Линейное программирование. Симплекс метод

Камзолов Дмитрий

kamzolov.dmitry@phystech.edu

20 ноября 2018

План

1. Создание задачи линейного программирования
   - Канторович Л.В. (1939 г.)
   - Задача планирования производства
   - Формы задач ЛП
   - Преобразования задач
2. Симплекс-метод
   - Данциг Д. (1949 г.)
   - Многогранное множество
   - Симплекс-Метод для канонической задачи
   - Скорость сходимости
   - Реализации

Создание задачи линейного программирования

Канторович Л.В. (1939 г.)

Рис. 1: Канторович Л.В. портрет вып. Петровым-Водкиным

Создание задачи линейного программирования

Задача планирования производства

- Фанерный трест производит два вида продукции: трехслойную и пятислойную фанеру.
- У треста имеется станок, который в каждый момент времени может склеивать лишь один тип фанеры.
- 1 м^2 первого типа фанеры делается 40 минут, второго типа 70 минут.
- Первый тип требует 2 слоя хвойных и 1 слой лиственный, второй 3 слоя хвойных и 2 лиственных.
- Один хвойный слой стоит 30 рублей за 1 м^2, один лиственный слой 20 рублей.
- Готовый лист трехслойной фанеры стоит 130 рублей, а пятислойной фанеры 200 рублей.
- Как тресту максимизировать свою прибыль за рабочий день в 8 часов?

Переменные (Decision variables)

x_i – переменные, которые мы можем изменять в процессе метода для получения оптимального решения.
x_1, x_2 – количество м^2 трехслойных и пятислойных листов произведенных за день

Целевая функция

$f(x) = c^T x$ – функция, которую мы хотим минимизировать (максимизировать).
$130x_1 + 200x_2$ – доход от продажи произведенной фанеры.

Данные и ограничения

$a_{i,j}$ – известные данные, которые указаны в задаче или подразумеваются природой объекта. На их основе мы можем записать ограничения в задаче оптимизации.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 130x_1 + 200x_2 - 30(y_0) - 20(z_0) \\
& y_0 = y_1 + y_2, \quad z_0 = z_1 + z_2, \\
& x_1 = z_1, \quad x_1 = y_1/2, \\
& x_2 = z_2/2, \quad x_2 = y_2/3, \\
& 40x_1 + 70x_2 \le 480, \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Создание задачи линейного программирования

Формы задач ЛП

Ограничения неравенства

$$\min \quad c^T x$$
$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Ограничения равенства/ Каноническая форма

$$\min \quad c^T x$$
$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

Общие ограничения

$$\min \quad c^T x$$
$$A_1 x \leq b_1$$
$$A_2 x = b_2, \quad x \geq 0$$

Равенства ⇒ неравенства

$$Ax = b \Rightarrow Ax \leq b, \ -b \leq -Ax$$

Неравенства ⇒ равенства

$$Ax \leq b \Rightarrow Ax + y = b, \ y \geq 0$$

$\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow z - y = x, \ z, y \geq 0$$

Замена целевой функции

$$\min c^T x \Rightarrow \min t, \quad c^T x - t = 0$$

Симплекс-метод
Данциг Д. (1949 г.)

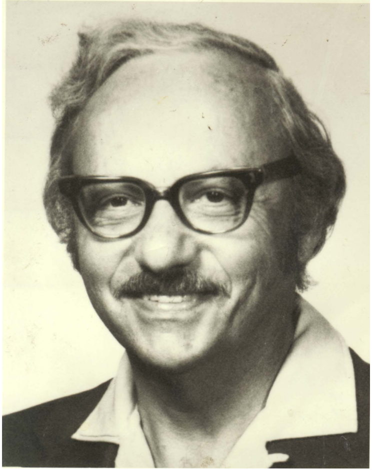
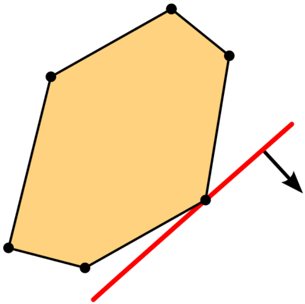


Рис. 2: Данциг Д.



Крайняя точка

x — крайняя точка множества, если она не является внутренней точкой какого-либо отрезка, лежащего в Q

Лемма 1

Для многогранного множества крайняя точка имеет n линейно независимых ограничений

Док-во $\Rightarrow$

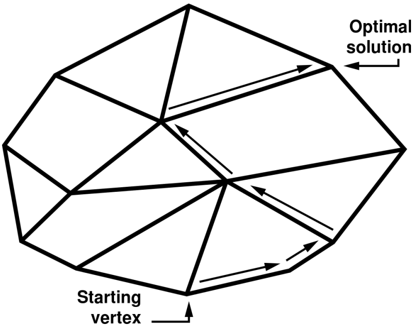
Пусть $x_0 \in Q$, $I_0 = \{i : (a_i, x_0) = b_i\}$ – мн-во активных ограничений. Если среди векторов a_i менее чем n линейно независимых, то однородная систма $(a_x, s) = 0$ имеет ненулевое решение s_0 и существуют точки $x_1, x_2 = x_0 \pm \alpha s_0 \in Q$. А значит x_0 не крайняя.

