第4講

2023年10月5日　13:00

3、集合

3.1 集合の記法

{要素}

3.1.1 外延的記法

例えば、

$A = \{1, 2, 3\}$ のように、

$B = \{$夫、猫$\}$

集合に含まれる具体的な要素を書き述べる記法を「外延的記法」という

$\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$

のように書くこともある。

$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$

と書いたりもする（よいかどうかは別）

3.1.2 内包的記法

例、

$A = \{n : n$は $1 \leq n \leq 3$ をみたす自然数$\}$

のように

{変数：変数がみたすべき条件}

の形式で書かれるものを「内包的記法」という

また、

$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 3\}$

のように書くこともある。

内包的記法は、

$\{x \in \mathbb{C} : x^7 + 3x^4 - x^2 + 1 = 0\}$

のような複雑な集合も記述できる。

また、

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$

は外延的記法で表す明示的方法はたぶんない。

は外延的記法で表す明示的方法はたぶんない.

3.1.3 実数全体の集合

当面は数直線上の数と考えてよい

3.1.4 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$ と i ($i^2 = -1$ をみたすもの)
を用いて

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$ と考えてよい.

3.1.5 空集合 $\emptyset$

ZF では $\emptyset$ の存在が保証される.

[$\emptyset$ は要素を1つも含まない集合]

3.1.6 実数の区間

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

(注 $[a, b)$ を $[a, b[$ と書くこともある.)

これらを有界区間という.

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

これらを非有界区間という.

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ と書くこともある.

注 $[a, +\infty]$ とは書かない

3.2 包含と相等

Def. 3.1

A, B : set

A, B : set

このとき、「AはBに包含される」

または「BはAを包含する」とは、

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成立すること。

このことを $\underbrace{A \subset B}_{A \subseteq B}$, or $\underbrace{B \supset A}_{B \supseteq A}$ と書く。

$A \neq B$ も含めるには、

$$A \subsetneq B$$

注 ϕ について、

$$x \in \phi \Rightarrow x \in A$$

は常にT。つまり、$\phi \subseteq A$

$$\left(\because \underbrace{x \in \phi \Rightarrow x \in A}_{T} = \forall x, \underbrace{x \in \phi}_{F} \rightarrow x \in A \text{ より} \right)$$

例3.3

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Def 3.4

A, B : set

このとき「AとBが(集合として)等しい」とは、

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

が成立すること。このことを $A = B$ で表す。

$A = B$ は

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$ と同値

例3.5

$$\{x \in \mathbb{R} : x(x-1) = 0\}$$
$$= \{0, 1\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leqq n \leqq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Prop 3.6

Prop 3.6

A, B, C : set

(i) $A \subset A$

(ii) $A \subset B \wedge B \subset C$

$$\Rightarrow A \subset C$$

Proof

(i) $x \in A$ (をT) とすると

$x \in A$ (もT) であるから

$$x \in A \Rightarrow x \in A$$

(あるいは、$P \to P$ 恒真であるから)

$$\therefore A \subset A$$

(ii) $x \in A$ とすると、$A \subset B$ より

($x \in A \Rightarrow x \in B$ T より)

$$\therefore x \in B$$

さらに、$B \subset C$ より、

($x \in B \Rightarrow x \in C$: T)

$$\therefore x \in C$$

$$\therefore x \in A \Rightarrow x \in C \qquad \therefore A \subseteq C$$

注 3.7

今後はもう少しシンプルに書く。

3.3 集合の演算

3.3.1 和集合

Def 3.8

A, B : set.

このとき、

$$\underset{\text{カップ}}{A \cup B} = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Th 3.9

A, B, C : set

Th 39

A, B, C : set

(i) $A \subset A \cup B$、 $B \subset A \cup B$

(ii) $A \cup A = A$

(iii) $A \cup B = B \cup A$

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

結合律

Proof

(i) $x \in A$ のとき (つまり $x \in A$: T)

$(x \in A) \vee (x \in B)$: T

$\therefore x \in A \cup B$

$\therefore A \subset A \cup B$

$B \subset A \cup B$ も同様

(ii) $A \cup A = A$

$(x \in A) \vee (x \in A) = x \in A$

$\therefore x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$

$\therefore A \cup A = A.$

(iii) $A \cup B = B \cup A$

$(x \in A) \vee (x \in B)$

$= (x \in B) \vee (x \in A)$

$\therefore x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$

$\therefore A \cup B = B \cup A$

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$x \in (A \cup B) \cup C$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C)$

$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$

$\Leftrightarrow \quad ((x\in A)\vee(x\in B))\vee(x\in C)$

$\Leftrightarrow \quad (x\in A)\vee((x\in B)\vee(x\in C))$

$\Leftrightarrow \quad (x\in A)\vee(x\in B\cup C)$

$\Leftrightarrow \quad x\in A\cup(B\cup C)$

$\therefore\ (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

注 (iv) より.

$(A\cup B)\cup C$ (= $A\cup(B\cup C)$) を単に $A\cup B\cup C$ と書いてよい.

より一般に $A_1, \cdots, A_n$: set に考えて

$A_1\cup\cdots\cup A_n$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_j$ と書ける.