

## 基于非均匀梁模型的二维柔性机翼固有振动分析

黄可，张家应，王青云

## NATURAL VIBRATION ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL FLEXIBLE WING BASED ON NON-UNIFORM BEAM MODEL

Ke Huang, Zhang Jiaying, and Wang Qingyun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-551>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

##### 梁在固有振动中的对偶关系

DUALITY RELATIONS OF BEAMS IN NATURAL VIBRATIONS

力学学报. 2020, 52(1): 139–149

##### 基于LuGre摩擦模型的接触约束法旋转柔性梁斜碰撞研究

RESEARCH ON OBLIQUE IMPACT OF ROTATING OF FLEXIBLE BEAM BASED ON CONTACT CONSTRAINT METHOD OF LUGRE FRICTION MODEL

力学学报. 2021, 53(4): 1156–1169

##### 主动控制压电旋转悬臂梁的参数振动稳定性分析

STABILITY ANALYSIS ON PARAMETRIC VIBRATION OF PIEZOELECTRIC ROTATING CANTILEVER BEAM WITH ACTIVE CONTROL

力学学报. 2019, 51(6): 1872–1881

##### 带集中质量的旋转柔性曲梁动力学特性分析

DYNAMIC CHARACTERISTICS ANALYSIS OF A ROTATING FLEXIBLE CURVED BEAM WITH A CONCENTRATED MASS

力学学报. 2019, 51(4): 1134–1147

##### 黏弹性阻尼作用下轴向运动Timoshenko梁振动特性的研究

VIBRATION CHARACTERISTICS OF AXIALLY MOVING TIMOSHENKO BEAM UNDER VISCOELASTIC DAMPING

力学学报. 2019, 51(6): 1897–1904

##### 各向异性柔性壁上二维T-S波演化的数值研究

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE EVOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL T-S WAVES ON AN ANISOTROPIC COMPLIANT WALL

力学学报. 2021, 53(5): 1302–1312



关注微信公众号，获得更多资讯信息

# 基于非均匀梁模型的二维柔性机翼固有振动分析<sup>1)</sup>

黄 可 张家应<sup>2)</sup> 王青云

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100190)

**摘要** 变体飞行器通过光滑连续的结构变形改变气动特性, 从而提高飞行器的飞行性能, 具有很大的应用前景。由于这类新概念飞行器主要通过改变自身结构形状以获得最佳工作性能的需求, 因此具有变形大、质量轻等特点, 较容易发生结构振动响应。本文研究了一种以柔性变后缘作为变体形式的二维柔性机翼等效建模方法, 基于非均匀梁模型假设, 建立了该柔性翼的动力学模型。通过利用 Frobenius 方法得到解析解及固有频率, 并用有限元方法进行对比验证, 发现前 4 阶固有频率的误差均在 1% 以内, 每阶固有频率对应的振型一致。通过 3D 打印工程塑料 (ABS) 和硅胶蒙皮材料制备了柔性机翼结构件, 并通过动态测量法和拉伸试验分别测定了打印材料和硅胶蒙皮材料的杨氏模量, 搭建振动响应实验平台对制备的柔性机翼试验件进行振动试验。对比发现模型振动试验获得的基频与理论模型结果一致, 并与有限元方法误差在 3% 以内。本文通过理论分析和实验验证, 建立了二维柔性机翼等效建模方法, 研究结果将为柔性变后缘结构动力学特性分析及其控制应用方面提供理论支持。

**关键词** 鱼骨柔性翼, 变后缘, 非均匀梁, 固有振动, 幂级数解

中图分类号: O327 文献标识码: A doi: [10.6052/0459-1879-22-551](https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-551)

## NATURAL VIBRATION ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL FLEXIBLE WING BASED ON NON-UNIFORM BEAM MODEL<sup>1)</sup>

Ke Huang Zhang Jiaying<sup>2)</sup> Wang Qingyun

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100190, China)

**Abstract** In order to improve the flight performance of the aircraft, morphing technologies are used to change aerodynamic characteristics through smooth and continuous structural deformation. Since this new concept requires changing the structural shape to obtain the best performance, its inherent dynamic characteristics will be affected and even change its aeroelastic performance. In this paper, an equivalent modelling method of the two-dimensional flexible wing with camber morphing is developed. The dynamic model of the flexible wing is established based on the hypothesis of a non-uniform beam model. The analytical solution and natural frequencies are obtained by the method of Frobenius and verified by comparison with the finite element method solution. The errors of the first four natural frequencies are within 1% and the corresponding modes are consistent. The flexible wing is prepared by 3D printing engineering plastic (ABS) and silicone rubber skin. The Young's modulus of the 3D printing material and silicone rubber are respectively measured by dynamic measurement method and tensile test. The vibration response test platform is built to carry out

收稿, 录用, 网络版发表。

1) 国家自然科学基金(12102017); 机械结构力学及控制国家重点实验室开放课题(MCMS-E-0522G02)。

2) 通讯作者: 张家应, 副教授, 主要研究方向: 动力学与控制; 变体飞行器设计. Email:jiaying.zhang@buaa.edu.cn

引用格式: 黄可, 张家应, 王青云. 基于非均匀梁模型的二维柔性机翼固有振动分析. 力学学报, 待出版

Ke Huang, Zhang Jiaying, Wang Qingyun. Natural vibration analysis of two-dimensional flexible wing based on non-uniform beam model. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, in press

vibration test of the flexible wing. It is found that the fundamental frequency obtained by vibration test is consistent with the theoretical model results, and the error is less than 3% compared with the finite element method. The equivalent modelling method of a two-dimensional flexible wing is established through theoretical analysis and experimental verification. The research results will provide theoretical support for applying the flexible trailing edge structures.

