一．例题：

➢ **写出积分形式的 Maxwell 方程组及电流连续性方程。**

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}_C+\vec{J}_V+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\;;\qquad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho dV\;;\qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\;;\qquad \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

➢ **写出复数形式的麦克斯韦方程以及电流连续性方程。**

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}};\quad \nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\vec{B}}$$
$$\nabla\cdot\dot{\vec{B}}=0;\quad \nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\dot{\rho};\quad \nabla\cdot\dot{\vec{J}}=-j\omega\dot{\rho}$$
或积分形式

➢ **写出理想导体表面电磁场的边界条件。**

理想导体表面的边界条件为：（媒质 2 为理想导体，$\vec{n}$ 由媒质 2 指向媒质 1）

$\vec{n}\times\vec{H}_1=\vec{J}_S$ 或 $\vec{H}_{1t}=\vec{J}_S$；　　$\vec{n}\times\vec{E}_1=0$ 或 $\vec{E}_{1t}=0$

$\vec{n}\cdot\vec{B}_1=0$ 或 $B_{1n}=0$　　$\vec{n}\cdot\vec{D}_1=\rho_S$ 或 $D_{1n}=\rho_S$

➢ **分别写出标量电位在静电场和恒流电场中两种不同媒质分界面上的边界条件。**

静电场：$\varphi_1=\varphi_2$　$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\rho_s$　或：$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$

恒流场：$\varphi_1=\varphi_2$　$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$　$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\rho_s$

➢ **简述均匀平面电磁波在均匀有耗媒质中的传输特性。**

1）电场、磁场与传播方向之间相互垂直，仍是横电磁波；（1）
2）电场和磁场的振幅呈指数衰减；（2）
3）传播常数为复数，波阻抗为复数，电场和磁场不是同相位；（3）
4）电磁波传播速度变慢，波长变短；（4）
5）电磁波的相速与频率有关，出现色散现象；（5）
6）平均磁场能量密度大于电场能量密度，不再是相等的关系；（6）

➢ **请描述垂直极化波由空气向理想导体平面斜入射时，入射波与反射波的合成波的特性。**

1) 沿分界面方向传输的平面波；　2) 沿分界面法线方向为驻波分布；
3）对于传输方向而言，为横电波。 4）合成波的相速大于无限大空间相速，为快波。

➢ **推导动态矢量磁位满足的波动方程。**

由零恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$ 以及 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，可定义：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，

由零恒等式 $\nabla\times\nabla\varphi=0$ 以及 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$，可定义：$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$，

将两定义代入：由：$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_C+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

可得 $\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}_C+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$　　$\Rightarrow\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}_C-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

由矢量恒等式$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^{2}\vec{A}$

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^{2}\vec{A}=\mu\vec{J}_{C}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}-\mu\varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Rightarrow\ \nabla^{2}\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\mu\vec{J}_{C}$$

由$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}=-\nabla\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla^{2}\varphi\Rightarrow\nabla^{2}\varphi-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

利用洛仑兹条件：$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，即$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

化为：　$\nabla^{2}\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}=-\mu\vec{J}_{C}$　　和　$\nabla^{2}\varphi+\mu\varepsilon\dfrac{\partial^{2}\varphi}{\partial t^{2}}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

$\nabla^{2}\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}=-\mu\vec{J}_{C}$即为动态矢量磁位函数的波动方程。

- **均匀平面波在导体的趋肤深度与电导率的关系是什么？与电磁波频率的关系是什么？**

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

导体的趋肤深度的平方与电导率成反比关系；
导体的趋肤深度的平方与电磁波的频率成反比关系。
导体的电导率越大，电磁波的频率越高，趋肤深度就越小。

- **简述电磁波在无穷大两种不同媒质分界面上发生全反射的两个条件。**

发生全反射的条件为：
1）$k_1>k_2$或$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，即由光密媒质向光疏媒质入射。
2）$\theta_i\geq\arcsin\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)$ 或$\theta_i\geq\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$，即入射角大于临界角。

- **谐振腔固有品质因数的定义是什么？如何提高谐振腔的固有品质因数？**

谐振腔固有品质因数的定义为：$Q_0=2\pi\dfrac{W}{W_0}$

在不考虑谐振腔的输出能量（或无载）的情况下，在谐振频率上，谐振腔中的平均电磁储能与一个振荡周期内谐振腔损耗能量之比的 2π倍。

提高谐振腔的固有品质因数：

1．在一定的条件下，谐振腔的体积应尽量大，以增加谐振腔的储能；

2．在一定的条件下，谐振腔的封闭面应尽量小，以减小谐振腔的损耗；

3．在谐振腔内填充低损耗介质，以增加谐振腔的储能；

4．提高谐振腔壁导体的电导率，以减小谐振腔的损耗；

5．提高谐振腔内壁的光洁度，以减小谐振腔的损耗。

——

二．填空：

- 矢量磁位的库仑规范为： $\nabla \cdot \vec{A} = 0$；矢量磁位的洛仑兹规范为： $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ 。

- 电磁波由无限大媒质 1（ε1，μ0）向无限大媒质 2（ε2，μ0）的分界面上斜入射，能够发生全反射的媒质条件为 $\underline{\varepsilon_1 > \varepsilon_2}$，临界角为 $\underline{\arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}$；布鲁斯特角为 $\underline{\arcsin\sqrt{\varepsilon_2/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \text{ 或 } \arctan\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}$ 。

- 在不同的波导中可以传播不同模式的导波。根据导波的电磁场分布可以将导波分为 TE 波、TM 波、TEM 波以及混合模。其中，TEM 波不能被空心矩形波导传播。

- （请填大于、小于或等于）在同一矩形波导中，TE_{11} 模的截止频率_等于_TM_{11} 模的截止频率；如果在矩形波导中某一工作频率可以同时传输 TE_{10} 模和 TE_{20} 模，则 TE_{10} 模的波导波长_小于__TE_{20} 模的波导波长。

- （请填变大、变小或不变）若谐振腔腔壁金属的电导率减小，其品质因数将_变小_；若谐振腔填充媒质的损耗增加，其品质因数将_变小_。

——————————————————————————————————————

例 1. 无耗介质中（$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$），已知电磁波的电场强度为：（驻波问题）

$$\dot{\vec{E}}=\left(\vec{a}_x-j0.5\vec{a}_y\right)E_0\cos kz \quad \text{V/m}$$

1．求与之相伴的磁场强度的瞬时表达式；

2．求 $z=\dfrac{\lambda}{8}$ 处的平均坡印亭矢量和瞬时坡印亭矢量；

3．求向负 z 方向传播的电磁波分量的极化方式，若为圆或椭圆极化，指出其旋向。

解：

1． 由于此时的波是驻波，因此不能用均匀平面波的公式 $\dot{\vec{H}}=\dfrac{1}{Z}\vec{k}_0\times\dot{\vec{E}}$ 直接求解，须使用 Maxwell 方程，它在任何情况下都是成立的。（或者可以拆为两个传播方向相反的均匀平面波分别用阻抗关系求解再合并）

由 Maxwell 方程，和 $\dot{\vec{E}}=\left(\vec{a}_x-j0.5\vec{a}_y\right)E_0\cos kz \quad \text{V/m}$ 得：

$$\dot{\vec{H}}=\frac{1}{-j\omega\mu}\nabla\times\dot{\vec{E}}=\frac{1}{-j\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z\right)\times\left[\left(\vec{a}_x-j0.5\vec{a}_y\right)E_0\cos kz\right]=\frac{kE_0}{\omega\mu}\left(0.5\vec{a}_x-j\vec{a}_y\right)\sin kz$$

$$\vec{H}(t)=\frac{kE_0}{\omega\mu}\left(0.5\vec{a}_x\cos\omega t+\vec{a}_y\sin\omega t\right)\sin kz$$

2． 由于场为纯驻波，所以平均坡印亭矢量 $\vec{S}_{av}=0$；

或可以演算：

瞬时坡印亭矢量为：$\vec{S}_{av}=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{S}}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=\mathrm{Re}\left(j\dfrac{5}{8}\cos kz\dfrac{kE_0^2}{\omega\mu}\sin kz\vec{a}_z\right)=0$

$\vec{E}(t)=\left(\vec{a}_x\cos\omega t+0.5\vec{a}_y\sin\omega t\right)E_0\cos kz$；$\vec{H}(t)=\dfrac{kE_0}{\omega\mu}\left(0.5\vec{a}_x\cos\omega t+\vec{a}_y\sin\omega t\right)\sin kz$；

$\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)=\vec{a}_z\dfrac{3}{16}\dfrac{kE_0^2}{\omega\mu}\sin 2kz\sin 2\omega t$； $\vec{S}\left(t,\dfrac{\lambda}{8}\right)=\vec{a}_z\dfrac{3}{16}\dfrac{kE_0^2}{\omega\mu}\sin 2\omega t$

3． -z 方向的电磁波分量为：$\dot{\vec{E}}=\left(\vec{a}_x-j0.5\vec{a}_y\right)E_0e^{jkz} \quad \text{V/m}$

由于 $\Phi_x-\Phi_y=\dfrac{\pi}{2}$，且 $E_{xm}\neq E_{ym}$，且向-z 方向传播，所以为左旋椭圆极化波。

———

例 2. 一平面波，其电场强度为： $\dot{\vec{E}}=\left[2j\vec{a}_x+1.5j\vec{a}_z\right]e^{-j\pi(1.2x-j0.2y-1.6z)}$ V/m。（TEM 波问题）

1．求此平面波的传播方向 $\vec{k}_0$、相位常数 β；

2．求该平面波磁场的复数表达式；

3．请问此平面波是否为 TEM 波，并给出理由？

4．求此平面波的极化特性。

解: (1) 由电场强度可知， $\dot{\vec{E}}=\left[2j\vec{a}_x+1.5j\vec{a}_z\right]e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}$ V/m

$$\beta=\pi\sqrt{1.2^2+1.6^2}=2\pi\ \text{rad/m}；\quad \vec{k}_0=\frac{1.2\pi\vec{a}_x-1.6\pi\vec{a}_z}{\beta}=0.6\vec{a}_x-0.8\vec{a}_z$$

(2) 由电场强度可知， $\dot{\vec{E}}=\left[2j\vec{a}_x+1.5j\vec{a}_z\right]e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}$ V/m

$$\dot{\vec{H}}=j\frac{1}{\omega\mu}\nabla\times\dot{\vec{E}}=j\frac{1}{\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z\right)\times\left[2j\vec{a}_x+1.5j\vec{a}_z\right]e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}$$

$$=j\frac{1}{\omega\mu}\left[-\vec{a}_xj0.3\pi-\vec{a}_y5\pi+\vec{a}_zj0.4\pi\right]e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}$$

