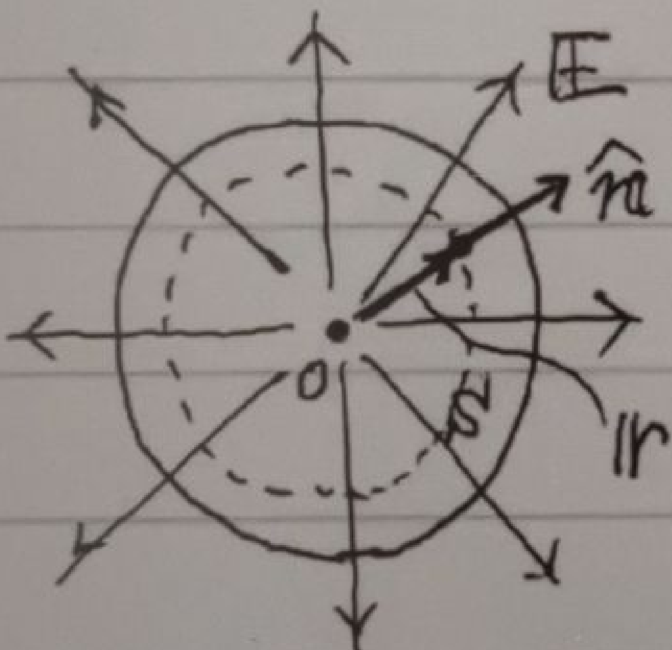
1) 球対称電荷

→ 電荷密度が原点からの距離だけの関数で方向によらない。

→ 電場も球対称で特別な方向をもたない。



◦ガウス曲面 S として半径 r の球面をとる。

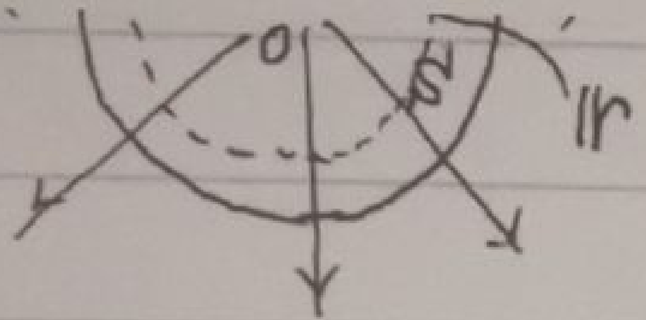
→ 球面の外向き法線方向 $\hat{n}$ は r 方向に一致

→ $E_n = E_r$: 球面上で一定の大きさ

→ dS のとり方によらない。

(ガウスの法則)

$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \varepsilon_0 \int_S E_r(r) dS$$



・球面の法線と電気力線の向きはr方向に一致

$\rightarrow E_n = E_r$ ：球面上で一定の大きさ

$\Leftarrow$ dS のとり方によらない。

（ガウスの法則）

$$\varepsilon_0 \int_S E_n \, dS = \varepsilon_0 \int_S E_r(r) \, dS$$

$$= \varepsilon_0 E_r(r) \underbrace{\int_S dS}_{\text{球面の面積}}$$

$$= \varepsilon_0 E_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

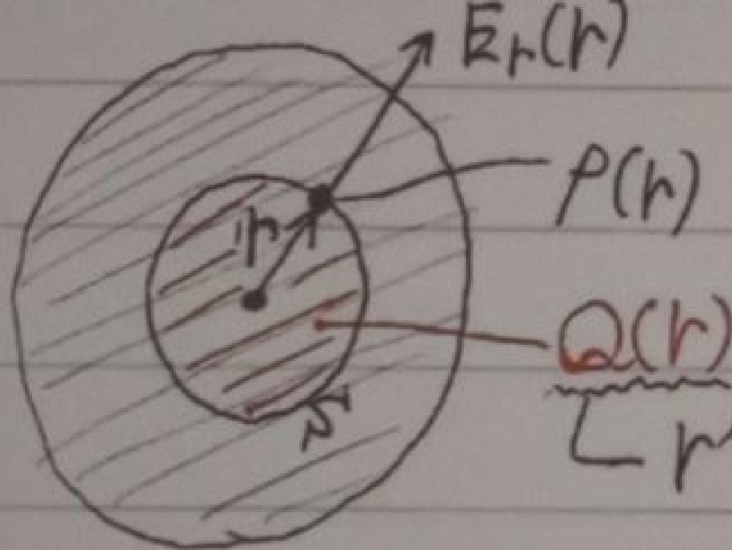
$$= \underbrace{Q(r)}_{\text{半径 } r \text{ のガウス曲面内の電荷}}$$

