

問1. 次のベクトル空間  $W$  の基と次元を求めよ.

$$W = \{f \in \mathbb{R}[x]_3; f(1) = f(-1), f'(1) = f'(-1)\}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$f(1) = f(-1) \text{ かつ}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1 + a_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -a_3$$

また

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$f'(1) = f'(-1) \text{ かつ}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = a_1 - 2a_2 + 3a_3$$

$$\Leftrightarrow 4a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 0$$

よって

$$f(x) = a_0 + a_1x - a_1x^3 \text{ と 表せる.}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x^3) \text{ かつ}$$

$$W = \langle 1, x - x^3 \rangle$$

$$\therefore \{ 1, x - x^3 \} \text{ は } W \text{ の 基}$$

$$\dim W = 2$$