(3) $\vec{k}_0\cdot\dot{\vec{E}}=\left(0.6\vec{a}_x-0.8\vec{a}_z\right)\cdot\left[2j\vec{a}_x+1.5j\vec{a}_z\right]e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}=0$

$$\vec{k}_0\cdot\dot{\vec{H}}=\left(0.6\vec{a}_x-0.8\vec{a}_z\right)\cdot\left[-\vec{a}_xj0.3\pi-\vec{a}_y5\pi+\vec{a}_zj0.4\pi\right]j\frac{1}{\omega\mu}e^{-0.2\pi y}e^{-j\pi(1.2x-1.6z)}\neq0$$

此平面波的传播方向与电场垂直，与磁场不垂直，因此此波不是 TEM 波。

(4) 此波为 TE 波， $\dot{E}_x$ 与 $\dot{E}_z$ 相位差为 0，极化特性为一线极化波。

———

例 3. **一均匀平面电磁波在无耗媒质（$\varepsilon_r=4$，$\mu_r=1$）中传播，已知其电场强度矢量的表达式为：$\vec{E}=\left[3\vec{a}_x+A\vec{a}_y-5j\vec{a}_z\right]e^{-j4\pi(4x+3y+Cz)}$ V/m，其中 A 和 C 为待定实系数。**

（均匀平面波问题）

1．求待定系数 A 和 C。

2．求此电磁波的传播方向 $\vec{k}_0$ 和传播常数 k。

3．求此电磁波的工作频率和在此无耗媒质中的波长。

4．请给出其磁场的瞬时表达式。

5．求此电磁波的极化状态，若为圆极化或椭圆极化，请指出其旋向。

解：(1) $\vec{k}=4\pi\left(4\vec{a}_x+3\vec{a}_y+C\vec{a}_z\right)$

$\dot{E}\cdot\vec{k}=0\Leftrightarrow\left(3\vec{a}_x+A\vec{a}_y-5j\vec{a}_z\right)\cdot4\pi\left(4\vec{a}_x+3\vec{a}_y+C\vec{a}_z\right)=0\Rightarrow A=-4;\quad \text{C=0}$

(2) $\dot{E}=\left[3\vec{a}_x-4\vec{a}_y-5j\vec{a}_z\right]e^{-j4\pi(4x+3y)}=\dot{E}_0e^{-j4\pi(4x+3y)}$

$\vec{k}_0=\frac{4}{5}\vec{a}_x+\frac{3}{5}\vec{a}_y$， $k=20\pi$

(3) $v=c\big/\sqrt{\varepsilon_r}=1.5\times10^8$ m/s； $f=kv\big/2\pi=15\times10^8=1.5\text{GHz}$, $\lambda=\frac{2\pi}{k}=0.1$ m

(4) $\dot{H}_0=\frac{1}{Z}\vec{k}_0\times\dot{E}_0=\frac{1}{120\pi/2}\left(\frac{4}{5}\vec{a}_x+\frac{3}{5}\vec{a}_y\right)\times\left(3\vec{a}_x-4\vec{a}_y-5j\vec{a}_z\right)=\frac{1}{60\pi}\left(-5\vec{a}_z+j\left(4\vec{a}_y-3\vec{a}_x\right)\right)$

$\dot{H}=\frac{1}{60\pi}\left[-5\vec{a}_z+j\left(4\vec{a}_y-3\vec{a}_x\right)\right]e^{-j4\pi(4x+3y)}$ A/m

$\vec{H}(t)=\frac{1}{60\pi}\left[-5\vec{a}_z\cos\left(3\pi\times10^9t-4\pi(4x+3y)\right)-\left(4\vec{a}_y-3\vec{a}_x\right)\sin\left(3\pi\times10^9t-4\pi(4x+3y)\right)\right]$ A/m

(5) $\dot{E}=\dot{E}_{01}+\dot{E}_{02}$，其中 $\dot{E}_{01}=3\vec{a}_x-4\vec{a}_y=5\left(\frac{3}{5}\vec{a}_x-\frac{4}{5}\vec{a}_y\right)$; $\dot{E}_{02}=(-5j)\vec{a}_z$

$\left|\dot{E}_{01}\right|=\left|\dot{E}_{02}\right|=5$； $\varphi_{\dot{E}_{01}}-\varphi_{\dot{E}_{02}}=\frac{\pi}{2}$; $\vec{k}_{0\dot{E}_{01}}\times\vec{k}_{0\dot{E}_{02}}=\left(\frac{3}{5}\vec{a}_x-\frac{4}{5}\vec{a}_y\right)\times\vec{a}_z=-\left(\frac{3}{5}\vec{a}_y+\frac{4}{5}\vec{a}_x\right)=-\vec{k}_0$

为左旋圆极化

———————————————————————————————————————

例 4. 一均匀平面波自空气（ε_0，μ_0）向理想介质（$\varepsilon=4\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$）表面（$z=0$）斜入射。若入射波的磁场为：$\dot{H}_i=\left(\sqrt{3}\vec{a}_x+\vec{a}_z\right)e^{j\left(2x-2\sqrt{3}z\right)}$ A/m。

