Universidade de Fortaleza - UNIFOR

Sistemas Inteligentes - T951

Msc. Prof. Paulo Cirillo Souza Barbosa
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Universidade de Fortaleza
Fortaleza, Ceará, Brasil

6 de agosto de 2023

Sumário

Notações utilizadas ao longo do curso

- Vetores serão representados por letra minúscula em negrito:
  1. Seja um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ então $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix}^T$
- Matrizes serão representadas por letra maiúscula em negrito:
  1. Seja uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ então:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NM} \end{bmatrix}$$

Notações utilizadas ao longo do curso

- $\mathbf{I}_n \Rightarrow$ matriz identidade de ordem $n \times n$.
- $det(\mathbf{A}) \Rightarrow$ determinante de $\mathbf{A}$
- $diag(\mathbf{x}) \Rightarrow$ matriz diagonal $\mathbf{X}$
- $diag(\mathbf{A}) \Rightarrow$ vetor dos elementos da diagonal principal de $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^T \Rightarrow$ Transposta de $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow$ Inversa de $\mathbf{A}$
- $\|\mathbf{A}\|$ ou $\|\mathbf{a}\| \Rightarrow$ Norma de $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{a}$.
- $\mathbf{\Sigma} \Rightarrow$ Matriz positiva definida.

Propriedades importantes

- Para que o produto entre matrizes possa ser efetuado é necessário atender sua condição necessária e suficiente.
- Sejam duas matrizes: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, o produto $\mathbf{AB}$ resultará em uma matriz $\in \mathbb{R}^{m \times p}$
- $(\mathbf{ABC}...)^{-1} = ...\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{ABC}...)^{T} = ...\mathbf{C}^{T}\mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{T} = \mathbf{A}^{T} + \mathbf{B}^{T}$

Derivadas de matrizes

- Seja $\mathbf{A}$ constante, então: $\partial\mathbf{A} = 0$
- $\partial(a\mathbf{X}) = a\partial(\mathbf{X})$
- $\partial(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \partial(\mathbf{X}) + \partial(\mathbf{Y})$
- $\partial\mathbf{X}^T = (\partial\mathbf{X})^T$
- $\frac{\partial\mathbf{x}^T\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$
- $\frac{\partial\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\mathbf{x}$
- Demais propriedades podem ser encontradas em **Matrix Cookbook**
- Desafio: Seja $f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$, calcule:
  1. $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}} =$
  2. $\frac{\partial^2 f}{\partial\mathbf{x}} =$
  3. Seja $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ uma matriz simétrica, calcule: $\frac{(\partial\mathbf{w}^T\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}} =$

Derivadas de matrizes

- Seja $\mathbf{A}$ constante, então: $\partial \mathbf{A} = 0$
- $\partial(a\mathbf{X}) = a\partial(\mathbf{X})$
- $\partial(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \partial(\mathbf{X}) + \partial(\mathbf{Y})$
- $\partial \mathbf{X}^T = (\partial \mathbf{X})^T$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}$
- Demais propriedades podem ser encontradas em **Matrix Cookbook**
- Exemplo: Seja $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$, calcule:
  1. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) \mathbf{x} + \mathbf{b}$
  2. $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$
  3. Seja $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ uma matriz simétrica, calcule: $\frac{(\partial \mathbf{w}^T \mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{w}$

Vetores de Base e combinação linear

- O que é um vetor?
- Qual foi a primeira disciplina que você estudou vetores?
- Como descrever um vetor?
- O que são vetores de base?
- Como expressar qualquer vetor em função dos vetores de base?
- Essa representação é comumente conhecida como combinação linear.
- $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$
- O que acontece quando se escalona esses vetores com infinitos valores?
    1. Vetores podem ser nulos.
    2. Todos os vetores do plano $\mathbb{R}^N$.
    3. Os vetores podem ser linearmente dependentes.
- Exemplo prático.

Matrizes.

- O que são matrizes?
- James Joseph Sylvester (1814–1897), em 1850: local onde algo se gera ou cria.
- Matrizes estão diretamente ligadas a Transformações.
- O que é uma transformação? O que caracteriza uma Transformação Linear?
- Exemplos de transformação linear: $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$
- O que multiplicação de matrizes significam?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \tag{1}$$

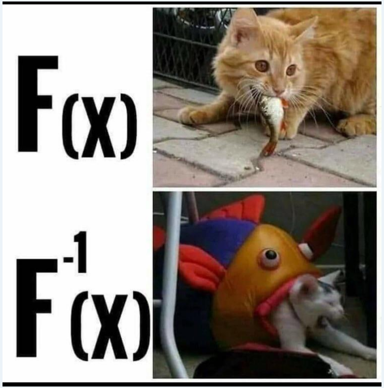
- Ou seja, é uma composição de transformações separadas.

Essência da Álgebra Linear

- O que são determinantes??
- O escalonamento que a área dos vetores de base sofrem após uma transformação linear, é chamado de determinante.
- O que significa $det(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$?
- O que significa $det(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix})$?

Essência da Álgebra Linear

- Inversão de matrizes.



Inversão de matrizes.

- Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 4x + 1y + 0z = 3 \\ 7x + 3y + 10z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

- Como reescrevê-lo em termos de uma transformação linear $\mathbf{Aw} = \mathbf{y}$?
- Qual interpretação geométrica?
- Resolver este sistema, implica em encontrar um vetor **w** que ao ser transformado, coincidirá com **y**
- Há duas possibilidades: $det(A) = 0$ e $det(A) \neq 0$.
- $det(A) \neq 0$ Implica dizer que haverá um e apenas um vetor **w** que será transformado em **y**. Como encontrar tal vetor **w**?

Essência da Álgebra Linear

- Uma transformação em reverso opera como uma nova transformação conhecida como a inversão da matriz de transformação.
- Exemplo, seja a transformação *Shear*, qual sua transformação inversa?
- Exemplo, seja a transformação de rotação em 90 graus, qual sua transformação inversa?
- A inversa é uma transformação com uma propriedade única: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. O que isto significa?
- A solução do sistema $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{y}$ pode ser encontrada: $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$
- Qual a problemática associada???
- Um dos tópicos abordados durante a disciplina, será de melhorar o condicionamento da matriz. (Posto)

Essência da Álgebra Linear

- O que é similaridade e dissimilaridade?
- O que é uma distância (euclidiana) entre dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$?

$$\sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \cdots + (v_N - w_N)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (v_i - w_i)^2} \tag{3}$$

- O que é o produto interno entre dois vetores$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$?
- Qual(is) interpretações geométricas associadas??

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{w}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \cos\theta \tag{4}$$

- Estas igualdades são verdadeira?