Конспект лекций по курсу «Теория вероятностей»

Лектор: к. ф.-м. н. Родионов Игорь Владимирович

Набор: Алексей Шепелев, Александр Валентинов, Василий Морковкин

Содержание

1 Лекция от 10.02.2018

Будем обозначать вероятностное пространство как $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где

1. Ω — пространство элементарных исходов;
2. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω;
3. $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ — вероятностная мера, причем
   a) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
   b) P — σ-аддитивна, то есть $\forall \{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, причем $A_n \cap A_m = \varnothing$ при $n \neq m$: $\mathsf{P}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

Определение. Последовательность $\{A_n\}$ убывает к A, если $\forall n : A_n \supseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Последовательность $\{A_n\}$ возрастает к A, если $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Теорема (о непрерывности вероятностной меры)**.** *[б/д] Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и на нем определена функция $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим свойствам: $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ и P — конечно аддитивная. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *P — вероятностная мера;*
2. *$\forall A_n \downarrow A : \mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A)$ (непрерывность снизу);*
3. *$\forall A_n \uparrow A : \mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A)$ (непрерывность сверху);*
4. *$\forall A_n \downarrow \varnothing : \mathsf{P}(A_n) \to 0$ (непрерывность в нуле).*

Теорема (Каратеодори)**.** *[б/д] Пусть Ω — некое множество, $\mathcal{A}$ — алгебра на Ω и P_σ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{A})$. Тогда существует единственная вероятностная мера на $\big(\Omega, \sigma(\mathcal{A})\big)$, являющаяся продолжением P_σ, то есть $\forall A \in \mathcal{A} : \mathsf{P}_\sigma(A) = \mathsf{P}(A)$.*

Функция распределения

Рассмотрим измеримое пространство $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ и вероятностную меру P на нем.

Определение. Функция $F(x), x \in \mathbb{R}$, заданная по правилу $F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big)$ — функция распределения вероятностной меры P.

Лемма (свойства функции распределения)**.** *Пусть $F(x)$ — функция распределения, тогда*

1. *$F(x)$ не убывает;*
2. *$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$;*
3. *$F(x)$ непрерывна справа.*

▲ Пусть $y \geqslant x$, тогда $F(y) - F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, y]\big) - \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big) = \mathsf{P}\big((x, y]\big) \geqslant 0$, следовательно, $F(x)$ неубывает.

Пусть $x_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \to \varnothing$, следовательно, $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ по теореме о непрерывности вероятностной меры.

Пусть $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, тогда $(-\infty, x_n] \to \mathbb{R}$, следовательно, $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Пусть $x_n \downarrow x$, тогда $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$, отсюда по теореме о непрерывности вероятностной меры вытекает, что $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big) = F(x)$. ■

Свойство 1. *Функция распределения имеет предел слева* $\forall x \in \mathbb{R}$, *при этом число точек разрыва не более, чем счетно.*

▲ Пусть $x_n \to x - 0$ — возрастающая последовательность, тогда $F(x_n) = \mathsf{P}\big((-\infty, x_n]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big) = F(x-0)$. Каждая точка разрыва — скачок функции распределения, каждому скачку сопоставим $[F(x-0), F(x)]$, а этому отрезку в свою очередь сопоставим некую рациональную точку, которая лежит в $(F(x-0), F(x))$. Следовательно каждому скачку мы сопоставили точку из $\mathbb{Q}$, а так как $\mathbb{Q}$ счетно, то число разрывов не более, чем счетно. ■

Определение. Функция $F(x)$, которая удовлетворяет свойствам 1) – 3) из леммы, называется функцией распределения на $\mathbb{R}$.

Теорема (о взаимно однозначном соответствии между вероятностной мерой и функцией распределения на $\mathbb{R}$)**.** *Пусть* $F(X)$ *— функция распределения на* $\mathbb{R}$, *тогда существует единственная вероятностная мера* P *на* $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ *такая, что* $F(x)$ *является ее функцией распределения, то есть* $F(x) = \mathsf{P}\big((-\infty, x]\big)$.

▲ Рассмотрим полукольцо $S = \big\{(a, b]\big\}$ на $\mathbb{R}$. Определим σ-аддитивную вероятностную меру $\mathsf{P}\big((a, b]\big) = F(b) - F(a)$, а по теореме Каратеодори P единственным образом продолжается на всю σ-алгебру $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

(1) Дискретное распределение

Пусть $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}$ не более, чем счетно.

Определение. Вероятностная мера P на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, удовлетворяющая свойству $\mathsf{P}(\mathbb{R}\backslash\mathscr{X}) = 0$, называется дискретной вероятностной мерой на $\mathscr{X}$, ее функция распределения также называется дискретной.

Рассмотрим $\mathscr{X} = \{x_k\}$, положим $p_k = \mathsf{P}\big(\{x_k\}\big)$, тогда $\mathsf{P}(\mathscr{X}) = 1 = \sum\limits_k \mathsf{P}(x_k)$.

Определение. Набор чисел $\{p_k\}$ на называется распределением вероятностей на $\mathscr{X}$.

(2) Абсолютно непрерывное распределение

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения вероятностной меры P на $\mathbb{R}$, причем $\forall x \in \mathbb{R}$ верно $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$, где $p(t) \geqslant 0$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1$. Тогда P абсолютно непрерывна, $F(x)$ также называется абсолютно непрерывной, а $p(t)$ — плотность распределения $F(x)$. Причем $p(t)$ определена однозначно, кроме множества меры нуль.

Примеры:

1. Равномерное распределение $R[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I\big(x \in [a, b]\big).$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение $N(a, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

3. Экспоненциальное распределение $\mathrm{Exp}(\alpha)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot I(x > 0).$$

4. Распределение Коши $\mathrm{Cauchy}(\theta)$

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi\left(x^2 + \theta^2\right)}.$$

5. Гамма распределение $\Gamma(\alpha, \gamma)$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\gamma x} \cdot I(x > 0).$$

Определение. $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$, причем $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} :$ $\Gamma(\lambda \pm 1) = \lambda\Gamma(\lambda)$, а $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3 Сингулярные распределения

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой роста $F(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 : F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$.

Определение. Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль. Например, функция Кантора.

Теорема (Лебега о функции распределения). *[б/д] Пусть $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда существуют единственные α_1, α_2 и α_3, $\alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ и функции распределения $F_1(x), F_2(x)$ и $F_3(x)$ такие, что $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $F_1(x)$ — дискретная функция распределения, $F_2(x)$ — абсолютно непрерывная, а $F_3(x)$ — сингулярная.*

2 Лекция от 17.02.2018

Вероятностная мера в $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$

Определение. Пусть P — вероятностная мера в $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, тогда функция $F(\vec{x}) = \mathsf{P}\big((-\infty; x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\big)$ называется функцией распределения вероятностной меры P в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Пусть $\vec{x}^{(k)} = \Big(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\Big) \in \mathbb{R}^n$. Будем писать $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, если $\forall i, k :$ $x_i^{(k)} \geqslant x_i^{(k+1)}$ и $x_i^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_i$.

Лемма (Свойства многомерной функции распределения)**.** *Пусть $F(\vec{x})$ — функция распределения вероятностной меры в $\mathbb{R}^n$, тогда*

1. *Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $F\big(\vec{x}^{(k)}\big) \to F\big(\vec{x}\big), k \to +\infty$;*
2. $\lim\limits_{\forall i: x_i \to +\infty} F(\vec{x}) = 1$; $\lim\limits_{\exists i: x_i \to -\infty} F(\vec{x}) = 0$*;*
3. $\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots,\ \ \Delta^1_{a_1 b_1} \ldots \Delta^n_{a_n b_n} F(x) > 0 :$*, где* $\Delta^i_{a_i b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots x_n) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

▲ Первое свойство следует из непрерывности вероятностной меры, так как $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \big(-\infty, x_i^{(k)}\big] \downarrow \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \big(-\infty, x_i\big]$.

$$B_n \curvearrowright C_n = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \big(-\infty, \inf_{k \geqslant n} x_i^{(k)}\big]$$

$\mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}^n) = 1$

Если $\exists i : x_i^{(k)} \to -\infty$, то $B_n \to \varnothing, \mathsf{P}(B_n) \to 0$;

$$\Delta^1_{a_1 b_1} \ldots \Delta^n_{a_n b_n} F(x) = \mathsf{P}\big((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]\big)$$

$\Delta^1_{a_1 b_1} \Delta^2_{a_2, b_2} F(x) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2))$ ■

Теорема (О взаимооднозначном соответствии вероятностной меры и функции распределения в $\mathbb{R}^n$)**.** *[б/д] Если функция $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет свойствам из леммы, то существует единственная P в $\mathbb{R}^n$, для которой $F(\vec{x})$ является функцией распределения.*

Замечание. Почему нельзя заменить свойство 3) на монотонность на любом компакте?

▲ Пусть $F(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ на $[0, 1]^2$, но тогда $-1 = \Delta^1_{0;1} \Delta^2_{0;1} F(x_1, x_2) \neq \mathsf{P}([0, 1]^2) = 1$. Следовательно, $F(x)$ не функция распределения. ■

Определение. Функция $F(\vec{x})$, удовлетворяющая условиями из леммы называется функцией распределения в $\mathbb{R}^n$.

Многомерная плотность вероятности

Определение. Если

$$F(x_1,\dots,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}p(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n,\ p(x_1,\dots,x_n)\geqslant 0,$$

то $p(x_1,\dots,x_n)$ называется n-мерной плотностью вероятности. Тогда

$$p(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\dots\partial x_n}F(x_1,\dots,x_n).$$

Случайные величины

Определение. Пусть $\big(\Omega,\mathcal{F}\big)$ и $\big(E,\mathcal{E}\big)$ — два измеримых пространства. Отображение $X:\Omega\to E$ — случайный элемент, если $\forall B\in\mathcal{E}:X^{-1}\in\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$-измеримо или $\mathcal{F}|\mathcal{E}$-измеримо.
Если $(E,\mathcal{E})=\big(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, то это случайная величина.
Если $(E,\mathcal{E})=\big(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, то это случайный вектор.

Действия над случайными величинами и векторами

Определение. Функция $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — борелевская, если $\forall B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$: $\varphi^{-1}(B)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение. *Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция — борелевская.*

Теорема (критерий измеримости). *[б/д] Пусть $\big(\Omega,\mathcal{F}\big),\big(E,\mathcal{E}\big)$ — два измеримых пространства, $X:\Omega\to E$ — случайный элемент тогда, и только тогда, когда существует система событий $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{E}$, такая что $\sigma(\mathcal{M})=\mathcal{E}$ и $\forall B\in\mathcal{M}:X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.*

Лемма. *Пусть $\vec{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — случайный вектор, $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — борелевская функция, тогда $\varphi(\vec{\xi})$ — случайный вектор.*

▲ Пусть $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(\varphi(\vec{\xi}))^{-1}(B)=\big\{\omega:\varphi(\vec{\xi}(\omega))\in B\big\}=\big\{\omega:\vec{\xi}(\omega)\in\varphi^{-1}(B)\subseteq\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big\}\in\mathcal{F}.$$

■

Лемма. *$\vec{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — случайный вектор тогда, и только тогда, когда $\forall i:\xi_i$ — случайная величина.*

▲ *Необходимость.* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ — непрерывная функция, значит борелевская, следовательно, по предыдущей лемме ξ_i — случайная величина.
Достаточность. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\big(B_1 \times \ldots \times B_n, B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$, поэтому $\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \big\{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times \ldots \times B_n\big\} = \big\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\big\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega : \xi(\omega) \in B_i\big\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$, значит, по критерию измеримости, $\vec{\xi}$ — случайный вектор. ■

Следствие. *Пусть ξ, η — случайные величины, $c \in \mathbb{R}$,тогда $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $c\xi$, $\xi \cdot \eta$ и ξ/η, если $\forall \omega \in \Omega : \eta \neq 0$ тоже случайные величины.*

Лемма (О пределах случайной величины)**.** *Пусть $\big\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\big\}$ последовательность случайных величин, тогда, если пределы $\overline{\lim}\ \xi_n$, $\underline{\lim}\ \xi_n$, $\inf \xi_n$, $\sup \xi_n$ существуют, они являются случайными величинами.*

▲ $\big\{\omega : \sup \xi_n \leqslant x\big\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \big\{\omega : \xi_n(\omega) \leqslant x\big\} \in \mathcal{F}$. По критерию измеримости, так как $\sigma\big(x : (-\infty, x]\big) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, мы доказали, что $\sup \xi_n$ — случайная величина. Аналогично, $\big\{\omega : \inf \xi_n > x\big\} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \big\{\omega : \xi_n(\omega) \geqslant x\big\} \in \mathcal{F}$, так как $\sigma\big((x, +\infty)\big) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, по критерию измеримости $\inf \xi_n$ — случайная величина. Отсюда $\overline{\lim}\ \xi_n = \inf\limits_{n} \sup\limits_{m \geqslant n}\ \xi_m$ и $\underline{\lim}\ \xi_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{m \geqslant n}\ \xi_m$ тоже случайные величины. ■

Следствие. *Пусть $\xi = \lim \xi_n$ и предел существует $\forall \omega \in \Omega$, тогда ξ — случайная величина.*

▲ $\xi = \lim \xi_n = \overline{\lim}\xi_n = \underline{\lim}\xi_n$ ■

Характеристики случайных величин и векторов

(1) Распределение случайной величины

Определение. Пусть $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Распределением случайной величины называется вероятностная мера P_ξ на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ $\big((\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\big)$, заданная по правилу $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ $(B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

(2) Функция распределения случайной величины

Определение. Пусть $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (вектор) на нем. Функцией распределения ξ называется $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x)$ $(F_\xi(\vec{x}) = \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n))$.

③ Дискретность и непрерывность

Определение. Случайная величина называется дискретной, если ее распределение дискретно.

Определение. Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее распределение абсолютно непрерывно, то есть $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy,\ p_\xi(y) \geqslant 0$ — плотность случайной величины ξ.

④ Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной

Определение. Пусть ξ — случайная величина (вектор) на $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\big)$, тогда σ-алгеброй $\mathcal{F}_\xi$, порожденной случайной величиной ξ называется $\mathcal{F}_\xi = \big\{\{\xi \in B\}, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\ (\in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\big\}$.

3 Лекция от 03.03.2018

Определение. $\mathcal{F} = \big\{\xi^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\big\}$ — порожденная σ-алгебра.

Определение. Пусть ξ, η — случайные величины. Тогда величина η называется $\mathcal{F}_\xi$-измеримой, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$.

Пример. Пусть f — борелевская, $\eta = f(\xi)$. Тогда η — $\mathcal{F}_\xi$-измерима.

▲ $\{\eta \in B\} \in \mathcal{F}_\xi$, где $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, значит $\{\eta \in B\} = \{\xi \in f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} \in\ \mathcal{F}_\xi$ ■

Теорема. *[Пока б/д] Пусть η — $\mathcal{F}_\xi$-измерима, тогда существует борелевская φ, такая что $\eta = \varphi(\xi)$ почти наверное, то есть $\mathsf{P}\big(\eta = \varphi(\xi)\big) = 1$.*

Независимость случайных величин

Утверждение. *Случайные величины независимы тогда, и только тогда, когда порождаемые ими σ-алгебры независимы.*

Определение. Системы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ независимы, если $\forall A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}$: $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$.

Определение. Пусть ξ и η — случайные величины, тогда ξ и η независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \mathsf{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1) \cdot \mathsf{P}(\eta \in B_2)$.

Определение. Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы (в совокупности), если для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $\mathsf{P}(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\alpha_n} \in B_n) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_{\alpha_i} \in B_i),\ B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, n$.

Теорема (Критерий независимости в терминах функции распределения)**.** *Случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы в совокупности тогда, и только тогда, когда* $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_i \leqslant x_i)$.

▲ Возьмем в качестве $B_i = (-\infty, x_i]$. ■

Теорема. *Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — независимые случайные векторы, ξ_i имеет размерность n_i. Пусть $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ — борелевские функции. Тогда величины $f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)$ — независимые.*

▲ Обозначим $\eta_i = f_i(\xi_i) \Rightarrow \eta_i$ — $\mathcal{F}_{\xi_i}$-измеримая. По условию $\{\mathcal{F}_{\xi_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — независимые σ-алгебры, следовательно $\{\mathcal{F}_{\eta_i}\}$ независимы, т.к. $\forall i : \mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$, значит по определению $\{\eta_i\}$ независимы в совокупности. ■

Интеграл Лебега

Лемма. *[б/д]* $\forall \xi \geqslant 0$ *существует набор простых случайных величин ξ_n: $\xi_n \uparrow \xi$ (ξ_n — простая, если $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}$).*

Определение. Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}$, тогда матожидание $\mathsf{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \mathsf{P}(A_i)$, где $\bigsqcup A_i = \Omega$.

Определение. Пусть $\xi \geqslant 0$, тогда матожидание $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n$, где $\xi_n \uparrow \xi$, ξ_n — простые случайные величины или $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\eta \leqslant \xi} \mathsf{E}\eta$, η — простые.

Определение. Пусть ξ — произвольные случайные величины. Пусть $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\xi_- = \max(-\xi, 0) \Rightarrow \xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда матожидание

$\mathsf{E}\xi =$

$\mathsf{E}\xi_- \setminus \mathsf{E}\xi_+$	$< +\infty$	$= +\infty$
$< +\infty$	$\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-$	$+\infty$
$= +\infty$	$-\infty$	$\nexists$

Следствие. $\mathsf{E}\xi$ *— конечно* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}|\xi|$ *— конечно.*

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$. $E|\xi|$ — конечно $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}\xi_+, \mathsf{E}\xi_-$ — конечны $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}\xi$ — конечно. ■

Свойства матожидания

Свойство 1. *Пусть ξ — случайная величина, $\mathsf{E}\xi$ — конечно, тогда $\forall c \in \mathbb{R}$: $\mathsf{E}(c\xi)$ — конечно и $\mathsf{E}(c\xi) = c\mathsf{E}\xi$.*

▲ Для простых случайных величин свойство очевидно. Пусть $\xi \geqslant 0$, $\xi_n \uparrow \xi$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин, $c \geqslant 0$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi \Rightarrow \mathsf{E}(c\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(c\xi_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi_n) = c\mathsf{E}\xi$. В общем случае $\xi = \xi_+ - \xi_-$, тогда $(c\xi)_+ = c\xi_+$, $(c\xi)_- = c\xi_- \Rightarrow \mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)_+ - \mathsf{E}(c\xi)_- = c\mathsf{E}\xi$. Если $c < 0$, то $(c\xi)_+ = -c\xi_-$ и $(c\xi)_- = -c\xi_+$. ■

Свойство 2. *Если $\xi \leqslant \eta, \mathsf{E}\xi, \mathsf{E}\eta$ — конечны, то $\mathsf{E}\xi \leqslant \mathsf{E}\eta$.*

▲ Для простых случайных величин — очевидно. Для неотрицательных ξ, η $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\mu\leqslant\xi} \mathsf{E}\mu$, где μ — простая случайная величина. $\sup\limits_{\mu\leqslant\xi} \mathsf{E}\mu \leqslant \sup\limits_{\mu\leqslant\eta} \mathsf{E}\mu = \mathsf{E}\eta$. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $\xi_+ \leqslant \eta_+$ и $\xi_- \geqslant \eta_-$. $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_- \leqslant \mathsf{E}\eta_+ - \mathsf{E}\eta_- = \mathsf{E}\eta$. ■

Свойство 3. *Если $\mathsf{E}\xi$ — конечно, то $|\mathsf{E}\xi| \leqslant \mathsf{E}|\xi|$.*

▲ $|\xi| = \xi_+ + \xi_- \Rightarrow E|\xi|$ — конечно. $\underbrace{-\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-}_{-\mathsf{E}|\xi|} \leqslant \underbrace{\mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_-}_{\mathsf{E}_\xi} \leqslant \underbrace{\mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\xi_-}_{\mathsf{E}|\xi|}$. ■

Свойство 4 (Аддитивность)**.** *Пусть ξ и η — случайные величины, $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ — конечные, тогда $\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi) + \mathsf{E}(\eta)$.*

▲ Для простых случайных величин — очевидно. Пусть $\xi, \eta \geqslant 0$, возьмем $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$ — простые и положительные. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta \Rightarrow \mathsf{E}(\xi+\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n + \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$. Пусть ξ, η — произвольные, тогда $(\xi+\eta)_+ \leqslant \xi_+ + \eta_+$. Пусть $\delta = (\xi_+ + \eta_+) - (\xi+\eta)_+ \Rightarrow \mathsf{E}\delta + \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\eta_+ \Rightarrow \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\xi_- - \mathsf{E}\delta$. Аналогично, $\mathsf{E}(\xi+\eta)_- = \mathsf{E}\xi_- + \mathsf{E}\eta_- - \mathsf{E}\delta$. Тогда $\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi+\eta)_+ - \mathsf{E}(\xi+\eta)_- = \mathsf{E}\xi_+ + \mathsf{E}\eta_+ - \mathsf{E}\delta - \mathsf{E}\xi_- - \mathsf{E}\eta_- + \mathsf{E}\delta = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$. Рассмотрим $(\xi+\eta)_- = (\xi+\eta)_+ - (\xi+\eta) = \xi_+ + \eta_+ - \delta - (\xi+\eta) = \xi_- + \eta_- - \delta$. ■

Свойство 5. *1. Пусть $|\xi| \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi$ — конечная.*

2. Пусть $\xi \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi < +\infty$.
Пусть $\xi \geqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta$ — конечное, тогда $\mathsf{E}\xi > -\infty$.

3. Если $\mathsf{E}\xi$ — конечное и $A \in \mathcal{F}$, то $\mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$ — конечное.

▲

1. $\xi_-, \xi_+ \leqslant \eta \Rightarrow 0 \leqslant \mathsf{E}\xi_+ = \sup\limits_{0\leqslant\mu\leqslant\xi_+} \mathsf{E}\mu = \mathsf{E}\eta < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi_+, \mathsf{E}\xi_- < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi$ — конечное.
2. $\xi_+ \leqslant \eta_+ < +\infty \Rightarrow$ по первому пункту $\mathsf{E}\xi_+ < +\infty \Rightarrow \mathsf{E}\xi < +\infty$.
3. $(\xi \cdot I_A)_+ = I_A \cdot \xi_+ < \xi_+ \Rightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)_+$ — конечное. Аналогично $\mathsf{E}(\xi \cdot I_A)_-$ — конечное $\Rightarrow \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$ — конечное.

■

Определение. Событие A происходит почти наверное, если $\mathsf{P}(A) = 1$.

Свойство 6. *Если $\xi = 0$ почти наверное, то* $\mathsf{E}\xi = 0$.

▲ Пусть ξ — простая случайная величина, то есть $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$, где $\{x_k\}$ различные, $\{A_k\}$ — разбиение Ω, $A_k = \{\xi = x_k\}$. Тогда если $x_k \neq 0$, то $A_k = \{\xi = x_k\} \subseteq \{\xi \neq 0\} \Rightarrow \mathsf{P}(A_k) \leqslant \mathsf{P}(\xi \neq 0) = 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(A_k) = 0$. Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathsf{E}\xi = \sup\limits_{\xi \geqslant \eta} \mathsf{E}\eta$, где η — простые $\Rightarrow \mathsf{E}\xi \geqslant 0$. Но $0 \leqslant \eta \leqslant \xi = 0$ почти наверное $\Rightarrow \mathsf{E}\eta = 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi = 0$. Пусть ξ — произвольные $\Rightarrow \xi_+ = 0$ почти наверное, $\xi_- = 0$ почти наверное и $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi_+ - \mathsf{E}\xi_- = 0$. ■

4 Лекция от 10.03.2018

Свойство 7. *Если $\xi = \eta$ почти наверное и $\mathsf{E}|\eta| < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$ и $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$.*

▲ Пусть $A = \{\xi \neq \eta\}$, тогда $I_A = 0$ почти наверное, следовательно $\xi \cdot I_a = 0$ почти наверное и $\eta \cdot I_A = 0$ почти наверное. Так как $\xi = \xi \cdot I_A + \xi \cdot I_{\overline{A}}$, то $\xi = \xi \cdot I_A + \eta \cdot I_A$, потому что на $\overline{A}$ выполняется $\xi = \eta$. Из свойства 6 имеем $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) + \mathsf{E}(\eta \cdot I_{\overline{A}}) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\overline{A}}) = \mathsf{E}\eta$. ■

Свойство 8. *Пусть $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\xi = 0$, тогда $\xi = 0$ почти наверное.*

▲ Рассмотрим события $A = \{\xi > 0\}$ и $A_n = \left\{\xi > \frac{1}{n}\right\}$, следовательно, $A_n \uparrow A$. Имеем $\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{E}I_{A_n}$, так как $n\xi > 1$ на A_n, то $\mathsf{E}I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi \cdot I_A) \leqslant n\mathsf{E}\xi = 0$, значит, $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n)$. ■

Свойство 9. *Пусть $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ конечны, $\forall A \in \mathcal{F} : \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta \cdot I_A)$. Тогда $\xi \leqslant \eta$ почти наверное.*

▲ Рассмотрим событие $B = \{\xi > \eta\}$. Из условия и построения B получаем, что $\mathsf{E}(\eta \cdot I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi \cdot I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta \cdot I_B)$, следовательно, $\mathsf{E}(\xi \cdot I_B) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_B)$, значит $\mathsf{E}\big((\xi - \eta) \cdot I_B\big) = 0$. Так как $(\xi - \eta) \cdot I_B \geqslant 0$, то по свойству 8 $(\xi - \eta) \cdot I_B = 0$ почти наверное, следовательно $I_B = 0$ почти наверное, потому что $\xi - \eta > 0$ на B. ■

Теорема (о математическом ожидании произведения случайных величин)**.** *Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, причем $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$ конечны, тогда $\mathsf{E}\xi\eta$ конечно и $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.*

▲ Пусть ξ и η — простые случайные величины, то есть ξ принимает значения $\{x_1, \ldots, x_n\}$, η принимает значения $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Тогда по линейности

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\xi\eta = \sum_{k,j=1}^{n} x_k y_j \mathsf{P}(\xi = x_k, \eta = y_j) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k y_j \mathsf{P}(\xi = x_k) \cdot \mathsf{P}(\eta = y_j) = \\ = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k) \sum_{j=1}^{n} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j) = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta.\end{aligned}$$

Рассмотрим $\xi_n \uparrow \xi$,

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \xi \leqslant \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(\xi > n),$$

следовательно, $\xi_n = \varphi_n(\xi)$, значит, ξ_n — $\mathcal{F}_\xi$-измеримая. Пусть $\xi, \eta \geqslant 0$. Существует последовательность $\mathcal{F}_\xi$-измеримых ($\mathcal{F}_\eta$-измеримых) простых неотрицательных простых функций $\xi_n \uparrow \xi$ ($\eta_n \uparrow \eta$). Так как $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\xi_n = \varphi_n(\xi) \perp\!\!\!\perp \varphi_n(\eta) = \eta_n$. Следовательно, $\xi_n \cdot \eta_n \uparrow \xi \cdot \eta$, а по определению математического ожидания $\mathsf{E}\xi\eta = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}(\xi_n\eta_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\xi_n \cdot \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$.

Пусть теперь ξ и η — произвольные случайные величины. ξ^+ и ξ^- — функции от ξ, η^+ и η^- — функции от η, следовательно, $\xi^+ \perp\!\!\!\perp \eta^+$ и $\xi^- \perp\!\!\!\perp \eta^-$, отсюда $(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-$ значит, $\mathsf{E}(\xi\eta)^+ = \mathsf{E}\xi^+\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\eta^- = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^-$, аналогично $\mathsf{E}(\xi\eta)^- = \mathsf{E}\xi^+\eta^- + \mathsf{E}\xi^-\eta^+ = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^- + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^+$. Осталось заметить, что $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}(\xi\eta)^+ - \mathsf{E}(\xi\eta)^- = \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^+ + \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^- - \mathsf{E}\xi^+\mathsf{E}\eta^- - \mathsf{E}\xi^-\mathsf{E}\eta^+ = (\mathsf{E}\xi^+ - \mathsf{E}\xi^-)(\mathsf{E}\eta^+ - \mathsf{E}\eta^-) = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$. ∎

Пусть $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot I(\xi = x_i)$ — простая случайная величина. Тогда $\mathsf{E}g(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot \mathsf{P}(\xi = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta F_\xi(x_i)$, где $\Delta F_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0)$.

Теорема (о замене переменной в интеграле Лебега)**.** *[б/д] Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства и $X = X(\omega)$ — $\mathcal{F}|\mathcal{E}$-измеримая функция со значениями в E, то есть $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Пусть P — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$ и P_X — вероятностная мера на $(E, \mathcal{E})$, заданная по правилу $\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(\omega : X(\omega) \in A)$ для $A \in \mathcal{E}$. Тогда для любой $\mathcal{E}$-измеримой функции $g(x) : E \to \mathbb{R}$, то есть $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : g^{-1}(B) \in \mathcal{E}$, верно,*

$$\int\limits_A g(x)\mathsf{P}_X(dx) = \int\limits_{X^{-1}(A)} g\big(X(\omega)\big)\mathsf{P}(d\omega).$$

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$, в таком случае вероятностная мера P_ξ однозначно восстанавливается по F_ξ, следовательно, по теореме $\mathsf{E}g(\xi) = \int g(\xi)\, d\mathsf{P} = \int g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int g(x)\, dF_\xi(x)$.

Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, тогда $dF_\xi(x) = p_\xi(x)$, следовательно $\mathsf{E}g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p_\xi(x)\, dx$.

Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки

Определение. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ — два вероятностных пространства. Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — их прямое произведение, если

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$;

2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, то есть $\mathcal{F} = \sigma\big\{\{B_1 \times B_2\} | B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\big\}$;

3. $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2$, то есть P — продолжение вероятностной меры $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$, заданное на прямоугольнике $B_1 \times B_2, B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2$ по правилу $\mathsf{P}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}_1(B_1) \cdot \mathsf{P}_2(B_2)$. Так как $\{B_1 \times B_2\}$ — полукольцо, то P существует и единственна по теореме Каратеодори.

Теорема (Фубини). *[б/д] Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *— прямое произведение вероятностных пространств* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$*. Пусть* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\int\limits_\Omega \big|\xi(\omega_1, \omega_2)\big| \, d\mathsf{P} < +\infty$*. Тогда интегралы* $\int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) \mathsf{P}_1(d\omega_1)$ *и* $\int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) \mathsf{P}_2(d\omega_2)$ *определены почти наверное относительно* P_2 *и* P_1 *соответственно, являются измеримыми случайными величинами относительно* $\mathcal{F}_2$ *и* $\mathcal{F}_1$*, следовательно,*

$$\int\limits_\Omega \xi(\omega_1, \omega_2) \, d\mathsf{P} = \int\limits_{\Omega_2} \int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) \mathsf{P}_1(d\omega_1) \mathsf{P}_2(d\omega_2) = \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) \mathsf{P}_2(d\omega_2) \mathsf{P}_1(d\omega_1).$$

Из всего этого следует, что двойной интеграл равен повторному.

Утверждение. *Пусть* $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ *— случайные величины, тогда* $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi) \otimes (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta)$.

▲ Достаточно проверить свойство прямого произведения:

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
2. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ по определению борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^2$;
3. $\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1) \cdot \mathsf{P}(\eta \in B_2) = \mathsf{P}_\xi(B_1) \cdot \mathsf{P}_\eta(B_2)$. ■

Лемма (о свертке). *Пусть случайные величины* ξ *и* η *независимы с функциями распределения* F_ξ *и* F_η*. Тогда*

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z - x) \, dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(z - x) \, dF_\xi(x).$$

Если ξ *и* η *имеют плотности распределения* f_ξ *и* f_η *соответственно, то* $\xi + \eta$ *имеет плотность распределения*

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(z - x) f_\eta(x) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\eta(z - x) f_\xi(x) \, dx$$

.

▲ Заметим, $F_{\xi+\eta}(z) = \mathsf{P}(\xi + \eta \leqslant z)$, а по теореме о замене переменных в интеграле Лебега это равно $\int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x + y \leqslant z) \mathsf{P}_\xi(dx) \mathsf{P}_\eta(dy)$, полученный двойной интеграл по Фубини можно записать как повторный:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} I(x + y \leqslant z) \mathsf{P}_\xi(dx) \right) \mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-y} \mathsf{P}_\xi(dx) \right) \mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) \, dF_\eta(y).$$

Перейдем ко второму пункту доказательства:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leqslant z)\mathsf{P}_\xi(dx)\mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leqslant z) f_\xi(x) f_\eta(y)\,dx\,dy \overset{t=x+y}{=}$$

$$\overset{t=x+y}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} I(t \leqslant z) f_\xi(x) f_\eta(t-x)\,dx\,dt = \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x) f_\eta(t-x)\,dx \right) dt.$$

Следовательно, по определению плотности, $f_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x) f_\eta(t-x)\,dx$. ■

5 Лекция от 17.03.2018

Дисперсия и ковариация

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2$, если $\mathsf{E}\xi < +\infty$. Очевидно, $\mathsf{D}\xi \geqslant 0$.

Определение. Ковариацией двух случайных величин называется $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\big((\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta)\big)$. Легко заметить, что $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \mathsf{D}\xi$. Если $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$, то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

Определение. Величина $\rho(\xi,\eta) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi \cdot \mathsf{D}\eta}}$ называется коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η при условии, что $\mathsf{D}\xi$ и $\mathsf{D}\eta$ не равны нулю и конечны.

Свойства ковариации и дисперсии

Свойство 1 (Билинейность ковариации). $\operatorname{cov}(a\xi + b\zeta, \eta) = a\operatorname{cov}(\xi,\eta) + b\operatorname{cov}(\zeta,\eta)$

Свойство 2. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta \;\Rightarrow\; \mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2$

▲ $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\big((\mathsf{E}\xi)\cdot\eta\big) - \mathsf{E}\big((\mathsf{E}\eta)\cdot\xi\big) + \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\cdot\mathsf{E}\eta$ ■

Свойство 3. *Пусть* $c \in \mathbb{R}$, *тогда* $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}c = 0$.

▲
$$\begin{aligned} \mathsf{D}(c\xi) &= \mathsf{E}c^2\xi^2 - (\mathsf{E}c\xi)^2 = c^2\mathsf{E}\xi^2 - c^2(\mathsf{E}\xi)^2 = c^2\mathsf{D}\xi; \\ \mathsf{D}(c+\xi) &= \mathsf{E}\big(c + \xi - \mathsf{E}(c+\xi)\big)^2 = \mathsf{E}\,(c + \xi - c - \mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{D}\xi; \\ \mathsf{D}c &= \mathsf{E}(c - \mathsf{E}c)^2 = \mathsf{E}(c-c)^2 = 0. \end{aligned}$$
■

Свойство 4 (Неравенство Коши-Буняковского). $|\mathsf{E}\xi\eta|^2 \leqslant \mathsf{E}\xi^2\cdot\mathsf{E}\eta^2$

▲ Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$ функцию $f(\lambda) = \mathsf{E}(\xi - \lambda\eta)^2 \geqslant 0$. Имеем $f(\lambda) = \mathsf{E}\xi^2 + 2\lambda\mathsf{E}\xi\eta + \lambda^2\mathsf{E}\eta^2 \geqslant 0$. Для выполнения неравенства дискриминант полученного многочлена должен быть меньше нуля: $D = 4\mathsf{E}\xi\eta - 4\mathsf{E}\xi^2\eta^2 \leqslant 0$, откуда следует неравенство. ■

Свойство 5. *$|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$, причем $\rho(\xi,\eta) = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; \xi = a\eta + b$ почти наверное.*

▲ Рассмотрим случайные величины $\xi_1 = \xi - \mathsf{E}\xi$ и $\eta_1 = \eta - \mathsf{E}\eta$, следовательно $\rho(\xi_1,\eta_1) = \dfrac{\mathsf{E}\xi_1\eta_1}{\sqrt{\mathsf{E}\xi_1^2 \cdot \mathsf{E}\eta_1^2}} \leqslant 1$ по неравенству Коши-Буняковского. Пусть $|\rho(\xi_1,\eta_1)| = 1$, тогда дискриминант $D = 0$, следовательно, $\exists!\lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$, то есть $\mathsf{E}(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$, отсюда $(\xi_1+\lambda_0\eta)^2 = 0$ почти наверное, а, значит, и $\xi_1+\lambda_0\eta = 0$ почти наверное. Теперь можно заключить, что $\xi = \mathsf{E}\xi - \lambda_0(\eta - \mathsf{E}\eta)$. ■

Свойство 6. *Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$, обратное неверное.*

▲ $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$, но так как $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{E}\eta$, следовательно, $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$. ■

Лемма. *Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — попарно некоррелированные случайные величины (например, независимые в совокупности), $\mathsf{D}\xi_1 + \ldots + \mathsf{D}\xi_n < +\infty$, тогда $\mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathsf{D}\xi_1 + \ldots + \mathsf{D}\xi_n$.*

▲

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j).$$

По условию, если $i \neq j$, то $\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) = 0$, следовательно

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^n \mathsf{D}\xi_i.$$

■

Многомерный случай

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — случайный вектор, тогда его математическим ожиданием называется вектор из математических ожиданий его компонент, то есть $\mathsf{E}\vec{\xi} = (\mathsf{E}\xi_1,\ldots,\mathsf{E}\xi_n)$.

Определение. Матрицей ковариаций случайного вектора $\vec{\xi}$ называется

$$\operatorname{Var}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(\xi_n,\xi_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_n,\xi_n) \end{pmatrix} = \|\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)\|_{i,j=1}^n .$$

Лемма. *Матрица ковариаций случайного вектора — симметрическая и неотрицательно определенная*[1].

[1]Матрица A неотрицательно определена, если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A\vec{x} \geqslant 0$

▲ Матрица $\operatorname{Var}\vec{\xi} = \|\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$ — симметрическая, так как $r_{ij} \equiv \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_i) \equiv r_{ji}$. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\vec{x}^T \operatorname{Var}\vec{\xi}\vec{x} = (\vec{x}, \operatorname{Var}\vec{\xi}\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \operatorname{cov}(x_i\xi_i, x_j\xi_j) =$$
$$= \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i\xi_i, \sum_{j=1}^n x_j\xi_j\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i\xi_i, \sum_{i=1}^n x_i\xi_i\right) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^n x_i\xi_i\right) \geqslant 0.$$

■

Неравенства

Лемма (Неравенство Маркова)**.** *Пусть $\xi \geqslant 0$ — случайная величина, $\mathsf{E}\xi < +\infty$ (существует). Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}\xi}{\varepsilon}$.*

▲ $\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) = \mathsf{E}I(\xi \geqslant \varepsilon)$. На множестве $\xi \geqslant \varepsilon$ случайная величина $\dfrac{\xi}{\varepsilon} \geqslant 1$, следовательно $\mathsf{E}I(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{E}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon} \cdot I(\xi \geqslant \varepsilon)\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \mathsf{E}\xi$. ■

Лемма (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть ξ — случайная величина такая, что $\mathsf{D}\xi < +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$.*

▲ $\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\big) = \mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\big)$. Из неравенства Маркова имеем, что $\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$. ■

Лемма (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть $g(x)$ — борелевская выпуклая вниз (вверх) функция и $\mathsf{E}\xi < +\infty$. Тогда $\mathsf{E}g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi)$ ($\mathsf{E}g(\xi) \leqslant g(\mathsf{E}\xi)$).*

▲ Так как $g(x)$ выпукла вниз, то $\forall x_0 \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$. Положим $x = \xi$ и $x_0 = \mathsf{E}\xi$, тогда $g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi) + \lambda(\mathsf{E}\xi)(\xi - \mathsf{E}\xi)$, считая математическое ожидание от обоих частей неравенства, получаем $\mathsf{E}g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\xi) + 0$. ■

Определение. Пусть ξ и $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — случайные величины, тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ сходится по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Теорема (Закон больших чисел в форме Чебышёва)**.** *Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — последовательность попарно некоррелированных случайных величин таких, что $\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{D}\xi_n \leqslant C$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i$, тогда $\dfrac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to +\infty$.*

▲ По неравенству Чебышёва $\mathsf{P}\left(\left|\dfrac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \geqslant \dfrac{\mathsf{D}(S_n - \mathsf{E}S_n)}{n^2\varepsilon^2}$, по свойству дисперсии о сдвиге это равно $\dfrac{\mathsf{D}S_n}{n^2\varepsilon^2}$. Применяя лемму о дисперсии суммы, получаем $\dfrac{\sum_{i=1}^n \mathsf{D}\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \to 0$. ■

Следствие. *Пусть* $\{\xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$ *— независимые случайные величины такие, что* $\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{D}\xi_n \leqslant C \wedge \mathsf{E}\xi_n = a$. *Тогда* $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a$ *при* $n \to +\infty$.

Условные математические ожидания (УМО)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство; $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина; $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ — σ-алгебра, порожденная ξ. Если $\mathcal{G}$ — под σ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$, то ξ называется $\mathcal{G}$-измеримой, если $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{G}$.

Определение. Пусть ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathcal{G}$ — подσ-алгебра $\mathcal{F}$. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно $\mathcal{G}$ называется случайная величина $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, обладающая следующими свойствами:

1. $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ является $\mathcal{G}$-измеримой случайной величиной;
2. $\forall A \in \mathcal{G} : \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A\big)$ или, что тоже самое, $\int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} = \int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \, d\mathsf{P}$.

Обозначаем $\mathsf{E}(\xi|\eta) \equiv \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta)$, если такая η существует.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Функция множеств $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ — заряд (мера со знаком), если ν — σ-аддитивна на $\mathcal{F}$, то есть $\nu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$ для $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$, ряд в правой части сходится абсолютно и $\sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$.

Определение. Заряд ν называется абсолютно непрерывным относительно меры P, если $\forall A \in \mathcal{F} : \big(\mathsf{P}(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0\big)$.

Теорема (Радона-Никодима). *[б/д] Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *— вероятностное пространство,* ν *— заряд на* $\mathcal{F}$*, абсолютно непрерывный относительно меры* P*. Тогда существует и единственна почти наверное случайная величина* η *на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *такая, что* $\mathsf{E}\eta < +\infty$ *и* $\nu(A) = \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P} = \mathsf{E}\eta \cdot I_A$.

6 Лекция от 24.03.2018

Лемма (о существовании УМО). *Пусть* ξ *— случайная величина с* $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$. *Тогда* $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *(подσ-алгебра)* $: \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ *существует и единственно почти наверное.*

▲ Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$. Положим, что $\forall A \in \mathcal{G}$: $Q(A) = \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A)$, следовательно, $Q(A)$ — заряд на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$, абсолютно непрерывный относительно меры P. Тогда по теореме Радона-Никодима существует и единственна почти наверное случайная величина η на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$ с $\mathsf{E}\eta < +\infty$ такая, что $Q(A) = \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P}$. Значит, η — УМО. Действительно, η $\mathcal{G}$-измерима и $\forall A \in \mathcal{G} : \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P} = \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P}$. ■

Теорема. *Пусть σ-алгебра $\mathcal{G}$ порождена разбиением Ω $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$, причем, $\mathsf{P}(D_n) > 0$. Тогда, если $\mathsf{E}\xi < +\infty$, то $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathsf{E}(\xi \cdot I(D_n))}{\mathsf{P}(D_n)} \cdot I(D_n)$.*

▲ Пусть η $\mathcal{G}$-измерима. Покажем, что $\eta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}(\omega)$. Пусть $\eta \neq \mathrm{const}$ на D_n, тогда $\exists a \neq b : \{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n \neq \varnothing$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq \varnothing$, следовательно, $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n = D_n$ и $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq D_n$, иначе $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \notin \mathcal{G}$, то есть η не $\mathcal{G}$-измерима. Получили противоречие.

Найдем $c_n : \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}$, так как $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-измерима по определению.

$$\mathsf{E}(\xi \cdot I_{D_n}) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}\big) = \mathsf{E}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m I_{D_m} I_{D_n}\right) = \mathsf{E}(c_n I_{D_n}) = c_n \mathsf{P}(D_n).$$

Следовательно, $c_n = \dfrac{\mathsf{E}(\xi \cdot I_{D_n})}{\mathsf{P}(D_n)}$. ■

Свойства УМО

Свойство МО : если $\forall A \in \mathcal{F} : \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathsf{E}(\eta \cdot I_A)$, то $\xi = \eta$ почти наверное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Свойство 1. *Если ξ $\mathcal{G}$-измерима, то $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное.*

▲ ξ удовлетворяет свойствам УМО: первому по условиям, а второму, поскольку $\int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\, d\mathsf{P} = \int\limits_A \xi\, d\mathsf{P}$. Следовательно, $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ почти наверное. ■

Свойство 2 (формула полной вероятности). $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big) = \mathsf{E}\xi$.

▲ Так как $\Omega \in \mathcal{G}$, то по интегральному свойству $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_\Omega\big) = \mathsf{E}(\xi \cdot I_\Omega) = E\xi$. ■

Свойство 3 (линейность). $\mathsf{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$.

▲ $\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-измерима. Осталось проверить интегральное свойство:

$$\forall A \in G : \int\limits_A \big(\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \beta\mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})\big)\, d\mathsf{P} = \alpha \int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\, d\mathsf{P} + \beta \int\limits_A \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})\, d\mathsf{P} =$$
$$= \alpha \int\limits_A \xi\, d\mathsf{P} + \beta \int\limits_A \eta\, d\mathsf{P} = \int\limits_A (\alpha\xi + \beta\eta)\, d\mathsf{P} = \int\limits_A \mathsf{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G})\, d\mathsf{P}$$

■

Свойство 4. *Пусть ξ не зависит от $\mathcal{G}$, то есть $\mathcal{F}_\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Тогда $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathsf{E}\xi$ почти наверное.*

▲ Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, что равносильно $\forall A \in \mathcal{G} : \xi \perp\!\!\!\perp I_A$. $\mathsf{E}\xi$ — константа, следовательно, она измерима относительно $\mathcal{G}$, так как $\mathcal{F}_{\mathsf{E}\xi} = \{\Omega, \varnothing\}$. Интегральное свойство УМО: $\mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \boxed{\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A\big)} = \mathsf{E}\xi \cdot \mathsf{P}(A) = \boxed{\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi) \cdot I_A)}$, следовательно, $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$. ■

Свойство 5. *Пусть $\xi \leqslant \eta$ почти наверное, тогда $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное.*

▲ $\xi \leqslant \eta$ почти наверное, следовательно, $\forall A \in \mathcal{G} \int\limits_A \xi \, d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_A \eta \, d\mathsf{P}$, что равносильно $\int\limits_A \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \, d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_A \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G}) \, d\mathsf{P}$, а из свойств математического ожидания вытекает, что $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Свойство 6. $\big|\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathsf{E}\big(|\xi|\big|\mathcal{G}\big)$.

▲ $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$. ■

Свойство 7 (телескопическое свойство)**.** *Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, тогда*

1. $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)\big|\mathcal{G}_2\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ *почти наверное,*
2. $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ *почти наверное.*

▲ (1) $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ $\mathcal{G}_2$-измерима, следовательно, по первому свойству $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)\big|\mathcal{G}_2\big) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$. (2) Пусть $A \in \mathcal{G}_1$, следовательно, $A \in \mathcal{G}_2$.

$$\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|G_1) \cdot I_A\big) = \mathsf{E}(\xi \cdot I_A) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2) \cdot I_A\big) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|G_1\big) \cdot I_A\Big).$$

По свойству математического ожидания $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_1) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1\big)$.

■

Свойство 8. *[б/д] Пусть $\forall n > 1 : |\xi_n| \leqslant \eta$, $\mathsf{E}\eta < +\infty$ и $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Тогда $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F} : \mathsf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$.*

Свойство 9. *Пусть η $\mathcal{G}$-измерима, $\mathsf{E}|\xi\eta| < +\infty$, $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$. Тогда $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное.*

▲ Пусть $\eta = I_B$, где $B \in \mathcal{G}$. Тогда

$$\forall A \in \mathcal{G} : \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) \cdot I_A\big) = \mathsf{E}(\xi\eta \cdot I_A) = \mathsf{E}(\xi I_B I_A) =$$
$$= \mathsf{E}(\xi I_{A\cap B}) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{A\cap B}\big) = \mathsf{E}\big(\eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A\big).$$

Следовательно, $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное по свойству математического ожидания.

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для любой простой функции. Теперь пусть η — произвольная случайная величина. Возьмем последовательно простых $\mathcal{F}_\eta$-измеримых случайных величин $\eta_n : |\eta_n| \leqslant |\eta|$ и $\eta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \eta$. По свойству 8 $\cancel{\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G})} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G})$ $=$ $\cancel{\eta_n \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})} \to \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, то есть $\mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ почти наверное. ■

Теорема (о наилучшем квадратичном прогнозе)**.** *Пусть ξ — случайная величина, $\mathcal{G}$ — подσ-алгебра $\mathcal{F}$. Обозначим $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = \{\eta | \eta$ — $\mathcal{G}$-измеримая сл. вел.$\}$. Тогда* $\inf\limits_{\eta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}} \mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2$.

▲ Пусть $\eta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, тогда

$$\mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) + \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 =$$
$$= \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2 + \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 + 2\mathsf{E}\Big(\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)\Big).$$

Пусть $\varkappa \equiv \xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$, $\psi \equiv \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta$. Рассмотрим $\mathsf{E}(\varkappa\psi)$, по свойству 2 это равно $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\varkappa\psi|\mathcal{G})\big)$, а по свойству 9, это можно переписать, как $\mathsf{E}(\psi\mathsf{E}(\varkappa|\mathcal{G})\big)$. Но $\mathsf{E}(\varkappa|\mathcal{G}) = \mathsf{E}\big((\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}))\big|\mathcal{G}\big) = 0$, следовательно, $\mathsf{E}(\varkappa\psi) = 0$. Значит $\mathsf{E}(\xi - \eta)^2 = \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2 + \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G}) - \eta\big)^2 \geqslant \mathsf{E}\big(\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})\big)^2$. ■

7 Лекция от 31.03.2018

Условные распределения

Определение. Пусть $A \in \mathcal{F}$, тогда по определению $\mathsf{P}(A|\mathcal{G}) = \mathsf{E}(I_A|\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Если ξ, η — случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, то $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta)$.

Определение. Величиной $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ называется такая борелевская функция $\varphi(y)$, что $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \mathsf{E}(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int\limits_B \varphi(y)\mathsf{P}_\eta(dy)$.

Лемма. *Если $\mathsf{E}\xi$ существует, то $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ существует и единственно почти наверное относительно P_η.*

▲ Рассмотрим $\psi(B) = \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big)$ — заряд на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta\big)$, потому что $\psi(B)$ σ-аддитивна по свойству интеграла Лебега и конечна, так как $\mathsf{E}(\xi) < +\infty$. ψ абсолютно непрерывна относительно P_η, так как если $\mathsf{P}_\eta(B) = 0$, то $I(\eta \in B) = 0$ почти наверное, следовательно, $\mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big) = 0$, а, значит, выполнены условия теоремы Радона-Никодима, то есть существует и единственна почти наверное случайная величина φ на $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_\eta\big)$ (борелевская функция) такая, что $\psi(B) = \int\limits_B \varphi(y)\mathsf{P}_\eta(dy)$. ■

Лемма. $\mathsf{E}(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ *почти наверное.*

▲ Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, тогда $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(\xi|\eta) \cdot I(\eta \in B)\big) = \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(\eta \in B)\big) = \int\limits_B \varphi(y)\mathsf{P}_\eta(dy)$.
По теореме о замене переменных в интеграле Лебега это можно переписать, как $\int\limits_{\{\eta \in B\}} \varphi(\eta)\, d\mathsf{P} = \mathsf{E}\big(\varphi(\eta) \cdot I(\eta \in B)\big)$, что равносильно условию $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$ почти наверное по Свойству. Обратно аналогично, по тем же равенствам. ■

Следствие. *Пусть ξ — $\mathcal{F}_\eta$-измеримая случайная величина, тогда существует борелевская функция $\psi(x)$ такая, что $\xi = \psi(x)$ почти наверное.*

▲ Так как ξ — $\mathcal{F}_\eta$-измеримая, то по свойству 1 $\xi = \mathsf{E}(\xi|\eta)$ почти наверное. С другой стороны, так как существует единственная $\psi(x) : \psi(x) = \mathsf{E}(\xi|\eta = x)$, то $\xi = \mathsf{E}(\xi|\eta) = \psi(\eta)$. ■

Определение. Условным распределением случайной величины ξ при условии $\eta = y$ называется вероятностная мера $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in B)|\eta = y\big)$. Является мерой на $\mathscr{B}(R)$.

Определение. Условной плотностью случайной величины ξ относительно η называется плотность условного распределения $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y)$, то есть функция $f_{\xi|\eta}(x|y)$ такая, что $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta = y) = \int\limits_B f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx$.

Теорема (о свойстве условной плотности). *Пусть существует условная плотность случайной величины ξ относительно случайной величины η $f_{\xi|\eta}(x|y)$. Тогда для любой борелевской функции $g(x)$ такой, что $\mathsf{E}\big|g(x)\big|$ существует, выполнено $\mathsf{E}\big(g(\xi)|\eta = y\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx$ относительно P_η почти наверное.*

▲ Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, пусть также $g(x) = I_A(x), A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} I_A(x)\cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = \int\limits_A f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx =$$
$$= \mathsf{P}(\xi \in A|\eta = y) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in A)|\eta = y\big) = \mathsf{E}\big(g(\xi)|\eta = y)\big).$$

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для всех простых функций $g(x)$. Далее с помощью теоремы Лебега для условных математических ожиданий доказываем для всех $g(x)$. ($\mathsf{E}(\xi_n|\eta) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\xi|\eta)$, где $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, ξ_n — простые) ■

Теорема (о виде условной плотности). *Пусть ξ и η — случайные величины такие, что существует их совместная плотность $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$. Пусть $f_\eta(y)$ — плотность случайной величины η, тогда функция*

$$\varphi(x, y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)}\cdot I\big(f_\eta(y) > 0\big)$$

есть условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$.

▲ Для любых $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_{B\rtimes A} f_{(\xi,\eta)}(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A \left(\int\limits_B \frac{f_{(\xi,\eta)}(x, y)}{f_\eta(y)}\,dx\right) f_\eta(y)\,dy,$$

с другой стороны

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \mathsf{E}\big(I(\xi \in B, \eta \in A)\big) = \int\limits_{\{\eta \in A\}} I(\xi \in B)\, d\mathsf{P}.$$

Далее по интегральному свойству получаем, что

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_{\{\eta \in A\}} \mathsf{E}\big(I(\xi \in B) | \eta\big)\, d\mathsf{P},$$

заменяя переменные, окончательно имеем следующее:

$$\mathsf{P}(\xi \in B, \eta \in A) = \int\limits_{A} \mathsf{E}\big(I(\xi \in B | \eta = y)\big) \mathsf{P}_\eta(dy) =$$

$$= \int\limits_{A} \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) \mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{A} \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) f_\eta(y)\, dy.$$

■

Алгоритм подсчета УМО

1. Найти совместную плотность $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$, затем $f_\eta(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\, dx$, тогда условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y) = \dfrac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}$.
2. Вычислить $\varphi(y) = \mathsf{E}\big(g(\xi) | \eta = y\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\, dx$.
3. Тогда $\mathsf{E}\big(g(x)|\eta\big) = \varphi(\eta)$.

Виды сходимости случайных величин

Определение. Последовательность $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ сходится к случайной величине ξ

1. по вероятности ($\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,
2. почти наверное ($\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), если $\mathsf{P}(\omega : \xi_n \to \xi) = 1$,
3. в L_p ($\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$), если $\mathsf{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $\mathsf{E}|\xi|^p < +\infty$ и $\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ($p > 0$),
4. по распределению ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$), если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выполнено $\mathsf{E} f(\xi_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathsf{E} f(\xi)$.

Теорема (Александрова). *[б/д] $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда только тогда, когда $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{\text{в основном}} F_\xi(x)$, то есть $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ во всех точках непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$.*

Лемма (критерий сходимости почти наверное)**.** *$\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▲ Пусть $A_k^\varepsilon = \big\{\omega : |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\big\}$, $A^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon = \big\{\omega : \forall n\ \exists f \geqslant n : |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big\}$. Тогда $\big\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\big\} = \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} A^{\frac{1}{m}} = \big\{\omega : \exists m\ \forall n\ \exists k \geqslant n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big\}$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\big) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \mathsf{P}\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\left(A^\varepsilon\right) = 0,$$

так как всегда существует m, что $\frac{1}{m} \geqslant \varepsilon \geqslant \frac{1}{m+1}$, то есть $A^{\frac{1}{m+1}} \supseteq A^\varepsilon \supseteq A^{\frac{1}{m}}$. Но $\bigcup\limits_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon$, следовательно,

$$0 = \mathsf{P}\left(A^\varepsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : \sup_{k \geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Теорема (взаимоотношения различных видов сходимости)**.**

$$\begin{matrix} п.н. & \searrow & & & \\ & & \mathsf{P} & \longrightarrow & d \\ L_p & \nearrow & & & \end{matrix}$$

▲ (п.н. $\Rightarrow \mathsf{P}$) $\qquad \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big) \to 0$, но

$$\big\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big\} \subset \big\{\omega : \sup_{k \geqslant n} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big\},$$

следовательно, $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \to 0$.

($L_p \Rightarrow \mathsf{P}$) $\qquad \mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) = \mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p > \varepsilon^p\big)$, а по неравенству Маркова это меньше или равно $\dfrac{\mathsf{E}|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p}{\varepsilon p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\mathsf{P} \Rightarrow d$) $\qquad$ Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, тогда $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leqslant C$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, возьмем $N \in \mathbb{R} : \mathsf{P}\big(|\xi| > N\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4C}$. На отрезке $[-N, N]$ $f(x)$ равномерно непрерывна, следовательно,

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Рассмотрим разбиение Ω:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \big\{\omega : |\xi(\omega)| < N,\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta\big\},\\
A_2 &= \big\{\omega : |\xi(\omega)| > N,\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta\big\},\\
A_3 &= \big\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\big\}.
\end{aligned}$$

Оценим

$$\big|\mathsf{E}f(\xi_n) - \mathsf{E}f(\xi)\big| \leqslant \mathsf{E}\big|f(\xi_n) - f(\xi)\big| = \mathsf{E}\big[|f(\xi) - f(\xi_n)| \cdot (I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})\big] \boxed{\leqslant}.$$

Пусть $\omega \in A_1$, тогда $\big|f(\xi_n) - f(\xi)\big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $\mathsf{E}\big[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I_{A_1}\big] \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \mathsf{E}I_{A_1} = \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \mathsf{P}(A_1) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если же $\omega \in A_2, A_3$, то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2C$.

Значит, $\boxed{\leqslant} \dfrac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot \mathsf{P}(A_2) + 2C \cdot \mathsf{P}(A_3) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot \mathsf{P}\big(|\xi| > N\big) + 2C \cdot \overbrace{\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| > \delta\big)}^{0,\ \text{т.к. } \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi} \leqslant C_1\varepsilon.$
Следовательно, $\mathsf{E}f(\xi_n) \to \mathsf{E}f(\xi)$, то есть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. ■

8 Лекция от 07.04.2018

Контрпримеры

Пример (п.н. $\not\Rightarrow L_p$, а значит, $\mathsf{P} \not\Rightarrow L_p$ и $d \not\Rightarrow L_p$)**.** Рассмотрим $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}\big([0, 1]\big)$, $\mathsf{P} = \lambda$. Пусть $\xi_n = e^n \cdot I_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}$, $\xi = 0$, тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, но $\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p = e^{np} \cdot \dfrac{1}{n} \to +\infty$.

Пример ($L_p \not\Rightarrow$ п.н., $\mathsf{P} \not\Rightarrow$ п.н., $d \not\Rightarrow$ п.н.)**.** Рассмотрим $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}\big([0, 1]\big)$, $\mathsf{P} = \lambda$. Возьмем $\xi_{2^n+i} = I\left(\omega \in \left[\dfrac{i}{2^n}, \dfrac{i+1}{2^n}\right)\right)$, $\quad i = 0, \ldots, 2^n - 1$; $\quad n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\xi_k \xrightarrow{L_p} 0$ при $k \to +\infty$, так как $\mathsf{E}|\xi_k|^p = \dfrac{1}{2^n}$, где $n = [\log_2 k]$. Но для любой точки из $[0, 1]$ существует бесконечно много ξ_i таких, что $\xi_i(\omega) = 1$ и $\xi_i(\omega) = 0$, следовательно, $\forall \omega : \xi_i(\omega) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$.

Пример ($d \not\Rightarrow \mathsf{P}$)**.** Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathsf{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : \xi_n(\omega_1) = 1, \xi_n(\omega_2) = 0$. Тогда $\xi_n \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$. $\xi(\omega_1) = 1, \xi(\omega_2) = 0$, значит, $\xi \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$, следовательно, по теореме Александрова $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, но $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| > 0.5\big) = 1$, значит, $\xi_n \overset{\mathsf{P}}{\not\to} \xi$.

Определение. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $|x_n - x_m| \to 0$ при $n, m \to +\infty$.

Теорема (критерий Коши сходимости числовой последовательности)**.** *[б/д] Последовательность чисел $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ фундаментальна.*

Теорема (критерий Коши сходимость почти наверное). *Последовательно случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится почти наверное тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное, то есть* $\mathsf{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \to 0\big) = 1$ *при $n, m \to +\infty$.*

▲ $(\Rightarrow)$ Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, тогда, если $\omega \in \big\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big\}$, то $\omega \in \big\{\omega : \{\xi_n\}$ — фундаментальная$\big\}$, следовательно, $\mathsf{P}\big(\omega : \{\xi_n(\omega)\}$ — фундаментальная$\big) \geqslant \mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big) = 1$.

$(\Leftarrow)$ Обозначим $A = \{\omega : \{\xi_n\}$ — фундаментальная$\big\}$. Построим такую случайную величину ξ, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. По критерию Коши для любого $\omega \in A$ у последовательности $\big\{\xi_n(\omega)\big\}$ существует предел $\xi(\omega)$. Положим по определению $\xi(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n(\omega) \cdot I_A(\omega)$. Тогда $\xi_n \cdot I_A \to \xi$, то есть ξ — случайная величина, как предел случайных величин, и $\mathsf{P}\big(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big) = \mathsf{P}(A) = 1$. ■

Лемма (критерий фундаментальности почти наверное). *[б/д] Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна почти наверное тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\big(\omega : \sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi_n(\omega)| > \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Определение. Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность событий, тогда событием $\{A_n$ бесконечно часто (б.ч.)$\}$ называется событие $\{\omega : \forall n \exists k \geqslant n : \omega \in A_k\}$, то есть все такие ω, что ω принадлежит бесконечному числу элементов из $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n}^{\infty} A_k$.

Лемма (Бореля-Кантелли). *1. Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) < +\infty$, *то* $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = 0$.

2. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = +\infty$ *и $\{A_k\}$ независимы в совокупности, то* $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = 1$.

▲ $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = \mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n}^{\infty} A_k\right) \boxed{=}$. Известно, что $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_n \downarrow \{A_n \text{ б.ч.}\}$, следовательно, по непрерывности вероятностной меры имеем $\boxed{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\geqslant n} \mathsf{P}(A_k) = 0$.

Заметим, что $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)\right)$, но

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \overline{A}\right) = \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}\left(\overline{A_k}\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} [1 - \mathsf{P}(A_k)] \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \exp\left(-\mathsf{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathsf{P}\left(A_k\right)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}\left(A_k\right)\right).$$

■

Теорема (Рисса)**.** *Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ фундаментальна (или сходится) по вероятности, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$ фундаментальную (сходящуюся) почти наверное.*

▲ Пусть $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности, то есть $\forall\varepsilon : \mathsf{P}\big(|\xi_k-\xi_n| > \varepsilon\big) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$. Докажем, что можно выделить подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, сходящуюся почти наверное. Пусть $n_1 = 1$. По индукции определим n_k, как наименьшее $n > n_{k-1}$ такое, что $\forall s \geqslant n, t \geqslant n : \mathsf{P}\big(|\xi_t - \xi_s| > 2^{-k}\big) < 2^{-k}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k}\big) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}\big(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k} \text{ б.ч.}\big) = 0$, значит, почти наверное $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < +\infty$. Пусть $N = \left\{\omega : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big|\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)\big| = +\infty\right\}$, тогда $\mathsf{P}(N) = 0$. Положим $\xi(\omega) = \left(\xi_{n_1}(\omega) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \big(\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)\big)\right) \cdot I_{\overline{N}}(\omega)$. Получаем, $\sum\limits_{j=1}^{k} (\xi_{n_j+1} - \xi_{n_j}) + \xi_{n_1} = \xi_{n_{k+1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Пусть теперь $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, тогда

$$\mathsf{P}\big(|\xi_m - \xi_n| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|\xi_m - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, из сходимости по вероятности следует фундаментальность по вероятности, а дальше все тоже самое. ■

Теорема (критерий Коши сходимости по вероятности)**.** $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ *тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ фундаментальна по вероятности.*

▲ $(\Rightarrow)$ Следует из теоремы Рисса.

$(\Leftarrow)$ Если $\{\xi_n\}$ фундаментально по вероятности, то по теореме Рисса существует подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$ такая, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то есть $\xi_{n_k} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$. Тогда $\mathsf{P}\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \cancelto{0,\ \text{т.к. фунд.}}{\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi_{n_k}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \cancelto{0,\ \text{т.к. сход.}}{\mathsf{P}\left(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ ■

Теорема (Неравенство Колмогорова)**.** *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины такие, что $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i < +\infty$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Тогда $\forall\varepsilon > 0 : \mathsf{P}\left(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant \dfrac{\mathsf{E}S_n^2}{\varepsilon^2}$.*

▲ Обозначим $A = \{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}$. Разобьем A на несколько непересекающихся событий, то есть $A_k = \big\{|S_k| \geqslant \varepsilon\big\}$ и $\forall i \leqslant k-1 : |S_k| \leqslant \varepsilon$, следовательно,

$A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда

$$\mathsf{E}(S_n^2 \cdot I_{A_k}) = \mathsf{E}\big((S_k + \underbrace{\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n}_{\overline{S_k}})^2 \cdot I_{A_k}\big) =$$

$$= \mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathsf{E}\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) + 2\mathsf{E}\left(S_k\overline{S_k} \cdot I_{A_k}\right) \boxed{=}.$$

Рассмотрим

$$\mathsf{E}(\underbrace{S_k \cdot I_{A_k}}_{\sigma\{\xi_1,\ldots,\xi_k\} \text{ — измер.}} \cdot \underbrace{\overline{S_k}}_{\sigma\{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n\} \text{ — измер.}}).$$

Следовательно, $S_k \cdot I_{A_k} \perp\!\!\!\perp \overline{S_k}$, так как $\{xi_1, \ldots, \xi_k\} \perp\!\!\!\perp \{\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\}$, а, значит, $\mathsf{E}(S_k \cdot I_{A_k} \cdot \overline{S_k}) = \mathsf{E}(S_k \cdot I_{A_k}) \cdot \cancelto{0}{\mathsf{E}\overline{S_k}} = 0$. Отсюда

$$\mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + \mathsf{E}\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) \geqslant \mathsf{E}(S_k^2 \cdot I_{A_k}) \geqslant \varepsilon^2 \cdot \mathsf{E}I_{A_k} = \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}(A_k).$$

В итоге,

$$\mathsf{E}S_n^2 \geqslant \mathsf{E}(S_n^2 \cdot I_A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(S_k \cdot I_{A_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) \cdot \varepsilon^2 = \mathsf{P}(A) \cdot \varepsilon^2.$$

■

9 Лекция от 14.04.2018

Теорема (Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин такая, что* $\mathsf{E}\xi_n = 0$ *и* $\mathsf{E}\xi^2 < +\infty$. *Тогда, если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n^2 < +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *сходится почти наверное.*

▲ Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. По критерию Коши $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{ сходится п.н.}\right\}$ равносильно тому, что $\{S_n$ фундаментально п.н.$\}$, а это в свою по критерию фундаментальности равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Очевидно,

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \{|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\}\right),$$

а из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$\lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} \{|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\max_{n\leqslant k\leqslant N} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon\right).$$

По неравенство Колмогорова это меньше или равно, чем

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\mathsf{E}(S_N-S_n)^2}{\varepsilon^2}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n+1}^{N}\mathsf{E}\xi_k^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k>n}\mathsf{E}\xi_k^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

$\blacksquare$

Лемма (Тёплица)**.** *Пусть $x_n\to x$ — числовая последовательность, числа $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ таковы, что $\forall n: a_n\geqslant0$ и $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\uparrow+\infty$. Тогда $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.*

$\blacktriangle$ Пусть $\varepsilon>0$. Выберем n_0 так, что $\forall n>n_0: |x_n-x|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Выберем $n_1>n_0$ такое, что $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n_0}a_k|x_k-x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$\forall n>n_1:\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k-x\right|=\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k-\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_kx\right|\leqslant\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_k|x_k-x|=$$
$$=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n_0}a_k|x_k-x|+\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}a_k|x_k-x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}a_k\leqslant\varepsilon.$$

$\blacksquare$

Лемма (Кронекера)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ сходится, $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ такова, что $a_n\geqslant0$, $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\uparrow+\infty$. Тогда $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.*

$\blacktriangle$ Пусть $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, тогда $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$. Заметим,

$$\sum_{j=1}^{n}b_jx_j=\sum_{j=1}^{n}b_j(S_j-S_{j-1})=b_nS_n-\sum_{j=1}^{n}S_{j-1}(b_j-b_{j-1})=b_nS_n-\sum_{j=1}^{n}S_{j-1}a_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=S-\overset{S\text{ по Тёплицу}}{\cancel{\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}S_{j-1}a_j}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

$\blacksquare$

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина)**.** *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant1}$ — независимые случайные величины, $\forall n: \mathsf{D}\xi_n<+\infty$. Пусть $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ — числовая последовательность, $b_1>0$ и $b_n\uparrow+\infty$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathsf{D}\xi_n}{b_n^2}<+\infty$. Пусть $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, тогда $\dfrac{S_n-\mathsf{E}S_n}{b_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{п.н.}}0$.*

▲ Преобразуем:

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}.$$

Обозначим $\eta_i = \dfrac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}$. Случайные величины η_i независимы и $\mathsf{E}\eta_i = 0$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{E}\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(\xi_i - \mathsf{E}\xi_i)^2}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\xi_i}{b_i^2} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда $\sum \eta_i$ сходится почти наверное. По лемме Кронекера последовательность

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i}$$

сходится к нулю для всех ω, для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$$

сходится. Следовательно,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{b_i} = \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н}} 0.$$

■

Лемма. *Пусть* $\xi \geqslant 0$, $\mathsf{E}\xi < +\infty$, *тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}\xi \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n).$$

▲

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathsf{P}(k \leqslant \xi \leqslant k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(k \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\lfloor\xi\rfloor\big) \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\xi \cdot I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\big) =$$
$$= \mathsf{E}\left(\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(k \leqslant \xi \leqslant k+1)\right) = \mathsf{E}\xi.$$

Верхнее неравенство доказывается аналогично. ■

Определение. Случаные величины ξ и η одинаково распределены, если $\forall x$: $F_\xi(x) = F_\eta(x)$. Обозначают $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

Утверждение. *Если* $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, *то* $\forall g(x) : \mathsf{E}g(\xi) = \mathsf{E}g(\eta)$.

▲ $\mathsf{E}g(\xi) = \int g(x)\,dF_\xi(x) = \int g(x)\,dF_\eta(x) = \mathsf{E}g(\eta)$. ■

Теорема (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова)**.** *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что* $\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

▲ Поскольку $\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty$, то по предыдущей лемме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_1| \geqslant n\big) < +\infty$. Так как $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\big(|\xi_n| \geqslant n\big) < +\infty$, следоватально, по лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}\Big(\big\{|\xi_n| \geqslant n\big\} \text{ б.ч.}\Big) = 0$. То есть с вероятностью 1 случается конечное число $\big\{|\xi_n| \geqslant n\big\}$. Обозначим $\tilde{\xi}_n \equiv \xi_n \cdot I\big\{|\xi_n| \leqslant n\big\}$. Тогда с вероятность 1 $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ кроме конечного числа ξ_n. Пусть $\mathsf{E}\xi_i = 0$, если это не так, то $\eta_i = \xi_i - \mathsf{E}\xi_i$. Получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi_n + \ldots + \xi_n}{n} \to 0\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \to 0\right).$$

Рассмотрим

$$\mathsf{E}\tilde{\xi}_n = \mathsf{E}\Big(\xi_n \cdot I\big\{|\xi_n| \leqslant n\big\}\Big) = \mathsf{E}\Big(\xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big\}\Big) \to \mathsf{E}\xi_1 = 0$$

по теореме Лебега о мажорируемой ходимости, поскольку

$$\Big|\xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big)\Big| \leqslant \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_1 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi_1.$$

По лемме Тёплица

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\tilde{\xi}_i \to \mathsf{E}\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{\xi}_i - \mathsf{E}\tilde{\xi}_i\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Обозначим $\overline{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - \mathsf{E}\tilde{\xi}_n$. По лемме Кронекера, если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\overline{\xi}_k}{k}$ на каком-то ω, то $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \dfrac{\overline{\xi}_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ на том же ω. Проверим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\overline{\xi}_k}{k}$ сходится почти наверное. По теормере Колмогорова-Хинчина доскаточно показать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\overline{\xi}_k\right)^2}{k^2} < +\infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\overline{\xi}_k\right)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\tilde{\xi}_k - \mathsf{E}\tilde{\xi}_k\right)^2}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\tilde{\xi}_k\right)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_k^2 \cdot I\big(|\xi_k| \leqslant k\big)\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_1^2 \cdot I\big(|\xi_1| \leqslant k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathsf{E}\left(\xi_1^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\Big(\xi^2 \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\Big) \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leqslant 2/n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \mathsf{E}\Big(\xi_1^2 \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_1| \cdot I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big) \overset{\text{по т. Беппо-Леви}}{=} 2\mathsf{E}|\xi_1| \sum_{n=1}^{\infty} I\big(n-1 < |\xi_1| \leqslant n\big) =$$
$$= 2\mathsf{E}|\xi_1| < +\infty.$$

■

Теорема (Беппо-Леви). *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — случайные величины, $\forall n : \xi_n \geqslant 0$. Тогда $\mathsf{E}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n$.*

▲ Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, тогда $S_n \uparrow S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$. По теореме о монотонной сходимости $\mathsf{E}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$, следовательно,

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\xi_k \uparrow \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k.$$

■

10 Лекция от 21.04.2018

Теорема (о монотонной сходимости). *[б/д] Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}, \xi, \eta$ — случайные величины, тогда*

1. *Если $\xi_n \uparrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \geqslant \eta, \mathsf{E}\eta > -\infty$, то $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n$.*
2. *Если Если $\xi_n \downarrow \xi$ почти наверное и $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \leqslant \eta, \mathsf{E}\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n$.*

Лемма (Фату). *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ и η — случайные величины, $\mathsf{E}|\eta| < +\infty$, тогда*

1. *Если* $\forall n : \xi_n \geqslant \eta$, *то* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \geqslant \mathsf{E} \varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

2. *Если* $\forall n : \xi_n \leqslant \eta$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

3. *Если* $\forall n : |\xi_n| < \eta$, *то* $\mathsf{E} \varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

▲ (1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \xi_k$. Очевидно, $\psi_n \uparrow \varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$. кроме того $\psi_n \geqslant \eta$, следовательно, по теореме о монотонносй сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\psi_n = \mathsf{E} \varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Рассмотрим

$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\psi_n = \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{E}\psi_n \overset{\text{т.к. } \psi_n\leqslant\xi_n}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n.$$

(2) Следует из пункта (1) заменой $\xi_n' = -\xi_n$.

(3) Следует из (1) и (2). ■

Теорема (Лебега о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi, |\xi| \leqslant \eta, \mathsf{E}\eta < +\infty$. *Тогда* $\mathsf{E}\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi$ *и* $\mathsf{E}|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▲ Заметим, что $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$. По пункту (3) леммы Фату

$$\mathsf{E}\xi = \mathsf{E} \varliminf_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup_{n\to\infty} \xi_n = \mathsf{E}\xi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

Конечность $\mathsf{E}\xi$ следует из того, что $|\xi| < \eta$ почти наверное, следовательно, так как $\mathsf{E}\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| \leqslant \mathsf{E}|\xi| < +\infty$.

Докажем L_1-сходимость. Возьмем $\psi_n = |\xi_n - \xi|$. Тогда $|\psi_n| \leqslant 2\eta$ почти наверное и $\psi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, следовательно, $\mathsf{E}\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ по теореме Лебега. ■

Сходимость в L_2

Введем пространство $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \{\xi : \mathsf{E}\xi^2 < +\infty\}$. Это минимальное пространство, так как $\mathsf{E}(a\xi + b\eta)^2 \leqslant 2a^2\mathsf{E}\xi^2 + 2b^2\mathsf{E}\eta^2$.

Основное неравенство: $(x + y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$.

Норма $\|\xi\| = \sqrt{\mathsf{E}\xi^2}$; скалярное произведение $(\xi, \eta) = \mathsf{E}\xi\eta$.

Лемма. *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, $\forall n : \xi_n \in L_2$. *Тогда*

1. $\xi \in L_2$,

2. $E\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi$,

3. $\mathsf{E}\xi_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\xi^2$,

4. *если* $\eta_n \xrightarrow{L_2} \eta$, $\forall n : \eta_n \in Ł_2$, *то* $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\xi, \eta)$.

▲ Докажем первый пункт леммы:

$$\mathsf{E}\xi^2 = \mathsf{E}(\xi - \xi_n + \xi_n)^2 \leqslant \underbrace{2\mathsf{E}(\xi - \xi_n)^2}_{\to 0} + \underbrace{2\mathsf{E}\xi_n^2}_{<+\infty} < +\infty.$$

Перейдем ко второму пункту. Если $\mathsf{E}\xi^2 < +\infty$, то $\mathsf{E}|\xi| = \mathsf{E}|\xi|\cdot 1$, а по неравенству Коши-Буняковского это меньше или равно, чем $\sqrt{\mathsf{E}\xi^2 \cdot \cancel{\mathsf{E}1^2}^{\,1}} < +\infty$. Осталось заметить, что $\left|\mathsf{E}(\xi_n - \xi)\right| \leqslant \mathsf{E}|\xi_n - \xi| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2 \cdot E1^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Пункт 3.

$$\mathsf{E}(\xi_n^2 - \xi^2) = \mathsf{E}(\xi_n + \xi)(\xi_n - \xi) \leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi_n + \xi)^2(\xi_n - \xi)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\big(\underbrace{2\mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2}_{\to 0} + \underbrace{8\mathsf{E}\xi^2}_{=\text{const}} \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\xi_n^2 - \xi^2)}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Остается доказать четвертый пункт леммы:

$$\mathsf{E}(\xi_n\eta - \xi\eta) = \mathsf{E}(\xi_n\eta_n - \xi_n\eta) + \mathsf{E}(\xi_n\eta - \xi\eta) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi^2 \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\eta_n - \eta)^2}_{\to 0}} + \sqrt{\mathsf{E}\eta^2 \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Случайные блуждания и закон повторного логарифма

Пусть $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathsf{E}\xi_n = 0, \mathsf{E}\xi_n^2 = \sigma^2$.

Определение. Случайная величина $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ называется случайным блужданием.

Известно (из Ц.П.Т.), что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$, а $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\xi_n^2}{n\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n\ln^2 n} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда почти наверное $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\xi_n}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ сходится почти наверное, значит, по лемме Кронекера,

$$\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ln k \frac{\xi_k}{\sqrt{k}\ln k} = \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Определение. Функция $\varphi^* = \varphi^*(n)$, $n > 1$ называется верхней для S_n, если $S_n(\omega) < \varphi^*(n)$ почти наверное для всех n, начиная с некоторого $n_0(\omega)$.

Определение. Функция $\varphi_* = \varphi_*(n)$, $n > 1$ называется нижней для S_n, если $S_n(\omega) > \varphi_*(n)$ почти наверное для бесконечно многих n (бесконечно часто).

То есть $\varphi^*(n) = \varepsilon\sqrt{n}\ln n$ — верхняя для произвольного случайного блуждания, $\varphi_*(n) = \varepsilon\sqrt{n}$ — нижняя. Пусть $\varphi(n)$ — «точная асимптотика», возьмем $\varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi^*; \varphi_{*\varepsilon} = (1-\varepsilon)\varphi$ для $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n}\frac{S_m}{\varphi(m)} \leqslant 1\right\} =$$
$$= \left\{\forall\varepsilon > 0 \text{ и некоторого } n_\varepsilon : \sup_{m\geqslant n_\varepsilon}\frac{S_n}{\varphi(m)} \leqslant 1+\varepsilon\right\} =$$
$$= \big\{\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall m \geqslant n_\varepsilon : S_m \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(m)\big\} \quad\Leftrightarrow\quad (1+\varepsilon)\varphi(m) \text{ — верхняя.}$$

Аналогично,

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n}\frac{S_m}{\varphi(m)} \geqslant 1\right\} =$$
$$= \big\{\forall\varepsilon > 0 \text{ и для беск. многих } n_\varepsilon : S_m \geqslant (1-\varepsilon)\varphi(m)\big\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)\varphi(m) \text{ — нижняя.}$$

Отметим, $\forall\varepsilon > 0 : \varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi$ — верхняя $\quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right) = 1.$

Аналогично, $\forall\varepsilon > 0 : \varphi^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)\varphi$ — нижняя $\quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right) = 1.$

Теорема (закон повторного логарифма (ЗПЛ))**.** *[б/д] Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\mathsf{E}\xi_1 = 0, \mathsf{E}\xi_1^2 = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} = 1\right) = 1, \varphi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n\ln\ln n}.$$

Замечание. Применяя ЗПЛ к S_n, получаем, что $\mathsf{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\varphi(n)} = -1\right) = 1.$

За нижнюю ветку S_n выходит бесконечно часто (см. Рис. 1), а за верхнюю лишь конечное число раз (почти наверное не выходит).

Характеристические функции

Определение. Характеристическое функцией случайной величины ξ называется $\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$.

Определение. Пусть $F(x)$ — функция распределения, тогда ее характеристическая функция $\varphi_F(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dF(x)$.

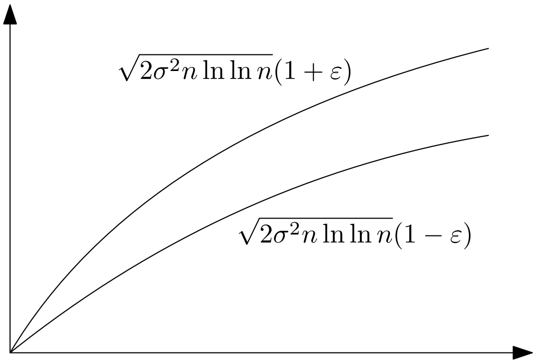


Рис. 1: Поведение верхней и нижней функции случайного блуждания

Если $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, то характеристические функции ξ и F_ξ совпадают.

По формуле Эйлера $\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \mathsf{E}\cos(t\xi) + i\mathsf{E}\sin(t\xi)$.

Определение. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор. Его характеристической функцией называется $\varphi_{\vec{\xi}}\left(\vec{t}\right) = \mathsf{E}e^{i\left(\vec{t},\vec{\xi}\right)}, t \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $F\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — функция распределения в $\mathbb{R}^n$, тогда его характеристической функцией называется $\varphi_F\left(\vec{t}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\left(\vec{t},\vec{x}\right)}\, dF\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Свойства характеристических функций

Свойство 1. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$.*

▲ $|\varphi(t)| = |\mathsf{E}e^{it\xi}| \leqslant \mathsf{E}|\underbrace{e^{it\xi}}_{\equiv 1}| = 1 = \varphi(0)$. ■

11 Лекция от 28.04.2018

Свойство 2. *Пусть $\varphi(t)$ —характеристическая функция случайной величины ξ, а $\eta = a\xi + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, тогда $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$.*

▲ $\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb}Ee^{ita\xi} = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$. ■

Свойство 3. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ —независимые случайные величины, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \Rightarrow \varphi_{S_n}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$.*

▲ $\varphi_{S_n}(t) = Ee^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} = E\prod\limits_{k=1}^{n} e^{it\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} Ee^{it\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$. ■

Свойство 4. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция, тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$*

▲ $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E\overline{\overline{e^{-it\xi}}} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$. ■

Свойство 5. *Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

▲ Рассмотрим $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leqslant E|e^{it\xi}| \cdot |e^{ih\xi} - 1| = E|\xi^{ih\xi} - 1|$. При $h \to 0$ выполнено $e^{ih\xi} - 1 \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ по теореме о наследовании сходимости. $\forall h |e^{ih\xi} - 1| \leqslant |e^{ih\xi}| + 1 = 2,\ E2 < +\infty \Rightarrow$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $E|e^{ih\xi} - 1| \to E0 = 0$. Следовательно, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна. ■

Теорема (единственности (д-во позже))**.** *Пусть F и G — функции распределения, такие что $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow F(x) = G(x)\ \forall x$.*

Свойство 6. *Пусть $\varphi_\xi(t)$ —характеристическая функция случайной величины ξ, $\varphi(t)$ принимает действительные значения $\Leftrightarrow$ ξ имеет симметричное распределение.*

▲ ($\Leftarrow$) Пусть распределение ξ —симметрично, тогда $E(\sin(t\xi)) = E(\sin(t(-\xi))) = -E(\sin(t\xi)) = 0$. Значит $\varphi_\xi(t) = E\cos t\xi + iE\sin t\xi = E\cos t\xi \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$. Тогда по свойствам 2 и 3 $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t) \Rightarrow \xi$ и $-\xi$ имеют одиаковую характеристическую функцию $\Rightarrow$ $\xi \overset{d}{=} -\xi$ по теореме единственности. ■

Свойство 7.

Теорема (о производных х.ф.)**.** *Пусть $E|\xi|^n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall k \leqslant n\ \exists \varphi_\xi^{(k)}(t)$, причём*

1. $\varphi_\xi^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dF(x)$
2. $E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$
3. $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$

$|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n,\ \varepsilon_n(t) \to 0,\ t \to 0.$

▲

1. Рассмотрим $\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = \frac{Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)}{h}$. при $h \to 0$ $\frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$, кроме того, $\left|\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right| \leqslant |\xi|$ почти наверное, так как хорда меньше дуги. По теореме о мажорируемой сходимости $\lim\limits_{n \to 0} E\frac{e^{ih\xi} - 1}{h} e^{it\xi} = \varphi_\xi'(t) = E(i\xi \cdot e^{it\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}} ixe^{itx} dF_\xi(x)$. Доказательство формулы для $\varphi^{(k)}$ аналогично.

2. Из пункта 1, $E\xi^n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k dF_\xi(x) = \frac{1}{i^k}\int\limits_{\mathbb{R}}(ix)^k e^{i0x}dF(x) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$.

3. Ряд Тейлора $e^{i\eta} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(i\eta)^k}{k!} + \frac{(i\eta)^n}{n!}(\cos\theta_1 y + i\sin\theta_2 y)$, $|\theta_1| \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$, тогда $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos\theta_1 t\xi + i\sin\theta_2 t\xi)\right] = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$, где $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n\cdot[\cos\theta_1 t\xi + i\sin(\theta_2 t\xi) - 1]) \Rightarrow \varepsilon_n(t) \leqslant 3E|\xi|^n$; $|\xi^n[\cos(\theta_1 t\xi) + i\sin(\theta_2 t\xi) - 1]| \leqslant 3|\xi|^n$ и $\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) - 1 + \underbrace{\sin(\theta_2 t\xi)}_{\to 0}) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $t \to 0 \Rightarrow$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\varepsilon_n(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

$\blacksquare$

Свойство 8 (б/д). *Если существует и конечна $\varphi^{(2n)}(0)$, то $E|\xi|^{2n} < +\infty$.*

Теорема (о разложении х.ф. в ряд). *Пусть ξ случайная величина, такая что $E|\xi|^n < +\infty$ $\forall n$. Если для некоторого $T > 0$ выполнено $\overline{\lim\limits_n}\left(E\frac{|\xi|^n}{n!}\right) < \frac{1}{T}$, то $\forall t : |t| < T$ выполнено $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}E\xi^n$.*

$\blacktriangle$ Пусть t_0 такое, что $|t_0| < T$, тогда $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} E\left(\frac{|\xi|^n\cdot|t_0|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|t_0|}{T} < 1$, следовательно, по признаку Коши-Адамара сходимости рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{E|\xi|^n\cdot|t_0|^n}{n!}$ сходится. Рассмотрим $|t| \leqslant |t_0| : \varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \underbrace{\frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)}_{R_n(t)}$ $\quad(*)$.

$R_n(t) \leqslant 3\cdot\frac{|t|^n}{n!}\cdot E|\xi|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ по условию теоремы. Устремляя $n \to +\infty$ в $(*)$, получаем $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(it)^k}{k!}E\xi^k$. В силу произвольности $|t_0| < T$, разложение верно $\forall t \in (-T, T)$. $\blacksquare$

Пример. Пусть $\xi \sim N(0;1) \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Мы знаем, что $E\xi^m = \begin{cases}(m-1)!!, & m\,\vdots\,2\\ 0, & m \not\vdots\, 2\end{cases}$

$E|\xi|^m = \begin{cases}(m-1)!!, & m\,\vdots\,2\\ (m-1)!!\sqrt{\frac{2}{n}}, & m \not\vdots\, 2\end{cases}$ $\Rightarrow$ по предыдущей теореме, $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!}(2n-1)!! = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n\frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Условие теоремы: $\left(\frac{E|\xi|^m}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{(m-1)!!}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{m!!}\right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \sim \frac{C}{\sqrt{m}} \to 0 \Rightarrow T = +\infty$.

Теорема (формула обращения (б/д)). *Пусть $\varphi(t)$ характеристическая функция функции распределения F. Тогда*

1. *Для* $\forall a < b$ *(точки непрерывности)* F *выполнено* $F(b)-F(a) = \frac{1}{2\pi}\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_{-c}^{c}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\varphi(t)dt$

2. *Если* $\int\limits_{\mathbb{R}}|\varphi(t)|dt < +\infty$, *то у функции распределения* $F(x)$ *существует плотность* $f(x)$ *и* $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-tx}\varphi(t)dt$.

12 Лекция от 05.05.2018

Теорема (единственности)**.** *Пусть* F *и* G *— функции распределения, такие что* $\varphi_{F(x)} = \varphi_{G(x)} \Rightarrow F(x) = G(x)\ \forall x$.

▲ Пусть $a < b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $f_\varepsilon(x)$(шапочка). Докажем, что $\forall\varepsilon > 0\ \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)df(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)$. Рассмотрим отрезок $[-n,n]$ такой, что $[a,b+\varepsilon]\subset[-n,n]$. По теореме Вейерштрасса-Стоуна, $f_\varepsilon(x)$ сколь угодно точно приближается тригонометрическими многочленами от $\frac{\pi x}{n}$, так как $f_\varepsilon(x)$ непрерывна и периодична на $[-n,n]$ с периодом $2n$.
$\Rightarrow \forall n\ \exists f_\varepsilon^n(x) = \sum\limits_{k\in K} a_k\cdot e^{\frac{ik\pi x}{n}},\ a_k\in\mathbb{R}$, K — конечное подмножество $\mathbb{Z}$, такое, что $\forall x\in[-n,n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$. f_ε^n —периодическая с периодом $2n$. Поскольку $|f_\varepsilon(x)| < 1$ и $\forall x\in[-n,n] : |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{1}{n}$, то $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2\ \forall x$. По условию, $\int e^{itx}dF(x) = \int e^{itx}dG(x) \Rightarrow \int f_\varepsilon^n(x)dF(x) = \int f_\varepsilon^n(x)dG(x)$.

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x)\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dF(x) + \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dG(x) + (\underbrace{1-F(n)}_{\to0} + \underbrace{F(-n)}_{\to0} + \underbrace{1-G(n)}_{\to0} + \underbrace{G(-n)}_{\to0}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{n} + o(1) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 : \int f_\varepsilon(x)dF(x) = \int f_\varepsilon(x)dG(x).$$

При $\varepsilon\to 0 f_\varepsilon(x)\to I_{[a,b]}(x)$, при этом $|f_\varepsilon(x)|\leqslant 1\ \forall x\in\mathbb{R}$. По теореме Лебега о мажорировании сходимости(рассматриваем $f_\varepsilon(x)$ как набор случайных величин на $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),P_f)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})))$. $\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x)\to\int\limits_{\mathbb{R}} I_{[a,b]}dF(x) = F(b)-F(a)$. Аналогично, для функции распределения G $\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x) \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} G(b)-G(a) \Rightarrow \forall a < b\ F(b)-F(a) = G(b)-G(a)$. Полагая $a = (-\infty)$, получаем требуемое. ■

Теорема (критерий назависимости)**.** *Пусть* $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. *Тогда* $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ *— назависимые в совокупности* $\Leftrightarrow \varphi_{\vec{\xi}(\vec{t})} = \prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_i}(t_i)\ \forall\vec{t} = (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$.

▲ ($\Rightarrow$) $\varphi_{\vec{\xi}(\vec{t})} = Ee^{i(\vec{t},\vec{\xi})} = Eei^{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\xi_k} \overset{\text{нез-сть}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} Ee^{it_k\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_x}(t_k)$.

($\Leftarrow$) Пусть $F_k(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_k. Пусть $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x)$ — это функция распределения. Посчитаем её характеристическую функцию: $\varphi_G(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t},\vec{x})} dG(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(\vec{t},\vec{x})} dF_1(x_1) \cdot \ldots \cdot dF_n(x_n)$ =(по теореме Фубини) $\prod\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it_kx_k} dF_k(x_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) \overset{\text{по усл}}{=} \varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) \Rightarrow$ характеристическая функция G и $\vec{\xi}$ совпадают $\Rightarrow$ по теореме единственности $F_\xi = G \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \prod\limits_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k) \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности по критерию независимости в терминах функции распределения. ■

Проверка того, что φ —характеристическая функция

Определение. Функция $\varphi(t)$ является неотрицательно определённой, если $\forall n \; \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_k \overline{z_j} \geqslant 0$.

Теорема (Бохнера-Хинчина). *Пусть $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ —характеристическая функция $\Leftrightarrow$ $\varphi(t)$ неотрицательно определённая.*

▲ ($\Rightarrow$) $\varphi(t)$ — характеристическая функция, проверим неотрицательность:

$$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \; \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$
$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{j,k=1}^{n} Ee^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \overline{z_k} =$$
$$= E \sum_{k,k=1}^{n} e^{it_j\xi} \cdot z_j \cdot \overline{e^{et_k\xi}} \cdot \overline{z_k} = E \left| \sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi} z_j \right|^2 \geqslant 0$$

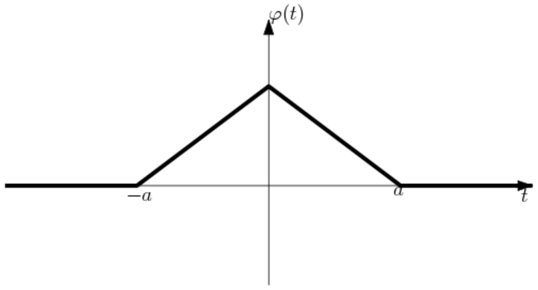
($\Leftarrow$) [б/д] ■

Следствие. *Если $\varphi(t) = \psi(t)$ — характеристическая функция, $\alpha \in (0, 1)$, то $\alpha\varphi(t) + (1 - \alpha)\psi(t)$ — характеристическая функция.*

▲ Все три условия из теоремы Бохнера-Хинчина выполнены. ■

Теорема (Пойа(б/д)). *Пусть непрерывная, чётная и выпуклая вниз на $(0; +\infty)$ функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция.*

Пример. Любая функция вида



является характеристической.

Теорема (Марцинкевича(б/д)). *Если характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид* $\exp(P(t))$, *где* $P(t)$ *— полином, то степерь этого полинома* $\leqslant 2$ $(\deg P(t) \leqslant 2)$.

Пример. e^{-t^n} не является характеристической функцией.

Определение. Последовательность функций $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$, если $\forall f(x)$ — непрерывна и ограничена, то верно $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)df_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$. Обозначение $F_n \xrightarrow{w} F$. $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F)$.

Теорема (нерперывности для х.ф.).
1. Пусть $\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность функций распределения на* $\mathbb{R}$*, тогда* $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$*, где* φ *— характеристическая функция* F.
2.(б/д) Пусть $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \varphi(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t)$*, причём* $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле. Тогда* $\exists F$ *— функция распределения такая, что* $F_n \xrightarrow{w} F$ *и* φ *—характеристическая функция* F.

▲ Знаем, что $\forall f$ — непрерывной ограниченной функции : $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$. Но функции $\sin tx$ и $\cos tx$ непрерывны и ограничены $\Rightarrow \varphi_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}}(\cos tx + i\sin tx)dF_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}}(\cos tx + i\sin tx)dF(x) = \varphi(t)$. ■

Центральная предельная теорема

Теорема (ЦПТ в форме Леви). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределённые случайные величины,* $0 < D\xi < +\infty$*. Обозначим* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$*. Тогда* $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}} N(0,1)$.

▲ Обозначим $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$. Рассмотрим случайные величины $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \Rightarrow E\eta_i = 0;\ D\eta_i = 1$. Тогда $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим характеристическую функцию η_i: по свойствам характеристической функции $\varphi(t) \equiv \varphi_{\eta_i}(t) = 1 + it\underbrace{E\eta_j}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{E\eta_j^2}_{1} \cdot (it)^2 + o(t^2 = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ t \to 0$. Отсюда, $\varphi_{T_n}(t) =$

$\varphi_{\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j}(t) \overset{\text{св-ва х.ф.}}{=} \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{=} e^{-\frac{t^2}{2}}$.Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ — характеристическая функция $N(0,1)$ $\Rightarrow$ (по т. непрерывности) $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$. ■

13 Лекция от 12.05.2018

Теорема (Линдберга). *[б/д] Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — независимые случайные величины, $E\xi_k^< +\infty$ $\forall k$, обозначим $m_k = E\xi_k$, $\sigma_k^2 = D\xi_k > 0 : S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $D_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ и $F_k(x)$ — функция распределения ξ_k. Пусть выполнено условие Линдберга, то есть:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n\}}(x-m_k)^2 dF_k(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1), n\to\infty$.

Когда выполнены условия Линдберга?

1. Пусть выполнено условие Ляпунова, то есть

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{n}E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для некоторого $\delta > 0$, тогда выполнено условие Линдберга.

▲

$$E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} = \int\limits_{\mathbb{R}}|x-m_k|^{2+\delta}dF_k(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}|x-m_k|^{2+\delta}dF_k(x) \geqslant \varepsilon^\delta D_n^\delta \int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon D_n}|x-m_k|^2 dF_k(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \geqslant \frac{\varepsilon^\delta}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n\}}|x-m_k|^2 dF_k(x).$$

■

2. Из условий теоремы Леви вытекает условие Линдберга.

▲ Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $+\infty > D\xi_1 = \sigma^2 > 0,\ E\xi_1 = a \Rightarrow$

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-a|>\varepsilon D_n\}}|x-a|^2 dF_k(x) =$$
$$= \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\{x:|x-a|>\varepsilon D_n\}}|x-a|^2 dF_1(x) =$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{|x-a|>\varepsilon\sqrt{n}\sigma}|x-a|^2 dF_1(x) \to 0,\ \text{т.к. } \{x : |x-a| > \varepsilon\sqrt{n}\sigma\} \to \varnothing;$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}}|x-a|^2 dF_1(x) < +\infty.$$

■

3. Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ —независимые случайные величины, $|\xi_k| \leqslant K;\ D_n \to +\infty$. Тогда
$$\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon D_n}(x-m_k)^2 dF_k(x) =$$
$$= E((\xi_k - m_k)^2 \cdot T(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n)) \leqslant (2k)^2 EI(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n) =$$
$$= (2k)^2 P(|\xi_k - m_k| > \varepsilon D_n),$$
то по неравенству Чебышева это не превосходит
$$(2k)^2\frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2}.$$
Рассмотрим сумму
$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x:|x-m_k|>\varepsilon D_n}|x-m_k|^2 dF_k(x) \leqslant \frac{(2k)^2}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 D_n^2} = \frac{(2k)^2}{\varepsilon^2 D_n^2} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Замечание. Условие Линдберга является необходимым и достаточным условием для справедливости ЦПТ. При выполнении условия бесконечной малости слагаемых:
$$\max_{a<x\leqslant n} P\left(\frac{|\xi_k - m_k}{D_n} \geqslant \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Теорема (Берри-Эссена(б/д))**.** *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *— независимые одинаково распределённые случайные величины,* $E|\xi_i|^3 < +\infty,\ E\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2,\ S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i;\ T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. *Тогда*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C\cdot\frac{E|\xi_T a|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},\ \textit{где } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < C < 0,48,$$

где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Гауссовские случайные векторы

Определение. Случайные вектор $\vec{\xi} \sim N(m, \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp\left(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t}, \vec{t})\right)$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, Σ — симметричная неотрицательно определённая матрица.

Определение. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{B}$,где $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — независимые и $\sim N(0, 1)$.

Определение. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайная величина (λ, ξ) имеет нормальное распределение.

Теорема (об эквивалентности определений гауссовских векторов)**.** *Предыдущие определения эквивалентны.*

▲

1. Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 2. Пусть $\varphi_\xi(t) = e^{i(t, \vec{m} - (Rt,t))}$. Так как матрица R — симметричная и неотрицательно определённая, то $\exists S$ — ортогональная, такая что

$$S^T R S = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ & & d_k & & \\ & \text{\Large 0} & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, d_i > 0.$$

Определим $$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & \\ & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_k}} & & \\ & \text{\Large 0} & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ в таком случае}$$

$$\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$ Рассмотрим $(S\tilde{D})^T \vec{\xi}$ и его характеристическую функцию. $\varphi_{(S\tilde{D})^T\vec{\xi}}(\vec{t}) = \varphi_{\vec{\xi}}((S\tilde{D})\vec{t})$, так как

$$\varphi_{(S\tilde{D})^T\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T\vec{\xi})} = \exp(i((S\tilde{D})\vec{t}, \vec{m}) - \frac{1}{2}(R(S\vec{\tilde{D}})\vec{t}, (S\vec{\tilde{D}})\vec{t})) =$$

$$= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T\vec{m}) - \frac{1}{2}\underbrace{(\tilde{D}^T S^T R S \tilde{D}\vec{t}, \vec{t})}_{=\sum\limits_{i=1}^{k} t_i^2}] =$$

$$= \exp[i(\vec{t}, (S\tilde{D})^T\vec{m}) \prod_{i=1}^{k} \varphi_{\eta_i}(t_i)],$$

$\eta_i \sim N(0;1)$ и независимы по теореме единственности и теореме независимости в терминах характеристической функции $\Rightarrow$ вектор $\vec{\eta} = (S\tilde{D})^T(\vec{\xi} - \vec{m})$ — искомый, так как $\vec{\xi} = ((S\tilde{D})^T)^{-1}\vec{\eta} + \vec{m}$.

2. Опр 2 $\Rightarrow$ Опр 3. Если $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, то $\vec{\lambda}, \vec{\xi} = (\vec{\lambda}, A\vec{\eta}) + (\vec{\lambda}, \vec{b}) = \underbrace{\lambda^T A_\eta}_{\text{сл. вел.}} + \underbrace{\lambda^T b}_{\text{число}}$ — линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин. $\Rightarrow$ то есть имеем нормальное распределение.

3. Опр 3 $\Rightarrow$ Опр 1. Пусть $(\xi; \lambda)$ — нормально распределённая случайная величина, тогда её характеристическая функция $Ee^{i(\xi,\lambda)t} = e^{iE(\xi,\lambda)t - \frac{D(\xi,\lambda)t^2}{2}}$. Подставим $t = 1 \Rightarrow Ee^{i(\xi,\lambda)} = e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k E\xi_k - \frac{1}{2}\sum\limits_{k,l=1}^{n}\lambda_k\lambda_l \operatorname{cov}(\xi_k,\xi_l)} = \exp(i(\vec{\lambda}, E\vec{\xi}) - \frac{1}{2}(R\vec{t}, \vec{t})),\ R = \operatorname{Var}\vec{\xi}$.

■

Свойства гауссовских векторов

Свойство 1. *Если $\xi \sim N(a, \Sigma)$, то $\vec{a} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix}$ — вектор средних, Σ — матрица ковариаций.*

▲ Аналогично пункту 3 предыдущей теоремы. ■

Свойство 2. *Пусть $\vec{\xi} \sim N(a, \Sigma)$,тогда ξ_i независимы $\Leftrightarrow$ Σ — диагональна.*

▲ Заметим, что характеристическая функция ξ_j равна $\varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{et_j a_j - \frac{1}{2}\sigma_{jj}^2 t_j^2}$, нужно подставить $\vec{t} = (0\ldots 0, t, 0\ldots 0)$. Тогда $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_j}(t_j) = e^{i(\vec{a},\vec{t}) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{jj}^2 t_j^2} \Leftrightarrow \Sigma$ — диагональна. ■

Свойство 3 (Коши)**.** *Гауссовские вектора — нормальные случайные величины.*

▲ Следует из определения 3 для $\lambda_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. ■

Свойство 4. *$\vec{\xi}$ — гауссовский $\Rightarrow$ любое его линейное преобразование — гауссовский вектор.*

▲ Пусть $\vec{\chi} = B\vec{\xi} + \vec{c}$. По второму определению гауссовского вектора, $\vec{\chi} = B(A\vec{\eta} + \vec{b}) + \vec{c} = BA\vec{\eta} + B\vec{b} + \vec{c}$, отсюда $\vec{\chi}$ — гауссовский по определению 2. ■

Свойство 5. *Пусть $\vec{\xi}$ — гауссовский. Тогда его коспоненты независимые $\Leftrightarrow$ они некоррелированны.*

▲ $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — попарно некоррелированны $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, $i \neq j$ $\Leftrightarrow$ Σ — диагонально $\Leftrightarrow$ по свойству 2 компоненты $\vec{\xi}$ независимы в совокупности. ■

14 Лекция от 19.05.2018

Свойство 6 (Явный вид плотности многомерного нормального распределения)**.** *Если $\vec{\xi} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ и $\mathrm{const}(\Sigma) = n$, то $\vec{\xi}$ имеет плотность в $\mathbb{R}^n$.*

▲ Так как $\mathrm{const}\,\Sigma = n \Rightarrow \exists A = \Sigma^{-1}$. Обозначим $f(x) = \frac{|A|^{1/2}}{(2n)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(A(x-m),(x-m)),\vec{x}\in\mathbb{R}^n}$. Достаточно показать, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t},\vec{x})} f(x)dx = e^{i(\vec{t},\vec{m}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t},\vec{t})}$, тогда f — плотность $\vec{\xi}$. Обозначим $I_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{f},\vec{x}-\vec{m})} \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}A(\vec{x}-\vec{m},\vec{x}-\vec{m})} dx$. Хотим доказать, что $I_n = e^{-\frac{1}{2}(\Sigma\vec{t},\vec{t})}$. Мы знаем, что $\exists S$ — ортогональная, такая что

$$S^T\Sigma S = D = \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}, d_i > 0,$$

так как Σ не вырожденная, тогда $|A| = |\Sigma^{-1}| = \frac{1}{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n}$. Сделаем замену: $\vec{x} - \vec{m} = S\vec{u}; \vec{t} = S\vec{v}$. Тогда $i(\vec{t}, \vec{x} - \vec{m}) - \frac{1}{2}(A(\vec{x} - \vec{m}), \vec{x} - \vec{m}) = i(S\vec{v}, S\vec{u}) - \frac{1}{2}(AS\vec{u}, S\vec{u}) = i\vec{v}^T \underbrace{S^T S_n}_{E_n} - \frac{1}{2}\vec{u}^T \underbrace{S^T AS}_{D^{-1}} u = i\vec{v}^T\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}^T D^{-1}\vec{u}$. В итоге,

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(d_1 \cdot \ldots \cdot d_n)^{1/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{v},\vec{u}) - \frac{1}{2}\vec{u}^T D^{-1}\vec{u}} \cdot J \cdot du =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\pi d_k)^{1/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iv_k u_k - \frac{1}{2}\frac{u_k^2}{d_k}} du_k = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{-v_k^2 d_k}{2}} =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T D\vec{v}} = e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T S^T\Sigma S\vec{v}} = e^{-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma t},$$

где $J = |S| = 1$ — якобиан. $e^{-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma t}$ — характеристическая функция $\vec{\xi} \Rightarrow f(x)$ — плотность $\vec{\xi}$. ■

Многомерная ЦПТ

Теорема (Многомерная ЦПТ)**.** *Пусть $|\vec{x}_i|_{i\geqslant 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные вектора, $\mathsf{E}\vec{x}_i = \vec{a}$, $\mathrm{Var}\,\vec{x}_i = \Sigma$, тогда $\sqrt{n}\left(\frac{\vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_n}{n} \to \vec{a}\right) \xrightarrow{d} N(\vec{0}, \Sigma)$, $n \to +\infty$.*

Замечание. Сходимость векторов по распределению вводится аналогично обычной сходимости случайной величины по распределению, то есть $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно ограниченных $\mathsf{E}f(\vec{x}_n) \to \mathsf{E}f(\vec{x})$.

▲ Рассмотрим характеристическую функцию $\varphi_{k,n}(t) = \mathsf{E}\exp\left(i\left(t, \frac{x_k - a}{\sqrt{n}}\right)\right)$ и $\varphi_n(t) = \mathsf{E}\exp\left(i\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}}, t\right)\right) = \prod\limits_{k=1}^{n}\varphi_{k,n}(t)$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\vec{x}_k$. Для доказательства достаточно убедиться, что $\varphi_n(t) \to e^{-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}$. Заметим, что $\varphi_{k,n}(t) = \varphi_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, где $\xi = (\vec{x}_k - \vec{a}, \vec{t})$. Для $\varphi_\xi(S)$ верно представление (по теореме о производной характеристической функции) $\varphi_\xi(S) = 1 + S\varphi'_\xi(0) + \frac{S^2}{2}\varphi''_\xi(0) + o(S^2), S \to 0. \mathsf{E}\xi = 0, \mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi\cdot\xi = \vec{t}^T\mathsf{E}(\vec{x}_k - \vec{a})(\vec{x}_k - \vec{a})^T\vec{t} = \vec{t}^T\Sigma\vec{t} \Rightarrow \varphi_\xi(S) = 1 - \frac{S^2}{2}\vec{t}^T\Sigma t + o(S^2), S \to 0 \Rightarrow \varphi_{k,n}(t) = \varphi_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}{2n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty$. Тогда $\varphi_n(t) = \prod\limits_{k=1}^{n}\varphi_{k,n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}\vec{t}^T\Sigma\vec{t} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma t\right)$. ■