«Косвенный метод вычисления SVD»

Искенеева Камиля КМБО-01-20

kamila.iskeneeva@yandex.ru

tg:Iskam17

Краткие сведения

Сингулярное разложение (SVD)

Неотрицательное вещественное число σ называется ***сингулярным числом*** матрицы A, когда существуют два вектора единичной длины $u \in \mathbb{R}^m$ и $v \epsilon \mathbb{R}^n$ такие, что:

$$Av \ = \sigma \mathrm{u}\ , \text{ и } A^*u = \ \sigma v$$

Векторы u и v называются, соответственно, ***левым сингулярным вектором*** и ***правым сингулярным вектором***, соответствующим сингулярному числу σ.

Сингулярное разложение (Singular Value Decomposition - SVD) *матрицы A размера* $m \times n$ – разложение вида:

$$A = U\Sigma V^T,$$

где $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где $\sigma_1 \ \geq \ \sigma_2 \ \geq \cdots \geq \sigma_n \ \geq 0$. $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $U, V -$ матрицы, чьи столбцы представляют собой векторы, образующие ортонормированные базисы в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Собственные числа и собственные векторы

Пусть V – векторное пространство над полем F, а A – линейный оператор в пространстве V. Вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора A, если $x \ \neq 0$ и существует скаляр $t \in F$ такой, что

$$A(x) = tx$$

Скаляр $t \in F$ называется ***собственным значением***.

Связь сингулярных чисел и собственных векторов

1. Столбцы матрицы V являются собственными векторами матрицы AA^T.
2. Столбцы матрицы U являются собственными векторами матрицы A^TA.
3. Сингулярные числа являются квадратными корнями из собственных значений матриц AA^T и A^TA.

Косвенный метод

Предполагается, что A является матрицей размера $m \times n$.

Когда $m < n$, можно получить собственные значения и векторы AA^T, после чего оротогонализировать собственные векторы, чтобы сформировать V. Далее U находится через формулу $U_i = Av_i/\boldsymbol{\sigma_i}$, где $\boldsymbol{\sigma_i}$ – сингулярные значения матрицы A, которые в то же время являются квадратными корнями собственных значений AA^T.

Когда $m > n$, столбцы матрицы U заполняются единицами, а затем ортогонализируются с использованием алгоритма Грама-Шмидта.

На вход алгоритма поступает матрица A размера $m \times n$.

На выходе ожидаются матрица D размером $m \times n$ с сингулярными значениями, а также ортогональные матрицы U размера $m \times m$ с левыми сингулярными векторами и V размера $n \times n$ с правыми сингулярными векторами.

Опишем пошагово алгоритм:

1. Определяем размер матрицы A, где m – количество строк, а n – количество столбцов, и инициализируем переменную sinflag = 0.

2. Если $m > n$

- Вычисляем собственные значения и векторы A^TA и заносим значения в матрицы D и U соответственно.
- Производим ортогонализацию матрицы U с использованием алгоритм Грамма-Шмидта, чтобы получить ортонормированный набор векторов.
- Меняем порядок столбцов матрицы U на обратный.
- Инициализируем матрицу $D1$ размером $n \times (m - n)$ и заполняем ее нулями.
- Извлекаем диагональные элементы матрицы D и возводим их в степень ½.
- Размещаем полученные квадратные корни собственных значений на диагонали матрицы $D1$ в соответствующие места.
- Присваиваем матрице D, полученную ранее матрицу $D1$, теперь D будет содержать диагональ с сингулярным числами.
- Запускаем цикл по каждому сингулярному числу и соответствующему собственному вектору. Для *i* от *1* до n*:*

a. Если сингулярное значение не равно 0, вычисляем соответствующий столбец матрицы V как $(A^T * U[:, i])/ D[i, i]$

b. Если сингулярное число равно нулю, то *sinflag = 1* и столбец матрицы V устанавливается равным вектору, содержащему единицы.

- Ортогонализируем матрицу V.
- Если *signflag = 1,* повторяем ортогонализацию для *V.*
- Транспортируем матрицу D для окончательного вида диагональной матрицы сингулярных чисел.
- Возвращаем матрицы U, D, V

3. Если $m \le n$

- Вычисляем собственные значения и векторы $A^T A$ и заносим значения в матрицы D и V соответственно.
- Производим ортогонализацию матрицы V с использованием алгоритма Грамма-Шмидта, чтобы получить ортонормированный набор векторов.
- Меняем порядок столбцов матрицы V на обратный.
- Инициализируем матрицу $D1$ размером $m \times n$ и заполняем ее нулями.
- Извлекаем квадратные корни собственных значений, записываем их в вектор dd и затем переворачиваем этот вектор справа налево.
- Размещаем вектор dd на главную диагональ матрицы D1. D1 теперь представляет собой диагональную матрицу с этими значениями.
- Запускаем цикл по каждому сингулярному числу и соответствующему собственному вектору. Для i от *1* до *n:*

  a. Если сингулярное значение не равно 0, вычисляем соответствующий столбец матрицы U как $(A * V[:, i])/ D[i, i]$

  b. Если сингулярное число равно нулю, то *sinflag = 1* и столбец матрицы U устанавливается равным вектору, содержащему единицы.

- Ортогонализируем матрицу U.
- Если *signflag = 1,* повторяем ортогонализацию для *U.*
- Транспортируем матрицу D для окончательного вида диагональной матрицы сингулярных чисел.
- Возвращаем матрицы U, D, V

Список литературы

1. Wen Zhang, Anastasios Arvanitis and Asif Al-Rasheed. Singular Value Decomposition and its numerical computations, 2011.

2. P. Deift, J. Demmel, C. Li and C. Tomei. The bidiagonal singular value decomposition and Hamiltonian mechanics, 1991.

3. M. Gu, S. Eisenstat. A divide-and-conquer algorithm for the bidiagonal SVD, 1995.