Chaînes de Markov

Exercice 1.

On considère un fort polygonal ayant N sommets. Une sentinelle se déplace d'un sommet à l'autre de telle sorte que si elle quitte un sommet, il y a une probabilité p qu'elle décide d'aller au sommet adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre, et $(1-p)$ à l'autre sommet adjacent.

a) Définir la chaîne de Markov associée; écrire la matrice de transition, et analyser les états de cette chaîne (classes, récurrence, périodicité).

b) Etudier l'ergodicité et calculer les probabilités stationnaires lorsque $N = 5$.

Exercice 2.

On considère un buffer pouvant contenir 32 données. Les entrées des données dans le buffer se font selon un processus de Poisson de taux λ. Si le buffer est plein, les données qui arrivent sont perdues.

La prise de données a lieu selon un processus de Poisson de taux μ, et toutes les données présentes dans le buffer sont sorties lors d'une prise de données.

Soit X_t le nombre de données dans le buffer à l'instant t.

i) Etudier le processus $(X_t)_t$.

ii) Ecrire les équations du régime stationnaire et résoudre le système.

iii) Calculer, en régime stationnaire, la probabilité qu'une donnée soit perdue.

Exercice 3.

On considère 4 boules numérotées de 1 à 4, réparties en deux urnes A et B. A chaque instant, on tire un nombre k au hasard entre 1 et 4, on enlève la boule numéro k de l'urne dans laquelle elle se trouve et on la remet au hasard dans l'une des deux urnes. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

1. Donner la matrice et le graphe de transition de (X_n).
2. La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ?
3. Loi(s) stationnaire(s) ?