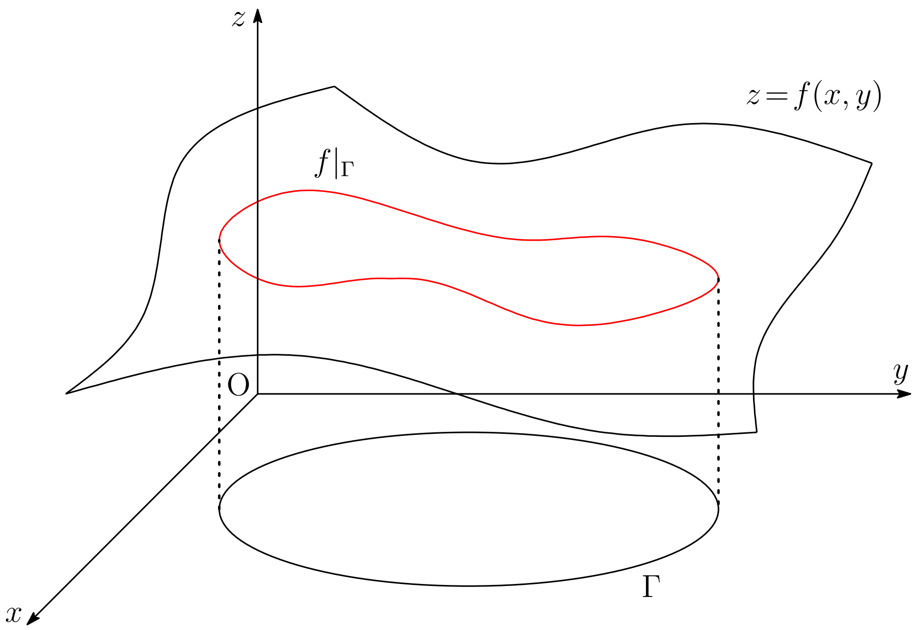
次のテーマは「条件付き極値」（下図の赤い曲線の極値）である．この極値問題も，「極値をとる点の候補を求め，その候補で極値をとるかどうか判定する」という順で考えるので，まずは極値をとる点の候補を求める方法を紹介する．



曲線 $z=f|_\Gamma(x,y)$ は，曲面 $z=f(x,y)$ を Γ で筒切りしたときの切り口

定理 6.11（Lagrange の未定乗数法）

$O\subset\mathbb{R}^2$ を開集合，f,g を O で C^1 級，

$$\Gamma=\{(x,y)\in O \mid g(x,y)=0\}$$

とする．$(a,b)\in\Gamma$ が

$$g_x(a,b)\neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a,b)\neq 0$$

を満たし，Γ に制限した f（これを $f|_\Gamma$ とかく）が (a,b) で（広義の）極値をとるならば

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する．

※定理中の λ を Lagrange の未定乗数という．また，定理の仮定「$(a,b)\in\Gamma$ が $g_x(a,b)\neq 0$ または $g_y(a,b)\neq 0$ を満たす」は，(a,b) が Γ の特異点ではないということであるから，Lagrange の未定乗数法は Γ の特異点では使えない．よって，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は

「Γ の特異点」と「Lagrange の未定乗数法で求められる点」

ということになる．

証明
定理の仮定が成り立つとする．
$g_y(a,b) \neq 0$ のとき，$g(a,b)=0$ であるから，陰関数定理より a の近傍で定義された C^1 級関数 φ で

$$\begin{cases} \varphi(a)=b \\ g(x,\varphi(x))=0 \\ \varphi'(x) = -\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} \qquad \text{特に} \qquad \varphi'(a) = -\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} \end{cases}$$

を満たすものが存在する．そして，(a,b) の近傍では Γ は $y=\varphi(x)$ で表されるから，(a,b) の近傍では

$$f|_\Gamma(x,y) = f(x,\varphi(x))$$

となり，これは x の 1 変数関数である．そこで，これを $F(x)$ とおくと

$$F'(x) = f_x(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

である．
さて，$f|_\Gamma$ は (a,b) で（広義の）極値をとるから $F(x)=f(x,\varphi(x))$ は $x=a$ で（広義の）極値をとる．よって，$F'(a)=0$ より

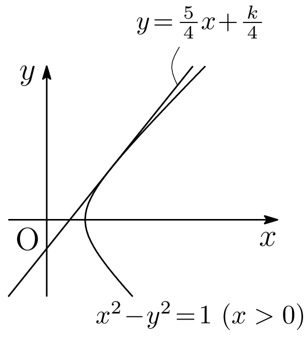
$$f_x(a,\varphi(a)) + f_y(a,\varphi(a))\cdot\varphi'(a) = 0$$
$$f_x(a,b) + f_y(a,b)\cdot\left\{-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right\} = 0$$
$$\therefore \quad f_x(a,b) - \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}\cdot g_x(a,b) = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

したがって，$\lambda = \dfrac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$ ……② とおけば

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 & \leftarrow ①\text{に}②\text{を代入} \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 & \leftarrow ②\text{を変形} \end{cases}$$

が成り立つ．
$g_x(a,b) \neq 0$ のときも x と y の役割をかえれば同様である．∎

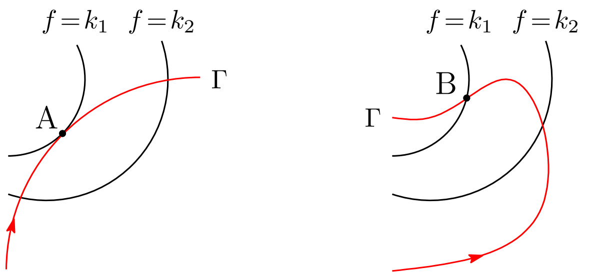
※ Lagrange の未定乗数法の図形的意味
例えば「実数 x, y が $x>0,\ x^2-y^2=1$ を満たすとき，$4y-5x$ の最大値を求めよ．」という問題を高校でどのように解いたか思い出してほしい．$4y-5x=k$ とおき，直線 $y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{k}{4}$ と曲線 $x^2-y^2=1\ (x>0)$ が接するときの k の値が求める最大値になったはずである（最大値は -3 となる）．
実は Lagrange の未定乗数法もこの解法と同じである．このことを確認してみよう．

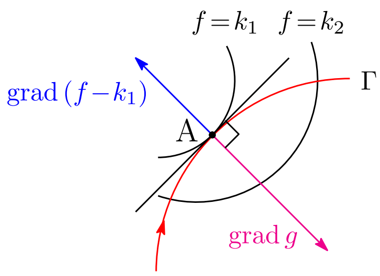


曲面 $z = f(x, y)$ を「ある山」と考えるとき，曲線 $z = f|_{\Gamma}(x, y)$ は「この山のある登山コース」と考えられる．そこで，自分が「この登山コース」を歩くことを想像してみてほしい．立体的にイメージするのは各自の頭の中でやってもらうことにし，ここでは地図（平面図）で考えることにする．地図は xy 平面上にあるとすると，地図における「等高線 $f(x, y) = k$」は曲面 $z = f(x, y)$ の平面 $z = k$ による切り口を xy 平面に正射影したものであり,「登山コース」を xy 平面へ正射影したものが $\Gamma : g(x, y) = 0$ である．

問題

次の地図において，地点 A, B の付近の登山コースはどのようになっているか?ただし $k_1 > k_2$ とする．





A 地点は登りきったところ（極大）であり，B 地点は上り坂である．また，曲線 $f(x, y) = k_1$ と $\Gamma : g(x, y) = 0$ は A 地点では接していて，B 地点では接していない．そして，曲線 $f(x, y) = k_1$ と $\Gamma : g(x, y) = 0$ が $\mathrm{A}(a, b)$ 地点で接するとき，

$$\mathrm{grad}\,(f - k_1) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad と \quad \mathrm{grad}\,g = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{A}(a, b)$ 地点で平行であるから

$$\begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \quad すなわち \quad \begin{cases} f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．

よって，高校数学での解法と Lagrange の未定乗数法が同じであることがわかる．

高校数学での解法	Lagrange の未定乗数法
$4y - 5x = k$	$f(x, y) = k$（等高線）
$x^2 - y^2 = 1\ (x > 0)$	$g(x, y) = 0$
2 曲線が接するときが極値の候補	

次に，Lagrange の未定乗数法で求めた候補に対して判定する方法を 2 つ紹介する．

方法 1（この後，具体例で解法を紹介する）
何らかの方法で極値の存在を確認しておく．例えば，Γ が有界閉集合であれば $f|_\Gamma$ は最大値と最小値をもつから，これらはそれぞれ極大値と極小値になる．

方法 2（次回，一般論を証明し具体例に適用する）
候補の点 (a,b) が Γ の特異点でなければ，陰関数定理を用いて (a,b) の近傍で Γ を 1 変数化 $(y=\varphi(x))$ しておく．このとき，(a,b) の近傍では $f|_\Gamma(x,y)=f(x,\varphi(x))$ となるから，これを $F(x)$ とおいて $F(x)$ が $x=a$ で極値をとるかどうか調べる．

例 6.7
$5x^2+6xy+5y^2=16$ に制限した xy の最大値，最小値とそのときの (x,y) を求めよ．

解答
$f(x,y)=xy,\ g(x,y)=5x^2+6xy+5y^2-16,\ \Gamma:g(x,y)=0$
とおくと
$$f_x(x,y)=y,\ f_y(x,y)=x,\ g_x(x,y)=10x+6y,\ g_y(x,y)=6x+10y$$
である．
$g_x(x,y)=0,\ g_y(x,y)=0$ を解くと $(x,y)=(0,0)$ で，$(0,0)\notin\Gamma$ であるから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる．
また，Γ は有界閉集合で，f は連続であるから，Weierstrass の最大値定理（定理 6.1）より，$f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ．そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法より
$$\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2=16 & \cdots\cdots ① \\ y-\lambda(10x+6y)=0 & \cdots\cdots ② \\ x-\lambda(6x+10y)=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$
の解である．
② と ③ より λ を消去すると
$$y(6x+10y)-x(10x+6y)=0$$
$$y^2=x^2$$
$$\therefore\quad y=\pm x$$
$y=x$ のとき，① より　$x^2=1$　$\therefore$　$x=\pm1$
$y=-x$ のとき，① より　$x^2=4$　$\therefore$　$x=\pm2$
よって　$(x,y)=(\pm1,\pm1),\ (\pm2,\mp2)$　（複号同順）
このとき，関数値は
$$f(\pm1,\pm1)=1,\quad f(\pm2,\mp2)=-4 \quad （複号同順）$$
で，異なる値は 2 つだけであるから，大きい方が最大値，小さい方が最小値となる．以上より

最大値は　$f(\pm1,\pm1)=1$,　最小値は　$f(\pm2,\mp2)=-4$　（複号同順）

※ $(x,y)\in\Gamma$ に対して

$$x^2+y^2=\frac{16-6xy}{5}\leqq\frac{16+3(x^2+y^2)}{5}\qquad\therefore\quad x^2+y^2\leqq 8$$

これより，Γ は原点中心，半径 $2\sqrt{2}$ の円に含まれることがわかる．
また，Γ が閉集合（イメージ的には境界を含むということ）であることは,「特異点がなければ普通の曲線になり，曲線は境界だけからなる」ということからイメージ的に理解してもよい．

※この問題の場合，λ と極値には関係がある．
② を x,y で整理すると　　$-10\lambda x+(1-6\lambda)y=0$
③ を x,y で整理すると　　$(1-6\lambda)x-10\lambda y=0$
これらを行列表現すると

$$\begin{pmatrix}-10\lambda & 1-6\lambda\\ 1-6\lambda & -10\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{vmatrix}-10\lambda & 1-6\lambda\\ 1-6\lambda & -10\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-10\lambda)^2-(1-6\lambda)^2=0$$

$$(16\lambda-1)(4\lambda+1)=0$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{16},\ -\frac{1}{4}$$

一方
② $\times\, x$ より　　$xy=\lambda(10x^2+6xy)$
③ $\times\, y$ より　　$xy=\lambda(6xy+10y^2)$
辺々加えて

$$2xy=\lambda(10x^2+12xy+10y^2)$$

$$xy=\lambda(5x^2+6xy+5y^2)$$

$$\therefore\quad f(x,y)=16\lambda$$

よって，極値は　　$16\lambda=1,\ -4$

【問題】
$\Gamma: g(x,y)=0$ に制限した $f(x,y)$ の最大値，最小値を次の手順で求め，解答欄に記入せよ．その際，Γ は特異点がない有界閉集合であることは用いてよい．ただし，極値をとる点の候補の解答欄は多めに作ってある．

(1) $f(x,y)=3x+y,\ g(x,y)=9x^4-6xy+2y^2-9$

Γ は特異点がないから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる．また，Γ は有界閉集合で，f は連続であるから，Weierstrass の最大値定理より，$f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ．そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} g(x,y)=0 & \cdots\cdots ① \\ f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)=0 & \cdots\cdots ② \\ f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

の解である．② と ③ より λ を消去した式と ① を連立させると

$(x,y)=$ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$

が得られる．関数値は順に

$f(x,y)=$ $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$

となるから，これらの関数値のうち一番大きい値が最大値，一番小さい値が最小値となる．よって，答えは

最大値 $\boxed{\text{サ}}$ 　最小値 $\boxed{\text{シ}}$

(1)
$f(x,y)=3x+y,\quad g(x,y)=9x^4-6xy+2y^2-9$
$f_x(x,y)=3,\quad f_y(x,y)=1,\quad g_x(x,y)=36x^3-6y,\quad g_y(x,y)=-6x+4y$

Γは特異点がないから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrangeの未定乗数法ですべて求められる。また，Γは有界閉集合で，fは連続であるから Weierstrassの最大値定理より $f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ。そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrangeの未定乗数法より

$$\begin{cases} 9x^4-6xy+2y^2-9=0 & \cdots ① \\ 3-\lambda(36x^3-6y)=0 & \cdots ② \\ 1-\lambda(-6x+4y)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②，③より λ を消去して

$12x^3+6x-6y=0$
$\Leftrightarrow 2x^3+x-y=0$

これを①に代入して

$9x^4-6x(2x^3+x)+2(2x^3+x)^2-9=0$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^4 - 12x^4 - 6x^2 + 2(4x^6 + 4x^4 + x^2) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{9x^4} - \cancel{12x^4} - \cancel{6x^2} + \cancel{8x^6} + 8x^4 + \cancel{2x^2} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(8x^5 + 8x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 9x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(8x^4 + 13x^2 + 9) = 0$$

$$x = \pm 1$$

ア		カ		サ	
イ		キ		シ	
ウ		ク			
エ		ケ			
オ		コ			

3

(2) $f(x,y) = x - y - \dfrac{3}{4}xy,\ g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 4$

Γ は特異点がないから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる．また，Γ は有界閉集合で，f は連続であるから，Weierstrass の最大値定理より，$f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ．そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 & \cdots\cdots① \\ f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 & \cdots\cdots② \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の解である．② と ③ より λ を消去した式と ① を連立させると

$$(x,y) = \boxed{\quad ア \quad},\ \boxed{\quad イ \quad},\ \boxed{\quad ウ \quad},\ \boxed{\quad エ \quad},\ \boxed{\quad オ \quad}$$

が得られる．関数値は順に

$$f(x,y) = \boxed{\quad カ \quad},\ \boxed{\quad キ \quad},\ \boxed{\quad ク \quad},\ \boxed{\quad ケ \quad},\ \boxed{\quad コ \quad}$$

となるから，これらの関数値のうち一番大きい値が最大値，一番小さい値が最小値となる．よって，答えは

最大値 $\boxed{\quad サ \quad}$　　最小値 $\boxed{\quad シ \quad}$

ア		カ		サ	
イ		キ		シ	
ウ		ク			
エ		ケ			
オ		コ			