ax \preceq b \tag{1}$$

$$(a_i, x_0) = b_i - \frac{1}{2}\|a_i\|^2, \forall i = \overline{1, n} \tag{2}$$

и рассмотрим точку $x_i = x_0 + a_i$. Немного о существование x_0, удовлтворяющей условиям (1) и (2). Она существует, если условие 1 не задает пустого множества. Поскольку совокупность условий (2) представима в виде СЛАУ с непротиворечивыми уравнениями(это следует из того, что условие 1 не задает пустого множества), это действительно так.

Теперь докажу эквивалентность следующих неравенств:

$$\|x_0 - x\| \leq \|x_i - x\| \tag{3}$$

$$(x, a_i) \leq b_i \tag{4}$$

Проведя преобразования неравенства (1), получаю аналогичное уравнение:

$$(x, x_i - x_0) \leq \frac{1}{2}\left(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2\right)$$

С учетом следующего равенства(следует из построения x_i)

$$\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2 = 2(a_i, x_0) + \|a_i\|^2,$$

условия (2) для x_0 и принятых обозначений, получаю равенство 4. Значит, любой многоугольник определяет область Вороного. □

III. Обозначим $V(x_0, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x_0 - x\| \leq \|y - x\|, \forall y \in Y\}$, где x_0 - точка из $\mathbb{R}^n$, Y - конечное множество точек из $\mathbb{R}^n$.

Разбиением Вороного для точек из множества $X = \{x_0, x_1 ... x_k\}$ назовем следущее разбиение $\mathbb{R}^n$:

$$S = \{V(x_1, X \backslash x_1) \dots V(x_k, X \backslash x_k)\}.$$

Пусть есть k многоугольник:

$$A_m x \preceq b_m,$$

в совокупности которые образуют разбиение $\mathbb{R}^n$ на многоугольники.

Найдем множество X_j решений системы из следующих уравнений:

$$(a_i^j, x_j) = b_i^j - \frac{1}{2}\left\|a_i^j\right\|^2, \forall i in \overline{1, n},$$

где a_i^j - i-ая строка m-ой матрицы.

И для каждого множества решений X_j найдем соответствующие множества с остальными индексами.

$$\mathcal{X}_j = \cup_{x \in X_j} (x_1 \dots x_k),$$

где

$$x_i = \begin{cases} x + a_i & \text{if } i < j \\ x & \text{if } i = j \\ x + a_{i-1} & \text{if } i > j \end{cases}$$

Таким образом $\mathcal{X}_j$ - всевозможные множества точек задающих область Вороного для x_j, совпадающие с j-ым многоугольником. Это следует из рассуждений представленных во втором пункте и из того, что контрукции без учета сложностей, связанных с нумерацией, в этом пункте и предыдущем одинаковы.

Тогда любой элемент $\cap_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i$ задает такое множество точек, что если построить область Вороного на этих точках для x_i она совпадет с i-ым многоугогольником для всех i. Что собственно и требовалось построить.

IV.

2.

I. Матрица A положительна полуопределена. Пусть x_1, $x_2 \in C$, тогда для того, чтобы множество C было выпукло, необходимо и достаточно, $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C, \forall \theta \in [0,1]$.

$$x^T Ax + b^T x + c =$$

$$\theta(x_1^T Ax_1 + b^T x_1 + c) + (1-\theta)(x_2^T Ax_2 + b^T x_2 + c) + x^T Ax - \theta x_1^T Ax_1 - (1-\theta)x_2^T Ax_2 \leq$$

$$\leq x^T Ax - \theta x_1^T Ax_1 - (1-\theta)x_2^T Ax_2 =$$

$$= -\theta(1-\theta)(x_1^T Ax_1 - x_1^T Ax_2 - x_2^T Ax_1 + x_2^T Ax_2) =$$

$$= -\theta(1-\theta)(x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2)$$

Из положительной полуопределенности матрицы A и отрицательности коэффициента перед ней следует неположительность правой части, а, значит, $x \in C$. На этом доказательство выпуклости множества C можно считать завершенным.$\square$

II.

3.

I. Далее x_1, x_2 - элементы множества A(различных для каждого пункта), $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ в доказательствах на выпуклость и афинность и $x = \theta x_1$ в доказательстве на конусность. Когда идет доказательство на выпуклость $\theta \in [0,1]$, на афинность - $\theta \in \mathbb{R}$, на конусность - $\theta \geq 0$.

