UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MENDOZA

Departamento de Electrónica

Análisis de Señales y Sistemas

Trabajo Práctico N°1: Variable Compleja

(Versión PROFESOR)

Operaciones con números complejos

1. Dados $z_1 = 3 - 6i$; $z_2 = 2 + 5i$; $z_3 = -3 + 4i$; comprobar el resultado de las operaciones indicadas

   a) $z_1 z_2 = 36 + 3i$
   b) $z_1 \bar{z}_2 = -24 - 27i$ **
   c) $z_1^{-1} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15}i$
   d) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$ **
   e) $[z_1 + z_3]^2 = -4$ **
   f) $[z_2 - z_3]^2 = 24 + 10i$

2. Expresar los complejos dados en forma polar y trigonométrica. Graficar.

   a) 1 Rta: $1e^{i0} = 1[\cos(0) + i\sin(0)]$
   b) $-\frac{2}{5}$ Rta: $\frac{2}{5}e^{i\pi} = \frac{2}{5}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$
   c) i Rta: $1e^{i\frac{\pi}{2}} = 1[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})]$
   d) $-\sqrt{3}i$ ** Rta: $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}[\cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2})]$
   e) $4 + 4i$ ** Rta: $\sqrt{32}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{32}[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})]$

3. Demostrar las siguientes igualdades.

   a) $z + \bar{z} = 2x$
   b) $z - \bar{z} = 2yi$ **
   c) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
   d) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
   e) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ **
   f) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

4. Demostrar las siguientes igualdades.

   a) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
   b) $|\frac{z}{\bar{z}}| = 1$
   c) $|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = 1$

Potencia de un número complejo

5. Expresar los complejos dados en forma polar y trigonométrica.

   a) $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$ Rta: $2^{10}e^{i\frac{20}{3}\pi} = 1024\big[\cos\big(\frac{20}{3}\pi\big) + i\sin\big(\frac{20}{3}\pi\big)\big]$
   b) $(1+i)^4$ ** Rta: $4e^{i\pi} = 4[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$
   c) $(-1+i)^3$ Rta: $2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\big[\cos\big(\frac{9\pi}{4}\big) + i\sin\big(\frac{9\pi}{4}\big)\big]$
   d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ ** Rta:$1e^{-i5\pi} = [\cos(5\pi) - i\sin(5\pi)]$

Raíz enésima de un número complejo

6. Determinar el valor correspondiente y graficar.

   a) $w = \sqrt{1}$ Rta: $1; -1$
   b) $w = \sqrt[3]{1}$ ** Rta: $1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   c) $w = \sqrt[4]{1}$ ** Rta: $1; i; -1; -i$
   d) $w = \sqrt{-16}$ Rta: $4i; -4i$
   e) $w = \sqrt[3]{i}$ Rta: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i$
   f) $w = \sqrt[3]{1+i}$ ** Rta: $1,0842 + 0,291i; -0,7937 + 0,7973i; -0,291 - 1,0842i$

Función Exponencial

7. Expresar en forma cartesiana.

   a) e^5 Rta: $148,4132$
   b) e^{5i} ** Rta: $0,2837 - 0,9589i$
   c) e^{1+4i} ** Rta: $-1,7768 - 2,0572i$
   d) e^{-3-2i} Rta: $-0,0207 - 0,0453i$

8. Determinar las partes real e imaginaria.

   a) e^{5z} Rta: $e^{5x}\cos(5y) + ie^{5x}\sin(5y)$
   b) e^{z^2} ** Rta: $e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$
   c) 3^z ** Rta: $e^{x\ln(3)}\cos[y\ln(3)] + ie^{x\ln(3)}\sin[y\ln(3)]$

9. Graficar la función $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ para los siguientes casos.

   a) $x = 5; 0 \le y \le \frac{7\pi}{6}; \Delta y = \frac{\pi}{6}$ **
   b) $0 \le x \le 1,6; \Delta x = 0,2; y = \frac{\pi}{4}$ **
   c) $0 \le x \le 1,6; \Delta x = 0,2; 0 \le y \le \frac{7\pi}{6}; \Delta y = \frac{\pi}{6}$ **