**Key words** FishBAC, camber variation, nonuniform beam, natural vibration, power series solution

## 引言

变体飞行器 (Morphing Aircraft) 由于外形可变性, 可以实时地适应多种任务需求, 使其在各种飞行环境中始终保持最佳效率和性能, 已经成为未来先进飞行器重要特征和发展方向之一<sup>[1-2]</sup>。在变体飞行器发展早期, 主要通过机械机构设计改变机翼形状、面积等参数改善飞行器的性能<sup>[3]</sup>, 但是随之而来的附加重量增加、复杂的机械系统以及严苛的驱动需求却限制了其发展<sup>[4]</sup>。直到 20 世纪 80 年代, 随着智能材料、先进驱动器、仿生学等学科的发展, 智能材料与结构、柔顺机构、分布式驱动等新的理念逐渐改善了变体飞行器结构设计方法<sup>[5-6]</sup>。相关研究表明翼型沿弦向平滑变形可获得更好的气动性能, 在起降阶段通过调整机翼弯度使飞机实现增升减阻, 在巡航阶段自适应改变机翼弯度使其始终保持最优气动效率, 因此变弯度自适应机翼逐渐成为研究热点<sup>[7-9]</sup>。此外, 为了综合考虑减轻结构质量、降低功耗, 柔顺机构也因此被应用于自适应机翼<sup>[6]</sup>。

柔性机翼结构的设计主要通过驱动力克服结构内力来实现变形。Wang 和 Friswell 等<sup>[10-12]</sup>提出了基于波纹板结构的变体翼尖, 通过使用复合波纹板提供的刚度不对称性来实现变形, 如图 1 所示。张盛和杨宇等<sup>[13]</sup>提出了一种多变形控制点偏心梁驱动结

构, 通过驱动与柔性后缘连接的偏心梁实现变形, 如图 2 所示。Woods 和 Friswell 等<sup>[14]</sup>提出了一种鱼骨主动变弯度机翼 (FishBAC), 如图 3 所示, 由朝向前缘的 D 型翼梁和朝向后缘的鱼骨柔性段所组成。鱼骨柔性段则由细长、可弯曲的横梁及其上均匀分布的纵梁和预拉伸后的弹性基体复合材料 (EMC) 蒙皮构成。

但是由于传统的柔性结构具有变形大、质量轻等特点, 该特性将会导致柔性机翼较低的固有频率, 容易发生结构振动响应。因此, 柔性机翼的固有振动特性在气动弹性分析<sup>[16-17]</sup>、动态特性分析<sup>[18]</sup>等领域具有重要意义。目前针对机翼结构固有振动分析主要采用有限元法<sup>[19-20]</sup>, 虽然该方法可以给出高精度的结果, 但是其存在计算量大、效率低的问题, 同时在飞机设计初期若对机翼参数进行大量修改时将会带来一系列不便<sup>[21]</sup>。柔性机翼相比于传统机翼结构, 为了实现通过改变自身结构形状以获得最佳工作性能, 结构分布形式存在着非均匀的截面特性和质量分布。二维机翼其动力学特性仅存在弯曲模态, 而真实机翼具有一定展弦比且存在多种复杂模态。

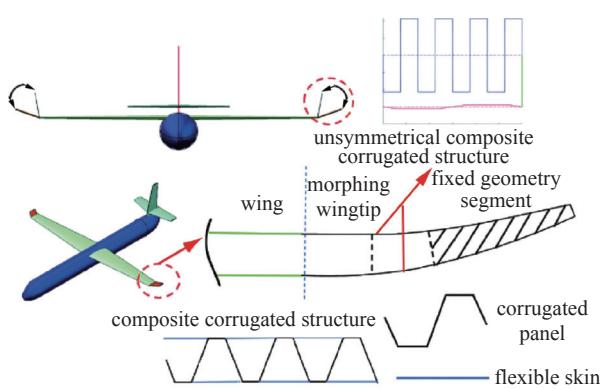


图 1 基于波纹板结构的变体翼尖<sup>[10]</sup>

Fig. 1 Conceptual design of morphing wingtip and layout of corrugated panels

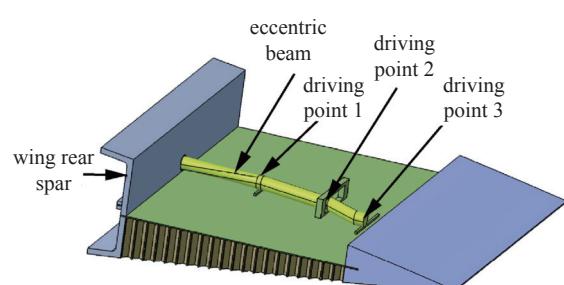


图 2 后缘偏心梁驱动的变弯度机翼<sup>[13]</sup>

Fig. 2 The morphing trailing edge driven by eccentric beam

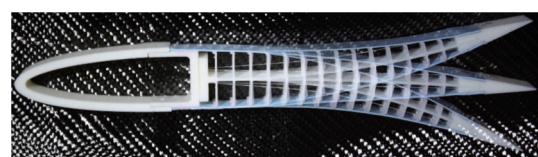


图 3 鱼骨柔性翼的结构示意图<sup>[15]</sup>

Fig. 3 The structural schematic diagram of FishBAC

但是在针对变后缘柔性翼的研究中, 变后缘柔性部分一般处理为固支的悬臂板, 对于该模型其展弦比对于弯曲频率影响较小, 因此对于二维结构的分析可以近似推广到三维结构的弯曲固有频率。本文拟通过针对该类变后缘柔性机翼进行简化, 将基于非均匀梁假设, 建立了一类柔性翼的动力学模型, 进而研究一种求解二维柔性机翼固有振动特性的高效方法。

## 1 计算原理

### 1.1 变后缘柔性机翼结构模型

在典型变后缘柔性机翼结构建模时一般简化为梁模型<sup>[10,22-24]</sup>, 然后通过有限元或实验方法进行验证。Woods 和 Friswell 等在分析 FishBAC 结构特性<sup>[22]</sup> 和静气动弹性特性<sup>[24]</sup> 时, 利用平行轴定理将结构简化为非均匀悬臂梁进行分析。为了更加准确地计算柔性机翼的气动弹性特性, Zhang 和 Friswell 等<sup>[25]</sup> 基于 FishBAC 建立了一种刚柔耦合的结构模型, 将柔性段等效为轴向流作用下的柔性二维板, 计算结果与实验数据比较取得十分理想的结果。本文将基于平行轴定理将该类变后缘柔性翼简化为非均匀梁并应用于分析结构的动力学特性, 以提供准确高效的结构固有频率与模态分析。

### 1.2 非均匀梁的幂级数解法

非均匀梁的固有振动方程为变系数常微分方程, 基本无法获得精确解, 常采用 Frobenius 方法<sup>[26]</sup> 求解近似解析解。该方法基于弹性力学的连续性假设, 也就是结构内的一些物理量可以由连续函数来表示<sup>[27]</sup>。

