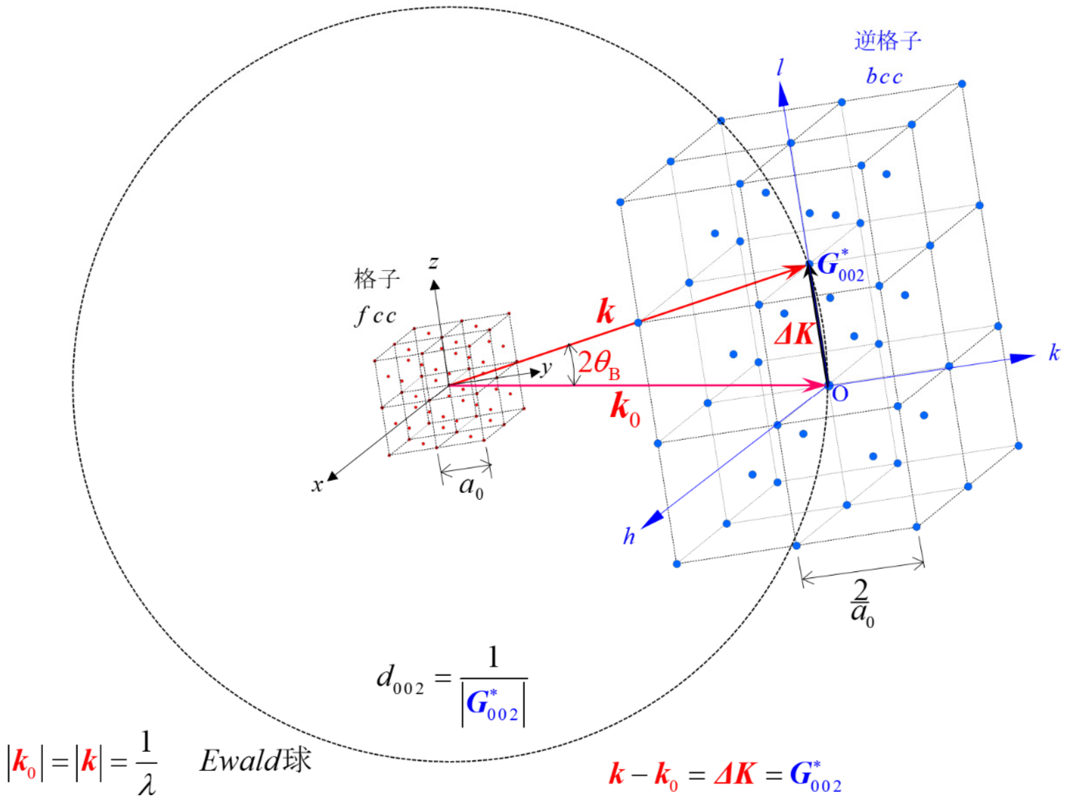


§　波の数理

波とその数学的表現

　　波の算数

　　三角関数の投影　→　正弦関数　余弦関数

　　xy 平面のベクトル　→　複素平面上の複素数　→　複素数の極形式

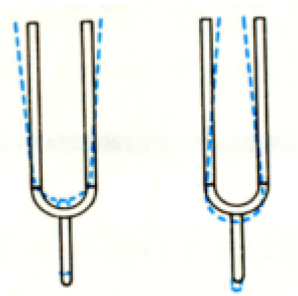
　　位相の導入　→　波

　　複素数の極形式　→　指数関数へ

なぜ“波”を考えるのか！　　　　資料 2-1 参照

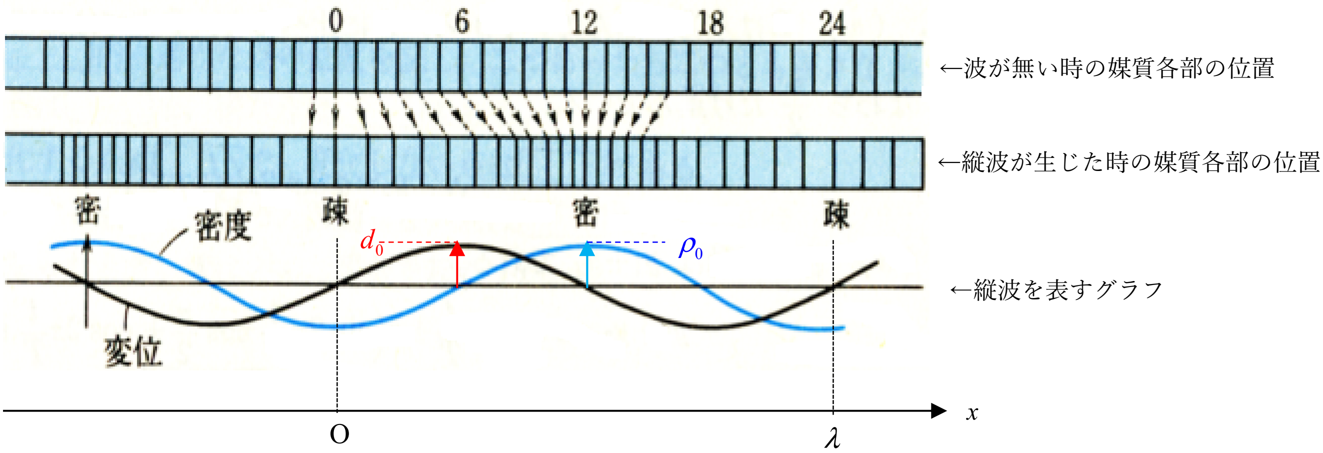
§　波とその数学的表現

音波



音叉の振動

音叉から出た疎密波が管中の空気を伝わるある瞬間の様子



縦波における媒質の実際の変位とそれを表すグラフ　時刻：$t=0$

グラフを数式で表現すると　波長：λ 、角振動数：ω　として

