

Методы оптимизации

Лекция 5: Применение двойственности и коническая двойственность

Александр Катруца

Факультет инноваций и высоких технологий
Физтех-школа прикладной математики и информатики



9 октября 2019 г.

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений
- ▶ Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений
- ▶ Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- ▶ Двойственная функция и двойственная задача

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений
- ▶ Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- ▶ Двойственная функция и двойственная задача
- ▶ Свойства двойственной функции и зазор двойственности

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений
- ▶ Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- ▶ Двойственная функция и двойственная задача
- ▶ Свойства двойственной функции и зазор двойственности
- ▶ Сильная двойственность и условие Слейтера

На прошлой лекции

- ▶ Условия оптимальности для задач без ограничений
- ▶ Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- ▶ Двойственная функция и двойственная задача
- ▶ Свойства двойственной функции и зазор двойственности
- ▶ Сильная двойственность и условие Слейтера
- ▶ Условия Каруша-Куна-Таккера

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$

2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

5. $f'_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f'_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- ▶ Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{x}$ лежит в допустимом множестве

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- ▶ Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{x}$ лежит в допустимом множестве
- ▶ $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выпуклый по x

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- ▶ Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве
- ▶ $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по \mathbf{x}
- ▶ Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L

$$g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- ▶ Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве
- ▶ $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по \mathbf{x}
- ▶ Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L

$$g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$$

- ▶ Выполнена сильная двойственность

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- ▶ выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- ▶ Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве
- ▶ $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по \mathbf{x}
- ▶ Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L

$$g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$$

- ▶ Выполнена сильная двойственность
- ▶ $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.

Тогда x решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.

Тогда x^* решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.
Тогда x решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.
Тогда x^* решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- ▶ Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- ▶ Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда x решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- ▶ Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- ▶ Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая
- ▶ Достаточность следует из утверждения 1

Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи

Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- ▶ Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \rightarrow \begin{array}{l} \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \|\mathbf{y}\| \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{y} \end{array}$$

Переформулировка задачи

- ▶ Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- ▶ Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- ▶ Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \|\mathbf{y}\|$$

s.t. $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{y}$

- ▶ Превращение явных ограничений в неявные

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} & \\ \text{s.t. } -1 \leq \mathbf{x} \leq 1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} \min_{-1 \leq \mathbf{x} \leq 1} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \end{array}$$

Двойственная задача к LP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Двойственная задача к LP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Лагранжиан:

$$L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$

Двойственная задача к LP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Лагранжиан:

$$L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$

- ▶ Двойственная функция

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Двойственная задача к LP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Лагранжиан:

$$L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$

- ▶ Двойственная функция

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Утверждение

Если допустимое множество прямой задачи LP непусто, то выполнена сильная двойственность.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- ▶ Допустимое множество в прямой задаче
 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- ▶ Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
- ▶ Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор \mathbf{p} такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- ▶ Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
- ▶ Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор \mathbf{p} такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \lambda + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- ▶ Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
- ▶ Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор \mathbf{p} такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \lambda + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Пусть $\hat{\lambda} = \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, тогда $\theta \mathbf{p}^\top \mathbf{b} \rightarrow -\infty$ и $\theta \mathbf{A}^\top \mathbf{p} + \mathbf{c} \geq 0$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- ▶ Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
- ▶ Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор \mathbf{p} такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \lambda + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Пусть $\hat{\lambda} = \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, тогда $\theta \mathbf{p}^\top \mathbf{b} \rightarrow -\infty$ и $\theta \mathbf{A}^\top \mathbf{p} + \mathbf{c} \geq 0$
- ▶ Двойственная задача не ограничена

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) \leq_K 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) \leq_K 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) \leq_K 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} \max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq_{K^*} 0 \end{aligned}$$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\mu^* \geq_{K^*} 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\mu^* \geq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\mu^* \geq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f'_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\mu^* \geq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f'_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса \mathbb{R}_+^n) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\mu^* \geq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f'_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h'_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса \mathbb{R}_+^n) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условие Слейтера для выпуклой задачи

Говорят, что выполнено условие Слейтера, если найдётся $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ такой что $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ и $f_i(\hat{\mathbf{x}}) <_K 0$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- ▶ Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq_K \mathbf{0} \end{aligned}$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- ▶ Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq_K \mathbf{0} \end{aligned}$$

- ▶ Двойственная задача (аналогично LP)

$$\begin{aligned} \max \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c} \end{aligned}$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- ▶ Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq_K \mathbf{0} \end{aligned}$$

- ▶ Двойственная задача (аналогично LP)

$$\begin{aligned} \max \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c} \end{aligned}$$

- ▶ Если конус K самосопряжённый мы автоматически знаем, как выглядит двойственная задача!

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ & \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ & \mathbf{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

Двойственная задача для SDP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ & \mathbf{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0 \end{aligned}$$

Двойственная задача для SDP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ & \mathbf{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\text{trace}(\mathbf{A}_i\hat{\mathbf{X}}) = b_i$

Двойственная задача для SDP

- ▶ Исходная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ & \mathbf{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Двойственная задача

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\text{trace}(\mathbf{A}_i\hat{\mathbf{X}}) = b_i$
- ▶ Отличие от LP: непустого допустимого множества НЕдостаточно для сильной двойственности!

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

► Допустимое множество:

$$x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2 + 1) \geq 0, (x_2 + 1)(-x_2^2) \geq 0$$

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

► Допустимое множество:

$$x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2 + 1) \geq 0, (x_2 + 1)(-x_2^2) \geq 0$$

► $p^* = 0$

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \min x_2 \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

► Допустимое множество:

$$x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2 + 1) \geq 0, (x_2 + 1)(-x_2^2) \geq 0$$

► $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} & \min -y_{11} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Y} \succeq 0 \\ & y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\ & y_{22} = 0 \end{aligned}$$

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \min x_2 \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

► Допустимое множество:

$$x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2 + 1) \geq 0, (x_2 + 1)(-x_2^2) \geq 0$$

► $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} & \min -y_{11} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Y} \succeq 0 \\ & y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\ & y_{22} = 0 \end{aligned}$$

► Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$

Существование условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \min & x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

► Допустимое множество:

$$x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2 + 1) \geq 0, (x_2 + 1)(-x_2^2) \geq 0$$

► $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \min & -y_{11} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Y} \succeq 0 \\ & y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\ & y_{22} = 0 \end{aligned}$$

► Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$

► $d^* = -1$

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач
- ▶ Преобразования задач для получения двойственных

Главное

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач
- ▶ Преобразования задач для получения двойственных
- ▶ Двойственность для LP

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач
- ▶ Преобразования задач для получения двойственных
- ▶ Двойственность для LP
- ▶ Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач
- ▶ Преобразования задач для получения двойственных
- ▶ Двойственность для LP
- ▶ Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- ▶ Коническая двойственность

- ▶ Условия оптимальности для выпуклых задач
- ▶ Преобразования задач для получения двойственных
- ▶ Двойственность для LP
- ▶ Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- ▶ Коническая двойственность
- ▶ SDP vs. LP