10. Determinar todos los valores de z tales que:

    a) $|e^{-z}| < 1$ ** Rta: $x > 0$
    b) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ Rta: *se cumple para todo z*
    c) $Re\{e^{2z}\} = 0$ ** Rta: $y = \dfrac{\pi}{4}(1 \pm 2k); k = 0, 1, 2, \cdots$

11. Resolver las ecuaciones dadas:

    a) $e^z = 12$ ** Rta: $2{,}4849 \pm 2k\pi i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$
    b) $e^z = -7$ ** Rta: $1{,}9459 \pm (2k+1)\pi i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$
    c) $e^z = 4 + 3i$ Rta: $1{,}6094 + (0{,}6435 \pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

12. Calcular:

    a) $\cos 6i$ Rta: 201,7156
    b) $\sin 3i$ ** Rta: $10{,}0179i$

c) $\cosh i$ Rta: 0,5403

d) $\cos(3-4i)$ ** Rta: $-27{,}0349 + 3{,}8512i$

e) $\sin(2+5i)$ Rta: $67{,}4789 - 30{,}8794i$

f) $\cosh(1+3i)$ ** Rta: $-1{,}5276 + 0{,}1658i$

g) $\sinh(2-i)$ Rta: $1{,}9596 - 3{,}1658i$

13. Demostrar que:

a) $|\cos z|^2 = (\cos x)^2 + (\sinh y)^2$

b) $|\sin z|^2 = (\sin x)^2 + (\sinh y)^2$

14. Determinar todas las soluciones de:

a) $\cos z = 15$ Rta: $z = \pm 2k\pi + 3{,}4001i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

b) $\sin z = 32$ Rta: $z = \left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) - 4{,}1586i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

c) $\cosh z = 0{,}5$ Rta: $\left(\pm\frac{\pi}{3} \pm 2k\pi\right) i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

d) $\sin z = i \sinh 1$ ** Rta: $z = \pm 2k\pi + i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

Función logarítmica

15. Calcular:

a) $\ln 1$ Rta: $(\pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

b) $\ln(-1)$ ** Rta: $(\pi \pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

c) $\ln i$ Rta: $(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

16. Calcular y representar gráficamente al menos cuatro valores de la solución:

a) $\ln(3+5i)$ Rta: $1{,}7632 + (1{,}0304 \pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

b) $\ln(\sqrt{3} - 2i)$ ** Rta: $0{,}9730 + (-0{,}8571 \pm 2k\pi)i; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

17. Demostrar que:

a) $\ln(-ie) = 1 - i\frac{\pi}{2}$

b) $\ln(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$

Regiones del plano complejo

18. Graficar los lugares geométricos correspondientes a:

a) $|z| \leq 3$ Rta: *círculo de radio 3 centrado en el origen.*

b) $Re\{z\} \geq -2$ Rta: *eje* $x = -2$ *y semiplano a la derecha de dicho eje.*

c) $Im\{z\} < 4$ ** Rta: *semiplano inferior al eje* $y = 4$*, excluyendo el mismo.*

d) $|Arg\ z| < \frac{\pi}{2}$ ** Rta: *semiplano derecho (sin el eje imaginario).*

e) $0 < Arg\ z < \frac{2\pi}{3}$ ** Rta: *ángulo en semiplano superior desde 0º a 120º.*

f) $|z+1| \leq 3; -\frac{\pi}{4} \leq Arg\ z \leq \frac{\pi}{4}$ Rta: *interior del arco de circunferencia centrada en -1 de radio 3 (incluyendo el arco) intersección con arco centrado en origen desde -45º hasta 45º.*

g) $|z| \leq 1; 0 \leq Arg\ z \leq \frac{\pi}{3}$ ** Rta: *interior del arco de circunferencia centrada en origen de radio 1 (incluyendo el arco), desde 0º hasta 60º*

h) $1 \leq |z-3| \leq 2$ Rta: *anillo centrado en (3,0) de radio interior 1 y exterior 2*
Puntos que verifican: $1 \leq \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \leq 2$

i) $|z + 3 + 3i| > 3$ Rta: *exterior de la circunferencia:* $\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} = 3$

j) $|\frac{z+1}{z-1}| = \sqrt{2}$ Rta: *circunferencia:* $(x-3)^2 + y^2 = 8$

k) $Im\{\frac{z+1}{z-1}\} \leq 2$ ** Rta: *puntos de la circunferencia:* $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
y puntos exteriores a esta.

