# TIPE 2025 - Pendule de Foucault

Julien ROPERS, May SANCHEZ–CHEVALIER

October 19, 2025

## Contents

## Partie I
# Introduction

## Partie II
# Modélisation

## 1 Introduction

Le but de cette partie est de mettre en équation et simuler le mouvement du pendule en prenant en compte les frottements de l'air.

## 2 Notations

- $\mathcal{R}_g$ le référentiel géocentrique supposé galiléen.
- $\mathcal{R}_{ng}$ le référentiel du laboratoire supposé en rotation pure à partir de $\mathcal{R}_g$ avec son vecteur rotation $\vec{\Omega}$.
- $l$ la longeur du fil, $m$ la masse du corps suspendu supposé sphérique parfait.
- $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ sont les vecteurs formant une base orthonormée du repère $(Oxyz)$ où O correspond au centre d'inertie du corps suspendu à l'équilibre, $y$ à l'axe N-S, $x$ l'axe O-E et $z$ la verticale ascendante.

## 3 Contexte et hypothèses

- Le pendule de Foucault étudié se trouve à la latitude $43.6109°N$, la terre tourne à $7.2921 \cdot 10^{-5} rad \cdot s^{-1}$.
- Le corps suspendu est une masse en fer de 4kg pour un diamètre $d = 10cm$. Il sera assimilé à un point.
- Le fil est de $l = 2.2m$ de masse négligeable face au corps suspendu.
- Le corps suspendu sera capable d'oscillations d'amplitude "pic à pic" de 50cm.
- Le corps suspendu est lancé sans vitesse initiale.
- La masse est une boule parfaite et sa vitesse est modérée, on donne la formule des frottements de la boule dans l'air suivante: $\vec{F}_{frottements} = \frac{1}{4} C_x \pi d^2 \rho_{air} ||\vec{V_r}|| \cdot \vec{V_r} = \sigma ||\vec{V_r}|| \cdot \vec{V_r}$
- On suppose le mouvement dans le plan $(Oxyz)$

## 4 Équations différentielles

Système: {Corps suspendu de masse $m$ assimulé à un point}, référentiel: $\mathcal{R}_{ng}$

### 4.1 Bilan des actions mécaniques

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$
- Force inertie de Coriolis en rotation libre : $\vec{F_c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r}$
- *Force inertie d'entrainement* négligée face au poids
- Frottements fluides : $\vec{F}_{frottements} = \sigma \sqrt[2]{\dot{x} + \dot{y}} (\dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z})$
- Tension fil : $\vec{T} = \frac{T}{l}(x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + (l - z)\vec{e_z})$

### 4.2 PFD dans $\mathcal{R}_{ng}$

$$\left\{ m\vec{a}(M, \mathcal{R}_{ng}) = \vec{P} + \vec{F}_{frottements} + \vec{F_c} + \vec{T} \right. \tag{1}$$

En projetant dans le repère $(Oxyz)$ on obtient:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -2\Omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) + \dot{x}\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}} - \dfrac{Tx}{ml} & \text{(2a)} \\ \ddot{y}(t) = -2\Omega(\dot{x}\sin\lambda) + \dot{y}\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}} - \dfrac{Ty}{ml} & \text{(2b)} \\ \ddot{z}(t) = 2\Omega(\dot{x}\cos\lambda) - g + \dot{z}\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}} + (1-\dfrac{z}{l})\dfrac{T}{m} & \text{(2c)} \end{cases}$$

Le système obtenu est non linéaire.

## 5 Simulation

#### 5.0.1 Mise en forme

Afin de résoudre ce système différentielle, on utilisera le module *SciPy* disponible sur Python. En particulier nous utiliserons *odeint*. Cependant *odeint* ne peux résoudre que les équations différentielles sous la forme d'une ordre 1. Alors on met (2) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{dx}{dt} & \text{(3a)} \\ u_y = \dfrac{dy}{dt} & \text{(3b)} \\ u_z = \dfrac{dz}{dt} & \text{(3c)} \\ \dot{u_x} = -2\Omega(u_z\cos\lambda - u_y\sin\lambda) + u_x\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{u_x+u_y+u_z} - \dfrac{Tx}{ml} & \text{(3d)} \\ \ddot{y}(t) = -2\Omega(\dot{x}\sin\lambda) + \dot{y}\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{u_x+u_y+u_z} - \dfrac{Ty}{ml} & \text{(3e)} \\ \ddot{z}(t) = 2\Omega(\dot{x}\cos\lambda) - g + \dot{z}\dfrac{\sigma}{m}\sqrt[2]{\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}} + (1-\dfrac{z}{l})\dfrac{T}{m} & \text{(3f)} \end{cases}$$

# Partie III
# Considérations expérimentales

# Partie IV
# Résultats

# Partie V
# Conclusion

# Partie VI
# Bibliographie