

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ П/4-DQPSK

**А.С. Першин[@],
И.С. Попов,
А.А. Каргапольцев,
А.А. Алексеев**

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

[@]Автор для переписки, e-mail: www.alexander17@inbox.ru

В данной исследовательской работе ставилась задача практического подтверждения функциональной состоятельности построенной математической модели. Реализация производилась в системе математических вычислений Octave. Полученные, в ходе исследования, результаты позволяют нам сделать вывод о том, что, используя современную техническую элементную базу, реализация данной системы возможна на базе цифровых устройств обработки сигнала.

Ключевые слова: система передачи сигналов, модуляция, математическое моделирование.

RESEARCH AND PRACTICAL IMPLEMENTATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE TRANSMISSION SYSTEM П/4-DQPSK

**A. S. Pershin[@],
I. S. Popov,
A. A. Kargapol'tsev,
A.A. Alexeyev**

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

[@]Corresponding author e-mail: www.alexander17@inbox.ru

In this research was set the task of practical confirmation of the functional viability the constructed mathematical model. The practical implementation was carried out in system of mathematical calculations the Octave. The results obtained during the study allow us to conclude that, using modern technical element base, the implementation of this system is possible on the basis of digital signal processing devices.

Keywords: signal transmission system, modulation, noise-resistant coding, mathematical modeling.

В предыдущей работе [1] была рассмотрена математическая модель системы передачи $\pi/4$ -DQPSK. Однако, нами не был полностью раскрыт вопрос о функционировании кодера помехоустойчивого кода. Остановимся на нем подробнее.

Кодер/декодер помехоустойчивого кода

Так как во время передачи в канале связи на полезный сигнал воздействуют помехи, то на выходе получается оценка исходного сообщения. Чтобы она была наиболее близкой к исходному сообщению, применяют помехоустойчивое кодирование.

Код Хэмминга – это линейный код, позволяющий исправлять одиночные и фиксировать двойные ошибки [4].

Из описания кода Хэмминга следует:

- множество кодовых комбинаций составлено с использованием двоичного алфавита;
- кодирование происходит блоками, путем преобразования блока информационных символов длины k к блоку длиной n символов, где $n > k$;
- в качестве групповой операции используется сложение *по модулю 2*, также осуществляющее проверку на четность;
- кодовое слово состоит из информационных и проверочных символов.

В общем случае значения символов кодовой комбинации (слова) линейного кода находятся по значениям информационных символов с помощью системы линейных уравнений, называемых системой обобщенных проверок на четность: $u_j = \sum_{i=1}^k a_i a_{ij}, j = \overline{1, n}$,

где: u_j – j -й символ кодовой комбинации линейного кода; a_i – i -й информационный символ исходной комбинации; a_{ij} – набор $k \times n$ коэффициентов, задающих систему уравнений.

В матричной форме система имеет вид: $u = aG$, где: u, a – кодовые комбинации линейного кода и информационных символов, записанные в виде вектор-строк; G – матрица коэффициентов a_{ij} , размером $k \times n$.

Код (7,4) имеет расстояние Хэмминга $d = 3$, поэтому, согласно соотношению: $d = 2 \times l + 1$, способен либо обнаруживать и исправить все одиночные ошибки, либо, добавив 8-м битом общую проверку на четность, обнаруживать наличие двойной ошибки [3].

Число проверочных символов $r = n - k$ можно найти по следующей формуле: $2^r - 1 = \sum_{i=1}^l C_n^i$, где: C_n^i – число сочетаний из n по i , равное числу ошибок кратности i .

Для $(7,4)$ – кода Хэмминга имеем $2^r - 1 \geq n$. При $n=7, r=3$ само неравенство при этом обращается в равенство, позволяя назвать $(7,4)$ – код Хэмминга совершенным (то есть число исправляемых ошибок не зависит от комбинации) [3].

Алгоритм построения кода, предложенный Хэммингом, позволяет построить несистематический код Хэмминга. В силу определения эквивалентности кодов, можно построить эквивалентный систематический код.

Построим порождающую матрицу G для $(7,4)$ – кода Хэмминга. Учитывая ее общий вид, описанный выше, матрица будет записана следующим образом: $G = [I_4 R]$, где: I_4 – единичная матрица размера 4×4 ; R – матрица остатков от деления.

Соответственно, порождающий многочлен выберем стандартный для такого случая: $g(x) = x^3 + x + 1$.

Действительно, $g(x)$ делит $x^7 + 1$ без остатка, что позволяет сразу найти проверочный многочлен: $h(x) = \frac{g(x)}{(x^7 + 1)} = x^4 + x^2 + x + 1$.

Составим матрицу остатков.

1. $x^3 = 1 \cdot (x^3 + x + 1) + (1 + x) = x + 1$;
2. $x^4 = x \cdot (x^3 + x + 1) + (x + x^2) = x^2 + x$;
3. $x^5 = (x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1) + (1 + x + x^2) = 1 + x + x^2$;
4. $x^6 = (x^3 + x + 1) \cdot (x^3 + x + 1) + (1 + x^2) = 1 + x^2$.

Полученная матрица остатков имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда можно записать порождающую матрицу [5]:

$$G = [I_4 R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверочная матрица $(7,4)$ – кода имеет вид [5]:

$$H = [-R I_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что строки порождающей матрицы ортогональны строкам проверочной матрицы, и любая разрешенная комбинация линейного кода также ортогональна проверочной матрице, то есть выполняется свойство проверочной матрицы $uH^T = 0$.

Каждой из n одиночных ошибок соответствует строка транспонированной проверочной матрицы. Эта строка называется синдромом (опознавателем) ошибок, а их совокупность матрицей (таблицей) синдромов одиночных ошибок.

Образование символов комбинаций линейного кода по информационным символам выполняется кодером, построенным табличным или аналитическим (алгебраическим) способом. Так, из порождающей матрицы G находим, что информационные символы (7,4) – кода определяются соотношениями $u_i = a_i, i = \overline{1, k}$, а проверочные символы – системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} u_5 = a_1 + a_3 + a_4 \\ u_6 = a_1 + a_2 + a_3 \\ u_7 = a_2 + a_3 + a_4 \end{cases}$$

Однако существует и второй способ кодирования. Для этого способа используется не порождающая матрица, а проверочный многочлен. Общий вид коэффициентов в этом случае будет следующим: $u_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_j \cdot a_{i+j}, i = \overline{0, 1, \dots, n-k-1}$.

Для кода (7,4) информационные символы сохраняются на своих местах и занимают старшие степени кодового многочлена, а проверочные задаются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} u_5 = a_1 + a_2 + a_3 \\ u_6 = a_2 + a_3 + a_4 \\ u_7 = a_1 + a_2 + a_4 \\ u_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + u_5 + u_6 + u_7 \end{cases}$$

Такой код будет незначительно отличаться от канонического, однако для небольших скоростей кодирования он бывает удобен в использовании.

Дополнительно добавим в конец кодовой последовательности бит контроля четности u_8 , равный сумме всех полученных 7 бит. Таким образом, итоговая длина посылки составит 8 бит.

Обнаружение и исправление ошибок в информационных символах принятых комбинаций осуществляется декодером. Возможны различные способы

декодирования циклических кодов, однако рассмотрен будет лишь способ, использованный в практической реализации – декодирование по таблице синдромов.

Поскольку код способен исправить только одиночную ошибку, выполнять декодирование будем лишь при несовпадении четности. Для этого просуммируем все 8 бит полученной последовательности. Если сумма равна 1, то принятая последовательность содержит нечетное количество ошибок, требующая необходимость в выполнении коррекции. Если же сумма равна 0, то либо последовательность не содержит ошибок, либо произошло их четное количество, а потому исправление с помощью выбранного кода невозможно.

При наличии ошибок принятая комбинация является неразрешенной и, следовательно, не даст нулевого остатка при делении на порождающий многочлен. Поэтому синдром ошибки будет равен остатку от деления u^* на $g(x)$, где u^* – вектор-строка принятой комбинации. Исправление ошибки основано на прибавлении к принятой кодовой комбинации (вектора) единичной ошибки, соответствующей синдрому этой ошибки.

Получаем следующую таблицу синдромов:

Таблица 1. Синдромы и соответствующие им вектора ошибок в (7,4) – коде Хэмминга.

