Курузов Илья
Задание 3

Задача 1.

1)

$$F_{\max}(x) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} < x)$$
$$F_{\min}(x) = \mathbb{P}(\min\{X, Y\} < x)$$

Каждое из условий $\max\{X, Y\} < x$ и $\max\{X, Y\} < x$ равносильно условию $X < x, Y < x$.

Из независимости случайных величин:

$$F_{\max}(x) = F_{\min}(x) = \mathbb{P}(X < x, Y < y) = F_X(x)F_Y(y)$$

2)
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(F_X(X(\omega)) < x)$$

Для написания аналитического выражения для распределения Y требуется уточнение конструкции множества элементарных исходов.

3) Исходя из монотонности F:

$$F^{-1}(y) < z \Leftrightarrow F(F^{-1}(y)) < F(z)$$

Далее найдем распределение:

$$F_{new}(x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\xi) < x) = \mathbb{P}(F(F^{-1}(\xi)) < F(x))$$

Для всех ξ, для которых F в точке $F^{-1}(\xi)$ непрерывно, выполнено, что $F(F^{-1}(\xi)) = \xi$. Множество точек разрывов имеет меру нуль(следует из монотонности функции). Значит, если переопределить в этих точках сложную фунцию $F(F^{-1}(\xi)) := \xi$, то значение вероятности не изменится.

$$F_{new}(x) = \mathbb{P}(\xi < F(x)) = F_\xi(F(x)) = F(x)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2.

Обозначим случайную величину, распределение которой мы ищем, как X. Это дискретная случайная величина(она может принимать только значения из $\mathbb{Z}_+$, которых счетно). Найдем вероятность $\mathbb{P}(X = k)$.

Пусть N - количество экспирементов. Формула полной вероятности:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(N = j + r)$$

Для вычисления этих вероятностей вероятности будем пользоваться классическим определением.

$$\mathbb{P}(N = j) = \frac{C_j^r}{2^j}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{k+r}^r}{2^{k+r}}$$

Распределение случайной величины:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{k+r}^r}{2^{k+r}}}$$

Задача 3.

1. Найдем вероятность $\mathbb{P}(Z = k)$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j)$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{j!(k-j)!} \exp(-(\lambda + \mu)) =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j \mu^{k-j} \right) e^{-(\lambda+\mu)} =$$

$$= \frac{(\mu + \lambda)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

Распределение:

$$\boxed{\mathbb{P}(Z=k)=\frac{(\mu+\lambda)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}}$$

2.

$$\mathbb{P}(X=k|Z=s)=\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Z=s\})}{\mathbb{P}(Z=s)}=\frac{\mathbb{P}(Z=s|X=k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Z=s)}$$

Если $k\le s$:

$$\mathbb{P}(Z=s|X=k)=\frac{\lambda^k\mu^{s-k}}{k!(s-k)!}\exp(-(\lambda+\mu)),$$

иначе эта вероятность равна нулю.

$$\mathbb{P}(X=k|Z=s)=\frac{\lambda^k\mu^{s-k}}{k!(s-k)!}e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\left(\frac{(\mu+\lambda)^s}{s!}e^{-(\lambda+\mu)}\right)^{-1}$$

$$\mathbb{P}(X=k|Z=s)=\frac{C_s^k}{k!}\frac{\lambda^k\mu^{s-k}}{(\lambda+\mu)^s}e^{-\lambda}$$

Окончательное выражение для распределения:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k|Z=s)=\begin{cases}\frac{C_s^k}{k!}\frac{\lambda^k\mu^{s-k}}{(\lambda+\mu)^s}e^{-\lambda}, & \text{if } k\le s\\ 0 & \text{if } k>s\end{cases}}$$