$$\therefore \quad E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

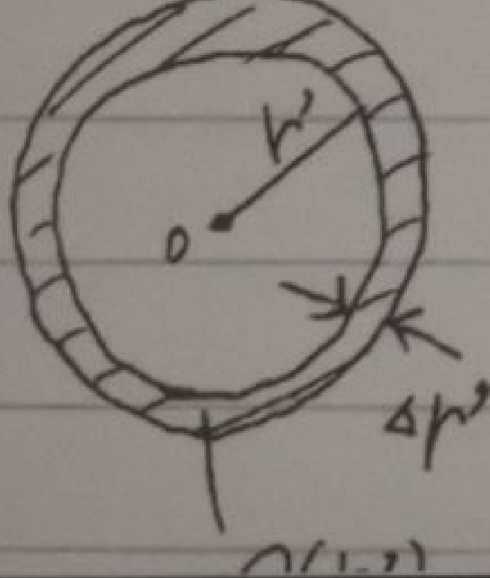
$Q(r)$:

球対称の電荷分布 $\longrightarrow$ 例) $\rho(r) = ar,\ \dfrac{a}{r}$

↳ 中心からの距離にのみ依存



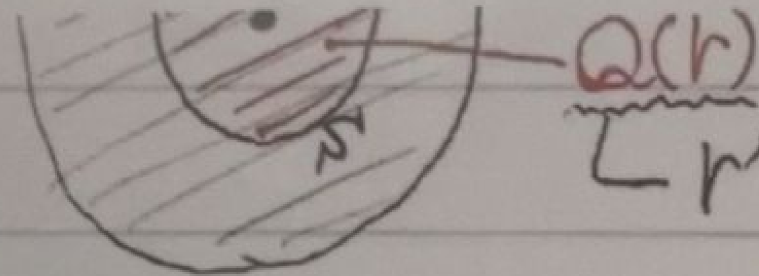
└ r の微小領域の電荷を 0 から r まで積分



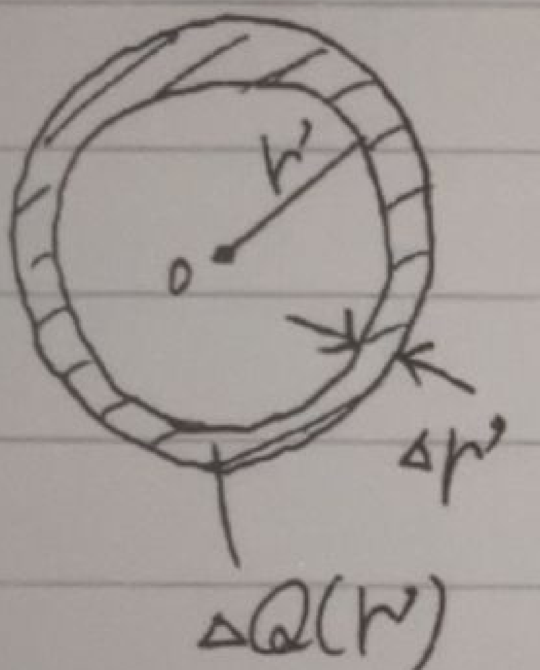
r と $r+\Delta r$ の2つの球面に挟まれた球殻の体積は、

$$4\pi r^2 \cdot \Delta r$$ 。

電荷密度を $\rho(r)$ とすると、



r'の微小領域の電荷を0からrまで積分



r'と$r'+\Delta r'$の2つの球面に狭まれた球殻の体積は、

$$4\pi r'^2 \cdot \Delta r'$$ 。

電荷密度を$\rho(r')$とすると、

$$\Delta Q(r') = \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 \Delta r'$$ 。

r'について、0からrまで積分:

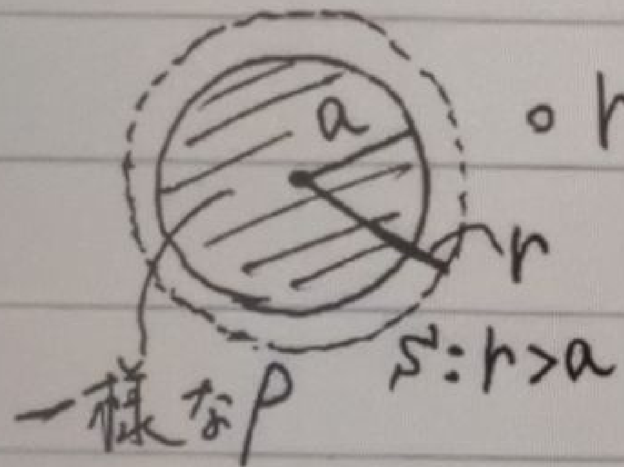
$$Q(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'$$ 。

例題 (p.28, 3)

半径 a の球内に一様な密度 ρ で電荷が分布しているときの電場を求めよ。

解) Sのとり方：$r>a$ or $r \leqq a$

(電荷がある領域とない領域)



◦ $r>a$ のとき

$$Q(r) = \underbrace{Q}_{\text{全電荷}} = \rho \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi a^3}_{\text{球の体積}}$$

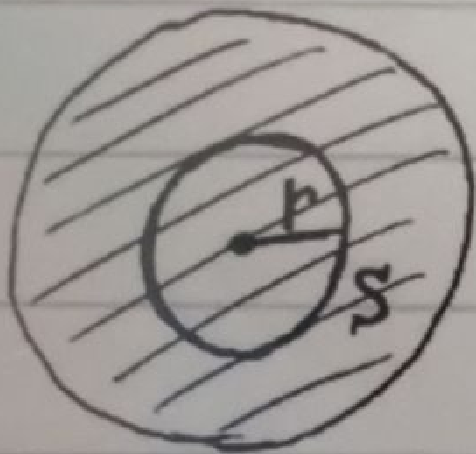
よって、

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 r^2}\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\rho a^3$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

// $r>a$



◦ $r \leqq a$ のとき

$$Q(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

よって、

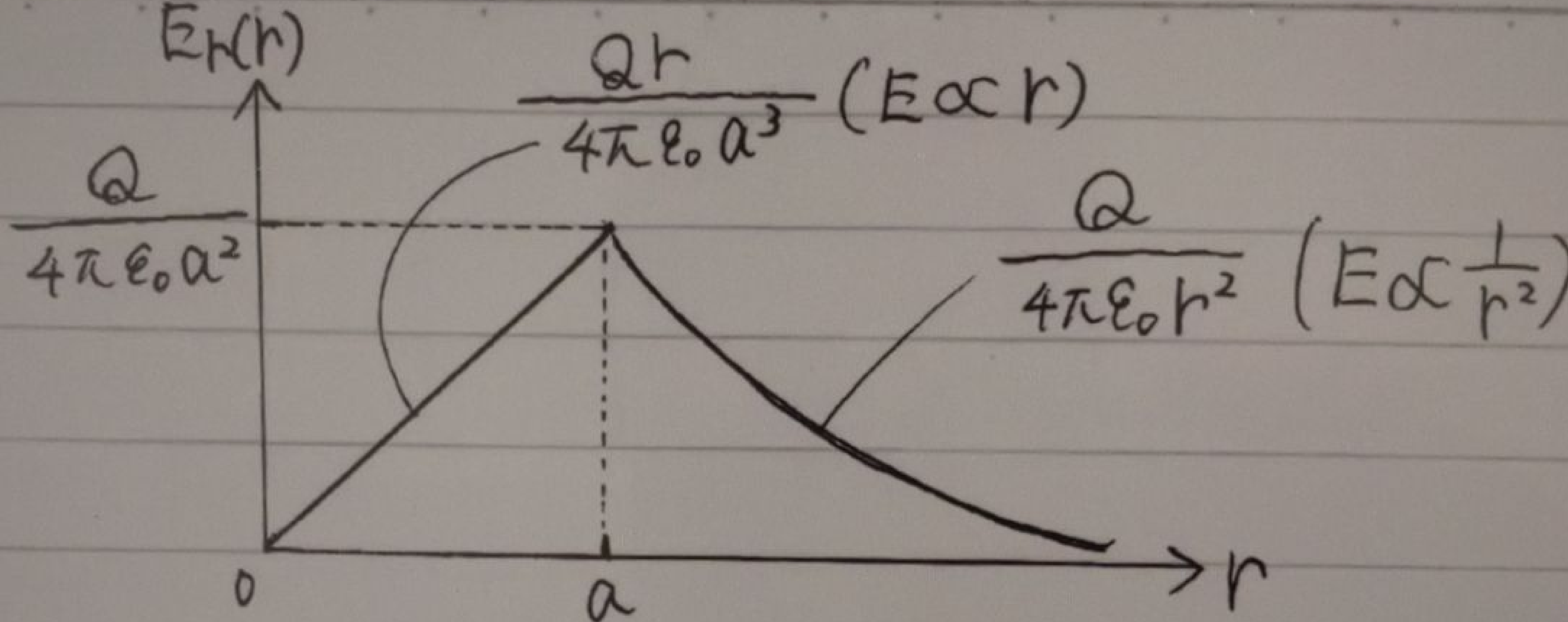
$$E_r(r) = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 r^2}\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\rho r^3$$

