

Элементы небесной механики

Закон всемирного тяготения

Сила притяжения между двумя телами с массами M и m , где $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная.

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

Потенциал точечной (или сферически симметричной) массы M в точке r ; он равен энергии единичной массы, принесенной из бесконечности в эту точку.

$$U = -\frac{GM}{r}$$

Ускорение свободного падения.

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Ускорение свободного падения для тел солнечной системы:

Планета	$g, \text{м/с}^2$	Планета	$g, \text{м/с}^2$
Солнце	274	Марс	3,7
Меркурий	3,7	Юпитер	24,8
Венера	8,9	Сатурн	10,4
Земля	9,8	Уран	8,8
Луна	1,6	Нептун	11,2

Закон сохранения энергии и типы орбит

Закон сохранения энергии. E_0 - константа, равна сумме кинетической и потенциальной энергии единичной массы.

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = E_0$$

Если $E_0 > 0$, то траектория тела — гипербола, ветви которой асимптотически приближаются к двум прямым.

Если $E_0 = 0$, то траектория тела — гипербола. При параболической и гиперболической траекториях движение не ограничено.

Если $E_0 < 0$, то траектория тела — эллипс. При эллиптической траектории движение ограничено.

Параболическая скорость - минимальная скорость, при которой тело покидает центральную массу M .

$$V_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

На рис. 1 представлены примеры возможных траекторий тела относительно центрального (точка C).

При $v_0 > v_p$ (параболическая скорость) — тело движется по гиперболе, при $v_0 = v_p$ — тело движется по параболе, а при $v_0 < v_p$ — по эллипсу.

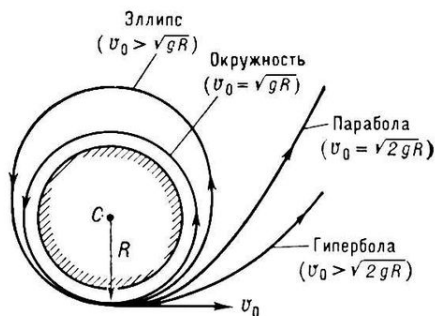


Рис. 1: Возможные траектории тела

Законы Кеплера

1 закон: Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из которых находится Солнце. (Рис. 2)

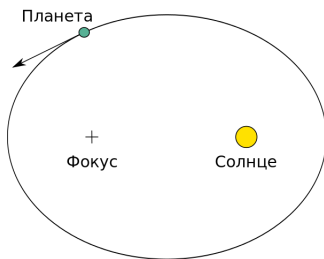


Рис. 2: Первый закон Кеплера

2 закон: Радиус-вектор планеты описывает за равные промежутки времени равные площади. (Рис. 3)

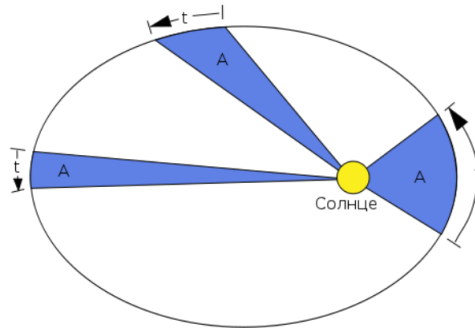


Рис. 3: Второй закон кеплера

$$\frac{dS}{dt} = const$$

3 закон: Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Где a — большая полуось, T — период обращения. Обобщённый Ньютоном 3 закон имеет следующий вид:

$$\frac{T_1^2(M + m_1)}{T_2^2(M + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \text{ или } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Где M — масса центрального тела, m_1 и m_2 — массы обращающихся тел. Так как массы планет в много меньше массы звезды M , то $M + m \approx M$

Первая, вторая и третья космические скорости

Первая космическая скорость — минимальная скорость, необходимая для того, чтобы маломассивное тело стало искусственным спутником центрального тела.

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Где M — масса массивного тела.

Вторая космическая скорость — минимальная скорость, необходимая для того, чтобы маломассивное тело преодолело гравитационное притяжение центрального тела и покинуло замкнутую орбиту вокруг последнего.

$$v_2 = v_p = \sqrt{2gR} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v_1$$

v_1 и v_2 на некоторых телах Солнечной системы:

Планета	$v_1, \text{км/с}$	$v_2, \text{км/с}$
Солнце	436,8	617,7
Меркурий	3,0	4,3
Венера	7,4	10,5
Земля	7,9	11,2
Луна	1,7	2,4
Марс	3,5	5,0
Юпитер	42,0	59,5
Сатурн	25,1	35,5
Уран	15,0	21,3
Нептун	16,6	23,5

Скорость искусственного небесного тела на высоте h .

