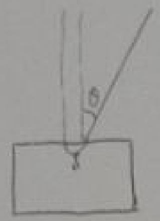

材料の力学 2

m: 質量，r は回転中心からの距離，ω: 角速度

$$F = mr\omega^2$$

アンテナとスピン衛星の接点を原点としたx軸を取る。
回転軸とアンテナの距離を $v(x)$ とすると，初期条件は以下である。

$$v(0) = \delta$$

ここで，δは定数であり，たわみを4階微分すると遠心力になることから以下の式が成り立つ。

$$-EI\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \underbrace{\rho A}_{\text{質量が(密度×断面積)になってる(謎) 覚える}} v(x)\omega^2$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{\rho A}{EI}\omega^2 v(x) = 0$$

この式を出す

ここで，$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}}$ であるから

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \beta^4 v(x) = 0$$

微分方程式(一般解を覚える)

このとき，$v(x)$の一般解は $v(x) = C_1' e^{\beta x} + C_2' e^{-\beta x} + C_3' e^{i\beta x} + C_4' e^{-i\beta x}$ である。(C_1', C_2', C_3', C_4' は定数)

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$，$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ より

$$e^x = \sinh x + \cosh x$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

公式忘れていたら覚える

オイラーの公式より

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

これより，$v(x)$の一般解は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1'(\sinh\beta x + \cosh\beta x) + C_2'(\cosh\beta x - \sinh\beta x) + C_3'(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_4'(\cancel{\cosh}\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= (C_1' + C_2')\cosh\beta x + (C_1' - C_2')\sinh\beta x + (C_3' + C_4')\cos\beta x + i(C_3' - C_4')\sin\beta x \\ &= C_1\cosh\beta x + C_2\sinh\beta x + C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x \end{aligned}$$

$(C_1 = C_1' + C_2',\ C_2 = C_1' - C_2',\ C_3 = C_3' + C_4',\ C_4 = i(C_3' - C_4'))$

アンテナの端は自由端と固定端かつ力は何も加わっていないので $\underbrace{v(0) = \delta,\ \frac{dv(0)}{dx} = 0,\ \overbrace{\frac{d^2 v(l)}{dx^2}}^{\text{曲げモーメント}} = 0,\ \overbrace{\frac{d^3 v(l)}{dx^3}}^{\text{荷重}} = 0}_{\text{初期条件}}$

$$\left(\begin{aligned} (\sinh x)' &= \cosh x \\ (\cosh x)' &= \sinh x \end{aligned} \right)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \beta C_1\sinh\beta x + \beta C_2\cosh\beta x - \beta C_3\sin\beta x + \beta C_4\cos\beta x$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \beta^2 C_1\cosh\beta x + \beta^2 C_2\sinh\beta x - \beta^2 C_3\cos\beta x - \beta^2 C_4\sin\beta x$$

$$\frac{d^3 v(x)}{dx^3} = \beta^3 C_1\sinh\beta x + \beta^3 C_2\cosh\beta x + \beta^3 C_3\sin\beta x - \beta^3 C_4\cos\beta x$$

$$C_2 + C_4 = \frac{\theta}{\beta}$$

$$C_1 + C_3 = \delta \quad \cdots \ (1)$$

$$\beta C_2 + \beta C_4 = \theta \quad \cdots \ (2)$$

$$\beta^2 C_1 \cosh\beta l + \beta^2 C_2 \sinh\beta l - \beta^2 C_3 \cos\beta l - \beta^2 C_4 \sin\beta l = 0 \quad \cdots \ (3)$$

$$\beta^3 C_1 \sinh\beta l + \beta^3 C_2 \cosh\beta l + \beta^3 C_3 \sin\beta l - \beta^3 C_4 \cos\beta l = 0 \quad \cdots \ (4)$$

初期条件から式変形を行う。
C_1、C_2 項でまとめる。

(1)式および(2)式より、(3)式および(4)式は以下のようになる。

$$C_1\cosh\beta l + C_2 \sinh\beta l - C_3\cos\beta l - C_4 \sin\beta l = 0 \quad \left(\because \frac{(3)}{\beta^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\cosh\beta l + C_2\sinh\beta l + (C_1 - \delta)\cos\beta l + \left(C_2 - \frac{\theta}{\beta}\right)\sin\beta l = 0 \quad (\because (1), (2))$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{C_1(\cosh\beta l + \cos\beta l) + C_2(\sinh\beta l + \sin\beta l) = \delta\cos\beta l + \frac{\theta}{\beta}\sin\beta l} \quad \cdots \ (3)'$$