（垂直极化波斜入射问题）

1．求此平面波的角频率以及在此理想介质中的波长；

2．求入射角 θ_i 和折射角 θ_t；

3．给出入射波电场强度的瞬时表达式；

4．给出折射波电场强度的复数表达式；

5．求从分界面上每单位面积进入理想介质中的平均功率。

解：

1． 由 $\dot{H}_i=\left(\sqrt{3}\vec{a}_x+\vec{a}_z\right)e^{j2\left(x-\sqrt{3}z\right)}$ A/m，

$\vec{k}_i=-2\vec{a}_x+2\sqrt{3}\vec{a}_z\Rightarrow k_i=4$； $\omega=v_pk_i=C_0k_i=3\times10^8\times4=12\times10^8$ rad/s

$k_t=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=2k_i=8$ rad/m， $\lambda=\frac{2\pi}{k_t}=\frac{\pi}{4}=0.785$ m

2． $\cos\theta_i=\vec{a}_z\cdot\vec{k}_0=\vec{a}_z\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow\theta_i=30°$

$k_1\sin\theta_i=k_2\sin\theta_t$， $\theta_t=\arcsin\left(\frac{k_1\sin\theta_i}{k_2}\right)=\arcsin\frac{1}{4}=14.48^\circ$

3． $\vec{k}_{i0}=\frac{\vec{k}_i}{k_i}=-\frac{1}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z$

$$\dot{\vec{E}}_i = Z\dot{\vec{H}}_i \times \vec{k}_0 = 120\pi\left(\sqrt{3}\vec{a}_x + \vec{a}_z\right)e^{j2\left(x-\sqrt{3}z\right)} \times \left(-\frac{1}{2}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z\right) = -240\pi\vec{a}_y e^{j2\left(x-\sqrt{3}z\right)} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_i\left(t\right) = -240\pi\vec{a}_y \cos\left(\omega t + 2x - 2\sqrt{3}z\right) \text{ V/m}$$

4．由于分界面是 z=0（XOY）平面，且入射面为 XOZ 平面，所以为**垂直极化波的斜入射**，

$$\dot{E}_{i0} = -240\pi\vec{a}_y \text{ V/m}，\ \sin\theta_t = \frac{1}{4}，\ \cos\theta_t = \frac{\sqrt{15}}{4}\ ，\ Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{Z_1}{2} = 60\pi\ \Omega$$

$$T_\perp = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.618$$

$$\dot{E}_{t0} = T_\perp \dot{E}_{i0} = 0.618\cdot\left(-240\pi\right) = -148.32\pi = -466.0 \text{ V/m}$$

$$\dot{\vec{E}}_t = \vec{a}_y \dot{E}_{t0} e^{-jk_t\left(-x\sin\theta_t + z\cos\theta_t\right)} = \vec{a}_y \dot{E}_{t0} e^{-j8\left(-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{15}}{4}z\right)} = -\vec{a}_y 466.0 e^{j2\left(x-\sqrt{15}z\right)} \text{ V/m}$$

5．理想介质中每单位面积的平均功率为：

$$\vec{S}_{av2} = \text{Re}\left(\dot{\vec{S}}_2\right) = \frac{1}{2}\frac{E_{t0}^2}{Z_2}\left(-\frac{1}{4}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{15}}{4}\vec{a}_z\right) = \frac{1}{2}\frac{466^2}{60\pi}\left(-\frac{1}{4}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{15}}{4}\vec{a}_z\right)$$

$$= 576\left(-\frac{1}{4}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{15}}{4}\vec{a}_z\right) \text{ W/m}^2$$

从分界面上每单位面积进入理想介质中的平均功率为：

$S_{av0} = \vec{S}_{av}\cdot\vec{a}_z$ 或 $S_{av0} = S_{av}\cdot\cos\theta_t$

例 5. 一均匀平面波自一理想介质（$\varepsilon = 2\varepsilon_0$，$\mu = \mu_0$）向空气（$\varepsilon_0$，$\mu_0$）斜入射，分界面为 $z = 0$ 平面。若入射波的电场为：**（平行极化波斜入射问题，全反射问题）**

$$\dot{\vec{E}}_i = 120\pi\left(\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_z\right)e^{j(Az-x)} \text{ V/m}，\ A \text{为待定系数。}$$

1．求：①待定系数 A，②入射波的波数 k_i，③平面波的角频率，④平面波在此理想介质中的波长；

2．求入射角 θ_i 和折射角 θ_t；

3．给出折射波磁场的瞬时表达式；

4．求从分界面上每单位面积进入空气中的平均功率。

5．若此理想介质的变为媒质参数 $\varepsilon = 4\varepsilon_0$，$\mu = \mu_0$ 的理想介质，请给出在此条件下此理想介质里磁场的复数表达式，并说明此组合波的特性。

解：

1． ①由 $\dot{\vec{E}}_i = 120\pi\left(\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_z\right)e^{j(Az-x)}$ V/m，

$\vec{k}_i = \vec{a}_x - A\vec{a}_z$，$\vec{E}_0 = 120\pi\left(\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_z\right)$，则 $\vec{k}_0\cdot\vec{E}_0 = 0 \Rightarrow A = -\sqrt{3}$。

