Курузов Илья, 678
Задание 5

Задача 1.

Множество G есть объединение двух полуплоскостей $x_1 = x_2, x_1 > 0$ и $x_1 = -x_2, x_1 > 0$. Из чего становится очевидным, что $\operatorname{aff} G = \mathbb{R}^3$. Значит,

$$\operatorname{relint} G = \operatorname{int} G = \emptyset$$

$$\boxed{\operatorname{relint} G = \emptyset}$$

Задача 2.

Утверждаю, что плоскость $x_n = 1$ и есть искомая. Докажу это.

1) Для точек множества X_1

$$x_n \leq \sqrt{\|\mathbf{x}\|_2^2} \leq 1$$

$$x_n \leq 1$$

2) Для точек множества X_2:

$$x_n \geq 1 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_1^2 \geq 1$$

$$x_n \geq 1$$

Значит, $x_n = 1$ - разделяющая гиперплоскость для X_1 и X_2 по определению.

Задача 3.

1)

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = e^{x_0}$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = 2$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = \cos(z_0)$$

Функция F всюду дифференцируема, значит, уравнение гиперплоскости для любой т. (x_0, y_0, z_0):

$$C = F(\mathbf{x}_0) + (F', \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$C(x, y, z) = e^{x_0}(x - x_0 + 1) + 2y + (z - z_0)\cos(z_0) + \sin(z_0)$$

2)

$$F_x(x, y, z) = \frac{1}{5}(x + y)^{-\frac{4}{5}} e^z \sin 100x + 100\sqrt[5]{x + y}e^z \cos 100x$$

$$F_y(x, y, z) = \frac{1}{5}(x + y)^{-\frac{4}{5}} e^z \sin 100x$$

$$F_z(x, y, z) = \sqrt[5]{x + y}e^z \sin 100x$$

Функция F всюду дифференцируема кроме точек $x + y \leq 0$, значит, уравнение гиперплоскости для любой т. $(x_0, y_0, z_0)|x_0 + y_0 > 0$:

$$C = F(\mathbf{x}_0) + (F'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$C(x, y, z) = \sqrt[5]{x_0 + y_0}e^{z_0} \sin 100x_0 +$$

$$+ \left(\frac{1}{5}(x_0 + y_0)^{-\frac{4}{5}} e^{z_0} \sin 100x_0 + 100\sqrt[5]{x_0 + y_0}e^{z_0} \cos 100x_0\right)(x - x_0) +$$

$$+ \frac{1}{5}(x_0 + y_0)^{-\frac{4}{5}} e^{z_0} \sin 100x_0 (y - y_0) + \sqrt[5]{x_0 + y_0}e^{z_0} \sin 100x_0 (z - z_0)$$

$$C(x, y, z) = \sqrt[5]{x_0 + y_0}e^{z_0} \sin 100x_0 (1 + \left(\frac{1}{5(x_0 + y_0)} + 100 \operatorname{tg} 100x_0\right)(x - x_0) +$$

$$+ \frac{1}{5(x_0 + y_0)}(y - y_0) + (z - z_0))$$

3)

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = |y_0 z_0| \operatorname{sign}(x_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = |x_0 z_0| \operatorname{sign}(y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = |y_0 x_0| \operatorname{sign}(z_0)$$

Функция F дифференцируема во всех точках, в которых выполнено $x_0, y_0, z_0 \neq 0$. Уравнение касательной гиперплоскости:

$$C(x, y, z) = |x_0 y_0 z_0| \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0} + \frac{y - y_0}{y_0} + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$$

Задача 4.

Утверждаю, что касательная в точке x_0 гиперплоскость для поверхности, заданной неявно уравнением $g(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{8} - 1 = 0$, и есть опорная. Докажем это.

1) Сначала построим эту гиперплоскость. Градиент функции g:

$$g_x(\mathbf{x}_0) = \frac{x_1}{2} = -\frac{3}{5};$$

$$g_y(\mathbf{x}_0) = \frac{x_2}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

$$g_z(\mathbf{x}_0) = \frac{x_3}{4} = 0.$$

Уравнение касательной гиперплоскости:

$$0 = -\frac{3}{5}\left(x_1 + \frac{6}{5}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right);$$

$$-3x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 8;$$

$$3x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = -8.$$

2) Теперь непосредственно докажем, что построенная гиперплоскость является опорной для заданного множества X. Для этого найдем минимум функции $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2\sqrt{2}x_2 + 8$ при условии $g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{8} - 1 = a, a \leq 0$. Воспользуемся методом Лагранжа:

$$L = 3x_1 - 2\sqrt{2}x_2 + 8 + \lambda\left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{8} - 1 - a\right);$$

$$\begin{cases} 3+\lambda\frac{x_1}{2}=0, \\ -2\sqrt{2}+\lambda\frac{x_2}{4}=0, \\ \lambda\frac{x_3}{4}=0, \\ \frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{8}+\frac{x_3^2}{8}-1-a=0; \end{cases}$$

Стационарные точки:

$$\begin{cases} \lambda=\pm\frac{\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_1=\mp\frac{6\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_2=\pm 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_3=0. \end{cases}$$

Второй дифференциал лагранжиана для определения характера экстремума:

$$d^2L=\lambda\left(\frac{(dx_1)^2}{2}+\frac{(dx_2)^2}{4}+\frac{(dx_3)^2}{4}\right).$$

Лагранжиан является положительно определенной квадратичной формой при $\lambda>0$ и отрицательно определенной при $\lambda>0$. Из данного факта, следует, что минимум достигается, если:

$$\begin{cases} \lambda=\frac{\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_1=-\frac{6\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_2=8\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+a}}{5}, \\ x_3=0. \end{cases}$$

Значение функции F в этой точке:

$$\sqrt{1+a}\left(\frac{-18}{5}-\frac{32}{5}\right)=-8\sqrt{1+a}\geq -8$$

Заметим, что минимум по a достигается при $a=0$, т.е. минимум функции F на этом множестве равен -8 и достигается в единственной точке $\mathbf{x}_0$ из условия.

Значит, для любой точки из X

$$3x_1-2\sqrt{2}x_2\geq -8,$$

что и значит, что построенная гиперплоскость является опорной.

Опорная гиперплоскость:

$$\boxed{H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = -8\}}$$

Утверждение $H \cap X = \mathbf{x}_0$ следует из того, что, во-первых, $H = \{\mathbf{x}|F(\mathbf{x}) = -8\}$, во-вторых, минимум функции F достигается в единственной точке $\mathbf{x}_0$ и, в-третьих, этот минимум равен -8.