

# Конспект лекций по курсу «Теория вероятностей»

Лектор: к. ф.-м. н. Родионов Игорь Владимирович

Набор: Алексей Шепелев

## Содержание

<b>1 Лекция от 10.02.2018</b>	<b>2</b>
Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой . . . . .	4
<b>2 Лекция от 17.02.2018</b>	<b>5</b>
Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . . . . .	5
Многомерная плотность вероятности . . . . .	6
Случайные величины . . . . .	6
Действия над случайными величинами и векторами . . . . .	6
Характеристики случайных величин и векторов . . . . .	8
<b>3 Лекция от 03.03.2018</b>	<b>8</b>
<b>4 Лекция от 10.03.2018</b>	<b>8</b>
Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки . . . . .	10
<b>5 Лекция от 17.03.2018</b>	<b>11</b>
Дисперсия и ковариация . . . . .	11
Свойства ковариации и дисперсии . . . . .	12
Многомерный случай . . . . .	13
Неравенства . . . . .	13
Условные математические ожидания (УМО) . . . . .	14
<b>6 Лекция от 24.03.2018</b>	<b>15</b>
Свойства УМО . . . . .	15
<b>7 Лекция от 31.03.2018</b>	<b>17</b>
Условные распределения . . . . .	17
Алгоритм подсчета УМО . . . . .	20
Виды сходимости случайных величин . . . . .	20

8	Лекция от 07.04.2018	22
	Контрпримеры . . . . .	22
9	Лекция от 14.04.2018	25
10	Лекция от 21.04.2018	29
	Сходимость в $L_2$ . . . . .	30
	Случайные блуждания и закон повторного логарифма . . . . .	30
	Характеристические функции . . . . .	32
	Свойства характеристических функций . . . . .	33
11	Лекция от 28.04.2018	33

## 1 Лекция от 10.02.2018

Будем обозначать вероятностное пространство как  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

1.  $\Omega$  — пространство элементарных исходов;
2.  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра на  $\Omega$ ;
3.  $P$  — вероятностная,  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , причем
  - а)  $P(\Omega) = 1$ ;
  - б)  $P$  —  $\sigma$ -аддитивна, то есть  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$ , причем  $A_n \cap A_m = \emptyset$  при  $n \neq m$ :
 
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

**Определение.** Последовательность  $\{A_n\}$  убывает к  $A$ , если  $\forall n : A_n \supseteq A_{n+1}$  и  $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ . Последовательность  $\{A_n\}$  возрастает к  $A$ , если  $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ .

**Теорема** (о непрерывности вероятностной меры). Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — измеримое пространство и на нем определена функция  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая следующим свойствам:  $P(\Omega) = 1$  и  $P$  — конечно аддитивная. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $P$  — вероятностная мера;
2.  $\forall A \downarrow A : P(A_n) \rightarrow P(A)$  (непрерывность снизу);
3.  $\forall A \uparrow A : P(A_n) \rightarrow P(A)$  (непрерывность сверху);
4.  $\forall A \downarrow \emptyset : P(A_n) \rightarrow 0$  (непрерывность в нуле).

**Теорема** (Каратеодори). [б/д] Пусть  $\Omega$  — некоторое множество,  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра на  $\Omega$  и  $P_\sigma$  — вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Тогда существует единственная вероятностная мера на  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ , являющаяся продолжением  $P_\sigma$ , то есть  $\forall A \in \mathcal{A} : P_\sigma(A) = P(A)$ .

Рассмотрим измеримое пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  и вероятностную меру  $P$  на нем.

**Определение.** Функция  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , заданная по правилу  $F(x) = P((-\infty, x])$  — функция распределения вероятностной меры  $P$ .

**Лемма** (свойство функции распределения). Пусть  $F(x)$  — функция распределения, тогда

1.  $F(x)$  не убывает;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;
3.  $F(x)$  непрерывна справа.

▲ Пусть  $y \geq x$ , тогда  $F(y) - F(x) = P((-\infty, y]) - P((-\infty, x]) = P((x, y]) \geq 0$ , следовательно,  $F(x)$  не убывает.

Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , тогда  $(-\infty, x_n] \rightarrow \emptyset$ , следовательно,  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  по теореме о непрерывности вероятностной меры.

Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , тогда  $(-\infty, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ , следовательно,  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$ .

Пусть  $x_n \downarrow x$ , тогда  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ , отсюда по теореме о непрерывности вероятностной меры вытекает, что  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$ . ■

**Свойство 1.** Функция распределения имеет предел слева  $\forall x \in \mathbb{R}$ , при этом число точек разрыва не более, чем счетно.

▲ Пусть  $x_n \rightarrow x - 0$  — возрастающая последовательность, тогда  $F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x_n]) = F(x - 0)$ . Каждая точка разрыва — скачок функции распределения, каждому скачку сопоставим  $[F(x - 0), F(x)]$ , а этому отрезку в свою очередь сопоставим некую рациональную точку, которая лежит в  $(F(x - 0), F(x))$ . Следовательно каждому скачку мы сопоставили точку из  $\mathbb{Q}$ , а так как  $\mathbb{Q}$  счетно, то число разрывов не более, чем счетно. ■

**Определение.** Функция  $F(x)$ , которая удовлетворяет свойствам 1) – 3) из леммы, называется функцией распределения на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема** (о взаимно однозначном соответствии между вероятностной мерой и функцией распределения на  $\mathbb{R}$ ). Пусть  $F(X)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ , тогда существует единственная вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  такая, что  $F(x)$  является ее функцией распределения, то есть  $F(x) = P((-\infty, x])$ .

▲ Рассмотрим полукольцо  $S = \{(a, b]\}$  на  $\mathbb{R}$ . Определим  $\sigma$ -аддитивную вероятностную меру  $P((a, b]) = F(b) - F(a)$ , а по теореме  $P$  единственным образом продолжается на всю  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . ■

## Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

### ① Дискретное распределение

Пусть  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  не более, чем счетно.

**Определение.** Вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , удовлетворяющая свойству  $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$ , называется дискретной вероятностной мерой на  $\mathcal{X}$ , ее функция распределения также называется дискретной.

Рассмотрим  $\mathcal{X} = \{x_k\}$ , положим  $p_k = P(\{x_k\})$ , тогда  $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum_k P(x_k)$ .

**Определение.** Набор чисел  $\{p_k\}$  на называется распределением вероятностей на  $\mathcal{X}$ .

### ② Абсолютно непрерывное распределение

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$ , причем  $\forall x \in \mathbb{R}$  верно  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ , где  $p(t) \geq 0$ , а  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$ . Тогда  $P$  абсолютно непрерывна,  $F(x)$  также называется абсолютно непрерывной, а  $p(t)$  — плотность распределения  $F(x)$ . Причем  $p(t)$  определена однозначно, кроме множества меры нуль.

**Примеры:**

1. Равномерное распределение  $R[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I(x \in [a, b]).$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение  $N(a, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

3. Экспоненциальное распределение  $\text{Exp}(\alpha)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot I(x > 0).$$

4. Распределение Коши  $\text{Cauchy}(\theta)$

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2 + \theta^2)}.$$

5. Гамма распределение  $\Gamma(\alpha, \gamma)$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\gamma x} \cdot I(x > 0).$$

**Определение.**  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ , причем  $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \Gamma(\lambda \pm 1) = \lambda \Gamma(\lambda)$ , а  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

### ③ Сингулярные распределения

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется точкой роста  $F(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0 : F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$ .

**Определение.** Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль. Например, функция Кантора.

**Теорема** (Лебега о функции распределения). *[б/д] Пусть  $F(x)$  — функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда существуют единственные  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ ,  $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  и функции распределения  $F_1(x), F_2(x)$  и  $F_3(x)$  такие, что  $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$ , где  $F_1(x)$  — дискретная функция распределения,  $F_2(x)$  — абсолютно непрерывная, а  $F_3(x)$  — сингулярная.*

## 2 Лекция от 17.02.2018

### Вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

**Определение.** Пусть  $P$  — вероятностная мера в  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , тогда функция  $F(\vec{x}) = P((-\infty; x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$  называется функцией распределения вероятностной меры  $P$  в  $\mathbb{R}^n$ .

*Замечание.* Пусть  $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ . Будем писать  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , если  $\forall i, k : x_i^{(k)} \geq x_i(k+1)$  и  $x_i^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_i$ .

**Лемма** (Свойства многомерной функции распределения). Пусть  $F(\vec{x})$  — функция распределения вероятностной меры в  $\mathbb{R}^n$ , тогда

1. Если  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , то  $F(\vec{x}^{(k)}) \rightarrow F(\vec{x}), k \rightarrow +\infty$ ;
2.  $\lim_{\forall i: x_i \rightarrow +\infty} F(\vec{x}) = 1; \lim_{\exists x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$ ;
3.  $\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, \Delta_{a_1 b_1}^1, \dots, \Delta_{a_n b_n}^n, F(x) > 0 :$   
 $\Delta_{a_i b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$

▲

1. Следует из непрерывности вероятностной меры, так как  $\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i^{(k)}] \downarrow \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i]$ ;

$$2. B_n \rightarrow C_n = \bigcap_{i=1}^n \left( -\infty, \inf_{k \geq n} x_i^{(k)} \right], P(B_n) \rightarrow P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если  $\exists i : x_i^{(k)} \rightarrow -\infty$ , то  $B_n \rightarrow \emptyset, P(B_n) \rightarrow 0$ ;

$$3. \dots = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \\ \Delta_{a_1 b_1}^1 \Delta_{a_2 b_2}^2 F(x) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2))$$

■

**Теорема** (О взаимнооднозначном соответствии вероятностной меры и функции распределения в  $\mathbb{R}^n$ ). [б/д] Если функция  $F(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет свойствам из леммы, то существует единственная  $P$  в  $\mathbb{R}^n$ , для которой  $F(\vec{x})$  является функцией распределения.

*Замечание.* Почему нельзя заменить свойство 3) на монотонность на любом компакте? Пусть  $F(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$  на  $[0, 1]^2$ , но тогда  $-1 = \Delta_{0,1}^1 \Delta_{0,1}^2 F(x_1, x_2) = ?$   $P([0, 1]^2) = 1$ .

**Определение.** Функция  $F(\vec{x})$ , удовлетворяющая условиями из леммы называется функцией распределения в  $\mathbb{R}^n$ .

## Многомерная плотность вероятности

**Определение.** Если

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad p(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

то  $p(x_1, \dots, x_n)$  называется  $n$ -мерной плотностью вероятности. Тогда

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

## Случайные величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства. Отображение  $X : \Omega \rightarrow E$  — случайный элемент, если  $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1} \in \mathcal{F}$   $\mathcal{F}$ -измеримо или  $\mathcal{F}|\mathcal{E}$ -измеримо.

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , то это случайная величина.

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , то это случайный вектор.

## Действия над случайными величинами и векторами

**Определение.** Функция  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — борелевская, если  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Утверждение.** Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция — борелевская.

**Теорема** (критерий измеримости). [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства,  $X : \Omega \rightarrow E$  — случайный элемент тогда, и только тогда, когда существует система событий  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ , такая что  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$  и  $\forall B \in \mathcal{M} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

**Лемма.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — борелевская функция, тогда  $\varphi(\vec{\xi})$  — случайный вектор.

▲ Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$(\varphi(\vec{\xi}))^{-1}(B) = \{\omega : \varphi(\vec{\xi}(\omega)) \in B\} = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in \varphi^{-1}(B) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\} \in \mathcal{F}.$$

■

**Лемма.**  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор тогда, и только тогда, когда  $\forall i : \xi_i$  — случайная величина.

▲ *Необходимость.*  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i$  — непрерывная функция, значит борелевская, следовательно, по предыдущей лемме  $\xi_i$  — случайная величина.

*Достаточность.*  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , поэтому  $\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times \dots \times B_n\} = \{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, \dots, \xi_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega : \xi_i(\omega) \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^n \xi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$ , значит, по критерию измеримости,  $\vec{\xi}$  — случайный вектор.

■

**Следствие.** Пусть  $\xi, \eta$  — случайные величины,  $c \in \mathbb{R}$ , тогда  $\xi + \eta, \xi - \eta, c\xi, \xi \cdot \eta$  и  $\xi/\eta$ , если  $\forall \omega \in \Omega : \eta \neq 0$  тоже случайные величины.

**Лемма** (О пределах случайной величины). Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  последовательность случайных величин, тогда, если пределы  $\overline{\lim} \xi_n, \underline{\lim} \xi_n, \inf \xi_n, \sup \xi_n$  существуют, они являются случайными величинами.

▲  $\{\omega : \sup \xi_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ . По критерию измеримости, так как  $\sigma(x : (-\infty, x]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , мы доказали, что  $\sup \xi_n$  — случайная величина.

Аналогично,  $\{\omega : \inf \xi_n > x\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi_k(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$ , так как  $\sigma((x, +\infty)) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , по критерию измеримости  $\inf \xi_n$  — случайная величина. Отсюда  $\overline{\lim} \xi_n = \inf_n \sup_{m \geq n} \xi_m$  и  $\underline{\lim} \xi_n = \sup_n \inf_{m \geq n} \xi_m$  тоже случайные величины. ■

**Следствие.** Пусть  $\xi = \lim \xi_n$  и предел существует  $\forall \omega \in \Omega$ , тогда  $\xi$  — случайная величина.

▲  $\xi = \lim \xi_n = \overline{\lim} \xi_n = \underline{\lim} \xi_n$  ■

## Характеристики случайных величин и векторов

### ① Распределение случайной величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $\xi$  — случайная величина (вектор) на нем. Распределением случайной величины называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))((\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)))$ , заданная по правилу  $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ( $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ).

### ② Функция распределения случайной величины

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $\xi$  — случайная величина (вектор) на нем. Функцией распределения  $\xi$  называется  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$  ( $F_\xi(\vec{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$ ).

### ③ Дискретность и непрерывность

**Определение.** Случайная величина называется дискретной, если ее распределение дискретно.

**Определение.** Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если ее распределение абсолютно непрерывно, т.е. ....

## 3 Лекция от 03.03.2018

Свойство 1.

Свойство 2.

Свойство 3.

Свойство 4.

Свойство 5.

Свойство 6.

## 4 Лекция от 10.03.2018

**Свойство 7.** Если  $\xi = \eta$  почти наверное и  $E|\eta| < +\infty$ , то  $E|\xi| < +\infty$  и  $E\xi = E\eta$ .

▲ Пусть  $A = \{\xi \neq \eta\}$ , тогда  $I_A = 0$  почти наверное, следовательно  $\xi \cdot I_A = 0$  почти наверное и  $\eta \cdot I_A = 0$  почти наверное. Так как  $\xi = \xi \cdot I_A + \xi \cdot I_{\bar{A}}$ , то  $\xi = \xi \cdot I_A + \eta \cdot I_{\bar{A}}$ , потому что на  $\bar{A}$  выполняется  $\xi = \eta$ . Из свойства 6 имеем  $E\xi = E(\xi \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E(\eta \cdot I_A) + E(\eta \cdot I_{\bar{A}}) = E\eta$ . ■

**Свойство 8.** Пусть  $\xi \geq 0$  и  $E\xi \geq 0$ , тогда  $\xi = 0$  почти наверное.



▲ Рассмотрим события  $A = \{\xi > 0\}$  и  $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$ , следовательно,  $A_n \uparrow A$ . Имеем  $P(A_n) = EI_{A_n}$ , так как  $n\xi > 1$  на  $A_n$ , то  $EI_{A_n} \leq E(n\xi \cdot I_A) \leq nE\xi = 0$ , значит,  $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ . ■

**Свойство 9.** Пусть  $E\xi$  и  $E\eta$  конечны,  $\forall A \in \mathcal{F} : E(\xi \cdot I_A) \leq E(\eta \cdot I_A)$ . Тогда  $\xi \leq \eta$  почти наверное.

▲ Рассмотрим событие  $B = \{\xi > \eta\}$ . Из условия и построения  $B$  получаем, что  $E(\eta \cdot I_B) \leq E(\xi \cdot I_B) \leq E(\eta \cdot I_B)$ , следовательно,  $E(\xi \cdot I_B) = E(\eta \cdot I_B)$ , значит  $E((\xi - \eta) \cdot I_B) = 0$ . Так как  $(\xi - \eta) \cdot I_B \geq 0$ , то по свойству 8  $(\xi - \eta) \cdot I_B = 0$  почти наверное, следовательно  $I_B = 0$  почти наверное, потому что  $\xi - \eta > 0$  на  $B$ . ■

**Теорема** (о математическом ожидании произвольной случайной величины). Пусть  $\xi \perp \eta$ , причем  $E\xi$  и  $E\eta$  конечны, тогда  $E\xi\eta$  конечно и  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ .

▲ Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — простые случайные величины, то есть  $\xi$  принимает значения  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\eta$  принимает значения  $\{y_1, \dots, y_n\}$ . Тогда по линейности

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \sum_{k,j=1}^n x_k y_j P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k) \sum_{j=1}^n y_j P(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\xi_n \uparrow \xi$ ,  $\xi_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leq \xi \leq \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(\xi > n)$ , следовательно,  $\xi_n = \varphi_n(\xi)$ , значит,  $\xi_n$  —  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримая. Пусть  $\xi, \eta \geq 0$ . Существует последовательность  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримых ( $\mathcal{F}_\eta$ -измеримых) простых неотрицательных простых функций  $\xi_n \uparrow \xi$  ( $\eta_n \uparrow \eta$ ). Так как  $\xi \perp \eta$ , то  $\xi_n = \varphi_n(\xi) \perp \varphi_n(\eta) = \eta_n$ . Следовательно,  $\xi_n \cdot \eta_n \uparrow \xi \cdot \eta$ , а по определению математического ожидания  $E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\xi_n \eta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$ .

