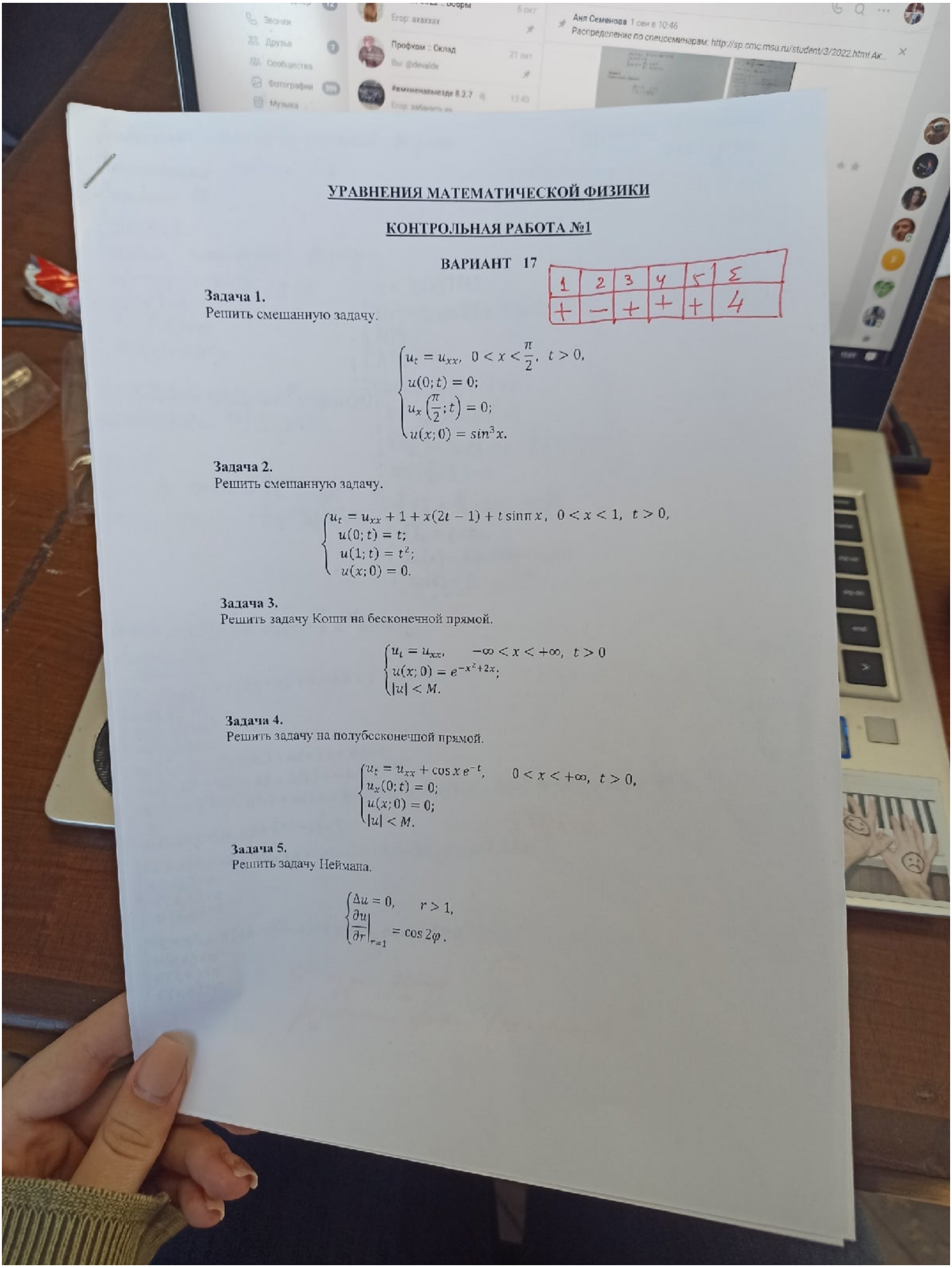
Фотография 1



УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТ 17

1	2	3	4	5	Σ
+	−	+	+	+	4

Задача 1.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(0;t) = 0; \\ u_x\left(\dfrac{\pi}{2};t\right) = 0; \\ u(x;0) = sin^3 x. \end{cases}$$

Задача 2.
Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + x(2t-1) + t\sin\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0;t) = t; \\ u(1;t) = t^2; \\ u(x;0) = 0. \end{cases}$$

Задача 3.
Решить задачу Коши на бесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x;0) = e^{-x^2+2x}; \\ |u| < M. \end{cases}$$

Задача 4.
Решить задачу на полубесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos x\, e^{-t}, \qquad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0;t) = 0; \\ u(x;0) = 0; \\ |u| < M. \end{cases}$$

Задача 5.
Решить задачу Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad r > 1, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Фотография 2

...авнения математической физики Кузьмина Елизавета
...онтрольная работа №1 328 группа
Вариант 17.

Задача 1

Решить смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \\ u(x,0)=\sin^3 x \end{cases}$$

$u = X(x)T(t)$

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \\ X(0)=0 \\ X'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

$X(0)=C_1=0 \quad \lambda>0$

$X' = C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(\frac{\pi}{2}) = C_2\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda})=0$

$\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda})=0$

$\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{N}_0$

$\sqrt{\lambda_n} = 1+2n$

$X_n(x) = \sin((2n+1)x)$

$T_n(t) = C_n\cdot e^{-\lambda_n t}$

$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda t}\sin((2n+1)x)$

$u(x,0) = \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

$$\begin{cases} C_0 = \frac{3}{4} \\ C_1 = -\frac{1}{4} \\ C_i = 0,\ i>1 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin(x) - \frac{1}{4}e^{-3t}\sin(3x)$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin(x) - \frac{1}{4}e^{-3t}\sin(3x)$.

