材料の物理1

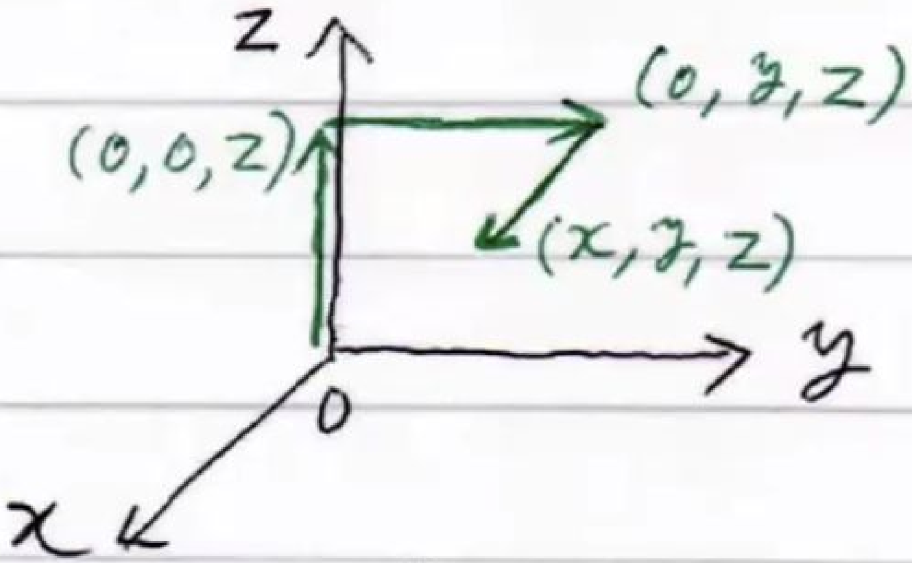
第10回目

演習レポート課題　解答

(p.57 [10])　$\mathbb{E} \to \phi$

○原点を基準点($\phi = 0$)として、

$z \to y \to x$ の経路で線積分



$\Downarrow$

$$\phi = -\left\{ \int_0^x E_x(x, y, z)\, dx \right.$$

(1) $\mathbf{E} = (Ax, Ay, Az)$

$$\phi = -\left\{\frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{2}Ay^2 + \frac{1}{2}Az^2\right\}$$

$$= \underline{-\frac{A}{2}(x^2 + y^2 + z^2)} \;//$$

(2) $\mathbf{E} = (2Ax(y+z),\ A(x^2 - y^2),\ A(x^2 - z^2))$

$$\phi = -\left\{Ax^2(y+z) + \left(-\frac{1}{3}Ay^3\right) + \left(-\frac{1}{3}Az^3\right)\right\}$$

$$= \underline{-A\left\{x^2(y+z) - \frac{1}{3}(y^3 + z^3)\right\}} \;//$$

(3) $E_x = A(2x^2 - 3y^2 - 3z^2)x$

$$= A(2x^3 - 3x(y^2 + z^2))$$

$$E_y = A(2y^2 - 3z^2 - 3x^2)y$$

$$= A(2y^3 - 3y(z^2 + x^2))$$

$$E_z = A(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)z$$

$$= A(2z^3 - 3z(x^2 + y^2))$$

$$\phi = -A\left\{\frac{2}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2(y^2 + z^2) + \frac{2}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2z^2 + \frac{2}{4}z^4\right\}$$

$$E_z = A(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)z$$
$$= A(2z^3 - 3z(x^2 + y^2))$$

$$\phi = -A\left\{\frac{2}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2(y^2 + z^2)\right.$$
$$+ \frac{2}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2 z^2$$
$$\left. + \frac{2}{4}z^4\right\}$$

$$= -\frac{A}{2}\left\{x^4 + y^4 + z^4\right.$$
$$\left. - 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\right\}$$

○静電エネルギーについて：

電位ϕのところにある電荷q → $U = q\underbrace{\phi}$

他の電荷により生じる

⇓

系には必ず複数の電荷が存在

あるi番目の電荷について、他の電荷q_jが作るϕ_jにより

$$U_i = q_i \sum_j \phi_j$$

一般に"静電エネルギー" → 系内の全電荷による全エネルギー

例）q_1とq_2から生じるエネルギー：

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\begin{cases} U_1 = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ U_2 = q_2 \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases} \quad \parallel$$

→ U_1とU_2を単に足しただけでは重複

→ $U = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}}(U_1 + U_2)$

$$U = \frac{1}{2}\sum_i U_i$$

$\equiv \phi_i$（q_iに対して他の電荷が作る電位）

$$= \frac{1}{2}\sum_i \left(q_i \sum_i \phi_i \right)$$

$$\begin{cases} U_1 = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ \quad\quad\quad\quad \shortparallel \\ U_2 = q_2 \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

↳ U_1 と U_2 を単に足しただけでは重複

↳ $U = \underset{\sim\sim}{\dfrac{1}{2}}(U_1 + U_2)$

$$U = \frac{1}{2}\sum_i U_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \left(q_i \sum_j \phi_j\right)$$

$\equiv \phi_i$（q_i に対して他の電荷が作る電位）

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q(\mathbf{r}_i)\, \phi(\mathbf{r}_i)$$

$\rho(\mathbf{r})$ で分布：

$$\square = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\, \phi(\mathbf{r})\, dV$$

例題 (p. 57 [12])

例題（p.57[12]）

(1) 一辺の長さがaの正三角形の頂点に電荷q_1, q_2, q_3を置いた。そのときの静電エネルギーUを求めよ。

(2) $q_1 = q_2 = q$として、静電エネルギーがゼロになるときのq_3の値を求めよ。

解）

(1) $$q_1\phi_1 = q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$= q_1\left(\frac{q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$q_2\phi_2 = q_2\left(\frac{q_1+q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

解)

(1) $$q_1\phi_1 = q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$= q_1\left(\frac{q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$q_2\phi_2 = q_2\left(\frac{q_1+q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$q_3\phi_3 = q_3\left(\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{2(q_1q_2+q_2q_3+q_1q_3)}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$= \frac{q_1q_2+q_2q_3+q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$q_3\phi_3 = q_3\left(\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{2(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3)}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$= \frac{q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

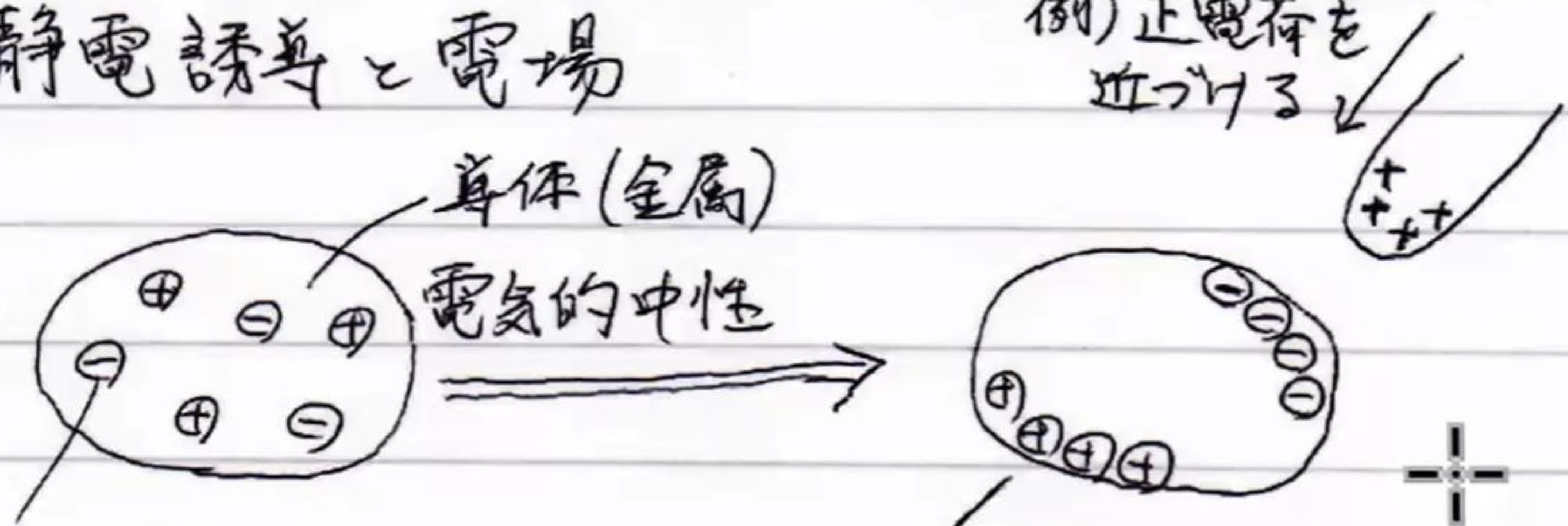
(2) $q^2 + 2qq_3 = 0 \longrightarrow q(q+2q_3) = 0$