$$= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad // \; r \leqq a$$

※全電荷Qを用いると、

$$Q(r) = Q\underbrace{\frac{r^3}{a^3}}_{\text{体積比}}$$

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}$$

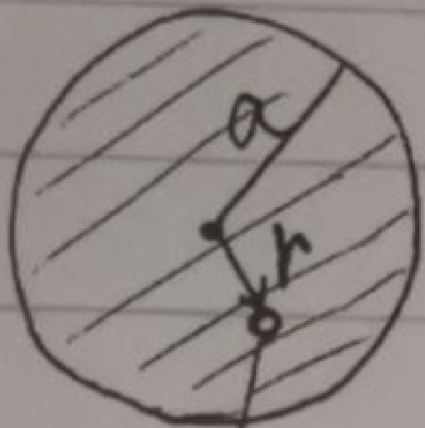

$E_r(r)$
$\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ ($E \propto r$)
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ($E \propto \frac{1}{r^2}$)
0
a
r

演習 (p.37 [5])

半径 a の球内に電荷密度 $\rho(r) = br^2$ で
電荷が分布しているときの電場を求めよ。

解）

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$Q(r) = \int \underbrace{\underset{4\pi r^2}{\text{球面積}} \times \underset{dr}{\text{微小幅}}}_{\text{球殻体積}} \times \underset{\rho(r)}{\text{電荷密度}}$$

$\rho(r) = br^2$

・$r > a$ のとき、

$$Q(r) = Q$$

$$= \int_0^a 4\pi r^2 \overset{br^2}{\rho(r)}\, dr$$

$$= \int_0^a 4\pi b r^4\, dr$$

$Q(r) = Q$

br

$$= \int_0^a 4\pi r^2 \rho(r)\,dr$$

$$= \int_0^a 4\pi b r^4\,dr$$

$$= 4\pi b\left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^a$$

$$= \frac{4}{5}\pi b a^5$$

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\cancel{4}}{5}\cancel{\pi} b a^5$$

