

# TIPE 2025 - Pendule de Foucault

Julien ROPERS, May SANCHEZ-CHEVALIER

October 23, 2025

## Contents

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Modélisation</b>	<b>2</b>
1	Introduction	2
2	Notations	2
3	Contexte et hypothèses	2
4	Équations différentielles	2
4.1	Bilan des actions mécaniques . . . . .	2
4.2	PFD dans $\mathcal{R}_{ng}$ . . . . .	3
5	Simulation	3
5.0.1	Mise en forme . . . . .	3
5.0.2	Simulation . . . . .	3
<b>III</b>	<b>Considérations expérimentales</b>	<b>4</b>
<b>IV</b>	<b>Résultats</b>	<b>4</b>
<b>V</b>	<b>Conclusion</b>	<b>4</b>
<b>VI</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>4</b>

# Partie I

## Introduction

## Partie II

### Modélisation

#### 1 Introduction

Le but de cette partie est de mettre en équation et simuler le mouvement du pendule en prenant en compte les frottements de l'air.

#### 2 Notations

- $\mathcal{R}_g$  le référentiel géocentrique supposé galiléen.
- $\mathcal{R}_{ng}$  le référentiel du laboratoire supposé en rotation pure à partir de  $\mathcal{R}_g$  avec son vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ .
- $l$  la longueur du fil,  $m$  la masse du corps suspendu supposé sphérique parfait.
- $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont les vecteurs formant une base orthonormée du repère  $(Oxyz)$  où O correspond au centre d'inertie du corps suspendu à l'équilibre,  $y$  à l'axe N-S,  $x$  l'axe O-E et  $z$  la verticale ascendante.

#### 3 Contexte et hypothèses

- Le pendule de Foucault étudié se trouve à la latitude  $43.6109^\circ N$ , la terre tourne à  $7.2921 \cdot 10^{-5} rad \cdot s^{-1}$ .
- Le corps suspendu est une masse en fer de 4kg pour un diamètre  $d = 10cm$ . Il sera assimilé à un point.
- Le fil est de  $l = 2.2m$  de masse négligeable face au corps suspendu.
- Le corps suspendu sera capable d'oscillations d'amplitude "pic à pic" de 50cm.
- Le corps suspendu est lancé sans vitesse initiale.
- La masse est une boule parfaite et sa vitesse est modérée, on donne la formule des frottements de la boule dans l'air suivante:  $\vec{F}_{frottements} = -\frac{1}{4}C_x\pi d^2\rho_{air}||\vec{V}_r|| \cdot \vec{V}_r = \sigma||\vec{V}_r|| \cdot \vec{V}_r$
- On suppose le mouvement dans le plan  $(Oxy)$

#### 4 Équations différentielles

Système: {Corps suspendu de masse  $m$  assimilé à un point}, référentiel:  $\mathcal{R}_{ng}$

##### 4.1 Bilan des actions mécaniques

- Poids :  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
- Force inertie de Coriolis en rotation libre :  $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$
- Force inertie d'entraînement négligée face au poids
- Frottements fluides :  $\vec{F}_{frottements} = \sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)$
- Tension fil :  $\vec{T} = \frac{T}{l}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (l-z)\vec{e}_z)$

## 4.2 PFD dans $\mathcal{R}_{ng}$

$$\left\{ m\vec{a}(M, \mathcal{R}_{ng}) = \vec{P} + \vec{F}_{frottements} + \vec{F}_c + \vec{T} \right. \quad (1)$$

En projetant dans le repère  $(Oxyz)$  on obtient:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) + \dot{x} \frac{\sigma}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{Tx}{ml} \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -2\Omega(\dot{x} \sin \lambda) + \dot{y} \frac{\sigma}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{Ty}{ml} \end{cases} \quad (2b)$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = 2\Omega(\dot{x} \cos \lambda) - g + \dot{z} \frac{\sigma}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + (1 - \frac{z}{l}) \frac{T}{m} \end{cases} \quad (2c)$$

Le système obtenu est non linéaire.

D'après les dimensions de notre pendule on peut considérer la vitesse selon  $(Oz)$  négligeable face à la vitesse dans le plan  $(Oxy)$  En donnant  $T = mg$  et en remplaçant l'équation en  $z$  par:

$$z = l - \sqrt{l^2 - y^2 - x^2}$$

On obtient:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = +2\Omega(\dot{y} \sin \lambda) + \dot{x} \frac{\sigma}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{g}{l}x \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -2\Omega(\dot{x} \sin \lambda) + \dot{y} \frac{\sigma}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{g}{l}y \end{cases} \quad (3b)$$

$$\begin{cases} z = l - \sqrt{l^2 - y^2 - x^2} \end{cases} \quad (3c)$$

## 5 Simulation

### 5.0.1 Mise en forme

Afin de résoudre ce système différentielle, on utilisera le module *SciPy* disponible sur Python. En particulier nous utiliserons *odeint*. Cependant *odeint* ne peut résoudre que les équations différentielles d'ordre 1. Alors on met (3) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} u_x = \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} u_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = +2\Omega(u_y \sin \lambda) + u_x \frac{\sigma}{m} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} - \frac{g}{l}x \end{cases} \quad (4c)$$

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dt} = -2\Omega(u_x \sin \lambda) + u_y \frac{\sigma}{m} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} - \frac{g}{l}y \end{cases} \quad (4d)$$

$$\begin{cases} z = l - \sqrt{l^2 - y^2 - x^2} \end{cases} \quad (4e)$$

### 5.0.2 Simulation

Avec les données prévues expérimentalement et  $C_x = 0.5$  on obtient:

Oscillations du pendule de Foucault pendant 12h projetées dans le plan

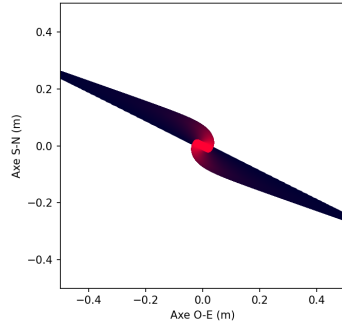


Figure 1

Oscillations du pendule de Foucault pendant 12h

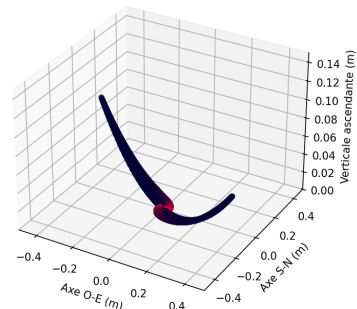


Figure 2

$$x_g \frac{-x_b m}{M}$$

Partie III

## Considérations expérimentales

Partie IV

## Résultats

Partie V

## Conclusion

Partie VI

## Bibliographie



Figure 3: moi qui appelle ringot pr lui annoncer que le pendule coute 500€