Курузов Илья
Задание 2

Задача 1.

Пусть B - событие, что за второй дверью коза, A - событие, заключающееся в том, что за первой дверью авто. Требуется авто $\mathbb{P}(A|B)$.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Множество элементарных исходов $\Omega =$(A, K, K), (K, A, K), (K, K, A). $B =$(A, K, K), (K, K, A).$A =$(A, K, K).

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}}$$

Задача 2.

Пусть π_n - вероятность того, что число орлов после n независимых подбрасываний будет четно.

Событие того, что число орлов после $n+1$ независимых подбрасываний будет четно, равно сумме событий: в предыдущих n орлов четно и выпала решка или наоборот. Реккурентная формула:

$$\pi_{n+1} = (1-p)\pi_n + p(1-\pi_n)$$

$$\pi_{n+1} = (1-2p)\pi_n + p$$

Линейная реккурента

$$\pi_{n+1} - (1-2p)\pi_n = p$$

Характеристическое уравнение:

$$q - (1-2p) = 0$$

$$q = 1 - 2p$$

$$\pi_n^0 = C(1-2p)^n$$

Найдем общее решение в виде $\pi_n = \pi_n^0 + z$, где z - неизвестная однородность:

$$z - (1-2p)z = p$$

$$z = \frac{1}{2}$$

Исходя из того, что $\pi_1 = 1$(выпала решка- выпало четное количество орлов), определяем константу C.

$$\boxed{\pi_n = (1-2p)^n + \frac{1}{2}}$$

Задача 4.

1. Пусть B_i - событие того, что выбрана i-ая урна. Тогда совокупность всех таких событий образует разбиение множества элементарных исходов. Пусть A - событие того, что были достаны k белых шаров и после этого 1 черный.

Пусть $w_i = \frac{i}{m}$, $b_i = \frac{m-i}{m}$ - вероятности того, что из i-ой урны достан белый или черный шар соответственно. Найдем $\mathbb{P}(A|B_i)$.

$$\mathbb{P}(A|B_i) = w_i^k b_i$$

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{m+1}$$

Формула полной вероятности:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} w_i^k b_i$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \frac{1}{m^{k+1}} \sum_{i=1}^{m-1} i^k (m-i)}$$

2. Сделаем небольшое преобразование полученной формулы:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \frac{1}{m^{k+1}} \sum_{i=1}^{m-1} i^k (m-i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \frac{1}{m^{k+1}} \left(m \sum_{i=0}^{m} i^k - \sum_{i=0}^{m} i^{k+1} \right)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{i}{m} \right)^k - \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{i}{m} \right)^{k+1} \right)$$

Пользуясь тем фактом, что $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + O(n^p)$, получаю:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{m+1} \left(\frac{m}{k+1} - \frac{m}{k+2} + O\left(\frac{1}{m} \right) \right)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} + O\left(\frac{1}{m^2} \right) \right)$$

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} \mathbb{P}(A) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

Задача 5.

I. Интересующая нас вероятность $p = \mathbb{P}(\overline{\cup_{i=1}^{n} A_i}) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$. Как было доказано в курсе, множество дополненений независимых в совокупности событий независимо в совокупности.

$$\boxed{p = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)}$$

II. Из формулы Тейлора для $e^(-x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что

$$1 - p \leq \exp(-p)$$

Из этого, результата первого пункта и свойств экспоненты получаем

$$\boxed{p \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)}$$