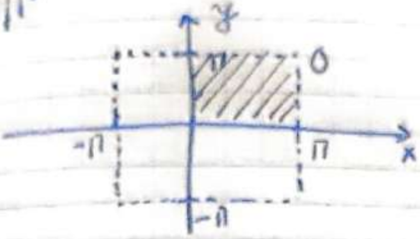
Билет 1

Билет №1 Задача №3 (также билет №4)

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$



задача не корр., т.к. решение не единств.

угад. семейство: $\{\cancel{\sin x \cos y}$, sl

$\{\cancel{\sin x}$, $\cancel{\sin}$ $n \cdot \sin nx \sin ny\}$ $\cancel{\sin n}$

$u = n \cdot \sin nx \sin ny$

$u_{xx} = -n \sin nx \sin ny = u_{yy}$

$u = 0$ при $x = 0 \cup x = \pi \cup y = 0 \cup y = \pi$

Билет 1. (1)

(4) Найти $u(x,t)$, где: + Билет 19

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 5 & 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0 \\ u(0,t) = 5t & t > 0 \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 & \\ u(x,0) = \sin 3x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x,t) + ax + b$

$b = 5t$

$a = 0$ $\Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + 5t$

$$\begin{cases} v_t \cancel{+5} = v_{xx} \cancel{+5} \\ v(0,t) = v_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \\ v(x,0) = \sin 3x \end{cases}$$

Ищем решение в виде: $v(x,t) = X(x)T(t)$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi(1+2n)}{2 \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^2 = (1+2n)^2$

$X_n = \sin(1+2n)\cdot x \quad n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$v(x,t) = \sin 3x \cdot T(t)$

$$\begin{cases} T' \cdot \cancel{\sin 3x} = -9 \cancel{\sin 3x} \cdot T \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

$T' = -9T \Rightarrow T = C_1 e^{-9t} \quad (C_1' e^{-9t} - 9e^{-9t} C_1 = -9e^{-9t} \cdot C_1)$

$C_1' = 0 \Rightarrow C_1 = \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = 1$

$\Rightarrow T = e^{-9t}$

$\Rightarrow v(x,t) = e^{-9t} \cdot \sin 3x$

Ответ: $u(x,t) = e^{-9t} \cdot \sin 3x + 5t$

(3) к

Билет 2

Билет 2 (2)

(3)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ x^4+y^4<1 \\ u|_{\Gamma}=2018 \end{cases}$$

Из принципа максимума: максимум и минимум достигаются только на границе, т.к. граница - константа, значит ф-я константа

$\Rightarrow$, $u(x,y)=2018$

(4) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x,\ t<+\infty$ $\boxed{+7 \text{ билет}}$

$u(0,t)=\cos at$

$u(x,0)=\cos x$

$u_t(x,0)=a\sin x$

I) $$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=\cos x \\ u_t(x,0)=a\sin x \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(0,t)=\cos at \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} -\varphi(-x), & x<0 \\ \varphi(x), & x>0 \end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases} -\psi(-x), & x<0 \\ \psi(x), & x>0 \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} -\cos x, & x<0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases} a\sin x, & x>0 \\ a\sin x, & x>0 \end{cases}$$

$$v_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha$$

$$v_1(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos(x+at)+\cos(\cancel{x+at})\right]+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\sin\alpha\,d\alpha \\ \frac{1}{2}\left[\cos(x+at)-\cos(x+at)\right]+\frac{1}{2}\int_{+at-x}^{x+at}\sin\alpha\,d\alpha \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos(x+at)+\cos(x-at)\right]-\frac{1}{2}\left[\cos(x+at)-\cos(x-at)\right] \\ \frac{1}{2}\left[\cos(x+at-\cos(x+at)\right]-\frac{1}{2}\left[\cos(x+at)-\cos(at-x)\right] \end{cases}=$$

$$\begin{cases} \cos(x-at), & x-at\geq 0 \\ 0, & x-at\leq 0 \end{cases}$$

II) $$v_2(x,t)=\begin{cases} 0, & x-at\geq 0 \\ \cos a\left(t-\frac{x}{a}\right), & x-at<0 \end{cases}=\begin{cases} 0, & x\geq at \\ \cos\left(a\left(t-\frac{x}{a}\right)\right), & x\leq at \end{cases}$$

~~Ответ: $u(x,t)=\ldots\cos(x-at)$~~

Ответ: $u=\cos(x-at)$

Билет 3

Билет 3.

(4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 \\ u(x,0)=\cos 2x \end{cases}$

$u_x(0,t)=0 \Rightarrow$ чет. прод. $\Rightarrow v(x,0)=\cos 2x,\ -\infty<x<+\infty$

$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & -\infty<x<+\infty \\ v_x(0,t)=0, & t>0 \\ v(x,0)=\cos 2x \end{cases}$

$v(x,t)=T(t)\cdot\cos 2x$

$T' = -4T \Rightarrow T = e^{-4t}\cdot C_1 \Rightarrow T(t)=e^{-4t}$

$T(0)=1 \Rightarrow C_1=1$

$v(x,t)=e^{-4t}\cos 2x \Rightarrow \underline{u(x,t)=e^{-4t}\cdot\cos 2x}$ ответ

Проверка:

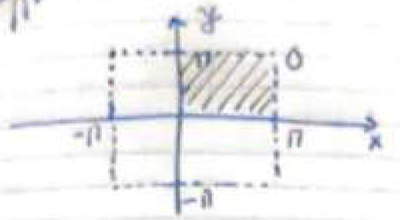
$-4e^{-4t}\cos 2x = -4e^{-4t}\cos 2x$

$-2e^{-4t}\cdot\sin 2x\big|_{(0,t)}=0$

$e^{-4t}\cos 2x\big|_{(x,0)}=\cos 2x$

Билет №1 Задача №3 (также билет №4)

$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi \\ u|_\Gamma=0 \end{cases}$



задача не корр., т.к. решение не единств.

число решений: $\{\cancel{\sin x\cos y},\ s1$

$\{\cancel{\sin x},\ s n\cdot\sin x\sin y\}\ \cancel{\sin n}$

$u = n\cdot\sin x\sin y$

$u_{xx} = -n\sin x\sin y = u_{yy}$

$u=0$ при $x=0 \cup x=\pi \cup y=0 \cup y=\pi$

Билет 4

билет 4.

(3)

(4) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x,\ t < +\infty \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

$(a = 1)$

$v(x,t) = 1$ явл-ся решением $u_t = u_{xx}$ =>

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4ct}} \cdot e^{-\frac{cx^2}{1+4ct}} \cdot v\left(\frac{x}{1+4ct}, \frac{t}{1+4ct}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4ct}} \cdot e^{-\frac{cx^2}{1+4ct}}$$ тоже явл-ся решением.

$$u(x,0) = e^{-x^2} = e^{-cx^2} \Rightarrow c = 1$$

Заметим, что полученное решение удовлетворяет

$u_x(0,t) = 0$: $u_x(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \cdot \left(-\frac{2x}{1+4t}\right) = 0$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$

(3) $u_{xx} = u_{yy}$

Метод распространяющихся волн дает $u(x,y) =$
$= f(x+y) + g(x-y)$, где f и g - дважды непрерывно диф-ые ф-ии

Тогда: $u_y(0,z) + u_x(0,z) = f'(z) - g'(z) + f'(z) + g'(z)$
$= 2f'(z)$

$u_y(z,0) + u_x(z,0) = f'(z) - g'(z) + f'(z) + g'(z) = 2f'(z)$ ||

ч.т.д.

Билет 5

Билет 5. (4)

(4)

$u_t = a^2 u_{xx} \quad 0<x<\pi, \quad t>0$

$u(0,t)=0, \quad u_x(\pi,t)=0, \quad t>0$

$u(x,0)=\sin\frac{5x}{2}, \quad 0\le x<\pi$

Решение

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{(2n-1)}{2}\right)^2$$

Общий вид $X_n = \sin\frac{(2n-1)}{2}x$

при $n=3$:

$$u(x,t)=\sin\frac{5x}{2}\cdot T(t)$$

$$\begin{cases} T'\cdot \cancel{\sin\frac{5x}{2}} = -\frac{25}{4}\cdot a^2\cdot \cancel{\sin\frac{5x}{2}}\cdot T \\ T(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T' = -\frac{25}{4}a^2\cdot T \\ T(0)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = C_1\cdot e^{-\frac{25}{4}a^2 t} \\ T(0)=1 \end{cases}$$

$C_1 = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } u(x,t) = e^{-\frac{25}{4}a^2 t}\cdot\sin\frac{5}{2}x \qquad \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0}$

Билет 6

Ответ

(3) Решить задачу:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x^4+y^4<1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = x^2+y^2 \end{cases}$$

Должно выполняться условие $\int\limits_{C_\Gamma} \varphi(\Gamma)\,ds = 0$.

$x^2+y^2=r^2$

$\int\limits_{C_\Gamma} r^2\,dS$:

$\sin^4(\varphi)=(\sin^2(\varphi))^2=\frac{\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3}{8}$

$\cos^4(\varphi)=\frac{\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi}{8}$

т.е. $x^4+y^4=r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=\frac{r^4}{4}(\cos 4\varphi+3) \Rightarrow$

$r^4=\frac{4}{\cos 4\varphi+3}$

$\frac{1}{4}\int\limits_C r^2\,ds=\int\limits_1^{\sqrt[4]{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\varphi\,dr=\int\limits_1^{\sqrt[4]{2}} r^2\cdot\frac{\pi}{2}\,dr>0$, т.е

$\int\limits_{C_\Gamma}\varphi(\Gamma)\,ds\neq 0$, то есть задача неразрешима

Билет 6

(5)

(4) $$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\sin 5x\cdot e^{-25t}, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le\pi \end{cases}$$

$\lambda_n=n \Rightarrow X_n=\sin nx$

при $n=5$:

$u(x,t)=$ ~~[illegible]~~ $T(t)\cdot\sin 5x$

$$\begin{cases} T'=-T\cdot 25+e^{-25t} \\ T(0)=0 \end{cases}$$

1) $T'=-T\cdot 25 \Rightarrow T=Ce^{-25t}$

Используем метод вариации постоянных

~~$C'\cdot e^{-25t}$ [illegible]~~

$C'\cdot e^{-25t}-25Ce^{-25t}=-25Ce^{-25}+e^{-25t} \Rightarrow C'=1 \Rightarrow C=t+\tilde{C}$

Т.к. $T(0)=0$, то $C_0=0 \Rightarrow T=t\cdot e^{-25t}$

Отсюда $u(x,t)=t\cdot e^{-25t}\cdot\sin 5x$

← Ответ

Билет 7

Билет 7. (5)

(3) Корректно ли поставлена задача

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{yy} \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

$\exists\ u(x,y) = X(y)\cdot Y(y)$

$X''\cdot Y = X\cdot Y''$

$\dfrac{X''}{X} = \dfrac{Y''}{X} = -\lambda$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda_k = k^2$

$X_k = \sin kx$

$k = 1,2,3\ldots$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(0) = 0 \\ Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$Y_k = C_{1k}\cdot\cos ky + C_{2k}\cdot\sin ky$

$u(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(C_{1k}\cdot\cos(ky) + C_{2k}\cdot\sin(ky)\right)\sin kx$

$u_y(x,y) = \sum k\left(-C_{1k}\cdot\sin(ky) + C_{2k}\cos(ky)\right)\cdot\sin kx$

$u_y(x,0) = \sum k\cdot C_{2k}\cdot\sin(kx) = 0 \quad \Rightarrow C_{2k} = 0 \quad \forall k$

$u_y(x,\pi) = \sum k\cdot C_{2k}\cdot(-1)^k\cdot\sin(kx) = 0 \quad \Rightarrow C_{2k} = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(C_{1k}\cdot\cos(ky)\right)\cdot\sin(kx)$

C_{1k} - любое при $\forall\ k = 1,2,\ldots$

$\Rightarrow$ нет единственности решения $\Rightarrow$ задача поставлена некор.

(4) Билет 2

Билет 8

Вариант 8.

(3) Найти логариф. потенциал двойного слоя с постоянной плотностью внутри круга R. (6)

Потенциал двойного слоя в E^2: $u(M) = -\int\limits_L f(p)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{np}}\right)dl_p$

В нашем случае $f(p) = const$, $f(p) \equiv C$

При $f(p) = 1$ $\quad u_1(n) = -\int\limits_L \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{np}}\right) dl_p = 2\pi$ (внутри обл)

$\Rightarrow u(M) = 2\pi C$ в обл

Ответ: $u(M) = \boxed{2\pi c,\ c = const}$

билет 8

(4)
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos^2 x \quad \left(= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) & 0 < x < \pi \quad 0 < t < +\infty \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

Разобьем на две задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + \frac{\cos 2x}{2} \\ w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx} + \frac{1}{2} \\ V_x(0,t) = V_x(\pi,t) = 0 \\ V(x,0) = 0 \\ V_t(x,0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$w = \cos 2x \cdot T(t)$

$$\begin{cases} T''(t) = -4a^2 T + \frac{1}{2} \\ T(0) = 0 \\ T'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$T = C_1 \cos 2at + C_2 \sin 2at + \frac{1}{8a^2}$

$C_1 = -\frac{1}{8a^2}$; $C_1 = -\frac{1}{4a}$

$\Rightarrow T = -\frac{1}{8a^2}\cos 2at - \frac{1}{4a}\sin 2at + \frac{1}{8a^2}$

$V = T(t)$

$T'' = \frac{1}{2}$

$T' = \frac{1}{2}t + C_1$

$$\begin{cases} T'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \\ T(0) = 0 \\ T_t(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$C_1 = +\frac{1}{2}$; $C_2 = 0$

$T = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}t$

Ответ: $u(x,t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8a^2}\cos 2x\,(1 - \cos 2at) + \left(-\frac{1}{4a}\sin 2at \cos 2at\right)$

Билет 9

Билет №9 №3

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varepsilon \sin kx \end{cases}$$

ищем в виде $u = T(t) \cdot \varepsilon \sin kx$

$$\begin{cases} T' \varepsilon \sin kx - \varepsilon k^2 \sin kx\, T(t) = 0 \\ T(0)\, \varepsilon \sin kx = \varepsilon \sin kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} T' = k^2 T \\ T(0) = 1 \end{cases} \quad T(t) = e^{k^2 t} \quad u = e^{k^2 t} \varepsilon \sin kx$$

Поставим новую задачу:

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx}, \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases} \quad (1)$$ пусть решение $- u_0(x)$

припоставим:

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = f(x) + \varepsilon \sin kx \end{cases} \quad (2)$$

решение:

$\cancel{u = u_0 + \varepsilon \sin kx}$

$u = u_0 + e^{k^2 t} \varepsilon \sin kx$

ε сколь угодно мало, возмущение велико => устойчивость нарушена.

---

(4)

$\Delta u = 0$ + Билет 22

$u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0$

$u(2, \varphi) = \sin 12\varphi$

~~ищем~~

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi = \left\{\alpha = \frac{\pi}{4}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{4n} \cdot \sin 4n\varphi$$

$$u(r,\varphi) = \sin 12\varphi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n 2^{4n} \cdot \sin 4n\varphi = \sin 12\varphi$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{1}{2^{12}} \Rightarrow \boxed{u(r,\varphi) = \frac{r^{12}}{2^{12}} \sin 12\varphi}$$

2 решение

$\lambda_k = (4k)^2$

Билет 10

Билет 10.

Ищем решение в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

④ $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \cos at \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = -a\cos x \end{cases}$$

$$u_1: \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = -a\cos x = \psi(x) \end{cases} \qquad u_2: \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \cos at \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}(-a\cos\alpha)\,d\alpha, & x-at \geq 0 \\ \dfrac{\sin(x+at) + \sin(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at}(-a\cos\alpha)\,d\alpha + \int_{0}^{at-x}(-a\cos\alpha)\,d\alpha\right], & x-at \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[\sin(x+at) + \sin(x-at)] + \frac{1}{2}[-\sin(x+at) + \sin(x-at)] \\ \frac{1}{2}[\sin(x+at) + \sin(at-x)] + \frac{1}{2}[-\sin(x+at) - \sin(at-x)] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-at), & x-at \geq 0 \\ 0, & x-at < 0 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \sin a\left(t - \frac{x}{a}\right), & t - \frac{x}{a} > 0 \\ 0, & t - \frac{x}{a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{u = u_1 + u_2 = \begin{cases} \sin(x-at), & x-at \geq 0 \\ \sin(x-at), & x-at < 0 \end{cases}}$$

ответ: $\sin(x-at) = u(x,t) \quad \forall x$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} (-a)\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} u(\alpha)\,d\alpha, & t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

Билет 11

(4)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 6t & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = t^3,\ u(\pi,t) = 4\pi + t^3 & t > 0 \\ u(x,0) = 4x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 3\sin 5x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$u(x,t) = 4x + t^3 + v(x,t)$$

$$\begin{cases} v_{tt} + \cancel{6t} = v(x,t) + \cancel{6t} \\ v(0,t) = 0;\ v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 3\sin 5x \end{cases}$$

$$v(x,t) = T(t)\sin 5x$$

$$\begin{cases} T'' = 100T \\ T(0) = 0 \\ T'(0) = 3 \end{cases}$$

$T = C_1\cos 10t + C_2\sin 10t$

$C_1 = 0$

$C_2 = \frac{3}{10}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{3}{10}\sin 10t$ $\Rightarrow$ $v(x,t) = \frac{3}{10}\sin 10t \cdot \sin 5x$

$$\boxed{\text{Ответ: } u(x,t) = \frac{3}{10}\sin 10t \cdot \sin 5x + 4x + t^3}$$

Билет 12

Билет №12

№3
$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = \varepsilon \sin kx, \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = T(t)\,\varepsilon \sin kx \\ u_t = T'\,\varepsilon \sin kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} T''\varepsilon \sin kx - T k^2 \varepsilon \sin kx = 0, \\ T(0)\,\varepsilon \sin kx = \varepsilon \sin kx \\ T_t(0)\,\varepsilon \sin kx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T''(t) = T k^2; \\ T(0) = 1, \\ T_t(0) = 0 \end{cases} \qquad T(t) = \frac{1}{2} e^{-kt}\left(e^{2kt} + 1\right)$$

$$u = \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) \sin kx$$

новая задача (1): $\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = f_1 \\ u_t|_{t=0} = f_2 \end{cases}$

совместная задача (2): $\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = f_1 + \varepsilon \sin kx, \\ u_t|_{t=0} = f_2 \end{cases}$

пусть u_0 есть решение (1), тогда $u_1 = u_0 + \frac{1}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)\varepsilon \sin kx$ есть решение (2). ε сколь угодно мало, однако изм. велико $\Rightarrow$ отсутств. уст.

(4) Билет 12.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & 0 \le y \le 2 \\ u|_{y=0} = \sin \pi x, & 0 \le x \le 1 \\ u|_{y=2} = \sin 4\pi x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Разобъем на 2 задачи

I)
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \\ u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=2} = \sin 4\pi x \end{cases}$$

$u_1 = y_1(y) \cdot \sin 4\pi x$

$$\begin{cases} y_1'' - (4\pi)^2 y_1 = 0 \\ y_1(2) = 1;\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

$y_1(y) = A \operatorname{ch} 4\pi y + B \operatorname{sh} 4\pi y$

$y(0) = A = 0$

$y(2) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{A}} \operatorname{ch} 8\pi + B \operatorname{sh} 8\pi = 1$

$\Rightarrow B = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 8\pi}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{\operatorname{sh} 4\pi y}{\operatorname{sh} 8\pi} \cdot \sin 4\pi x$

II)
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \\ u|_{y=0} = \sin \pi x \\ u|_{y=2} = 0 \end{cases}$$

$u_2 = y_2(y) \cdot \sin \pi x$

$$\begin{cases} y_2'' - \pi^2 y_2 = 0 \\ y_2(0) = 1;\ y_2(2) = 0 \end{cases}$$

$y_2 = A \operatorname{ch} \pi y + B \operatorname{sh} \pi y$

$y(0) = A = 1$

$y(2) = A \operatorname{ch} 2\pi + B \operatorname{sh} 2\pi = 0$

$B = -\dfrac{\operatorname{ch} 2\pi}{\operatorname{sh} 2\pi}$

$u_2 = \left(\operatorname{ch} \pi y - \dfrac{\operatorname{ch} 2\pi}{\operatorname{sh} 2\pi} \operatorname{sh} \pi y\right) \cdot \sin \pi x$

$\Rightarrow u = u_1 + u_2$

Билет 13

Билет 13

(4)
$$\begin{cases} u = u(x,t) \\ u_{tt} = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+t) + \operatorname{arctg}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{1+s^2}\,ds =$$

$$= \ldots + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} s\Big|_{x-at}^{x+at} = \operatorname{arctg}(x+t)$$

Можно проверить: $u_t = \frac{1}{1+(x+t)^2} = u_x \Rightarrow u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$

$$u_{tt} = -\frac{1}{(1+(x+t)^2)^2}\cdot 2(x+t) = u_{xx}$$

Ответ: $u(x,t) = \operatorname{arctg}(x+t)$

(3) Логариф. потенциал двойного слоя с постоянной плоскостью на прямой $y=0$ $\Rightarrow$

на границе лог. потенциал имеет разрыв

Пусть постоянная плотность равна ν_0 $\Rightarrow$

известно, что $W(M) = \pi\nu_0$, где $M: y=0$ (т.е на гр)

$W_{int} = W(M) + \pi\nu_0 = 2\pi\nu_0$ – внутри

$W_{ext} = W(M) - \pi\nu_0 = 0$ – снаружи

Ответ: $\pi\nu_0$, где ν_0 – зад. пл

Билет 14

(4)
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \quad u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{9x}{2} & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = a\cos\frac{3x}{2} & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \qquad X_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{9x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}ax\right)$$

$$B_3 = 1, \ B_5 = 1 \ ; \ B_n = 0, \ n \ne 3,5$$

$$a \cdot \cos\frac{3x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2}\right) a \cdot A_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}ax\right)$$

$$A_2 = \frac{2}{3} \ ; \ A_n = 0, \ n \ne 2$$

$$\cancel{u(x,t) = \cos\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5a}{2}t + \cos\frac{9x}{2}\cdot\sin\frac{9a}{2}t + \frac{2}{3}\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{3a}{2}t}$$

$$T_n(t) = A_n\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n\sin a\sqrt{\lambda_n}\,t$$

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$u(x,t) = \cos\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{5a}{2}t + \cos\frac{9x}{2}\cdot\cos\frac{9a}{2}t + \cos\frac{3x}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\sin\frac{3at}{2}\right)$$

↖ Ответ

Билет 15

Билет №15

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

$u = \cancel{\cos nx \sin nx \cos nx} \; n \cos x \sin ny$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -n \sin x \sin ny$ – удовл.,

имеем ∞ число решений $\Rightarrow$ задача поставлена некорректно

...лет 15.

(4) Задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos\varphi = f(\varphi) \end{cases}$$

Проверим ~~на разр~~ условие существования:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \Rightarrow \text{разрешима}$$

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n \cdot A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

Производная:

$$u'(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

$$u(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n A_n \cos n\varphi + n B_n \sin n\varphi\right) = \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = A_1 \cos\varphi \quad \Rightarrow n = 1 \quad A_1 = 1 \quad B_1 = 0$$

$$n \neq 1 \quad A_n = 0 \quad B_n = 0$$

Ответ: $u(r,\varphi) = A_0 + r \cdot \cos\varphi$

Билет 16

Билет №16

$\boxed{№3}$ $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ удовл. $u_{xx} = u_{tt}$

Док. $u_x(0,p) + u_t(0,p) = u_x(p,0) + u_t(p,0)$

Метод распр. волн: $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$

тогда:

$u_x = f'(x+t) + g'(x-t)$

$u_t = f'(x+t) - g'(x-t)$

$u_x(0,p) + u_t(0,p) = f'(p) + g(-p) +$
$+ f'(p) - g'(-p) = 2f'(p)$

$u_x(p,0) + u_t(p,0) = f'(p) + g'(p) +$
$+ f'(p) - g'(p) = 2f'(p)$

(4) $u = u(x,t)$ $\quad \lim\limits_{t\to 0+0} u(-1,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+0} u(1,t)$

$4u_t = u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty, \ t>0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ 2, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty \end{cases} \qquad a^2 = \frac{1}{4}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot\frac{1}{4}\cdot t}} \cdot \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{t}}\, d\xi =$$

$$= \left\{ \alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{t}}, \ d\xi = \sqrt{t}\, d\alpha \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\frac{-1-x}{\sqrt{t}}}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_{0}^{\frac{1-x}{\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\cdot 2}{\sqrt{\pi}\cdot 2} \left(\Phi\left(\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{1-x}{\sqrt{t}}\right) \right) = \Phi\left(\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{1-x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\lim_{t\to 0+0} u(-1,t) = \lim_{t\to 0+0} \left(\Phi\left(\frac{0}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right) \right) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{t\to 0+0} u(1,t) = \lim_{t\to 0+0} \left(\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{t}}\right) \right) = 1 + 0 = 1$$

Билет 17

№ 17.3

$$L[u] = y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + y u_x - x u_y - x^2 y^2 u$$

$$L^*[u] = (y^2 u)_{xx} + (x^2 u)_{yy} - (yu)_x + (xu)_y - x^2 y^2 u =$$

$$= y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} - y u_x + x u_y - x^2 y^2 u$$

Билет 17.

(4) $\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le r < 1 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos^3\varphi = f(\varphi) = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi \end{cases}$

Проверим условие существования:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos x(1-\sin^2 x)\,dx = \begin{cases} u = \sin x \\ dx = \frac{1}{\cos x}du \end{cases}$$

$$= \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ разрешима

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\boxed{r^n \cdot} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u'(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{n \cdot} r^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u'(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n \cos n\varphi + n B_n \sin n\varphi) = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

$\cos\varphi = A_1 \cos\varphi$ $\Rightarrow$ $n=1: \ A_1 = \frac{1}{4} \ \ B_1 = 0$

$\cos 3\varphi = A_3 = \cos 3\varphi$ $\quad n=3: \ A_3 = \frac{3}{4} \ \ B_3 = 0$

$n \ne 1,3: \ A_n = 0; \ B_n = 0$

Ответ: $\boxed{u(r,\varphi) = A_0 + \frac{3}{4} r\cos\varphi + \boxed{\frac{1}{4} r^3 \cdot} \cos 3\varphi}$

Alexander Prot...
00:40 Сегодня
здесь r^n/n

Alexander Prot...
00:40 Сегодня
здесь из-за комментария выше будет n/n и поэтому уйдет вообще

Максим_ _Пор...
20:45 Вчера
Вместо 1/4 1/12 надо

Alexander Protasov
00:39 Сегодня
согласен

Alexander Prot...
00:41 Сегодня
1/(4*n) где n = 3

Билет 18

№ 18.3

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{да}$$

Билет 18.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin 2x \end{cases}$$

ищем решение в виде $u(x,t) = T(t)\sin 2x$

$T' = -4T \Rightarrow T = C_1 e^{-4t}$

$T(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow T(t) = e^{-4t}$

Ответ: $u(x,t) = e^{-4t} \cdot \sin 2x$

Проверка:

$-4e^{-4t}\sin 2x = -4e^{-4t} \cdot \sin 2x$

$e^{-4t} \cdot \sin 2x \big|_{(x,0)} = \sin 2x$ $\Rightarrow$ верно

Билет 19

Билет 19

(3)

Если $L[u] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu$,

то сопр. опер для $L[u]$:

$$M[v] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv$$

$\Rightarrow$ по условию, $L[u] = \underset{a_{11}}{x} u_{xx} - \underset{a_{22}}{y} u_{yy} + \underset{b_1}{x^2} u_x + \underset{b_2}{y^2} u_y + \underset{c}{xy} u$

$\Rightarrow$ сопр. опер:

$M[v] = (xv)_{xx} + (-yv)_{yy} - (x^2 v)_x - (y^2 v)_y + xyv =$

$= (2u_x + xv_{xx}) + (-2v_y - yv_{yy}) - (2xv + x^2 v_x) -$

$- (2yv + y^2 v_y) + xyv = xv_{xx} - yv_{yy} + (2-x)^2 v_x + (2-y^2) v_y +$

$+ (xy - 2x - 2y) v$

Ответ: $M[v] = (xv)_{xx} + (-yv)_{yy} - (x^2 v)_x - (y^2 v)_y + xyv =$

$= xv_{xx} - yv_{yy} + (2-x^2) v_{xx} + (-2-y^2) v_y + (xy - 2x - 2y) v$

4 см 1 билет

Билет 20

③ $L(u) = y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + y u_x - x u_y - x^2 y^2 u$

$M(v) = (y^2 v)_{xx} + (x^2 v)_{yy} - (y v)_x + (x v)_y - x^2 y^2 v =$

$= y^2 v_{xx} + x^2 v_{yy} - y v_x + x v_y - x^2 y^2 v$

④
$$\begin{cases} \Delta u = \sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < +\infty \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad 0 \le y < +\infty \\ u|_{y=0} = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\exists\, u = X(x) Y(y)$

$\Rightarrow X_n = \sin 2nx$

$Y_{n \ne 3}(y) = 0$

$\ddot{Y}_3(y) - 36 Y_3(y) = 1$

$Y = Ce^{6t}$

$\ddot{C} e^{6t} + 12 \dot{C} e^{6t} + \cancel{36 C e^{6t} - 36 C e^{6t}} = 1$

$\ddot{C} + 12 \dot{C} = e^{-6t} \Rightarrow C = k_1 e^{-6t} + k_2$

$36 k_1 - 72 k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{36}$

$Y = \frac{k e^{6t} - 1}{36}$ $\quad Y(0) = 0 \Rightarrow k = 1$

$$\boxed{u = \frac{e^{6t} - 1}{36} \sin 6x}$$

Билет 21

билет 21

(4) $\Delta u = 0, \ r > 1$

$u|_{r=1} = \sin^3 2\varphi = \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 6\varphi$

Решение внешней задачи: $u(r,\varphi) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$

Краевое условие: $u(1,\varphi) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 6\varphi$

$\Rightarrow B_2 = \frac{3}{4}, \ B_6 = -\frac{1}{4}, \ B_{n \neq 2,6} = 0 \ \Rightarrow$

$A_n = 0$

Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{r^6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin 6\varphi$

(3) Решить задачу

$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty$

$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin(kx) = \varphi(x)$

Продлим φ нечетным образом: $\Phi = \begin{cases} -\varphi(-x) = \sin kx, & x < 0 \\ \varphi(x) = \sin kx, & x \geq 0 \end{cases}$

Предположим, что $u = T(t) \cdot \cancel{\cos} \sin kx$

Тогда $\begin{cases} T' \cdot \sin kx = -k^2 \cdot T \cdot \sin kx \\ T(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow T(t) = e^{-k^2 t}$

Ответ: $u(x,t) = e^{-k^2 t} \sin kx$

Билет 22

Билет 22 №13

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x, t < +\infty \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos kx \end{cases}$$

1). $\boxed{u_x(0,t) = 0}$ => продолжим на $x < 0$ четным образом

$\cos kx$ – четная => $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \cos kx, & t > 0 \end{cases}$

2).

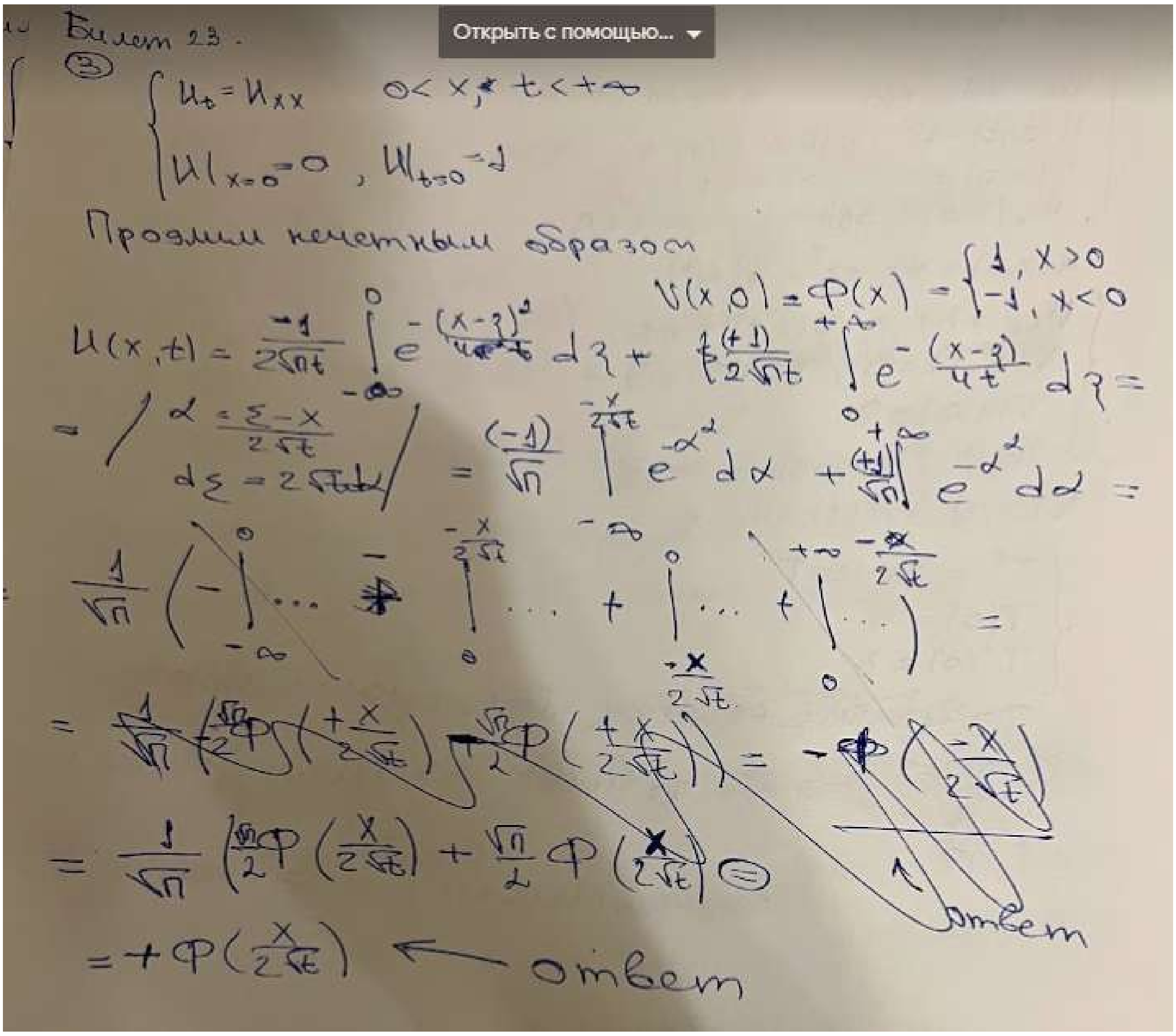
Будем искать $u(x,t) = T(t)\cos kx$:

$$\begin{cases} T' = -k^2 T \\ T(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} T(t) = Ce^{-k^2 t} \\ T(0) = 1 \Rightarrow T(t) = e^{-k^2 t} \end{array}$$

$\underline{u(x,t) = e^{-k^2 t}\cos kx}$ ← Ответ.

4 см билет 9

Билет 23


Билет 23.

(3) $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x,\ t<+\infty \\ u|_{x=0}=0, & u|_{t=0}=1 \end{cases}$

Продлим нечетным образом

$$V(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi + \frac{(+1)}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi =$$

$$= \Big/ \alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt t},\quad d\xi = 2\sqrt t\, d\alpha \Big/ = \frac{(-1)}{\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt t}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \frac{(+1)}{\sqrt\pi}\int_{-\frac{x}{2\sqrt t}}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha =$$

$$\frac{1}{\sqrt\pi}\left(-\int_{-\infty}^{0} \dots - \int_{0}^{-\frac{x}{2\sqrt t}} \dots + \int_{-\frac{x}{2\sqrt t}}^{0} \dots + \int_{0}^{+\infty} \dots\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt\pi}\left(\frac{\sqrt\pi}{2}\varphi\left(+\frac{x}{2\sqrt t}\right) - \frac{\sqrt\pi}{2}\varphi\left(\frac{+x}{2\sqrt t}\right)\right) = -\varphi\left(\frac{-x}{2\sqrt t}\right)}$$

ответ

$$= \frac{1}{\sqrt\pi}\left(\frac{\sqrt\pi}{2}\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt t}\right) + \frac{\sqrt\pi}{2}\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt t}\right)\right) =$$

$$= +\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt t}\right) \leftarrow \text{ответ}$$

4 см билет 11

Билет 24

см билет 14

Билет 25

Билет 26

Билет 27

3 см билет 2
4 см билет 10

Билет 28

Билет 29

Билет 30

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = u_1 + u_2 = \cos(x - t)$$

↑ ответ

③ $\begin{cases} u_{tt} = -u_{xx} & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin kx \end{cases}$

$u(x,t) = T(t) \cdot \sin kx$

$\begin{cases} T'' = k^2 T \\ T(0) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$

$\frac{1}{k} \operatorname{sh} kt \sin kx$

$C_1 = \frac{1}{2k}$; $C_2 = -\frac{1}{2k} \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} \sin kx$ ⊝

$\Rightarrow$ решение $\exists$, а т.к. k фиксировано, то реш !

Устойчивость:

$\begin{cases} v_{tt} = -v_{xx} & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) \end{cases} \Rightarrow v(x,t) = 0$

Раз-ть реш-ий: $|u(x,t) - v(x,t)| = \frac{1}{k} |\operatorname{sh} kt \sin kx| \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

При этом нач-ые условия этих задач стремятся друг к другу при $k \to +\infty \Rightarrow$ уст-ть не выпол-ся $\Rightarrow$ задача поставлена некорректно

Билет 30.

(4)
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & -\infty < x < 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = \cos t \\ u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = \sin x \end{cases}$$

$\boxed{a = 1}$!

$\Rightarrow$ продлеваем нечетным образом и ищем решение в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

$$u_1: \begin{cases} u_{tt} = \cancel{a^2} u_{xx} \\ \boxed{u_x(0,t) = 0} \\ u(x,0) = \cancel{\cos} x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \sin x = \psi(x) \end{cases} \qquad u_2: \begin{cases} u_{tt} = \cancel{a^2} u_{xx} \\ \boxed{u_x(0,t) = \cos t} \\ u(x,0) = \cancel{\cos}\ 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos(x+\cancel{a}t) + \cancel{\cos}(x-\cancel{a}t)\right] + \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x-\cancel{a}t}^{x+\cancel{a}t} \sin\alpha\, d\alpha\right], & x-\cancel{a}t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left[\cos(x+\cancel{a}t) - \cos(\cancel{a}t-x)\right] + \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\cancel{a}t-x}^{x+\cancel{a}t} \sin\alpha\, d\alpha, & x < \cancel{a}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos(x+\cancel{a}t) + \cos(x-\cancel{a}t)\right] + \frac{1}{2}\left[-\cancel{\cos}(x+\cancel{a}t) + \cos(x-\cancel{a}t)\right], & x-\cancel{a}t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left[\cos(x+\cancel{a}t) - \cos(\cancel{a}t-x)\right] + \frac{1}{2}\left(-\cos(x+\cancel{a}t) + \cos(\cancel{a}t-x)\right], & x < \cancel{a}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-\cancel{a}t), & x \geq \cancel{a}t \\ 0, & x < \cancel{a}t \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & t - \frac{x}{\cancel{a}} < 0 \\ \cos\left(t - \frac{x}{\cancel{a}}\right), & t - \frac{x}{\cancel{a}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{u(x,t) = u_1 + u_2 = \boxed{\cos(x-\cancel{a}t)}}$$

ответ