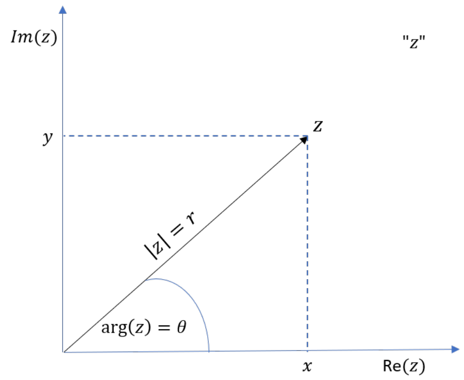


Figura 1: Representación gráfica de un número complejo en el plano z.

Herramientas Teóricas:

Representación analítica de un número complejo z

Forma cartesiana (útil al trabajar con sumas algebraicas):

$$z = x + iy \to Re(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \ \wedge \ Im(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \tag{1}$$

Forma polar (útil la trabajar con productos y divisiones):

$$z = re^{i\theta} \to \quad \text{mód}\ (z) = |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ \arg(z) = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

Nota: Al calcular el $\arg(z)$, recordar que arctan es una función multivaluada (por ser la inversa de una función periódica). Por lo que debe interpretarse correctamente el resultado arrojado por la calculadora (solo es correcto en el primer y cuarto cuadrante). Frecuentemente resulta mas práctico interpretar el resultado de las funciones trigonométricas inversas si se usa la calculadora en modo Deg (grados sexagesimales).

Forma trigonométrica (útil la trabajar con sumas algebraicas). Utilizado la importante relación de Euler, podemos escribir:

$$z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \to r\cos(\theta) = x \ \wedge \ r\sin(\theta) = y. \tag{3}$$

Representación gráfica de un número complejo z

Las variables de la representación analítica pueden identificarse en el plano complejo "z", como se muestra en la figura 1.

Raíz enésima de un número complejo z

$$w = \sqrt[n]{z} \to z = w^n \to r_z e^{i\theta_z} = \left(r_w e^{i\theta_w}\right)^n = r_w^n e^{in\theta_w}. \tag{4}$$

Igualando complejos se obtiene la expresión para calcular la raíz (w) en forma polar,

$$r_w = \sqrt[n]{r_z} \ \wedge \ \theta_w = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{5}$$

Nota: La raíz enésima es una función multivaluada con infinitas soluciones pero con solo n soluciones fundamentales distintas. Estas están distribuidas en el plano complejo de manera equidistante sobre la circunferencia de radio r_w.

Potencia real de un número complejo z

$$w = z^n = \left(r_z e^{i\theta_z}\right)^n = r_z^n e^{in\theta_z}. \tag{6}$$

Igualando complejos se obtiene la expresión para calcular la potencia (w) en forma polar,

$$r_w = r_z^n \ \wedge \ \theta_w = n\theta_z + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Se presenta una serie de fórmulas de utilidad que serán usadas en posteriores desarrollos.

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \tag{8}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{9}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \tag{10}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \tag{11}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \tag{12}$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}). \tag{13}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2i}(e^{z} - e^{-z}). \tag{14}$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. \tag{15}$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \tag{16}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \tag{17}$$

Logaritmo de un número complejo z

$$w = \ln(z) = \ln(r_z e^{i\theta_z}) = \ln(r_z) + i(\theta_z + 2k\pi), \ k = 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

Igualando complejos se obtiene la expresión para calcular el logaritmo (w) en forma cartesiana,

$$\mathrm{Re}(w) = ln(r_z) \ \wedge \ \mathrm{Im}(w) = \theta_z + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2, ... \tag{19}$$