② $\vec{k}_i = \vec{a}_x + \sqrt{3}\vec{a}_z \Rightarrow k_i = 2$

③ $\omega = v_p k_i = C_0 k_i/\sqrt{\varepsilon_r} = 3\sqrt{2}\times10^8 = 4.24\times10^8$ rad/s

④ $\lambda = \dfrac{2\pi}{k_i} = \pi = 3.14$ m

2. $\cos\theta_i=\vec{a}_z\cdot\vec{k}_0=\vec{a}_z\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta_i=30°$

$$k_1\sin\theta_i=k_2\sin\theta_2\ ,\ \theta_t=\arcsin\left(\frac{k_1\sin\theta_i}{k_2}\right)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=45^{\circ}$$

3. 由于分界面是 z=0（XOY）平面，且入射面为 XOZ 平面，所以为平行极化波斜入射，

$$\vec{k}_{i0}=\frac{\vec{k}_i}{k_i}=\frac{1}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z\text{；}\ \dot{\vec{E}}_i=120\pi\left(\sqrt{3}\vec{a}_x-\vec{a}_z\right)e^{-j\left(x+\sqrt{3}z\right)}\ \ \text{V/m，}\dot{\vec{E}}_{i0}=240\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_x-\frac{1}{2}\vec{a}_z\right)\ \ \text{V/m}$$

$$\dot{\vec{H}}_{i0}=\frac{\vec{k}_0}{Z_1}\times240\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_x-\frac{1}{2}\vec{a}_z\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_x-\frac{1}{2}\vec{a}_z\right)=2\sqrt{2}\vec{a}_y$$

$$k_2=k_1/\sqrt{2}=\sqrt{2}\text{；}\ \sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ \cos\theta_t=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{；}\ Z_1=\frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}=\frac{Z_2}{\sqrt{2}}=266.6\ \Omega$$

$$R_{//}=\frac{Z_2\cos\theta_2-Z_1\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_2+Z_1\cos\theta_1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=0.0718\ \ \text{或}\ R_{//}=\frac{Z_1\cos\theta_1-Z_2\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_2+Z_1\cos\theta_1}=-0.0718$$

$$T_{//H}=\frac{2Z_1\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_2+Z_1\cos\theta_1}=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=0.9282$$

$$\dot{\vec{H}}_{t0}=T_{//H}\cdot\dot{\vec{H}}_{i0}=2\sqrt{2}\cdot0.9282\vec{a}_y=2.625\vec{a}_y\ \ \text{A/m}$$

$$\dot{\vec{H}}_t=\vec{a}_y\dot{H}_{t0}e^{-jk_2\left(x\sin\theta_2+z\cos\theta_2\right)}=\vec{a}_y\dot{H}_{t0}e^{-j\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)}=\vec{a}_y2.625e^{-j(x+z)}\ \ \text{A/m}$$

$$\vec{H}_t(t)=\vec{a}_y2.625\cos\left(\omega t-x+z\right)\ \text{A/m}=\vec{a}_y2.625\cos\left(4.24\times10^8t-x+z\right)$$

4. 理想介质中每单位面积的平均功率为：

$$\vec{S}_{av2}=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{S}}_2\right)=\frac{1}{2}Z_2H_{t0}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_z\right)=1.299\times10^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_z\right)\ \ \text{W/m}^2$$

从分界面上每单位面积进入理想介质中的平均功率为：

$$S_{av0}=\vec{S}_{av}\cdot\vec{a}_z=1.298\times10^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=918.7\ \ \text{W/m}^2$$

5. $\theta_C=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\arcsin\frac{1}{2}=30^{\circ}$， $\theta_i=\theta_C$，此时发生全反射。$R=1$。$k_1=2k_2=2\sqrt{2}$

$$\dot{\vec{H}}_{r0}=R_{//}\cdot\dot{\vec{H}}_{i0}=2\sqrt{2}\vec{a}_y\ \ \text{A/m；}$$

$$\dot{\vec{H}}_1=\dot{\vec{H}}_{i0}e^{-j\sqrt{2}\left(x+\sqrt{3}z\right)}+\dot{\vec{H}}_{r0}e^{-j\sqrt{2}\left(x-\sqrt{3}z\right)}=\vec{a}_y4\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{6}z\right)e^{-j\sqrt{2}x}\ \ \text{A/m；}$$

此波在分界面法向 z 方向上是驻波，在分界面方向上是行波。

例 6. 一频率为 180MHz 的均匀平面电磁波由空气（$z<0$）（$\varepsilon_1=\varepsilon_0$， $\mu_1=\mu_0$）向一有耗媒质（$z>0$）（$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$， $\mu_2=\mu_0$， $\sigma_2=16\ \ \text{S/m}$）垂直入射，空气和有耗媒质的分界面为 $z=0$ 平面。已知在分界面上的磁场强度矢量的瞬时表达式为：

$\vec{H}_0(t)=\left[\vec{a}_x\cos(\omega t)\ +2\vec{a}_y\sin(\omega t)\right]\ \text{A/m}$。 （有耗媒质垂直入射问题）

