Сингулряные значения бидиагональной матрицы методом бисекции

Абрамов Семен КМБО-01-20

semenabramov2002@gmail.com

tg: @schlyapapole

На вход алгоритма поступают переменные n, **B**, α, β и *tol*. Приведем описание данных переменных:

B – бидиагональная матрица (ненулевые элементы расположены только на главной и одной из соседних диагоналей)

n – размерность матрицы **B**

α и β – левая и правая граница полуинтервала [α, β), в котором будем искать сингулярные значения B.

tol – числовая точность алгоритма

n_{low}, n_{up}, n_{mid} – количество сингулярных значений находящихся левее нижней (верхней) границы или середины интервала.

Опишем основной алгоритм по шагам:

1. Вычислим n_α использовав вспомогательную функцию *Negcount*(n, **B**, α)
2. Аналогичным образом вычислим n_β = *Negcount*(n, **B**, β)
3. Если $n_\alpha = n_\beta$, на полуинтервале [α, β) нет сингулярных значений
4. В противном случае список [α, n_α, β, n_β] становится частью Worklist
5. Пока Worklist не пуст будем выполнять следующие шаги:
    a. Предыдущие значения Worklist удаляются. На первой итерации [low, n_{low}, up, n_{up}] = [α, n_α, β, n_β], на следующих итерациях берем вычисленные значения из предыдущих итераций
    b. Переменная mid = (low + up) / 2
    c. Проверяем неравенство up – low >= *tol*

       Если неравенство выполнено проделываем следующие шаги:
        - n_{mid} = *Negcount*(n, B, mid)

- Если $n_{mid} > n_{low}$ в работу Worklist идет список [low, n_{low}, mid, n_{mid}]
- Если $n_{up} > n_{mid}$, в работу Worklist идет список [mid, n_{mid}, up, n_{up}]

Если же неравенство не выполнено, выполняем цикл

- От i в диапозоне [n_{low} + 1, n_{up}], элемент массива *w*, стоящий на позиции i – n_α равен mid (одно из искомых сингулярных значений).

Результат выполнения алгоритма – массив *w*, состоящий из сингулрных значений **B** в заданном диапозоне.

Алгоритм *Negcount* в псевдокоде выше вычисляет число сингулянрных значений меньше чем μ

На вход алгоритма поступают переменные n, **B** и μ

Опишем алгоритм *Negcount* по шагам:

1. t = -μ
2. При k от 1 до n-1

   $d = \beta_{k,k}^2 + t$

   Если d < 0, число *Negcount* = *Negcount* + 1

   $t = t * (\beta_{k,k+1}^2 / d) - \mu$
3. $d = \beta_{n,n}^2 + t$
4. Если d < 0, число *Negcount* = *Negcount* + 1

Эффективность алгоритма зависит от размера матрицы и заданной числовой точности tol. Итеративный процесс разбиения интервала может быть неэффективным для больших матриц или малых значений tol. Однако, алгоритм позволяет находить сингулярные значения с высокой точностью в заданном интервале.

Итак, описанный алгоритм представляет собой метод численного поиска сингулярных значений бидиагональной матрицы в заданном интервале с заданной точностью. Он может быть эффективным для небольших и средних размеров матриц при умеренной числовой точности.