Calcolo combinatorio

Probabilità classica	P(A)= $\frac{\#A}{\#\Omega}$ = $\frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$
Permutazioni	n elementi si possono ordinare in $n!$ modi
Permutazioni con ripetizione	n elementi con k elementi ripetuti si possono ordinare in $\frac{n!}{k!}$ modi
Disposizioni con ripetizione	dati due interi n e k, il numero di applicazioni da $\{1, ..., k\}$ a $\{1, ..., n\}$ è n^k
Coefficiente binomiale	il numero di sottoinsiemi di k elementi è $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Complementare	$P(A^c) = 1 - P(A)$
Unione di due eventi	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilità condizionata

Eventi indipendenti	due eventi A e B si dicono indipendenti sse $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Probabilità condizionata	$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Condizionamento ripetuto	$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2\|A_1)...P(A_n\|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$
Formula di fattorizzazione	$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\|B_i) \cdot P(B_i)$ con B_i sistema di alternative
Formula di Bayes	$P(B_i\|A) = \frac{P(A\|B_i)P(B_i)}{P(A)}$

Variabili aleatorie

Funzione di ripartizione della v.a. X la funzione $F_X : R \to [0,1]$ definita da $F_X(x) = P\{X \leq x\}$

- quando la v.a. è **discreta** la funzione di ripartizione prende la forma $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$ ed ha un tipico andamento a gradini
- quando la v.a ha **densità** la funzione di ripartizione diventa $\boldsymbol{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt}$ ed è continua.
  Condizioni: deve essere debolmente crescente; $lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$; F è continua a destra

Quantile, assegnata una v.a X ed un numero β con $0 < \beta$ si chiama **β-quantile** un numero t tale che si abbia

$$P\{X \leq t\} \geq \beta \quad \text{di conseguenza} \quad P\{X \geq t\} \geq 1 - \beta$$

Se al valore β vi sono più valori x_i va bene uno qualunque ma solitamente si prende quello in mezzo

Variabili discrete

- **Binomiale**: conta il numero di successi in n tentativi

$$p(k) = P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \boxed{E[X] = n \cdot p \quad Var(X) = np(1-p)}$$

- **Geometrica**: l'esperimento viene ripetuto fino a quando avviene il successo

$$p(k) = P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

- **Poisson**, una variabile X è di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se i suoi valori sono tutti i naturali 0, 1, 2, ... e si ha:

$$p(k) = P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \boxed{E[X] = \lambda \quad E[X^2] = \lambda + \lambda^2 \quad Var(X) = \lambda}$$

Variabili con densità

- **Uniforme**: presi due numeri $a < b$ la densità è costante su $[a, b]$ e nulla fuori dall'intervallo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & 0\ altrove \end{cases}$$

- **Esponenziale**: preso un parametro $\lambda > 0$ è così definita

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

  Condizioni: per far si che λ sia una densità deve valere: $\lambda > 0$ (e quindi $f(x) > 0$) e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

Densità gaussiana

Gaussiana standard viene indicata con $N(0, 1)$ e la densità $\varphi(x)$ e funzione di ripartizione $\phi(x)$ sono rispettivamente

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \boxed{E[X] = 0 \quad Var(X) = \sigma^2}$$

Si utilizza la *tavola della variabile N(0, 1)* per trovare il valore di $\phi(x)$ per $0 < x < 4$. Per $x \geq 4$ si ha $\phi(x) \approx 1$ e per x negativo il valore si ottiene dall'uguaglianza $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$. Si ricavano i quantili leggendo la tavola *all'incontrario* per i valori tra $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Invece per i valori tra $0 < \beta < \frac{1}{2}$ si usa $q_{1-\beta} = -q_\beta$

Gaussiana generale viene indicata con $N(m, \sigma^2)$ e la densità $f(x)$ e la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ sono rispettivamente

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-n)^2}{2\sigma^2}} \qquad F_Y(r_\beta) = \phi(\frac{r_\beta - m}{\sigma}) \qquad \boxed{E[X] = m \quad Var(X) = \sigma^2}$$

