

# Методы оптимизации

## Лекция 5: Введение в теорию двойственности

Александр Катруца

Факультет инноваций и высоких технологий  
Физтех-школа прикладной математики и информатики



3 октября 2018 г.

## На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности

## На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Задача безусловной оптимизации

## На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Задача безусловной оптимизации
- ▶ Задача условной оптимизации с равенствами

## На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Задача безусловной оптимизации
- ▶ Задача условной оптимизации с равенствами
- ▶ Задача условной оптимизации с неравенствами

## На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Задача безусловной оптимизации
- ▶ Задача условной оптимизации с равенствами
- ▶ Задача условной оптимизации с неравенствами
- ▶ Условия Каруша-Куна-Таккера

# Лагранжиан

- Общая задача оптимизации

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \\ \text{s.t. } & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$\text{dom } f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_0(x^*) = p^*$$

# Лагранжиан

- Общая задача оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$\text{dom } f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_0(x^*) = p^*$$

- Лагранжиан  $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$



# Лагранжиан

- Общая задача оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$\text{dom } f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_0(x^*) = p^*$$

- Лагранжиан  $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

- $\lambda_i$  – множители Лагранжа для ограничений  $g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$

# Лагранжиан

- Общая задача оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$\text{dom } f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_0(x^*) = p^*$$

- Лагранжиан  $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

- $\lambda_i$  – множители Лагранжа для ограничений  $g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$
- $\mu_j$  – множители Лагранжа для ограничений  $h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p$

# Двойственная функция

## Определение

Функция  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  такая что

$$g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) \right)$$

называется *двойственной функцией*

# Двойственная функция

## Определение

Функция  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  такая что

$$g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) \right)$$

называется *двойственной функцией*

## Свойства

- ▶ Всегда вогнута
- ▶ Может равняться  $-\infty$  для некоторых  $(\lambda, \mu)$

# Нижняя оценка оптимального значения функции

## Утверждение

Если  $\mu \geq 0$ , тогда  $p^* \geq g(\lambda, \mu)$

# Нижняя оценка оптимального значения функции

## Утверждение

Если  $\mu \geq 0$ , тогда  $p^* \geq g(\lambda, \mu)$

## Доказательство

- ▶ Если  $\hat{x} \in \mathcal{D}$  и лежит в допустимом множестве, а также  $\mu \geq 0$ , тогда

$$f_0(\hat{x}) \geq L(\hat{x}, \lambda, \mu) \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu) = g(\lambda, \mu)$$

- ▶ Минимизируя обе части по всем допустимым  $\hat{x}$ , получим

$$p^* \geq g(\lambda, \mu)$$

# Двойственная задача

## Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t. } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

# Двойственная задача

## Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t. } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Всегда выпуклая задача



# Двойственная задача

## Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t. } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Всегда выпуклая задача
- ▶  $d^* = g(\lambda^*, \mu^*)$

# Двойственная задача

## Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t. } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Всегда выпуклая задача
- ▶  $d^* = g(\lambda^*, \mu^*)$
- ▶ Лучшая нижняя оценка для  $p^*$ , которую может дать двойственная функция

# Двойственная задача

## Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t. } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Всегда выпуклая задача
- ▶  $d^* = g(\lambda^*, \mu^*)$
- ▶ Лучшая нижняя оценка для  $p^*$ , которую может дать двойственная функция
- ▶ Вектора  $(\lambda, \mu)$  называются допустимыми для двойственной задачи, если  $\mu \geq 0$  и  $(\lambda, \mu) \in \text{dom } g$

# Двойственная задача и сопряжённые функции

## Определение

Функция  $f^*(y) = \sup_{x \in \text{dom } f} (y^\top x - f(x))$  называется сопряжённой функцией к функции  $f(x)$

# Двойственная задача и сопряжённые функции

## Определение

Функция  $f^*(y) = \sup_{x \in \text{dom } f} (y^\top x - f(x))$  называется сопряжённой функцией к функции  $f(x)$

$$\begin{aligned} & \min f_0(x) \\ \text{s.t. } & Ax \leq b \\ & Cx = d \end{aligned}$$