Пусть теперь  $\xi$  и  $\eta$  — произвольные случайные величины.  $\xi^+$  и  $\xi^-$  — функции от  $\xi$ ,  $\eta^+$  и  $\eta^-$  — функции от  $\eta$ , следовательно,  $\xi^+ \perp \eta^+$  и  $\xi^- \perp \eta^-$ , отсюда  $(\xi\eta)^+ = \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^-$  значит,  $E(\xi\eta)^+ = E\xi^+ \eta^+ + E\xi^- \eta^- = E\xi^+ E\eta^+ + E\xi^- E\eta^-$ , аналогично  $E(\xi\eta)^- = E\xi^+ \eta^- + E\xi^- \eta^+ = E\xi^+ E\eta^- + E\xi^- E\eta^+$ . Осталось заметить, что  $E\xi\eta = E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+ E\eta^+ + E\xi^- E\eta^- - E\xi^+ E\eta^- - E\xi^- E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = E\xi \cdot E\eta$ . ■

Пусть  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I(\xi = x_i)$  — простая случайная величина. Тогда  $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta F_\xi(x_i)$ , где  $\Delta F_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0)$ .

**Теорема** (о замене переменной в интеграле Лебега).  $[6/\partial]$  Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  — два измеримых пространства и  $X = X(\omega) = \mathcal{F}|\mathcal{E}$ -измеримая функция со значениями в  $E$ , то есть  $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Пусть  $P$  — вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $P_X$  — вероятностная мера на  $(E, \mathcal{E})$ , заданная по правилу  $P_X(A) = P(\omega : X(\omega) \in A)$  для  $A \in \mathcal{E}$ . Тогда для любой

$\mathcal{E}$ -измеримой функции  $g(x), x \in E$ , то есть  $\forall B \in \mathcal{E} : g^{-1}(B) \in E$ , верно,  

$$\int_A g(x) P_X(dx) = \int_{X^{-1}(A)} g(X(\omega)) P(d\omega).$$

Пусть  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ , в таком случае вероятностная мера  $P_\xi$  однозначно восстанавливается по  $F_\xi$ , следовательно, по теореме  $Eg(\xi) = \int g(\xi) dP = \int g(x) P_\xi(dx) = \int g(x) dF_\xi(x)$ .

Пусть  $\xi$  — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $p_\xi(x)$ , тогда  $dF_\xi(x) = p_\xi(x)$ , следовательно  $Eg(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) p_\xi(x) dx$ .

## Прямое произведение вероятностных пространств и формула свертки

**Определение.** Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  — два вероятностных пространства. Тогда  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — их прямое произведение, если

1.  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ;
2.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , то есть  $\mathcal{F} = \sigma\{\{B_1 \times B_2\} | B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$ ;
3.  $P = P_1 \otimes P_2$ , то есть  $P$  — продолжение вероятностной меры  $P_1 \times P_2$ , заданное на прямоугольнике  $B_1 \times B_2, B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2$  по правилу  $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$ . Так как  $\{B_1 \times B_2\}$  — полукольцо, то  $P$  существует и единственна по теореме Каратеодори.

**Теорема (Фубини).** [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — прямое произведение вероятностных пространств  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ . Пусть  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\int_{\Omega} |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$ . Тогда интегралы  $\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1)$  и  $\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2)$  определены почти наверное относительно  $P_2$  и  $P_1$  соответственно, являются измеримыми случайными величинами относительно  $\mathcal{F}_2$  и  $\mathcal{F}_1$ , следовательно,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2) + \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) P_1(d\omega_1).$$

Из всего этого следует, что двойной интеграл равен повторному.

**Утверждение.** Пусть  $\xi \perp \eta$  — случайные величины, тогда  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{(\xi, \eta)}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$ .

▲ Достаточно проверить свойство прямого произведения:

1.  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
2.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  по определению борелевской  $\sigma$ -алгебры в  $\mathbb{R}^2$ ;
3.  $P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2)$ . ■

**Лемма** (о свертке). Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы с функциями распределения  $F_\xi$  и  $F_\eta$ . Тогда

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x).$$

Если  $\xi$  и  $\eta$  имеют плотности распределения  $f_\xi$  и  $f_\eta$  соответственно, то  $\xi + \eta$  имеет плотность распределения

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x)f_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x)f_\xi(x) dx$$

▲ Заметим,  $F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi+\eta \leq z)$ , а по теореме о замене переменных в интеграле Лебега это равно  $\int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z) P_\xi(dx) P_\eta(dy)$ , полученный двойной интеграл по Фубини можно записать как повторный:

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} I(x+y \leq z) P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{z-y} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y).$$

Перейдем ко второму пункту доказательства:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z) P_\xi(dx) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z) f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy \stackrel{t=x+y}{=} \\ &\stackrel{t=x+y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} I(t \leq z) f_\xi(x) f_\eta(t-x) dx dt = \int_{-\infty}^z \left( \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x) f_\eta(t-x) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению плотности,  $f_{\xi+\eta} = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x) f_\eta(t-x) dx$ . ■

## 5 Лекция от 17.03.2018

### Дисперсия и ковариация

**Определение.** Дисперсией случайной величины  $\xi$  называется  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ , если  $E\xi < +\infty$ . Очевидно,  $D\xi \geq 0$ .

**Определение.** Ковариация двух случайных величин называется  $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$ . Легко заметить, что  $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$ . Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными.

**Определение.** Величина  $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$  называется коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  при условии, что  $D\xi$  и  $D\eta$  не равны нулю и конечны.

## Свойства ковариации и дисперсии

**Свойство 1** (Билинейность ковариации).  $\text{cov}(a\xi + b\zeta, \eta) = a \text{cov}(\xi, \eta) + b \text{cov}(\zeta, \eta)$

**Свойство 2.**  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta \Rightarrow D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

▲  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E((E\xi) \cdot \eta) - E((E\eta) \cdot \xi) + E\xi \cdot E\eta = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$  ■

**Свойство 3.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$ , тогда  $D(c\xi) = c^2 D\xi$ ,  $D(\xi + c) = D\xi$ ,  $Dc = 0$ .

▲  $D(c\xi) = E c^2 \xi^2 - (E c \xi)^2 = c^2 E \xi^2 - c^2 (E \xi)^2 = c^2 D\xi$ ;  
 $D(c + \xi) = E(c + \xi - E(c + \xi))^2 = E(c + \xi - c - E\xi)^2 = D\xi$ ;  
 $Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = 0$ . ■

**Свойство 4** (Неравенство Коши-Буняковского).  $|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 \cdot E\eta^2$

▲ Рассмотрим для  $\lambda \in \mathbb{R}$  функцию  $f(\lambda) = E(\xi - \lambda\eta)^2 \geq 0$ . Имеем  $f(\lambda) = E\xi^2 + 2\lambda E\xi\eta + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0$ . Для выполнения неравенства дискриминант полученного многочлена должен быть меньше нуля:  $D = 4E\xi\eta - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$ , откуда следует неравенство. ■

**Свойство 5.**  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ , причем  $\rho(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$  почти наверное.

▲ Рассмотрим случайные величины  $\xi_1 = \xi - E\xi$  и  $\eta_1 = \eta - E\eta$ , следовательно  $\rho(\xi, \eta) = \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\eta_1^2}} \leq 1$  по неравенству Коши-Буняковского. Пусть  $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ , тогда дискриминант  $D = 0$ , следовательно,  $\exists! \lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$ , то есть  $E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$ , отсюда  $(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$  почти наверное, а, значит, и  $\xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0$  почти наверное. Теперь можно заключить, что  $\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta)$ . ■

**Свойство 6.** Если  $\xi \perp \eta$ , то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , обратное неверное.

▲  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ , но так как  $\xi \perp \eta$ , то  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ , следовательно,  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ . ■

**Лемма.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — попарно некоррелированные случайные величины (например, независимые в совокупности),  $D\xi_1, \dots, D\xi_n < +\infty$ , тогда  $D(\xi_1, \dots, \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$ .

▲ 
$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

По условию, если  $i \neq j$ , то  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ , следовательно

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i.$$

■

## Многомерный случай

**Определение.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор, тогда его математическим ожиданием называется вектор из математических ожиданий его компонент, то есть  $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$ .

