8223036　栗山淳

材料の物理２　第 13 回　課題

①

マクスウェル方程式

真空中のマクスウェル方程式は以下の通りである：

1. ガウスの法則（電場）

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

2. ガウスの法則（磁場）

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

3. ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

4. アンペール-マクスウェルの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ここで，μ_0は真空の透磁率，ϵ_0は真空の誘電率である。

電磁波の性質

真空中の電磁波は、以下の波動方程式を満たす。電場と磁場の波動方程式はそれぞれ次のように書くことができる。

電場の波動方程式：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

磁場の波動方程式：

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

これらの波動方程式により、電場Eと磁場Bは波として伝搬することがわかる。

電場と磁場が直交することの証明

1. 波の進行方向をkとする

   電磁波がkに沿って伝搬すると仮定する（kは波数ベクトル）。この場合、電場Eと磁場Bは以下の性質を持つ：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

これにより、電場Eと磁場Bは波の進行方向kに垂直であることがわかる。

2. ファラデーの法則を利用

ファラデーの法則：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

電磁波においてEとBは時間調和波（$\sim e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$）として表されるため、上式は次のように簡略化される：

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}.$$

これよりk，E，Bが互いに直交することが導かれる。

3. アンペール-マクスウェルの法則：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

同様に時間調和波を仮定すると：

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}.$$

これもk，E，Bが互いに直交することを示している。