Potencia compleja de un numero real

$$w = A^z \rightarrow w = e^{\ln(A) z} = e^{\ln(A) x} e^{i \ln(A) y} \tag{20}$$

Igualando complejos se obtiene la expresión para calcular la potencia (w) en forma polar,

$$r_w = e^{\ln(A) x} \ \wedge \ \theta_w = \ln(A) y + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2, ... \tag{21}$$

Notar que si la base es $A = e$ la resolución es directa:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \rightarrow r_w = e^x \wedge \theta_w = y + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2, ... \tag{22}$$

Soluciones

1. *a*) Se realiza el producto multiplicando término a término y recordando que $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (3-6i)(2+5i) = 3\times 2 + 3\times 5i + (-6i\times 2) + (-6i\times 5i) = 6 + 15i - 12i + 30 = 36 + 3i \quad (23)$$

Notar que solo los productos cruzados (parte real por parte imaginaria) contribuyen a la parte imaginaria del resultado.

2. b) Utilizando la Eq. 2 se puede escribir:

$$z = -\frac{2}{5} \to r = \sqrt{\frac{2}{5}^{2} + 0^2} = \frac{2}{5} \wedge \theta = \arctan\Big(-\frac{0}{2/5}\Big) = \pi. \quad (24)$$

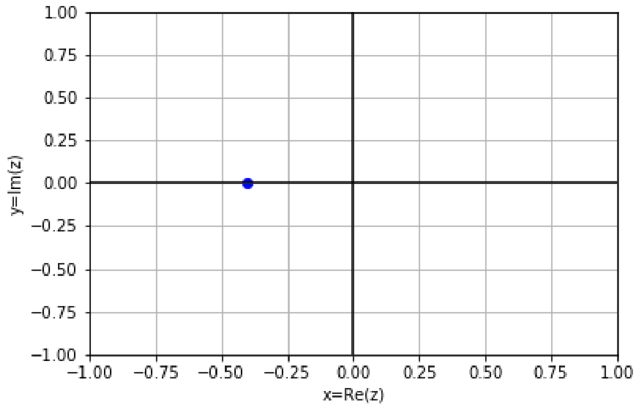
Por lo que obtenemos la representación en forma polar:

$$z = \frac{2}{5}e^{i\pi}, \quad (25)$$

y mediante la Ec. 3, la representación trigonométrica,

$$\boxed{z = \frac{2}{5}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)].} \quad (26)$$

La representación gráfica del número z en el plano complejo es:



3. *a*) Puesto que está involucrada una suma algebraica de números complejos, elegimos la representación binomial,

$$z + \bar{z} = x + iy + \overline{x+iy} = x + iy + x - iy = \boxed{2x.} \quad (27)$$

4. b) Puesto que está involucrada una división de números complejos, elegimos la representación polar,

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{re^{i\theta}}{\overline{re^{i\theta}}}\right| = \left|\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}\right| = \left|e^{i2\theta}\right| = \boxed{1.} \quad (28)$$

Una demostración alternativa puede hacerse utilizando la propiedad distributiva del módulo respecto a la división:

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|re^{i\theta}|}{|\overline{re^{i\theta}}|} = \frac{|re^{i\theta}|}{|re^{-i\theta}|} = \frac{r}{r} = 1 \quad (29)$$

5. *a*) Como está involucrada un operación de potenciación, representamos la base en forma polar,

$$(-1+\sqrt{3}i)^{10} \to r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \wedge \theta = \arctan\Big(-\frac{\sqrt{3}}{1}\Big) = \frac{2}{3}\pi \quad (30)$$

Luego resolvemos distribuyendo el exponente, ver Ec. 7,

$$\Big(2e^{i\frac{2}{3}\pi}\Big)^{10} = 2^{10}e^{i\frac{20}{3}\pi} = \boxed{1024\big[\cos(\frac{20}{3}\pi) + i\sin(\frac{20}{3}\pi)\big].} \quad (31)$$

6. c) Como está involucrada un operación de radicación, representamos la base en forma polar, ver Ec. 4,

$$w = \sqrt[4]{1} \rightarrow r_z = \sqrt{1^2} = 1 \wedge \theta_z = \arctan(0) = 0 \tag{32}$$

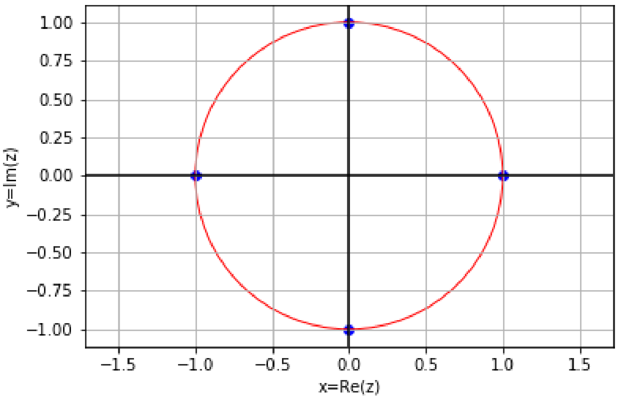
Luego resolvemos utilizando la Ec. 5,

$$r_w = \sqrt[4]{1} = 1 \wedge \theta_w = \frac{0 + 2k\pi}{4} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3. \tag{33}$$

Por lo que las 4 soluciones son:

$$\boxed{w_0 = 1e^{i0} = 1; w_1 = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i; w_2 = 1e^{i\pi} = -1; w_3 = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.} \tag{34}$$

Como puede verse las 4 soluciones están distribuidas de forma equidistante sobre una circunferencia de radio $r_w = 1$:



7. c) Utilizando la Ec. 2,

$$z = e^{1+4i} = e^1 e^{4i} \rightarrow r = e \wedge \theta = 4 \rightarrow z = e[\cos(4) + i\sin(4)] = \boxed{-1,7768 - 2,0572i.} \tag{35}$$

8. a) Puesto que la base es e, la resolución es directa, ver Ec. 22,

$$e^{5z} = e^{5(x+iy)} = e^{5x}e^{i5y} = \boxed{e^{5x}\cos(5y) + ie^{5x}\sin(5y).} \tag{36}$$

c) Puesto que la base es 3, la solucion se obtiene mediante la Ec. 21,

$$3^z = e^{\ln(3)z} = e^{\ln(3)x}e^{i\ln(3)y} = \boxed{e^{\ln(3)x}\cos[\ln(3)y] + ie^{\ln(3)x}\sin[\ln(3)y].} \tag{37}$$

9. Se pide graficar la función exponencial compleja para distintos casos de incremento en los valores del exponente. Para mayor claridad en la explicación, escribimos la función exponencial compleja como:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}. \tag{38}$$

Comparando la expresión con la representación en forma exponencial de un número complejo, se observa que e^x es el módulo de la función y que y es el argumento.

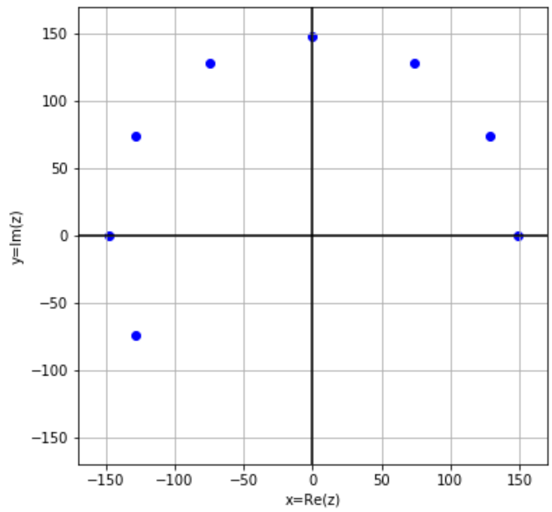
$$|f(z)| = e^x, \tag{39}$$
$$Arg\{z\} = y. \tag{40}$$

Entonces, un incremento en la variable x producirá un incremento en el módulo (que crecerá de forma exponencial), y un incremento en la variable y producirá un incremento en el argumento. Veamos un ejemplo.