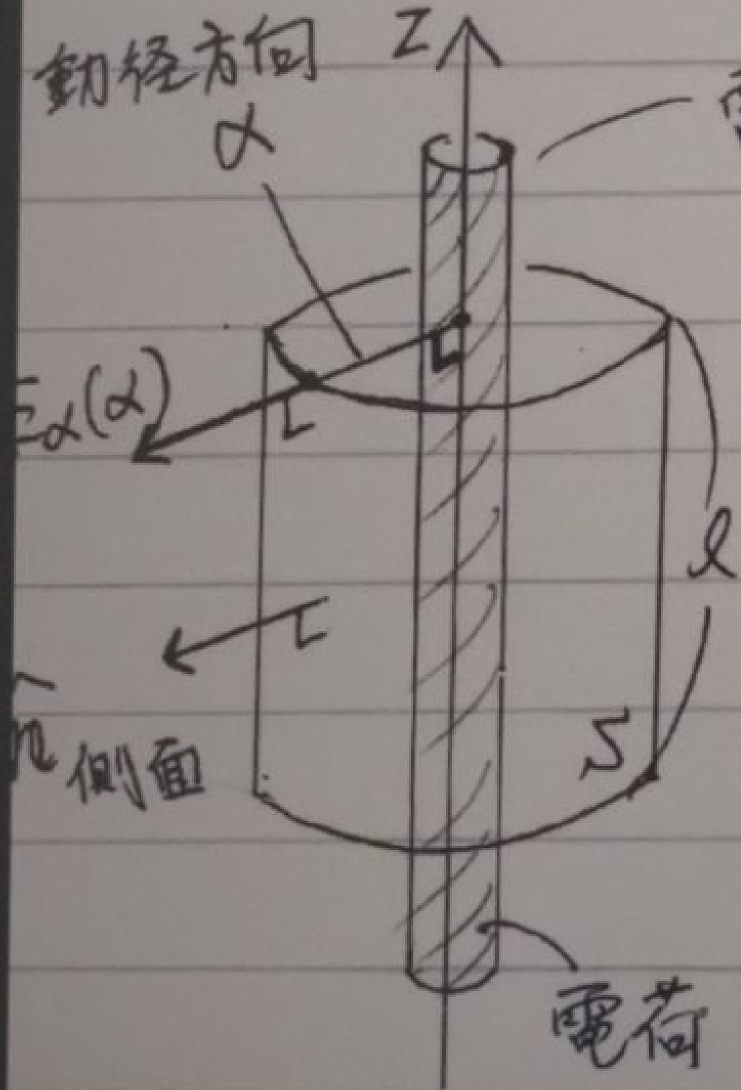
$$= \frac{ba^5}{5\varepsilon_0 r^2} \quad // \; r > a$$