# Двойственная задача и сопряжённые функции

## Определение

Функция  $f^*(y) = \sup_{x \in \text{dom } f} (y^\top x - f(x))$  называется сопряжённой функцией к функции  $f(x)$

$$\begin{aligned} & \min f_0(x) \\ & \text{s.t. } Ax \leq b \\ & \quad Cx = d \end{aligned}$$

## От сопряжённых функций к двойственным

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= \inf_{x \in \text{dom } f_0} (f_0(x) + (A^\top \mu + C^\top \lambda)^\top x - b^\top \mu - d^\top \lambda) \\ &= -f_0^*(-A^\top \mu - C^\top \lambda) - b^\top \mu - d^\top \lambda \end{aligned}$$

Знание сопряжённой функции существенно упрощает поиск двойственной

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи



# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений
- ▶ Может выполняться и для **невыпуклых** задач

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений
- ▶ Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- ▶ Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений
- ▶ Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- ▶ Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности:  $p^* - d^*$



# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений
- ▶ Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- ▶ Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности:  $p^* - d^*$

- ▶ Оценка точности решения

# Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность:  $d^* \leq p^*$

- ▶ Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- ▶ Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность:  $d^* = p^*$

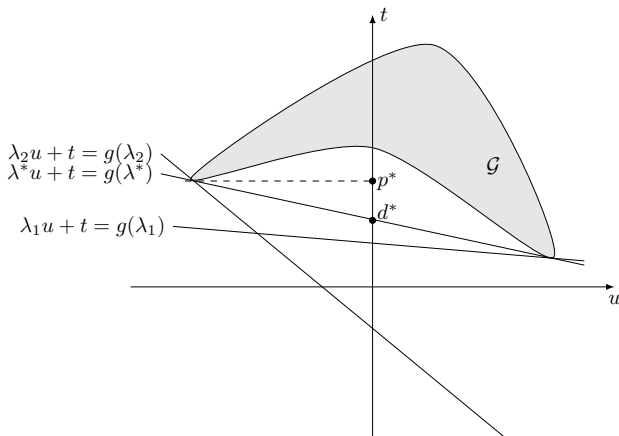
- ▶ В общем случае **НЕ** выполняется
- ▶ Обычно выполнена для выпуклых задач
- ▶ Условия регулярности ограничений
- ▶ Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- ▶ Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности:  $p^* - d^*$

- ▶ Оценка точности решения
- ▶ Доказательство корректности и сходимости алгоритма

# Геометрическая интерпретация

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) & g(\lambda) = \inf_{(u,t) \in \mathcal{G}} (t + \lambda u) \\ \text{s.t. } f_1(x) \leq 0 & \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathcal{D}\} \end{array}$$



# Условие Слейтера

Сильная двойственность выполняется для выпуклой задачи

$$\begin{aligned} \min & f_0(x) \\ \text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned}$$

если  $\exists \bar{x} \in \text{int } \mathcal{D} : f_i(\bar{x}) < 0, A\bar{x} = b$

- ▶ Также гарантируется, что решение двойственной задачи достигается при  $p^* > -\infty$
- ▶ Существуют множество других условий регулярности ограничений

## Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,

$x^*$  – решение прямой задачи,

$(\lambda^*, \mu^*)$  – решение двойственной задачи, тогда

## Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,

$x^*$  – решение прямой задачи,

$(\lambda^*, \mu^*)$  – решение двойственной задачи, тогда

$$\begin{aligned} f_0(x^*) = g(\lambda^*, \mu^*) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x^*) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

## Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,

$x^*$  – решение прямой задачи,

$(\lambda^*, \mu^*)$  – решение двойственной задачи, тогда

$$\begin{aligned} f_0(x^*) = g(\lambda^*, \mu^*) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x^*) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

►  $x^*$  минимизирует  $L(x, \lambda^*, \mu^*)$

## Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,

$x^*$  – решение прямой задачи,

$(\lambda^*, \mu^*)$  – решение двойственной задачи, тогда

$$\begin{aligned} f_0(x^*) = g(\lambda^*, \mu^*) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x^*) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

- ▶  $x^*$  минимизирует  $L(x, \lambda^*, \mu^*)$
- ▶ Условие дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^* h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

$$\mu_j^* > 0 \Rightarrow h_j(x^*) = 0, \quad h_j(x^*) < 0 \Rightarrow \mu_j^* = 0$$



## ККТ для невыпуклых задач

Пусть  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1.  $h_j(x^*) \leq 0$
2.  $g_i(x^*) = 0$
3.  $\mu^* \geq 0$
4.  $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$
5.  $f'_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(x^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_x L(x, \lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$$

и необходимого условия минимума.

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

- ▶ Первые два условия  $\rightarrow \hat{x}$  лежит в допустимом множестве

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

- ▶ Первые два условия  $\rightarrow \hat{x}$  лежит в допустимом множестве
- ▶  $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выпуклый по  $x$

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

- ▶ Первые два условия  $\rightarrow \hat{x}$  лежит в допустимом множестве
- ▶  $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выпуклый по  $x$
- ▶ Последнее условие  $\rightarrow \hat{x}$  минимизирует  $L$

$$g(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{x}) = f_0(\hat{x})$$

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

- ▶ Первые два условия  $\rightarrow \hat{x}$  лежит в допустимом множестве
- ▶  $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выпуклый по  $x$
- ▶ Последнее условие  $\rightarrow \hat{x}$  минимизирует  $L$

$$g(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{x}) = f_0(\hat{x})$$

- ▶ Выполнена сильная двойственность

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла ( $f_0, h_j$  – выпуклы,  $g_i$  – аффинны) и для  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач

## Доказательство

- ▶ Первые два условия  $\rightarrow \hat{x}$  лежит в допустимом множестве
- ▶  $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  выпуклый по  $x$
- ▶ Последнее условие  $\rightarrow \hat{x}$  минимизирует  $L$

$$g(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{x}) = f_0(\hat{x})$$

- ▶ Выполнена сильная двойственность
- ▶  $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  – решения прямой и двойственной задач



# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.

Тогда  $x$  решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют  $(\lambda, \mu)$  такие, что для них выполнены условия ККТ

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.

Тогда  $x$  решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют  $(\lambda, \mu)$  такие, что для них выполнены условия ККТ

## Доказательство

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.  
Тогда  $x$  решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют  $(\lambda, \mu)$  такие, что для них выполнены условия ККТ

## Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума  $p^*$

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.  
Тогда  $x$  решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют  $(\lambda, \mu)$  такие, что для них выполнены условия ККТ

## Доказательство

- ▶ Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума  $p^*$
- ▶ Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая

# ККТ для выпуклых задач

## Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда  $x$  решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют  $(\lambda, \mu)$  такие, что для них выполнены условия ККТ

## Доказательство

- ▶ Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума  $p^*$
- ▶ Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая
- ▶ Достаточность следует из утверждения 1

## Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи

## Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

## Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

## Стандартные приёмы



## Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

## Стандартные приёмы

- ▶ Введение новых переменных

$$\min_x \|Ax - b\| \rightarrow \begin{array}{l} \min_{(x,y)} \|y\| \\ \text{s.t. } Ax - b = y \end{array}$$

## Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

## Стандартные приёмы

- ▶ Введение новых переменных

$$\min_x \|Ax - b\| \rightarrow \begin{array}{ll} \min_{(x,y)} \|y\| \\ \text{s.t. } Ax - b = y \end{array}$$

- ▶ Превращение явных ограничений в неявные

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } -1 \leq x \leq 1 \\ Ax = b \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} \min_{-1 \leq x \leq 1} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax = b \end{array}$$

- ▶ Построение двойственных функций

- ▶ Построение двойственных функций
- ▶ Связь сопряжённых и двойственных функций

- ▶ Построение двойственных функций
- ▶ Связь сопряжённых и двойственных функций
- ▶ Двойственная задача и её свойства

- ▶ Построение двойственных функций
- ▶ Связь сопряжённых и двойственных функций
- ▶ Двойственная задача и её свойства
- ▶ Сильная и слабая двойственность

- ▶ Построение двойственных функций
- ▶ Связь сопряжённых и двойственных функций
- ▶ Двойственная задача и её свойства
- ▶ Сильная и слабая двойственность
- ▶ ККТ и условие Слейтера