Методы оптимизации
Лекция 3: Примеры задач выпуклой оптимизации

Александр Катруца

Факультет инноваций и высоких технологий
Физтех-школа прикладной математики и информатики

19 сентября 2019 г.

На прошлой лекции

- Самосопряжённые конусы
- Отделимость выпуклых множеств
- Выпуклые функции и способы проверки функции на выпуклость

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$

- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha \mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha \mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$
- Таким образом, $\mathbf{p} = -\mathbf{c}$ и выполнено второе условие

Основные результаты по выпуклым функциям

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \; (<) \; \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема и определена на выпуклом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*. Тогда* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпукла с константой* $m \geq 0$ *в том и только том случае, если*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2 , \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \; (<) \; \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \mathrm{epi}\; f$ *выпуклое множество.*

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема и определена на выпуклом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*. Тогда* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпукла с константой* $m \geq 0$ *в том и только том случае, если*

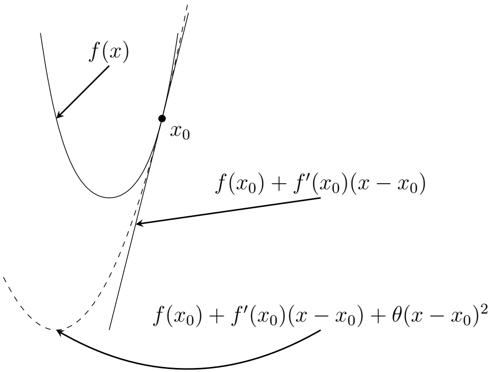
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f *выпукла* $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Иллюстрация дифференциальных критериев

Пусть $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4$



- Линейная глобальная оценка снизу для выпуклой функции
- Квадратичная глобальная оценка снизу для сильно выпуклой функции

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \; \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример

Задача определения максимального независимого множества вершин графа сводится к задаче оптимизации на множестве $\mathcal{C}^n$. Подробности тут

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$.

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1 \end{aligned}$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция невыпукла

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция невыпукла

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция невыпукла

Q: какая интерпретация у $\mathbf{x}^*$ и $f(\mathbf{x}^*)$?

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

- $\mathbf{A}$ – диагонализуема, поэтому есть базис из собственных векторов $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ причём предположим $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$
- $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_1\|_2 \leq \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_1\|_2$

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(\mathbf{x})\\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
&f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

- f_0 – выпуклая целевая функция
- f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- Ограничения типа равенств *только* линейные

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(\mathbf{x})\\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
&f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

- f_0 – выпуклая целевая функция
- f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- Ограничения типа равенств *только* линейные

Ограничения стандартной формы записи

- Выпуклое множество может быть задано более общим образом

$$
\begin{aligned}
&\min x^2\\
\text{s.t. } &(x-2)^2 = 0\\
&x^3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
&x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$
- Известно, что в j-ом продукте содержится a_{ij} i-го питательного вещества

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
& \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$
- Известно, что в j-ом продукте содержится a_{ij} i-го питательного вещества
- Необходимо определить количество каждого продукта

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$
- Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$
- Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- При $\mathbf{P}_i = 0$ получим задачу LP

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

  Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

  Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

  Q: Каков геометрический смысл у решения?

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Q: Каков геометрический смысл у решения?
Q: К какой задаче сводится похожая задача?

$$\min \|\mathbf{x}\|_\infty$$
$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$
- Минимально допустимый средний доход $\bar{r}$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$
- Минимально допустимый средний доход $\bar{r}$

Классическая задача составления оптимального портфеля

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\bar{\mathbf{p}}^\top \mathbf{x} \geq \bar{r} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

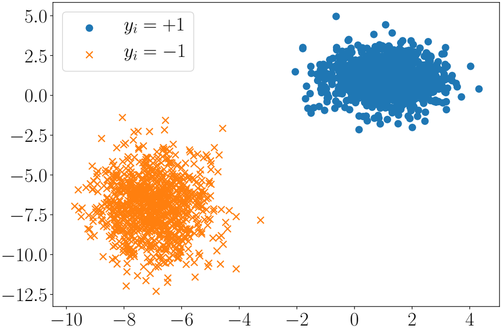
- Минимум риска при минимально допустимом доходе
- Существуют многочисленные вариации, которые не выводят задачу из класса QCQP или SOCP

Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$

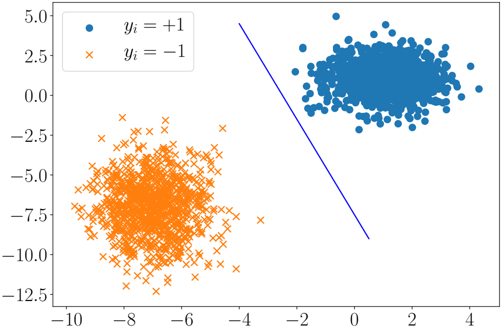
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



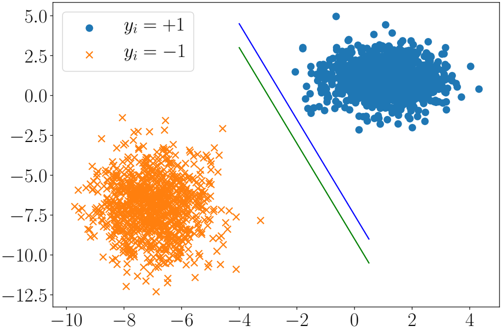
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



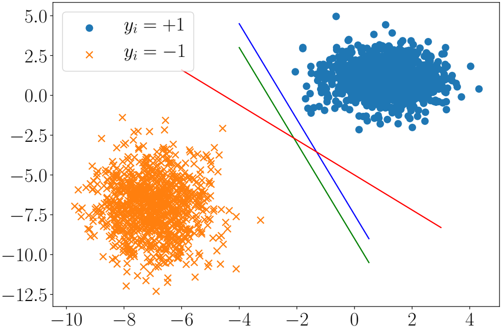
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



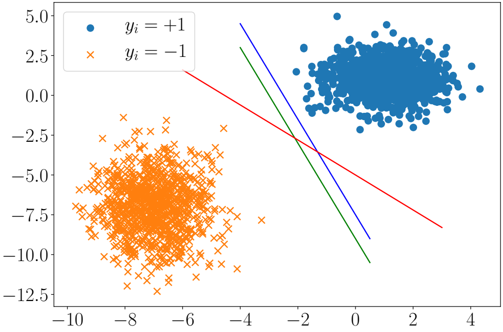
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Q: Как однозначно задать разделяющую гиперплоскость?

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- Расстояние между гиперплоскостями

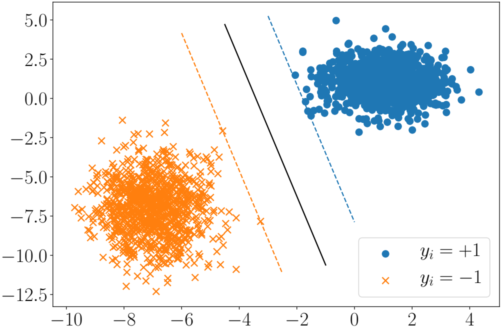
$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Финальная задача

$$\min_{\mathbf{a},b} \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|_2^2$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b) > 1,\ i = 1, \dots, m$$

Оптимальная гиперплоскость



Оптимизация на конусе второго порядка (SOCP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i \\
&\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}
\end{aligned}
$$

Коническая форма записи

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &(\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i) \succeq_{K_i} 0 \\
&\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}
\end{aligned}
$$

QCQP $\to$ SOCP

- Пусть $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \leq 0$ и $0 \prec \mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x})^\top (\mathbf{L}^\top \mathbf{x}) + 2\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{L}^{-\top}\mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \|\mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 - r$
- Или $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2 \leq \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{q}} - r}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\quad \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\quad \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{aligned}$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка: $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$

QCQP → SOCP: преобразование целевой функции

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \min_{\mathbf{x},t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad\qquad \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- Тогда $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}^n_{\text{rot}}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- Тогда $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}^n_{\text{rot}}$

Отношения между рассмотренными типами задач

LP $\subset$ QCQP $\subset$ SOCP

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}^n_+$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{G} + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}^n_+$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } & \operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
& \mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}^n_+$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ &\mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах
- Из одной формы можно получить другую

LP и SOCP как задачи SDP

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

SOCP

- $\|\mathbf{x}\|_2 \leq t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & t\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$
- Аналогично для $\mathcal{Q}^n$:
  $\|\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i & (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^\top \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i & (\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i)\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$
\begin{gathered}
\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j) \\
\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}
\end{gathered}
$$

- В матрично-векторном виде

$$
\begin{gathered}
\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}
\end{gathered}
$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT
$$
\begin{aligned}
&\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)\\
\text{s.t. } & x_i \in \{-1, +1\}
\end{aligned}
$$
- В матрично-векторном виде
$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{W}\mathbf{x}\\
\text{s.t. } & x_i \in \{-1, +1\}
\end{aligned}
$$
- Эквивалентный вид
$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})\\
\text{s.t. } & \mathbf{X} \succeq 0,\ \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1,\ \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)$$
$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})$$
$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1, \ \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

- SDP релаксация

$$\min \mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})$$
$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \ \xcancel{\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1}, \ \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $A \succ 0$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $A \succ 0$

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \log\det \mathbf{A}^{-1}\\
\text{s.t. } & \mathbf{A} \succ 0\\
& \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1
\end{aligned}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

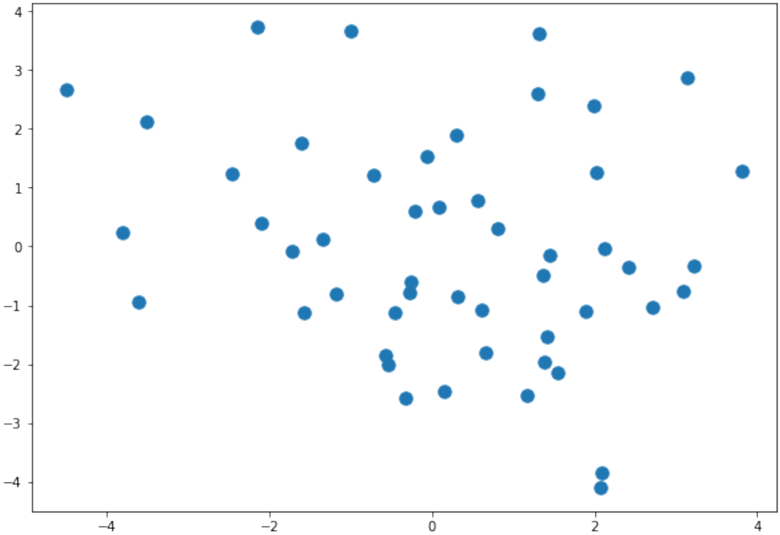
- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $A \succ 0$

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \log\det \mathbf{A}^{-1} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A} \succ 0 \\
& \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1
\end{aligned}$$

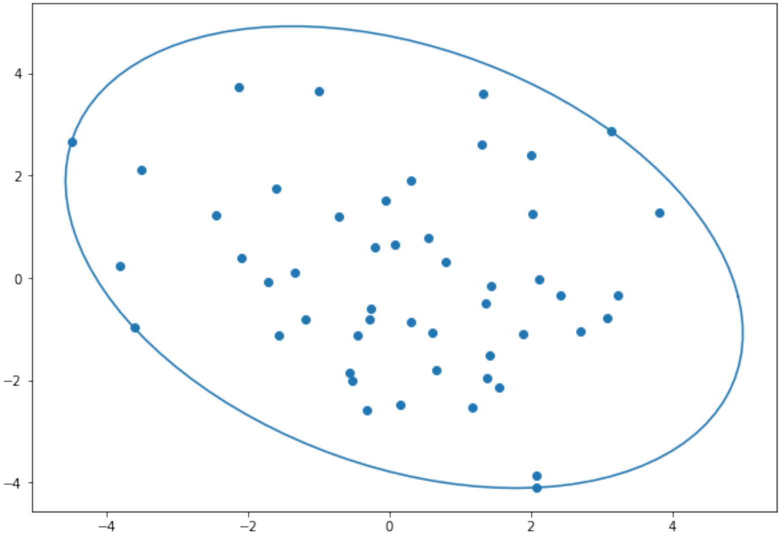
Эллипсоид Löwner-John

Постановка аналогична только не для точек, а для некоторого выпуклого множества

Пример построения экстремального эллипсоида



Пример построения экстремального эллипсоида



Равносильные преобразования задач

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \ldots, m \\
&f_0(\mathbf{x}) \le t
\end{aligned}
$$

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m \\
&f_0(\mathbf{x}) \le t
\end{aligned}
$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \ge 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 \ge 0,\ ; \mathbf{x}_2 \ge 0$
- Формирование блочных матриц

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},\, t} t \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m \\ &f_0(\mathbf{x}) \le t \end{aligned}$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \ge 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 \ge 0,\ ; \mathbf{x}_2 \ge 0$
- Формирование блочных матриц

Перенос ограничений в целевую функцию

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) + \mathbb{I}_X(\mathbf{x}), \quad \mathbb{I}_X(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in X, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin X. \end{cases}$$

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM
- Выпуклая релаксация задачи MAXCUT

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM
- Выпуклая релаксация задачи MAXCUT
- Задача построения оптимального эллипсоида