Методы оптимизации
Лекция 5: Введение в теорию двойственности

Александр Катруца

Факультет инноваций и высоких технологий
Физтех-школа прикладной математики и информатики

30 сентября 2018 г.

На прошлой лекции

- Условия оптимальности
- Задача безусловной оптимизации
- Задача условной оптимизации с равенствами
- Задача условной оптимизации с неравенствами
- Условия Каруша-Куна-Таккера

Лагранжиан

- Общая задача оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \\
\text{s.t. } & g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_j(x) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

  dom $f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_0(x^*) = p^*$
- Лагранжиан $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$
L(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)
$$

  - λ_i – множители Лагранжа для ограничений $g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m$
  - μ_j – множители Лагранжа для ограничений $h_j(x) = 0, \; j = 1, \ldots, p$

Двойственная функция

Определение

Функция $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая что

$$g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \right)$$

называется *двойственной функцией*

Свойства

- Всегда вогнута
- Может равняться $-\infty$ для некоторых (λ, μ)

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\mu \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\lambda, \mu)$

Доказательство

- Если $\hat{x} \in \mathcal{D}$ и $\mu \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{x}) \geq L(\hat{x}, \lambda, \mu) \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu) = g(\lambda, \mu)$$

- Минимизируя обе части по $\hat{x} \in \mathcal{D}$, получим

$$p^* \geq g(\lambda, \mu)$$

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} &\max g(\lambda, \mu) \\ \text{s.t. } &\mu \geq 0 \end{aligned}$$

- Всегда выпуклая задача
- $d^* = g(\lambda^*, \mu^*)$
- Лучшая нижняя оценка для p^*, которую может дать двойственная функция
- Вектора (λ, μ) называются допустимыми для двойственной задачи, если $\mu \geq 0$ и $(\lambda, \mu) \in \text{dom } g$

Двойственная задача и сопряжённые функции

Определение

Функция $f^*(y) = \sup\limits_{x \in \text{dom } f} (y^\top x - f(x))$ называется сопряжённой функцией к функции $f(x)$

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(x) \\
\text{s.t. } &Ax \leq b \\
&Cx = d
\end{aligned}
$$

От сопряжённых функций к двойственным

$$
\begin{aligned}
g(\lambda, \mu) &= \inf_{x \in \text{dom } f_0} (f_0(x) + (A^\top \mu + C^\top \lambda)^\top x - b^\top \mu - d^\top \lambda) \\
&= - f_0^*(-A^\top \mu - C^\top \lambda) - b^\top \mu - d^\top \lambda
\end{aligned}
$$

Знание сопряжённой функции существенно упрощает поиск двойственной

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае не выполняется
- Обычно выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

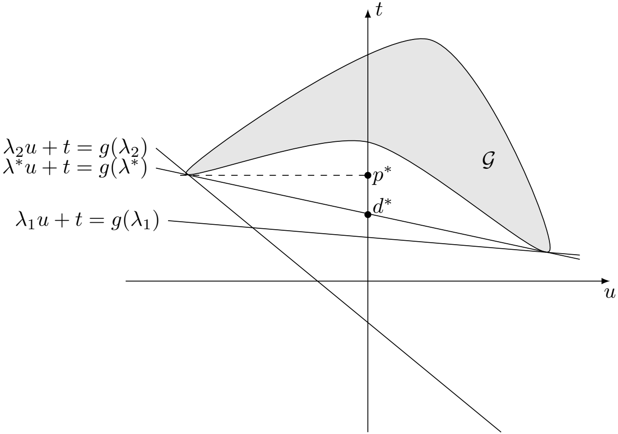
Зазор двойственности: $p^* - d^*$

- Оценка точности решения
- Доказательство корректности и сходимости алгоритма

Геометрическая интерпретация

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f_0(x) \qquad\qquad g(\lambda) = \inf_{(u,t) \in \mathcal{G}} (t + \lambda u)$$

$$\text{s.t. } f_1(x) \le 0 \qquad\qquad \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$



Условие Слейтера

Сильная двойственность выполняется для выпуклой задачи

$$\begin{aligned} &\min f_0(x) \\ \text{s.t. } &f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m \\ &Ax = b \end{aligned}$$

если $\exists \bar{x} \in \text{int}\, \mathcal{D}: \ f_i(\bar{x}) < 0,\ A\bar{x} = b$

- Также гарантируется, что решение двойственной задачи достигается при $p^* > -\infty$
- Существуют множество других условий регулярности ограничений

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность

x^* – решение прямой задачи

(λ^*, μ^*) – решение двойственной задачи, тогда

$$
\begin{aligned}
f_0(x^*) = & g(\lambda^*, \mu^*) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x) \right) \\
& \leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*) \\
& \leq f_0(x^*)
\end{aligned}
$$

- x^* минимизирует $L(x, \lambda^*, \mu^*)$
- Условие дополняющей нежёсткости
  $\mu_j^* h_j(x^*) = 0,\ j = 1, \ldots, p$

$$\mu_j^* > 0 \Rightarrow h_j(x^*) = 0, \quad h_j(x^*) < 0 \Rightarrow \mu_j^* = 0$$

KKT для невыпуклых задач

Пусть (x^*, λ^*, μ^*) решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(x^*) \le 0$
2. $g_i(x^*) = 0$
3. $\mu^* \ge 0$
4. $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$
5. $f_0'(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(x^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_x L(x, \lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$$

и необходимого условия минимума.

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия $\rightarrow \hat{x}$ лежит в допустимом множестве
- $\hat{\mu} \geq 0 \rightarrow L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ выпуклый по x
- Последнее условие $\rightarrow \hat{x}$ минимизирует L

$$g(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{p} \hat{\mu}_j h_j(\hat{x}) = f_0(\hat{x})$$

- Выполнена сильная двойственность
- $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда x решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют (λ, μ) такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- Необходимость выполнение ККТ следует из утверждения для общего случая
- Достаточность следует из утверждения 1

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- Введение новых переменных

$$
\min_x \|Ax - b\| \rightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{(x,y)} \|y\| \\ \text{s.t. } & Ax - b = y \end{aligned}
$$

- Превращение явных ограничений в неявные

$$
\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } & -1 \leq x \leq 1 \\ & Ax = b \end{aligned} \rightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{-1 \leq x \leq 1} c^\top x \\ \text{s.t. } & Ax = b \end{aligned}
$$

Главное

- Построение двойственных функций
- Связь сопряжённых и двойственных функций
- Двойственная задача и её свойства
- Сильная и слабая двойственность
- ККТ и условие Слейтера