応用数学1

第11回目

3.2 線型同次方程式

定数係数の2階線形同次微分方程式

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{a=1} + \underbrace{P(x)}_{b}\frac{dy}{dx} + \underbrace{Q(x)}_{c}\,y = R(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad : b, c は実定数$$

$$y = f(x)$$

ここで、$y = e^{\rho x}$ (ρ: 複素定数 $\alpha + i\beta$) を代入すると、

$$y'' + by' + cy = 0$$

$$(e^{\rho x})'' + b(e^{\rho x})' + c(e^{\rho x}) = 0$$

ここで、$y = e^{\rho x}$（ρ：複素定数 $\alpha + i\beta$）を代入すると、

$$y'' + by' + cy = 0$$

$$(e^{\rho x})'' + b(e^{\rho x})' + c(e^{\rho x}) = 0$$

$$\rho^2 e^{\rho x} + b\rho e^{\rho x} + c e^{\rho x} = 0$$

$$(\rho^2 + b\rho + c) e^{\rho x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$\rho^2 + b\rho + c = 0$ ：固有方程式

↳ 解：$\rho = \lambda, \mu$（複素数）

$$\Downarrow$$

$y = e^{\lambda x}, e^{\mu x}$ はそれぞれ同次方程式の1つの解 $\Rightarrow$ 基本解

ここで、$y = Ae^{\lambda x}$（Aは任意定数）とすると、

$$
\begin{aligned}
& y'' + by' + cy \\
&= (Ae^{\lambda x})'' + b(Ae^{\lambda x})' + cAe^{\lambda x} \\
&= A\lambda^2 e^{\lambda x} + bA\lambda e^{\lambda x} + cAe^{\lambda x} \\
&= Ae^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c)
\end{aligned}
$$

$= 0$（λは固有方程式の解）

$$= 0$$

→ $y = Ae^{\lambda x}$ も $Be^{\mu x}$ も同次方程式の解

さらに、$y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
& y'' + by' + cy \\
&= (Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x})'' + b(Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x})' \\
&\qquad + c(Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x})
\end{aligned}
$$

さらに、$y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
& y'' + by' + cy \\
&= (Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x})'' + b(Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x})' \\
&\qquad + c(Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}) \\
&= A\lambda^2 e^{\lambda x} + B\mu^2 e^{\mu x} + bA\lambda e^{\lambda x} + bB\mu e^{\mu x} \\
&\qquad + cAe^{\lambda x} + cBe^{\mu x} \\
&= Ae^{\lambda x}(\underbrace{\lambda^2 + b\lambda + c}_{=0}) + Be^{\mu x}(\underbrace{\mu^2 + b\mu + c}_{=0}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

↳ $y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$ も解（重ね合わせの原理）

$\Downarrow$

一般解

● $\lambda \neq \mu$ ならば、$y = e^{\lambda x}, e^{\mu x}$：基本解

$$\underline{y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}\ (A, B\text{は任意定数})\text{：一般解}}$$

● $\lambda = \mu$ ならば、$e^{\lambda x}$ が1つの基本解。

固有方程式：$\rho^2 + b\rho + c = 0$

$$= (\rho - \lambda)^2$$

$$= \rho^2 - 2\lambda\rho + \lambda^2$$

$$\therefore \begin{cases} b = -2\lambda \\ c = \lambda^2 \end{cases}$$

$$y'' + by' + c = y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} y - 2\lambda \frac{d}{dx} y + \lambda^2 y$$

$$= y \left(\frac{d^2}{\quad} - 2\lambda \frac{d}{\quad} + \lambda^2 \right)$$

$$y'' + by' + c = y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} y - 2\lambda \frac{d}{dx} y + \lambda^2 y$$

$$= y\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\lambda \frac{d}{dx} + \lambda^2\right)$$

$$= y\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^2$$

もう1つの基本解を

$y = B(x) e^{\lambda x}$ とすると

$$= B(x) e^{\lambda x} \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^2$$

$$= \left\{\frac{d}{dx}\left(B(x) e^{\lambda x}\right) - \lambda B(x) e^{\lambda x}\right\}\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)$$

$$= \left\{B'(x) e^{\lambda x} + \lambda B(x) e^{\lambda x} - \lambda B(x) e^{\lambda x}\right\}\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)$$

$$= B'(x) e^{\lambda x}\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)$$

$$= \frac{d}{dx} B'(x) e^{\lambda x} - \lambda B'(x) e^{\lambda x}$$

$$= B''(x)e^{\lambda x} + B'(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda B'(x)e^{\lambda x}$$

