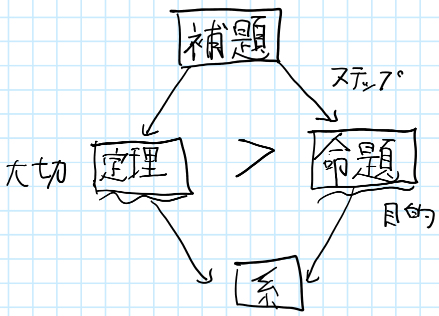
第2講

2023年9月21日　13:02

1.2 準備

- $\mathbb{N}$ ：自然数全体（のSet）
- $\mathbb{Z}$ ：整数全体
  （$\mathbb{I}$）
- $\mathbb{Q}$ ：有理数全体
- $\mathbb{R}$ ：実数全体
- $\mathbb{C}$ ：複素数全体

- 定義 → Def (Definition)
- 定理 → Th (Theorem)
- 命題 → Prop. (Proposition)
- 補題 → Lem
- 系 → Cor.



- 注意 → Rem
- 例 → Ex.
- すなわち → i.e
- 〜のような → s.t. 〜
- 任意の ： $\forall$
- 存在 ： $\exists$
- 含意 ： $\Rightarrow$
- 同値 ： $\Leftrightarrow$
- したがって ： $\therefore$
- なぜならば ： $\because$

2. 論理と命題

Def 2.1
命題とは真(True)であるか偽(False)であるかが客観的に判断できる文（あるいは
す）のこと

あるかが客観的に判断できる文（あるいは
式）のこと。
命題pが真であることをT、偽であることを
Fで表す。このTやFをpの真理値という。

例2.2　$\underbrace{p}_{\text{命題}}$：「$1<2$」：T

$\underbrace{q}_{\text{命題}}$：「$1<0$」：F

例2.3

$\underbrace{p}_{\text{命題でない}}$：「100は$\underbrace{\text{大きい}}$数である」

主観に基づく。

2.1.1　複合命題

Def 2.4

p：命題

このとき、$\neg p$：「pはTでない」という文とすると、
pはT,Fのいずれか ⇝ $\neg p$：命題（pの否定という）

p	$\neg p$
T	F
F	T

← このような表を真理論値という

例2.5：p：「$1+1=3$」：F

p：「$1+1\neq 3$」：T

Def 2.6

数学における矛盾とは、命題pとその否定$\neg p$が同時にTと証明されること。

Def 2.7

p, q：命題

このとき、

$p \vee q$「pはTまたは、qはT」

とすると、$p \vee q$：命題

（pとqの論理和）

(pとqの論理和)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 2.8

p:「$0 < -2$」(F)　q:「$0 < 1$」(T)

$p \vee q$:「$0 < -2$ または $0 < 1$」T

Def 2.9

p, q: 命題

のとき、

$p \wedge q$:「pはT かつ qもT」

$p \wedge q$: 命題 (pとqの論理積)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 2.1.0

p:「6は even」(T)

q:「6は 3の倍数」(T)

$p \wedge q$:「6は even かつ 3の倍数」T

Def 2.1.1

p, q: 命題 のとき、

$\underbrace{p \to q}_{命題}$「pがTならば qもT」

(含意: implication)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
T		T

F	T	T
F	F	T

例 1.2.1.2

p :「$1 \neq 1$」 (F)　q :「$\sqrt{2}$ は有理数」 (F)

$p \to q$「$\underbrace{1 \neq 1 \text{ ならば } \sqrt{2} \text{ は有理数}}_{T}$」

2.2 命題論理

注 2.1.3

$\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$ は, p, q を変数とする「式」と見ることができる.

例えば,

$$p \vee (p, q) = p \vee q \quad (p, q : 命題)$$

他にも

$$P(p, q, r) = p \vee (q \wedge r)$$

のように, 命題を変数とする論理式が作れる.

Def 2.1.4

P, Q : n個の命題 $p_1, \cdots, p_n$ を変数とする論理式.

このとき,

$P = Q \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ どのような命題 $p_1, \cdots, p_n$ に対しても,
$P(p_1, \cdots, p_n) = Q(p_1, \cdots, p_n)$

Th 2.1.5

p, q, r : 命題

(i) $\neg(\neg p) = p$

(ii) $p \vee p = p \wedge p = p$

(iii) $p \vee q = q \vee p$, $p \wedge q = q \wedge p$

(iv) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

(v) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

(vi) $p \vee q = \neg q \to p$

Prop

(i) $\neg(\neg p) = p$

Prop

(i) $\neg(\neg p) = p$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

p.q の真理値が一致.

$$\begin{cases} p: T \text{ のとき} & q: T \\ p: F \text{ のとき} & q: F \end{cases}$$

$p \to q : T$

$\underbrace{q}_{F} \to p : T$

p.q は同じ意味.

(ii) $p \vee p = p \wedge p = p$

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T
F	F	F

(vi) $p \vee q = \neg p \to q$

「p は T または q は T」

= 「¬p が T（つまり、p が F）のとき、
q は T（となるしかない）」

$\neg p \to q$

注 2.1.6

Th 2.1.5 (i) & (vi) から

$\neg p \vee q = \neg(\neg p) \to q = p \to q$

$\underbrace{p}_{\neg p \text{を代入}} \vee q = \neg \underbrace{p}_{\neg p} \to q \quad \therefore \; p \to q = \neg p \vee q$

注 2.1.7

Th. 2.1.5 (iv) & (v) より,

$p \vee q \vee r, \quad p \wedge q \wedge r$

$p\vee q\vee r$, $p\wedge q\wedge r$

と単に書ける.

同様に、$p_1\vee \cdots \vee p_n$

$p_1\wedge \cdots \wedge p_n$

注 2.1.8

命題 P が T であると仮定したとき.
矛盾が生じるならば、P は F でなければならない (体系が無矛盾ならば)
このように、証明すべき (したい) 命題 P の否定 $\neg P$ を (T と) 仮定し、
矛盾を導くことで P が T であると結論づける方法を「背理法」という.

Th 2.1.9

p, q, r : 命題

(i) $p\vee(q\wedge r) = (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

(ii) $p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

Th 2.2.0

p, q : 命題

(i) $\neg(p\vee q) = (\neg p)\wedge(\neg q)$

(ii) $\neg(p\wedge q) = (\neg p)\vee(\neg q)$

Th 2.2.1 (対偶)

p, q : 命題

$p\rightarrow q = \neg q\rightarrow \neg p$