Курузов Илья, 678
Задание 6

Задача 1.

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^{n} g(x_j)$$

$$g(\mathbf{x}) = |x_j|$$

$$\partial g(\mathbf{x}) = \begin{cases} -e_j, \text{if } x < 0 \\ [-1,1]e_j, \text{if } x = 0 \\ e_j, \text{if } x > 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где e_j - j-ый базисный вектор.

$$\partial \|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^{n} \partial g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \begin{cases} -e_j, \text{if } x_j < 0 \\ [-1,1]e_j, \text{if } x_j = 0 \\ e_j, \text{if } x_j > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Задача 2.

$$f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \max\left(0, 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i)\right) \quad (3)$$

Найдем субградиент для выражения под суммой:

$$\partial \max\left(0, 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i)\right) =$$
$$= \begin{cases} \partial 0, \text{if } 0 > 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ \partial\left(1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i)\right), \text{if } 0 < 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ \operatorname{conv}\left(0, \partial(1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i))\right), \text{if } 0 = 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \end{cases} \quad (4)$$

$$\partial \max\left(0, 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i)\right) =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{if } 0 > 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ -y_i\mathbf{x}_i, \text{if } 0 < 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ \operatorname{conv}\left(0, -y_i\mathbf{x}_i\right), \text{if } 0 = 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}\partial \left\| \mathbf{w} \right\|_2^2 = \mathbf{w} \tag{6}$$

Конечное выражение для субдифференциала

$$\boxed{\partial f(x) = \mathbf{w} + \sum_{j=1}^{m} \begin{cases} \mathbf{0}, \text{if } 0 > 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ -y_i\mathbf{x}_i, \text{if } 0 < 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \\ -y_i\alpha\mathbf{x}_i, \alpha \in [0,1], \text{if } 0 = 1 - y_i((\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + b_i) \end{cases}} \tag{7}$$

Задача 3.

$$f(x) == \begin{cases} 0, \text{if } x \in [-1, 1] \\ |x| - 1, \text{if } x \in [-2, -1) \cup (1, 2] \\ -\infty, \text{else} \end{cases} \tag{8}$$

Найдем субдифференциал функции на интервале (-2, 2):

$$\partial_{(-2,2)} f(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \in (1, 2) \\ \text{conv}\left(0, 1\right), \text{if } x = 1 \\ 0, \text{if } x \in (-1, 1) \\ \text{conv}\left(0, -1\right), \text{if } x = -1 \\ -1, \text{if } x \in (-2, -1) \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $X = [-2, 2]$, тогда искомый субдифференциал на X:

$$\partial_X f(x) = \partial_{(-2,2)} f(x) + N(x|X) \tag{10}$$

$$\partial N(x|X) = \begin{cases} a, a \geq 0, \text{if } x = -2 \\ 0, \text{if } x \in (-\infty, \infty) \backslash \{-2, 2\} \\ a, a \leq 0, \text{if } x = 2 \end{cases} \tag{11}$$

$$\boxed{\partial_X f(x) = \begin{cases} a, a \leq 0, \text{if } x = 21, \text{if } x \in (1,2) \\ \alpha, \alpha \in [0,1], \text{if } x = 1 \\ 0, \text{if } x \in (-\infty, -2) \cap (-1, 1) \cap (2, \infty) \\ \alpha, \alpha \in [-1, 0], \text{if } x = -1 \\ -1, \text{if } x \in (-2, -1) \\ a, a \geq 0, \text{if } x = -2 \end{cases}} \tag{12}$$

Задача 4.

$$\partial_X f(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x}) + \partial\delta(x|X) = \partial f(\mathbf{x}) + N(x|X) \tag{13}$$

Найдем $\partial f(\mathbf{x})$:

$$\partial f(\mathbf{x}) = \partial|x_1 - x_2| + \partial|x_1 + x_2| =$$
$$= \begin{cases} (1,-1)^\top, x_1 > x_2 \\ \text{conv}\{(1,-1)^\top, (-1,1)^\top\}, x_1 = x_2 \\ (-1,1)^\top, x_1 < x_2 \end{cases} + \begin{cases} (1,1)^\top, x_1 + x_2 > 0 \\ \text{conv}\{(1,1)^\top, (-1,-1)^\top\}, x_1 = x_2 \\ (-1,-1)^\top, x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \tag{14}$$

Нормальный конус:

$$N(x|X) = \begin{cases} \{a\mathbf{x}|a > 0\}, \|\mathbf{x}\| = 2 \\ \mathbf{0}, else \end{cases} \tag{15}$$

Окончательный ответ:

$$\partial_X f(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1,-1)^\top, x_1 > x_2 \\ \text{conv}\{(1,-1)^\top, (-1,1)^\top\}, x_1 = x_2 \\ (-1,1)^\top, x_1 < x_2 \end{cases} + \begin{cases} (1,1)^\top, x_1 + x_2 > 0 \\ \text{conv}\{(1,1)^\top, (-1,-1)^\top\}, x_1 = -x_2 \\ (-1,-1)^\top, x_1 + x_2 < 0 \end{cases} + \begin{cases} \{a\mathbf{x}|a > 0\}, \|\mathbf{x}\| = 2 \\ \mathbf{0}, else \end{cases} \tag{16}$$