**Определение.** Матрицей ковариаций случайного вектора  $\vec{\xi}$  называется

$$\text{Var } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \eta_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_1, \eta_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \eta_1) & \cdots & \text{cov}(\xi_n, \eta_n) \end{pmatrix} = \|\text{cov}(\xi_i, \eta_j)\|_{i,j=1}^n.$$

**Лемма.** Матрица ковариаций случайного вектора — симметрическая и неотрицательно определенная<sup>1</sup>.

▲ Матрица  $\text{Var } \vec{\xi} = \|\text{cov}(\xi_i, \eta_j)\|_{i,j=1}^n$  — симметрическая, так как  $r_{ij} \equiv \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i) \equiv r_{ji}$ . Пусть  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , тогда

$$\begin{aligned} \vec{x}^T \text{Var } \vec{\xi} \vec{x} &= (\vec{x}, \text{Var } \vec{\xi} \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov} \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) = \text{cov} \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = D \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) \geq 0. \end{aligned}$$

■

## Неравенства

**Лемма (Неравенство Маркова).** Пусть  $\xi \geq 0$  — случайная величина,  $E\xi < +\infty$  (существует). Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$ .

▲  $P(\xi \geq \varepsilon) = EI(\xi \geq \varepsilon)$ . На множестве  $\xi \geq \varepsilon$  случайная величина  $\frac{\xi}{\varepsilon} \geq 1$ , следовательно  $EI(\xi \geq \varepsilon) \leq E \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \cdot I(\xi \geq \varepsilon) \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot E\xi$ . ■

**Лемма (Неравенство Чебышёва).** Пусть  $\xi$  — случайная величина такая, что  $D\xi < +\infty$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ .

▲  $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2)$ . Из неравенства Маркова имеем, что  $P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ . ■

**Лемма (Неравенство Йенсена).** Пусть  $g(x)$  — борелевская выпуклая вниз (вверх) функция и  $E\xi < +\infty$ . Тогда  $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$  ( $Eg(\xi) \leq g(E\xi)$ ).

<sup>1</sup>Матрица  $A$  неотрицательно определена, если  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$

▲ Так как  $g(x)$  выпукла вниз, то  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$ . Положим  $x = \xi$  и  $x_0 = E\xi$ , тогда  $g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$ , считая математическое ожидание от обеих частей неравенства, получаем  $Eg(\xi) \geq g(E\xi) + 0$ . ■

**Определение.** Пусть  $\xi$  и  $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$  — случайные величины, тогда  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  сходится по вероятности, если  $\forall \varepsilon > 0 : P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

**Теорема** (Закон больших чисел в форме Чебышёва). Пусть  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$  — последовательность попарно некоррелированных случайных величин таких, что  $\forall n \in \mathbb{N} : D\xi_n \leq C$ . Обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ , тогда  $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

▲ По неравенству Чебышёва  $P\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon \geq \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2\varepsilon^2}$ , по свойству дисперсии о сдвиге это равно  $\frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2}$ . Применяя лемму о дисперсии суммы, получаем  $\frac{\sum_{i=1}^n D\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0$ . ■

**Следствие.** Пусть  $\{\xi_n\}_{i=1}^{+\infty}$  — независимые случайные величины такие, что  $\forall n \in \mathbb{N} : D\xi_n \leq C \wedge E\xi_n = a$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

## Условные математические ожидания (УМО)

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство;  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная величина;  $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\xi$ . Если  $\mathcal{G}$  — под  $\sigma$ -алгебра  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ , то  $\xi$  называется  $\mathcal{G}$ -измеримой, если  $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{G}$ .

**Определение.** Пусть  $\xi$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathcal{G}$  — под  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$ . Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно  $\mathcal{G}$  называется случайная величина  $E(\xi|\mathcal{G})$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $E(\xi|\mathcal{G})$  является  $\sigma$ -измеримой случайной величиной;
2.  $\forall A \in \mathcal{G} : E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)$  или, что тоже самое,  $\int_A \xi dP = \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP$ .

Обозначаем  $E(\xi|\eta) \equiv E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$ , если такая  $\eta$  существует.

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство. Функция множеств  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  — заряд (мера со знаком), если  $\nu$  —  $\sigma$ -аддитивна на  $\mathcal{F}$ , то есть  $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$  для  $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{F}$ , ряд в правой части сходится абсолютно и  $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$ .

**Определение.** Заряд  $\nu$  называется абсолютно непрерывным относительно меры  $P$ , если  $\forall A \in \mathcal{F} : (P(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$ .

**Теорема** (Радона-Никодима). [б/д] Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  — вероятностное пространство,  $\nu$  — заряд на  $\mathcal{F}$ , абсолютно непрерывный относительно меры  $\mathbf{P}$ . Тогда существует и единственна случайная величина  $\eta$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  такая, что  $E\eta < +\infty$  и  $\nu(A) = \int_A \eta d\mathbf{P} = E\eta \cdot I_A$ .

## 6 Лекция от 24.03.2018

**Лемма** (о существовании УМО). Пусть  $\xi$  — случайная величина с  $E|\xi| < +\infty$ . Тогда  $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  (под-алгебра) :  $E(\xi|\mathcal{G})$  существует и единственна почти наверное.

▲ Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ . Положим, что  $\forall A \in \mathcal{G} : Q(A) = \int_A \xi d\mathbf{P} = E(\xi \cdot I_A)$ , следовательно,  $Q(A)$  — заряд на  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ , абсолютно непрерывный относительно меры  $\mathbf{P}$ . Тогда по теореме Радона-Никодима существует и единственна почти наверное случайная величина  $\eta$  на  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$  с  $E\eta < +\infty$  такая, что  $Q(A) = \int_A \eta d\mathbf{P}$ . Значит,  $\eta$  — УМО. Действительно,  $\eta$   $\mathcal{G}$ -измерима и  $\forall A \in \mathcal{G} : \int_A \eta d\mathbf{P} = \int_A \xi d\mathbf{P}$ . ■

**Теорема.** Пусть  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G}$  порождена разбиением  $\Omega \setminus \{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , причем,  $\mathbf{P}(D_n) > 0$ . Тогда, если  $E\xi < +\infty$ , то  $E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\xi \cdot I(D_n))}{\mathbf{P}(D_n)} \cdot I(D_n)$ .

▲ Пусть  $\eta$   $\mathcal{G}$ -измерима. Покажем, что  $\eta = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}(\omega)$ . Пусть  $\eta \neq \text{const}$  на  $D_n$ , тогда  $\exists a \neq b : \{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n \neq \emptyset$  и  $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq \emptyset$ , следовательно,  $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \cap D_n = D_n$  и  $\{\omega : \eta(\omega) = b\} \cap D_n \neq D_n$ , иначе  $\{\omega : \eta(\omega) = a\} \notin \mathcal{G}$ , то есть  $\eta$  не  $\mathcal{G}$ -измерима. Получили противоречие.

Найдем  $c_n : E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n I_{D_n}$ , так как  $E(\xi|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -измерима по определению.

$$E(\xi \cdot I_{D_n}) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}) = E\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m I_{D_m} I_{D_n}\right) = E(c_n I_{D_n}) = c_n \mathbf{P}(D_n).$$

Следовательно,  $c_n = \frac{E(\xi \cdot I_{D_n})}{\mathbf{P}(D_n)}$ . ■

### Свойства УМО

**Свойство УМО:** если  $\forall A \in \mathcal{F} : E(\xi \cdot I_A) = E(\eta \cdot I_A)$ , то  $\xi = \eta$  г.ч.т. наверное на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Свойство 1.** Если  $\xi$   $\mathcal{G}$ -измерима, то  $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$  почти наверное.

▲  $\xi$  удовлетворяет свойствам УМО: первому по условию, а второму, поскольку  $\int_A \xi dP = \int_A \xi dP$ . Следовательно,  $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$  почти наверное. ■

**Свойство 2** (формула полной вероятности).  $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E\xi$ .

▲ Так как  $\Omega \in \mathcal{G}$ , то по интегральному свойству  $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_\Omega) = E(\xi \cdot I_\Omega) = E\xi$ . ■

**Свойство 3** (линейность).  $E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ .

▲  $\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -измерима. Осталось проверить интегральное свойство:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} : \int_A (\alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})) dP &= \alpha \int_A E(\xi|\mathcal{G}) dP + \beta \int_A E(\eta|\mathcal{G}) dP = \\ &= \alpha \int_A \xi dP + \beta \int_A \eta dP = \int_A (\alpha\xi + \beta\eta) dP = \int_A E(\alpha\xi + \beta\eta) dP \end{aligned}$$

■

**Свойство 4.** Пусть  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{G}$ , то есть  $\mathcal{F}_\xi \perp \mathcal{G}$ . Тогда  $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$  почти наверное.

▲ Пусть  $\xi \perp \mathcal{G}$ , что равносильно  $\forall A \in \mathcal{G} : \xi \perp I_A$ .  $E\xi$  — константа, следовательно, она измерима относительно  $\mathcal{G}$ , так как  $\mathcal{F}_{E\xi} = \{\Omega, \emptyset\}$ . Интегральное свойство УМО:  $E(\xi \cdot I_A) = \boxed{E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A)} = E\xi \cdot P(A) = \boxed{E(E\xi \cdot I_A)}$ , следовательно,  $E\xi = E(\xi|\mathcal{G})$ . ■

**Свойство 5.** Пусть  $\xi \leq \eta$  почти наверное, тогда  $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$  почти наверное.