$$= B''(x)e^{\lambda x}$$

$$= 0 \quad (\because \text{同次方程式})$$

よって、$B''(x) = 0$

$$\downarrow \text{積分}$$

$$B'(x) = C$$

$$\downarrow \text{積分}$$

$$B(x) = Cx + D$$

C, D は任意定数 $\Longrightarrow$ $C=1$, $D=0$ とすればよい

↓ 積分

$$B(x) = Cx + D$$

C, D は任意定数 $\Rightarrow$ $C=1, D=0$ とすればよい。

$$B(x) = x$$

$$\hookrightarrow y = \underline{x} e^{\lambda x}$$

がもう1つの基本解。

したがって、一般解は、

$$y = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$$

$$= (A+Bx)e^{\lambda x} \quad (A, B \text{は任意定数})$$

※ $y = B(x)e^{\lambda x}$

$$= (Cx + D)e^{\lambda x}$$

↓ 重ね合わせの原理

一般解：$y = Ae^{\lambda x} + (Cx+D)e^{\lambda x}$

がもう1つの基本解。

したがって、一般解は、

$$
\begin{aligned}
y &= Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x} \\
&= (A + Bx)e^{\lambda x} \quad (A, B\text{は任意定数})
\end{aligned}
$$

※ $$
\begin{aligned}
y &= B(x)e^{\lambda x} \\
&= (Cx + D)e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ 重ね合わせの原理

一般解：$y = Ae^{\lambda x} + (Cx + D)e^{\lambda x}$

$$= Ee^{\lambda x} + Cxe^{\lambda x} \quad (E \equiv A + D)$$

↳ $C = 1,\ D = 0$ とすればよい。

例題1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、$y'' = p^2 e^{px}$, $y' = pe^{px}$ より、

$$p^2 e^{px} - 3pe^{px} + 2e^{px}$$
$$= (p^2 - 3p + 2)e^{px} = 0$$

固有方程式：$p^2 - 3p + 2 = 0$

$$(p-1)(p-2) = 0$$
$$\therefore p = 1, 2$$

基本解：e^x, e^{2x}

一般解：$y = Ae^x + Be^{2x}$ (A, Bは任意定数)

例題2. $y'' + 2y' + y = 0$

例題2． $y''+2y'+y=0$

$y=e^{px}$ とすると、

固有方程式：$p^2+2p+1=0$

$(p+1)^2=0$

$\therefore p=-1$（重複解）

基本解：e^{-x}, xe^{-x}

一般解：$y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$

$=(A+Bx)e^{-x}$（A, Bは任意定数）

例題3. $y'' - 4y' + 13y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、

固有方程式：$p^2 - 4p + 13 = 0$

$p = 2 \pm 3i$（虚数解、共役複素数）

基本解：$e^{(2+3i)x}$, $e^{(2-3i)x}$

一般解：$y = Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x}$

（A, Bは任意定数）

$$= Ae^{2x}e^{3ix} + Be^{2x}e^{-3ix}$$

オイラーの関係 $\longrightarrow$ $= e^{2x}\{A(\cos 3x + i\sin 3x)$

$$+ B(\underbrace{\cos(-3x)}_{\cos 3x} + i\underbrace{\sin(-3x)}_{-\sin 3x})\}$$

$$= e^{2x}\{(A+B)\cos 3x + (A-B)i\sin 3x\}$$

演習課題　解答

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^{px}$とすると、

固有方程式：$p^2 + p - 2 = 0$

$(p-1)(p+2) = 0$

$\therefore p = 1, -2$

基本解：e^{x}, e^{-2x}

一般解：$y = Ae^{x} + Be^{-2x}$ (A, Bは任意定数)

(2) $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{px}$とすると、

固有方程式：$p^2 - 2p + 1 = 0$

$$= e^{2x}\{(A+B)\cos 3x + (A-B)i\sin 3x\}$$

$$\begin{cases} C \equiv A+B \\ D \equiv (A-B)i \end{cases}$$

$$y = e^{2x}(C\cos 3x + D\sin 3x)$$

演習

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

(2) $y'' - 2y' + y = 0$

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$

↳ 本授業内で解いてみましょう。

$\therefore \rho = 1, -2$

基本解：e^{x}, e^{-2x}

一般解：$y = Ae^{x} + Be^{-2x}$（A, Bは任意定数）

(2) $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{\rho x}$とすると、

固有方程式：$\rho^2 - 2\rho + 1 = 0$

$(\rho - 1)^2 = 0$

$\therefore \rho = 1$：重複解

基本解：e^{x}, xe^{x}

一般解：$y = Ae^{x} + Bxe^{x}$

$= (A + Bx)e^{x}$（A, Bは任意定数）

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y = e^{\rho x}$

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y = e^{\rho x}$ とすると、

固有方程式：$\rho^2 - 2\rho + 2 = 0$

$$\rho = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

基本解：$e^{(1+i)x}$, $e^{(1-i)x}$

一般解：$y = Ae^{(1+i)x} + Be^{(1-i)x}$

(A, B は任意定数)

$$= e^{x}\{A(\cos x + i\sin x)$$

$$+ B(\underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} + i\,\underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x})\}$$

一般解：$y = Ae^{(1+i)x} + Be^{(1-i)x}$

（A, Bは任意定数）

$$= e^{x}\{A(\cos x + i\sin x) + B(\underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} + i\underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x})\}$$

$$\begin{cases} C = A + B \\ D = (A-B)i \end{cases}$$

$$= e^{x}(C\cos x + D\sin x)$$

//