第11講

2023年11月30日　13:02

Def 7.5

X, Y : set

$F(X, Y) = \{ f : X \to Y \}$

例 7.6

X, Y : set

$f, g \in F(X, Y)$

$f = g \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in X,\ f(x) = g(x)$

とすると "$=$" は $F(X, Y)$ 上の equiv relation

Proof　$f, g, h \in F(X, Y)$ とする.

(i) $\forall x \in X,\ f(x) = f(x)$

$\therefore f = f$

(ii) $f = g$ のとき.

$\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$

$\longleftrightarrow g(x) = f(x)$

$\therefore g = f$

(iii) $f = g \wedge g = h$ のとき.

$\forall x \in X,\ \underline{f(x) = g(x)} \wedge \underline{g(x) = h(x)}$

$\therefore \forall x \in X,\ f(x) = h(x)$

$\therefore f = h$ □

$\therefore\ f = h$ □

例 7.7

$m, n \in \mathbb{Z}$

$m \sim n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m - n \in 2\mathbb{Z} = \{2k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

とすると、"$\sim$" は $\mathbb{Z}$ 上の equiv relation

Proof (i) $m \in \mathbb{Z}$ のとき、

$$m - m = 0 \in 2\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ m \sim m$$

(ii) $m, n \in \mathbb{Z}$ のとき、

$m \sim n$ とすると、

$$m - n \in 2\mathbb{Z}$$

このとき、

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ m - n = 2k$$

よって

$$\begin{aligned} n - m &= -(m - n) \\ &= -2k \\ &= 2(-k) \in 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\therefore\ n \sim m$$

(iii) $m, n, l \in \mathbb{Z}$ で

$$m \sim n \wedge n \sim l$$

とすると、

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z},\ \begin{aligned} m - n &= 2k_1 \\ n - l &= 2k_2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ m - l = m - n + n - l$$
$$= 2k_1 + 2k_2$$
$$= 2(k_1 + k_2) \in 2\mathbb{Z}$$
$$\therefore\ m \sim l \quad \square$$

Th 7.8

X, Y ; set . $f : X \to Y$

このとき, $x, y \in X$ に対して

$$x \sim_f y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)$$

とすると, "$\sim_f$" は X 上の equiv relation.

Proof　$x, y, z \in X$ とする.

(i) $x = x$ より $f(x) = f(x)$

f. 写像より

$$\therefore\ x \sim_f x$$

(ii) $x \sim_f y$ のとき. $f(x) = f(y)$

$$\therefore\ f(y) = f(x)$$
$$\therefore\ y \sim_f x$$

(iii) $x \sim_f y \wedge y \sim_f z$ のとき.

$$f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)$$
$$\therefore\ f(x) = f(z)$$
$$\therefore\ x \sim_f z \quad \square$$

7.2 同値類

Def 7.9

X ; set　$\sim$; equiv relation on X　$C(x)$ は

X : set, $\sim$: equiv relation on X.
このとき、

$$C(x) := \{y \in X ; x \sim y\} \quad (x \in X)$$

を x の（$\sim$ に関する）同値類という.

$C(x)$ は $[x]$, $\overline{x}$, etc $\hat{x}$ とも書かれる

注7.10

$C(x)$ は x と同じものの集まり

$\rightsquigarrow$ X で、$\sim$ の意味で同じものを ひとかたまりにして考える.

Prop 7.11

X : set $\sim$: equiv relation on X.

$\Rightarrow$ (i) $\forall x \in X$, $x \in \underset{\sim\sim\sim}{C(x)}$ $(\neq \phi)$

(ii) $X = \bigcup \{C(x) : x \in X\}$

Proof

(i) $x \sim x$ より

$$x \in C(x)$$

(ii) $\forall x \in X$, $x \in C(x) \subset \bigcup \{C(x) : x \in X\}$

$$\therefore X \subset \bigcup \{C(x) : x \in X\}$$

逆は明らか □

Th. 7.12

X : set $\sim$: equiv relation on X

$\Rightarrow$ TFAE :

(i) $x \sim y$

(ii) $C(x) = C(y)$

(iii) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$

Proof (i) ⇒ (ii)：$x \sim y$ とする.

$z \in C(z)$ とすると, $x \sim z$ より.

$z \sim x$ である. これを $x \sim y$ より.

$$z \sim y$$

$$\therefore y \sim z$$

$$\therefore z \in C(y)$$

$$\therefore C(x) \subset C(y)$$

逆に, $z \in C(y)$ とすると, $z \sim y$

また, $x \sim y$ より $y \sim x$ であるから.

$$\therefore z \sim x$$

$$\therefore x \sim z$$

$$\therefore z \in C(x)$$

$$\therefore C(y) \subset C(x)$$

$$\therefore C(x) = C(y)$$

(ii) ⇒ (iii)：$C(x) = C(y)$ のとき

$$C(x) \cap C(y) = C(x) \ni x$$

$$\therefore C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$$

(iii) ⇒ (i)：$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ のとき.

$$\exists z \in C(x) \cap C(y)$$

注 7.13

系 7.12 (ii) ⇒ (iii)

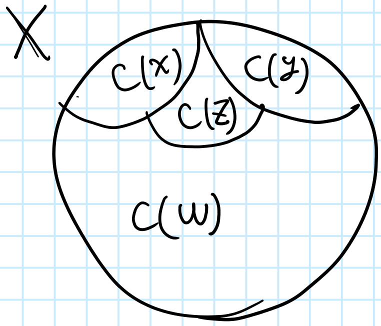
注 7.13

Th 7.12 (ii) ⇒ (iii)

$C(x) \neq C(y) \Leftrightarrow C(x) \cap C(y) = \emptyset$

これと、$X = \bigcup \{ C(x) : x \in X \}$

より、Xは同値類により、重複なく分割できる!



同値類の大きさはバラバラでもok.

Def 7.14

X : set, $\sim$: equiv relation on X.

$x \in X$ のとき.

各 $\boxed{y \in C(x)}$ を $C(x)$ の代表元と呼ぶ
representative.

$C(x) = C(y)$

注 7.15

例 7.16

$\mathbb{Z}$ 上の equiv relation "$\sim$" を.

$m \sim n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m - n \in 2\mathbb{Z}$

と定める。このとき.

$C(0) = \{ 2k : k \in \mathbb{Z} \} (= 2\mathbb{Z})$

$C(1) = \{ 2k+1 : k \in \mathbb{Z} \}$

となる.

$\because$ $n \in C(0) \Leftrightarrow n \sim 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{n - 0}_{n} \in 2\mathbb{Z}$

$n \in C(1) \Leftrightarrow n \sim 1$

$\Leftrightarrow n - 1 \in 2\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \exists k \in 2\mathbb{Z},\ n-1 = 2k$

また, $\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1)$ より,

$\forall n \in \mathbb{Z},\ C(n) = C(0) \lor C(n) = C(1)$

$\therefore \underbrace{\boxed{\{C(n) : n \in \mathbb{Z}\}}}_{\mathbb{Z}/\sim} = \{C(0), C(1)\}$

$(= \{C(20), C(-3)\})$

これより, "$\sim$" は $\mathbb{Z}$ を even と odd に分割する.

7.3 商集合

Def 7.17

X: set　$\sim$: equiv lelation on X

このとき,

$$X/\sim\ = \{C(x) : x \in X\}$$

を X の $\sim$ に関する 商集合 という.
(quotient set)

また,

$$\pi(x) = C(x)\ (x \in X)$$

とすると, $\underbrace{\pi : X \to X/\sim}_{\text{商写像}}$ が定まる.
自然な射影

とすると、 $\underbrace{\pi : X}$ $\to X/\sim$ が定まる
商写像、自然な射影

注 7.18

$\pi : X \to X/\sim$ は全射

$\because$ $\forall c \in X/\sim$ に対して

$$\exists x \in X,\quad c = C(x) = \pi(x)$$

$$\therefore X/\sim \, = \pi(X) \quad \square$$

注 7.19

$X/\sim$ の元を「重複なく」表示するためには、
各 $C \in X/\sim$ からちょうど1つずつ代表元 $x_C \in C$ をとり
集めた「完全代表系」$R = \{x_C : C \in X/\sim\}$ を考え、

$X/\sim \, = \{C(x) : x \in R\}$ とすればよい。
ただし、このような R をとるには一般には AC を用いる。

例 7.20

$$m \sim n \overset{\text{def}}{\iff} m - n \in 2\mathbb{Z}$$

このとき、$\mathbb{Z}/\sim \, = \{C(0),\ C(1)\}$
($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$とも) $R = \{0, 1\}$ は完全代表系

また、$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

$$\pi(3) = C(3) = C(1) = \pi(1)$$

$$\pi(-100) = C(-100) = C(0) = \pi(0)$$