

АСТРАДЬ

# Содержание

<b>1</b>	<b>Небесная механика</b>	<b>2</b>
1.1	Закон всемирного тяготения . . . . .	2
1.2	Закон сохранения энергии и типы орбит . . . . .	3
1.3	Законы Кеплера . . . . .	4
1.4	Конфигурации планет . . . . .	4

# 1 Небесная механика

## 1.1 Закон всемирного тяготения

Согласно *закону всемирного тяготения*, сила притяжения между двумя точечными телами с массами  $M$  и  $m$ , находящимися на расстоянии  $R$  выражается следующим образом:

$$F = \frac{GMm}{R^2}, \quad (1)$$

где  $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  — *гравитационная постоянная*.

*Гравитационный потенциал* поля точечной (или сферически симметричной) массы  $M$  на расстоянии  $R$  от нее равен работе, которую необходимо затратить, чтобы принести единичную массу с бесконечности в данную точку. Так как гравитационные силы между двумя массами — это силы притяжения, то эта работа отрицательна. Данная величина также является *потенциальной энергией* точечной массы на расстоянии  $R$  от массы  $M$ , а выражение для нее имеет следующий вид:

$$U = -\frac{GM}{R} \quad (2)$$

Напряженность гравитационного поля часто называют *ускорением свободного падения*  $g$ , где

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (3)$$

Тогда (1) можно переписать, как

$$F = mg \quad (4)$$

Планета	$g, \text{ м/с}^2$	Планета	$g, \text{ м/с}^2$
Солнце	276.	Марс	3.73
Меркурий	3.73	Юпитер	25.9
Венера	8.87	Сатурн	11.2
Земля	9.82	Уран	9.01
Луна	1.63	Нептун	11.3

Таблица 1: Ускорение свободного падения на поверхности тел солнечной системы

## 1.2 Закон сохранения энергии и типы орбит

Для движения тела с массой  $m$  в гравитационном поле тела с массой  $M \gg m$  со скоростью  $v$  на расстоянии  $r$  от гравитационного центра справедливо следующее соотношение:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = E_0, \quad (5)$$

где  $E_0$  — постоянная величина, если на тело не действуют внешние силы кроме силы притяжения к центральному телу, равная сумме кинетической и потенциальной энергии тела.

Если  $E_0 > 0$ , то траектория тела — *гипербола*, ветви которой асимптотически приближаются к двум прямым.

Если  $E_0 = 0$ , то траектория тела — *парабола*. При параболической и гиперболической траекториях движение не ограничено (инфинитно).

Если  $E_0 < 0$ , то траектория тела — *эллипс*. При эллиптической траектории движение ограничено (финитно).

Параболическая скорость — минимальная, при которой тело покидает центральное тело. Она также называется *второй космической скоростью*. Выражение для нее имеет следующий вид:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (6)$$

На Рис. 1 представлены примеры возможных траекторий тела относительно центрального (точка С). При  $v_0 > v_2$  — тело движется по гиперболе, при  $v_0 = v_2$  — по параболе, а при  $v_0 < v_2$  — по эллипсу.

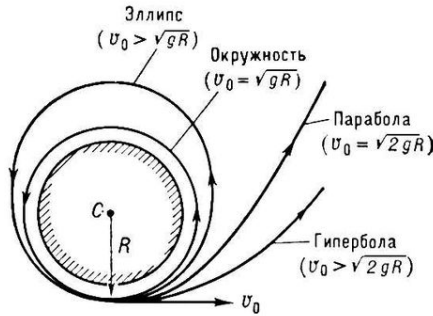


Рис. 1: Возможные траектории тела

### 1.3 Законы Кеплера

**I-ый закон:** Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

**II-ой закон:** Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади.

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} \quad (7)$$

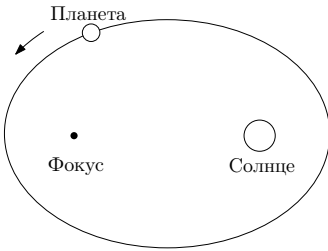


Рис. 2: Первый закон Кеплера

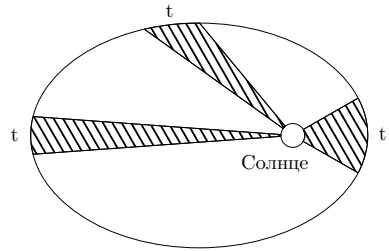


Рис. 3: Второй закон Кеплера

**III-ий закон:** Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (8)$$

где  $a$  — большая полуось,  $T$  — период обращения. Обобщённый Ньютоном III-ий закон имеет следующий вид:

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (9)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}, \quad (10)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — массы центральных тел,  $m_1$  и  $m_2$  — массы обращающихся вокруг них тел. Так как массы планет  $m$  много меньше массы звезды  $M$ , то  $M + m \simeq M$ .

### 1.4 Конфигурации планет

**Внутренними планетами** называются планеты, большая полуось орбиты  $a$  которых меньше большой полуоси орбиты Земли  $a_\oplus$ . Отсюда следует, что

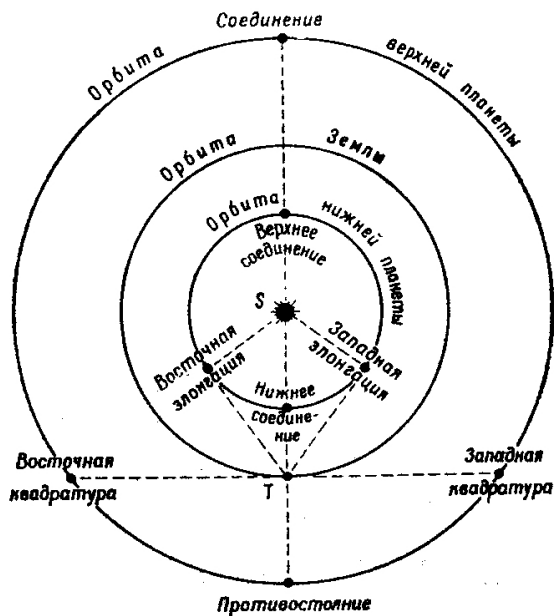


Рис. 4: Конфигурации планет

для наблюдателя на Земле *внутренними* планетами являются лишь Венера и Меркурий, остальные относятся к *внешним*. Для таких планет выделяют 3 основные конфигурации: *верхнее соединение* (1), *нижнее соединение* (2) и *максимальная элонгация*. Различают две максимальные элонгации — *западную* (3) и *восточную* (4), когда планета наблюдается к западу и к востоку от Солнца соответственно.

Внутренняя планета находится в *верхнем соединении*, когда Земля, Солнце и планета лежат на одной прямой, при этом планета и Земля располагаются по разные стороны от Солнца. Если пренебречь наклоном орбит планет к плоскости эклиптики, то для наблюдателя на Земле планета находится точно за Солнцем.

*Нижнее соединение* внутренней планеты происходит когда Земля, Солнце и планета, также как и в случае верхнего соединения, располагаются на одной прямой, но для нижнего соединения планета должна находиться между Солнцем и Землей. Если бы орбиты всех планет лежали в одной плоскости, тогда в момент каждого нижнего соединения внутренней планеты наблюдалось бы ее прохождение по диску Солнца для наблюдателя на внешней планете.

*Элонгацией* планеты называется угол Солнце – Земля – планета, отсюда очевидно, что *максимальная элонгация* внутренней планеты наблюдается в момент, когда прямая Земля – планета является касательной к орбите планеты, то есть угол Солнце – планета – Земля является прямым.

**Внешними планетами** называются планеты, большая полуось орбиты  $a$  которых больше большой полуоси орбиты Земли  $a_{\oplus}$ . Для таких планет также существуют 3 основные конфигурации: соединение (1), противостояние (2) и квадратура. Квадратура бывает западная (3) и восточная (4), в какой именно квадратуре находится внешняя планета определяется аналогично максимальной элонгации.

*Соединение* внешней планеты, подобно верхнему соединению внутренней планеты, наблюдается в момент, когда Солнце, Земля и планета находятся на одной прямой, при этом Солнце находится между планетой и Землей. В этот момент для наблюдателя на внешней планете Земля, являясь нижней планетой, наблюдается в верхнем соединении.

Аналогично, когда планета, Солнце и Земля располагаются на одной прямой, но Солнце и планета лежат по разные стороны от Земли, считается, что внешняя планета находится в *противостоянии*. Земля же находится в нижнем соединении для наблюдателя на внешней планете, наблюдаемой в противостоянии.

*Квадратурой* называется конфигурация, когда угол между направлениями на планету и Солнце (угол Солнце – Земля – планета) является прямым. Стоит заметить, что для наблюдателя на планете Земля будет наблюдаться в максимальной элонгации, причем если планета с Земли наблюдалась в восточной квадратуре, тогда Земля будет в западной максимальной элонгации и наоборот.