1．求空气中和有耗媒质中此电磁波的波数 k_1 和 k_2。

2．求分界面上的电场强度的复数表达式。

3．求分界面上的反射系数和折射系数。

4．求空气中的电场强度的复数表达式。

5．求有耗媒质中距分界面 $\dfrac{1}{48\pi}$ m 处，折射波的平均功率密度。

解 1. $k_1 = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \dfrac{2\pi\times1.8\times10^8}{3\times10^8} = 1.2\pi$， $\dfrac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2} = \dfrac{16\times36\pi\times10^9}{2\pi\times1.8\times10^8\times4} = 400 >> 1$ 为良导体

$$\dot{k}_2 \approx \sqrt{\omega\mu_2\sigma_2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2\pi\times1.8\times10^8\times4\pi\times10^{-7}\times16}\ e^{-j\frac{\pi}{4}} = 48\pi\ e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

2. $k_2 = \beta - j\alpha \approx 48\pi e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \alpha \approx \beta = 24\sqrt{2}\pi \approx \sqrt{\dfrac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}$

$$R_s \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}} = \frac{\alpha}{\sigma_2} = \frac{24\sqrt{2}\pi}{16} = 1.5\sqrt{2}\pi \quad , \quad \dot{Z}_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\sigma_2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}R_s e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\ \Omega$$

$$\dot{\vec{H}}_0 = \left(\vec{a}_x - 2j\vec{a}_y\right)\ \text{A/m}$$

$$\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}}_2(z=0) = \dot{Z}_2\dot{\vec{H}}_0\times\vec{a}_z \approx \sqrt{2}R_s e^{j\frac{\pi}{4}}\left(\vec{a}_x - 2j\vec{a}_y\right)\times\vec{a}_z = -3\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\left(2j\vec{a}_x + \vec{a}_y\right)\ \text{V/m}$$

3. $$\dot{R} = \frac{\dot{Z}_2 - Z_1}{\dot{Z}_2 + Z_1} = \frac{3\pi e^{j\frac{\pi}{4}} - 120\pi}{3\pi e^{j\frac{\pi}{4}} + 120\pi} = \frac{1 - 40\sqrt{2} + j}{1 + 40\sqrt{2} + j} = \frac{55.58\angle179^\circ}{57.58\angle1^\circ} = 0.965\angle178^\circ$$

$$\dot{T} = \frac{2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + Z_1} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{4}} + 40} = \frac{2\angle45^\circ}{40.7\angle1^\circ} = 0.049\angle44^\circ$$

4. $$\dot{\vec{E}}_{i0} = \frac{\dot{\vec{E}}_0}{\dot{T}} = -\frac{3\pi e^{j45^\circ}}{0.049e^{j44^\circ}}\left(2j\vec{a}_x + \vec{a}_y\right) = 192.3e^{j1^\circ}\left(2j\vec{a}_x + \vec{a}_y\right)\ \text{V/m}$$

$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_{i0}\left(e^{-jk_1z} + \dot{R}e^{jk_1z}\right) = 192.3e^{j1^\circ}\left(2j\vec{a}_x + \vec{a}_y\right)\left(e^{-j1.2\pi z} + 0.965e^{j178^\circ}e^{j1.2\pi z}\right)\ \text{V/m}$$

5. $$\vec{S}_{avt}(z) = \vec{S}_{avt0}e^{-2\alpha z} = \vec{a}_z\frac{\left|\dot{H}_0\right|^2\left|\dot{Z}_2\right|}{2}\cos\frac{\pi}{4}e^{-2\alpha z} = \vec{a}_z\frac{5\times3\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2\alpha z} = \vec{a}_z\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}e^{-2\alpha z}$$

或$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}_t\times\dot{\vec{H}}_t^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(-3\pi)e^{j\frac{\pi}{4}}\left(2j\vec{a}_x + \vec{a}_y\right)\times\left(\vec{a}_x - 2j\vec{a}_y\right)^*\right]e^{-2\alpha z} = \vec{a}_z\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}e^{-2\alpha z}$$

$$\vec{S}_{avt}\left(z = \frac{1}{48\pi}\right) = \vec{a}_z\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}e^{-2\times24\sqrt{2}\pi\times\frac{1}{48\pi}} = \vec{a}_z\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}} = \vec{a}_z 4.05\ \ \text{W/m}^2$$

——

例 7．矩形波导的横截面尺寸为 23mm x 10mm，内部填充空气。 （截止模式的问题）

1．当工作频率为 TE_{10} 模截止频率的 1.3 倍时，波导中能够传输哪些模式？求出这些传输模式的截止波长、相速、波导波长与波阻抗。

2．当工作频率为 TE_{10} 模截止频率的 1.3 倍时，该波导截止模式中最低的（截止波长最长）一个高次模是哪个模式？该高次模式在波导中经过一个波长（此电磁波在空气中的波长）后，

其电场幅度衰减了多少分贝（dB）？

3．当波导内填充空气时，在矩形波导传输方向上相距 20mm 长的两截面处用理想导体平面短路，形成尺寸为 23mmX10mmX20mm 的矩形谐振腔，试确定谐振腔的主模及对应的谐振频率。

解：（1）$\lambda_{C\ TE10}=2a=46\text{mm}$ $\lambda_{C\ TE01}=2b=20\text{mm}$ $\lambda_{C\ TE20}=a=23\text{mm}$；

其他模式截止波长小于 λ_{CTE01}，

$$\frac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}}=\frac{f_{C\ TE10}}{f}=\frac{1}{1.3} \qquad \lambda=\frac{46}{1.3}=35.38\text{mm} \qquad f=\frac{C_0}{\lambda}=8.48\text{ GHz}$$

所以能够传输的模式为 TE_{10} 模，也为最低模式（主模）

$$\lambda_{C\ TE10}=2a=46\text{mm} \qquad \left(f_{C\ TE10}=\frac{C_0}{\lambda_{C\ TE10}}=\frac{3\times10^8}{46\times10^{-3}}=6.52\text{ GHz}\right)$$

$$V_{p\ TE10}=\frac{2\pi}{k_z}=\frac{C_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{C\ TE10}}{f}\right)^2}}=\frac{3\times10^8}{0.639}=4.695\times10^8\text{ m/s}$$

$$\lambda_{g\ TE10}=\frac{V_{p\ TE10}}{f}=\frac{4.695\times10^8}{8.48\times10^9}=0.055\text{ m}, \qquad Z_{TE10}=\frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}}\right)^2}}=\frac{377}{0.639}=590\ \Omega$$

（2）由于 $\lambda_{C\ TE10}=46\text{mm}>\lambda>\lambda_{C\ TE20}=23\text{mm}>\lambda_{C\ TE01}=20\text{mm}$，

所以在截止模式中最低的高次模为 TE_{20} 模。

$$\gamma=\alpha=jk_z=k\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cTE20}}\right)^2-1}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{2a/1.3}{a}\right)^2-1}=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot1.17$$

该高次模经过一个波长后的衰减量为：$L(\text{dB})=-20\log\left(e^{-\gamma z}\right)=-20\log\left(e^{-2\pi\cdot1.17}\right)=63.85\text{ dB}$

（3）按题意有：$a=23\text{mm}$ $b=10\text{mm}$ $d=20\text{mm}$，

因此，此谐振腔的主模是 TE（H）101 模，

其谐振波长为：$\lambda_{101}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2+\left(\frac{1}{2d}\right)^2}}=30.18\text{ mm}$ ，

其谐振频率为：$f=\dfrac{C_0}{\lambda_{101}}=9.94\text{ GHz}$

例 8. 一内部填充空气的理想矩形波导，电磁波在此波导中的传输方向为+z 方向，其横截面尺寸为 a x b=6mm x 2mm，横截面宽边与 x 轴平行，窄边与 y 轴平行。已知在矩形波导中 TE 波的电磁场的场强表达式为：（谐振腔中场的推导）

$$\begin{cases} \dot{E}_x = j\dfrac{\omega\mu k_y}{k_T^2}\dot{H}_0\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-jk_z z} & \dot{H}_x = j\dfrac{k_x k_z}{k_T^2}\dot{H}_0\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{E}_y = -j\dfrac{\omega\mu k_x}{k_T^2}\dot{H}_0\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} & \dot{H}_y = j\dfrac{k_y k_z}{k_T^2}\dot{H}_0\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{E}_z = 0 & \dot{H}_z = \dot{H}_0\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} \end{cases}$$

1．请写出此矩形波导中 TE_{10} 模的电磁场的场强表达式。

2．在 TE_{10} 模的已给出电力线的场分布宽边剖面图上补画出磁力线，并标明方向。

3．当工作频率为该波导中 TE_{10} 模截止频率的 2.6 倍时，波导中能够传输哪些模式？并求出这些传输模式中波导主模的①截止波长、②相速、③波导波长与④波阻抗。

4. 当工作波长为该波导中 TE_{10} 模截止波长的 0.6 倍时，若垂直于此矩形波导的传输方向，放置一短路理想导体平板 A，请问在沿 z 方向上测得的电场强度振幅的最大值与最小值之间的距离为多少？

5．若垂直于此矩形波导的传输方向，距平板 A 相隔 8mm 处再放置一短路理想导体平板 B，形成尺寸为 6mm x 2mm x 8mm 的矩形谐振腔，试确定此谐振腔的主模及对应的谐振频率。

6. 请根据 TE_{10} 模的电磁场的表达式，推导出此矩形谐振腔中 H_{101} 模的电磁场的场强表达式。

解:（1）

$$\begin{cases} \dot{E}_x = j\dfrac{\omega\mu k_y}{k_T^2}\dot{H}_0\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{E}_y = -j\dfrac{\omega\mu k_x}{k_T^2}\dot{H}_0\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{E}_z = 0 \\ \dot{H}_x = j\dfrac{k_x k_z}{k_T^2}\dot{H}_0\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{H}_y = j\dfrac{k_y k_z}{k_T^2}\dot{H}_0\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-jk_z z} \\ \dot{H}_z = \dot{H}_0\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} \end{cases} \xrightarrow[k_x=\frac{\pi}{a},\ k_y=0]{m=1,\ n=0} \begin{cases} \dot{E}_x = 0 \\ \dot{E}_y = -j\dfrac{\omega\mu a}{\pi}\dot{H}_0\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_z z} \\ \dot{E}_z = 0 \\ \dot{H}_x = j\dfrac{k_z a}{\pi}\dot{H}_0\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_z z} \\ \dot{H}_y = 0 \\ \dot{H}_z = \dot{H}_0\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_z z} \end{cases}$$

（2）画图，

（3）

$\lambda_{C\ TE10} = 2a = 12\text{mm}$　　$\lambda_{C\ TE01} = 2b = 4\text{mm}$　　其他模式截止波长小于 λ_{TE01}，

