1. Функция Грина для уравнения Лапласа.

А) Метод зеркальных отображений

Выбираем произвольную точку из заданной области и отражаем её относительно всех границ. В случае границы-отрезка должно соблюдаться равенство $OM_0 = OM_1$, в случае границы-дуги - $OM_0 * OM_1 = R^2$ (R-радиус дуги окружности). Затем при необходимости также отражаем полученные точки и т. д. Цель – все точки относительно каждой границы должны уравновешиваться, т. е. $G(s, s_0)\Big|_{s\,\in\,\partial D} = 0$. В соответствии с этим выбираются знаки и веса a.

- функция Грина в общем виде: $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{MM_0} + \sum_k \pm \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a_k MM_k}$

- решение задачи через функцию Грина: $-\int_{\partial D} f(M)\frac{\partial G}{\partial \overline{n_m}} dl_m$

Б) Метод конформных отображений

Цель – найти преобразование ω, переводящее заданную область в единичный круг.

- функция Грина: $G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\omega(z, z_0)|}$

- решение: $u = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} f\frac{d\omega}{i\omega}$

2. Начально-краевая задача для волнового уравнения на отрезке.

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \alpha u + \beta u_t + f(x,t); x \in (0, l), t > 0$

$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ или $\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ или $\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ или $\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$

$u(x, 0) = \varphi(x)$

$u_t(x, 0) = \psi(x)$

Решение:

1) Обнуляем краевые условия – аналогично уравнению теплопроводности
2) Замена $u = ve^{\gamma t}$ - аналогично уравнению теплопроводности
3) С. ф. $X_n(x)$ и с. з. $\lambda_n(x)$ - такие же, как и в уравнении теплопроводности

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$$

$$\begin{cases} T_n'' + (a^2\lambda_n - \alpha)T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

$f_n(t), \varphi_n, \psi_n$ - коэффициенты ряда Фурье в разложении соответствующих функций.

3. Классификация линейных относительно старших производных УрЧП 2го порядка в $\mathbb{R}^2$

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ (1)

Решение (= классификация + приведение к каноническому виду):

(2) $a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0$ - уравнение характеристики (Note: в нём перед $2a_{12}$ стоит "-", а не "+")

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$;

$D < 0 \implies$ эллиптическое уравнение

$D = 0 \implies$ параболическое уравнение

$D > 0 \implies$ гиперболическое уравнение

Канонический вид уравнений (3):

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$ (эллиптическое)

$v_{\xi\xi} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$ (параболическое)

$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$ (гиперболическое)

Приведение к каноническому виду:

- Эллиптическое уравнение:

$$(2) \Leftrightarrow y' = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-D}}{a_{11}} \overset{*}{\Leftrightarrow} \varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$$

!Note: либо $i\sqrt{-D}$, либо $\sqrt{D}$, что одно и то же; но не $i\sqrt{D}$

(Более подробно о том, как осуществляется переход $\overset{*}{\Leftrightarrow}$: $\frac{a_{12}}{a_{11}} = k_1, \frac{\sqrt{-D}}{a_{11}} = k_2, \implies y' = k_1 \pm ik_2 \Leftrightarrow y = (k_1 \pm ik_2)x + c \Leftrightarrow y - k_1x \pm ik_2x = c \implies \varphi(x, y) = y - k_1x;\ \psi(x, y) = k_2x$. Подобные переходы для параболического и гиперболического уравнений производятся совершенно аналогично.)

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \implies (1) \longrightarrow (3)$$

- Параболическое уравнение

$$(2) \Leftrightarrow y' = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Leftrightarrow \varphi(x, y) = C$$

$$\implies \forall\, \psi(x, y): \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \implies (1) \longrightarrow (3)$$

- Гиперболическое уравнение

$$(2) \Leftrightarrow y' = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi(x,y) = C_1 \\ \psi(x,y) = C_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\varphi(x,y) + \psi(x,y)}{2} \\ \eta = \dfrac{\varphi(x,y) - \psi(x,y)}{2} \end{cases} \Rightarrow (1) \longrightarrow (3)$$

(Как осуществляются переходы $(1) \to (3)$: $u(x,y) = v(\xi(x,y), \eta(x,y)) \Longrightarrow u_x = v_\xi * \xi_x + v_\eta * \eta_x$. Аналогично ищется u_y и затем вторые производные, после чего результаты подставляются в исходное уравнение.)

4. Волновое уравнение на прямой и полупрямой

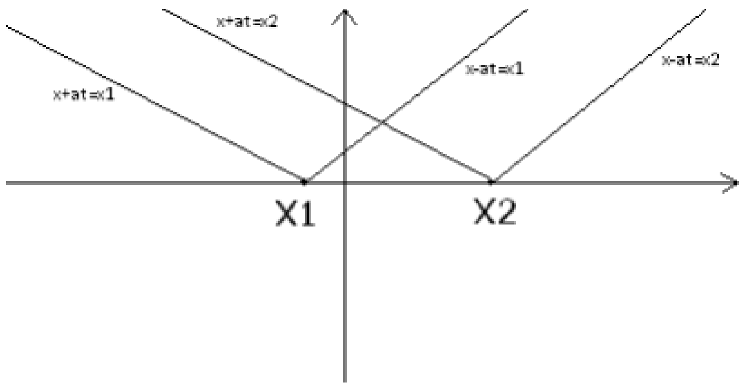
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Решение:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 \; (u_x(0,t) = 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$ сводится к задаче на всей прямой с помощью нечётного (чётного) продолжения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю прямую.

Но если функция u либо её производная заданы кусочно (либо с использованием модуля, что, фактически, то же самое), то есть специальный способ решения такой задачи. Сначала нужно построить схему вида:



где x_1 и x_2 – границы отрезков, на которых задана функция (Note: если наша задача на полупрямой, то отметить надо и точки $-x_i$, так как они появятся после расширения области на всю прямую). Далее, если решаем задачу при $t = t_0$, строим соответствующую прямую, параллельную оси x, и соответственно наоборот при x= x_0: