第10講

2023年11月16日　12:58

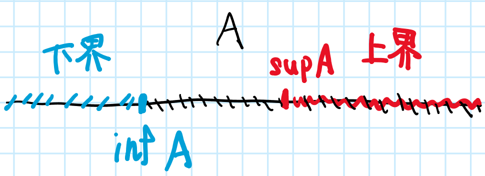
Def. 6.18

$(X, \leq)$: poset

$(\phi \neq)\ A \subset X$

(i) もし $\min\{a \in X : a$ は A の上界$\}$
が存在するならば、それを A の上限といい、$\sup A$、
または $\bigvee A$ で表す。

(ii) もし $\max\{b \in X : b$ は A の下界$\}$
が存在するならば、それを A の下限といい、$\inf A$
または $\bigwedge A$ で表す。



注 6.19

$(X, \leq)$: poset

$a, b \in X$

このとき、$\sup\{a, b\}$ を $a \vee b$
$\inf\{a, b\}$ を $a \wedge b$
と書くこともある。

例 6.20

X : set.　$(2^X, \subset)$ を考える。

$A, B \in 2^X$ のとき、

$$A \vee B = A \cup B \quad (\in 2^X)$$
$$A \wedge B = A \cap B \quad (\in 2^X)$$

$(2^X, \subset)$ においては、

$F \subset 2^X$ に対して

$$\bigvee F = \bigcup F$$
$$\bigwedge F = \bigcap F$$
がわかる。

∵ $\forall A \in F$ $A \subset \bigcup F$
かつ
$\bigcap F \subset A$

より、$\bigcup F$ は F の上界
$\bigcap F$ は F の下界

ここで、B を F の上界とすると、

$\forall A \in F,\ A \subset B$

$\therefore \bigcup F \subset B$

$\therefore$ $\bigcup F$ は F の最小上界.

i.e $\bigcup F = \bigvee F$

同様に C を F の下界とすると

$\forall A \in F,\ C \subset A$

$\therefore C < \underbrace{\bigcap F}_{\text{最大下界}}$

i.e. $\bigcap F = \bigwedge F$ □

⑥ $\forall x, y \in X,\ \exists x \vee y \in X,\ \exists x \wedge y \in X$
をみたす X を束 (latice) という.

$\forall F \subset X,\ \exists \bigvee F \in X,\ \exists \bigwedge F \in X$
をみたす X を完備束 (complete —)
という.

$(2^X, \subset)$: complete latice

注 6.21

$I \subset \mathbb{R}$: 区間

$C(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{conte}\}$

$f, g \in C(I)$ に対して

$f \leq g \overset{\text{def}}{\iff} \forall t \in I,\ f(t) \leq g(t)$ とすると

$(C(I), \leq)$: poset

∵ (i) $\forall f \in C(I)$ に対して

$\forall x \in I,\ f(x) \underset{\text{"="}}{\leq} f(x)$

$\therefore f \leq f$

$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x)$
"="

$\therefore\ f \leq f$

(ii) $f, g \in C(I)$ で
$f \leq g \ \wedge\ g \leq f$ のとき

$\forall t \in I,\ \underbrace{f(t) \leq g(t) \ \wedge\ g(t) \leq f(t)}$
$\longrightarrow f(t) = g(t)$

$\therefore\ f = g$

(iii) $f, g, h \in C(I)$
$f \leq g \ \wedge\ g \leq h$ のとき

$\forall t \in I,\ \underbrace{f(t) \leq g(t) \ \wedge\ g(t) \leq h(t)}$
$\rightsquigarrow f(t) \leq h(t)$

$\therefore\ f \leq h$ □

$C(I)$: latice but not complete.

$f, g \in C(I)$ のとき

$f \vee g = \max\{f, g\}$
$f \wedge g = \min\{f, g\}$
) conti ?

$a, b \in \mathbb{R}$

$\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$

f : conti $\Rightarrow$ $|f|$: conti

$\big|\,|f(s)| - |f(t)|\,\big| \leq |f(s) - f(t)|$
よりわかる.

$\therefore\ \max\{f, g\}$

$= \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$: conti

$\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$

より ok. $C(I)$: latice

not complete は.

$\exists (f_n)_n \subset C(I)$

$\exists (f_n)_n \subset C(I)$

$\vee f_n$ は ($C(I)$内に) 存在しない.

6.3 順序同型

Def 6.22

$(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$: poset

$f : X \to Y$

このとき,

f: order homokphism

$\overset{\text{def}}{\iff} (x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y))$

f: order isomorphism

$\overset{\text{def}}{\iff}$ f : 全単射 かつ

f, f^{-1} : order homo.