<i>Синдром</i>	<i>Вектор ошибки</i>
001	0000001
010	0000010
011	0001000
100	0000100
101	1000000
110	0010000
111	0100000

Таблицу синдромов можно получить следующим образом:

1. Берём любую разрешенную комбинацию $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$;
2. Берём произвольный вектор единичной ошибки \bar{e} ;
3. Прибавляем вектор единичной ошибки к кодовой комбинации u и получаем кодовую комбинацию u^* ;
4. Получаем синдром ошибки s , равный остатку от деления $\frac{u^*}{g(x)}$;
5. Переводим синдромный многочлен в двоичный вид;
6. Записываем в таблицу синдром ошибки и соответствующий ему вектор ошибки.

Для того чтобы исправить ошибку достаточно прибавить вектор ошибки соответствующего синдрома к кодовой комбинации, получив тем самым исходную кодовую комбинацию. После этого декодер может удалить проверочные символы и получить исходный набор информационных символов, которые поступили изначально на кодер.

Практическая реализация системы

Для практической реализации системы, на основании математической модели [1], сформируем шаги, которые необходимо проделать:

1. Сформировать конкретную двоичную последовательность $a'(t)$, состоящую из последовательности длины 4 бит, построить график.
2. Применить к последовательности $a'(t)$ кодер помехоустойчивого кода (Например, кодер данного кодера образуется 8 битовая последовательность $a(t)$, построить график полученной последовательности.
3. Преобразовать дибиты двоичного позиционного кода $a(t)$, с добавленным в его начало опорного дибита, в код Грея, получить последовательность $b(t)$. Построить графики последовательностей $b_1(t)$, $b_2(t)$, где b_1b_2 – значения дибитов в коде Грея; значения b_1 равны 3
4. Из входного двоичного потока данных $b(t)$ необходимо последовательно-параллельным преобразованием сформировать 2 потока дибитов с частотой в два раза меньшим частоты входного потока.
5. В
6. Вычислить значения $I(t-kT_s) = I_k$, $Q(t-kT_s) = Q_k$ и $U(t-kT_s) = \cos(\omega t - \theta_k)$ для всех $k = \overline{1,4}$. Построить графики этих последовательностей, где $I(t)$, $Q(t)$ – синфазная и квадратурная составляющие модулирующего сигнала, а $U(t)$ – выходной фазомодулированный сигнал на выходе модулятора.
7. Согласно принципам работы демодулятора, вычислить последовательности $\hat{b}_1(t)$ и $\hat{b}_2(t)$, и преобразовать данные последовательности в последовательный код $\hat{b}(t)$. Построить $\theta_0 = 0$ или $\frac{\pi}{4}$
8. Сделать обратное преобразование из кода Грея, убрать опорный дибит из начала и получить информационную последовательность $\hat{a}(t)$. Принудительно внести ошибку в 1 бит

9. Провести проверку на четность, при несовпадении четности выполнить декодирование с помощью кода Хэмминга.

10. Убедиться в исправлении этой ошибки корректирующим кодом Хэмминга. Получить п

о Покажем работу системы передачи на примере передачи следующей комбинации информационных битов $a'(t) = \langle 1000 \rangle$. Применим к данной последовательности помехоустойчивое кодирование кодом Хэмминга. Умножим данную последовательность на порождающую матрицу $G = [I_4 R]$, получим последовательность $\langle 1000101 \rangle$.

д

о Остается только добавить 8 бит – контроля четности: $1+0+0+0+1+0+1 \equiv 1 \pmod{2}$.

в Таким образом, получим последовательность $\langle 10001011 \rangle$.

а Добавим, к полученной после кодирования кодом Хемминга последовательности, опорный дибит $\langle 11 \rangle$, получим последовательность $\langle 1110001011 \rangle$. Воспользуемся выражением (2) из [1] для преобразования данного сообщения в код Грея.

Таблица 2. Преобразования двоичного кода в код Грея.

Двоичный код	Код Грея
00	00
01	01
10	11
11	10

Получим исходное сообщение в виде кода Грея $\langle 1011001110 \rangle$.

Таблица 3. Исходное сообщение в виде кода Грея.

	0	1	2	3	4
b_1	1	1	0	1	1
b_2	0	1	0	1	0

а Покажем вращение сигнального созвездия.

