1. Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b u_x + cu + f(x,t), x \in (0,l), t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ < \textit{граничные условия} > \end{cases}$$

<граничные условия> имеют вид:

$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ $(\textit{тип}1)$ или $\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ $(\textit{тип}2)$ или $\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ $(\textit{тип}3)$ или

$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ $(\textit{тип}4)$

<u>Решение:</u>

1. Замена – для типов 1,3,4 $v = u + \alpha(t)x + \beta(t)$; для типа 2 $v = u + \alpha(t)x^2 + \beta(t)x$
2. Если в правой части ещё осталась u_x, делаем замену $\omega = ve^{\alpha x}$
3. Имеем уравнение $\begin{cases} \omega = a^2\omega_{xx} + c\omega + f(x,t) \\ \omega(x,0) = 0 \\ < \textit{граничные условия} > \end{cases}$

   $\omega(x,t) = \sum\limits_n T_n(t) X_n(x)$, причём для типов 1-4 Xn(x) находится по формулам:

   1. $\begin{cases} X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}n\right)^2, n = 1,2,... \end{cases}$
   2. $\begin{cases} X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}n\right)^2, n = 0,1,... \end{cases}$
   3. $\begin{cases} X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)^2, n = 1,2,... \end{cases}$
   4. $\begin{cases} X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)^2, n = 1,2,... \end{cases}$

   Tn(t) находится из системы

   $\begin{cases} T_n' + (\lambda_n a^2 - c)T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases}$, где

   $$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)X_n(x)dx$$

   $$\varphi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx$$

2. Уравнение теплопроводности на прямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), x \in (-\infty;+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), |u| < c \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

$x_k(x) = e^{ikx}, k \in R, \lambda = k^2$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{t} G(x,y,t-\tau)f(y,\tau)d\tau dy$$, где

$G(x,y,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$ - функция Грина, $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx, \Phi(+\infty) = 1$

2'. Задача на полупрямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = \mu(t)\,(№1)\, или\, u_x(0,t) = \mu(t)\,(№2) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\hat{f}(\hat{\varphi}) = \begin{cases} нечётное\, продолжение\, для\, 1\, на\, (-\infty,0) \\ чётное\, продолжение\, для\, 2 \end{cases}$$

3.Уравнения Лапласа и Пуассона в круге/кольце

$$1)\begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ \left[\begin{array}{l} u(a,\varphi) = g(\varphi) \\ u'_r(a,\varphi) = g(\varphi) \end{array}\right. \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(r^n A_n \cos n\varphi + r^n B_n \sin n\varphi)$$

Соответственно, если в граничном условии производная u, то эту формулу надо почленно продифференцировать.

Далее остаётся подставить в неё значение r=a и найти коэффициенты A_n и B_n. Скорее всего, $g(\varphi)$ имеет вид $g(\varphi) = k + \sin m\varphi + \cos n\varphi$, поэтому эти коэффициенты находятся очевидным образом.

$$2)\begin{cases} \Delta u = 0, a < r < b \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) \\ u(b,\varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$ (граничные условия тоже могут быть в виде производных)

Ищем решение в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \frac{1}{r^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)\right]$$

Подставляем r=a, затем r=b и находим коэффициенты из полученной системы уравнений.

4. Уравнения Лапласа и Пуассона

1) Кольцевой сектор

$$\begin{cases} \Delta u = 0, a < r < b, 0 < \varphi < \alpha \\ u(r,0) = \mu_1(r) \\ u(r,\alpha) = \mu_2(r) \\ u(a,\varphi) = f_1(\varphi) \\ u(b,\varphi) = f_2(\varphi) \end{cases}$$

Решение:

$$f_{in} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_i(\varphi)\sin\frac{\pi}{\alpha}n\varphi d\varphi$$

$$\begin{cases} A_n a^{\frac{\pi}{\alpha}n} + B_n a^{-\frac{\pi}{\alpha}n} = f_{1n} \\ A_n b^{\frac{\pi}{\alpha}n} + B_n b^{-\frac{\pi}{\alpha}n} = f_{2n} \end{cases}$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{\frac{\pi}{\alpha}n} + B_n r^{-\frac{\pi}{\alpha}n} \right)\sin\frac{\pi}{\alpha}n\varphi$$

2) Круговой сектор

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < r < a, 0 < \varphi < \alpha \\ u(r,0) = u(r,\alpha) = 0 \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) \end{cases}$$

Решение:

$$A_n = a^{-\frac{\pi}{2}n}\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{\pi}{\alpha}n\varphi d\varphi$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi}{\alpha}n}\sin\frac{\pi}{\alpha}n\varphi$$

3) Прямоугольник

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ u(x,b) = \varphi_2(x) \\ u(0,y) = \psi_1(y) \\ u(a,y) = \psi_2(y) \end{cases}$$

Решение:

Раскладываем u как $u = \overline{u} + \hat{u}$, так что

$$\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0 \\ \overline{u}(x,0) = 0 \\ \overline{u}(x,b) = 0 \\ \overline{u}(0,y) = \psi_1(y) \\ \overline{u}(a,y) = \psi_2(y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(x,0) = \varphi_1(x) \\ \hat{u}(x,b) = \varphi_2(x) \\ \hat{u}(0,y) = 0 \\ \hat{u}(a,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n + B_n = \psi_{1n} \\ A_n e^{\frac{\pi}{b}na} + B_n e^{-\frac{\pi}{b}na} = \psi_{2n} \end{cases}$$

$$\overline{u}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi}{b}nx} + B_n e^{-\frac{\pi}{b}nx} \right)\sin\frac{\pi}{b}ny$$

4) Полуполоса

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < +\infty, 0 < y < b \\ u(x,0) = u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = \psi_1(y) \end{cases}$$

Решение: