

問 1. \mathbb{R}^4 のベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ について

(1) ノルム $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ と内積 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) を求めよ.

(2) $W = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ の直交補空間 W^\perp を求めよ.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+1+25+36} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 0 + (-6) \cdot 2 = 3 - 2 - 12 = -11$$

$$(2) \quad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbf{x} \in W \text{ のとき } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4c + 8d \\ 3c - 4d \\ c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c, d: \text{任意定数})$$

$$\therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbf{y} \in W^\perp \text{ のとき } \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{r} -8 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ -8 \quad 0 \quad -4 \quad -3 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = e, \quad \mathbf{y}_4 = f \quad \text{とおく}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

$$W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$