8223036 畢山 洋

量子力学 第10回 課題

(1) $\hat{P}, \hat{Q}$ はエルミート演算子より

$$\langle m|\hat{P}|n\rangle = (\langle n|\hat{P}^{+}|m\rangle)^{*} = \int \psi_m^{*}\hat{P}\psi_n dx \quad \cdots ①$$

$$\langle m|\hat{Q}|n\rangle = (\langle n|\hat{Q}^{+}|m\rangle)^{*} = \int \psi_m^{*}\hat{Q}\psi_n dx \quad \cdots ②$$

$\langle m|\hat{P}\pm\hat{Q}|n\rangle$

$$= \int \psi_m^{*}(\hat{P}\pm\hat{Q})\psi_n dx = \int \psi_m^{*}\hat{P}\psi_n dx \pm \int \psi_m^{*}\hat{Q}\psi_n dx$$

$$= (\langle n|\hat{P}^{+}|m\rangle)^{*} \pm (\langle n|\hat{Q}^{+}|m\rangle)^{*}$$

$$= (\langle n|\hat{P}^{+}\pm\hat{Q}^{+}|m\rangle)^{*}$$

$$= (\langle n|(\hat{P}\pm\hat{Q})^{+}|m\rangle)^{*}$$

これより $\langle m|\hat{P}\pm\hat{Q}|n\rangle = (\langle n|(\hat{P}\pm\hat{Q})^{+}|m\rangle)^{*}$

となり $\hat{P}\pm\hat{Q}$ もエルミート演算子

$\hat{P}$. と $\hat{Q}$ が可換

$\Rightarrow [\hat{P}, \hat{Q}] = \hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = 0$

よって

$\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P}$ である

$\hat{P}, \hat{Q}$ はエルミート演算子であるので

$$\langle m|\hat{P}\hat{Q}|n\rangle = (\langle n|\hat{Q}^{+}\hat{P}^{+}|m\rangle)^{*}$$

$$= (\langle n|(\hat{Q}\hat{P})^{+}|m\rangle)^{*}$$

$$= (\langle n|(\hat{P}\hat{Q})^{+}|m\rangle)^{*}$$

これより $\langle m|\hat{P}\hat{Q}|n\rangle = (\langle n|(\hat{P}\hat{Q})^{+}|m\rangle)^{*}$ となる

ゆえに $\hat{P}\hat{Q}$ もエルミート演算子

2.

角運動量演算子は以下のように表される

$\hat{l}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y$

$\hat{l}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z$

$\hat{l}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$

$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ はエルミート演算子であるから

$$\begin{aligned}\hat{l}_x^\dagger &= (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)^\dagger \\ &= y\hat{p}_z^\dagger - z\hat{p}_y^\dagger \\ &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y \\ &= \hat{l}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{l}_y^\dagger &= (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z)^\dagger \\ &= z\hat{p}_x^\dagger - x\hat{p}_z^\dagger \\ &= z\hat{p}_x - x\hat{p}_z \\ &= \hat{l}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{l}_z^\dagger &= (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x)^\dagger \\ &= x\hat{p}_y^\dagger - y\hat{p}_x^\dagger \\ &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \\ &= \hat{l}_z\end{aligned}$$

よって $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ はエルミート演算子

3. 角運動量の二乗演算子は次のように表される

$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ はエルミート演算子

$\hat{l}_x^2, \hat{l}_y^2, \hat{l}_z^2$ もエルミート演算子

$$(\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2)^\dagger = (\hat{l}_x^2)^\dagger + (\hat{l}_y^2)^\dagger + (\hat{l}_z^2)^\dagger = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \hat{l}^2$$

よって $\hat{l}^2$ はエルミート演算子