в Начальное состояние модулятора характеризуется параметрами: $\theta_{\text{начальн}} = 0$, $I_{\text{начальн}} = 0$, $Q_{\text{начальн}} = 0$.

и Нулевой такт, точка находится в значении опорного дибита $\langle 10 \rangle$. Эта точка, согласно таблице 1 из [1], имеет приращение фазы $\Delta\varphi_0 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_0 = \theta_{\text{начальн}} + \Delta\varphi_0 = 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$, в

которой $I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

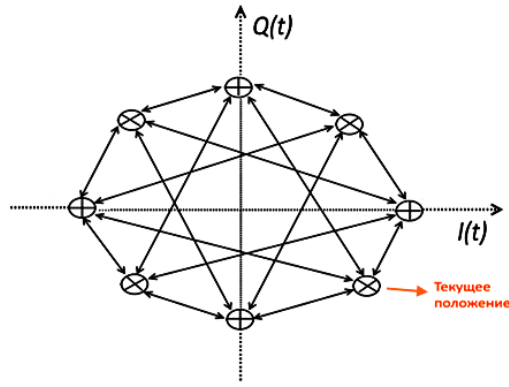


Рис. 1. Сигнальное созвездие на нулевом такте.

Первый такт, поступает дибит «11». По таблице 1 из [1] эта точка имеет приращение фазы $\Delta\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_1 = \theta_0 + \Delta\varphi_1 = \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, это точка на сигнальном созвездии, где $I_1 = 1$, $Q_1 = 0$.

Второй такт, поступает дибит «00». По таблице 1 из [1] эта точка имеет приращение фазы $\Delta\varphi_2 = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 + \Delta\varphi_2 = 0 + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$, это точка на сигнальном созвездии, где $I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Третий такт, поступает дибит «11». По таблице 1 из [1] эта точка имеет приращение фазы $\Delta\varphi_3 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_3 = \theta_2 + \Delta\varphi_3 = \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, это точка на сигнальном созвездии, где $I_3 = 0$, $Q_3 = -1$.

Четвертый такт, поступает дибит «10». По таблице 1 из [1] эта точка имеет приращение фазы $\Delta\varphi_4 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_4 = \theta_3 + \Delta\varphi_4 = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$, в которой $I_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

В результате получаем следующую траекторию изменения фазы:

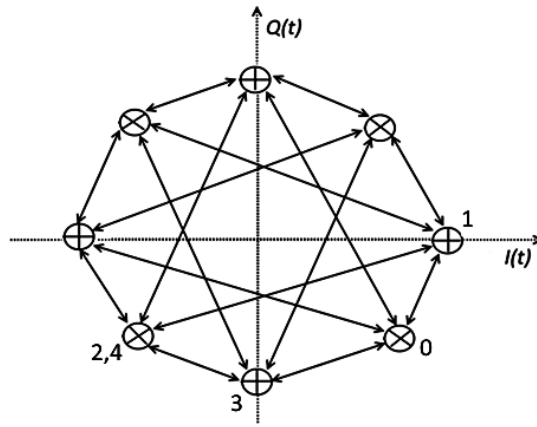


Рис. 2. Траектория изменения фазы сигнала.

Сверим практический и теоретический расчёты. Рассчитывая по выражению (3) из [1] получим таблицу значений I_k , Q_k , θ_k и $\Delta\varphi_k$.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_0 \sin(\Delta\varphi_1) - Q_0 \cos(\Delta\varphi_1) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 & Q_1 &= I_0 \cos(\Delta\varphi_1) + Q_0 \sin(\Delta\varphi_1) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0; \\
 I_2 &= I_1 \sin(\Delta\varphi_2) - Q_1 \cos(\Delta\varphi_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & Q_2 &= I_1 \cos(\Delta\varphi_2) + Q_1 \sin(\Delta\varphi_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 I_3 &= I_2 \sin(\Delta\varphi_3) - Q_2 \cos(\Delta\varphi_3) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 & Q_3 &= I_2 \cos(\Delta\varphi_3) + Q_2 \sin(\Delta\varphi_3) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1; \\
 I_4 &= I_3 \sin(\Delta\varphi_4) - Q_3 \cos(\Delta\varphi_4) = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} & Q_4 &= I_3 \cos(\Delta\varphi_4) + Q_3 \sin(\Delta\varphi_4) = 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Таблица 4. Исходное сообщение после модуляции.

	Начальное состояние	0	1	2	3	4
I_k	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
Q_k	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ_k	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\Delta\varphi_k$	-	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

С помощью алгоритма работы демодулятора получим сообщение:

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_1^{(0)} &= \cos(\Delta\varphi_0) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_1^{(0)} = 1 & \hat{b}_2^{(0)} &= \sin(\Delta\varphi_0) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow b_2^{(0)} = 0; \\
 \hat{b}_1^{(1)} &= \cos(\Delta\varphi_1) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_1^{(1)} = 1 & \hat{b}_2^{(1)} &= \sin(\Delta\varphi_1) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_2^{(1)} = 1; \\
 \hat{b}_1^{(2)} &= \cos(\Delta\varphi_2) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow b_1^{(2)} = 0 & \hat{b}_2^{(2)} &= \sin(\Delta\varphi_2) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow b_2^{(2)} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\hat{b}_1^{(3)} = \cos(\Delta\varphi_3) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_1^{(3)} = 1$$

$$\hat{b}_2^{(3)} = \sin(\Delta\varphi_3) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_2^{(3)} = 1;$$

$$\hat{b}_1^{(4)} = \cos(\Delta\varphi_4) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow b_1^{(4)} = 1$$

$$\hat{b}_2^{(4)} = \sin(\Delta\varphi_4) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow b_2^{(4)} = 0.$$

Получили, что $\hat{b}_1(t) = \langle 11011 \rangle$, а $\hat{b}_2(t) = \langle 01010 \rangle$. Тогда последовательный код этих последовательностей будет иметь вид $\hat{b}(t) = \langle 1011001110 \rangle$.

Преобразуем последовательность $\hat{b}(t) = \langle 1011001110 \rangle$ из кода Грея, согласно преобразованию в таблице 2. Уберем из полученной последовательности опорный дибит, получим последовательность $\hat{a}(t) = \langle 10001011 \rangle$.

Принудительно внесем ошибку в 1-ый бит последовательности $\hat{a}(t)$ (проинвертировать его). Получим, что $\hat{a}(t) = \langle 00001011 \rangle$.

Выполним проверку четности: $0+0+0+0+1+0+1+1 \equiv 1 \pmod{2}$. Четность нарушена, следовательно, необходимо исправить полученную ошибку. Отбросим бит контроля четности, получим последовательность $\langle 0000101 \rangle$.

Вычислим синдром ошибки:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 + r_1 &= 1 \\ i_2 + i_3 + i_4 + r_2 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_4 + r_3 &= 1 \end{aligned}$$

Синдром равен $\langle 101 \rangle$. Найдем по таблице 1 соответствующий вектор ошибки: $\langle 1000000 \rangle$. Прибавим этот вектор к принятой последовательности, получим $\langle 1000101 \rangle$. Остается лишь отбросить проверочные символы. Итоговая комбинация $\hat{a}'(t) = \langle 1000 \rangle$ соответствует отправленной.

Графическое моделирование передачи и приема данного сообщения представлено на рисунке 3.

