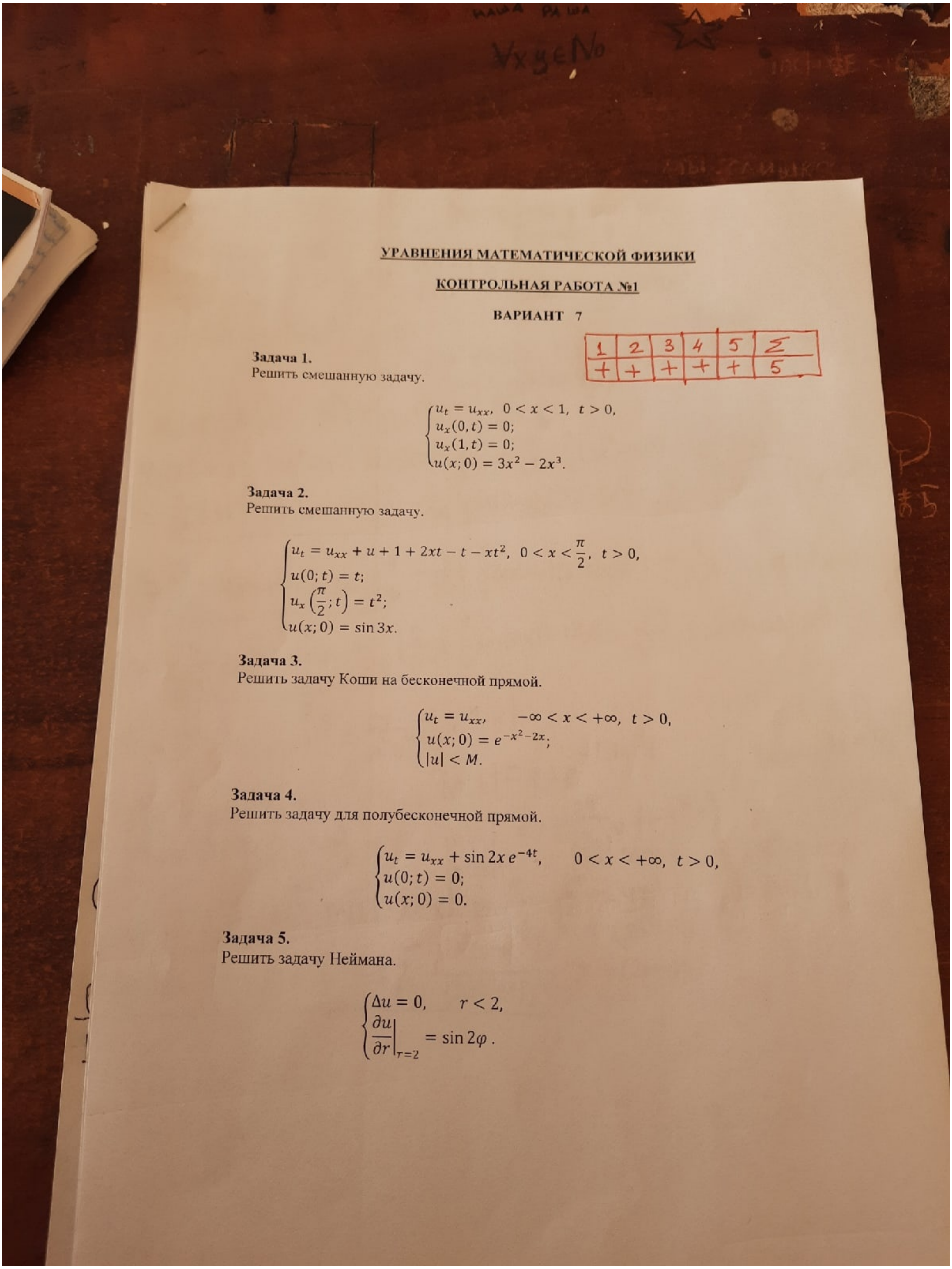
Фотография 1



УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТ 7

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	+	5

Задача 1.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0; \\ u_x(1,t) = 0; \\ u(x;0) = 3x^2 - 2x^3. \end{cases}$$

Задача 2.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 1 + 2xt - t - xt^2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(0;t) = t; \\ u_x\left(\frac{\pi}{2};t\right) = t^2; \\ u(x;0) = \sin 3x. \end{cases}$$

Задача 3.
Решить задачу Коши на бесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;0) = e^{-x^2-2x}; \\ |u| < M. \end{cases}$$

Задача 4.
Решить задачу для полубесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin 2x\, e^{-4t}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0;t) = 0; \\ u(x;0) = 0. \end{cases}$$

Задача 5.
Решить задачу Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 2, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = \sin 2\varphi . \end{cases}$$

Фотография 2

еняк Т.А. 328гр.

Контрольная работа №1.

Вариант 7.

№7

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 3x^2 - 2x^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{1}\right)^2 = \pi^2 n^2$$

$$X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x = \cos(\pi n x)$$

Найдём φ_0 и $\varphi_n\ (n>0)$

$$\Downarrow\ \begin{cases} T_n' + \lambda_n T_n = 0 \\ T_n(0) = \varphi_n(x) \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = 2\int_0^1 (3x^2-2x^3)\,dx = 2\left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$\varphi_n(x) = 2\int_0^1 (3x^2-2x^3)\cdot\cos(\pi n x)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (3x^2-2x^3)\,d\sin(\pi n x) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi n}(3x^2-2x^3)\cdot\sin \pi n x\Big|_0^1}_{0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x)\,d(3x^2-2x^3) = \frac{2}{(\pi n)^2}\int_0^1 d\cos(\pi n x)(6x-6x^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi^2 n^2}(6x-6x^2)\cos(\pi n x)\Big|_0^1}_{0} - \frac{2}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \cos(\pi n x)(6-12x)\,dx = -\frac{2}{\pi^3 n^3}\int_0^1 (6-12x)\,d\sin(\pi n x) =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi^3 n^3}(6-12x)\cdot\sin(\pi n x)\Big|_0^1}_{0} + \frac{2}{\pi^3 n^3}\int_0^1 \sin(\pi n x)(-12)\,dx = -\frac{24}{\pi^3 n^3}\int_0^1 \sin(\pi n x)\,dx =$$

$$= \frac{24}{\pi^4 n^4}\cos(\pi n x)\Big|_0^1 = \frac{24}{\pi^4 n^4}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$T_0(0) = T_0 = \varphi_0$$

$$T_n(t) = c\cdot e^{-(\pi n)^2 t}$$

$$\begin{cases} T_n' + (\pi n)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = \frac{24}{(\pi n)^4}\left((-1)^n - 1\right) \end{cases}$$

$$T_n(0) = c = \frac{24}{(\pi n)^4}\left((-1)^n - 1\right)$$

$\{n = 2k+1\}$ – т.к. при чётных n $(-1)^n - 1 = 0$

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot X_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-48}{(\pi(2k+1))^4}\, e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2} - 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}}{(\pi(2k+1))^4}$ $\cos(\pi(2k+1))x$

+

Фотография 3

N2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 1 + 2xt - t - xt^2, \quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0 \\ u(0,t) = t \\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = t^2 \\ u(x,0) = \sin(3x) \end{cases}$$

замена $\Rightarrow u = v + \alpha(t)x + \beta(t)$ $\qquad v(0,t) = v_x(\frac{\pi}{2},t)$ (новые гранич. усл.)

$u(0,t) = \underset{0}{v(0,t)} + \beta(t) = t \Rightarrow \underline{\beta(t) = t}$

$u_x(\frac{\pi}{2},t) = \underset{0}{v_x(\frac{\pi}{2},t)} + \alpha(t) + 0 = t^2 \Rightarrow \underline{\alpha(t) = t^2}$

$u(x,t) = v(x,t) + t^2x + t$

$v_t + 2tx + 1 = v_{xx} + v + t^2x + t + 1 + 2xt - t - xt^2, \quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + v, \quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0 \\ v(0,t) = 0 \\ v_x(\frac{\pi}{2},t) = 0 \\ v(x,0) = \sin(3x) \end{cases}$$

Замена: $\overset{(x,t)}{v} = e^t \cdot w(x,t)$

$e^t \cdot w(x,t) + e^t \cdot w_t(x,t) = e^t \cdot w_{xx}(x,t) + e^t \cdot w(x,t) \Rightarrow$

$\Rightarrow w_t = w_{xx}$

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w(0,t) = 0 \\ w_x(\frac{\pi}{2},t) = 0 \\ w(x,0) = \sin(3x) \end{cases}$$

