

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)  
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

## КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Алгоритмы и структуры данных»  
на тему «Расширение языков стекового калькулятора и интерпретатора  
арифметических выражений операцией побитового сдвига. Вычисление  
периметра и площади части выпуклой оболочки, расположенной в  
верхней полуплоскости. Нахождение суммы периметров частично  
видимых граней полиэдра»

Группа

K04-361

Студент

А.Ю. Шедько

Руководитель работы  
к.ф.-м.н., доцент

Е.А. Роганов

Москва 2016

## Аннотация

Работа посвящена модификации проектов «Компилятор формул», «Интерпретатор арифметических выражений», «Выпуклая оболочка» и «Изображение проекции полиэдра». В первом из этих проектов решалась задача расширения языка стекового калькулятора выражений операцией побитового сдвига. Модификация второго проекта требовала решения задачи расширения интерпретатора арифметических выражений, расширенного операциями побитового сдвига со специальным приоритетом. В проекте «Выпуклая оболочка» вычислялась ... В последнем из проектов определялась ...

## Содержание

1.	Введение . . . . .	3
2.	Модификация проекта «Компилятор формул» . . . . .	3
3.	Модификация проекта «Интерпретатор арифметических выражений» .	6
4.	Модификация проекта «Выпуклая оболочка» . . . . .	8
5.	Модификация проекта «Изображение проекции полиэдра» . . . . .	9

# 1. Введение

В проектах «Компилятор формул» и «Интерпретатор арифметических выражений» были решены задачи расширения языков стекового калькулятора и интерпретатора арифметических выражений операциями побитового сдвига. Применена структура данных «хэш-таблица». Решение задачи требовало представления о формальных грамматиках, основы ООП и знания языка Ruby.

Проект «Выпуклая оболочка» [1] решает задачу индуктивного перевычисления выпуклой оболочки последовательно поступающих точек плоскости и таких её характеристик, как периметр и площадь. Целью данной работы является индуктивное вычисление расстояния до наперёд заданного стандартного прямоугольника и количества острых углов выпуклой оболочки. Применено два специфических алгоритма, значительно ускоряющих вычисление расстояния от прямоугольника до отрезка [2] и проверку пересечения прямоугольника и отрезка (алгоритм Лианга-Барски) [3]. Решение этой задачи требует знания теории индуктивных функций, основ аналитической геометрии и векторной алгебры и языка Ruby [4].

Проект «Изображение проекции полиэдра» [5] — пример классической задачи, для успешного решения которой необходимо знакомство с основами вычислительной геометрии. Задачей, решаемой в данной работе, является модификация эталонного проекта с целью определения суммы длин полностью видимых рёбер заданного полиэдра. Для этого необходимы хорошее понимание ряда разделов аналитической геометрии и векторной алгебры, основ объектно-ориентированного программирования и языка Ruby.

Для подготовки пояснительной записки необходимо знакомство с программой компьютерной вёрстки L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X [6], умение набирать математические формулы [7] и включать в документ графические изображения и исходные коды программ.

Общее количество строк в рассмотренных проектах составляет около 190, из которых 28 были изменены или добавлены автором в процессе работы над задачами модификации.

## 2. Модификация проекта «Компилятор формул»

### Постановка задачи

В предположении, что язык стекового калькулятора расширен операциями L (left) и R (right), реализующими побитовый сдвиг влево и вправо соответственно, компилировать формулы, содержащие операции << и >>.

### Теоретические аспекты

С формальной точки зрения компилятор представляет собой программную реализацию некоторой функции  $\tau: L_1 \rightarrow L_2$ , действующей из множества цепочек одного языка  $L_1$  в множество цепочек другого  $L_2$  таким образом, что  $\forall \omega \in L_1$  семантика цепочек  $\omega$  и  $\tau(\omega) \in L_2$  совпадает.

Для решения задачи необходимо задать грамматики, описывающие языки стекового калькулятора и компилятора, соответственно  $G_0$  и  $G_s$ :

$$\begin{array}{lcl}
G_0: & \begin{array}{l} S \rightarrow F \\ F \rightarrow T \\ T \rightarrow M \\ M \rightarrow (S) \\ V \rightarrow a \end{array} & \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} SRF \\ F+T \\ T*M \\ V \\ b \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} SLF \\ F-T \\ T/M \\ \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ z \end{array} \\
\\
G_s: & e \rightarrow & \begin{array}{l} ee+ \mid ee- \mid ee* \mid ee/ \mid ee>> \mid ee<< \mid \\ \mid a \mid b \mid \dots \mid z \end{array}
\end{array}$$

где  $L, R$  соответствуют  $<<, >>$ , т. е. сдвигу влево и вправо, а  $S$  — классу сдвигаемых выражений (ассоциативность аналогична  $+$  и  $-$ ).

Нужный нам компилятор  $\tau$  представляет собой программную реализацию отображения из множества цепочек языка  $L(G_0)$  в множество цепочек языка  $L(G_s)$ . По этой причине его можно рассматривать, как функцию на пространстве последовательностей. Легко понять, что эта функция не индуктивна.

Построим индуктивное расширение функции, чтобы с его помощью реализовать однопроходный алгоритм, осуществляющий нужный нам перевод. Заметим, что любую правильную формулу можно откомпилировать с соблюдением следующих двух условий:

- переменные в выходной цепочке (программе для стекового калькулятора) будут идти в том же порядке, что и переменные в исходной формуле;
- все операции в выходной цепочке будут расположены позже соответствующих им операций в исходной формуле.

Любую формулу можно компилировать так: встретив имя переменной, немедленно записывать его в массив, где мы будем накапливать результат компиляции, а встретив знак операции или скобку, записывать в этот массив те из предыдущих, но ещё не обработанных операций (будем называть их *отложенными*), которые выполняемы в данный момент, после чего «откладывать» и новый знак.

В качестве контейнера для хранения отложенных операций можно использовать стек. Этот стек и будет содержать ту дополнительную информацию, которая необходима для индуктивного перевычисления функции  $T$  осуществляющей компиляцию исходной формулы. Основная проблема — понять, что надо делать, когда в исходной формуле встречается очередная операция или скобка.

Таким образом, встретив в исходной формуле очередной знак операции или скобку, нужно иногда просто положить её в стек отложенных операций, а иногда — извлечь предварительно одну или несколько ранее отложенных операций и добавить их в массив результата. С точки зрения теории индуктивных функций необходимо построить индуктивное расширение функции  $T$  осуществляющей компиляцию исходной формулы, и найти для неё отображение  $G$  обеспечивающее её перевычисление при удлинении входной формулы.

Для построения индуктивной функции компиляции цепочки  $\omega$  необходимо разделить символы на категории: **SYM\_LEFT**, **SYM\_RIGHT**, **SYM\_OPER** и **SYM\_OTHER** соответственно. правила построения таковы:

- открывающую скобку всегда помещать в стек, имя переменной — всегда сразу добавлять в массив результата компиляции;
- когда в формуле встречается закрывающая скобка нужно все операции, появившиеся в ней *после соответствующей ей открывающей скобки*, извлечь из

стека отложенных операций и добавить в массив результата (не забыть также извлечь открывающую скобку);

- операции и скобки помещаются в стек в соответствии с приоритетом соответствующей операции или скобке. Открывающие скобки имеют наименьший приоритет, закрывающие — наибольший; для операций он будет описан в дальнейшем.

Более подробно см. [8]

## Применяемые структуры данных

Стек, используемый в эталонном проекте, не требует пояснений. Помимо стека используется константная хэш-таблица (в качестве отображения между множествами операций двух грамматик). Подробно с работой хеш-таблицы в языке Ruby можно ознакомиться в документации к языку [9] и на соответствующей странице Википедии.

## Детали реализации

Отображение между множествами операций языков калькулятора и компилятора описывается данной таблицей.

```
CONV_TABLE = { ">>" => "R",  
               "<<" => "L",  
               "+"  => "+",  
               "-"  => "-",  
               "/"  => "/",  
               "*"  => "*" }
```

Приоритет операций задаётся следующим образом:

```
def priority(c)  
  (c == '+' or c == '-') ? 1 : ( c=='L' or c=='R' )? 0 : 2  
end
```

Этот фрагмент кода устанавливает наименьший приоритет для сдвигов (0) и наименьший для деления и умножения (2).

Наиболее значительным является изменение, касающееся обработки символов операций, а именно обработка символов >> и <<, так как они занимают два строковых символа, являясь одним логическим символом. Идея проста: хранить первый символ в обрабатываемой последовательности, соответствующий одной из операций, в специальной переменной @op, а при поступлении следующего символа, если последовательность составлена верно и этот символ совпадает с < или >, записывать его в @op. После этого, вне зависимости от содержимого @op, происходит стандартная процедура обработки отложенных операций с использованием значения CONV\_TABLE[@op], которое затем помещается в стек. После успешной обработки символа @op очищается.

Код, реализующий обработку символов операций:

```
def process_symbol(c)
  ...
  when SYM_OPER
    if ((c=='>' || c=='<') && @op=="")
      @op=c
    else
      @op+=c
      process_suspended_operators(CONV_TABLE[@op])
      push(CONV_TABLE[@op])
      @op=""
    end
  ...
end
```

Таким образом в язык стекового компилятора добавлена операция побитового сдвига.

## Возможные обобщения

Имеет смысл ввести в язык стекового компилятора также остальные побитовые операции (&, &, | ^, ~), их логические аналоги (&&, ||).

## 3. Модификация проекта «Интерпретатор арифметических выражений»

### Постановка задачи

Вычисляются значения выражений, содержащих битовые операции << и >>, приоритет первой из которых является минимальным, а второй — максимальным.

### Теоретические аспекты

Если компилятор осуществляет перевод с одного языка на другой, то интерпретатор *вычисляет* значение арифметической формулы, в которой вместо имён переменных содержатся записанные тем или иным способом числа.

Грамматика  $G_0$  из предыдущего пункта должна быть изменена для учёта максимального приоритета операции сдвига вправо:

$G_0$ :	$S_0 \rightarrow$	F		$S_{0LF}$	
	$F \rightarrow$	T		$F+T$	$F-T$
	$T \rightarrow$	M		$T*M$	$T/M$
	$S_1 \rightarrow$	M		$S_{1RF}$	
	$M \rightarrow$	$(S_0)$		V	
	$V \rightarrow$	a		b	...   z

$S_0$  — класс сдвигаемых влево выражений;

$S_1$  — класс сдвигаемых вправо выражений.

$G_s$  можно оставить без изменений.

Класс `Calc`, реализующий алгоритм интерпретации арифметических выражений может быть построен при помощи уже реализованного класса `Compf`.

Интерпретатор выражений отличается от компилятора тем, что вместо идентификаторов переменных во входной формуле стоят *числа* и получаемую выходную формулу необходимо *выполнять* (вместо её печати). Для того чтобы реализовать стековый калькулятор, естественно, необходим стек.

При появлении на входе цифры, будем помещать её в стек калькулятора `@s`, а при появлении операции доставать из стека её аргументы и помещать туда результат её выполнения. На конечном этапе на вершине стека будет находиться результат выполнения арифметического выражения.

## Детали реализации

Здесь также как и в первом проекте применена хеш-таблица для отображения множества операций стекового компилятора в множество операций языка Ruby.

```
CONV_TABLE = { "R" => ">>",
               "L" => "<<",
               "+" => "+",
               "-" => "-",
               "/" => "/",
               "*" => "*" }
```

В соответствии с задачей, приоритет операций был изменён следующим образом:

```
def priority(c)
  (c == '+' or c == '-') ? 1 : c == 'L' ? 0 : (c == 'R') ? 3 : 2
end
```

Таблица 1. Приоритет операций

Операция	Приоритет
L	0
+, -	1
*, /	2
R	3

## 4. Модификация проекта «Выпуклая оболочка»

### Постановка задачи

Требуется модифицировать эталонный проект:

1. для индуктивного вычисления количества всех острых внутренних углов выпуклой оболочки (задача 40).
2. для индуктивного вычисления расстояния от выпуклой оболочки до заданного стандартного прямоугольника (Задача 52).

### Теоретические аспекты

Задача построения выпуклой оболочки множества точек может быть сформулирована следующим образом: для множества точек  $M$  необходимо найти наименьшее *выпуклое* множество, включающее  $M$ . *Выпуклым* будем называть любое множество  $M$ , удовлетворяющее условию  $\forall x_1, x_2 \in M [x_1, x_2] \in M$ .

