УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ВАРИАНТ 10

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	+	5

Задача 1.
Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < y < \pi, \qquad -\infty < x < +\infty, \\ u|_{y=0} = \sin 3x, \\ u|_{y=\pi} = 0\,. \end{cases}$$

Задача 2.
Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка $-1 \le x \le 1$, если $\nu(x) = \nu_0$.

Задача 3.
Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0; \ \ u|_{x=\pi} = 0; \ \ u|_{t=0} = \pi x - x^2; \ \ u_t|_{t=o} = 0. \end{cases}$$

Задача 4.
Решить следующую смешанную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x\,, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ t > 0$$
$$u_x|_{x=0} = 2t; \ \ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t; \ \ u|_{t=0} = \cos x\,; \ \ u_t|_{t=o} = 2x.$$

Задача 5.
Решить задачу Коши для полуограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x, t < +\infty \\ u_x(0,t) = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x, \\ u_t(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1}. \end{cases}$$

…АТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

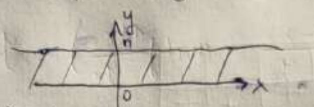
Контрольная работа №2. Вар. 10

Бедрин Павел 328гр.

№1

Решить задачу Дирихле для ур. Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0<y<\pi, \ -\infty<x<+\infty \\ u|_{y=0} = \sin 3x \\ u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$



$$u(x,y) = Y(y)\sin 3x \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\Delta u = -9\sin 3x\, Y(y) + Y''(y)\sin 3x = 0$$

$$Y''(y) - 9Y(y) = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda = \pm 3 \Rightarrow Y(y) = c_1 e^{3y} + c_2 e^{-3y}$$

$$u(x,y) = (c_1 e^{3y} + c_2 e^{-3y})\sin 3x$$

$$u(x,0) = (c_1+c_2)\sin 3x = \sin 3x \qquad \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$u(x,\pi) = (c_1 e^{3\pi} + c_2 e^{-3\pi})\sin 3x = 0 \quad \Rightarrow c_1 e^{3\pi} + c_2 e^{-3\pi} = 0$$

$$c_1 = 1 - c_2$$

$$(1-c_2)e^{3\pi} + c_2 e^{-3\pi} = 0$$

$$e^{3\pi} = c_2(e^{3\pi} - e^{-3\pi})$$

$$c_2 = \frac{e^{3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = 1 + \frac{e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}$$

$$c_1 = 1 - c_2 = \frac{-e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = 1 - \frac{e^{3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}$$

Таким образом:

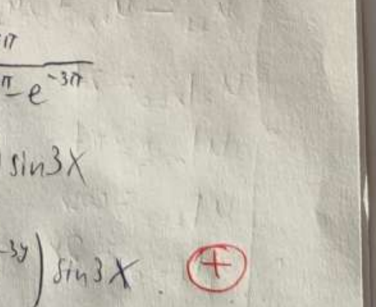
$$u(x,y) = \left(\left(1 - \frac{e^{3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right)e^{3y} + \left(1+\frac{e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right)e^{-3y}\right)\sin 3x$$

Ответ: $u(x,y) = \left(\left(1 - \frac{e^{3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right)e^{3y} + \left(1+\frac{e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right)e^{-3y}\right)\sin 3x$. (+)

№2

Найти логарифм. потенциал двойного слоя для отрезка $-1 \le x \le 1$; $\nu(x) = \nu_0$

$$W(M) = -\int_{-1}^{1} \frac{\nu_0 \cos(n_P, MP)}{R_{MP}}\,dx_1 =$$



$P(x_1; y_1)$: $-1 \le x_1 \le 1$; $y_1 = 0$

$= \left\{ \cos\alpha = \frac{y_0}{R_{MP}} \right\} = v_0 y_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx_1}{R_{MP}^2} = v_0 y_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx_1}{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2} = v_0 y_0 \frac{1}{y_0} \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_0}{y_0} \Big|_{-1}^{1} =$

из прямоугольного треугольника

$= v_0 \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{1 + x_0}{y_0} \right), \; y_0 \neq 0.$ (4)

- Если $y_0 = 0$, $x_0 > 1$: $w(M) = v_0 \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$
- Если $y_0 = 0$, $x_0 < -1$: $w(M) = v_0 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$

при $y_0 \to +0$. При $y_0 \to -0$ аналогично будет $w(M) = 0$

- Если $y_0 \to +0$, $-1 < x < 1$: $w(M) = v_0 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi v_0$
- Если $y \to -0$, $-1 < x < 1$: $w(M) = v_0 \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\pi v_0$

Ответ: $v_0 \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{1 + x_0}{y_0} \right), \; y_0 \neq 0$;
$0, \; y_0 = 0, \; x_0 > 1, x_0 < -1$;
$\pi v_0, \; y_0 \to +0, \; -1 < x_0 < 1$;
$-\pi v_0, \; y_0 \to -0, \; -1 < x_0 < 1$.