$\lambda_n = (2n+1)^2 \qquad X_n(x) = \sin(2n+1)x$

$T_n(t) = C_n \cdot e^{-\lambda_n t}$

$w = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cdot T_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \sin(2n+1)x$

$w(x,0) = \sin(3x) \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_i = 0, \quad i \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow w = \sin(3x) \cdot e^{-9t} \Rightarrow v = e^t \cdot w = \sin(3x) \cdot e^{-8t} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t) = v + t^2x + t = \sin(3x) \cdot e^{-8t} + t^2x + t$

Ответ: $\cancel{u(x,t) = v + t^2x + t}$ $\underline{u(x,t) = \sin(3x) \cdot e^{-8t} + t^2x + t}$ +

Фотография 4

$V(0,t)=V_x(\frac{\pi}{2},t)$ (новые гранич. усл.)

$\nu(t)=t$

$\Rightarrow \nu(t)=t^2$

Семенюк Э.А. 3281т

№3

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2-2x} \\ |u|<M \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4ct}}\,e^{-\frac{cx^2}{1+4ct}}\,\underbrace{U\left(\frac{x}{1+4ct},\frac{t}{1+4ct}\right)}_{\text{какое-то решение}}$$

$$t=0:\ u(x,0)=1\cdot e^{-cx^2}\cdot U(x,0) \Rightarrow U(x,t)=e^{-2x}\cdot f(t)$$

$$e^{-x^2} \Rightarrow \boxed{c=1} \qquad e^{-2x}$$

чтобы выполнилось условие на $u(x,0)$

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ e^{-2x}\cdot f_t=4e^{-2x}\cdot f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f_t=4f \end{cases} \Rightarrow f=e^{4t} \Rightarrow U(x,t)=e^{-2x}\cdot e^{4t}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{1+4t}}\left(e^{-\frac{2x}{1+4t}}\cdot e^{\frac{4t}{1+4t}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\cdot e^{\frac{-x^2-2x}{1+4t}}\cdot e^{\frac{4t}{1+4t}}$$

Ответ: $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\cdot e^{\frac{-x^2-2x}{1+4t}}\cdot e^{\frac{4t}{1+4t}}=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\cdot e^{\frac{-x^2-2x+4t}{1+4t}}$ (+)

№4

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\sin(2x)\cdot e^{-4t}, & 0<x<+\infty,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

Продолжаем условие нечётно на $x\in(-\infty;0)$

Ищем решение в виде $u(x,t)=T(t)\cdot\sin(2x)$

$u(0,t)=0$ – выполняется, т.к. $\sin(0)=0$

Подставляем u в условие:

$$\begin{cases} T_t\cdot\sin(2x)=-4T\cdot\sin(2x)+\sin(2x)\cdot e^{-4t} \\ T(0)\cdot\sin(2x)=0 \end{cases} \Rightarrow T_t=-4T+e^{-4t}$$

I) $T'+4T=0 \Rightarrow T_{oo}=C\cdot e^{-4t}$

II) $T=C(t)\cdot e^{-4t}$

$\dot{C}\cdot e^{-4t}-4C\cdot e^{-4t}=-4C\cdot e^{-4t}+e^{-4t}$

$\dot{C}=1 \Rightarrow C(t)=t+C$

III) $T=C\cdot e^{-4t}+t\cdot e^{-4t}$

$T(0)=0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$\Rightarrow T=t\cdot e^{-4t} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t)=t\cdot e^{-4t}\cdot\sin(2x)$ (+)

Ответ: $\boxed{u(x,t)=t\cdot e^{-4t}\cdot\sin(2x)}$

$\vec{n}$ по внешней нормали $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}$; берём $\frac{\partial}{\partial r}$

№5

$$\begin{cases} \Delta u=0, & r<2=R \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=\sin(2\varphi) \end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=C\cdot r^2\cdot\sin(2\varphi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=2Cr\cdot\sin(2\varphi)\Big|_{r=2}=4C\cdot\sin(2\varphi)=\sin(2\varphi)$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{4} \Rightarrow u(r,\varphi)=\frac{r^2}{4}\cdot\sin(2\varphi)$$

(+)

Ответ: $u(r,\varphi)=\frac{r^2}{4}\cdot\sin(2\varphi)$