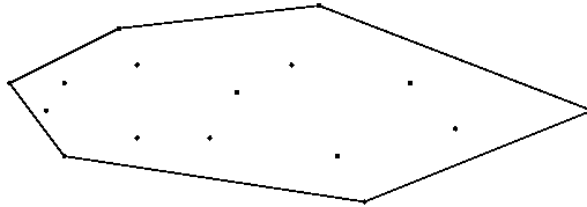


Рис. 1. Выпуклая оболочка множества точек

Пусть  $X$  — множество точек на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{P}$  — множество всех выпуклых фигур на плоскости. Тогда тройка  $(f, g, h)$ , где  $f: X^* \rightarrow \mathcal{P}$  — *выпуклая оболочка последовательности точек*,  $g: X^* \rightarrow \mathbb{N}$  — *количество острых углов в ней*,  $h: X^* \rightarrow \mathbb{R}$  — *расстояние от неё до стандартного прямоугольника*, задаёт индуктивную функцию

$$F: X^* \rightarrow \mathcal{P} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}, F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Функция индуктивного перевычисления  $G$  представляет собой реализацию следующей идеи: пусть для некоторой последовательности точек  $X^*$  значения  $f, g, h$  уже известны. Тогда при поступлении новой точки  $x$  возможны два случая: либо точка лежит внутри выпуклой оболочки, либо снаружи неё. Если  $x$  внутри, то её можно игнорировать так как она не изменит характеристик выпуклой оболочки. Рассмотрим случай когда она находится снаружи: хорошей моделью для дополнения выпуклой оболочки будет *освещённость*, описываемая простой моделью, представленной на рисунке 2.

Для получения новой оболочки необходимо удалить все освещённые рёбра, а концы оставшейся ломаной соединить двумя новыми рёбрами с добавляемой точкой  $x$ . Если добавляемая точка лежит на продолжении одного из рёбер, то оболочка должна измениться, поэтому ребро, на продолжении которого лежит точка  $x$  мы также будем считать освещённым.



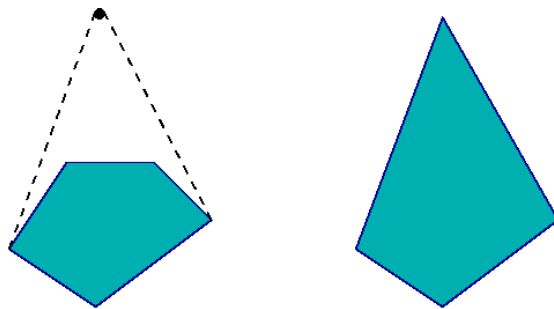


Рис. 2. Точка

## 5. Модификация проекта «Изображение проекции полиэдра»

...

### Список литературы и интернет-ресурсов

- [1] [https://home.mephi.ru/files/2373/material\\_ici\\_toc.zip/index.html](https://home.mephi.ru/files/2373/material_ici_toc.zip/index.html) — Описание проекта «Выпуклая оболочка».
- [2] *Advances in Spatial and Temporal Databases: 9th International Symposium*. — SSTD 2005, Angra Dos Reis Brazil, August 22-24, 2005, Proceedings, С 333.
- [3] Liang, Y.D., and Barsky, B., *A New Concept and Method for Line Clipping*. — ACM Transactions on Graphics, 3(1):1-22, January 1984.
- [4] <http://ru.wikipedia.org/wiki/Ruby> — Википедия (свободная энциклопедия) о языке Ruby.
- [5] ??? — Описание проекта «Изображение проекции полиэдра».
- [6] С.М. Львовский. *Набор и вёрстка в системе L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*, 3-е изд., испр. и доп. — М., МЦНМО, 2003. Доступны исходные тексты этой книги.
- [7] D. E. Knuth. *The T<sub>E</sub>Xbook*. — Addison-Wesley, 1984. Русский перевод: Дональд Е. Кнут. *Все про T<sub>E</sub>X*. — Протвино, РДТ<sub>E</sub>X, 1993.
- [8] [https://home.mephi.ru/files/2077/material\\_ici\\_toc.zip/index.html](https://home.mephi.ru/files/2077/material_ici_toc.zip/index.html) — Описание проекта «Стековый компилятор формул» Е.А. Роганов
- [9] <http://ruby-doc.org/> — Документация языка Ruby