$\lambda_{C\ TE20} = a = 6\text{mm}$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}} = \frac{f_{C\ TE10}}{f} = \frac{1}{2.6} \qquad \lambda = \frac{12}{2.6} = 4.6\text{mm} \qquad f = \frac{C_0}{\lambda} = 65\ \text{GHz}$$

所以能够传输的模式为 TE_{10} 和 TE_{20} 模，其中 TE_{10} 为最低模式（主模）

① $\lambda_{C\ TE10} = 2a = 12\text{mm}$ $\quad f_{C\ TE10} = \dfrac{C_0}{\lambda_{C\ TE10}} = \dfrac{3\times10^8}{12\times10^{-3}} = 25\ \text{GHz}$

② $V_{p\ TE10} = \dfrac{C_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{C\ TE10}}{f}\right)^2}} = \dfrac{3\times10^8}{12/13} = 3.25\times10^8\ \text{m/s}$

③ $\lambda_{g\ TE10} = \dfrac{V_{p\ TE10}}{f} = \dfrac{3.25\times10^8}{65\times10^9} = 5\ \text{mm}$ ④ $Z_{TE10} = \dfrac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}}\right)^2}} = \dfrac{120\pi}{12/13} = 408.4\ \Omega$

（4）$\dfrac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}} = \dfrac{f_{C\ TE10}}{f} = \dfrac{0.6}{1} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \lambda = 12\times0.6 = 7.2\text{mm}$，所以此时能够传输的模式只有 TE_{10} 模。

$$\lambda_g = \lambda\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{C\ TE10}}\right)^2} = \lambda\Big/\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 9\ \text{mm}$$

在沿 z 方向上测得的电场强度振幅的最大值与最小值之间的距离为：

$$\frac{2n-1}{4}\lambda_g = \frac{2n-1}{4}\times9\text{mm} = (2n-1)2.25\ \ \text{mm}\quad \text{n=1,2,3.......}$$

（5）按题意有：$a = 6\text{mm}\ \ b = 2\text{mm}\ \ d = 8\text{mm}$，因此，此谐振腔的主模是 TE（H）101 模，

其谐振波长为：$\lambda_{101} = \dfrac{2\pi}{k_{101}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2d}\right)^2}}$=9.6 mm ，谐振频率为：$f = \dfrac{C_0}{\lambda_{101}} = 31.25\ \text{GHz}$

（6）对于入射波有：

$$\begin{cases} \dot{E}_y^+ = -j\dfrac{\omega\mu a}{\pi}\dot{H}_0^+\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_{z10}z} \\ \dot{H}_x^+ = j\dfrac{k_{z10}a}{\pi}\dot{H}_0^+\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_{z10}z} \\ \dot{H}_z^+ = \dot{H}_0^+\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-jk_{z10}z} \\ \dot{H}_y^+ = \dot{E}_x^+ = \dot{E}_z^+ = 0 \end{cases}$$

对于反射波有：

$$\begin{cases} \dot{E}_y^- = -j\dfrac{\omega\mu a}{\pi}\dot{H}_0^-\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{jk_{z10}z} \\ \dot{H}_x^- = -j\dfrac{k_{z10}a}{\pi}\dot{H}_0^-\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{jk_{z10}z} \\ \dot{H}_z^- = \dot{H}_0^-\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{jk_{z10}z} \\ \dot{H}_y^- = \dot{E}_x^- = \dot{E}_z^- = 0 \end{cases}$$

合成场为：

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -j\omega\mu\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\left(\dot{H}_0^+ e^{-jk_{z10}z} + \dot{H}_0^- e^{jk_{z10}z}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ \dot{H}_x = jk_{z10}\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\left(\dot{H}_0^+ e^{-jk_{z10}z} - \dot{H}_0^- e^{jk_{z10}z}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ \dot{H}_z = \left(\dot{H}_0^+ e^{-jk_{z10}z} + \dot{H}_0^- e^{jk_{z10}z}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ \dot{H}_y = \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \end{cases}$$

设两短路理想导体片位置为 z=0 和 z=d 处。由 z=0 处的边界条件有：$\dot{E}_y^+ + \dot{E}_y^- = 0 \Rightarrow \dot{H}_0^+ = -\dot{H}_0^-$，

因此有：

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -2\omega\mu\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\dot{H}_0^+ \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_x = j2k_{z10}\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\dot{H}_0^+ \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\cos\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_z = -2j\dot{H}_0^+ \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_y = \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \end{cases}$$

记：$\dot{H}_0 = -j2\dot{H}_0^+$ ，有：

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -j\omega\mu\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\dot{H}_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_x = -k_{z10}\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\dot{H}_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\cos\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(k_{z10}z\right) \\ \dot{H}_y = \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \end{cases},$$

由 z=d 处的边界条件有：$\dot{E}_y = 0 \Rightarrow k_{z10}d = \pi \Rightarrow k_{z10} = \dfrac{\pi}{d}$，

所以矩形谐振腔中 H_{101} 模的电磁场的场强表达式为：

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -2\omega\mu\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\dot{H}_0^+ \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_x = j2\left(\dfrac{a}{d}\right)\dot{H}_0^+ \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_z = -2j\dot{H}_0^+ \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_y = \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{E}_y = -j\omega\mu\dot{H}_0\left(\dfrac{a}{\pi}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_x = -\dot{H}_0\left(\dfrac{a}{d}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{d}z\right) \\ \dot{H}_y = \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0 \end{cases}$$