Se si dovesse calcolare la probabilità $P_X([0;2])$ non si può svolgere l'integrale $\int_0^2 f(x)\, dx$. Un modo per farlo è ricordarsi che **se $\boldsymbol{Y = N(0,1)}$ allora $\boldsymbol{X = \sigma Y + m}$** . Quindi ora se $m = 1$ e $\sigma = 2$ si può calcolare:

$$P(X \in [0;2]) = P(0 \leq X \leq 2) = P(0 \leq 2Y + 1 \leq 2) = P(-1 \leq 2Y \leq 1) = P(-\tfrac{1}{2} \leq Y \leq \tfrac{1}{2})$$

ora utilizzando la tavola (e la formula $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$):

$$= \phi(\tfrac{1}{2}) - \phi(-\tfrac{1}{2}) = 2\phi(\tfrac{1}{2}) - 1 = 2 \cdot (0.69146) - 1 = 0.38292$$

Variabili aleatorie doppie

Densità marginali se (X,Y) è discreta con funzione di massa $p(x_i, y_i)$, le funzioni di massa rispettivamente di X e di Y verificano le formule:

$$p_X(x_i) = \sum_{y_j} p(x_i, y_j) \qquad p_Y(y_j) = \sum_{x_i} p(x_i, y_j)$$

Se (X,Y) ha densità $f(x,y)$ anche X, Y hanno densità rispettivamente:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Indipendenza date due variabili discrete X e Y queste sono indipendenti se e solo se vale:

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$$

Se (X,Y) ha densità, le variabili sono indipendenti se e solo se vale l'eguaglianza tra densità:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Convoluzione siano X e Y indipendenti e a valori positivi e sia $Z = X + Y$ allora si ha:

$$p_Z(n) = \sum_{h=0}^{n} p_X(h) \cdot p_y(n-h)$$

Se invece X e Y sono indipendenti con densità rispettivamente $f_X(.)$ e $f_Y(.)$, e sia $Z = X + Y$: la variabile Z ha densità data da:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y)dy$$

Da ricordare:

- **Variabili Binomiali**: se $X = B(n,p)$ e $Y = B(m,p)$ e sono indipendenti allora $X+Y$ è binomiale $B(n+m,p)$
- **Variabili di Poisson**: se X è di Poisson di parametro λ e Y è di Poisson di parametro μ e sono indipendenti allora $X+Y$ è di Poisson di parametro $\lambda + \mu$
- **Variabili Gaussiane**: se X è una Gaussiana $N(m_1, \sigma_1^2)$ e Y è una Gaussiana $N(m_2, \sigma_2^2)$ e sono indipendenti allora $X+Y$ è una Gaussiana $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Valore atteso

Valore atteso o Momento di una variabile discreta X è $E[X] = \displaystyle\sum_i x_i p(x_i)$ invece con densità $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$.

Proprietà:

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[\sigma X + m] = \sigma E[X] + m$
- Valore atteso di una trasformazione:
  - variabili discrete: $E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$
  - variabili con densità $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

Varianza di una variabile aleatoria X il numero $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Proprietà: $Var(\sigma X + m) = \sigma^2 \cdot Var(x)$

Covarianza tra X e Y il numero $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Proprietà:

- $Cov(aX + bY + c, Z) = aCov(X,Y) + bCov(Y,Z)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,Z) \qquad Var(X) = Cov(X,X)$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

Se X e Y sono indipendenti allora $Cov(X,Y) = 0$

Disuguaglianza di Markov sia X una variabile aleatoria a valori positivi ed $a > 0$: vale la disuguaglianza

$$aP\{X \geq a\} \leq E[X]$$

Disuguaglianza di Schwartz siano X e Y due variabili aleatorie: vale la disuguaglianza

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]} \cdot \sqrt{E[Y^2]}$$

Altre nozioni

- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$

Funzione generatrice dei momenti

Funzione generatrice dei momenti della v.a X la funzione:

$$G_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_{x_i} e^{tx_i} p(x_i) & X\ discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_i} f(x)\ dx & X\ con\ densita' \end{cases}$$

Due variabili che hanno la stessa funzione generatrice dei momenti hanno la stessa funzione di ripartizione. Proprietà:

- $G_{aX+b}(t) = G_X(at)e^{tb}$
- se X e Y sono indipendenti $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$
- se $G_X(.)$ è finita per t tale che $(-\epsilon < t < \epsilon)$: allora X possiede tutti i momenti e vale $E[X^k] = \frac{d^k G_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$

Binomiale $B(n,p)$	$G_X(t) = (1-p+pe^t)^n$
Geometrica	$G_X(t) = \frac{pe^t}{1-e^{(1-p)}}$

Poisson	$G_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$
Gaussiana	$G_X(t) = e^{t^2/2}$

Legge debole dei grandi numeri sia $X_1, X_2, ...$ una successione di v.a indipendenti ed equidistribuite (*i.i.d*) dotate di momento secondo finito, e sia $E[X_i] = \mu$ il loro valore atteso: per ogni $\epsilon > 0$ si ha:

$$lim_{n\to\infty} P\Big\{\Big|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mu\Big| > \epsilon\Big\} = 0$$

In pratica queste legge dice che la media aritmetica si concentra sempre di più intorno al valore atteso e la varianza tende a zero. Convergenza in probabilità:

- successione di v.a $X_1, X_2, ...$ converge in probabilità alla v.a X se per ogni $\epsilon > 0$ si ha $lim_{n\to\infty} P|X_n - X| > \epsilon = 0$
- $\forall \epsilon\ lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X_n} - E[\overline{X_n}]| > \epsilon\} \to 0$

Generalizzazione delle ipotesi:

- Se si hanno una successione di v.a con queste due proprietà: $lim_{n\to\infty} E[X_n] = c$ e $lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$ allora la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge in probabilità alla costante c

Teorema limite centrale sia $X_1, X_2, ...$ una successione di v.a $i.i.d$ con valore atteso $E[X_i] = \mu$ e varianza $\sigma^2(X_i) = \sigma^2 > 0$: presi $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si ha:

$$lim_{n\to\infty} P\Big\{a \leq \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\} = \phi(b) - \phi(a)$$

Questa legge dice *come* si picca intorno al valore atteso. Convergenza in distribuzione:

- si ha $\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ quando n è grande ($n \geq 50$) è $\approx$ una Gaussiana standard

Nel caso di v.a Binomiale di parametri n (grande) e p

$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx$ Gaussiana standard (approssimazione buona con $np(1-p) \geq 15$)

Una Binomiale $B(n,p)$ la si può riscrivere come gaussiana $B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$

Altre densità

Densità Gamma di parametri r e λ positivi indicata con $\Gamma(r, \lambda)$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Funzione Gamma di Eulero è definita per $r > 0$ da $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$

- se $r > 1$ allora $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$
- Poiché $\Gamma(1) = 1$ ne segue che per n intero si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

Densità chi-quadro siano $X_1, ..., X_n$ n variabili indipendenti gaussiane standard: la variabile $(X_1^2 + ... + X_n^2)$ ha densità $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. A questa densità viene dato il nome di *densità chi-quadro* a n gradi di libertà, indicata con $\chi^2(n)$

Densità Student a n gradi di libertà la densità della variabile

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}} = \sqrt{n} \frac{X}{\sqrt{C_n}}$$

dove X è una gaussiana $N(0, 1)$, C_n ha densità $\chi^2(n)$ e sono indipendenti. La funzione T_n è una funzione pari; indicati con $F_n(x)$ e $\mathcal{T}_{(\alpha,n)}$ rispettivamente la Funzione di ripartizione e lo α-quantile della variabile T_n, valgono le relazioni:

$$F_n(-x) = 1 - F_n(x) \qquad \mathcal{T}_{(\alpha,n)} = -\mathcal{T}(1-\alpha, n)$$

Inferenza Statistica

Campione statistico una famiglia $X_1, ..., X_n$ di n variabili aleatorie *i.i.d*, tutte aventi funzione di ripartizione $F(.)$.
Esempio di statistiche campionarie:

$$\textit{media campionaria } \overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad \text{e} \quad \textit{varianza campionaria } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})}{n-1}$$

Una stima è detta *corretta* se il suo valore atteso coincide con la quantità che si vuole stimare.

Stima parametrica cercare di costruire i parametri a partire dalle osservazioni. Vi sono due modi per stimare θ: il *metodo della massima verosimiglianza* e il *metodo dei momenti*

Metodo della massima verosimiglianza del campione $X_1, ..., X_n$ la funzione $L(\theta; ...)$ definita da variabili

$$\textit{discrete}: L(\theta; x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) \qquad \text{e} \qquad \textit{con densità}: L(\theta; x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Si chiama *stima di massima verosimiglianza* (se esiste) una statistica campionaria, indicata con $\hat{\theta}$ tale che:

$$\hat{\theta}(x_1, ..., x_n) = max_{\theta \in \Theta}\ L(\theta; x_1, ..., x_n)$$

Per variabili Binomiali $B(n, \theta)$ con $x_1, ..., x_n$ noti e con θ non noto vale: $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{k}$ (anche per metodo dei momenti)

Metodo dei momenti l'idea è di eguagliare i momenti teorici con i momenti empirici. Si calcolano i momenti teorici in funzione del/dei parametri $\theta_1, ..., \theta_h$. Se esiste una scelta del parametro che permette di eguagliare i momenti teorici con i momenti empirici, questa si chiama *stima col metodo dei momenti*

$$E_{\theta_1, ..., \theta_h}[X^k] = \sum_{i-1}^{n}\frac{x_i^k}{n}$$

Intervalli di fiducia

Intervalli di fiducia si parla di *intervallo di fiducia* in presenza di un campione statistico con distribuzione dipendente da un parametro $\theta \in \Theta$ dove $\Theta \in \mathcal{R}$

Intervalli di fiducia per la MEDIA di un campione Gaussiano $N(m, \sigma^2)$ con varianza nota :

- l'intervallo *bilatero* di fiducia al $(1-\alpha) \cdot 100\%$ di un nota σ è $[\ \overline{X}(\omega) \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ]$

  dove il numero $d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ è chiamato *precisione della stima* e $\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\overline{X}(\omega)}$ è la *precisione relativa*
- Intervalli *unilateri* di fiducia al $(1-\alpha) \cdot 100\%$
  - *sinistro:* $(-\infty,\ \overline{X}(\omega) + d\ ]$
  - *destro:* $[\ \overline{X}(\omega) - d,\ +\infty)$

Intervalli di fiducia per la MEDIA di un campione Gaussiano $N(m, \sigma^2)$ con varianza sconosciuta :

- l'intervallo *bilatero* di fiducia al $(1-\alpha) \cdot 100\%$ con σ ignoto è $[\ \overline{X}(\omega) \pm \frac{S(\omega)}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}]$

  dove $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
- Intervalli *unilateri* di fiducia al $(1-\alpha) \cdot 100\%$
  - *sinistro:* $(-\infty,\ \overline{X}(\omega) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\ ]$
  - *destro:* $[\ \overline{X}(\omega) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha},\ +\infty)$

Intervallo di fiducia per la MEDIA di un campione di Bernoulli :

- intervallo di fiducia *bilatero* per p al livello $(1-\alpha)$ è $\overline{X} \pm \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} = \hat{p} \pm \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  la precisione della stima è $\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Intervallo di fiducia per la VARIANZA di un campione Gaussiano :

- intervalli unilaterali di fiducia al $(1-\alpha) \cdot 100\%$
  - *sinistro*: $\left(0, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{(\alpha, n-1)}}\right] = \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha, n-1)}}\right]$
  - *destro*: $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}}, +\infty\right) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}}, +\infty\right)$

  dove $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Verifica dell'ipotesi

Verifica dell'ipotesi pianificare un test significa per prima cosa *formulare una ipotesi* e poi *pianificare un esperimento* per decidere se accettare o respingere l'ipotesi: la risposta del test non è verità ma viene fornita con un opportuno *grado di fiducia*. Fissata l'ipotesi, si determinano i risultati che portano a:

- *Rifiutarla*: sottoinsieme C chiamato **regione critica** o **regione di rifiuto** $C = \{\overline{X} > d\}$ con d da scegliere
- *Accettarla*: sottoinsieme $A = C^c$ chiamato **regione di accettazione**

P-value sintetizza la plausibilità di una ipotesi

- se è basso (es < 0.1) l'ipotesi è poco plausibile
- se è alto (es > 0.3) l'ipotesi è molto plausibile

Test sulla MEDIA di un campione Gaussiano con varianza nota :

- TEST *BILATERO* nell'ipotesi: $\mathcal{H}_0)\ m = m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m \neq m_0$

  Regione critica: $C = \{|\overline{X} - m_0| > d\} = \{|\overline{X} - m_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

