Астрадь

Содержание

1 Конические сечения

1.1 Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки котрой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна удвоенной большой полуоси эллипса.

$$F_1M + F_2M = const = 2a \tag{1}$$

Главные отрезки эллипса:

1. *Большая полуось* (a) 2. *Малая полуось* (b) 3. *Фокусное расстояние* (c)

a, b и c связаны следующим образом: $b^2 + c^2 = a^2$, что несложно вывести из определения эллипса. Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения от окружности. В эллипсе $0 < e < 1$.

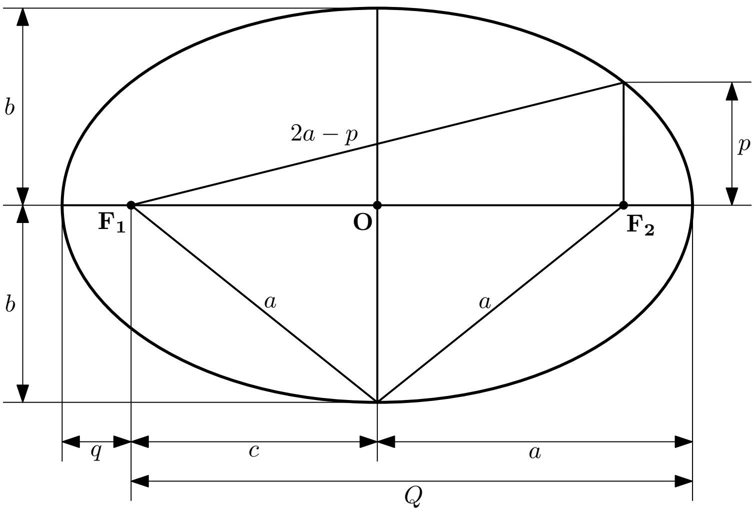

Рис. 1: Эллипс

Основные формулы для эллипса

Эксцетриситет

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{2}$$

Расстояние до апоцентра

$$Q = a(1 + e) \tag{3}$$

Расстояние до перицентра

$$q = a(1 - e) \tag{4}$$

Фокальный параметр

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = b\sqrt{1 - e^2} \tag{5}$$

Площадь эллипса

$$S = \pi ab \tag{6}$$

Радиус кривизны дуги эллипса в зависимости от расстояния x от фокуса:

$$R = \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{ab} \tag{7}$$

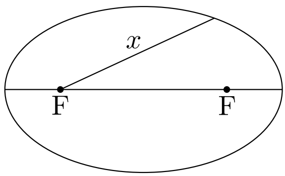

Рис. 2: К вычислению радиуса кривизны эллипса

Уравнения эллипса

Каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \tag{9}$$

Уравнение в полярных координатах, где φ — истинная аномалия. При положительном знаке перед e второй фокус эллипса будет находится в точке $(0, 2c)$, а при отрицательном — в точке $(\pi, 2c)$.

$$r = \frac{p}{1 \pm e\cos\phi} \tag{10}$$

Оптические свойства эллипса

1. Свет от источника, находящегося в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекутся во втором фокусе.

2. Касательная эллипса образует с фокальными радиусами в точке касания равные острые углы.