Naguleswaran S<sup>[28]</sup> 提出了一种求解受线性轴力作用的等截面欧拉梁广义幂级数解法。徐腾飞等<sup>[29]</sup> 将该方法推广至截面特性、轴力、质量分布任意连续变化的欧拉梁。但是没有考虑梁剪切变形和截面转动惯性的影响, 欧拉梁在求解短粗梁振动问题和高阶固有频率将得不到满意的结果<sup>[30]</sup>, 因此许多学者将剪切梁理论引入以获得更精确的结果。

目前基于非均匀剪切梁的研究主要集中在功能梯度材料梁 (FGM), 其材料属性和截面面积在域内非均匀分布。杜运兴<sup>[31]</sup> 等使用一种幂级数法对基于剪切梁理论的变截面 FGM 梁固有频率、振型进行了求解。*Şimşek*<sup>[32]</sup> 使用不同高阶梁理论对 FGM 的

基频进行了分析, 结果表明了使用各种高阶梁理论所得结果差异很小。本文将上述方法推广至变后缘柔性机翼的固有振动分析中, 以 FishBAC 为例将其柔性段等效为非均匀悬臂梁分析其动力学特性。

## 2 理论分析

### 2.1 柔性机翼的等效力学模型

在 FishBAC 柔性段中, 只有横梁、纵梁以及蒙皮对结构刚度和质量具有贡献, 且总刚度和总质量为三部分刚度和质量线性叠加。横梁视为等矩形截面梁且中性轴与翼型中弧线重合。虽然蒙皮的弹性模量较小, 但是蒙皮由于贴附在纵梁上与结构中性轴有较大距离, 根据平行轴定理<sup>[33]</sup> 可知蒙皮对结构刚度的贡献不可忽略。纵梁由于在机翼厚度方向上尺寸较大且弦向尺寸较小, 相较于前两者刚度大得多而质量小得多, 在结构分析中可以将其处理为刚体且质量忽略不计。因此可以得到截面抗弯刚度  $EI(x)$  和质量线密度  $\rho S(x)$

$$\left. \begin{aligned} EI(x) &= EI_{bs} + EI_{sk}(x) \\ \rho S(x) &= \rho S_{bs} + \rho S_{sk}(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

表 1 鱼骨柔性翼段模型参数

Table 1 Model parameters of the FishBAC morphing concept

Parameters	Value
Baseline airfoil	NACA0012
Chord $c/\text{mm}$	305
Span $b/\text{mm}$	150
Start of morph $x_s/\text{mm}$	107
End of morph $x_E/\text{mm}$	260
Number of stringer pairs $n$	14
Stringer thickness $t_{st}/\text{mm}$	0.8
Skin thickness $t_{sk}/\text{mm}$	1.5
Spine thickness $t_{bs}/\text{mm}$	2
Stringer modulus $E_{st}/\text{GPa}$	2.14
Spine modulus $E_{bs}/\text{GPa}$	2.14
Spine Poisson's ratio $\nu_{bs}$	0.4
Spine density $\rho_{bs}/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1010
Spine modulus $E_{sk}/\text{MPa}$	4.56
Skin Poisson's ratio $\nu_{sk}$	0.4
Skin density $\rho_{sk}/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1010

式中下标 bs 和 sk 分别代表横梁和蒙皮。如图 4 所示, 进一步简化为截面积不变, 即宽度  $b$  和厚度  $h$  均与横梁相同, 材料的弹性模量  $E(x)$  和密度  $\rho(x)$  在弦向非均匀分布的悬臂梁, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= E_{\text{bs}} + E_{\text{sk}} \frac{I_{\text{sk}}(x)}{I_{\text{bs}}} \\ \rho(x) &= \rho_{\text{bs}} + \rho_{\text{sk}} \frac{S_{\text{sk}}(x)}{S_{\text{bs}}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

对于线弹性材料, 材料的剪切模量  $G$  由式 (3) 可得<sup>[33]</sup>。由于蒙皮的剪切模量远小于横梁, 因此可以忽略蒙皮的剪切模量, 即等效非均匀梁剪切模量等于横梁的剪切模量。

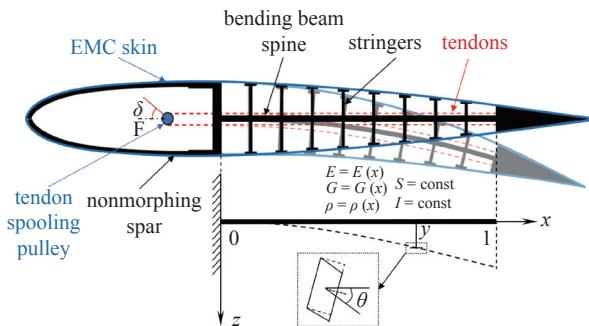


图 4 鱼骨柔性翼的等效力学模型

Fig. 4 Schematic diagram of FishBAC structural model

## 2.2 基于欧拉梁理论的幂级数解法

欧拉梁固有振动方程<sup>[34]</sup>为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} \right] - \rho S(x) \omega^2 y = 0 \quad (4)$$

式中  $\omega$  为梁的振动频率。由 1.2 节可知, 非均匀梁的弹性模量和质量分布均可采用多项式表示, 可得

$$\left. \begin{aligned} EI(x) &= \sum_{i=0}^{N_1} \alpha_i x^i \\ \rho S(x) &= \sum_{i=0}^{N_2} \beta_i x^i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  由非均匀梁的性质可得, 为了简化计算, 本文使用三次多项式拟合非均匀梁的弹性模量和质量分布, 即多项式次数  $N_1 = N_2 = 3$ 。

根据 Frobenius 方法, 假设方程 (4) 的精确解具有如下形式

$$y(x, c) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(c) x^n \quad (6)$$

不失一般性, 令

$$a_1(c) = 1 \quad (7)$$

将式 (5) 和 (6) 带入式 (4), 并利于无穷级数的性质  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k-1}^{\infty} a_{n+1}$  将所有的项的系数调整至  $c + n - 3$ , 利用多项式相等可得

$$a_{n+2} = - \sum_{i=0}^2 \left[ \frac{(c+n-1-i)(c+n-i)\alpha_{1+i}}{(c+n+1)(c+n)\alpha_0} a_{n+1-i} \right] + \omega^2 \frac{\sum_{i=0}^3 (\beta_i a_{n-2-i})}{\prod_{i=0}^3 (c+n+1-i)\alpha_0} \quad (8)$$

式中当  $k \leq 0$  时,  $a_k = 0$ 。令  $n = -1$ , 为了使式 (7) 成立, 必须满足

$$c(c-1)(c-2)(c-3) = 0$$

所以  $c = 0, 1, 2, 3$ , 根据 Frobenius 理论方程的解为

$$y(x, c) = C_0 \bar{y}(x, 0) + C_1 \bar{y}(x, 1) + C_2 \bar{y}(x, 2) + C_3 \bar{y}(x, 3) \quad (9)$$

式中  $y(x, c)$  为解的基础解系,  $c$  取不同值对应着不同边界条件, 记为

$$\bar{y}(x, c) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(c) x^n \quad (10)$$

在计算过程中, 为了加快级数收敛, 对坐标进行规范化处理, 即  $X = x/l \leq 1$ ,  $Y = y/l$ 。

首先利用其中一端边界条件确定所需的基本解系, 通过迭代动态调整级数解阶数  $n$  确保级数收敛, 并利用收敛的级数解作为近似解代替精确解。在确保收敛后, 将方程中频率  $\omega$  从 0 开始设置合适的步长进行增加, 代入式 (8) 中计算得到对应频率的基础解系。然后, 判断基础解系是否满足另一边界条件, 若满足另一边界条件即为方程 (4) 的某一阶固有频率。若需要得到更精确的结果可以根据计算得到初步结果缩小频率范围, 设置更小的步长可以得到更加精确的结果, 进一步可得固有频率对应的模态。

## 2.3 基于剪切梁理论的幂级数解法

由于需要考虑剪切变形和截面转动惯性, 因此

需要在欧拉梁广义位移挠度  $y$  的基础上增加一个广义位移截面转角  $\theta$ , 如图 4 虚线方框内所示。根据剪切梁理论<sup>[34]</sup>, 梁的位移函数可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u(x, z, t) &= -\theta z \\ y(x, z, t) &= y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $u$  和  $y$  分别是梁沿  $x$  轴和  $z$  轴方向的位移分量。根据几何方程<sup>[25]</sup> 可以得到相应的正应变  $\varepsilon$  和剪应变  $\gamma$  为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial y}{\partial x} - \theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由于材料满足线弹性假设, 所以梁的应变能  $U$  和动能  $K$  为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A [E(x)\varepsilon^2 + \kappa G(x)\gamma^2] dA dx = \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L \left[ I \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + D \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right)^2 \right] dx \\ K &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(x) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx = \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L \left[ J_1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + J_2 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中  $\kappa$  为剪切系数<sup>[27]</sup>, 其他项分别为

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_A E(x) dA = bhE(x) \\ D &= \int_A \kappa G(x) dA = \kappa bhG(x) \\ J_1 &= \int_A z^2 \rho(x) dA = \frac{bh^3}{12} \rho(x) \\ J_2 &= \int_A \rho(x) dA = bh\rho(x) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

假定梁的两端边界受到 2 个作用力, 分别为剪力  $Q$  和弯矩  $M$ , 因此外力做功  $W$  可以表述为

$$W = (M\theta + Qy)|_{x=1} - (M\theta + Qy)|_{x=0} \quad (15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, t) &= \Theta(x)e^{j\omega t} \\ y(x, t) &= Y(x)e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

利用哈密顿原理, 将式 (13)、(14)、(15) 代入式 (16) 并结合式 (17) 进行分离变量, 式中  $j$  是虚数单位。得到相应的固有振动方程组和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} J_2(x)Y(x)\omega^2 + \frac{d}{dx} \left[ D(x) \left( \frac{dY(x)}{dx} - \Theta(x) \right) \right] &= 0 \\ J_1(x)\Theta(x)\omega^2 + \frac{d}{dx} \left( I(x) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right) + & \\ D(x) \left( \frac{dY(x)}{dx} - \Theta(x) \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= D \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) \\ M &= I \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将 (18) 无量纲化可得

$$\left. \begin{aligned} s^2 \frac{d}{dX} \left[ D(X) \left( \frac{dY(X)}{dX} - \Theta(X) \right) \right] + \beta^2 J_2(X)W(X) &= 0 \\ \frac{d}{dX} \left( I(X) \frac{d\Theta(X)}{dX} \right) + s^2 D(X) \left( \frac{dY(X)}{dX} - \Theta(X) \right) + & \\ \beta^2 \mu^2 J_1(X)\Theta(X) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

无量纲化参数为

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{l}, W(X) = \frac{W(x)}{l}, \mu^2 = \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \\ s^2 &= \frac{\kappa G_0 A_0 l^2}{E_0 I_0}, \beta = \sqrt{\frac{\rho_0 \omega^2 l^4}{E_0 h_0^2}} \\ I_0 &= b_0 h_0^3, A_0 = b_0 h_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中, 下标为 0 的项均为  $X=0$  时非均匀梁对应的材料或截面参数。将非均匀梁的弹性模量、剪切模量和质量分布均采用多项式形式表达

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{N_1} \alpha_i X^i \\ \rho(X) &= \sum_{i=0}^{N_2} \beta_i X^i \\ G(X) &= \sum_{i=0}^{N_3} \eta_i X^i \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

采用 Frobenius 方法求解该微分方程组, 其精确解表示成幂级数形式

$$\left. \begin{aligned} W(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \\ \Theta(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将式 (14)、(22)、(23) 代入 (20), 同 2.2 节类似即可得到级数系数关系式。考虑本文模型简化分析,

取  $N_1 = 3, N_2 = N_3 = 1$ , 级数系数关系式( $i > 2$ )为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{b_{i-1}}{(i-1)} - \frac{\beta^2 a_{i-2}}{s^2(i-1)(i-2)} \\ b_i &= -\frac{\sum_{j=1}^3 (i-1-j) \alpha_j b_{i-j}}{(i-1)\alpha_0} \\ -12 &\frac{s^2(i-2)a_{i-1} + \left(\frac{\beta^2 \mu^2}{12} - s^2\right)b_{i-2}}{(i-1)(i-2)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中当  $k \leq 0$  时,  $a_k = b_k = 0$ . 进一步, 分别令  $a_1, a_2, b_1, b_2$  分别为 1, 其余项为 0, 即可计算出给定频率下的基础解系, 记为  $y_1, y_2, \theta_1, \theta_2$ . 不同的基础解对应着不同的边界条件, 此方法后续计算过程与 2.2 节中欧拉梁计算方法类似在此不再赘述.

### 3 结果与讨论

#### 3.1 算法正确性及可行性验证

为了验证算法的正确性, 首先计算等截面悬臂梁, 两种不同梁理论的级数解均选取前 1000 阶确保级数稳定收敛, 并与文献 [34] 中的精确解和 NASTRAN 结果(使用 400 个 Beam 单元)进行比较, 相关参数详见表 2.

表 3 和图 5 中为计算所得频率与模态, 图 5 中  $W$  为无量纲位移. 计算结果误差均不超过 1%, 验证了算法的正确性与可行性. 同时发现, 由于剪切梁理论由于考虑了结构的剪切变形和截面转动惯性使得其计算结果小于基于欧拉梁理论的计算结果, 且由于 NASTRAN 中的 BEAM 单元不考虑转动惯量的影响使其结果介于两种梁理论之间, 这与文献 [30] 中的论述一致.

表 2 验证算例参数

Table 2 Parameters of verification example

Parameters	Value
Length $l/\text{mm}$	152.5
Density $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2700
Width $b/\text{mm}$	1
Thickness $t/\text{mm}$	2
Poisson's ratio $\nu$	0.4
Modulus of Elasticity $E/\text{GPa}$	2.14

表 3 等截面悬臂梁的频率 (Hz)

Table 3 Frequency of cantilever beam with equal section

Methods	Vibration order			
	1	2	3	4
Euler Beam Solution	12.3679	77.5085	217.025	425.283
Euler Exact Solution	12.3678	77.3732	217.022	425.280
Shear Beam Series Solution	12.3656	77.4313	216.513	423.434
FEM(NASTRAN)	12.3665	77.4470	216.619	423.817

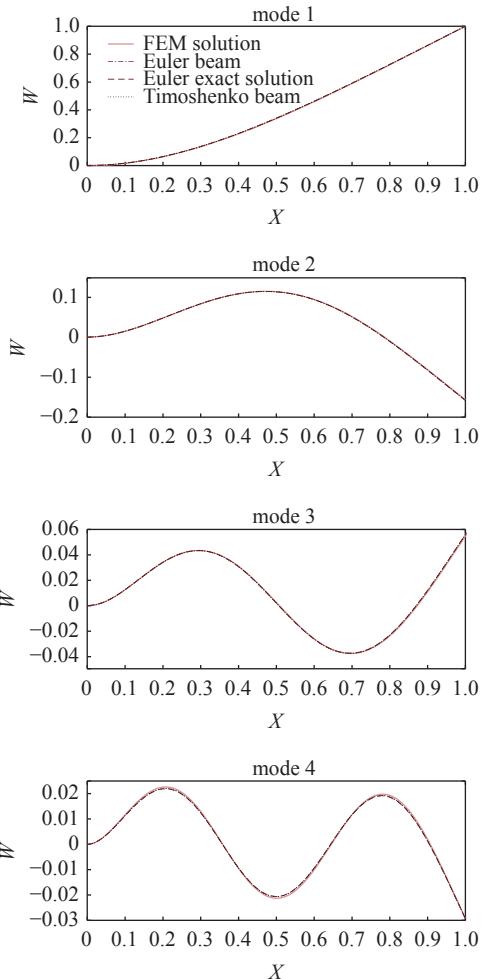


图 5 等截面悬臂梁的前四阶模态

Fig. 5 The first four modes of cantilever beam with equal section

#### 3.2 对柔性机翼的验证与分析

根据表 1 的数据, 采用商用软件 Patran 2020 对鱼骨柔性翼柔性段原模型和等效非均匀梁模型进行建模. 柔性段原模型中横梁与纵梁采用 Shell 单元建模, 如图 6 所示; 非均匀梁模型采用 15 个 Beam 单元建模. 边界条件均为柔性段起始位置固支.

两种不同梁理论的级数解均选取前 1000 阶确保级数稳定收敛, 不同模型计算所得频率和模态如

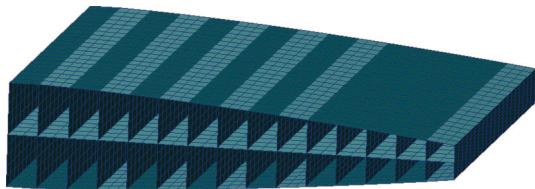


图 6 柔性段原模型的有限元模型

Fig. 6 Finite element model of the flexible section

表 4 和图 7、8 所示, 图 6 所示结果为在判断频率是否为固有频率时是否符合另一边界条件判断值绝对值的对数, 当判断值为 0 时出现峰值, 对应频率为某一阶固有频率, 图 8 中 Shell 单元的有限元计算结果为横梁中轴面的模态.

表 4 FishBAC 柔性段的频率 (Hz)

Table 4 Frequency of the FishBAC

Methods	Vibration order			
	1	2	3	4
FEM(Shell)	22.7621	118.163	292.228	—
FEM(Beam)	24.4647	136.962	368.522	709.733
Euler Beam Series Solution	24.5482	138.507	373.935	725.166
Shear Beam Series Solution	24.5339	138.151	371.708	717.439

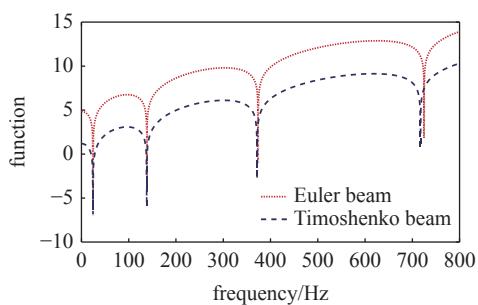


图 7 两种级数解法的计算结果  
Fig. 7 The calculation results of two series solutions

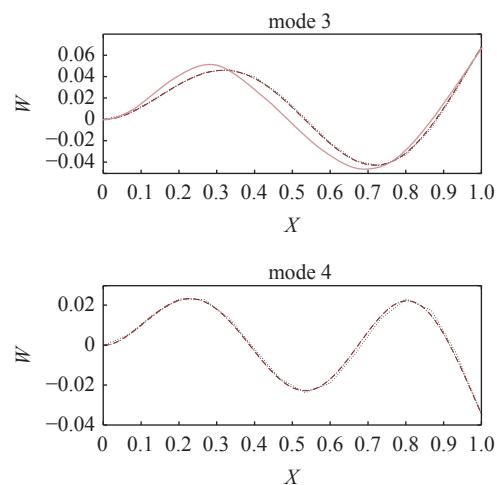
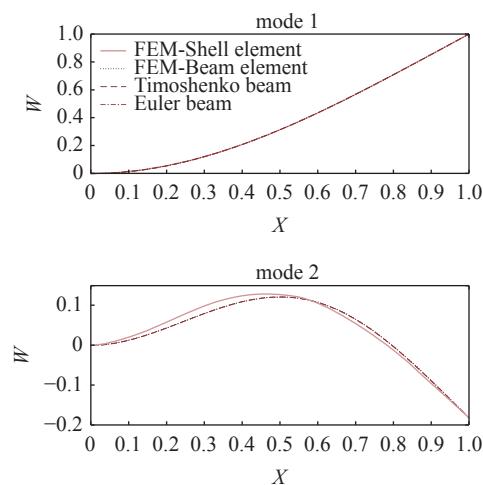
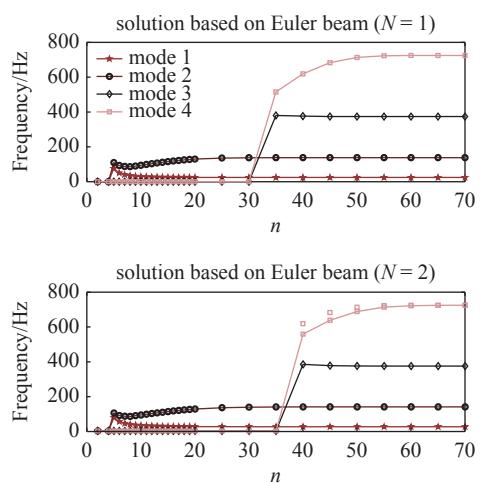


图 8 FishBAC 柔性段的模态  
Fig. 8 The modes of the FishBAC flexible section

通过上述计算可以得到简化的非均匀梁模型在计算 FishBAC 柔性段基频和较低阶模态时具有较高精度. 该模型计算在较高阶频率具有误差的原因因为非均匀梁模型的等效相较于原模型刚度有所提高, 使得频率计算结果偏大.

图 9 分析了级数解阶数  $n$  和刚度拟合阶数  $N$  对频率计算的影响. 由于计算原理略有不同, 基于剪切梁理论的级数解法比基于欧拉梁理论的级数解法收敛更快, 在  $n = 30$  阶前 4 阶模态即可完成全部收敛. 对于越高阶的频率随着  $n$  的增加收敛越滞后, 则是由于拟合模态函数的级数越多拟合高阶模态的能力越强, 可进一步在方程中求出对应阶固有频率. 刚度拟合阶数越高一定程度会提高级数解求解的精确性, 但是过高的刚度拟合阶数一定程度会影响收敛效率和求解的稳定性.



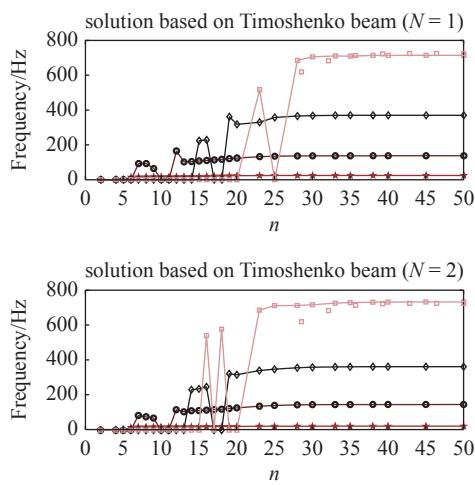


图 9 级数解与刚度拟合的阶数对频率的影响

Fig. 9 Effect of order of series solution and stiffness fitting polynomial on frequency

### 3.3 柔性翼结构振动实验

在前文作者使用了有限元方法对 FishBAC 柔性段的等效力学模型进行了数值验证。本节将进一步通过比较鱼骨柔性段的基频解析解和实验值对等效力学模型及算法进行验证。实验样件鱼骨部分采用 3D 打印制作，材料为 ABS 塑料；蒙皮材料为白色硅胶，两种材料的杨氏模量均由实验测得。

考虑到 3 D 打印机精度受限会使试验件存在材料不均匀，将会导致材料打印后力学特性与基材存在一定差异。针对该问题，利用动态法测量杨氏模量，即通过测量 3D 打印的悬臂梁试件的固有频率并根据试件几何参数测得材料的杨氏模量，固有频率的测量通过给予悬臂梁初始扰动并利用激光传感器采集结构响应，对结构响应进行快速傅里叶分析 (FFT) 即可获得固有频率。硅胶材料采用单向拉伸实验方法测得力学性能，按照国标 GB/T 528-2009 加工 3 个实验样件并在实验样件等距涂若干标记点，采用基于图片识别的方法测量加载过程中产生的形变，通过应变-应力曲线测得弹性模量。两种实验方案如图 10、11 所示，实验结果如表 5、图 12 所示。

采用动态法测量 FishBAC 的固有频率与基于不同梁理论求解及有限元模型的结果进行比较，FishBAC 试验件与试验方案如图 13 所示，测量结果如表 6 和图 14 所示。

通过计算发现级数解对于结构固有频率的计算误差在 3% 以内，因此本文使用的等效力学模型和

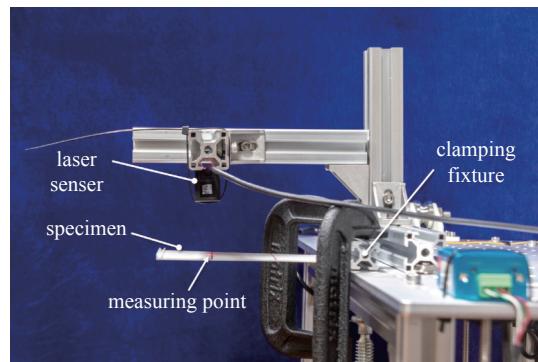


图 10 ABS 塑料动态法测杨氏模量实验实物图

Fig. 10 Dynamic measurement test of Young's modulus of ABS plastic

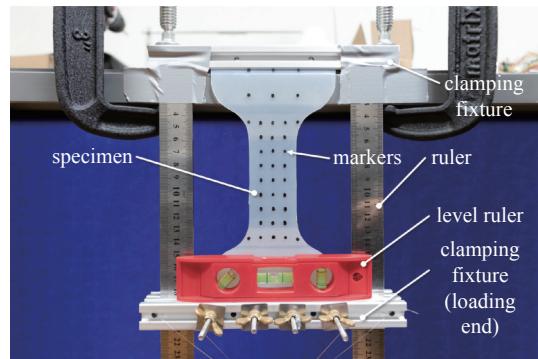


图 11 硅胶单向拉伸实验实物图

Fig. 11 Uniaxial tensile tests of silicone rubber

表 5 材料特性实验结果

Table 5 Experimental results of material properties

Parameters	Value
Modulus of Elasticity (ABS plastics) $E_1/\text{GPa}$	1.823
Modulus of Elasticity (Silicone rubber) $E_2/\text{MPa}$	2.919