▲  $\xi \leq \eta$  почти наверное, следовательно,  $\forall A \in \mathcal{G} \int_A \xi dP \leq \int_A \eta dP$ , что равносильно  $\int E(\xi|\mathcal{G}) dP \leq \int E(\eta|\mathcal{G}) dP$ , а из свойств математического ожидания вытекает, что  $E(\xi|\mathcal{G}) \leq E(\eta|\mathcal{G})$  почти наверное. ■

**Свойство 6.**  $|E(\xi|\mathcal{G})| \leq E(|\xi||\mathcal{G})$ .

▲  $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$ . ■

**Свойство 7** (телескопическое свойство). Пусть  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ , тогда

1.  $E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$  почти наверное,
2.  $E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$  почти наверное.



▲ (1)  $E(\xi|\mathcal{G}_1)$   $\mathcal{G}_2$ -измерима, следовательно, по первому свойству  $E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$ . (2) Пусть  $A \in \mathcal{G}_1$ , следовательно,  $A \in \mathcal{G}_2$ .

$$E(E(\xi|\mathcal{G}_1) \cdot I_A) = E(\xi \cdot I_A) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2) \cdot I_A) = E(E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) \cdot I_A).$$

По свойству математического ожидания  $E(\xi|\mathcal{G}_1) = E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$ . ■

**Свойство 8.** [б/д] Пусть  $\forall n > 1 : |\xi_n| \leq \eta$ ,  $E\eta < +\infty$  и  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$ . Тогда  $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F} : E(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi|\mathcal{G})$ .

**Свойство 9.** Пусть  $\eta$   $\mathcal{G}$ -измерима,  $E|\xi\eta| < +\infty$ ,  $E|\xi| < +\infty$ ,  $E|\eta| < +\infty$ . Тогда  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное.

▲ Пусть  $\eta = I_B$ , где  $B \in \mathcal{G}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{G} : E(E(\xi\eta|\mathcal{G}) \cdot I_A) &= E(\xi\eta \cdot I_A) = E(\xi I_B I_A) = \\ &= E(\xi I_{A \cap B}) = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{A \cap B}) = E(\eta E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_A). \end{aligned}$$

Следовательно,  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное по свойству математического ожидания.

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для любой простой функции. Теперь пусть  $\eta$  — произвольная случайная величина. Возьмем последовательно простых  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримых случайных величин  $\eta_n : |\eta_n| \leq |\eta|$  и  $\eta_n \xrightarrow{n.n.} \eta$ . По свойству 8  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) \xrightarrow{n.n.} E(\xi\eta_n|\mathcal{G})$ , то есть  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi\eta_n|\mathcal{G})$ , то есть  $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$  почти наверное. ■

**Теорема** (о наилучшем квадратичном прогнозе). Пусть  $\xi$  — случайная величина,  $\mathcal{G}$  — под-алгебра  $\mathcal{F}$ . Обозначим  $\mathcal{A}_\mathcal{G} = \{\eta | \eta - \mathcal{G}\text{-измеримая сл. вел.}\}$ . Тогда  $\inf_{\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}} E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$ .

▲ Пусть  $\eta \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$ , тогда

$$\begin{aligned} E(\xi - \eta)^2 &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}) + E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 = \\ &= E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 + 2E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)). \end{aligned}$$

Пусть  $\varkappa \equiv \xi - E(\xi|\mathcal{G})$ ,  $\psi \equiv E(\xi|\mathcal{G}) - \eta$ . Рассмотрим  $E(\varkappa\psi)$ , по свойству 2 это равно  $E(E(\varkappa\psi|\mathcal{G}))$ , а по свойству 3, это можно переписать, как  $E(\psi E(\varkappa|\mathcal{G}))$ . Но  $E(\varkappa|\mathcal{G}) = E((\xi - E(\xi|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) = 0$ , следовательно,  $E(\varkappa\psi) = 0$ . Значит  $E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2 + E(E(\xi|\mathcal{G}) - \eta)^2 \geq E(\xi - E(\xi|\mathcal{G}))^2$ . ■

## 7 Лекция от 31.03.2018

### Условные распределения

**Определение.** Пусть  $A \in \mathcal{F}$ , тогда по определению  $P(A|\mathcal{G}) = E(I_A|\mathcal{G})$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ . Если  $\xi, \eta$  — случайные величины на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , то  $E(\xi|\eta) = E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$ .

**Определение.** Величиной  $E(\xi|\eta = y)$  называется такая борелевская функция  $\varphi(y)$ , что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ .

**Лемма.** Если  $E\xi$  существует, то  $E(\xi|\eta = y)$  существует и единственно почти наверное относительно  $P_\eta$ .

▲ Рассмотрим  $\psi(B) = E(\xi \cdot I(\eta \in B))$  — заряд на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$ , потому что  $\psi(B)$   $\sigma$ -аддитивна по свойству интеграла Лебега и конечна, так как  $E(\xi) < +\infty$ .  $\psi$  абсолютно непрерывна относительно  $P_\eta$ , так как если  $P_\eta(B) = 0$ , то  $I(\eta \in B) = 0$  почти наверное, следовательно,  $E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = 0$ , а, значит, выполнены условия теоремы Радона-Никодима, то есть существует и единственна почти наверное случайная величина  $\varphi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$  (борелевская функция) такая, что  $\psi(B) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ . ■

**Лемма.**  $E(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$  тогда и только тогда, когда  $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$  почти наверное.

▲ Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , тогда  $E(E(\xi|\eta) \cdot I(\eta \in B)) = E(\xi \cdot I(\eta \in B)) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$ .

По теореме о замене переменных в интеграле Лебега это можно переписать, как  $\int_{\{\eta \in B\}} \varphi(\eta) dP = E(\varphi(\eta) \cdot I(\eta \in B))$ , что равносильно условию  $E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$  почти наверное по Свойству. Обратно аналогично, по тем же равенствам. ■

**Следствие.** Пусть  $\xi$  —  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримая случайная величина, тогда существует борелевская функция  $\psi(x)$  такая, что  $\xi = \psi(x)$  почти наверное.

▲ Так как  $\xi$  —  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримая, то по свойству 1  $\xi = E(\xi|\eta)$  почти наверное. С другой стороны, так как существует единственная  $\psi(x) : \psi(x) = E(\xi|\eta = x)$ , то  $\xi = E(\xi|\eta) = \psi(\eta)$ . ■

**Определение.** Условным распределением случайной величины  $\xi$  при условии  $\eta = y$  называется вероятностная мера  $P(\xi \in B|\eta = y) = E(I(\xi \in B)|\eta = y)$ . Является мерой на  $\mathcal{B}(R)$ .

**Определение.** Условной плотностью случайной величины  $\xi$  относительно  $\eta$  называется плотность условного распределения  $P(\xi \in B|\eta = y)$ , то есть функция  $f_{\xi|\eta}(x|y)$  такая, что  $P(\xi \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx$ .

**Теорема** (о свойстве условной плотности). Пусть существует условная плотность случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$   $f_{\xi|\eta}(x|y)$ . Тогда для любой борелевской функции  $g(x)$  такой, что  $E|g(x)|$  существует, выполнено  $E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx$  относительно  $P_\eta$  почти наверное.

▲ Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , пусть также  $g(x) = I_A(x)$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx &= \int_{\mathbb{R}} I_A(x) \cdot f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \int_A f_{\xi|\eta}(x|y) dx = \\ &= P(\xi \in A | \eta = y) = E(I(\xi \in A) | \eta = y) = E(g(\xi) | \eta = y). \end{aligned}$$

Так как доказали для индикаторов, то доказали и для всех простых функций  $g(x)$ . Далее с помощью теоремы Лебега для условных математических ожиданий доказываем для всех  $g(x)$ .  $(E(\xi_n | \eta) \xrightarrow{\text{п.п.}} E(\xi | \eta))$ , где  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.п.}} \xi$ ,  $\xi_n$  — простые) ■

**Теорема** (о виде условной плотности). Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины такие, что существует их совместная плотность  $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$ . Пусть  $f_{\eta}(y)$  — плотность случайной величины  $\eta$ , тогда функция

$$\varphi(x, y) = \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, y)}{f_{\eta}(y)} \cdot I(f_{\eta}(y) > 0)$$

есть условная плотность  $f_{\xi|\eta}(x|y)$ .

▲ Для любых  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  выполнено

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{B \times A} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_B \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, y)}{f_{\eta}(y)} dx \right) f_{\eta}(y) dy,$$

с другой стороны

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = E(I(\xi \in B, \eta \in A)) = \int_{\{\eta \in A\}} I(\xi \in B) dP.$$

Далее по интегральному свойству получаем, что

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_{\{\eta \in A\}} E(I(\xi \in B) | \eta) dP,$$

заменяя переменные, окончательно имеем следующее:

$$\begin{aligned} P(\xi \in B, \eta \in A) &= \int_A E(I(\xi \in B | \eta = y) P_{\eta}(dy)) = \\ &= \int_A P(\xi \in B | \eta = y) P_{\eta} dy = \int_A P(\xi \in B | \eta = y) f_{\eta}(y) dy. \end{aligned}$$

■

## Алгоритм подсчета УМО

1. Найти совместную плотность  $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$ , затем  $f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y) dx$ , тогда условная плотность  $f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}$ .
2. Вычислить  $\varphi(y) = E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_{\xi|\eta}(x|y) dx$ .
3. Тогда  $E(g(x)|\eta) = \varphi(\eta)$ .

## Виды сходимости случайных величин

**Определение.** Последовательность  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  сходится к случайной величине  $\xi$

1. по вероятности ( $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 : P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,
2. почти наверное ( $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ ), если  $P(\omega : \xi_n \rightarrow \xi) = 1$ ,
3. в  $L_p$  ( $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$ ), если  $E|\xi_n|^p < +\infty$ ,  $E|\xi|^p < +\infty$  и  $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ( $p > 0$ ),
4. по распределению ( $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ), если для любой непрерывной ограниченной функции  $f(x)$  выполнено  $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$ .

**Теорема (Александрова).**  $[\partial/\partial] \xi_n \xrightarrow{d} \xi$  тогда только тогда, когда  $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{\text{в основном}} F_\xi(x)$ , то есть  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x)$  во всех точках непрерывности функции распределения  $F_\xi(x)$ .

**Лемма** (критерий сходимости почти наверное).  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▲ Пусть  $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ ,  $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon = \{\omega : \forall n \exists k \geq n : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ .

Тогда  $\{\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}} = \{\omega : \exists m \forall n \exists k \geq n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(\omega : \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)) &= 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : P\left(A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(A^\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

так как всегда существует  $m$ , что  $\frac{1}{m} \geq \varepsilon \geq \frac{1}{m+1}$ , то есть  $A^{\frac{1}{m+1}} \supseteq A^\varepsilon \supseteq A^{\frac{1}{m}}$ . Но  $\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon$ , следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = P(A^\varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

**Теорема** (взаимоотношения различных видов сходимости).

$$\begin{array}{c} n.н. \\ \nearrow \\ L_p \end{array} P \rightarrow d$$

▲ (п.н.  $\Rightarrow$  P)  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0$ , но

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \subset \{\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

следовательно,  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ .

( $L_p \Rightarrow$  P)  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p > \varepsilon^p)$ , а по неравенству Маркова это меньше или равно  $\frac{E|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

(P  $\Rightarrow$  d) Пусть  $f(x)$  — ограниченная непрерывная функция, тогда  $\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , возьмем  $N \in \mathbb{R} : P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$ . На отрезке  $[-N, N]$   $f(x)$  равномерно непрерывна, следовательно,

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Рассмотрим разбиение  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega : |\xi(\omega)| < N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_2 &= \{\omega : |\xi(\omega)| > N, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta\}, \\ A_3 &= \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\}. \end{aligned}$$

Оценим

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E[|f(\xi) - f(\xi_n)| \cdot (I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})] \leq$$

Пусть  $\omega \in A_1$ , тогда  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , следовательно,  $E[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I_{A_1}] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot EI_{A_1} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot P(A_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Если же  $\omega \in A_2, A_3$ , то  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$ .

$$\text{Значит, } \left[ \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(A_2) + 2C \cdot P(A_3) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot P(|\xi| > N) + 2C \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq C_1 \varepsilon. \right.$$

Следовательно,  $Ef(\xi_n) \rightarrow Ef(\xi)$ , то есть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ .

■

## 8 Лекция от 07.04.2018

### Контрпримеры

**Пример** (п.н.  $\not\Rightarrow L_p$ , а значит,  $P \not\Rightarrow L_p$  и  $d \not\Rightarrow L_p$ ). Рассмотрим  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P = \lambda$ . Пусть  $\xi_n = e^n \cdot I_{[0, \frac{1}{n}]}$ ,  $\xi = 0$ , тогда  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ , но  $E|\xi_n - \xi|^p = e^{np} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ .

**Пример** ( $L_p \not\Rightarrow$  п.н.,  $P \not\Rightarrow$  п.н.,  $d \not\Rightarrow$  п.н.). Рассмотрим  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P = \lambda$ . Возьмем  $\xi_{2^n+i} = I\left(\omega \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right)$ ,  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ ;  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда  $\xi_k \xrightarrow{L_p} 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ , так как  $E|\xi_k|^p = \frac{1}{2^n}$ , где  $n = [\log_2 k]$ . Но для любой точки из  $[0, 1]$  существует бесконечно много  $\xi_i$  таких, что  $\xi_i(\omega) = 1$  и  $\xi_i(\omega) = 0$ , следовательно,  $\forall \omega : \xi_i(\omega) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ .

**Пример** ( $d \not\Rightarrow P$ ). Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $P(\omega_i) = \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : \xi_n(\omega_1) = 1, \xi_n(\omega_2) = 0$ . Тогда  $\xi_n \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ .  $\xi(\omega_1) = 1, \xi(\omega_2) = 0$ , значит,  $\xi \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ , следовательно, по теореме Александрова  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , но  $P(|\xi_n - \xi| > 0.5) = 1$ , значит,  $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$ .

**Определение.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется фундаментальной, если  $|x_n - x_m| \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow +\infty$ .

**Теорема** (критерий Коши сходимости числовой последовательности). *[б/д] Последовательность чисел  $\{x_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда  $\{x_n\}$  фундаментальна.*

**Теорема** (критерий Коши сходимости почти наверное). *Последовательно случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится почти наверное тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}$  фундаментальна почти наверное, то есть  $P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \rightarrow 0) = 1$  при  $n, m \rightarrow +\infty$ .*

▲ ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ , тогда, если  $\omega \in \{\omega : \xi_n(\omega) - \xi(\omega)\}$ , то  $\omega \in \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$ , следовательно,  $P(\omega : \{\xi_n(\omega)\} \text{ — фундаментальная}) \geq P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Обозначим  $A = \{\omega : \{\xi_n\} \text{ — фундаментальная}\}$ . Построим такую случайную величину  $\xi$ , что  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ . По критерию Коши для любого  $\omega \in A$  у последовательности  $\{\xi_n(\omega)\}$  существует предел  $\xi(\omega)$ . Положим по определению  $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(\omega) \cdot I_A(\omega)$ . Тогда  $\xi_n \cdot I_A \rightarrow \xi$ , то есть  $\xi$  — случайная величина, как предел случайных величин, и  $P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = P(A) = 1$ . ■

**Лемма** (критерий фундаментальности почти наверное). *[б/д] Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна почти наверное тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 : P(\omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi_n(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .*

**Определение.** Пусть  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность событий, тогда событием  $\{A_n \text{ бесконечно часто (б.ч.)}\}$  называется событие  $\{\omega : \forall n \exists k \geq n : \omega \in A_k\}$ , то есть все такие  $\omega$ , что  $\omega$  принадлежит бесконечному числу элементов из  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$ .

**Лемма** (Бореля-Кантелли). 1. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$ , то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$ .

2. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$  и  $\{A_k\}$  независимы в совокупности, то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$ .

▲  $P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \equiv$ . Известно, что  $\bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow \{A_n \text{ б.ч.}\}$ , следовательно, по непрерывности вероятностной меры имеем  $\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$ .

Заметим, что  $P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcup_{k \geq n} \overline{A_k}\right)\right)$ , но

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k \geq n} \overline{A_k}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N [1 - P(A_k)] \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^N P(A_k)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right). \end{aligned}$$

■

**Теорема** (Рисса). Есть последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  фундаментальна (или сходится) по вероятности, то из нее можно выделить подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$  фундаментальную (сходящуюся) почти наверное.

▲ Пусть  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности, то есть  $\forall \varepsilon : P(|\xi_k - \xi_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$ . Докажем, что можно выделить подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$ , сходящуюся почти наверное. Пусть  $n_1 = 1$ . По индукции определим  $n_k$ , как наименьшее  $n > n_{k-1}$  такое, что  $\forall s \geq n, t \geq n : P(|\xi_t - \xi_s| > 2^{-k}) < 2^{-k}$ . Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k}) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$ , следовательно, по лемме Бореля-Кантелли  $P(|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > 2^{-k} \text{ б.ч.}) = 0$ , значит, почти наверное  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < +\infty$ . Пусть  $N = \left\{\omega : \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)| = +\infty\right\}$ , тогда  $P(N) = 0$ . Положим  $\xi(\omega) = \left(\xi_{n_1}(\omega) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\xi_{n_{k+1}}(\omega) - \xi_{n_k}(\omega))\right) \cdot I_{\overline{N}}(\omega)$ . Получаем,  $\sum_{j=1}^k (\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j}) + \xi_{n_1} = \xi_{n_{k+1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ .

Пусть теперь  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , тогда

$$P(|\xi_m - \xi_n| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, из сходимости по вероятности следует фундаментальность по вероятности, а дальше все тоже самое. ■

**Теорема** (критерий Коши сходимости по вероятности).  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности.

▲ ( $\Rightarrow$ ) Следует из теоремы Рисса.

( $\Leftarrow$ ) Если  $\{\xi_n\}$  фундаментальна по вероятности, то по теореме Рисса существует подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}$  такая, что  $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}}$ , то есть  $\xi_{n_k} \xrightarrow{P}$ . Тогда

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P\left(\xi_n - \xi_{n_k} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\xi_{n_k} - \xi \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

0, т.к. фундамент.      0, т.к. сход.

■

**Теорема** (Неравенство Колмогорова). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины такие, что  $E\xi_i = 0$ ,  $D\xi_i < +\infty$ . Обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}.$$

▲ Обозначим  $A = \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}$ . Разобьем  $A$  на несколько непересекающихся событий, то есть  $A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon\}$  и  $\forall i \leq k-1 : |S_i| \leq \varepsilon$ , следовательно,  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ . Тогда

$$\begin{aligned} E(S_n^2 \cdot I_{A_k}) &= E\left((S_k + \underbrace{\xi_{k+1} + \dots + \xi_n}_{\overline{S_k}})^2 \cdot I_{A_k}\right) = \\ &= E(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + E\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) + 2E(S_k \overline{S_k} \cdot I_{A_k}) \quad \square. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$E\left(\underbrace{S_k \cdot I_{A_k}}_{\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \text{ — измер.}} \cdot \underbrace{\overline{S_k}}_{\sigma\{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\} \text{ — измер.}}\right).$$

Следовательно,  $S_k \cdot I_{A_k} \perp \overline{S_k}$ , так как  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \perp \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$ , а, значит,

$$E(S_k \cdot I_{A_k} \cdot \overline{S_k}) = E(S_k \cdot I_{A_k}) \cdot \overline{E S_k} = 0. \quad \text{Отсюда}$$

$$E(S_k^2 \cdot I_{A_k}) + E\left(\overline{S_k}^2 \cdot I_{A_k}\right) \geq E(S_k^2 \cdot I_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \cdot EI_{A_k} = \varepsilon^2 \cdot P(A_k).$$

В итоге,

$$ES_n^2 \geq E(S_n^2 \cdot I_A) = \sum_{k=1}^n E(S_k \cdot I_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot \varepsilon^2 = P(A) \cdot \varepsilon^2.$$

■



## 9 Лекция от 14.04.2018

**Теорема** (Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых случайных величин такая, что  $E\xi_n = 0$  и  $E\xi_n^2 < +\infty$ . Тогда, если  $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2 < +\infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$  сходится почти наверное.

▲ Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . По критерию Коши  $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{сходится п.н.} \right\}$  равносильно тому, что  $\{S_n \text{ фундаментально п.н.}\}$ , а это в свою по критерию фундаментальности равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 : P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Очевидно,

$$P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon \right) = P \left( \bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\} \right),$$

а из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \max_{n \leq k \leq N} |S_k - S_n| \geq \varepsilon \right).$$

По неравенство Колмогорова это меньше или равно, чем

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(S_N - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N E\xi_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k>n} E\xi_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Лемма** (Тёплица). Пусть  $x_n \rightarrow x$  — числовая последовательность, числа  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  таковы, что  $\forall n : a_n \geq 0$  и  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty$ . Тогда  $\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i x_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▲ Пусть  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $n_0$  так, что  $\forall n > n_0 : |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Выберем  $n_1 > n_0$  такое, что  $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \forall n > n_1 : \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - x \right| &= \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x \right| \leq \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k |x_k - x| = \\ &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k |x_k - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k |x_k - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0+1}^n a_k \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Лемма** (Кронекера). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится,  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  такова, что  $a_n \geq 0$ ,

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k \uparrow +\infty. \text{ Тогда } \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

▲ Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , тогда  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ . Заметим,

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j = \sum_{j=1}^n b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} (b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k = S - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \begin{array}{c} \nearrow S \text{ по Тёплицу} \\ \text{---} \end{array}$$

■

**Теорема** (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — независимые случайные величины,  $\forall n : D\xi_n < +\infty$ . Пусть

$\{b_n\}_{n \geq 1}$  — числовая последовательность,  $b_1 > 0$  и  $b_n \uparrow +\infty$ , причем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} <$

$+\infty$ . Пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ , тогда  $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{н.н.}} 0$ .

▲ Преобразуем:

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}.$$

Обозначим  $\eta_i = \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$ . Случайные величины  $\eta_i$  независимы и  $E\eta_i = 0$ . Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi_i - E\xi_i)^2}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D\xi_i}{b_i^2} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда  $\sum \eta_i$  сходится почти наверное. По лемме Кронекера последовательность

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i}$$

сходится к нулю для всех  $\omega$ , для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$$

сходится. Следовательно,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{b_i} = \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

■

**Лемма.** Пусть  $\xi \geq 0$ ,  $E\xi < +\infty$ , тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n).$$

▲

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k P(k \leq \xi \leq k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k \leq \xi \leq k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} E(k \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(\lfloor \xi \rfloor) \cdot I(k \leq \xi \leq k+1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi \cdot I(k \leq \xi \leq k+1)) = \\ &= E\left(\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(k \leq \xi \leq k+1)\right) = E\xi. \end{aligned}$$

Верхнее неравенство доказывается аналогично. ■

**Определение.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $\forall x : F_{\xi}(x) = F_{\eta}(x)$ . Обозначают  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ .

**Утверждение.** Если  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ , то  $\forall g(x) : Eg(\xi) = Eg(\eta)$ .

$$\blacktriangle Eg(\xi) = \int g(x) dF_{\xi}(x) = \int g(x) dF_{\eta}(x) = Eg(\eta). \quad \blacksquare$$

**Теорема** (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $E|\xi_1| < +\infty$ . Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{н.н.}} 0.$$

▲ Поскольку  $E|\xi_1| < +\infty$ , то по предыдущей лемме  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < +\infty$ .

Так как  $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_n$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$ , следовательно, по лемме Бореля-Кантелли  $P\left(\{|\xi_n| \geq n\} \text{ б.ч.}\right) = 0$ . То есть с вероятностью 1 случается конечное число  $\{|\xi_n| \geq n\}$ . Обозначим  $\tilde{\xi}_n \equiv \xi_n \cdot I\{|\xi_n| \leq n\}$ . Тогда с вероятностью 1  $\xi_n = \tilde{\xi}_n$

кроме конечного числа  $\xi_n$ . Пусть  $E\xi_i = 0$ , если это не так, то  $\eta_i = \xi_i - E\xi_i$ . Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_n + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0\right) = P\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \rightarrow 0\right).$$

Рассмотрим

$$E\tilde{\xi}_n = E\left(\xi_n \cdot I\{|\xi_n| \leq n\}\right) = E\left(\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right) \rightarrow E\xi_1 = 0$$

по теореме Лебега о мажорируемойходимости, поскольку

$$\left|\xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n)\right| \leq \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi_1 \cdot I(|\xi_1| \leq n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi_1.$$

По лемме Тёплица

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\tilde{\xi}_i \rightarrow E\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\xi}_i - E\tilde{\xi}_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Обозначим  $\bar{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - E\tilde{\xi}_n$ . По лемме Кронекера, если сходится  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$  на каком-то  $\omega$ , то  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\bar{\xi}_k}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  на том же  $\omega$ . Проверим, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$  сходится почти наверное. По теореме Колмогорова-Хинчина доскаточно показать, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} < +\infty$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(\bar{\xi}_k)^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(\tilde{\xi}_k - E\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(\tilde{\xi}_k)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot E(\xi_k^2 \cdot I(|\xi_k| \leq k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot E(\xi_1^2 \cdot I(|\xi_1| \leq k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot E\left(\xi_1^2 \cdot \sum_{n=1}^k I(n-1 < |\xi_1| \leq n)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\leq 2/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot E(\xi_1^2 \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n)) \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_1| \cdot I(n-1 < |\xi_1| \leq n) \stackrel{\text{по т. Бешпо-Леви}}{=} 2E|\xi_1| \sum_{n=1}^{\infty} I(n-1 < |\xi_1| \leq n) = \\ &= 2E|\xi_1| < +\infty. \end{aligned}$$

■

**Теорема** (Бешпо-Леви). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — случайные величины,  $\forall n : \xi_n \geq 0$ . Тогда  $E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n$ .

▲ Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ , тогда  $S_n \uparrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ . По теореме о монотонной сходимости  $E \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ , следовательно,

$$E \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n E \xi_k \uparrow E \sum_{k=1}^{\infty} E \xi_k.$$

■

## 10 Лекция от 21.04.2018

**Теорема** (о монотонной сходимости). [б/д] Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}, \xi, \eta$  — случайные величины, тогда

1. Если  $\xi_n \uparrow \xi$  почти наверное и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \geq \eta, E\eta > -\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$ .
2. Если  $\xi_n \downarrow \xi$  почти наверное и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \leq \eta, E\eta < +\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$ .

**Лемма** (Фату). Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  и  $\eta$  — случайные величины,  $E|\eta| < +\infty$ , тогда

1. Если  $\forall n : \xi_n \geq \eta$ , то  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .
2. Если  $\forall n : \xi_n \leq \eta$ , то  $\limsup_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .
3. Если  $\forall n : |\xi_n| < \eta$ , то  $E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .

▲ (1) Обозначим  $\psi_n = \inf_{k \geq n} \xi_k$ . Очевидно,  $\psi_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . Кроме того  $\psi_n \geq \eta$ , следовательно, по теореме о монотонной сходимости  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . Рассмотрим

$$E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E\psi_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} E\psi_n \stackrel{\text{т.к. } \psi_n \leq \xi_n}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

(2) Следует из пункта (1) заменой  $\xi'_n = -\xi_n$ .

(3) Следует из (1) и (2). ■

**Теорема** (Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть  $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi, |\xi| \leq \eta, E\eta < +\infty$ . Тогда  $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$  и  $E|\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▲ Заметим, что  $\xi \stackrel{п.н.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . По пункту (3) леммы Фату

$$E\xi = E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E\xi \Rightarrow E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

Конечность  $E\xi$  следует из того, что  $|\xi| < \eta$  почти наверное, следовательно, так как  $E\eta < +\infty$ , то  $E|\xi| \leq E\eta < +\infty$ .

Докажем  $L_1$ -сходимость. Возьмем  $\psi_n = |\xi_n - \xi|$ . Тогда  $|\psi_n| \leq 2\eta$  почти наверное и  $\psi_n \xrightarrow{п.н.} 0$ , следовательно,  $E\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  по теореме Лебега. ■

## Сходимость в $L_2$

Введем пространство  $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi : E\xi^2 < +\infty\}$ . Это минимальное пространство, так как  $E(a\xi + b\eta)^2 \leq 2a^2E\xi^2 + 2b^2E\eta^2$ .

Основное неравенство:  $(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ .

Норма  $\|\xi\| = \sqrt{E\xi^2}$ ; скалярное произведение  $(\xi, \eta) = E\xi\eta$ .

**Лемма.** Пусть  $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$ ,  $\forall n : \xi_n \in L_2$ . Тогда

1.  $\xi \in L_2$ ,
2.  $E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi$ ,
3.  $E\xi_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E\xi^2$ ,
4. если  $\eta_n \xrightarrow{L_2} \eta$ ,  $\forall n : \eta_n \in L_2$ , то  $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\xi, \eta)$ .

▲ Докажем первый пункт леммы:

$$E\xi^2 = E(\xi - \xi_n + \xi_n)^2 \leq \underbrace{2E(\xi - \xi_n)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{2E\xi_n^2}_{< +\infty} < +\infty.$$

Перейдем ко второму пункту. Если  $E\xi^2 < +\infty$ , то  $E|\xi| = E|\xi| \cdot 1$ , а по неравенству Коши-Буняковского это меньше или равно, чем  $\sqrt{E\xi^2 \cdot E1^2} < +\infty$ . Осталось заметить, что  $|E(\xi_n - \xi)| \leq E|\xi_n - \xi| \leq \sqrt{E(\xi_n - \xi)^2 \cdot E1^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Пункт 3.

$$\begin{aligned} E(\xi_n^2 - \xi^2) &= E(\xi_n + \xi)(\xi_n - \xi) \leq \sqrt{E(\xi_n + \xi)^2 E(\xi_n - \xi)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left( \underbrace{2E(\xi_n - \xi)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{8E\xi^2}_{=\text{const}} \cdot \underbrace{E(\xi_n^2 - \xi^2)}_{\rightarrow 0} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Остается доказать четвертый пункт леммы:

$$\begin{aligned} E(\xi_n \eta - \xi \eta) &= E(\xi_n \eta_n - \xi_n \eta) + E(\xi_n \eta - \xi \eta) \leq \\ &\leq \sqrt{E\xi^2 \cdot \underbrace{E(\eta_n - \eta)^2}_{\rightarrow 0}} + \sqrt{E\eta^2 \cdot \underbrace{E(\xi_n - \xi)^2}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

## Случайные блуждания и закон повторного логарифма

Пусть  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что  $E\xi_n = 0$ ,  $E\xi_n^2 = \sigma^2$ .

**Определение.** Случайная величина  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  называется случайным блужданием.

Известно (из Ц.П.Т.), что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ , а  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ . С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} \xi_n^2}{n \ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n \ln^2 n} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда почти наверное  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n} \ln^2 n}$  сходится почти наверное, значит, по лемме Кронекера,

$$\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \ln k \frac{\xi_k}{\sqrt{k} \ln k} = \frac{S_n}{\sqrt{n} \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

**Определение.** Функция  $\varphi^* = \varphi^*(n)$ ,  $n > 1$  называется верхней для  $S_n$ , если  $S_n(\omega) < \varphi^*(n)$  почти наверное для всех  $n$ , начиная с некоторого  $n_0(\omega)$ .

**Определение.** Функция  $\varphi_* = \varphi_*(n)$ ,  $n > 1$  называется нижней для  $S_n$ , если  $S_n(\omega) > \varphi_*(n)$  почти наверное для бесконечно многих  $n$  (бесконечно часто).

То есть  $\varphi^*(n) = \varepsilon \sqrt{n} \ln n$  — верхняя для произвольного случайного блуждания,  $\varphi_*(n) = \varepsilon \sqrt{n}$  — нижняя. Пусть  $\varphi(n)$  — «точная асимптотика», возьмем  $\varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi^*$ ;  $\varphi_{*\varepsilon} = (1 - \varepsilon)\varphi$  для  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1 \right\} &= \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и некоторого } n_\varepsilon : \sup_{m \geq n_\varepsilon} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leq 1 + \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \geq n_\varepsilon : S_m \leq (1 + \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon)\varphi(m) \text{ — верхняя.} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1 \right\} &= \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \geq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \forall \varepsilon > 0 \text{ и для беск. многих } n_\varepsilon : S_m \geq (1 - \varepsilon)\varphi(m) \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)\varphi(m) \text{ — нижняя.} \end{aligned}$$

$$\text{Отметим, } \forall \varepsilon > 0 : \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi \text{ — верхняя} \Leftrightarrow \mathbb{P} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leq 1 \right) = 1.$$

$$\text{Аналогично, } \forall \varepsilon > 0 : \varphi_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)\varphi \text{ — нижняя} \Leftrightarrow \mathbb{P} \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geq 1 \right) = 1.$$

**Теорема** (закон повторного логарифма (ЗПЛ)). [6/д] Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $E\xi_1 = 0, E\xi_1^2 = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < +\infty$ . Тогда

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = 1\right) = 1, \varphi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n \ln \ln n}.$$

*Замечание.* Применяя ЗПЛ к  $S_n$ , получаем, что  $P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\varphi(n)} = -1\right) = 1$ .

За нижнюю ветку  $S_n$  выходит бесконечно часто (см. Рис. 1), а за верхнюю лишь конечное число раз (почти наверное не выходит).

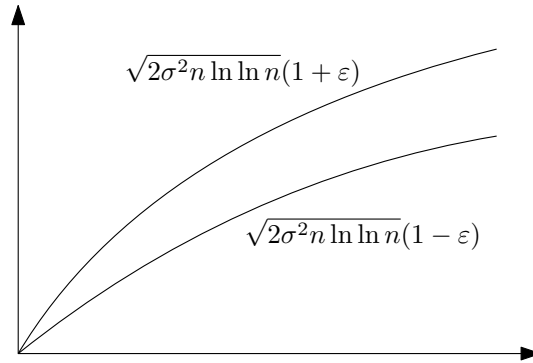


Рис. 1: Поведение верхней и нижней функции случайного блуждания

## Характеристические функции

**Определение.** Характеристическая функция случайной величины  $\xi$  называется  $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Пусть  $F(x)$  — функция распределения, тогда ее характеристическая функция  $\varphi_F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$ .

Если  $F_\xi(x)$  — функция распределения случайной величины  $\xi$ , то характеристические функции  $\xi$  и  $F_\xi$  совпадают.

По формуле Эйлера  $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi)$ .

**Определение.** Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  — случайный вектор. Его характеристической функцией называется  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}, t \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Пусть  $F(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  — функция распределения в  $\mathbb{R}^n$ , тогда его характеристической функцией называется  $\varphi_F(\vec{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} dF(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .



## Свойства характеристических функций

**Свойство 1.** Пусть  $\varphi(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , тогда  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$ .

▲  $|\varphi(t)| = |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$ . ■

**11 Лекция от 28.04.2018**