

Белова А.А.
328 группа

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ВАРИАНТ 4

1	2	3	4	5	Σ
+	+	-	+	-	34

Задача 1.

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < \pi, & -\infty < y < +\infty, \\ u|_{x=0} = \sin 2y, & u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Задача 2.

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка $0 \leq x \leq 2$, если $v(x) = v_0$.

Задача 3.

Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u|_{x=0} = t; & u|_{x=1} = 0; & u|_{t=0} = 0; & u_t|_{t=0} = 1 - x. \end{cases}$$

Задача 4.

Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2 \sin^2 x, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0; & u_x|_{x=\pi} = 0; & u|_{t=0} = 0; & u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Задача 5.

Решить задачу Коши для полуограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < +\infty, & 0 < t < +\infty, \\ u_x(0, t) = \cos 2t, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = -2 \cos x. \end{cases}$$

Ва Анастасия 328 группа Вариант 4

$$x=0, 0 < x < \pi, -\infty < y < +\infty$$

$$u|_{x=0} = \sin 2y, u|_{x=\pi} = 0$$

$$u(x, y) = X(x) \sin 2y$$

$$\Delta u = X''(x) \sin 2y - 4X(x) \sin 2y = 0$$

$$\lambda = -4 \quad X(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$u(x, y) = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}) \sin 2y$$

$$u(0, y) = (c_1 + c_2) \sin 2y = \sin 2y \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$u(\pi, y) = (c_1 e^{2\pi} + c_2 e^{-2\pi}) \sin 2y = 0$$

$$c_1 e^{2\pi} + c_2 e^{-2\pi} = 0$$

$$(1 - c_2) e^{2\pi} + c_2 e^{-2\pi} = 0$$

$$e^{2\pi} + c_2 (e^{-2\pi} - e^{2\pi}) = 0$$

$$c_2 = \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{1}{1 - e^{-4\pi}}$$

$$c_1 = 1 - \frac{1}{1 - e^{-4\pi}}$$

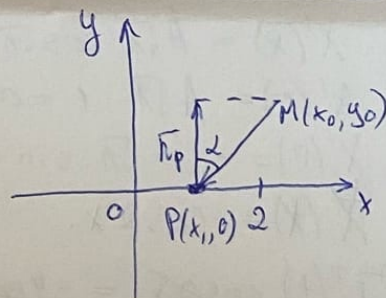
(+)

$$\text{Ответ: } u(x, y) = \left(\left(1 - \frac{1}{1 - e^{-4\pi}} \right) e^{2x} + e^{-2x} \left(\frac{1}{1 - e^{-4\pi}} \right) \right) \sin 2y$$

$$N2 \quad 0 \leq x \leq 2 \quad u(x) = u_0$$

$$w(M) = - \int_0^2 \frac{u_0 \cos(\vec{n}_P, \vec{MP})}{R_{MP}} dx_1 \quad \text{---}$$

$$\text{---} \quad \left\{ \cos \alpha = \frac{y_0}{R_{MP}} \right\} = u_0 y_0 \int_0^2 \frac{dx_1}{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2} \quad \text{---}$$



$$\text{---} \quad u_0 y_0 \frac{1}{y_0} \arctg \frac{x_1 - x_0}{y_0} \Big|_0^2 = u_0 \left(\arctg \frac{2 - x_0}{y_0} + \arctg \frac{x_0}{y_0} \right), \quad y_0 \neq 0$$

(+)

$$\text{Если } y_0 = 0 \quad 1) x_0 > 2 \quad w(M) = u_0 \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$2) x_0 < 0 \quad w(M) = u_0 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\text{Если } 0 < x_0 < 2 \quad 1) y_0 \rightarrow +0 \quad w(M) = \pi u_0$$

$$2) y_0 \rightarrow -0 \quad w(M) = -\pi u_0$$

$$\text{Ответ: } u_0 \left(\arctg \frac{2 - x_0}{y_0} + \arctg \frac{x_0}{y_0} \right), \quad y_0 \neq 0$$

$$0, y_0 = 0$$

$$\pi u_0, y_0 \rightarrow +0, \quad -\pi u_0, y_0 \rightarrow -0$$

$$N5 \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x, t < +\infty \\ u_1(0, t) = \cos 2t \\ u(x, 0) = \sin x = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = -2\cos x = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{x-2t}^{x+2t} -2\cos \alpha d\alpha \quad \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} - \frac{1}{2} (\sin(x+2t) - \sin(x-2t)) = \sin(x-2t)$$

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \sin(x-2t) \quad \textcircled{=}$$

$$N4. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0 & u_x|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 & u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + 4u + 1 - \cos 2x.$$

$$u(x, t) = u_0(x) + u_2(t) \cos 2x.$$

$$u = 0 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + 4v - \cos 2x \\ v_x|_{x=0} = 0 & v_x|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{t=0} = \frac{1}{4} & v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(x) = A\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - B\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(0) = A\sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X'(0) = -B\sqrt{\lambda} \sin 0 = 0 \Rightarrow \lambda = n^2$$

$$X(x) = \cos 2x.$$

$$v = X(x)T(t) + z(t):$$

$$\begin{cases} T''(t)X(x) = X''(x)T(t) + 4X(x)T(t) - \cos 2x \\ X'(x)|_{x=0} = 0 & X'(x)|_{x=\pi} = 0 \\ X(x)T(0) + z(0) = \frac{1}{4} & T'(t)X(x)|_{t=0} + z'(t)|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$T''(t) \cos 2x = -4 \cos 2x T(t) + 4 \cos 2x T(t) - \cos 2x$$

$$X(x)T(0) = 0 \quad T'(t)X(x) = 0$$

$$T'' = -1 \quad T = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

$$T(0) = c_2 = 0$$

$$T'(t)|_{t=0} = -t + c_1 = 0 = c_1$$

$$T = -\frac{t^2}{2}$$

$$z''(t) = 4z(t)$$

$$z(0) = \frac{1}{4} \quad z'(t)|_{t=0} = 0$$

$$\lambda = \pm 2 \Rightarrow z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{4}, \quad -2c_1 + 2c_2 = 0$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \cos 2x \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{8} (e^{-2t} + e^{2t}) - \frac{1}{4} \quad \textcircled{+}$$

Проверка:

$$u(x, 0) = 0 + \frac{1}{8} (1+1) - \frac{1}{4} = 0 - \text{Верно.}$$

$$u_t|_{t=0} = \left(-t \cos 2x + \frac{1}{8} (-2e^{-2t} + 2e^{2t})\right)|_{t=0} = 0 + \frac{1}{8} (-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 0 - \text{Верно}$$

$$u_x|_{x=0} = \left(2 \sin 2x \left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)|_{x=0} = 0 \quad \text{Верно. (П-ка уравнение не проверяется)}$$

$$u_x|_{x=\pi} = \left(2 \sin 2x \left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)|_{x=\pi} = 0$$