Разбор выполнил: Каргаполов Руслан, КМБО-01-20

Электронная почта: rkargapolov@yandex.ru

Телеграм: Ruslan_Kargapolov

Теоретические сведения

Бидиагональная матрица

Бидиагональная матрица — это такая матрица, в которой ненулевые элементы находятся только на главной диагонали и на одной из диагоналей рядом с ней — либо сразу над главной диагональю (это будет верхняя бидиагональная матрица), либо сразу под главной диагональю (нижняя бидиагональная матрица). Все остальные элементы матрицы равны нулю.

Примеры бидиагональных матриц:

- Верхняя бидиагональная матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Нижняя бидиагональная матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Вращения Гивенса

Вращения Гивенса — это метод в численной линейной алгебре, используемый для внесения нулей в матрицы или решения систем линейных уравнений.

Каждое вращение Гивенса определяется углом θ и действует на пару строк или столбцов матрицы, вращая их в плоскости, определенной этими двумя измерениями, таким образом, чтобы один из элементов пары стал равен нулю. Преобразование описывается матрицей вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & -\sin(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin(\theta) & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

где элементы $cos(\theta)$ и $sin(\theta)$ расположены на пересечении i-й и j-й строк и столбцов, что позволяет вращать i-*й* и j-*й* столбцы (или строки) на угол θ.

Применение вращения Гивенса позволяет последовательно обнулить выбранные элементы матрицы без значительного увеличения вычислительной сложности или потери численной стабильности. Это делает вращения Гивенса ценным инструментом в различных алгоритмах численного анализа, включая алгоритмы для вычисления сингулярных значений и собственных значений матриц.

Условие сходимости относительно *e*

Условие сходимости относительно *e* — это критерий, используемый для определения момента, когда некоторые элементы матрицы могут быть считаны достаточно малыми, чтобы их можно было приравнять к нулю без значительной потери точности в вычислениях. В контексте алгоритма «Высокая относительная точность двунаправленных сингулярных значений», это условие применяется к элементам массива e, который содержит квадраты недиагональных элементов исходной бидиагональной матрицы B.

Для каждого элемента e_i, условие сходимости проверяет, является ли этот элемент достаточно малым по сравнению с диагональными элементами матрицы (или их квадратами, записанными в массив s) так, чтобы его можно было безопасно обнулить. Это позволяет упростить структуру матрицы, приводя её к более простой форме, которая затем обрабатывается последующими шагами алгоритма для нахождения сингулярных значений.

В общем случае, цель условия сходимости — уменьшить влияние малозначимых элементов на вычисления, сохраняя при этом общую точность результата, и обеспечить стабильное численное решение задачи нахождения сингулярных значений.

Алгоритм «Высокая относительная точность двунаправленных сингулярных значений»

Данный алгоритм основан на методе «Без квадратного корня» для вычисления сингулярных значений бидиагональной матрицы с высокой относительной точностью – это метод выбора, когда требуются только сингулярные значения.

Этот алгоритм полезен в ситуациях, когда требуется высокая точность вычислений сингулярных значений бидиагональной матрицы, и является предпочтительным выбором, когда важны относительные ошибки вычислений.

Обозначения:

- B — исходная бидиагональная матрица, для которой вычисляются сингулярные значения.
- s — массив, содержащий квадраты диагональных элементов матрицы B.
- e — массив, содержащий квадраты недиагональных (супердиагональных) элементов матрицы B.
- n — размерность матрицы B, то есть количество строк и столбцов в матрице.
- p — наименьший индекс блока в матрице B, который не содержит нулевых супердиагональных элементов и для которого производится обработка.
- q — наибольший индекс блока в матрице B, который является диагональным и для которого производится обработка.

Шаги алгоритма:

На вход алгоритма поступает число n и верхняя двудиагональная матрица B размера $n \times n$.

На выходе ожидается сумма $\sum$ диагональных матриц размера $n \times n$, содержащих сингулярные значения матрицы B.

Пошаговое описание алгоритма:

1. Возведем в квадрат диагональные и недиагональные элементы B, чтобы сформировать массивы s и e соответственно, то есть для $i = 1, \dots, n-1$, $s_i = b_{i,i}^2$, $e_i = b_{i,i+1}^2$, последний элемент массива s равен $s_n = b_{n,n}^2$.
2. Повторим:
   a. Для всех $i = 1, \dots, n-1$, установим $e_i = 0$, если соблюден критерий относительной сходимости.

b. Определим наименьшее значение p и наибольшее значение q, чтобы B можно было заблокировать как матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} p \\ n-p-q \\ q \end{matrix}$$

где $B_{3,3}$ – диагональное значение, $B_{2,2}$ – не имеет нулевой супердиагональной записи.

c. Если q = n, то $\sum$ = $\sqrt{diag(s)}$. **Останавливаемся.**

d. Если $i = p + 1, \dots, n - q - 1, s_i = 0$, Тогда применяем заданные вращения таким образом, чтобы $e_i = 0$ и $B_{2,2}$ было верхней двудиагональной матрицей. Иначе, применяем алгоритм, описанный ниже.

Алгоритм «Шаг дифференциального коэффициента-разности»

Данный алгоритм является дополнением к алгоритму «Высокой относительная точность двунаправленных сингулярных значений», который был описан выше.

Алгоритм представляет собой шаг дифференциального частно-разностного (dqds) алгоритма, предназначенного для вычисления сингулярных значений бидиагональной матрицы с высокой относительной точностью. Этот метод является частью процесса, направленного на уточнение сингулярных значений, и работает с квадратами элементов исходной бидиагональной матрицы.

Обозначения:

- s — массив, содержащий квадраты диагональных элементов матрицы B, используется для хранения обновленных значений на основе сдвига и взаимодействия с массивом e.
- e — массив, содержащий квадраты недиагональных (супердиагональных) элементов матрицы B, обновляется на основе взаимодействия с массивом s.
- μ — сдвиг, используемый для контроля процесса обновления массивов s и e, выбирается так, чтобы быть меньше квадрата минимального сингулярного значения матрицы B.
- d — вспомогательная переменная, используемая для последовательного обновления элементов массивов s и e.

- t — временная переменная, используемая для вычисления отношения между последовательными элементами массива s и обновления массива e.

Шаги алгоритма:

На вход поступают числа n, s, e, где s и e являются квадратами диагональных и супердиагональных элементов верхней двудиагональной матрицы размера $n \times n$ соответственно.

На выходе получаем перезаписанные значения s и e.

Опишем пошагово алгоритм:

1. Вводим μ, используя подходящую стратегию сдвига. При этом сдвиг μ должен быть меньше $\sigma_{\min}(B)^2$.
2. Введем значение $d = s_1 - \mu$ для дальнейшей перезаписи значений s, e.
3. Для $k = 1, \ldots, n-1$ выполним следующие шаги:
   a. Перезапишем значение s_k, как $s_k = d + e_k$;
   b. Введем значение $t = \frac{s_{k+1}}{s_k}$ для дальнейшей перезаписи e;
   c. Перезапишем значение e_k, как $e_k = e_k t$;
   d. Переопределим значение d, как $d = dt - \mu$;
   e. Если $d < 0$, то возвращаемся к шагу 1.
4. $s_n = d$.