第9講

2023年11月9日　13:02

6. 二項関係

(例 1.1) 実数の大小，$(a \leqq b)$ や 相等 $(a = b)$

(例 1.2) 集合の包含 $(A \subset B)$
相等 $(A = B)$

(例 1.3) 写像の相等 $(f = g)$

これらのようなものを
二項関係という．
(2つの対象間の関係)

Def 6.1
X : set
R : $X \times X$ 上の述語
このような R を X 上の二項関係という．

$R(x, y)$: T ならば xRy

$R(x, y)$: F ならば $x \not R y$

などと書く．文脈により，R は，$=$，$\sim$，$\leq$，などと書かれる．

注 6.2
$A \subset X \times X$ のとき，
$R_A(x, y)$:「$(x, y) \in A$」と定めると，
R_A : X 上の二項関係
逆に，$A = \{(x, y) : R(x, y)$ な $T\}$
これがあったとき．

例 6.3
X : set，Δ : diag of $X \times X$
$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$

$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$

$x R_\Delta y \Leftrightarrow x = y$

(∵) $x, y \in X$

$x R_\Delta y$ のとき、$(x,y) \in \Delta$

$\therefore \exists z \in X,\ (x,y) = (z,z)$

$\therefore x = z = y$

$\therefore x = y$

逆に、$x=y$ のとき、

$(x,y) = (x,x) \in \Delta$

$\therefore x R_\Delta y$ □

6.1 順序関係

Def 6.4

X: set, R: X上の二項関係

このとき、R: X上の順序関係 (or 半順序)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) 反射律

$\forall x \in X,\ xRx$

(ii) 反対称律

$xRy \wedge yRx \Leftrightarrow x = y$

(iii) 推移率

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

順序関係のとき、"$\leq$" "$\leqq$" などの記号を使う。

例 6.5

$x, y, z \in \mathbb{R}$ のとき、

(i) $x \leq x$

(ii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

(iii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(ii) $x \le y \land y \le x \Rightarrow x = y$

(iii) $x \le y \land y \le z \Rightarrow x \le z$

より、"$\le$" は $\mathbb{R}$ 上の順序を与える.

注 6.6

$x \in \mathbb{R}$ について、$x < x$ は成立しない.

$x \not< x$

"$<$" は $\mathbb{R}$ 上の半順序でない!

"$<$" は "$\le$" かつ "$\ne$" として表現するのが妥当.

例 6.7

X: set、$A, B, C \in 2^X$

(i) $A \subset A$

(ii) $A \subset B \land B \subset A \overset{def}{\Rightarrow} A = B$

(iii) $A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$

"$\subset$" は 2^X の半順序.

例 6.8

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$z \le w \overset{def}{\iff} \mathrm{Re}\,z \le \mathrm{Re}\,w$

とすると、$\le$ は半順序でない.

$\forall z \in \mathbb{C}$、$\mathrm{Re}\,z \le \mathrm{Re}\,z$ より

$z \le z$

$z_1 \le z_2 \land z_2 \le z_3$ のとき.

$\mathrm{Re}\,z_1 \le \mathrm{Re}\,z_2 \le \mathrm{Re}\,z_3$

$\therefore z_1 \le z_3$

"$\le$" は $\mathbb{C}$ 上の前順序

一方で、

$z = 1+i$、$w = 1-i$ とすると.

$z = 1+i$, $w = 1-i$ とすると.

$$\mathrm{Re}\,z = 1 = \mathrm{Re}\,w$$

$$z \le w \ \land\ w \le z$$

しかし, $z \ne w$

∴ "$\le$". 半対称律をみたさない.

問 6.9

X : set, $A, B \in 2^X$

$$A \le B \overset{\text{def}}{\iff} A \supset B$$

とすると "$\le$" 2^X 上の半順序を示せ.

$A \in M_n(\mathbb{C})$: n 次複素正方行列の全体.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

とすると. $\langle -, - \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ 上の内積

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A \ge 0 \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \langle Ax, x \rangle \ge 0$$

$$A = [a_{ij}], \quad \underbrace{A^*}_{\text{adjoint}} = [\overline{a_{ji}}]$$

$$M_n(\mathbb{C})_{sa} = \{ A \in M_n(\mathbb{C}),\ \underbrace{A^* = A} \}$$

$A, B \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$

$$A \le B \overset{\text{def}}{\iff} B - A \ge 0$$

とすると "$\le$" : $M_n(\mathbb{C})_{sa}$ 上の半順序

とすると、"$\leq$" : $M_n(\mathbb{C})_{sa}$ 上の半順序

$$A \leq B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n,\ \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

$A \leq B \wedge B \leq A$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle$$

$= \langle$ ∧

$\forall x\, y \in \mathbb{C}^n,\ \langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle.$

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$: 標準基

$\langle Ae_j, e_i\rangle = a_{ij}$

$$\therefore a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle Be_j, e_i\rangle = b_{ij} \qquad A = B$$

$\mathfrak{A}$: C^*-alg.

$A \in \mathfrak{A}$ について

$A \geq 0 \Leftrightarrow A^* = A,\ \sigma(A) \subseteq [0, +\infty]$

6.2 半順序集合

Def 6.11

X : set $\leq$: X 上の半順序

このとき、$(X, \leq)$: 半順序集合 (poset)

という.

また、$x, y \in X$ に対して

$x < y \overset{\iff}{\text{def}} x \leq y \wedge x \neq y$ とする.

反対称律より

$(x \leq y) \wedge (x \neq y)$

$\iff (x \leq y) \wedge (y \not\leq x)$

Def 6.12

$(X; \leq)$: poset

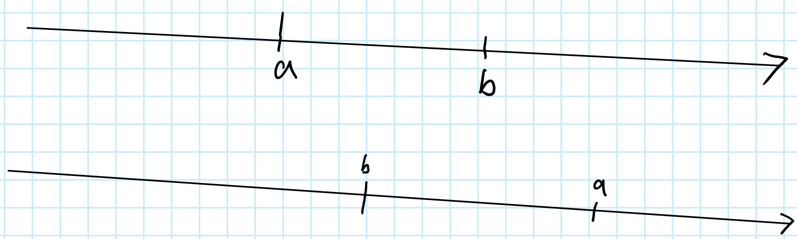
$(X; \leq)$ 全順序集合

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall (x, y) \in X \times X$

$x \leq y \vee y \leq x$

このとき $\leq$: 全順序という.

$(\mathbb{R}; \leq)$: total order



例 6.13

X : set $(2^X, \subset)$: 一般には全順序でない.

$\because$ $|X| \geq 2$ のとき
濃度

このとき、$a, b \in X$ $(a \neq b)$ とすると.

$\{a\} \not\subset \{b\} \wedge \{b\} \not\subset \{a\}$

注6.14 $(X, \leq)$: poset

$A \subset X$ のとき

$A \subset X$ のとき
$(A, \underset{\sim}{\leq})$: poset
$\leq$ を $A \times A$ に制限

また、$\leq$: total order なら A上でも total order.
$\underset{X上の}{\leq}$

注 6.15

$(X, \leq)$: poset not to totally ordered.
としても、$A \subset X$ に対して
$(A, \leq)$: totally ordered
となることはある.

例)
$X = \{a, b\}$ とすると. $a \neq b$
$(2^X, \subset)$: not to totally ordered であるが
$A = \{\emptyset, \{a\}, X\} \subset 2^X$
とすると、$\underline{(A, \subset) : \text{totally ordered}}$
Xの鎖 (chain) という.

注 6.16

$(X, \leq)$: totally ordered
$\forall x, y \in X$, $(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$
いずれか1つのみ.

Def 6.17

$(X, \leq)$: poset
$(\emptyset \neq) A \subset X$, $a, b \in X$
(i) a : Aの上界
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$, $x \leq a$

$\overset{def}{\iff}$ $\forall x \in A,\quad x \le a$

(ii) a: A の最大元 $(\max A)$

$\overset{def}{\iff}$ $a \in A$ かつ a は A の上界

(iii) b: Aの下界(かかい)

$\overset{def}{\iff}$ $\forall x \in A,\quad b \le x$

(iV) b: Aの最大元 $(\min A)$

$\overset{def}{\iff}$ $b \in A$ かつ b は Aの下界

Aの上界が存在 $\longrightarrow$ Aは上に有界

〃 下界 〃 $\longrightarrow$ Aは下に有界

$A \subset \mathbb{R}$のとき

A: 有界

$\iff$ $\exists M \ge 0,\quad A \subset [-M, M]$