  L'ipotesi è accettata al livello α se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{x} - m_0| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

  Il massimo valore di α per cui l'ipotesi è accettata è il p-value: $\overline{\alpha} = 2\left[1 - \phi(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{x} - m_0|)\right]$

  Curva operativa a livello α: $\beta(m) = \phi\left(\sqrt{n}\frac{(m_0 - m)}{\sigma} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \phi\left(\sqrt{n}\frac{(m_0 - m)}{\sigma} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

- TEST *UNILATERO* nell'ipotesi

  $\mathcal{H}_0)\ m \leq m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m > m_0$

  Regione critica: $C = \{(\overline{X} - m_0) > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0) \leq q_{1-\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0)\right)$

  Curva operativa: $\beta(m) = \phi\left(\sqrt{n}\frac{(m_0 - m)}{\sigma} + q_{1-\alpha}\right)$

  $\mathcal{H}_0)\ m \geq m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m < m_0$

  Regione critica: $C = \{(\overline{X} - m_0) < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha}\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0) \geq q_{\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0)\right)$

  Curva operativa: $\beta(m) = 1 - \phi\left(\sqrt{n}\frac{(m_0 - m)}{\sigma} + q_{\alpha}\right)$

Test sulla MEDIA di un campione Gaussiano con varianza sconosciuta :

- TEST *BILATERO* nell'ipotesi: $\mathcal{H}_0)\ m = m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m \neq m_0$

  Regione critica: $C = \{|\overline{X} - m_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}\}$

  L'ipotesi è accettata se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{x} - m_0| \leq \tau_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 2\left[1 - F_{n-1}(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{x} - m_0|)\right]$

  No curva operativa

- TEST *UNILATERO* nell'ipotesi

  $\mathcal{H}_0)\ m \leq m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m > m_0$

  Regione critica: $C = \{(\overline{X} - m_0) > \frac{S}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha, n-1)}\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0) \leq q_{1-\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 1 - F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0)\right)$

  No curva operativa

  $\mathcal{H}_0)\ m \geq m_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ m < m_0$

  Regione critica: $C = \{(\overline{X} - m_0) < \frac{S}{\sqrt{n}} q_{\alpha, n-1}\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0) \geq q_{\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - m_0)\right)$

  No curva operativa

Test sulla VARIANZA di un campione Gaussiano :

- TEST *UNILATERO* nell'ipotesi

  $\mathcal{H}_0)\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contro $\mathcal{H}_1)\ \sigma^2 > \sigma_0^2$

  Regione critica: $C = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha, n-1)}\right\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{(n-1)\,\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{(1-\alpha, n-1)}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 1 - G_{n-1}\left(\frac{(n-1)\,\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)$

  Curva operativa: $\beta(\sigma) = G_{n-1}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi_{(1-\alpha, n-1)}\right)$

  $\mathcal{H}_0)\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ contro $\mathcal{H}_1)\ \sigma^2 < \sigma_0^2$

  Regione critica: $C = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(\alpha, n-1)}\right\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{(n-1)\,\sigma^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{(\alpha, n-1)}$

  P-value: $\overline{\alpha} = G_{n-1}\left(\frac{(n-1)\,\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)$

  Curva operativa: $\beta(\sigma) = 1 - G_{n-1}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi_{(\alpha, n-1)}\right)$

Test approssimato su un campione di Bernoulli :

- TEST *BILATERO* nell'ipotesi $\mathcal{H}_0)\ p = p_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ \ p \neq p_0$

  Regione critica: $C = \left\{ \frac{\sqrt{n}|\overline{X} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}|\overline{X} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ in questo caso $\overline{X} = \hat{p}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 2\left[1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)\right]$

  No curva operativa

- TEST *UNILATERO* nell'ipotesi

  $\mathcal{H}_0)\ p \leq p_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ p > p_0$

  Regione critica: $C = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} > q_{1-\alpha} \right\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \leq q_{1-\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$

  No curva operativa

  $\mathcal{H}_0)\ p \geq p_0$ contro $\mathcal{H}_1)\ p < p_0$

  Regione critica: $C = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} < q_{\alpha} \right\}$

  L'ipotesi va accettata se $\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \geq q_{\alpha}$

  P-value: $\overline{\alpha} = \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$

  No curva operativa