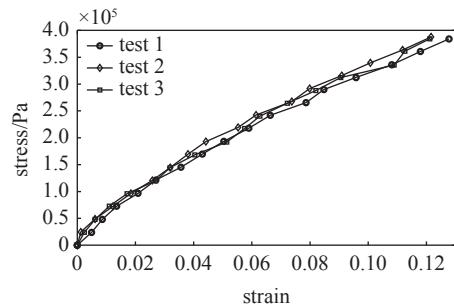


图 12 硅胶单向拉伸实验应变-应力曲线

Fig. 12 Strain-stress curve of silicone rubber in uniaxial tensile test

级数解算法可以用于分析柔性机翼结构的固有频率分析。

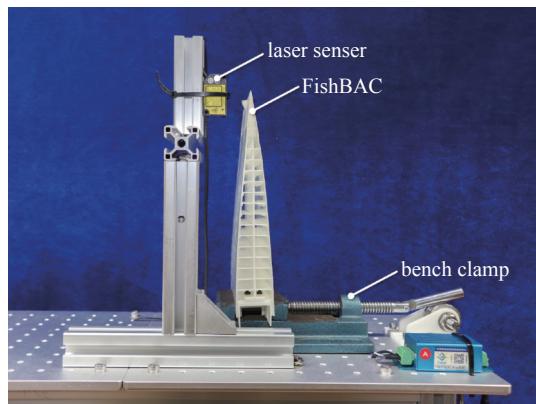


图 13 动态法测 FishBAC 固有频率实验实物图

Fig. 13 Dynamic measurement test of the natural frequency of FishBAC flexible section

表 6 FishBAC 柔性段的固有频率 (Hz)

Table 6 The natural frequency of FishBAC

Methods	Frequency
Dynamic measurement test	19.4521
FEM (Shell Element)	18.5898
Euler Beam Series Solution	19.9821
Shear Beam Series Solution	19.9654

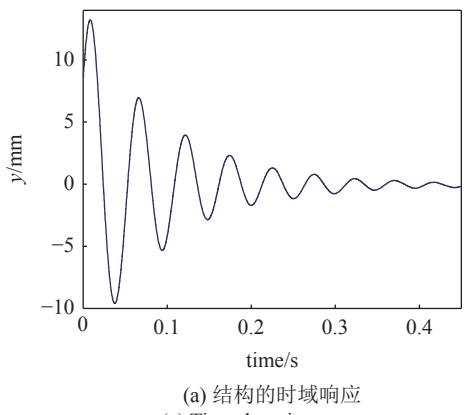
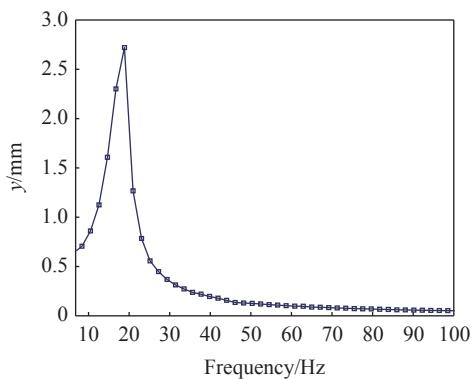
(a) 结构的时域响应  
(a) Time domain response(b) FFT 分析得到的频谱图  
(b) Spectrum obtained by FFT analysis

图 14 动态法测量 FishBAC 固有频率的实验结果

Fig. 14 Dynamic measurement test results of the natural frequency of FishBAC

## 4 结论

本文通过将二维柔性机翼简化为等效非均匀梁模型, 并基于欧拉梁和剪切梁理论结合 Frobenius 方法, 提出了一种快速准确求解二维柔性机翼固有振动特性的建模方法, 并结合有限元和实验进行验证, 主要结论如下:

1) 建立了 FishBAC 柔性段等效力学模型, 可以快速准确地计算变后缘柔性段的固有频率, 相较于修改较为复杂的有限元方法, 可以在设计初期提供快速分析其动力学特性的方法.

2) 通过分析发现了基于剪切梁理论分析所得到的固有频率计算精度更高, 且收敛速度大于欧拉梁理论.

3) 基于此方法求得的模态整体具有较高的精度, 可以应用于后续分析, 例如基于刚柔耦合的机翼颤振特性分析.

4) 该方法可以推广到其他类型的变体飞行器非均匀结构动力学特性分析中.

## 参 考 文 献

- Barbarino S, Bilgen O, Ajaj R M, et al. A review of morphing aircraft. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2011, 22(9): 823-877
- Cistone J. Next century aerospace traffic management: the sky is no longer the limit. *Journal of Aircraft*, 2004, 41(1): 36-42
- Ajaj R M, Parancheerivilakkathil M S, Amoozgar M, et al. Recent developments in the aeroelasticity of morphing aircraft. *Progress in Aerospace Sciences*, 2020, 120: 100682
- 孙杨, 昌敏, 白俊强. 变形机翼飞行器发展综述. *无人系统技术*, 2021, 4(3): 65-77 (Sun Yang, Chang Min, Bai Junqiang. Review of Morphing Wing Aircraft. *Unmanned Systems Technology*, 2021, 4(3): 65-77 (in Chinese))
- 聂瑞. 变体机翼结构关键技术研究. [博士论文]. 江苏: 南京航空航天大学, 2018 (Nie Rui. Research on key technologies of morphing wing structures. [PhD Thesis]. Jiangsu: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018 (in Chinese))
- Wang Chen. Design and optimisation of morphing aircraft. [PhD Thesis]. Swansea: Swansea University, 2018
- 王彬文, 杨宇, 钱战森等. 机翼变弯度技术研究进展. *航空学报*, 2022, 43(1): 144-163 (Wang Binwen, Yang Yu, Qian Zhanshen, et al. Technical development of variable camber wing: review. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(1): 144-163 (in Chinese))
- Woods B K S, Bilgen O, Friswell M I, Wind tunnel testing of the fish bone active camber morphing concept, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2014, 25(7): 772-785
- Rivero A E, Fournier S, Manolesos M, et al. Experimental aerodynamic comparison of active camber morphing and trailing edge flaps. *AIAA Journal*, 2021, 59(7): 2627-2640