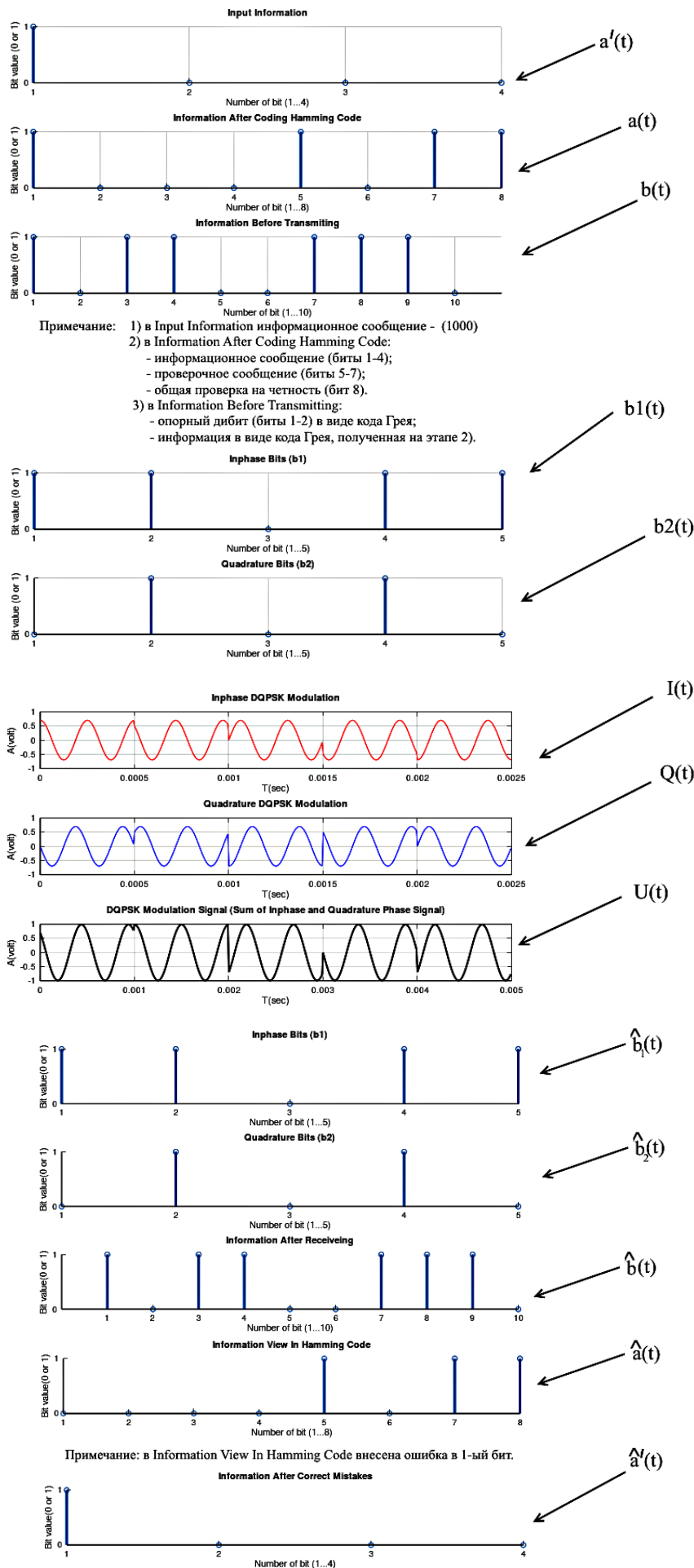


Рис. 3. Временная диаграмма работы системы передачи/приема $\pi/4$ -DQPSK с помехоустойчивым циклическим (7,4) – кодом Хемминга, где в качестве информационного сообщения выступает комбинация битов «1000».

Графическое представление было реализовано в свободной системе для математических вычислений *GNU Octave* версии 4.4.1 [2], её преимущество заключается в наличии бесплатной лицензии использования, а также, совместимого с *MATLAB*, языка высокого уровня.

Заключение

Таким образом, в данном разделе мы успешно проверили работу математической модели данной системы $\pi/4$ -DQPSK на практике – моделирование в математической среде *Octave*.

Полученные, в ходе исследования, результаты позволяют нам сделать вывод о том, что, используя современную техническую элементную базу, реализация данной системы возможна на базе цифровых устройств обработки сигнала.

Литература:

1. Першин А.С., Попов И.С., Каргапольцев А.А., Алексеев А.А. «Исследование математической модели системы передачи $\pi/4$ -DQPSK»// Молодежный научный вестник. 2019, 12 с.
2. GNU Octave [Интернет ресурс], ссылка: <http://www.gnu.org/software/octave/>Сергиенко А.
3. Березюк Н. Т., Андрущенко А. Г., Мощицкий С. С. Кодирование информации (двоичные коды) // Вища школа. 1978, 252 с.
4. Habr «Код Хемминга.Пример работы алгоритма» [Интернет ресурс], ссылка: <http://habr.com/ru/post/140611/>
5. Студопедия Ваша школопедия «Коды Хемминга» [Интернет ресурс], ссылка: https://studopedia.ru/3_97798_kodi-hemminga.html