Курузов Илья
Задание 4

Задача 1.

1)

$$F_{\min}(x) = \mathbb{P}(\min\{X_1 \dots X_n\} < x)$$

Условие $\min\{X_1 \dots X_n\} < x$ равносильно условию $\exists i : X_i < x$. Пользуясь этим фактом и формулой включений-исключений получаем:

$$F_{\min}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{m_1 \neq \dots \neq m_j} \left(\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{j} \{X_{m_i} < x\})\right)$$

В силу независимости в совокупности:

$$F_{\min}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{m_1 \neq \dots \neq m_j} \left(\prod_{i=1}^{j} \mathbb{P}(X_{m_i} < x)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{m_1 \neq \dots \neq m_j} \left(\prod_{i=1}^{j} F_{X_{m_i}}(x)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \prod_{i=1}^{j} (F_{X_i}(x))^{C_n^j}$$

Из этого получаем выражение для искомого распределния:

$$\boxed{F_{\min}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \prod\limits_{i=1}^{j} \left(1 - e^{-\lambda_i x}\right)^{C_n^j} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}}$$

2)
Функция распределения:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n < x) =$$

$$= \int \cdots \int_X \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $X = \{(X_1 \ldots X_n) | X_1 + \cdots + X_n < x\}$.

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \lambda^n \int\limits_{\{\mathbf{x} | \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < x, x_i > 0\}} \cdots \int e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^i x_i} dx_1 \ldots dx_n & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}}$$

Задача 2.

1)

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 =$$
$$= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) =$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}X)^2 =$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

2)

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x\, dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} (\lambda e^{-\lambda x}) x\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Найдем дисперсию. Функция распределения для X^2 есть $F_X(\sqrt{x}), \forall x \geq 0$ и 0 иначе. Плотность распределения - $\frac{f_x(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, x \geq 0$ и 0 иначе.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(x) x\, dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} (\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\sqrt{x}})\sqrt{x}\, dx =$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t})\, dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

3)

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) x\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) t\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,d(t^2) = 0$$

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f_X(\sqrt(x))\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{x}-m)^2}{2\sigma^2}\right)\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) x^2\,dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{m^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) t\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) t^2\,dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) t^2\,dt =$$

$$= \sigma^2$$

Задача 3.

1)

$$\operatorname*{argmin}_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2 =$$

$$\operatorname*{argmin}_{a\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2$$

Выше написанная функция всюду дифференцируема. Используя первую производную, определяем, что $a = \mathbb{E}X$ - точка минимума, причем в этой точке функция принимает конечное значение в силу конечности дисперсии. Значит, полученная точка действительно минимизирует функционал.

$$\boxed{a = \mathbb{E}X}$$

2)

I. Пусть Y - абсолютно непрерывная с.в.. F, f - ее функция и плотность распределения. В этих обозначениях перепишем минимизируемый функционал:

$$\Phi(b) = \mathbb{E}|Y - b| =$$
$$= \int_{-\infty}^{b} (b - y) f(y)\, dy + \int_{b}^{+\infty} (y - b) f(y)\, dy =$$
$$= 2bF(b) - b - 2\int_{-\infty}^{b} y f(y)\, dy + \mathbb{E}(y)$$

Если подынтегральная функция непрерывна и $F(b)$ дифференцируема, то потому мы можем найти производную по b:

$$\Phi'(b) = 2F(b) - 1$$

Значит, наш функционал имеет минимум при $b \in F^{-1}(b)$, т.е. когда b -медиана. Высказанные требования выполняются, в силу того, что Y - абсолютно непрерывная случайная величина.

II. Теперь рассмотрим случай, когда Y - дикретная случайная величина. Тогда пусть $S = \{y | p(y) := \mathbb{P}(Y = y) \neq 0\}$. В этих обозначениях минимизируемый функционал запишется, как

$$\Phi(b) = \sum_{y \in S} |y - b| p(y)$$

Или введя обозначения $S_+ = \{y | y \in S \& y - b > 0\}$ и $S_- = \{y | y \in S \& y - b < 0\}$, получаем:

$$\Phi(b) = \sum_{y \in S_+} (y - b) p(y) - \sum_{y \in S_-} (y - b) p(y)$$

Из геометрических соображений становится очевидно, что минимум достигается на каком-то изломе функции Φ, т.е. существует $b \in S$, такое что Φ имеет минимум в этой точке. Непосредственно между этой точкой и ближайшей к ней слева точкой из S функция Φ есть прямая с отрицательным коэффициентом наклона, а справа от этого b уже с неотрицательным. Тогда наше искомое b есть

$$b = \sup \left\{ b | \sum_{y \in S_+} p(y) - \sum_{y \in S_-} p(y) \leq 0 \right\}$$

Далее вводя обозначения

$$\mathbb{P}(Y = b) = p(b)$$

,

$$u_+ := \mathbb{P}(Y \geq b) = \sum_{y \in S_+} p(y) + p(b)$$

и

$$u_- := \mathbb{P}(Y \leq b) = \sum_{y \in S_-} p(y) + p(b)$$

получаю:

$$b = \sup \{ b | (u_+ - p(b)) - u_- \leq 0 \}$$

Исходя из того, что слева от точки b коэффициент наклона неотрицателен, выпишем еще одно неравенство:

$$(u_+ + p(b)) - u_- \geq 0$$

$$\begin{cases} u_+ - u_- - p(b) \leq 0 \\ u_+ - u_- + p(b) \geq 0 \end{cases}$$

Пользуясь тем, что $u_+ + u_- - p(b) = 1$, получаю:

$$u_+, u_- \geq \frac{1}{2}$$

Что и означает, что Φ имеет минимум, когда b - медиана.

На этом можно считать доказанным то, что b минимизирует $\mathbb{E}|Y - b|$ для абсолютно непрерывных и дискретных случайных величин.