1) $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha \leq a^T x \leq \beta\}$

Данное множество выпукло, не афинное(при $\alpha \neq \beta$), не конус(при $\alpha \neq \beta$). Если $\alpha = \beta$, то множество A - гиперплоскость, а в курсе доказано, что она выпукла, афинна и является конусом.

Выпуклость:

$$a^T x = \theta a^T x_1 + (1-\theta) a^T x_2 x$$

$$a^T x \geq \theta\alpha + (1-\theta)\alpha = \alpha$$

$$a^T x \leq \theta\beta + (1-\theta)\beta = \beta$$

$$x \in A$$

Далее идут рассуждения, в предположении что A не пусто.

Афинность:

Пусть x_1 - точка из плоскости $a^T x = \beta$, x_2 - точка из плоскости $a^T x = \alpha$, $\theta = 2$

$$x = 2x_1 - x_2$$

$$a^T x = 2\beta - \alpha > \beta$$

$$x \notin A$$

Конус:

Пусть x_1 - точка из плоскости $a^T x = \beta$, $\theta = 2$.

$$x = 2x_1$$

$$a^T x = 2\beta > \beta$$

$$x \notin A$$

2) $A = \{x \in \mathbb{R}^n | a_1^T x \leq b_1,\, a_2^T x \leq b_2\}$

Выпуклость:

Множество выпукло.

$$a_1^T x = \theta a_1^T x_1 + (1-\theta) a_1^T x_2 x \leq b_1$$
$$a_2^T x = \theta a_2^T x_1 + (1-\theta) a_2^T x_2 x \leq b_2$$
$$x \in A$$

Афинность:

Множество не афинно, если не задает гиперплоскость, т. е. если не выполнены одновременно условия $a_1 = -ka_2$ и $b_1 = -kb_2$, $k > 0$.

Пусть x_1 - точка из пересечения плоскостей $a_i^T x = b_i$, $i = 1, 2$ со множеством A(пересечение не пусто, следует из того, что граница пересечения принадлежит объединению границ пересекаемых множеств и непустоты A), x_2 - произвольная точка из внутренности A. Без ограниений общности, будем считать, что $x_1 \in \{x | a_1^T x = b_1\}$. $\theta_1 = 2$.

$$x = 2x_1 - x_2$$

$$a_1^T x = 2b_1 - q, q < b_1$$
$$a_1^T x > b_1$$
$$x \notin A$$

Конус:

Множество не конус, если $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. Рассмотрим все $x_0 \in A$, для которого $a_1^T x_0 > 0$ или $a_2^T x_0 > 0$. И

Пусть выше описанный x_0 существует. x_1 - точка, описанная выше. Без ограниений общности, будем считать, что $x_1 \in \{x | a_1^T x > 0\}$. $\theta_1 = \max(1, \frac{2b_1}{a_1^T x})$.

$$x = \theta_1 x_1$$
$$a_1^T x = \max(a_1^T x_1, 2b_1) > b_1, q < b_1$$
$$x \notin A$$

Условия $a_1^T x_0 > 0$ или $a_2^T x_0 > 0$ не выполнены, а, значит, $b_i \leq 0$, $i = 1, 2$.

Если выше описанный x_0 не существует, докажу, что множество не конус. Пусть x_1 - точка из пересечения плоскостей $a_i^T x = b_i$, $i = 1, 2$, $b_i < 0$

со множеством A(пересечение не пусто, следует из того, что граница пересечения принадлежит объединению границ пересекаемых множеств и непустоты A), будем считать, что $x_1 \in \{x | a_1^T x = b_1\}$. $\theta_1 = \frac{1}{2}$).

$$a_1^T x = \frac{1}{2} a_1^T x_1 = \frac{1}{2} b_1 > b_1$$

$$x \notin A$$

Если $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, то множество конус, причем выпуклый.

$$a_1^T x = \theta_1 a_1^T x_1 + \theta_2 a_1^T x_2 \leq 0$$
$$a_2^T x = \theta_1 a_2^T x_1 + \theta_2 a_2^T x_2 \leq 0$$
$$x \in A$$

3)

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | \left\| x - x_0 \right\|_2 \leq \left\| x - y \right\|_2, \forall y \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

Выпуклость:

Множество выпукло.

$$\left\| x - x_0 \right\| \leq \theta \left\| x_1 - x_0 \right\| + (1 - \theta) \left\| x_2 - x_0 \right\| \leq \left\| x - y \right\|$$
$$x \in A$$

Афинность:

Множество не афинно, нет такого $y \in S$, что $x_0 = y$. Иначе $A = \{x_0\}$ и это множество очевидно афинно.

Пусть $y = \underset{S}{\operatorname{argmin}} \left\| y - x_0 \right\|$(предполагается, что S не пусто, иначе множество A не определено).

Пусть $x_1 = x_0$, $x_2 = \frac{y + x_0}{2}$(принадлежность этих точек проверяется тривиальной подстановкой), $\theta = -\frac{1}{3}$.

$$x = \frac{2y + x_0}{3}$$

$$\left\| x - x_0 \right\| = \frac{2}{3} \left\| y - x_0 \right\| > \frac{1}{3} \left\| y - x_0 \right\| = \left\| y - x \right\|$$

$$x \notin A$$

Конус:

Множество может быть как конусом, так и не конусом.

Пример конуса: $n = 2$, $x_0 = (0, -1)$, $S = (0, 1)$. Тогда множество A - полуплоскость под прямой $y = 0$. Если взять произвольные $x_1 \in A, \theta \geq 0$, то получим, что координата по y остается отрицательной, а, значит, $\theta x_1 \in A$.

Пример не конуса: $n = 2$, $x_0 = (0, 0)$, $S = (0, 2)$. Тогда множество A - полуплоскость под прямой $y = 1$. Если взять $x_1 = (0, 1), \theta = 2$, то получим $\theta x_1 \notin A$.

4) Далее θ из условия переобозначена, как α во избежание путаницы.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | \left\| x - a \right\|_2 \leq \alpha \left\| x - b \right\|_2\}$$

Выпуклость:

Множество выпукло.

$$\left\| x - a \right\| \leq \theta \left\| x_1 - a \right\| + (1 - \theta) \left\| x_2 - a \right\| \leq \alpha \left\| x - b \right\|$$
$$x \in A$$

Афинность:

Множество не афинно.

Пусть $x_1 = a$, x_2 - произвольная точка из множества точек, удовлетворяющих условию $\left\| x - a \right\|_2 = \alpha \left\| x - b \right\|_2$, $\theta = 2$.

$$x = 2x_2 - x_1$$

$$\left\| x - a \right\| = 2 \left\| x_2 - a \right\| = 2\alpha \left\| x - b \right\| > \alpha \left\| x - b \right\|$$
$$x \notin A$$

Конус:

Множество может быть как конусом, так и не конусом.

Пример конуса: $n = 2$, $a = (0, -1)$, $b = (0, 1), \alpha = 1$. Тогда множество A - полуплоскость под прямой $y = 0$. Если взять произвольные $x_1 \in A, \theta \geq 0$, то получим, что координата по y остается отрицательной, а, значит, $\theta x_1 \in A$.

Пример не конуса: $n = 2$, $a = (0, 0)$, $b = (0, 2), \alpha = 1$. Тогда множество A - полуплоскость под прямой $y = 1$. Если взять $x_1 = (0, 1), \theta = 2$, то получим $\theta x_1 \notin A$.

II. Докажу, что пересечение любого (конечного или бесконечного) числа выпуклых конусов является выпуклым конусом.

Пусть $\mathcal{F}$ - семейство выпуклых конусов. Пусть $C = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$. Докажем, что - выпуклый конус.

Пусть $x_1, x_2 \in C$. Значит, $x_1, x_2 \in X, \forall X \in \mathcal{F}$. Поскольку любой $X \in \mathcal{F}$ - выпуклый конус, то

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in X, \forall X \in \mathcal{F}, \theta_1, \theta_2 \geq 0.$$

Значит,

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in X, \forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0.$$

Что и означает, что C - выпуклый конус.$\square$

Докажу, что пересечение любого (конечного или бесконечного) числа аффинных множеств является аффинным множеством.

Пусть $\mathcal{F}$ - семейство аффинных множеств. Пусть $= \cap_{X \in \mathcal{F}} X$. Докажем, что - аффинное множество.

Пусть $x_1, x_2 \in A$. Значит, $x_1, x_2 \in X, \forall X \in \mathcal{F}$. Поскольку любой $X \in \mathcal{F}$ - аффинное множество, то

$$\theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in X, \forall X \in \mathcal{F}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Значит,

$$\theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in X, \forall x_1, x_2 \in A, \theta \in \mathbb{R}.$$

Что и означает, что A - аффинное множество.$\square$