

# 13 проблема Гильберта и нейронные сети

# Если мы умеем складывать и умножать

- ТО МЫ МОЖЕМ ВЫЧИСЛЯТЬ
  - многочлены и
  - рациональные функции (отношения многочленов) с рациональными коэффициентами от рациональных же аргументов.

- Древние греки на этом остановились.
- Задача удвоения куба
- Задача о квадратуре круга

# если использовать радикалы

- решения уравнений  $x^a=b$
- *и можно решать уравнения первой, второй, третьей и четвертой степеней*
- *а уравнения пятой степени уже не решить*

# Вопрос

- Какими функциями можно обойтись, чтобы с помощью этих функций построить решение любого уравнения?

# 13 проблема Гильберта

- Представляется ли корень уравнения
- $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$
- (как функция коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ )  
суперпозицией каких-либо  
непрерывных функций двух  
переменных?

- А.Н.Колмогоров, затем В.И.Арнольд и вновь А.Н.Колмогоров решили эту проблему:

- можно получить любую непрерывную функцию  $n$  переменных с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций *одного* переменного.



# теорема Колмогорова

- *Каждая непрерывная функция  $n$  переменных, заданная на единичном кубе  $n$ -мерного пространства, представима в виде*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left[ \sum_{p=1}^n \varphi_q^p(x_p) \right],$$

# теорема Колмогорова

- где функции  $h_q(u)$  непрерывны, а функции  $\varphi_q^p(x_p)$ , кроме того, еще и стандартны, т.е. не зависят от выбора функции  $f$ .

# Например,

- каждая непрерывная функция двух переменных  $x, y$  представима в виде

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^5 h_q [\varphi_q(x) + \psi_q(y)].$$

- "Внутренние" функции  $\varphi_q(x)$  и  $\psi_q(y)$  представления совершенно не зависят от исходной функции .

# Следствие

- Из теоремы Хехт-Нильсена следует представимость любой многомерной функции нескольких переменных с помощью нейронной сети фиксированной размерности.
- Неизвестными остаются следующие характеристики функций активации нейронов:
  - - ограничения области значений (координаты асимптот) сигмоидальных функций активации нейронов скрытого слоя;
  - - наклон сигмоидальных функций активации;
  - - вид функций активации нейронов выходного слоя.

# Какое это имеет значение на практике?

- Практически никакого,
- так как мы не верим в точное совпадение.
- В том смысле, как это обсуждалось в теме о кросс-валидацию.

# Какое это имеет значение на практике?

Очень важно!

Мы знаем, что в комнате есть кошка!

Нейронной сетью можно приблизить любую измеримую функцию

В частности, любую непрерывную.











