Фотография 1

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТ 12

1	2	3	4	5	Σ
+	–	+	–	+	34

Задача 1.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ t > 0; \\ u_x(0,t) = 0; \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0; \\ u(x;0) = \cos^3 x. \end{cases}$$

Задача 2.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x^2 + 2xt - 2t + t\cos x; \quad 0 < x < \pi, \ t > 0; \\ u_x(0;t) = t^2; \\ u_x(\pi;t) = 2\pi t + t^2; \\ u(x;0) = 0. \end{cases}$$

Задача 3.
Решить задачу Коши для бесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0, \\ u(x;0) = \begin{cases} 0, & x \ge 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases} \\ |u| < M. \end{cases}$$

Задача 4.
Решить задачу для полубесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \ t > 0, \\ u_x(0;t) = 0; \\ u(x;0) = \begin{cases} U_0, & x \ge 1 \\ 0, & 0 \le x < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 5.
Решить задачу Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1; \\ u|_{r=1} = \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Фотография 2

№3 К.Р.№1 Вариант 12 Окоёмов Олег 328

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases} \\ |u| < M \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot e^{\xi}\, d\xi + 0 =$$

$$\left(p = \frac{x-\xi}{2\sqrt{t}},\ dp = -\frac{d\xi}{2\sqrt{t}} \quad \text{при } \xi=0\ p = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad \xi = -2p\sqrt{t} + x \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-p^2} \cdot e^{x-2p\sqrt{t}}\, dp = -\frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-p^2-2p\sqrt{t}}\, dp =$$

$$= -\frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-(p+\sqrt{t})^2+t}\, dp = \left(\begin{array}{l} q = p+\sqrt{t} \\ dq = dp \\ \text{при } p = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad q = \frac{x+2t}{2\sqrt{t}} \end{array} \right) =$$

$$= -\frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}} e^{-q^2+t}\, dq = -\frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}} e^{-q^2}\, dq =$$

$$= -\frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \Phi\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right) \right) = -\frac{e^{x+t}}{2} - e^{x+t}\,\Phi\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{e^{x+t}}{2} - e^{x+t}\,\Phi\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)$. $\frac{1}{2} e^{x+t}\left(1 - \Phi\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right)$

+

Фотография 3

№5

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1 = R \\ u|_{r=1} = \sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

$$2\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi \Rightarrow \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u|_{r=1} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{2}, \; A_2 = -\frac{1}{2}, \; A_1 = A_3 = A_4 = \ldots = 0, \; B_1 = B_2 = \ldots = 0.$$

Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2}\cos 2\varphi$. +

№1. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \\ u(x,0) = \cos^3 x \end{cases}$$

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$T' + \lambda T = 0$$

$$T_n = C_n e^{-\lambda t}$$

$$u = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \\ X'(0) = 0 \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ X(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2n+1. \end{cases}$$

$$u(x,0) = \cos((2n+1)x) \cdot T(0) = \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda t}\cos((2n+1)x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(2n+1)^2 t}\cos((2n+1)x)$$

$$C_0 = \frac{3}{4}, \; C_1 = +\frac{1}{4}, \; C_2 = C_3 = \ldots = 0$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\cos x + \frac{1}{4}e^{-9t}\cos 3x$. +