$$v_h = \sqrt{\frac{G}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

Третья космическая скорость — минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы.

$$v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_1^2 + v_2^2}$$

Движение по эллиптической орбите

(Численно) Для тел солнечной системы.

$$T_{\text{год}}^2 = a_{\text{а.е.}}^3.$$

Средняя скорость планет Солнечной системы.

$$v_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \approx \frac{29,8}{\sqrt{a}}$$

Скорость в апоцентре, e — эксцентриситет.

$$v_{\text{аф}} = v_{\text{орб}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Скорость в перигентре, e — эксцентриситет.

$$v_{\text{пер}} = v_{\text{орб}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Скорость в точке орбиты, удалённой на расстояние r от центрального тела, M — масса центрального тела.

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Скорость в точке орбиты, для которой истинная аномалия ν , p — фокальный параметр.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{p} \cdot (1 + 2e\nu + e^2)}$$

Синодический период

Синодический период — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными конфигурациями планеты или Луны. Для Луны можно ввести другое определение — промежуток времени между двумя последовательными одинаковыми фазами.

S — синодический период.

T — сидерический период.

E — сидерический период обращения Земли.

Для внешних планет:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{T}$$

Для внутренних планет:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E}$$

В случае, если тело обращается по орбите в противоположную сторону, то связь между синодическим и сидерическим периодами тела выглядит так:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} + \frac{1}{T}$$

Конфигурации планет



Рис. 4: Конфигурации планет

Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы — шесть элементов орбиты, определяющие положение небесного тела в пространстве в задаче двух тел:

1. Большая полуось(a);
2. Эксцентриситет (e);
3. Наклонение(i);
4. Аргумент перицентра(ω);
5. Долгота восходящего узла(Ω);
6. Средняя аномалия (M_0);

Первые два определяют форму орбиты, третий, четвёртый и пятый — ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат, шестой — положение тела на орбите (Рис.5).

Наклонение — небесного тела — это угол между плоскостью его орбиты и плоскостью эклиптики. **Аргумент перицентра** — угол между направлениями из притягивающего центра на восходящий узел орбиты и на перицентр.

Долгота восходящего узла — угол в плоскости эклиптики между направлением на точку весеннего равноденствия и восходящий узел орбиты. Отсчитывается против часовой стрелки от направления на точку весеннего равноденствия.

Средняя аномалия для тела, движущегося по невозмущённой орбите — произведение его среднего движения и интервала времени после прохождения перицентра.

Узлы орбиты — точки пересечения орбиты и плоскости эклиптики.

Восходящий узел — точка, в которой тело пересекает плоскость эклиптики при движении в северном направлении, а **нисходящий** — в южном.

Истинная аномалия (ν) — угол между радиус вектором и направлением на перицентр.



Рис. 5: Кеплеровы элементы орбиты

Фазы планет и спутников

Фазой планеты (спутника) называется отношение площади освещённой части видимого диска ко всей его площади. Фаза считается по следующей фор-

муле:

$$\Phi = \frac{1 + \cos \phi}{2} = \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

Где ϕ — **фазовый угол** — угол между лучом света, падающим от Солнца на планету, и лучом, отразившимся от неё в сторону наблюдателя (Рис.6). Фаза изменяется от 0 до 1.

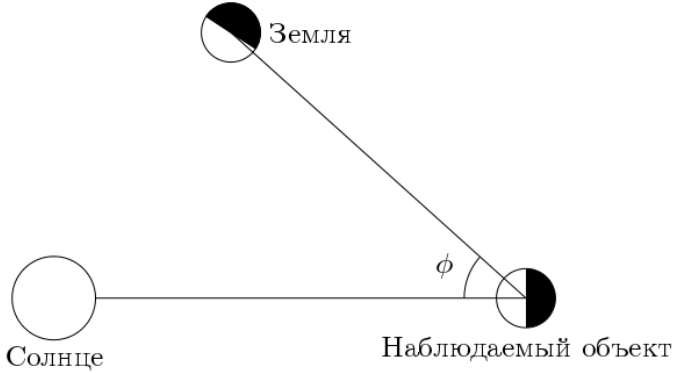


Рис. 6: Фазовый угол

Аберрация

Аберрация — явление, состоящее в том, что движущийся наблюдатель видит светило не в том направлении, в котором он видел бы его в тот же момент, если бы находился в покое. Угол аберрационного смещения можно найти по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{v}{c} \sin \theta$$

Где v — скорость наблюдателя, θ — угол между направлением вектора скорости наблюдателя и направлением на объект.

Приливы и отливы

Ускорение в центре Земли(T) считается по следующей формуле:

$$\omega_T = \frac{GM}{r^2}$$

Где m — масса Луны, r^2 — расстояние между центрами Земли и Луны. Ускорения в точках А и В равны:

$$\omega_A = \frac{GM}{(r-R)^2} \text{ и } \omega_B = \frac{GM}{(r+R)^2}$$

Где R — радиус Земли. Ускорение точки А относительно точки Т равно:

$$\omega_A - \omega_T = Gm \frac{2rR - R^2}{(r-R)^2 r^2}$$

Так как $R \ll r$, то

$$\omega_A - \omega_T = \frac{Gm2R}{r^3}$$

Под действием лунного притяжения водная оболочка Земли принимает форму эллипсоида, который вытянут по направлению к Луне. Близ точек и будет прилив, а у точек F и D — отлив (Рис.7).

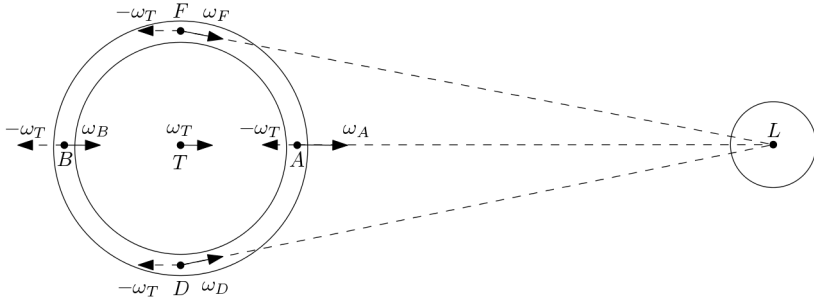


Рис. 7: К объяснению приливных сил

Солнечные и лунные затмения. Сарос

Полное солнечное затмение

Диаметр тени спутника при полном центральном затмении (когда центры трёх тел лежат на одной прямой), с большой точностью равен:

$$d_T = 2 \frac{R_{\text{л}}(a - R_{\text{з}}) - R_{\text{с}}(a - R_{\text{з}})}{a - a_{\text{л}}}$$

Где $R_{\text{л}}$ — радиус Луны, $R_{\text{з}}$ — радиус Земли, $R_{\text{с}}$ — радиус Солнца, a — расстояние от Земли до Солнца, $a_{\text{л}}$ — расстояние от Земли до Луны.

Среднее значение этой величины около 200 км, максимальное около 215 км. При нецентральной затмении максимальный диаметр тени Луны на поверхности Земли может достигать 270 км (Рис.8).

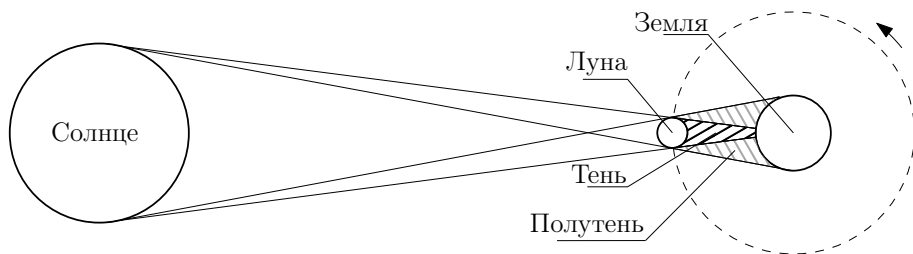


Рис. 8: Полное солнечное затмение

Кольцеобразное солнечное затмение

При кольцеобразном солнечном затмении Луна относительно Земли расположена так, что конус её тени не достаёт до поверхности планеты, и вокруг Луны можно наблюдать яркое кольцо незакрытой части солнечного диска (Рис.9).

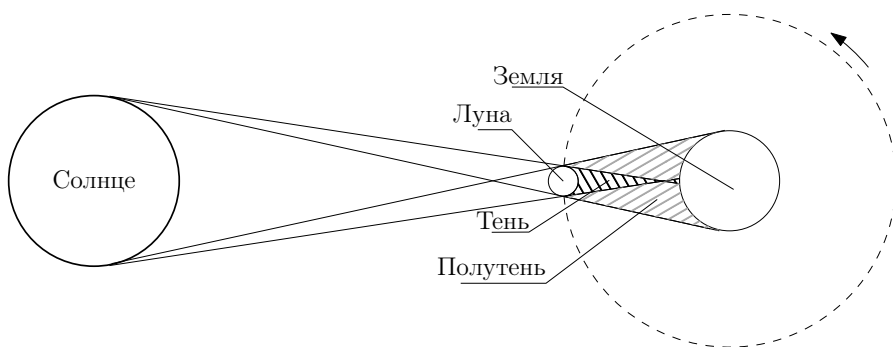


Рис. 9: Кольцеобразное солнечное затмение

Лунное затмение

Лунное затмение в отличие от солнечного, видно со всего ночного полушария. Диаметр земной тени на расстоянии Луны превышает размер последней примерно в 2.5-3 раза (Рис.10).

Сарос — промежуток времени, по прошествии которого солнечные и лунные затмения повторяются в прежнем порядке.

Этот период почти в точности равен:

1. 242 драконических месяца;
2. 223 синодических месяца;

Таким образом, сарос длится примерно 18 лет 11 дней 8 часов.

Синодический месяц — промежуток времени между одинаковыми фазами Луны. Он равен 29.53 суток.

Драконический месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохождением Луны через один и тот же узел орбиты. Драконический месяц равен 27.21 суток.

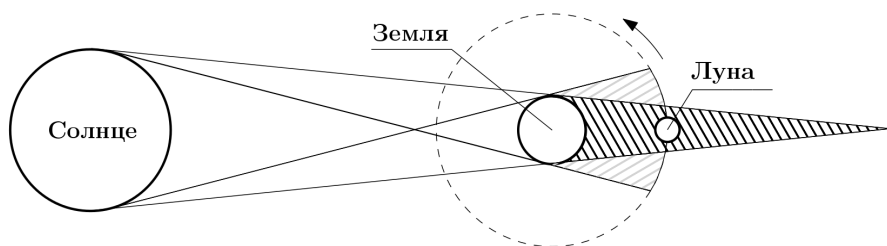


Рис. 10: Лунное затмение

Фаза затмения

Очень важной характеристикой любого затмения является его фаза. **Фаза затмения** — отношение закрытой части диаметра затмеваемого тела, проходящей через унтр затмевающего тела, к полному диаметру затмеваемого тела. Для полного затмения эта величина считается немного иначе (см. ниже). Для Луны затмевающим "телом" является тень Земли. Фазу частного и полного затмения можно вычислить по следующим формулам (Рис.11):

$$\Phi_{\text{ч}} = \frac{x}{D} \text{ и } \Phi_{\text{п}} = 1 + \frac{d}{D}$$

Где D — диаметр затмеваемого тела.

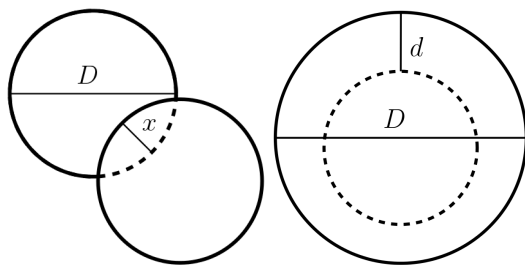


Рис. 11: Частное и полное затмение

Иногда вводят такое понятие, как **площадная фаза затмения**, т.е. отношение площади закрытой части диска затмеваемого диска к полной площади его диска. Чаще площадную фазу используют применительно к двойным звёздам, когда считают падение блеска при затмении одной звезды другой.

Прецессия

Ось вращения Земли совершает прецессионное движение — описывает вокруг оси эклиптики конус радиусом основания 23.5° с периодом около 26 000 лет. Из-за этого меняется положение полюс мира. Например, сейчас полюс мира практически совпадает с Полярной звездой (α Малой Медведицы), а 15 000 лет назад роль Полярной звезды играла Вега (α Лиры). Если считать, что величина прецессии постоянна, то полюсы мира описывают вокруг полюсов эклиптики малые круги с радиусом 23.5° . В действительности же величина прецессии меняется, поэтому путь полюсов мира представляет собой не окружность, а спираль.

Поворот оси Земли имеет различные последствия. Во-первых, меняется продолжительность тропического года, он становится примерно на 20 минут короче звёздного. Во-вторых, из-за прецессии меняется вид звёздного неба, хотя происходит это очень медленно (Рис.12).

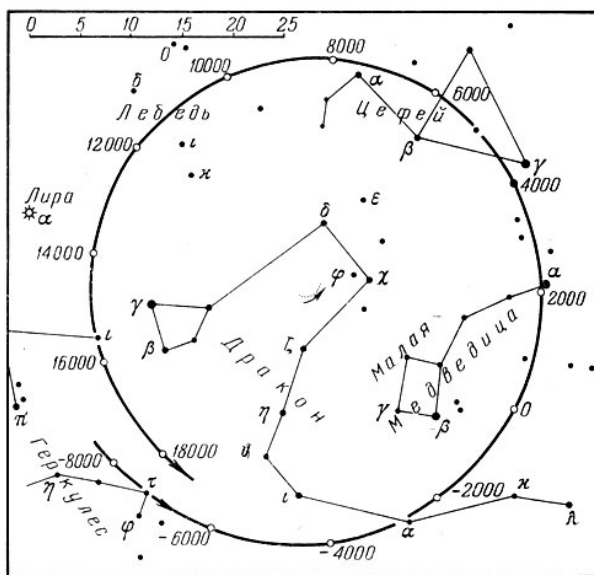


Рис. 12: Прецессионное движение северного полюса мира

Точки Лагранжа

Точки Лагранжа — точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействие никаких других сил, кроме гравитационных, со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел (Рис.13).

Точки L_1 , L_2 и L_3 лежат на одной прямой, соединяющей два массивных тела. Точки L_4 и L_5 образуют равносторонние треугольники с массивными телами.

Приближённые формулы для вычислений расстояний до L_1 , L_2 и L_3 от центра масс:

$$r_1 = R \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right); r_2 = R \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right); r_3 = \left(1 + \frac{5}{12}\alpha \right)$$

Где $\alpha = M_1/(M_2 + M_3)$, R — расстояние между телами, M_1 — масса более массивного тела, M_2 — масса второго тела.

Если $M_2 \ll M_1$, то точки L_1 и L_2 находятся примерно на равном расстоянии от тела M_2 . Примерное значение этого расстояния можно вычислить по

формуле:

$$r \approx R \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$$

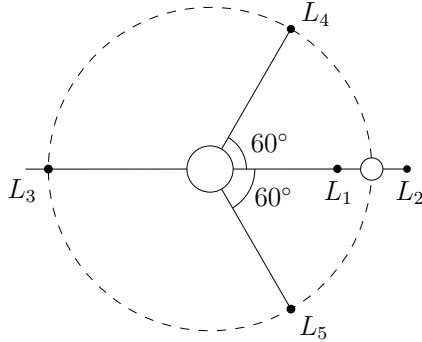


Рис. 13: Точки Лагранжа

Расстояние и размеры

$$r = \frac{1}{\pi}$$

Где r — расстояние до звезды, π — годовой параллакс звезды.

$$r = \frac{R_3}{\sin p_0} = \frac{3438'}{p'_0} R_3 = \frac{206265''}{p''_0} R_3$$

Где R_3 — радиус Земли, p_0 — горизонтальный экваториальный параллакс.

Правило Тициуса-Боде — эмпирическая формула приблизительно описывающая радиусы орбит планет от Солнца:

$$r = \frac{n + 4}{10}$$

Где $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48...$ или

$$r = \frac{3 \cdot 2^n + 4}{10}$$

Где $n = -\infty, 0, 1, 2...$

$$R = r \frac{\rho'}{3238'} = r \frac{\rho''}{206265''}$$

Где R — радиус объекта, ρ — угловые размеры объекта.

Конические сечения

Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна удвоенной большой полуоси эллипса.

$$F_1M + F_2M = \text{const} = 2a$$

Главные отрезки эллипса:

1. Большая полуось (a)
2. Малая полуось (b)
3. Фокусное расстояние (c)

a , b и c связаны следующим образом: $b^2 + c^2 = a^2$, что несложно вывести из определения эллипса. Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения от окружности. В эллипсе $0 < e < 1$.

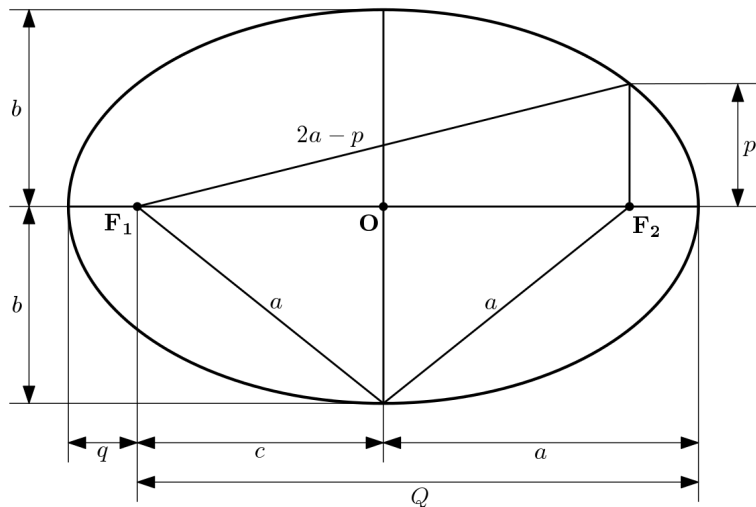


Рис. 14: Эллипс