Док-во $\Leftarrow$

a_i – n линейно независимых, а $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Тогда $b_i = (a_i, x_0) = \frac{(a_i,x_1)+(a_i,x_2)}{2} \le \frac{b_i+b_i}{2} = b_i$, значит $x_1 = x_2 = x_0$.

Следствие

Число крайних точек многогранного множества конечно



Каноническая задача

$$\min \quad c^T x$$
$$Ax = b, \quad x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

Невырожденная вершина

x — невырожденная вершина, если число положительных компонент в ней равно m

Этап 1

Пусть получена вершина x^k и $I_k = \{i : x_i^k\}$, $|I_k| = m$. Разобъем вектор x на две группы $x = \{u, v\}$, где $u \in \mathbb{R}^m$ отвечает за компоненты из I_k, $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ компонентам не из I_k. Тогда система $Ax = b$ переписывается, в виде

$$A_1 u + A_2 v = b$$

Этап 2

Из-за невырожденности вершины

$$u = A_1^{-1}(b - A_2 v)$$

$$\begin{aligned}(c, x) &= (c_1, u) + (c_2, v)\\ &= (c_1, A_1^{-1}(b - A_2 v)) + (c_2, v)\\ &= (c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1, v) + (c_1, A_1^{-1} b)\end{aligned}$$

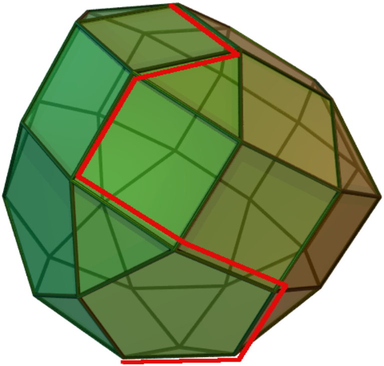
Этап 3

$$\min\ (c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1, v)$$
$$A_1^{-1}(b - A_2 v) \geq 0,\ \ v \geq 0$$

Этап 4

$$v_{k+1} = v_k + \gamma_k e_j,$$

где e_j— орт, для которого $(c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1)_j$ отрицательна,
$\gamma_k = \max \left\{ \gamma \geq 0 : A_1^{-1}(b - \gamma A_2 e_j) \geq 0 \right\}$

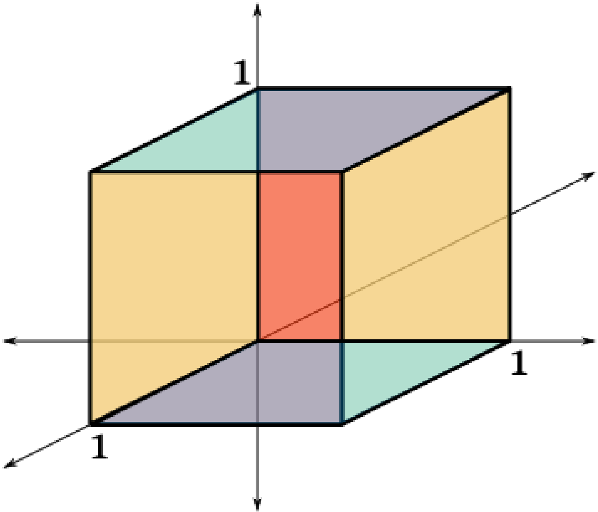


Оценка снизу

Так как вершин многогранного множества конечно, метод не зацикливается, значит сходится. А худшая оценка скорости равна кол-ву вершин, т.е. **экспоненциальна**.

Оценка сверху/ Klee–Minty cube

Существует задача, для которой симплекс-метод проходит по всем вершинам куба, т.е. достигает нижнюю экспоненциальную оценку.



1
1
1

- CPLEX — пакет для решения LP и MILP, доступен для разных языков.
- CVXOPT — открытый Python пакет для выпуклой оптимизации.
- OSQP — открытая C библиотека для выпуклой квадратичной оптимизации.
- GLPK — открытая C библиотека для решения LP и MILP.
- GUROBI — коммерческий солвер для решения LP и MISOCP.
- MOSEK — коммерческий солвер для решения LP и MISOCP, SDP.

Симплекс-метод

Реализации

```
>>> from cvxopt import matrix, solvers
>>> A = matrix([ [-1.0, -1.0, 0.0, 1.0], [1.0, -1.0, -1.0, -2.0] ])
>>> b = matrix([ 1.0, -2.0, 0.0, 4.0 ])
>>> c = matrix([ 2.0, 1.0 ])
>>> sol=solvers.lp(c,A,b)
     pcost       dcost       gap    pres   dres   k/t
 0:  2.6471e+00 -7.0588e-01  2e+01  8e-01  2e+00  1e+00
 1:  3.0726e+00  2.8437e+00  1e+00  1e-01  2e-01  3e-01
 2:  2.4891e+00  2.4808e+00  1e-01  1e-02  2e-02  5e-02
 3:  2.4999e+00  2.4998e+00  1e-03  1e-04  2e-04  5e-04
 4:  2.5000e+00  2.5000e+00  1e-05  1e-06  2e-06  5e-06
 5:  2.5000e+00  2.5000e+00  1e-07  1e-08  2e-08  5e-08
>>> print(sol['x'])
[ 5.00e-01]
[ 1.50e+00]
```

To be continued...