S.4.A.M. Serii

Fie (a_n) un șir de numere reale.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (serie de numere reale).

Not.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $\sum_{n\geq 1} a_n$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (șirul sumelor parțiale.)

Def.: O serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ s.n. convergentă dacă S_n - convergent.
În caz contrar s.n. divergentă.

Dacă $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, definim $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ s.n. suma seriei.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n\geq 1} a_n$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Să se arate că seria este convergentă și $S = 1$.

Avem că $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$; $A = 1$. $B = -1$.

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$a_1 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$a_3 = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_n = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}. \quad +$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$ este convergent (monoton și mărginit) și $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Deci $S = 1$!

Exemplu. Fie seria $\sum_{n\geq 1} a_n$, $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Să se arate că $S = \frac{1}{2}$.

Avem că $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$; $A = \frac{1}{2}$

$B = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

și $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

//

Obs. a) Dacă $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă atunci S_n - mărginit.

b) Dacă $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

Reciproca nu este adevărată. Mai exact, dacă

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

Exemplu: (Seria armonică) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}$

Avem că $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dar $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nu este șir fundamental (a se vedea C3). ~~Deci~~ astfel S_n nu este convergent. Deci $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ nu este convergentă.

Exemplu. Seria $\sum_{n\geq 2} \sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$ (am folosit criteriul rădăcinii).

Exemplu (Seria geometrică) (Ex. 2.1.1. pag. 30/curs.)

$$\sum_{n\geq 1} a\cdot q^{n-1}, \quad a, q \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a q^{k-1} = \begin{cases} a\cdot \dfrac{1-q^{n}}{1-q}, & q \neq 1 \\ a(n), & q = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1. \\ +\infty, & q \geq 1 \\ (\nexists), & q \leq -1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n - \text{converge pentru } |q|<1, \quad S = \dfrac{a}{1-q} \\ S_n - \text{diverge pentru } |q| \geq 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 1} a q^{n-1} \text{ convergentă pentru } |q|<1 \\ \sum_{n\geq 1} a q^{n-1} \text{ divergentă pentru } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Criterii de convergență pt. serii cu termeni oarecare.

$\boxed{I}$ C. Cauchy. Seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ - convergentă $\Leftrightarrow$

$(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$ și $(\forall)\, p \in \mathbb{N}^*$

să avem $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$

$\boxed{II}$ C. Dirichlet Seria $\sum_{n\geq 1} a_n \cdot b_n$ convergentă dacă

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ mărginit și $\begin{cases} (b_n) \text{ descrescător.} \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \end{cases}$

$\boxed{III.}$ C. Abel Dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă și

(b_n) șir monoton și mărginit at. $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ convergentă.

$\boxed{IV.}$ C. Leibniz. Dacă (a_n) cu termeni pozitivi $\downarrow$ (descrescăt

și $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ at. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot a_n$ convergentă.

Def: $\sum_{n\geq 1} a_n$ s.n. absolut convergentă $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} |a_n|$ - converg.

Def: $\sum_{n\geq 1} a_n$ s.n. semiconvergentă (sau simplu convergentă) $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ - convergentă

$\sum_{n\geq 1} |a_n|$ - divergentă.

Să se studieze natura seriilor:

1°/ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 2°/ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$. 3°/ $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\cdot\frac{n}{2^n}$

4°/ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin na}{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$

1/ Considerăm $a_n=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$.

Avem că $a_n>0$, evident.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n}\geq 1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}\geq 1$, adevărat $(\forall)\, n\geq 1$.

deci (a_n) descrescător.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Din C. Leibniz $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergentă.

În plus avem că

$\sum\limits_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (seria armonică) (pag. 3 seminar) este divergent

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este semiconvergentă.

Obs. $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ s.n. <u>seria armonică alternată</u>

2/ Fie $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$; ca și la problema precedentă

$a_n > 0$; $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Din C. Leibniz $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ este convergentă.

3/ Folosind C. Leibniz se poate arăta că $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\cdot\frac{n}{2^n}$ convergentă. Sau $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ absolut convergentă $\Rightarrow$ convergentă.

4/ Folosind C. Dirichlet se poate arăta că seria este convergentă (ca la exemplul 2.2.1 pag. 36 curs.).

<u>Criterii pentru serii cu termeni pozitivi</u>

Fie (A) $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ și (B) $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ două serii cu termeni pozitivi $\{a_n > 0, (\forall) n \geq 1\}$

(A) este <u>majorată</u> de (B) (<u>Not.</u> $A \ll B$) dacă $(\exists) M \in \mathbb{R}_+$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \leq M b_n$, $(\forall) n \geq n_0$.

<u>C. comparației I</u> Fie (A) și (B) a.î. $(A) \ll B$ atunci

a) B - convergentă $\Rightarrow$ A - convergentă

b) A - divergentă $\Rightarrow$ B - divergentă

<u>C. comparației II</u> Dacă $(\exists) N > 0$ a.î. $(\forall) n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, at.:

a) B - convergentă $\Rightarrow$ A - convergentă

b) A - divergentă $\Rightarrow$ B - divergentă.

III Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (c finit, $\neq 0$) atunci (A) și (B) au aceeași natură.

C. Rădăcinii (Cauchy)

Fie (A) cu termeni pozitivi

a) Dacă $\lambda \in (0,1)$ a.î. $\sqrt[n]{a_n} \le \lambda \Rightarrow$ (A) convergentă

b) Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ (A) divergentă.

C. Raportului (d'Alembert) Fie (A) cu termeni pozitivi

a) Dacă $(\exists)\, \lambda \in (0,1)$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lambda \Rightarrow$ (A) convergentă

b) Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ atunci (A) divergentă.

C. Raabe - Duhamel. Fie (A) cu termeni pozitivi

a) Dacă $(\exists)\, \lambda > 1$ a.î. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \lambda \Rightarrow$ (A) convergentă

b) Dacă $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow$ (A) divergentă.

observații:

i) C. rădăcinii este mai tare decât c. raportului deoarece dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ (Reciproca este falsă).

ii) Dacă în c. raportului și în c. rădăcinii $\lambda = 1$ se aplică C. Raabe - Duhamel.

Să se studieze natura seriilor

1/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$;

2/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$;

3/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$;

4°/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin an}{2^n}$, $a\in\mathbb{R}$

5°/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$

6°/ $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{2^n}$

7°/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n}{n}$;

8°/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{b^n}{n}$, $b\geq 0$

1°/ Fie $a_n = \frac{1}{2n+1}$ şi $b_n = \frac{1}{n}$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{2}$

avem că seriile $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$ şi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$ divergentă.

2°/ Analog ca la punctul 1°/ avem că

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ divergentă

3°/ Fie $a_n = \frac{1}{2^n}$; $a_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{2^n}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{1} = \frac{1}{2} \in (0,1)$

Din C. Raportului $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ - convergentă

Obs. $\sum_{n\geq 1} a_n$ este serie geometrică cu raţia $q = \frac{1}{2}$

4°/ Deoarece $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin an}{2^n}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ şi

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, din criteriul I comparaţiei

avem că $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin an}{2^n}$ este absolut convergentă

5°/ Considerăm $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.

Avem că $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{1} =$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} < 1$. Din criteriul raportului $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ - converg.

6°/ Fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.

Metoda I. C. Leibniz (pag. 11.)

Metoda II Deoarece $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ - absolut convergentă (deci convergentă).

7°/ Fie $a_n = \frac{3^n}{n}$; $a_n > 0$

$\boxed{\text{Sau M II cu crit. rădăcinii } a_n = \sqrt[n]{3^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n} \cdot 3}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{3^n}} = 3 > 1.$$

Din Crit. raportului $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n}$ divergentă.

8°/ Considerăm $a_n = \frac{b^n}{n}$, $b \geq 0$

Dacă $\underline{b=0}$ atunci $a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

Dacă $b > 0$ atunci $a_n = \frac{1}{n} \cdot b^n$

Calculăm $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{b^n}{n}}$

Deoarece $b^n > 0$, $(\forall) n \geq 1$ avem că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b^n} \underset{\text{rădăcinii}}{\overset{\text{c.}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{b^n} \cdot b}{\cancel{b^n}} = b. (= \lambda)$$

Dacă $\lambda \in (0,1)$ adică $b \in (0,1) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

Dacă $\lambda = 1$, adică $b = 1$. $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (seria armonică) divergentă

Dacă $\lambda > 1$, adică $b > 1$ atunci $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergentă.