

АСТРАДЬ

Содержание

1	Конические сечения	2
1.1	Эллипс	2

1 Конические сечения

1.1 Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна удвоенной большой полуоси эллипса.

$$F_1M + F_2M = \text{const} = 2a \quad (1)$$

Главные отрезки эллипса: *большая полуось* (a), *малая полуось* (b), *фокусное расстояние* (c). Они связаны следующим соотношением: $b^2 + c^2 = a^2$, что несложно вывести из определения эллипса.

Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения от окружности. Для эллипса e лежит в интервале $(0, 1)$ и определяется следующей формулой:

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = b\sqrt{1 - e^2} \quad (2)$$

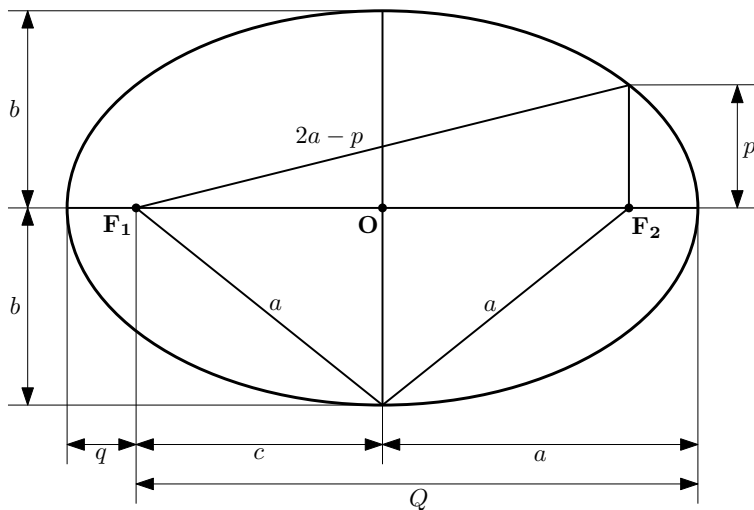


Рис. 1: Эллипс

Апоцентр — наиболее удаленная точка от заданного фокуса точка эллипса. Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до апоцентра (Q):

$$Q = a(1 + e) \quad (3)$$

Перицентр — ближайшая точка эллипса к заданному фокусу. Из определения эллипса вытекает соотношение для расстояния от фокуса до перицентра (q):

$$q = a(1 - e) \quad (4)$$

Фокальный параметр (p) — длина перпендикуляра, проведенного из фокуса до точки пересечения с эллипсом. Из теоремы Пифагора и определения эллипса следует нижеприведенная формула для расчета его длины.

$$p = a(1 - e^2) \quad (5)$$

Площадь эллипса (S) — площадь части плоскости, ограниченной эллипсом. Выражение для площади эллипса можно находить интегрированием по полярному углу, используя уравнение эллипса в полярных координатах, или, пользуясь свойством аффинного преобразования сжатия, из выражения площади окружности с радиусом a :

$$S = \pi ab \quad (6)$$

Уравнение эллипса в декартовых координатах представляет собой уравнение замкнутой кривой второго порядка, канонический вид которого имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

Его можно представить параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (8)$$

где параметр $t \in [0, 2\pi)$.

В полярных координатах уравнение принимает следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \phi} \quad (9)$$

где ϕ — *истинная аномалия* — угол *перицентр – фокус – заданная точка*, отсчитываемый в сторону движения по эллипсу. При положительном знаке перед e второй фокус эллипса будет находится в точке $(0, 2c)$, а при отрицательном — в точке $(\pi, 2c)$.

Кроме этого, эллипс обладает важным *оптическим свойством*, которое можно сформулировать так:

Свет от источника в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе.

\Longleftrightarrow

Касательная к эллипсу в заданной точке образует с фокальными радиусами в данной точке равные острые углы.