№4

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 2t \\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = 2x \end{cases}$$

$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$

$w(x,t) = ax + b$

$$\left. \begin{aligned} & w_x|_{x=0} = a = 2t \\ & w|_{x=\frac{\pi}{2}} = a\frac{\pi}{2} + b = \pi t \\ & 2t \cdot \frac{\pi}{2} + b = \pi t \\ & b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow w(x,t) = 2tx$$

Стр. 2

$u(x,t) = 2tx + v(x,t) \Rightarrow v(x,t) = u(x,t) - 2tx$

$u_{tt} = v_{tt}$

$u_t = 2x + v_t \quad \Rightarrow \quad v_{tt} - v_{xx} + 2(2x + v_t) = \cancel{4x} + 8e^t \cos x$

$u_x = 2t + v_x$

$u_{xx} = v_{xx}$

$$\begin{cases} v_{tt} + 2v_t = v_{xx} + 8e^t \cos x \quad (*) \\ v_x|_{x=0} = 2t - 2t = 0 \\ v|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t - 2t \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \\ v|_{t=0} = \cos x - 2 \cdot x \cdot 0 = \cos x \\ v_t|_{t=0} = 2x - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \rightarrow B = 0$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} A\cos\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} = 0$

$\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, \dots$

$\lambda_n = (1+2n)^2$

$X_n(x) = \cos(1+2n)x$

$v = v_1 \cos x$, подставим в $(*)$:

$v_1'' \cos x + 2v_1' \cos x = -v_1 \cos x + 8e^t \cos x$

$$\begin{cases} v_1'' + 2v_1' + v_1 = 8e^t \quad (**) \\ v_1(0) = 1 \quad (\text{т.к. } v|_{t=0} = \cos x, \text{ а } v = v_1 \cos x) \\ v_1'(0) = 0 \quad (\text{т.к. } v_t|_{t=0} = 0, \text{ а } v = v_1 \cos x) \end{cases}$$

$(**)$ Однородное: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda = -1 \quad \sim 2$

$v_{1\,одн} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$v_{1\,част} = a e^t$; подставим в $(**)$: $ae^t + 2ae^t + ae^t = 8e^t$

$4a = 8$

$a = 2$

$v_{1\,част} = 2e^t$

$v_1 = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 2e^t$

$v_1(0) = 1 = C_1 + 2 \Rightarrow \underline{C_1 = -1}$

$v_1' = -C_1 e^{-t} + C_2(e^{-t} - e^{-t}t) + 2e^t$

$v_1'(0) = \underbrace{-C_1}_{=1} + C_2 + 2 = 0$

$\underline{C_2 = -3}$

Тогда: $V_1(t) = -e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t$

$V(x,t) = \cos x(-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t)$

$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) =$

$= 2xt + \cos x(-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t)$ +

Ответ: $u(x,t) = 2xt + \cos x(-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t)$

N5

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty \\ u_x(0,t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1} = \psi(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f \\ u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \end{gathered}}$$

$\Downarrow$ $a=1$, $f=0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t) + \operatorname{arctg}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{\alpha^2+1}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+t) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-t) + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg}(x-t)) =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+t)$$

Проверим: $u_{tt} = \dfrac{-2(x+t)}{((x+t)^2+1)^2} = u_{xx}$, верно

$u_x(0,t) = \dfrac{1}{(x+t)^2+1}\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{t^2+1}$, верно

$u(x,0) = \operatorname{arctg}(x+0) = \operatorname{arctg} x$, верно

$u_t(x,0) = \dfrac{1}{(x+t)^2+1}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{x^2+1}$, верно

Ответ: $u(x,t) = \operatorname{arctg}(x+t)$

+ Вы угадали решение.

№3

Стр. 5

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = \pi x - x^2 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} u|_{x=0}=0 \\ u|_{x=\pi}=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 = \{l=\pi\} = k^2,\ k=1,2,\dots$$

$$X_k = \sin\sqrt{\lambda_k}x = \sin kx$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx \\ \pi x - x^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin kx \end{cases}$$

$$\varphi_k = 2\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\,dx = \frac{2}{k}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\, d(kx) = -\frac{2}{k}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\, d(\cos kx) =$$

$$= -\frac{2}{k}\left(\overset{=0}{(\pi x - x^2)\cos kx}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos kx\, d(\pi x - x^2)\right) = \frac{2}{k}\int_0^\pi \cos kx\, d(\pi x - x^2) =$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos kx\,dx = \frac{2}{k^2}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos kx\, d(kx) = \frac{2}{k^2}\int_0^\pi (\pi-2x)\, d(\sin kx) =$$

$$= \frac{2}{k^2}\left(\overset{=0}{(\pi - 2x)\sin kx}\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \sin kx\,dx\right) = \frac{4}{k^3}\int_0^\pi \sin kx\, d(kx) = -\frac{4}{k^3}\cos kx\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{4}{k^3}(\cos\pi k - 1) = -\frac{4}{k^3}((-1)^k - 1)$$

$$u_k''\sin kx + 2u_k'\sin kx = -k^2\sin kx\, u_k - u_k \sin kx$$

$$\begin{cases} u_k'' + 2u_k' + k^2 u_k + u_k = 0 \\ u_k(0) = \varphi_k \\ u_k'(0) = 0 \end{cases} \Downarrow\ \lambda^2 + 2\lambda + (k^2+1) = 0$$

$$D_1 = 1 - (k^2+1) = -k^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-k^2}}{1} = -1 \pm \sqrt{-k^2} = -1 \pm ik$$

$$u_k(t) = C_1 e^{-t}\cos kt + C_2 e^{-t}\sin kt$$

$$u_k(0) = C_1 = \varphi_k$$

$$C_1 = kC_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\varphi_k}{k}$$

$$u_k'(0) = \left(C_1(-\overset{=1}{e^{-t}\cos kt} - \overset{=0}{k\sin kt\, e^{-t}}) + C_2(-\overset{=0}{e^{-t}\sin kt} + \overset{=1}{k\cos kt\, e^{-t}})\right)\Big|_{t=0} = -C_1 + C_2(k) = 0$$

Стр. 6

$$C_2 = \frac{\psi_k}{k} \; ; \; C_1 = \psi_k = -\frac{4}{k^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$u_k(t) = \psi_k e^{-t}\cos kt + \frac{\psi_k}{k} e^{-t}\sin kt$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{k^3}\left((-1)^k-1\right) e^{-t}\cos kt - \frac{4}{k^4}\left((-1)^k-1\right)e^{-t}\sin kt\right)\sin kx$$ +

Ответ: ↑