

問 1. $\mathbb{R}[x]_3$ の線形変換 $T(f)(x) = f(x-3) + 2f'(x)$ について基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する T の表現行列を求めよ.

$$T(1) = 1$$

$$T(x) = x - 3 + 2 = x - 1$$

$$T(x^2) = (x-3)^2 + 4x = x^2 - 6x + 9 + 4x = x^2 - 2x + 9$$

$$\begin{aligned} T(x^3) &= (x-3)^3 + 6x^2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 6x^2 \\ &= x^3 - 3x^2 + 27x - 27 \end{aligned}$$

$$(T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)) = (1, x-1, x^2-2x+9, x^3-3x^2+27x-27)$$

$$= (1, x, x^2, x^3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & -2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって T の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & -2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
