Астрадь

Содержание

1 Конические сечения **2**
1.1 Эллипс 2
1.2 Парабола 4

1 Конические сечения

1.1 Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна удвоенной большой полуоси эллипса.

$$F_1M + F_2M = const = 2a \tag{1}$$

Главные отрезки эллипса: *большая полуось* (a), *малая полуось* (b), *фокусное расстояние* (c). Они связаны следующим соотношением: $b^2 + c^2 = a^2$, что несложно вывести из определения эллипса.

Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения от окружности. Для эллипса e лежит в интервале (0, 1) и определяется следующей формулой:

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = b\sqrt{1 - e^2} \tag{2}$$

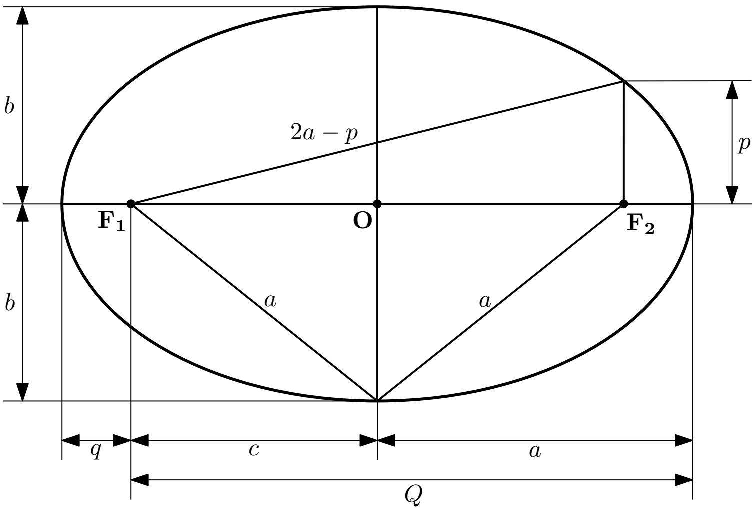

Рис. 1: Эллипс

Апоцентр — наиболее удаленная точка от заданного фокуса точка эллипса. Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до апоцентра (Q):

$$Q = a(1 + e) \tag{3}$$

Перицентр — ближайшая точка точка эллипса к заданному фокусу . Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до перицетра (q):

$$q = a(1 - e) \tag{4}$$

Фокальный параметр (p) — длина перпендикуляра, проведенного из фокуса до точки пересечения с эллипсом. Из теоремы Пифагора и определения эллипса следует нижеприведенная формула для расчета его длины.

$$p = a(1 - e^2) \tag{5}$$

Площадь эллипса (S) — площадь части плоскости, ограниченной эллипсом. Выражение для площади эллипса можно находить интегрированием по полярному углу, используя уравнение эллипса в полярных координатах или пользуясь свойством аффинного преобразования сжатия из выражения площади окружности с радиусом a:

$$S = \pi ab \tag{6}$$

Уравнение эллипса в декартовых координатах представляет собой уравнение замкнутой кривой второго порядка, канонический вид которого имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Его можно представить параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \tag{8}$$

где параметр $t \in [0,\, 2\pi)$.

В полярных координатах уравнение принимает следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 \pm e\cos\phi} \tag{9}$$

где φ — *истинная аномалия* — угол перицентр – фокус – заданная точка, отсчитываемый в сторону движения по эллипсу. При положительном знаке перед e второй фокус эллипса будет находится в точке $(0,\, 2c)$, а при отрицательном — в точке $(\pi,\, 2c)$.

Кроме этого, эллипс обладает важным *оптическим свойством*, которе можно сформулировать так:

Свет от источника в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе.	$\Longleftrightarrow$	Касательная к эллипсу в заданной точке образует с фокальными радиусами в данной точке равные острые углы.

1.2 Парабола

Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой *директрисой* параболы) и данной точки (называемой *фокусом* параболы).

Каноническое уравнение параболы имеет следующий вид:

$$y^2 = 2px, \tag{10}$$

где p — *фокальный параметр*, равный расстоянию между фокусом параболы и директрисой или удвоенному расстоянию между фокусом параболы и вершиной.

Парабола в полярной системе координат (ρ, φ) с центром в фокусе и нулевым направлением вдоль оси параболы (от фокуса к вершине) может быть представлена в виде уравнения

$$\rho(1 + \cos\varphi) = p \tag{11}$$

Эксцентриситет параболы равен $e = 1$. Важно отметить, что парабола не имеет *большой* и *малой полуоси.*

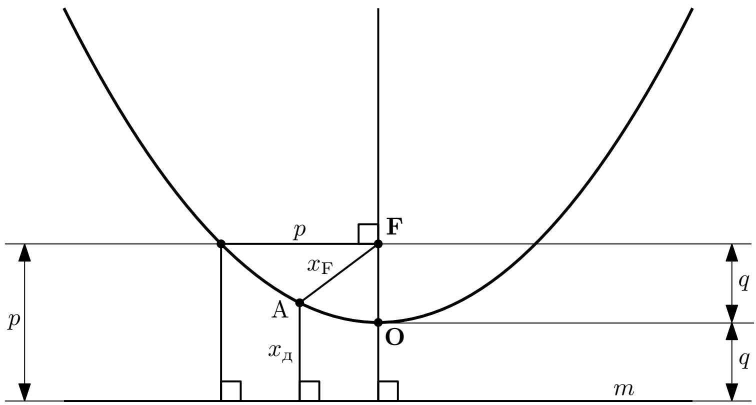

Рис. 2: Парабола

Как и все конические сечения, парабола обладает *оптическим свойством*, которое формулируется следующим образом: пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.