a) En este punto la condición es que la variable x tiene un valor constante $x = 5$, y la variable y varía entre 0 y $\frac{7}{6}\pi$ con un incremento $\Delta y = \frac{\pi}{6}$. Numéricamente esto queda de la siguiente forma:

$$f(5,0) = e^5 \cdot e^{i0} = e^5 \cos(0) + ie^5 \sin(0) = 148{,}4, \tag{41}$$
$$f(5,\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(\tfrac{\pi}{6}) = 128{,}5 + i74{,}21, \tag{42}$$
$$f(5,2\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i2\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(2\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(2\tfrac{\pi}{6}) = 74{,}21 + i128{,}5, \tag{43}$$
$$f(5,3\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i3\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(3\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(3\tfrac{\pi}{6}) = 0 + i148{,}4, \tag{44}$$
$$f(5,4\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i4\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(4\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(4\tfrac{\pi}{6}) = -74{,}21 + i128{,}5, \tag{45}$$
$$f(5,5\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i5\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(5\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(5\tfrac{\pi}{6}) = -128{,}5 + i74{,}21, \tag{46}$$
$$f(5,6\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i6\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(6\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(6\tfrac{\pi}{6}) = -148{,}1 + i0, \tag{47}$$
$$f(5,7\tfrac{\pi}{6}) = e^5 \cdot e^{i7\frac{\pi}{6}} = e^5 \cos(7\tfrac{\pi}{6}) + ie^5 \sin(7\tfrac{\pi}{6}) = -128{,}5 - i74{,}21. \tag{48}$$

En la gráfica se puede observar cómo para este caso el módulo se mantiene constante y el argumento va cambiando a razón de $\frac{\pi}{6}$.



10. Se pide determinar los valores de z que cumplan con la condición dada.

a) En este punto se debe cumplir la condición $|e^{-z}| < 1$. El primer paso es reemplazar $z = x + iy$, y luego operar el miembro izquierdo de la ecuación.

$$|e^{-z}| < 1, \tag{49}$$
$$|e^{-x-iy}| < 1, \tag{50}$$
$$|e^{-x} \cdot e^{-iy}| < 1, \qquad \textit{El módulo es } e^{-x}, \tag{51}$$
$$e^{-x} < 1, \tag{52}$$
$$-x < \ln 1, \qquad \textit{Se aplica logaritmo natural en ambos miembros}, \tag{53}$$
$$-x < 0, \tag{54}$$
$$x > 0. \tag{55}$$

b)

c) En este punto se solicita encontrar z que cumpla la condición $Re\{e^{2z}\} = 0$. El primer paso es desarrollar e^{2z} reemplazando z por $x + iy$. Luego se debe aplicar la fórmula de Euler.

$$e^{2z} = e^{2(x+iy)}, \tag{56}$$
$$e^{2x+i2y} = e^{2x}\cos(2y) + ie^{2x}\sin(2y), \tag{57}$$
$$\tag{58}$$

Ahora tomamos la parte real de e^{2z} y la igualamos a 0

$$e^{2x}\cos(2y) = 0 \tag{59}$$

Por inspección vemos que e^{2x} es mayor que 0 para todo x. Para que se cumpla la igualdad planteamos los valores de y que producen $cos(2y) = 0$. Esto es:

$$2y = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \qquad para\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{60}$$
$$y = \frac{\pi}{4} \pm \frac{k\pi}{2} \tag{61}$$
$$y = \frac{\pi}{4}(1 \pm 2k\pi) \qquad para\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{62}$$

11. Se deben encontrar los valores de z que cumplan con la ecuación dada.

    a)

    b) Desarrollamos el exponente en forma cartesiana y el termino derecho en forma polar,

$$e^z = -7, \tag{63}$$
$$e^x e^{iy} = 7e^{\pm i\pi}. \tag{64}$$

Igualando complejos, podemos escribir:

$$e^x = 7 \to \ln|x| = 7, \tag{65}$$
$$y = \pm\pi \pm 2k\pi. \tag{66}$$

Donde se ha sumado $\pm 2k\pi$ debido a la periodicidad de la exponencial compleja. Con esto podemos escribir el resultado de la Ec. 63 como:

$$z = x + iy, \tag{67}$$
$$= \ln(7) \pm (2k+1)\pi, \tag{68}$$
$$= 1{,}9459 \pm (2k+1)\pi. \tag{69}$$
$$\tag{70}$$

c) Tomamos este punto como ejemplo.
Se deben encontrar los valores de z de modo que se cumpla que $e^z = 4 + 3i$.
Una forma para resolverlo es reemplazando $z = x + iy$ obteniendo la siguiente ecuación:

$$e^x.e^{iy} = 4 + 3i. \tag{71}$$

Calculamos el módulo y el argumento de $4 + 3i$ y lo expresamos en forma polar:

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \tag{72}$$
$$Arg\{4 + 3i\} = \arctan\frac{3}{4} = 0{,}6435 \tag{73}$$

Reescribiendo (71)

$$e^x.e^{iy} = 5e^{i0{,}6435}, \tag{74}$$

y por inspección podemos plantear:

$$e^x = 5, \tag{75}$$
$$x = \ln 5, \tag{76}$$
$$x = 1{,}609. \tag{77}$$
$$y = 0{,}6435 \pm 2k\pi. \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{78}$$

La respuesta completa sería:

$$\boxed{z = 1{,}609 + i(0{,}6435 \pm k2\pi), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.} \tag{79}$$

12. Este ejercicio se resuelve de forma sencilla usando la identidad trigonométrica correspondiente.

    a) Para calcular el valor de $\cos 6i$ se usa la identidad para el coseno dada en la Ec. 10, a saber,

$$\cos(6i) = \cos 0 \cosh 6 - i \sin 0 \sinh 6, \tag{80}$$
$$\cos(6i) = \boxed{201,7}. \tag{81}$$

    b)

13. Para la demostración siguiente, se hace uso de las Ec. 10, 12 y 17.

    a)

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y), && (82)\\ &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + (1-\cos^2(x))\sinh^2(y), && (83)\\ &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sinh^2(y) - \cos^2(x)\sinh^2(y), && (84)\\ &= \cos^2(x)[\cosh^2(y) - \sinh^2(y)] - \sinh^2(y), && (85)\\ &= \boxed{\cos^2(x) + \sinh^2(y)} && (86) \end{aligned}$$

14. Se deben encontrar los valores para la variable z que cumplan con la ecuación dada.

    c) Usando la identidad dada en la Ec. 15,

$$\cosh z = 0{,}5, \tag{87}$$
$$\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. = 0{,}5 \tag{88}$$

    Igualando parte real con parte real, e imaginaria con imaginaria,

$$\cosh x \cos y = 0{,}5, \tag{89}$$
$$\sinh x \sin y = 0. \tag{90}$$

    Por inspección tratamos de identificar qué valores pueden tomar las variables x e y para que se cumplan las igualdades. En la primera ecuación, si $x = 0$, $\cosh 0 = 1$, y despejando para la y,

$$y = \arccos 0{,}5 = \pm\frac{\pi}{3} \pm k2\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

    Es importante recordar que las funciones trigonométricas son periódicas cada 2π, por lo que se debe agregar el término $k2\pi$ en el resultado.
    La segunda ecuación se cumple debido a que $\sinh 0 = 0$. Por lo tanto,

$$\boxed{z = i\left(\pm\frac{\pi}{3} \pm k2\pi\right).} \tag{91}$$

15. Para resolver los logaritmos complejos usamos la expresión dada en la Ec. 18.

c) Expresamos en forma exponencial al complejo z que está en el argumento de la función logaritmo natural, para identificar módulo y argumento,

$$z = 1e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Reemplazando y tomando las consideraciones correspondientes,

$$\ln z = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm k2\pi\right) = \boxed{0 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm k2\pi\right)} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{92}$$

16. Se usa nuevamente la Ec. 18.

a) En primer lugar se calcula módulo y argumento para el complejo $3+5i$,

$$|z| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}, \tag{93}$$

$$Arg\{z\} = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) = 1{,}03. \tag{94}$$

