东 南 大 学 考 试 卷（A卷）

课程名称 数学模型与数学实验 考试学期 04-05-3 得分

适用专业 数学各专业 考试形式 开卷 考试时间长度 120分钟

姓名

学号

一. (20`)在计时工资制体系下,雇主的付薪方式是按计时工资率（元/小时）付薪（$w = kt$）。如果雇员的满意度曲线为 $w.(t+c)^{-3} = 1/2$ （c 为参数）

（1） 如果协议为每天工作 6 小时，给出雇员的满意度曲线。

（2） 求雇员与雇主的协议曲线。

解 （1）协议时间为 $t = 6$，对应雇员的满意度曲线上点（$t, (t+c)^3/2$）,过此点的切线方程为 $W - (t+c)^3/2 = 3(t+c)^2(T-t)/2$， 4`

它应与雇主的付薪曲线 $W = kT = \frac{3}{2}(t+c)^2 T$ 一致。

由此得到 $c = 2t$ 。 4`

因为 $t = 6, c = 12$ ，

所以 $w = (t+12)^3/2$ 4`

（2）所求的切点为（$t, 27t^3/2$）， 4`

协议曲线为 $w = 27t^3/2$ 。 4`

二. (20`) 在层次分析法建模中，我们用到了一致矩阵的概念，即如果矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

是成对比较矩阵，且 $a_{ik}=a_{ij}.a_{jk},\forall i,j,k$ 。

证明

（1） A 的转置也是一致矩阵。

（2） A 的秩为 1，且 A 的非零特征值位 n;

证明

（1）只需验证一致矩阵的几个条件成立即可。

令 $A^T=(b_{ij})$

$b_{ij}=a_{ji}>0, b_{ji}=1/b_{ij}$ 1`

$b_{ik}=b_{ij}b_{jk}$ 4`

（2）只需证明对应行的元素呈比例

$a_{ij}=a_{ik}a_{kj}=a_{il}a_{lj}$,

$\frac{a_{ik}}{a_{il}}=\frac{a_{lj}}{a_{kj}}=\frac{a_{jk}}{a_{ji}}$ 3`

上式表明 i,j 列元素呈比例，令 $i=1$ 得所有列均与第一列呈比例，所以 A 的秩为

1。 2`

令 $A=[a_{ij}]=[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n]^T[b_1,b_2,\cdots,b_n]$ 3`

由 $a_{ii}=1$，得 $b_i=1/a_i$ 3`

$A[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T=n[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 2`

得非零特征值为 n. 2`

三. (20`)如果雨滴的下落速度 v 仅与雨滴的半径 r 、重力加速度 g 和粘性系数 μ （压强 $P=\mu\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ）有关，利用量纲分析法给出速度 v 与其它变量的关系。

解 $[v]=LT^{-1},[r]=L,[g]=LT^{-2},[\mu]=L^{-1}MT^{-1},[\rho]=ML^{-3}$ 5`

构造量纲分析矩阵，在解相应的齐次方程组得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L \\ M \\ T \end{bmatrix}$$ 5`

基础解系 $\alpha_1=[1,-1/2,-1/2,0,0],\alpha_2=[0,3/2,1/2,-1,1]$ 5`

$f(\dfrac{v}{\sqrt{rg}},\dfrac{r^{3/2}g^{1/2}\rho}{\mu})=0$，即 $v=\sqrt{rg}\,F(\dfrac{r^{3/2}g^{1/2}\rho}{\mu})$ 5`

四.(20`)讨论鲸鱼种群t时的总量$P(t)$模型

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)(P - m), (k > 0, M > 0, m > 0), P(0) = P_0$$

（1） 如果$m < P_0 < M$，解上述方程；

（2） 求$\lim_{t \to +\infty} P(t)$。

解 （1） $x = P - m$

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - m - x), x_0 = P_0 - m$$ 6`

利用变量可分离法，得

$$P(t) = m + (M - m)[1 - \frac{P(0) - M}{P(0) - m} e^{-(M-m)t}]^{-1}$$ 8`

（2） $\lim_{t \to +\infty} P(t) = M$ 6`

五.(20)已知数据

x	10	20	30	40	50	60	70
y	92	100	118	146	184	232	290

（1） 利用以上数据求其 1 阶拟合多项式；

（2） 用差分法确定最合适的拟合多项式的阶数，据此求 $x = 100$ 时的 y 值。

解 （1） $y = 3.3x + 34$ 6`

（2）

y	92	100	118	146	184	232	290
Δy		8	18	28	38	48	58
$\Delta^2 y$			10	10	10	10	10
$\Delta^3 y$				0	0	0	0

4`

最适合的多项式为 2 阶， 3`

$y = 0.05x^2 - 0.7x + 94$ 。 4`

当 $x = 100$ 时， $y = 524$ 。 3`