УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ВАРИАНТ 15

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	+	5

Задача 1.
Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; 0 < x, y < +\infty, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \sin 2x. \end{cases}$$

Задача 2.
Найти логарифмический потенциал двойного слоя для полупрямой $-\infty < x \leq 0$, если $\nu(x) = \nu_0$.

Задача 3.
Решить следующую смешанную задачу

$u_{tt} = u_{xx} + u, \;\; 0 < x < 2, \;\; t > 0$,
$u|_{x=0} = 2t; \; u|_{x=2} = 0; u|_{t=0} = 0; \; u_t|_{t=o} = 0.$

Задача 4.
Решить следующую смешанную задачу

$u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x \cos x \;, \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \;\; t > 0$,
$u|_{x=0} = 0; \; u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0; \; u|_{t=0} = 0; \; u_t|_{t=o} = 0.$

Задача 5.
Решить задачу Коши для полуограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x, t < +\infty \,, \\ u(0,t) = -\operatorname{arctg} t, \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x, \\ u_t(x,0) = -\dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

…менляк Георгий 328 гр

Вариант 15

N 1.

$\Delta u = 0,\ 0 < x,\ y < +\infty$ $\qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = \sin(2x)$

$u(x,y) = \sin(2x) \cdot Y(y)$

$\Delta u = \sin(2x) \cdot Y''(y) - 4 \cdot \sin(2x) \cdot Y(y) = 0 \qquad Y''(y) - 4Y(y) = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

$Y(y) = C_1 \cdot e^{2y} + C_2 \cdot e^{-2y}$

$u(x,y) = \sin(2x)\left(C_1 \cdot e^{2y} + C_2 \cdot e^{-2y}\right)$

$u|_{y=0} = \sin(2x)\,(C_1 + C_2) = \sin(2x) \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$u|_{x=0} = \underbrace{\sin(0)}_{0}\left(C_1 \cdot e^{2y} + C_2 \cdot e^{-2y}\right) = 0$

$C_1 = 0$ для того, чтобы не было неопр-ти $0 \cdot \infty$ при $y \to +\infty$

$\Rightarrow C_2 = 1$

$\Rightarrow u(x,y) = \sin(2x) \cdot e^{-2y}$ +

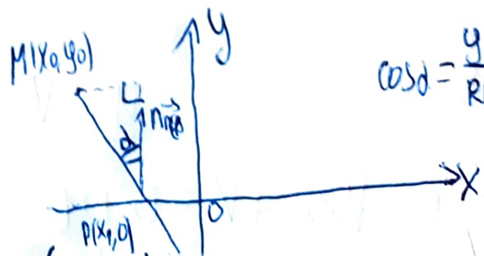
Проверка:

$\Delta u = \sin(2x) \cdot 4 \cdot e^{-2y} - 4 \cdot \sin(2x) \cdot e^{-2y} = 0$

Ответ: $u(x,y) = \sin(2x) \cdot e^{-2y}$

N 2.

$v(x) = v_0,\ -\infty < x \leq 0$



$\cos\alpha = \frac{y_0}{R_{MP}}$

$v(M) = \int_{-\infty}^{0} \frac{v_0 \cdot y_0}{R_{MP}^2}\,dx_1 = v_0 y_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx_1}{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2} =$

$= v_0 \cdot y_0 \cdot \frac{1}{y_0} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x_1 - x_0}{y_0}\Big|_{-\infty}^{0} = v_0\left(-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} - \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$y_0 > 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} + \frac{\pi}{2}\right)$ +

$y_0 < 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} - \frac{\pi}{2}\right)$

$y_0 \to +0,\ x_0 > 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$y_0 \to +0,\ x_0 < 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi v_0$

$y_0 \to -0,\ x_0 > 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$y_0 \to -0,\ x_0 < 0 \Rightarrow v(M) = v_0\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\pi v_0$

$\begin{cases} v(M) = 0, & y_0 = 0,\ x_0 \neq 0 \\ \text{undefined}, & x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$

Ответ

N5.

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},\ 0<x,t<+\infty \\ u(0,t)=-\operatorname{arctg} t \\ u(x,0)=\operatorname{arctg} x=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=-\frac{1}{1+x^2}=\psi(x) \end{cases}$$

Воспользуемся ф-лой Д'аламбера.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t)+\operatorname{arctg}(x-t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}-\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t)+\operatorname{arctg}(x-t))-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t)+\operatorname{arctg}(x-t))-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha\Big|_{x-t}^{x+t}=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t)+\operatorname{arctg}(x-t))-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x+t)-\operatorname{arctg}(x-t))=$$

$$=\underline{\operatorname{arctg}(x-t)}$$

+

Вы угадали решение.

Ну что ж, можно и так.

Проверка: $\Rightarrow$ верно

$u_{tt}=u_{xx}$

$u(0,t)=\operatorname{arctg}(0-t)=-\operatorname{arctg} t$

$u(x,0)=\operatorname{arctg}(x-0)=\operatorname{arctg} x$

$u_t(x,0)=-\frac{1}{1+(x-0)^2}=-\frac{1}{1+x^2}$

Ответ: $u(x,t)=\operatorname{arctg}(x-t)$

N3.

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u,\ 0<x<2,\ t>0 \\ u|_{x=0}=2t \\ u|_{x=2}=0 \\ u|_{t=0}=0 \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$u=v+w$

$w=ax+b$

$w(0,t)=\underline{b=2t}$

$w(2,t)=2a+b=0\rightarrow\underline{a=-t}$

$$\underline{u=v-tx+2t}$$

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}+v-tx+2t,\ 0<x<2,\ t>0 \\ v|_{x=0}=0 \\ v|_{x=2}=0 \\ v|_{t=0}=0 \\ v_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x=\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right),\ n=1,2,\dots$

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2,\ n=1,2,\dots$

$f(x,t)=-tx+2t=\sum f_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}$

$f_n=\frac{2}{2}\int_0^2(-tx+2t)\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx=$

$$=\int_0^2 t(2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=t\left(2\int_0^2\sin\frac{\pi n x}{2}dx-\int_0^2 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{4t}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi n x}{2}d\left(\frac{\pi n x}{2}\right)-t\int_0^2 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx=-\frac{4t}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2-t\int_0^2 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}=$$

$$= -\frac{4t}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) - t\left(-\frac{2}{\pi n}\cdot x\cdot \cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cdot \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{4t}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) - t\left(-\frac{4}{\pi n}(-1)^n + \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^2 \cos\frac{\pi n x}{2}\, d\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{4t}{\pi n} + \frac{4}{(\pi n)^2}\cdot\left(\underbrace{\cancel{\sin\frac{\pi n x}{2}}\Big|_0^2}_{0}\right) = \frac{4t}{\pi n}$$

$$\begin{cases} T_n'' + \left(\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - 1\right) T_n = \frac{4t}{\pi n} \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_n(t)\cdot \sin\frac{\pi n x}{2}$$

1) однородное. $T_n'' + \left(\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - 1\right)T_n = 0$

$$\lambda^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4} - 1 = 0$$

$$D = -4\left(\frac{\pi^2 n^2}{4} - 1\right) = 4 - \pi^2 n^2$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4-\pi^2 n^2}}{2};\quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{4-\pi^2 n^2}}{2}$$

$$\begin{cases} T_{n\,oo} = C_1\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\,t} + C_2\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\,t} \\ T_n(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ T_n'(t)|_{t=0} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\,C_1 - \frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\,C_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_{ч} = \frac{16t}{\pi^3 n^3 - 4\pi n}$$

см. продолжение после решения №4

№4.

$$u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x\cdot\cos x$$

$u|_{x=0} = 0$; $u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$; $u|_{t=0} = 0$; $u_t|_{t=0} = 0$

$2\sin 2x\cdot\cos x = \sin x + \sin 3x$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 10u + \sin x + \sin 3x \\ u|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x = \sin(2n\mp1)x$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$\lambda_n = (2n\mp1)^2$, $n = 1, 2, \dots$

$$T_1'' = -(2n-1)^2 T_1 + 10T_1 + 1$$

$$T_1'' = 9T_1 + 1$$

$\lambda^2 = 9$

$\lambda = \pm 3$ $T_{1\,oo} = C_1\cdot e^{3t} + C_2\cdot e^{-3t}$ $T_{1ч} = -\frac{1}{9}$

$$T_1(t) = C_1\cdot e^{3t} + C_2\cdot e^{-3t} - \frac{1}{9}$$

$T_1(0) = C_1 + C_2 = \frac{1}{9}$ $C_1 = \frac{1}{9} - C_2$

$T_1' = 3C_1 - 3C_2 = 0$ $\frac{1}{3} - 3C_2 - 3C_2 = 0$ $\frac{1}{3} = 6C_2 \to C_2 = \frac{1}{18}$; $\Rightarrow C_1 = \frac{1}{18}$

$$T_1(t) = \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{18}e^{-3t} - \frac{1}{9}$$

$= T_2 + 1$

$\lambda^2 = 1 \to \lambda = \pm 1$

$T_{2\,o.o} = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t}$ $\quad T_{2.ч} = -1$

$T_2 = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} - 1$

$T_2(0) = C_1 + C_2 = 1$ $\to C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$T_2'(0) = C_1 - C_2 = 0$

$$\underline{T_2 = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1}$$

$$u(x,t) = \sin x \cdot T_1 + \sin 3x \cdot T_2 = \sin x\left(\frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{18}e^{-3t} - \frac{1}{9}\right) + $$
$$+ \sin 3x\left(\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1\right) = \frac{\sin x}{9}\left(\frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} - 1\right) + \sin 3x\left(\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\sin x\,(\operatorname{ch}(3t) - 1) + \sin(3x)\,(\operatorname{ch}(t) - 1)$$ $+$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{9}\sin x\,(\operatorname{ch}(3t) - 1) + \sin(3x)\,(\operatorname{ch}(t) - 1)$

N3 (продолжение)

$$T(t) = \frac{16\sqrt{4-\pi^2 n^2}\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\, t}}{(\pi^3 n^3 - 4\pi n)^2} - \frac{16\sqrt{4-\pi^2 n^2}}{(\pi^3 n^3 - 4\pi n)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\, t} + \frac{16 t}{\pi^3 n^3 - 4\pi n}$$

$X(x) = \sin\frac{\pi n x}{2}$ $\qquad u = -tx + 2t + V(x,t)$

$V_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \cdot X(x)$

$$u(x,t) = -tx + 2t + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{2}\left(\frac{16\sqrt{4-\pi^2 n^2}\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{4-\pi^2 n^2}\, t}}{(\pi^3 n^3 - 4\pi n)^2} - \frac{16\sqrt{4-\pi^2 n^2}}{\quad}\right.$$