Границы применения Iterative Refinement

Абрамов Семен КМБО-01-20

semenabramov2002@gmail.com

tg: @schlyapapole

Матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ является разложением по сингулярным значениям если выполнено соотношение

$$A = U\Sigma V^T, \tag{1}$$

где $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональные матрицы, составленные из левых сингулярных векторов $u_{(i)} \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, m$ и правых сингулярных векторов $v_{(i)} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$ соответственно, а $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – прямоугольная диагональная матрица, составленная из сингулярных значений $\sigma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ (полагается, что $m \geq n$).

Одним из способов быстрого разложения по сингулярным значениям является **Iterative Refinement.** Данный алгоритм позволяет уточнить сингулярные значения матриц при условии

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots > \sigma_n,$$

а их приближённые значения $\tilde{\sigma}_i$ таковы, что $\tilde{\sigma}_i \neq \tilde{\sigma}_j$ для $i \neq j$.

Напомним, что на вход алгоритма поступает матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрицы приближённых сингулярных векторов $\widehat{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \widehat{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. На выходе ожидается получение матриц уточнённых сингулярных векторов $\widetilde{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \widetilde{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и матрицы уточнённых сингулярных значений $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Более подробно принцип работы Iterative Refinement изложен в файле Алгоритм_быстрого_итеративного_уточнения_разложения_матрицы.docx

Сингулярные значения являются кластеризованными (находящимися близко друг к другу), если для них выполняется следующее неравенство:

$$\varepsilon \geq \frac{(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{30m||A||_2}$$

$$\varepsilon \coloneqq max(||F||_{2,}\left||G|\right|_2)$$

где $F \in R^{m\times m}$, $G \in R^{n\times n}$ – матрицы ошибок и для них выполнены следующие соотношения:

$$U = \widehat{U}(I_m + F) \text{ и } V = \widehat{V}(I_n + G)$$

I_n и I_m – единичные матрицы размера $n \times n$ и $m \times m$ соответственно

σ_i, σ_{i+1} – сингулярные значения

$||A||_2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ – 2-норма матрицы А.

m – размерность матрицы F

В описанным выше случае алгоритм Iterative Refinement не работает корректно, так как значения расположены близко друг к другу (являются кластеризованными)