Работа выполнена: студент КМБО-01-20, Мустафин Рамиль

Почта: mrr201702@mail.ru

Ник в ТГ: @vinramil

# Алгоритм «приведение матрицы Хаусхолдера к двудиагональной форме».

В советской математической литературе метод приведения матрицы Хаусхолдера к двудиагональной форме чаще называется методом отражений. Сама же двудиагональная форма называется так же «бидиагональной».

На вход алгоритма поступает матрица A, числа m и n, такие, что матрица A размера $m \times n$.

На выходе ожидаются матрицы B, V и U такие, что матрица B – верхняя бидиагональная, U и V являются результатом матрицы Хаусхолдера, где $A=UBV^T$.

Опишем пошагово алгоритм:

1. $B \leftarrow A$ (Пропустим этот шаг, если A должно быть перезаписано на B)
2. $U = I_{m\times n}$. (Создадим матрицу U размера $m\times n$)
3. $V = I_{n\times n}$. (Создадим матрицу V размера $n\times n$)
4. Определим матрицу Хаусхолдера $Q_k$ (для $k = 1, \dots, n$) со следующим свойством: умножение слева столбца на матрицу $Q_k$ оставляет компоненты $1, \dots, k-1$ неизменными, причём

$$Q_k \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1,k} \\ b_{k,k} \\ b_{k+1,k} \\ \vdots \\ b_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1,k} \\ s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ где } s = \pm\sqrt{\sum_{i=k}^{m} b_{i,k}^2}.$$

5. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу B
   $B \leftarrow Q_k B$.
6. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу U
   $U \leftarrow U Q_k$.
7. Если $k \le n-2$, то определим матрицу Хаусхолдера ( для $k = 1, \dots, n$) $P_{k+1}$ со следующим свойством: умножение справа строки на матрицу $P_{k+1}$ оставляет компоненты $1, \dots, k$ неизменными, причём

$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{k,k} \quad b_{k,k+1} \quad b_{k,k+2} \quad \cdots \quad b_{k,n}]$ $P_{k+1}$ =

$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{k,k} \quad s \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ , где s = $\pm\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} b_{k,j}^2}$ .

8. Переопределим (для k = 1 ,…, n) матрицу B
   $B \leftarrow B\, P_{k+1}$.
9. Переопределим (для k = 1 ,…, n) матрицу V

   $V \leftarrow P_{k+1}\, V$.

## Алгоритм «Голуба-Кахана».

На вход алгоритма поступает матрица A, числа m и n, такие, что матрица A размера m×n.

На выходе ожидаются матрицы Σ, V и U такие, что матрица Σ – диагональная, U и V имеют ортонормированные столбцы, размеры матриц U=m×n, V=n×n, где $A=U\Sigma V^T$.

Опишем пошагово алгоритм:

1. Применим алгоритм «приведение матрицы Хаусхолдера к двудиагональной форме» чтобы получить матрицы B, V и U такие, что матрица B – верхняя бидиагональная, U и V являются результатом матрицы Хаусхолдера, где $A=UBV^T$.
   Повторять пункты 2) - 4):
2. Если $|b_{i,i+1}| \le \varepsilon\,(|b_{i,i}| + |b_{i+1,i+1}|)$ (для i = 1, … , n – 1), то
   а) $b_{i,i+1} = 0$.
   б) Определим наименьшее p и наибольшее q такие, чтобы матрицу B можно было представить в виде
   $$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{3,3} \end{bmatrix}$$
   Где матрица $B_{3,3}$ диагональная, а матрица $B_{2,2}$ не имеет нулевую супердиагонального (диагональ выше главной диагонали) элемента.
3. Если q=n, то матрица Σ = диагональной части матрицы B. Выходим из цикла.
4. Если $b_{i,i} = 0$ (для i = p+1, … , n – q – 1), то применяем метод вращений Гивенса так, чтобы $b_{i,i+1} = 0$ и $B_{2,2}$ всё ещё оставалась верхней бидиагональной.
   Иначе применим алгоритм «шаг алгоритма Голуба-Кахана» к n, B, U, V, p, q.

# Алгоритм «шаг алгоритма Голуба-Кахана».

На вход алгоритма поступают, числа n, p, q, матрицы B, Q, P такие, что матрица B размера n×n является верхней бидиагональной, Q и P имеют ортогональные столбцы, а матрица $A = QBP^T$.

На выходе ожидаются матрицы B, Q и P такие, что матрица B – верхняя бидиагональная, Q и P имеют ортогональные столбцы, а недиагональные элементы выходной матрицы B меньше, чем недиагональные элементы входной матрицы. (Матрицы B, Q и P перезаписываются в хранилище)

Опишем пошагово алгоритм:

1. Введём матрицу $B_{2,2}$, которая является диагональным блоком матрицы B с номерами строки и столбца p + 1, … , n – q.
2. Найдём матрицу $B_{2,2}^T$.
3. Введём C такой, что C – нижняя правая подматрица размером 2×2 матрицы $B_{2,2}^T$ $B_{2,2}$.
4. Найдём собственные значения $\lambda_1$, $\lambda_2$ подматрицы C.
5. Из чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$ найдём то, что ближе к элементу $c_{2,2}$ матрицы C.
6. Введём μ = найденному числу п.5.
7. Введём k = p + 1.
8. Введём $\alpha = b_{k,k}^2 - \mu$.
9. Введём $\beta = b_{k,k}\, b_{k,k+1}$.
   Все последующие шаги выполнять при k = p + 1, … , n – q – 1.
10. Введём c = cos(θ) и s = sin(θ) такие, что $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 \end{bmatrix}$.
11. Введём матрицу $R_{k,k+1}(c,s)$ – матрица вращение Гивенса, действующая на столбцы k и k + 1 во время умножения справа.
12. Переопределим $B \leftarrow B\, R_{k,k+1}(c,s)$.
13. Переопределим $P \leftarrow P\, R_{k,k+1}(c,s)$.
14. Приравняем $\alpha = b_{k,k}$, $\beta = b_{k+1,k}$.
15. Приравняем c = cos(θ) и s = sin(θ) так, что $\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 0 \end{bmatrix}$.
16. Введём матрицу $R_{k,k+1}(c,-s)$ – матрица вращение Гивенса, действующая на столбцы k и k + 1 во время умножения слева.
17. Переопределим $B \leftarrow R_{k,k+1}(c,-s)\, B$.
18. Переопределим $Q \leftarrow Q\, R_{k,k+1}(c,s)$.
19. Если $k \le n - q - 1$, то приравняем
    $\alpha = b_{k,k+1}$, $\beta = b_{k,k+2}$.