注 6.23

$(X, \leq_X) (Y, \leq_Y)$: poset

$f : X \to Y$, order iso

のとき,

$$x \leq_X y \iff f(x) \leq_Y f(y)$$

fを介して, $\leq_X$ と $\leq_Y$ は同じ構造をもつ.

$\because$ $x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y)$

since f is order homo.

$f(x) \leq_Y f(y)$ のとき, f^{-1} : order homo より

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x} \leq_X \underbrace{f^{-1}(f(y))}_{y} \quad \square$$

Def 6.24

$(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$: poset

このとき,

$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ が order isomorphic

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f : X \to Y$, order iso

$(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$ と書く.

例 6.25

$(\mathbb{R}, \leq) \simeq ((0, +\infty), \leq)$

$f(x) = e^x$ とすると,

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, 全単射

order homo

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

さらに $f^{-1}(x) = \log x$

より, f^{-1} :

order homo

$\therefore f$: order iso.

問 6.26

$(\mathbb{R}, \leq) \simeq ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \leq)$

問 6.27

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$

$((a, b), \leq) \simeq ((c, d), \leq)$

Th. 6.28

$(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$, $(Z, \leq_Z)$: poset

(i) $(X, \leq_X) \simeq (X, \leq_X)$

(ii) $(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$

$\Rightarrow (Y, \leq_Y) \simeq (X, \leq_X)$

(iii) $\left.\begin{array}{l}(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y) \\ (Y, \leq_Y) \simeq (Z, \leq_Z)\end{array}\right) \Rightarrow (X, \leq_X) \simeq (Z, \leq_Z)$

Proof (i) I_X : order iso

$(Y, \leq_Y) \quad (Z, \leq_Z) \quad \simeq (Z, \leq_Z)$

Proof (i) I_X : order iso.

(ii) $(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$ のとき.

$\exists f : X \to Y$. order iso

$f^{-1} : Y \to X$. order iso

$\therefore (Y, \leq_Y) \simeq (X, \leq_X)$

(iii) $(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$

$(Y, \leq_Y) \simeq (Z, \leq_Z)$

のとき.

$\exists f : X \to Y$ order iso

$\exists g : Y \to Z$ order iso

このとき、$g \circ f : X \to Z$. 全単射

f, g : order homo より.

$x \leq_X y$ のとき

$f(x) \leq_Y f(y)$

$g(f(x)) \leq_Z g(f(y))$

$\therefore (g \circ f)(x) \leq_Z (g \circ f)(y)$

$g \circ f$: order homo

また、

$(g \circ f)^{-1} = \underbrace{f^{-1}}_{\text{order}} \circ \underbrace{g^{-1}}_{\text{homo}}$: order homo

$\therefore g \circ f : X \to Z$. order iso

$\therefore (X, \leq_X) \simeq (Z, \leq_Z)$ □

7. 同値類と商集合

7.1 同値関係

Def 7.1

X : set R : X 上の二項関係

R : X 上の同値関係 (equivalence −)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) xRx

R：X上の同値関係（equivalence relation）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i) xRx

(ii) (対称律)

$xRy \Rightarrow yRx$

(iii) $xRy \wedge yRz$

$\Rightarrow xRz$

R：equiv relation のとき．"$=$"，"$\sim$"，"$\simeq$"，"$\approx$"，"$\cong$" などと書く．

注 "$\sim$"：equiv relation on X のとき．

$x \sim y$ のとき．

「"$\sim$"の意味で，xとyは同じもの」と考える．

注7.3

X：set のとき．

X上には元を見分けるための $\underbrace{\text{"="}}_{\text{equiv}}$ があると考える．

例7.4

X：set　$A, B \in 2^X$ のとき．

$\underset{再}{A = B} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

とすると，"$=$" は 2^X 上の equiv relation

∵ $A, B, C \in 2^X$ とする．

(i) $A \subset A$ より $A = A$

(ii) $A = B$ のとき．

$(A \subset B) \wedge (B \subset A)$

$(B \subset A) \wedge (B \wedge A)$

$B = A$

(iii) $A = B \wedge B = C$ のとき．

$A \subset B \wedge B \subset A$

$B \subset C \wedge C \subset B$

より．$A \subset C \wedge C \subset A$

$B \subset C) \wedge (C \subset B)$

より、$A \subset C \wedge C \subset A$

$\therefore A = C$ □