+

Задача №2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + x(2t-1) + t\sin\pi x,\ 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=t \\ u(1,t)=t^2 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x,t) + a(t)x + b(t)$

$u(0,t) = v(0,t) + b(t) \Rightarrow b(t)=t$

$u(1,t) = v(1,t) + a(t) + b(t) = t^2 \Rightarrow v(1,t) + a(t) + t = t^2 \Rightarrow a(t) = t^2 - t$

$\Downarrow$

$u(x,t) = v(x,t) + t(t-1) + t$

$u = v + (t^2-t)x + t.$

$$\begin{cases} v_t + 2t - 1 + \cancel{1} = v_{xx} + \cancel{1} + (2t-1)x + t\sin\pi x,\ 0<x<1,\ t>0 \\ v(0,t)=0 \\ v(1,t)=0 \\ v(x,0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + (2t-1)(x-1) + t\sin\pi x,\ 0<x<1,\ t>0 \\ v(0,t)=0 \\ v(1,t)=0 \\ v(x,0)=0 \end{cases}$$

−

А куда делось разложение ф-ции $(2t-1)(x-1)$?

Фотография 3

(1) $\begin{cases} v_t = v_{xx} + t\sin \pi x \\ v(0,t)=0 \\ v(1,t)=0 \\ v(x,0)=0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = g(t)\sin(\pi x)$

$\begin{cases} g'(t)\cancel{\sin(\pi x)} = -g(t)\pi^2 \cancel{\sin(\pi x)} + t\,\cancel{\sin(\pi x)} \\ g(0)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} g'(t) = -\pi^2 g(t) + t \\ g(0)=0 \end{cases}$

$\frac{dg}{dt} = -\pi^2 g + t$

dg

$\frac{dg}{dt} = -\pi^2 g$

$\frac{dg}{-\pi^2 g} = dt$

$\frac{dg}{g} = -\pi^2 dt$

$\ln g = -\pi^2 t$

$g = e^{-\pi^2 t}\cdot C(t)$

$g' = C'(t)\cdot e^{-\pi^2 t} - \pi^2 e^{-\pi^2 t}\cdot C(t)$

$C'(t)\cdot e^{-\pi^2 t} - \cancel{\pi^2 e^{-\pi^2 t}\cdot C(t)} = \cancel{-\pi^2 e^{-\pi^2 t}\cdot C(t)} + t$

$C'(t) = \frac{t}{e^{-\pi^2 t}} = te^{\pi^2 t}$

$C(t) = \int te^{\pi^2 t}\,dt$

Задача №4

$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos x\, e^{-t}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u_x(0,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ |u| < M \end{cases}$

$u(x,t) = \cos x\, T(t)$

$\cos x\, T' = -\cos x\, T + \cos x\cdot e^{-t}$

$\begin{cases} T' = -T + e^{-t} \\ T(0)=0 \end{cases}$

$\frac{dT}{dt} = -T \Rightarrow T = Ce^{-t}$

$T' = C'e^{-t} - Ce^{-t}$

$C'e^{-t} - Ce^{-t} = -Ce^{-t} + e^{-t}$

$C' = 1 \Rightarrow C = t + \hat{C}$

$T = (t + \hat{C})e^{-t}$

$\cos x\, T(0) = 0 \Rightarrow \hat{C} = 0$

Ответ: $u(x,t) = \cos(x)\, t e^{-t}$

(+)

Фотография 4

$(\sin(\pi x))' = \pi \cos(\pi$
$- \pi^2 \sin(\pi$

…ача №5

…шить задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos 2\varphi \end{cases} \qquad \underline{a = 1}$$

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos \varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\frac{n \cdot a^n}{r^{n+1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sum_{n=1}^{\infty} -n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \cos 2\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 = B_1 = 0$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}, \; B_2 = A_3 = B_3 \ldots = 0$$

$$u(r,\varphi) = -\frac{1}{2r^2} \cdot \cos 2\varphi.$$

Ответ: $u(r,\varphi) = -\frac{1}{2} r^2 \cdot \cos 2\varphi.$ +

Задача №3

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \; t > 0 \\ u(x,0) = \underbrace{e^{-x^2+2x}}_{\varphi(x)} \\ |u| < M \end{cases}$$

Пуассон: $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\xi - \xi^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(2\xi - \xi^2 - \frac{x^2}{4t} + \frac{x\xi}{2t} - \frac{\xi^2}{4t}\right)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left[\left(\xi - \frac{4t+x}{4t+1}\right)^2 - \left(\frac{4t+x}{4t+1}\right)^2 + \frac{x^2}{4t+1}\right]} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left[\frac{x^2}{4t+1} - \left(\frac{4t+x}{4t+1}\right)^2\right]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left(\xi - \frac{4t+x}{4t+1}\right)^2} d\left(\xi - \frac{4t+x}{t+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left[\frac{x^2}{4t+1} - \left(\frac{4t+x}{4t+1}\right)^2\right]} \cdot \sqrt{\frac{4t}{4t+1}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\left(\xi - \frac{4t+x}{4t+1}\right)\right]^2} d\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\left(\xi - \frac{4t+x}{4t+1}\right)}_{=\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left[\frac{x^2}{4t+1} - \left(\frac{4t+x}{4t+1}\right)^2\right]}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{4t+1}{4t}\left[\frac{x^2}{4t+1} - \left(\frac{4t+x}{4t+1}\right)^2\right]}$

4