Курузов Илья
Задание 5

Задача 1.

Пусть $\mathbb{I}_i^{test}$ и $\mathbb{I}_i^{stand}$- случайные величины, равные 1, если i-ый товар был отправлен на проверку или был стандартным соответственно, и равные нулю иначе. Пусть N - количество бракованных изделий.

Интересующая нас вероятность:

$$P := \mathbb{P}(N = k | I_i^{test} \to I_i^{stand} = 1, \forall i) =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_k \in \overline{1,n}, i_1 \neq \dots i_n} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{i_j}^{stand} = 0, \forall j \in \overline{1,k} | I_i^{test} \to I_i^{stand} = 1, \forall i) \cdot$$

$$\cdot \mathbb{P}(\mathbb{I}_m^{stand} = 1, \forall m \neq i_j, j \in \overline{1,k} | I_i^{test} \to I_i^{stand} = 1, \forall i)$$

Теперь плавно и постепенно найдем значение выше написанной вероятности.

$$\mathbb{P}(\mathbb{I}_{i_j}^{stand} = 0, \forall j \in \overline{1,k} | I_i^{test} \to I_i^{stand} = 1, \forall i) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{i_j}^{stand} = 0) \mathbb{P}(\mathbb{I}_{i_j}^{test} = 0) =$$

$$= \left((1-p)(1-q)\right)^k$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{I}_m^{stand} = 1, \forall m \neq i_j, j \in \overline{1,k} | I_i^{test} \to I_i^{stand} = 1, \forall i) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{i_j}^{stand} = 1) =$$

$$= p^k$$

Всего наборов $\{i_1 \dots i_k \in \overline{1,n}, i_1 \neq \dots i_n\}$ - C_n^k.

Искомая вероятность

$$\boxed{P = C_n^k \left(p(1-p)(1-q)\right)^k}$$

Задача 2.

Наибольшее значение p равно $\frac{2}{3}$.

1) Докажу его максимальность от противного. Допустим, что существуют такие множества A, B, C, удовлетворяющие условию задачи, причем для них $p > \frac{2}{3}$

Формула включений исключений:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3p - (\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C \cup B) + \mathbb{P}(A \cup C)) + \mathbb{P}(A \cup B \cup C) =$$

$$= 3p - (\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C \cup B) + \mathbb{P}(A \cup C)) \geq$$

$$\geq 3p - ((1 - \mathbb{P}(C)) + (1 - \mathbb{P}(A)) + (1 - \mathbb{P}(B))) =$$

$$= 6p - 1 > 1$$

Но с другой стороны

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \geq \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

. Противоречие, и, значит, наибольшее значение p равно $\frac{2}{3}$.

2) Покажу, что наибольшее значение достигается.

Воспользуемся классическим определением вероятности. Множество элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Задача 3.

Распределение для Y

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(X^2 < x) = \mathbb{P}(X < \sqrt{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 1, \\ \sqrt{x} & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 1, \\ \sqrt{x} & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}}$$

Задача 4.

$$\mathbb{P}(Y=m)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i=m|N=n\right)\mathbb{P}(N=n)= \;=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=m\right)\mathbb{P}(N=n)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=m\right)=\begin{cases}C_n^m p^m(1-p)^{n-m} & \text{if } m\le n,\\ 0 & \text{if } else\end{cases}$$

$$\mathbb{P}(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

С учетом выше написанного, получаю выражение для распределения:

$$\mathbb{P}(Y=m)=\sum_{n=m}^{+\infty}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=$$
$$=e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^m\sum_{n=m}^{+\infty}C_n^m(1-p)^n\frac{\lambda^n}{n!}=$$
$$=e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^m\frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{+\infty}(1-p)^n\frac{\lambda^n}{(n-m)!}=$$
$$=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^m}{m!}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\frac{\lambda^n}{n!}=$$
$$=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-p\lambda}$$

Распределение для Y:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbb{P}(Y=m)=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-p\lambda}\\ Y\sim Po(p\lambda)\end{gathered}}$$

Задача 6.

Пусть $\mathbb{I}_{a,b,c}$ -случайная величина, которая равна 1, если a,b,c образуют треугольник в графе G и 0 иначе.

$$\mathbb{P}(\mathbb{I}_{a,b,c} = 1) = p^3$$

Тогда искомое матожидание N равно:

$$N = \mathbb{E}\left[\sum_{a,b,c \in G} \mathbb{I}_{a,b,c}\right] =$$

$$= \sum_{a,b,c \in G} \mathbb{E}\mathbb{I}_{a,b,c} = C_n^3 p^3$$

$$\boxed{N = p^3 C_n^3}$$