○ $r \leqq a$ のとき

2) 軸対称電荷

→電荷密度が、ある軸まわりの方向によらない。

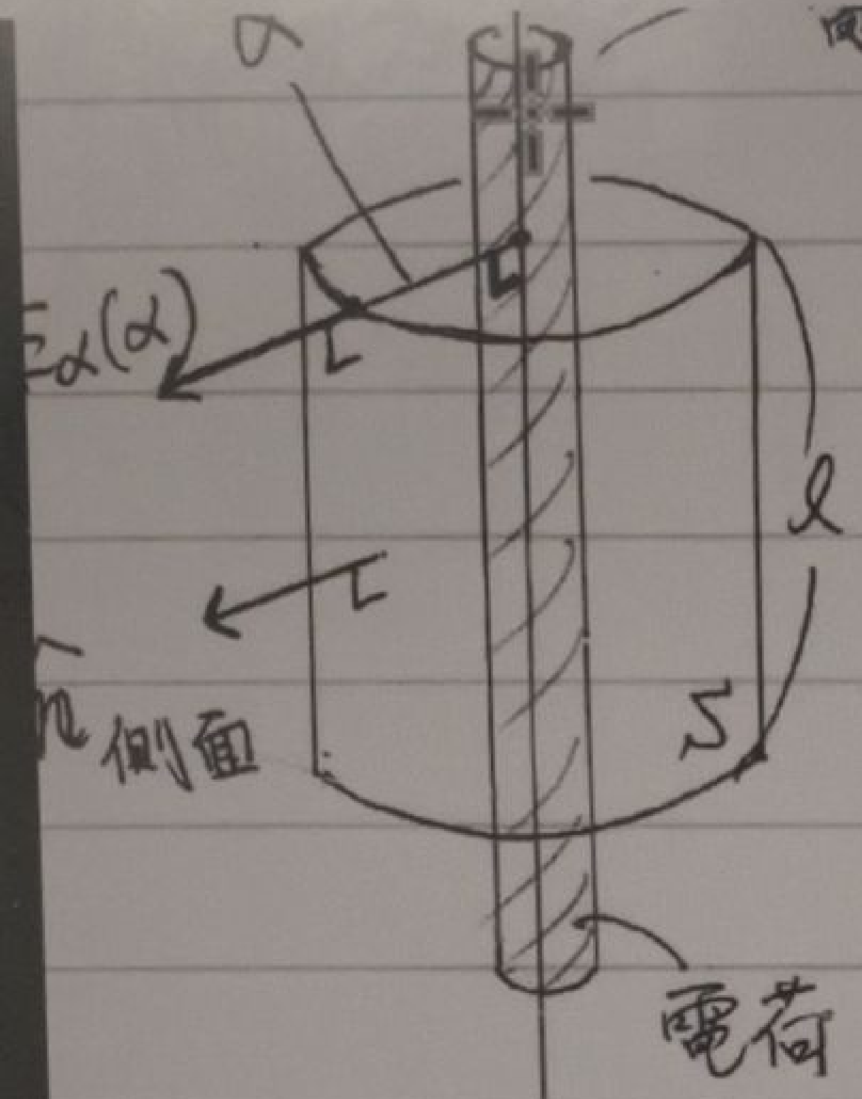
→電場も同様



電荷が円柱状に分布

→無限に長いと見なせれば、
電場は軸方向(z座標)によらない。
対称性から、軸方向の電場は
打ち消し合う。

・ガウス曲面として、中心軸(z軸)を
軸として、半径α、長さlの円筒面



→ 無限に長いと見なせれば、
電場は軸方向(z座標)によらない。
対称性から、軸方向の電場は打ち消し合う。

・ガウス曲面として、中心軸(z軸)を軸として、半径a、長さlの円筒面をとる。

上面、下面、側面からなる。

⇓

しかし、$E_z=0$より、側面だけを考えればよい。

(ガウスの法則)

をとる。

上面、下面、側面からなる。

$\Downarrow$

しかし、$E_z = 0$ より、側面だけを考えればよい。

(ガウスの法則)

$$\varepsilon_0 \int_S E_n \, dS = \varepsilon_0 \int_{\text{側面}} E_\alpha(\alpha) \, dS$$

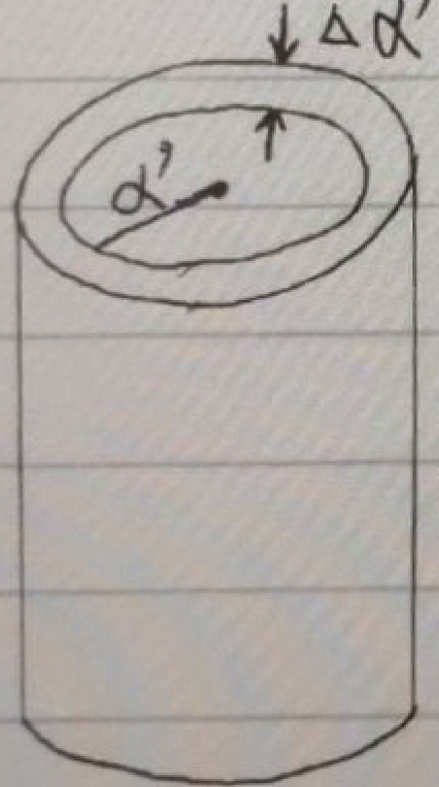
dSのとり方によらない。Sのどこでも同一。

$$= \varepsilon_0 E_\alpha(\alpha) \underbrace{\int_{\text{側面}} dS}_{\text{側面積 } 2\pi\alpha \cdot l}$$

$$= 2\pi\alpha l \, \varepsilon_0 E_\alpha(\alpha)$$

$$= Q(\alpha)$$

$Q(\alpha)$：ガウス曲面（円筒面）内の電荷



軸から動径方向 α の電荷密度を $\rho(\alpha)$ とすると、半径 α' と $\alpha'+\Delta\alpha'$、長さ l の円筒面に挟まれた微小部分（円筒殻）の体積は $2\pi\alpha'\cdot l\cdot\Delta\alpha'$ であるから、

$$Q(\alpha)=\int_0^{\alpha}2\pi\alpha' l\cdot\rho(\alpha')\,d\alpha'$$

$$E_\alpha(\alpha)=\frac{Q(\alpha)}{2\pi\varepsilon_0\alpha l}$$