よって、$q_3 = -\dfrac{q}{2}$

5. 導体

ここでは、電荷の移動が終わった(電流が流れなくなった)後の導体と静電場の関係を扱う。

5.1 静電誘導と電場



自由電荷(電子やイオン)

電子は表面に引き寄せられ、反対の面に電子の不足分だけ正電荷が現れる。

接触していない外部電荷の作用によって、導体に

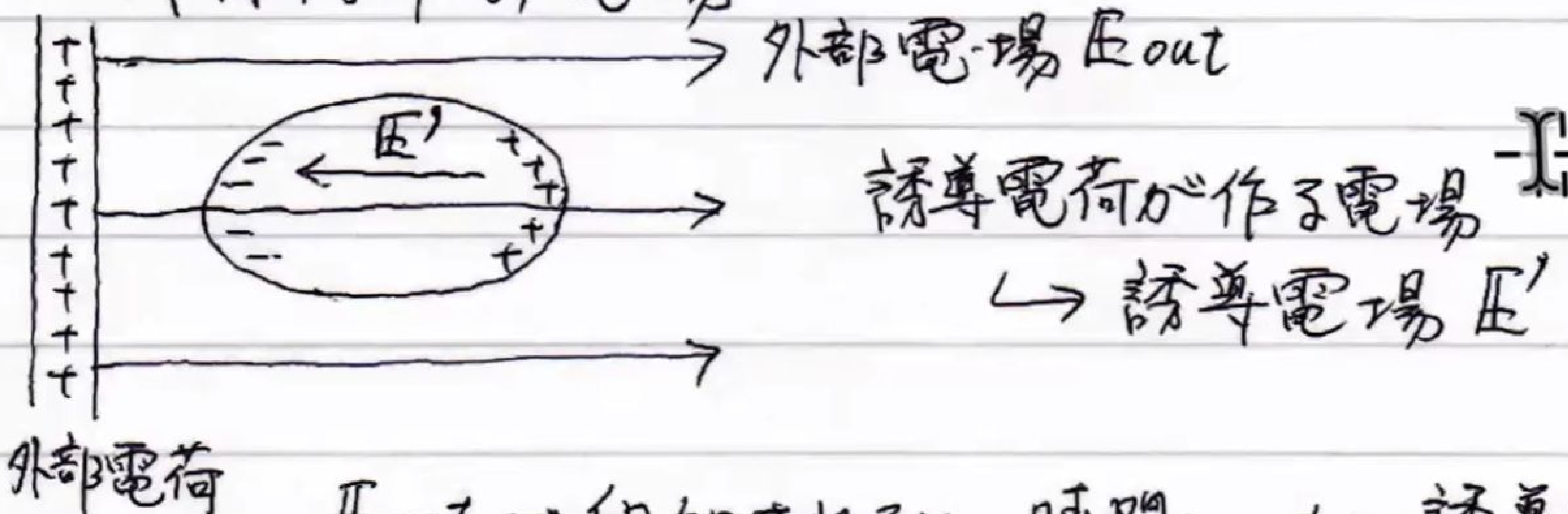
だけ正電荷が現われる。

接触していない外部電荷の作用によって、導体に正負の電荷分布が誘導される。

⟶ 静電誘導という。

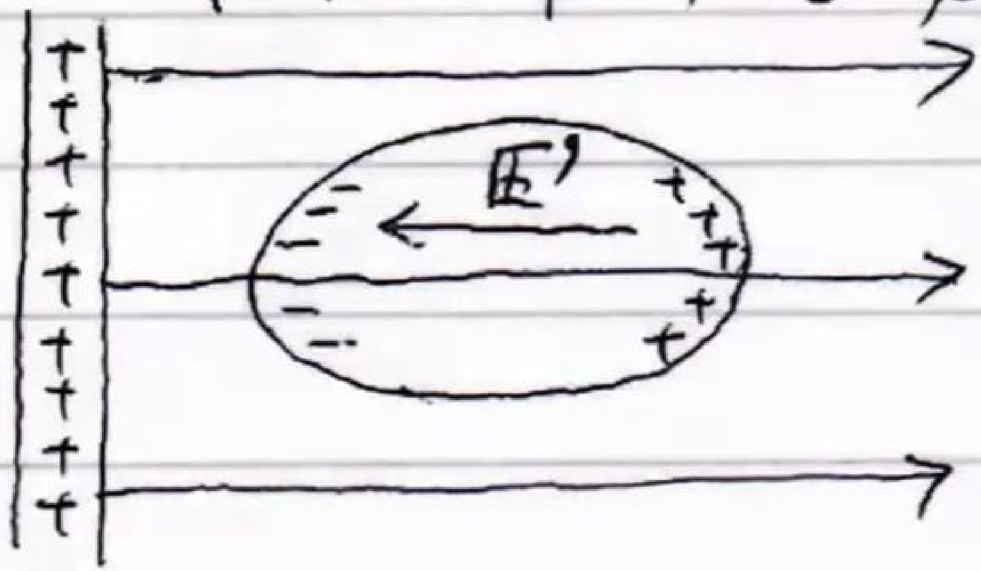
集まった電荷：誘導電荷という。

• 導体内部の電場



E_{out}が印加されると、時間とともに誘導電荷が増大 ⟶ E'が増大

• 導体内部の電場



外部電場 E_{out}

誘導電荷が作る電場

↪ 誘導電場 E'

外部電荷

E_{out}が印加されると、時間とともに誘導電荷が増大 → E'が増大

$E_{out} > E'$ すなわち導体内部の電場 $E = E_{out} + E'$ がある限り、電荷は移動し続ける。

⇓

$\Downarrow$

- 最終的には(静電誘導の状態)、$\boldsymbol{E}_{out}$ を打ち消す $\boldsymbol{E}'$ が誘導され、導体内部には電場はない($\boldsymbol{E}=0$)。
- 導体の表面も電荷の移動はない。

  ↔ 表面に平行な成分の電場はない。

- 導体内部では $\boldsymbol{E}=0$

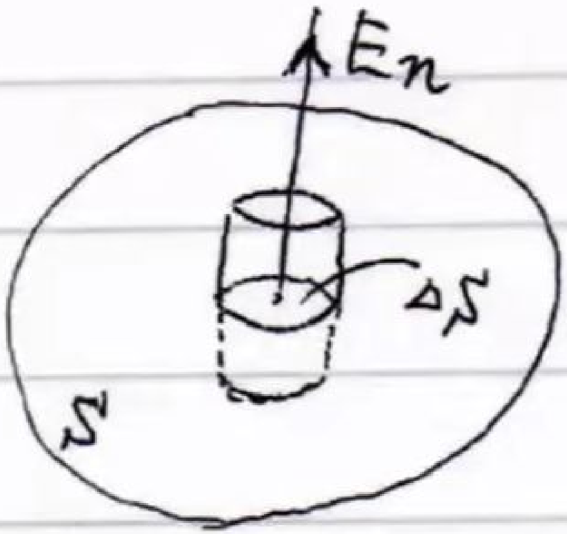
  $\Downarrow$ $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi$

  導体内の電位 ϕ は一定

  ↔ 導体表面は等電位面

- 誘導電荷の面密度

○ 誘導電荷の面密度 σ :

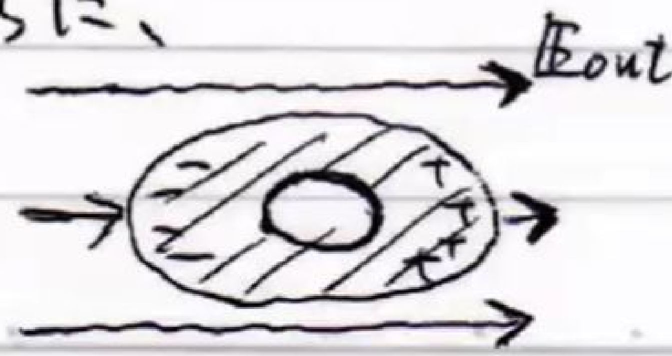


導体表面の面分素 ΔS について、
ガウスの法則。
ガウス面として箱 → E は上面のみより、

$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \varepsilon_0 E_n \Delta S$$
$$= \Delta q = \sigma \Delta S$$
$$\therefore \sigma = \varepsilon_0 E_n$$

☆ 導体に静電場をかけても、導体内の自由電荷がそれを打ち消し、導体内部には電場は入れない。
↔ 静電遮蔽 という

さらに、

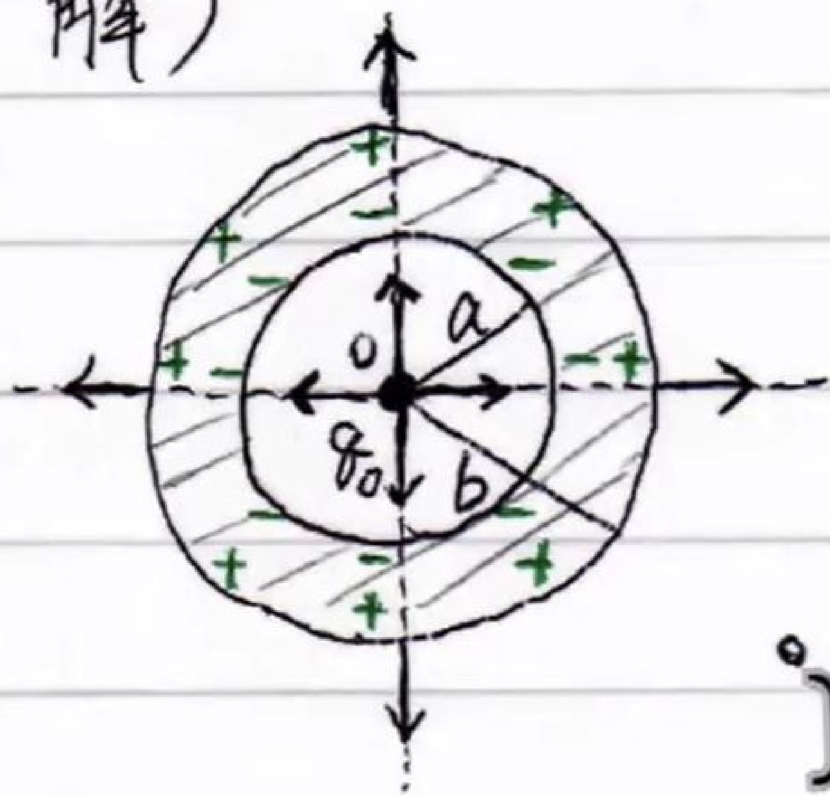


中空内も電場はない。

cf. 外部電場の影響を除くには、
金属で覆ってやればよい。
例）電磁波ノイズ、雷
　← 測定機器、電気機器

半径 $a, b\ (a<b)$ の同心球面に挟まれた導体球殻がある。球の中心に点電荷 q_0 があるときの電場を求めよ。

解）



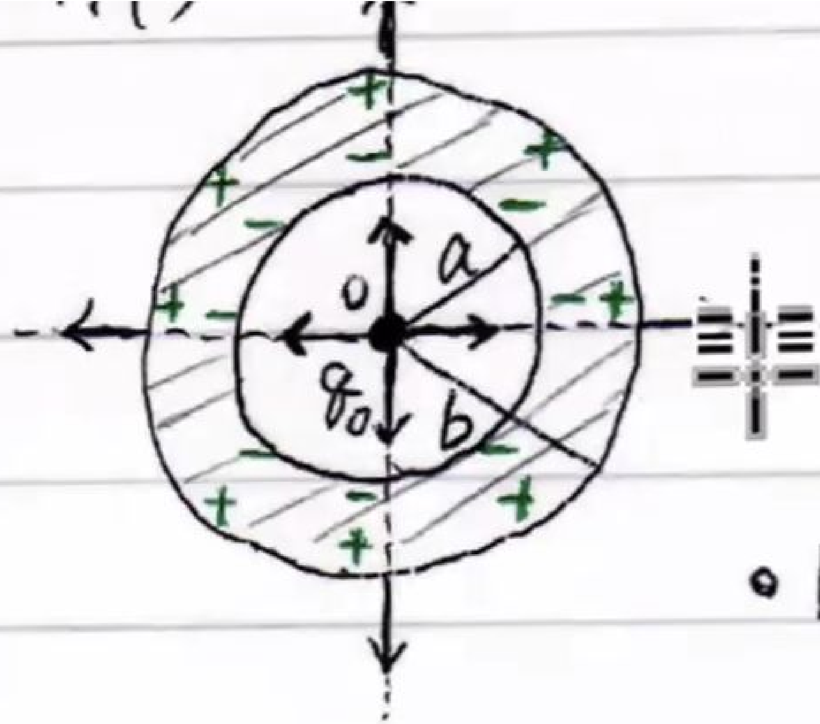
系は球対称 $\Rightarrow$ ガウス面を球面

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

・$r<a$ のとき、$Q(r) = q_0$

$$\therefore E_r(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

・$a<r<b$（導体内）では、



系は球対称 ⇒ ガウス面を球面

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

・$r < a$ のとき、$Q(r) = q_0$

$$\therefore E_r(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

・$a < r < b$（導体内）では、

$Q(r) = q_0 - q'$（q'：誘電電荷）

$\downarrow$ $q' = q_0$

$Q(r) = 0$

$\therefore E_r(r) = 0$

（導体内に電場はなし）

$$\therefore E_r(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

※ q_0により誘導された$q'(=q_0)$による電場

$\longleftrightarrow$ q_0が中心から移動しても、$r>b$の様子は変化しない。外部と内部中空とは静電気的に独立。

5.2 静電誘導の例

5.2 静電誘導の例

○静電場の様子

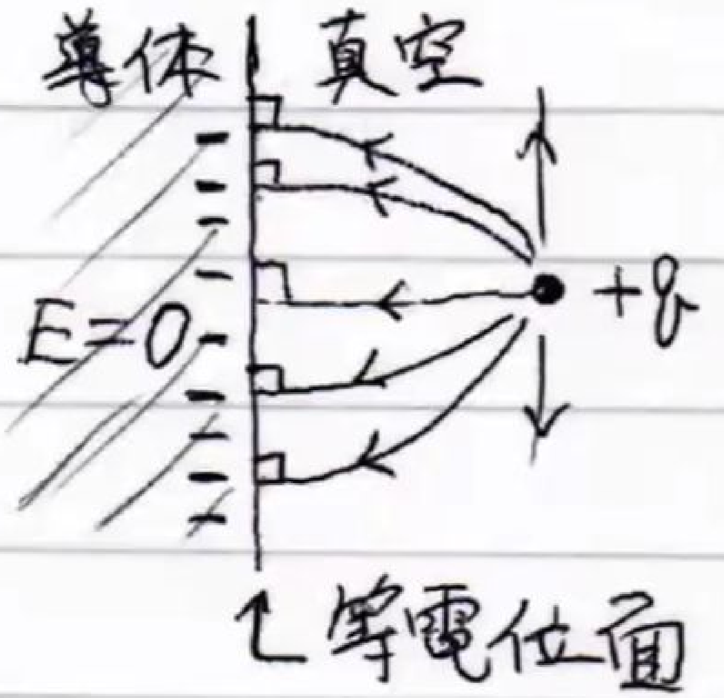
→ ・導体内部は電場がないから簡単な話

・導体外では、外部電場＋誘導電荷による電場

↳ 複雑

（代表例２つ）

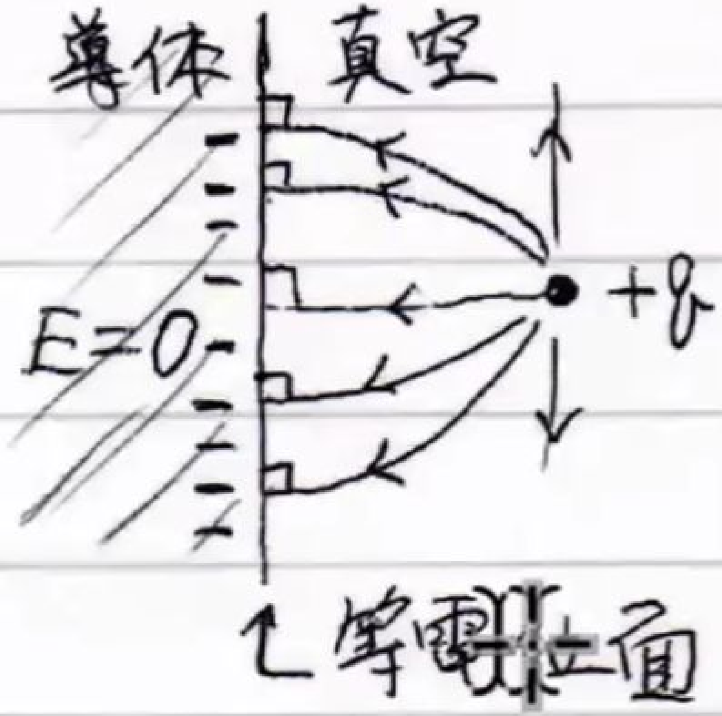
1) 導体平面と点電荷（鏡像法）



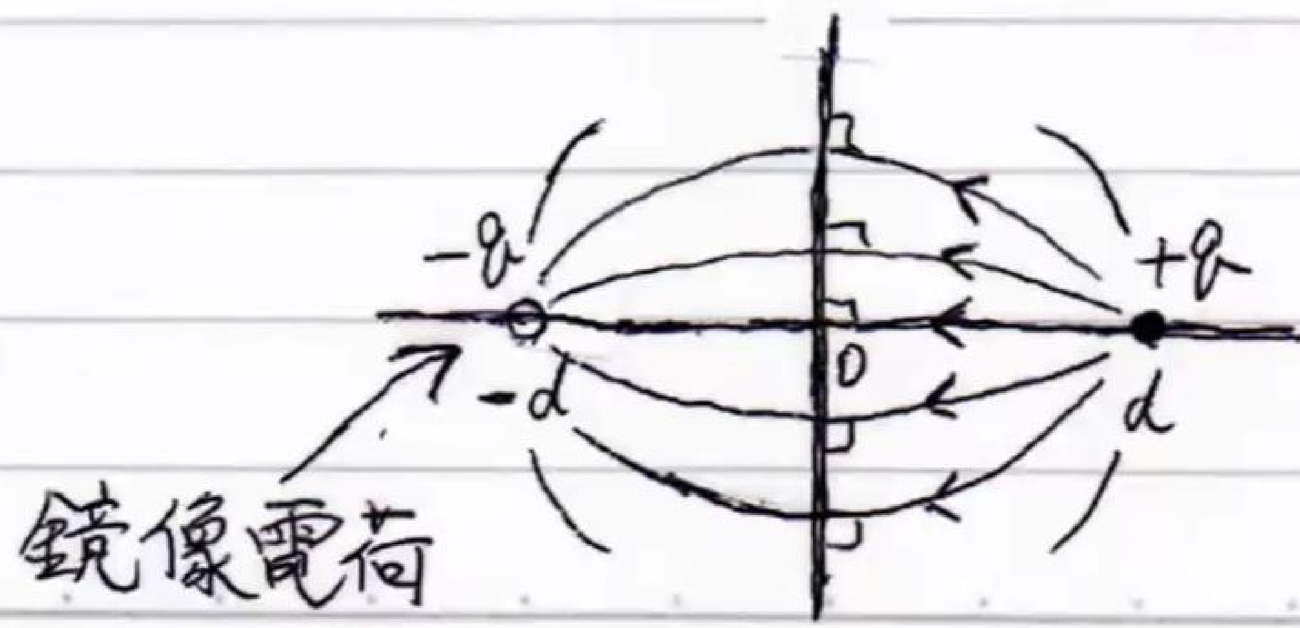
誘導電荷分布の代わりに、

仮想電荷

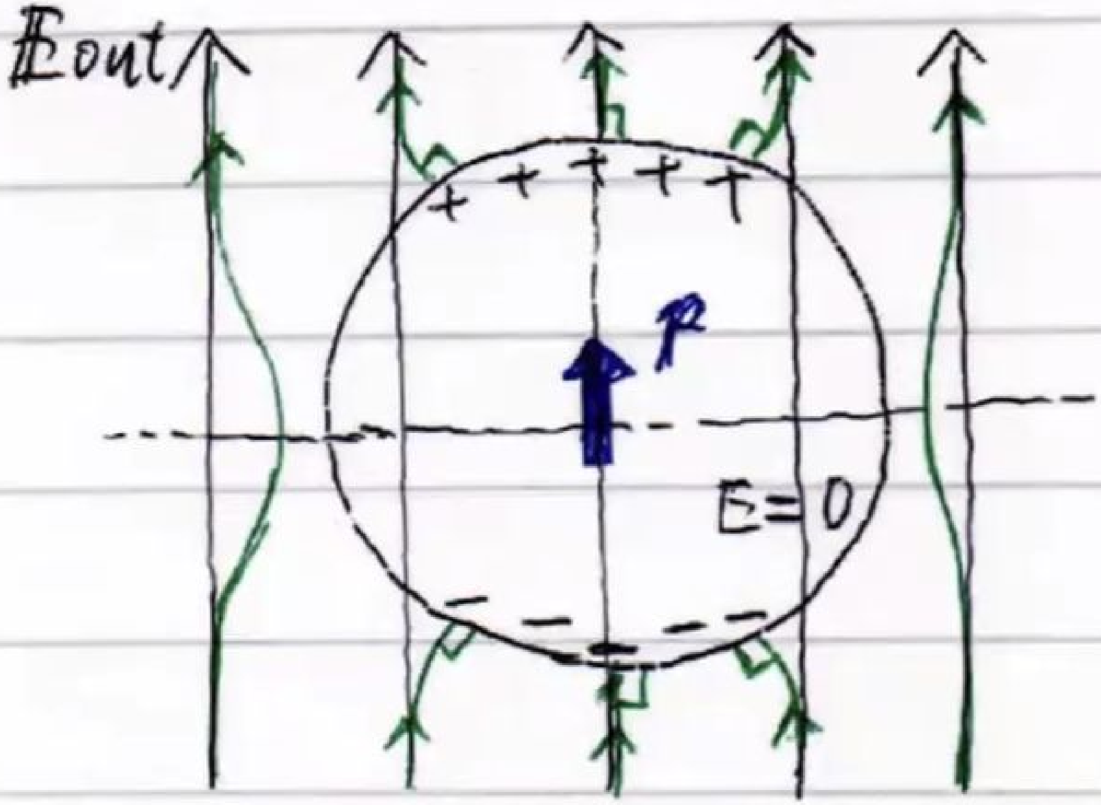
1) 導体平面と点電荷 (鏡像法)



誘導電荷分布の代わりに、仮想電荷



2) 一様な外部電場中におかれた導体球



・仮想電荷

⇔ 中心に電気双極子

⇓

外部電場 E_{out}

+

pが作る電場