$$C_1\sinh\beta l + C_2\cosh\beta l + C_3\sin\beta l - C_4\cos\beta l = 0 \quad \left(\because \frac{(4)}{\beta^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\sinh\beta l + C_2\cosh\beta l - (C_1 - \delta)\sin\beta l + \left(C_2 - \frac{\theta}{\beta}\right)\cos\beta l = 0 \quad (\because (1), (2))$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{C_1(\sinh\beta l - \sin\beta l) + C_2(\cosh\beta l + \cos\beta l) = -\delta\sin\beta l + \frac{\theta}{\beta}\cos\beta l} \quad \cdots \ (4)'$$

(3)'式および(4)'式より、以下のようになる。($\Leftarrow$ C_2を消去し、C_1を出すため) ← 未知数 C_1, C_2, C_3, C_4 のうちどれかを出す(今回は C_1)

$$C_1\{(\cosh\beta l + \cos\beta l)^2 - (\sinh^2\beta l - \sin^2\beta l)\} = \left(\delta\cos\beta l + \frac{\theta}{\beta}\sin\beta l\right)(\cosh\beta l + \cos\beta l)$$
$$- \left(-\delta\sin\beta l + \frac{\theta}{\beta}\cos\beta l\right)(\sinh\beta l + \sin\beta l)$$

$$\left(\because (\cosh\beta l + \cos\beta l)\times(3) - (\sinh\beta l + \sin\beta l)\times(4)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{\cancel{\delta\cos\beta l\cosh\beta l} + \cancel{\delta\cos^2\beta l} + \cancel{\frac{\theta}{\beta}\sin\beta l\cosh\beta l} + \cancel{\frac{\theta}{\beta}\sin\beta l\cos\beta l} + \cancel{\delta\sin\beta l\sinh\beta l} + \cancel{\delta\sin^2\beta l} - \cancel{\frac{\theta}{\beta}\cos\beta l\sinh\beta l} - \cancel{\frac{\theta}{\beta}\cos\beta l\sin\beta l}}{\{(\cosh\beta l + \cos\beta l)^2 - (\sinh^2\beta l - \sin^2\beta l)\}}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{\delta(1 + \cos\beta l\cosh\beta l + \sin\beta l\sinh\beta l) + \frac{\theta}{\beta}(\sin\beta l\cosh\beta l - \cos\beta l\sinh\beta l)}{(\cosh\beta l + \cos\beta l)^2 - (\sinh^2\beta l - \sin^2\beta l)}$$

$$= \frac{\delta(1 + \cos\beta l\cosh\beta l + \sin\beta l\sinh\beta l) + \frac{\theta}{\beta}(\sin\beta l\cosh\beta l - \cos\beta l\sinh\beta l)}{2 + 2\cosh\beta l\cos\beta l}$$

$$\left(\because \cosh^2\beta l - \sinh^2\beta l = \left(\frac{e^{\beta l}+e^{-\beta l}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\beta l}-e^{-\beta l}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\beta l}+e^{-2\beta l}+2 - (e^{2\beta l}+e^{-2\beta l}-2)}{4} = +1\right)$$

ここで、求めるモーメント $M(0)$ は次のように表せる。

$$M(x) = -EI\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$ — モーメントの式覚える。

$$M(0) = -EI\frac{d^2 v(0)}{dx^2} = -EI\beta^2(C_1 - C_3) = -EI\beta^2(2C_1 - \delta) \quad (\because (1))$$

$$= -EI\beta^2 \left(\frac{\delta(1+\cos\beta l \cosh\beta l + \sin\beta l \sinh\beta l) + \frac{\theta}{\beta}(\sin\beta l \cosh\beta l - \cos\beta l \sinh\beta l)}{1+1\cosh\beta l \cos\beta l} - \delta \right)$$

$$= -EI\beta \, \frac{\theta(\sin\beta l \cosh\beta l - \cos\beta l \sinh\beta l) - \delta\beta \sin\beta l \sinh\beta l}{1+1\cosh\beta l \cos\beta l}$$

したがって求めるものは以下

$$EI\beta \, \frac{\theta(\sin\beta l \cosh\beta l - \cos\beta l \sinh\beta l) - \delta\beta \sin\beta l \sinh\beta l}{1+1\cosh\beta l \cos\beta l}$$

M

計算はがんばる（答え覚えて、答えを照らし合わせるのでもいいかも）