変位波：　$d = d_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\Big|_{t=0} = d_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x \equiv d_0 \sin\kappa x$

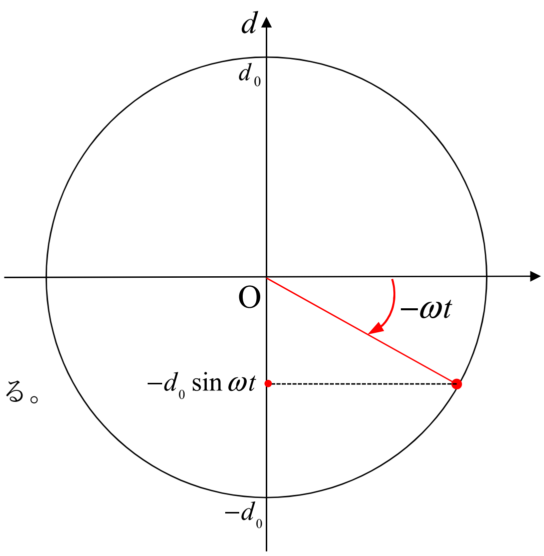
密度波：　$\rho = -\rho_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\Big|_{t=0} = -\rho_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x \equiv -\rho_0 \cos\kappa x$

ここで　$\frac{2\pi}{\lambda} \equiv \kappa$：角波数、　$\frac{2\pi}{T} = \omega = 2\pi\nu$、　$\nu = \frac{1}{T}$：振動数、　T：媒質の時間的振動周期

例えば、$x=0$（=一定）の位置での変位の時間的変化は

$$d = d_0 \sin(-\omega t) = -d_0 \sin\omega t$$

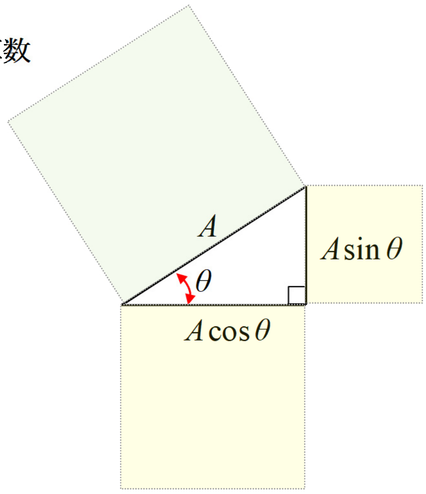
つまり、その場の媒質は時間的に単振動を行っている。



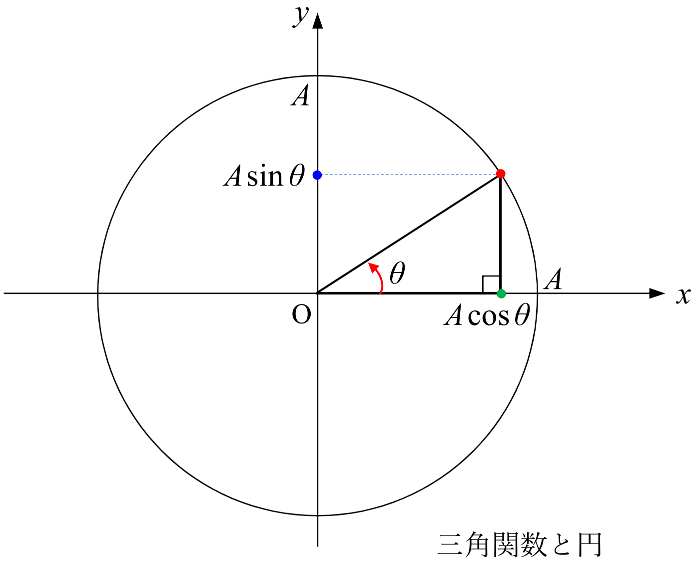
時間が経過すると変位の波は x 軸の正の向きに進行して見える。

波の位相速度：　$u = \lambda\nu$

波の算数

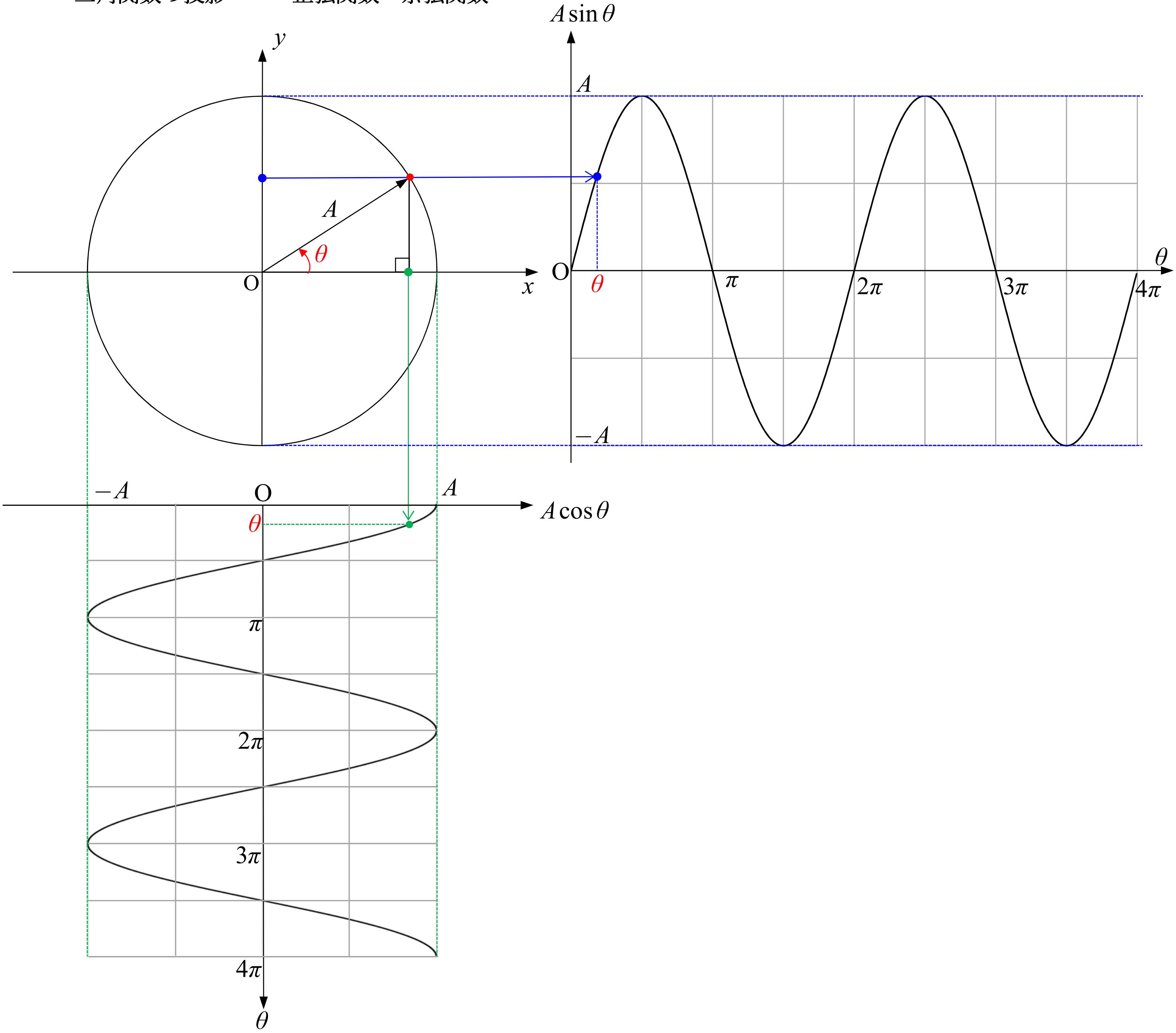


三角関数
ピタゴラスの定理



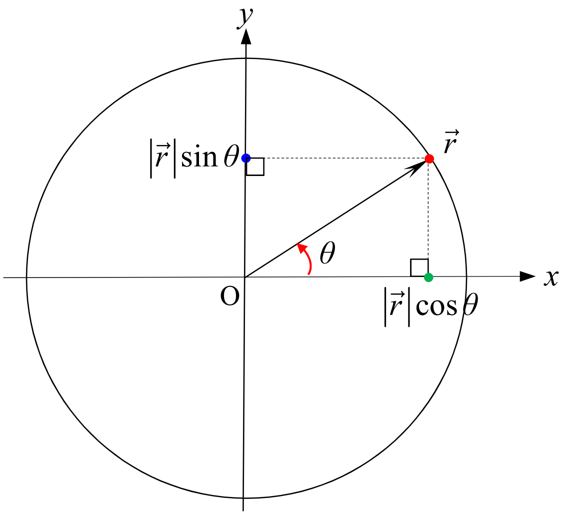
三角関数と円

・　三角関数の投影　→　正弦関数　余弦関数

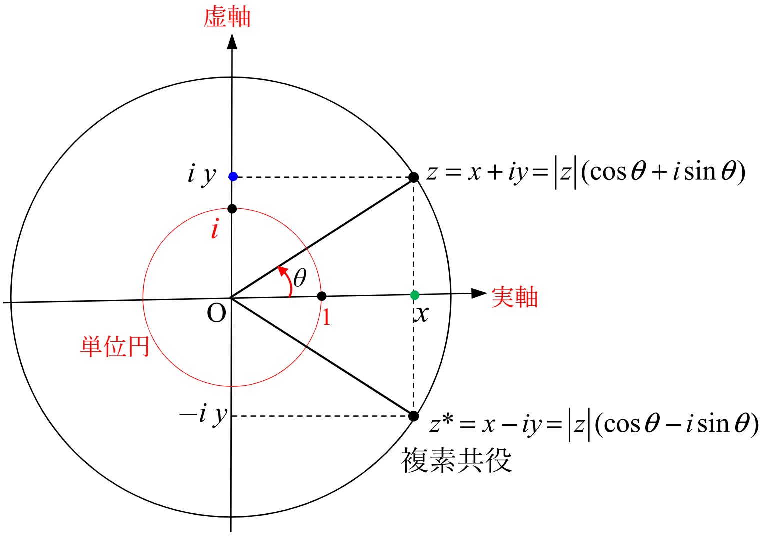


xy 平面のベクトル　→　複素平面上の複素数　→　複素数の極形式

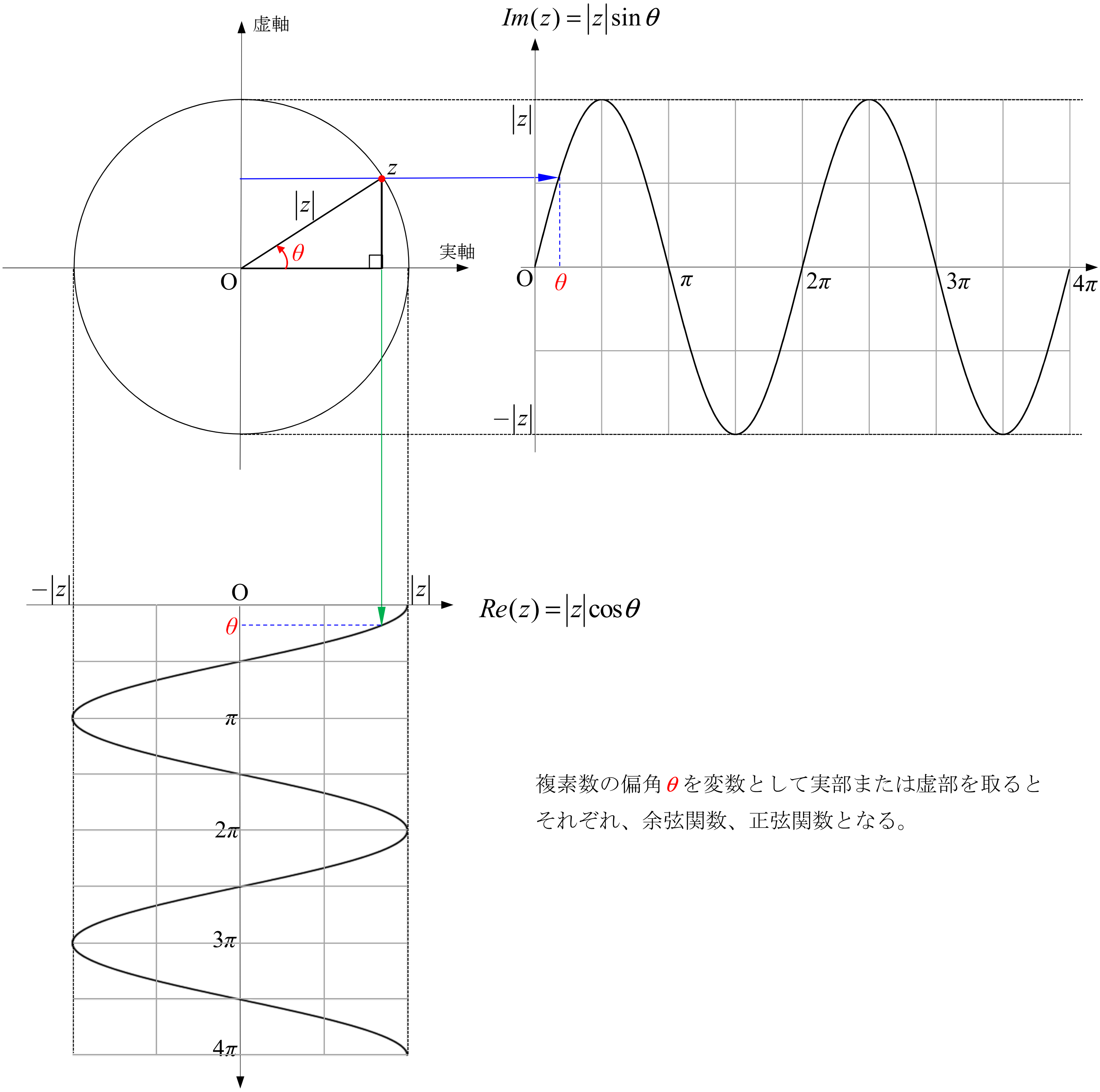
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |\vec{r}| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ここで} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$i^2 = -1$



絶対値　$|z| = \sqrt{z\,z^*} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$



複素数の偏角 θ を変数として実部または虚部を取るとそれぞれ、余弦関数、正弦関数となる。

・**位相の導入　→　波**

$z = A(\cos\theta + i\sin\theta)$　　偏角 θ に**位相**を代入する。 A ：振幅（最大変位量の絶対値）

↓

↓← $\boxed{\theta \equiv \kappa x - \omega t \quad ：位相}$ 　ここで

x ：空間座標
κ ：角波数（angular wavenumber）
t ：時間
ω ：角振動数（angular frequency）

↓

↓

※ $\dfrac{1}{波長} = \dfrac{1}{\lambda} \equiv k$ ：波数　（wavenumber）
※ $\dfrac{1}{周期} = \dfrac{1}{T} \equiv \nu$ ：振動数　（frequency）

$z = A(\cos(\kappa x - \omega t) + i\sin(\kappa x - \omega t))$

例えば、複素数 z の虚部を取ると、 $Im(z) = A\sin(\kappa x - \omega t) \equiv \varphi$ 　　φ は波を表す。
　一方、実部を取るとすれば、　　$Re(z) = A\cos(\kappa x - \omega t)$ であり、これを持って波を表現するとしてもよい。

※※※
複素数を用いて波と関係づけるために肝心な点は、虚部で定義したならば、以後の複素数の演算結果の虚部をとれば良いし、始めに実部で波を定義したならば以後、複素数の演算結果の実部をとれば良い。

複素数 $z = A(\cos\theta + i\sin\theta)$ は絶対値 $|z| = A$ と偏角： $\arg(z) = \theta$ で表現されている。

関連する公式は

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$、 $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とすると

積： $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 　　　$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

商： $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ 　　　$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

さらに、次の**ド・モアブルの定理**が成り立つ。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき、任意の整数 n に対して

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

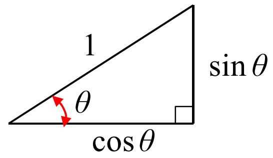
特に、 $r = |z| = 1$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ド・モアブルの定理

・複素数の極形式　→　指数関数へ

オイラーの公式：　$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$　　（人類の至宝）



問題：　ピタゴラスの定理にオイラーの公式が潜んでいる。見つけられる？

Taylor 展開

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|_{x=a} (x-a)^n$$

↓　←　$a=0$ の場合：　Maclaurin 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

微分：　$\dfrac{d}{dx} e^{i\kappa x} = i\kappa\, e^{i\kappa x}$　　　積分：　$\displaystyle\int e^{i\kappa x}\, dx = \frac{1}{i\kappa} e^{i\kappa x} + C$

波の微分：　三角関数　　　　指数関数

↓　　　　↓

$$z = A(\cos(\kappa x - \omega t) + i\sin(\kappa x - \omega t)) = A e^{i(\kappa x - \omega t)}$$

$$\frac{dz}{dx} = A(-\kappa\sin(\kappa x - \omega t) + i\kappa\cos(\kappa x - \omega t))$$

$$\frac{dz}{dt} = A(\omega\sin(\kappa x - \omega t) - i\omega\cos(\kappa x - \omega t))$$

$$\frac{dz}{dx} = i\kappa A e^{i(\kappa x - \omega t)} = i\kappa\, z$$

$$\frac{dz}{dt} = -i\omega A e^{i(\kappa x - \omega t)} = -i\omega z$$

どちらが簡単か？

まとめ

ピタゴラスの定理　　　　　　　　（幾何学）

$\downarrow$

$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$　　　　　　　　（代数）

$\downarrow \leftarrow$　　　　　$i^2 = -1$　　虚数 を導入して因数分解　（複素数）

$1 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$\downarrow \leftarrow$　　　　　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　　Euler の公式　（人類の至宝）

$1 = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$

$\downarrow \leftarrow$　　　　　$\underline{\theta = 2\pi(kx - \nu t)}$　　　位相

$1 = e^{2\pi i(kx-\nu t)} \cdot e^{-2\pi i(kx-\nu t)}$

$\downarrow \leftarrow$　　　　　A　　振幅　（物理量に対応）

$$A^2 = Ae^{2\pi i(kx-\nu t)} \cdot Ae^{-2\pi i(kx-\nu t)} = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$

$\downarrow \leftarrow$　　　　　$\underline{\varphi \equiv Ae^{2\pi i(kx-\nu t)}}$　　　波

$\varphi \cdot \varphi^* = |A|^2 \equiv I$　　　　　強度　　（観測可能）