Ahora se calcula,

$$\ln(3+5i) = \ln(\sqrt{34}) + i(1{,}03 \pm k2\pi), \tag{95}$$

$$= 1{,}76 + i(1{,}03 \pm k2\pi) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{96}$$

Para la representación gráfica, se toman los valores $k = 0, 1, 2$. Con esto queda,

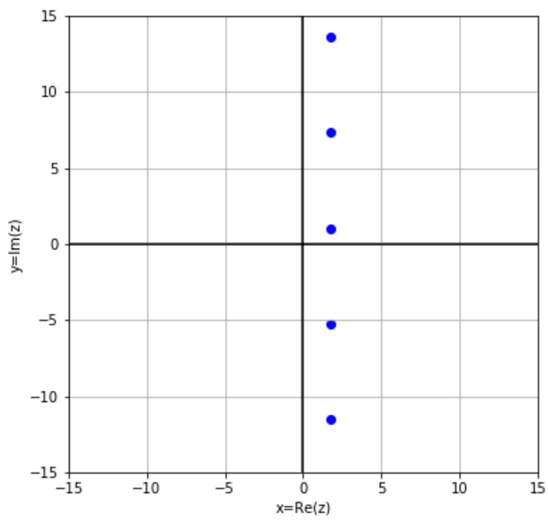
$$w_0 = 1{,}76 + i1{,}03, \tag{97}$$

$$w_1 = 1{,}76 + i(1{,}03 + 2\pi) = 1{,}76 + i7{,}31, \tag{98}$$

$$w_{1^-} = 1{,}76 + i(1{,}03 - 2\pi) = 1{,}76 - i5{,}25, \tag{99}$$

$$w_2 = 1{,}76 + i(1{,}03 + 4\pi) = 1{,}76 + i13{,}6, \tag{100}$$

$$w_{2^-} = 1{,}76 + i(1{,}03 - 4\pi) = 1{,}76 - i11{,}5. \tag{101}$$



17.

18. Sabiendo que la distancia entre dos puntos z y a es $|z-a|$, se consideran las siguientes regiones:

- Circunferencia de radio ρ y centro a: $|z-a| = \rho$.
- Disco circular abierto: $|z-a| < \rho$.
- Disco circular cerrado: $|z-a| \leqslant \rho$.
- Parte exterior de una circunferencia: $|z-a| > \rho$, $|z-a| \geqslant \rho$.
- Anillo circular (puede ser combinación de abierto y cerrado): $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$.

Algunos ejemplos de semiplanos son:

- Semiplano superior abierto: $Im(z) > 0$
- Semiplano derecho: $Re(z) > 0$

a) $|z| \leq 3$
De la definición se puede inferir que esta región es disco circular cerrado con radio $\rho = 3$ y centro en $a = 0$. Es decir, es la circunferencia unitaria.

También, resolviendo,

$$
\begin{aligned}
|z| &\leq 3, && (102)\\
|x+jy| &\leq 3, && (103)\\
\sqrt{x^2+y^2} &\leq 3, && (104)\\
x^2+y^2 &\leq 3^2. && (105)
\end{aligned}
$$

Que es la ecuación de una circunferencia de radio unitario, centrada en el origen.

k) $\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \leq 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+1+jy}{x-1+jy}, && (106)\\
&= \frac{x+1+jy}{x-1+jy} \cdot \frac{x-1-jy}{x-1-jy}, && (107)\\
&= \frac{(x+1)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} + j\,\frac{[y(x-1)-y(x+1)])}{(x-1)^2+y^2}, && (108)\\
&= \frac{(x+1)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} - j\,\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}. && (109)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &\leq 2, && (110)\\
-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} &\leq 2, && (111)\\
-2y &\leq 2[(x-1)^2+y^2], && (112)\\
-y &\leq (x-1)^2+y^2, && (113)\\
0 &\leq (x-1)^2+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, && (114)\\
\frac{1}{4} &\leq (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2. && (115)
\end{aligned}
$$

Circunferencia cerrada de radio $\rho = \frac{1}{2}$, centrada en $a = 1 - j\frac{1}{2}$.