- 10 Wang C, Khodaparast H H, and Friswell M I. Conceptual study of a morphing winglet based on unsymmetrical stiffness. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 58: 546-558
- 11 Zhang J, Wang C, Shaw A D, et al. Passive energy balancing design for a linear actuated morphing wingtip structure. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 107: 106279
- 12 王晨, 杨洋, 沈星等. 用于变体飞行器的波纹板等效强度模型及其优化设计. 航空学报, 2022, 43(6): 526146 (Wang Chen, Shen Yang, Shen Xing, et al. An equivalent strength model of corrugated panel and optimization design for morphing aircraft. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(6): 526146 (in Chinese))
- 13 张盛, 杨宇, 王志刚等. 变弯度机翼后缘偏心梁设计与验证. 航空学报, 2022, 43(6): 525892 (Zhang Sheng, Yang Yu, Wang Zhigang, et al. Design and validation of eccentric beam for variable camber trailing edge. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(6): 525892 (in Chinese))
- 14 Woods B K S, Friswell M I. Preliminary investigation of a fishbone active camber concept// The ASME 2012 conference on smart materials, adaptive structures and intelligent systems, 2012
- 15 Rivero A E, Fournier S, Heeb R M, et al. Design, manufacture and wind tunnel test of a modular FishBAC wing with novel 3 D printed skins. *Applied Sciences*. 2022, 12(2): 652
- 16 杨翰雯, 胡德英, 何景武. 大展弦比机翼振动特性的工程算法平台研究. *飞机设计*, 2020, 4(3): 65-77 (Yang Hanwen, Hu Deying, He Jingwu. Research on engineering algorithm platform for vibration characteristic of wing with high aspect ratio. *Aircraft Design*, 2020, 4(3): 65-77 (in Chinese))
- 17 陈桂彬, 邹丛青, 杨超. 气动弹性设计基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004 (Chen Guibin, Zou Congqing, Yang Chao. Fundamentals of Aeroelastic Design. Beijing: Press of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004 (in Chinese))
- 18 陈洋, 王正杰, 郭士钧. 柔性翼飞行器刚柔耦合动态特性研究刚柔耦合动态特性研究. 北京理工大学学报, 2017, 37(10): 1061-1066 (Chen Yang, Wang Zhengjie, Guo Shijun. Analysis of rigid-flexible coupling dynamic characteristics of flexible wing aircraft. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2017, 37(10): 1061-1066 (in Chinese))
- 19 张亚滨, 高恒烜, 李书. 复合材料机翼结构动力学分析. *飞机设计*, 2020, 4(3): 65-77 (Yang Hanwen, Hu Deying, He Jingwu. Research on engineering algorithm platform for vibration characteristic of wing with high aspect ratio. *Aircraft Design*, 2020, 4(3): 65-77 (in Chinese))
- 20 王松松, 郭翔鹰, 王帅博. 变截面 Z 型折叠机翼振动特性的有限元与实验分析. 动力学与控制学报, 2020, 18(6): 84-89 (Wang Song-song, Guo Xiangying, Wang Shuaibo. Finite element analysis and experiment on vibration of Z-shaped morphing wing with variable section. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(6): 84-89 (in Chinese))
- 21 田坤黉, 谷良贤, 王洪伟. 基于 Hamilton 原理的大展弦比直机翼固有特性分析. *机械强度*, 2010, 32(5): 854-858 (Tian Kunhong, Gu Liangxian, Wang Hongwei. Inherence characteristic analysis of high aspect ration wing based on Hamilton's principle. *Journal of Mechanical Strength*, 2010, 32(5): 854-858 (in Chinese))
- 22 Woods B K S, Friswell M I. Structural analysis of the fish bone active camber concept//Proceedings of the AIDAA XXII Conference, 2013
- 23 Woods B K S, Friswell M I. Structural characterization of the fish bone active camber morphing airfoil//22 nd AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference, 2014
- 24 Woods B K S, Dayyani I, Friswell M I. Fluid/structure-interaction analysis of the fish-bone-active-camber morphing concept. *Journal of Aircraft*, 2015, 52(1): 307-319
- 25 Zhang J, Shaw A D, Wang C, et al. Aeroelastic model and analysis of an active camber morphing wing. *Aerospace Science and Technology*, 2021, 111: 106534
- 26 Hildebrand F B. Advanced calculus for applications, 2 nd Edition, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976
- 27 徐芝纶, 弹性力学, 上册, 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2006 (Xu Zhilun. Elasticity mechanics, Volume 1, 5 th edn. Beijing: Higher Education Press, 2006(in Chinese))
- 28 Naguleswaran S. Transverse vibration of an uniform Euler-Bernoulli beam under linearly varying axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(1-2): 47-57
- 29 徐鹏飞, 向天宇, 赵人达. 变截面 Euler-Bernoulli 梁在轴力作用下固有振动的级数解. *振动与冲击*, 2007, 26(11): 99-101 (Xu Tengfei, Xiang Tianyu, Zhao Renda. Series solution of natural vibration of the variable cross-section Euler-Bernoulli beam under axial force. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(11): 99-101 (in Chinese))
- 30 邢誉峰, 李敏. 计算固体力学原理与方法. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011 (Xing Yufeng, Li Min. The theory and method of computational solid mechanics. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2011 (in Chinese))
- 31 杜运兴, 程鹏, 周芬. 变截面功能梯度 Timoshenko 梁的自由振动分析. *湖南大学学报 (自然科学版)*, 2021, 48(5): 55-62 (Du Yunxing, Cheng Peng, Zhou Fen. Free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with variable section. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2021, 48(5): 55-62 (in Chinese))
- 32 Simsek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 2010, 240(4): 697-705
- 33 殷雅俊, 范钦珊, 王晶等. 材料力学, 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019 (Yin Yajun, Fan Qinshan, Wang Jing, et al. Mechanics of Materials, 3 rd edn. Beijing: Higher Education Press, 2019 (in Chinese))
- 34 邢誉峰, 李敏. 工程振动基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011 (Xing Yufeng, Li Min. The foundation of engineering vibration. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2011 (in Chinese))