第6講

2024年5月24日　　10:34

例題

$\frac{dy}{dx} = -2xy \longrightarrow \underbrace{y = y(x)}$ の関数を求める。

└ 導関数を含まない

$y \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{y}dy = -2x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -2x\,dx$$

$$\log|y| = -x^2 + C \quad (C：積分定数)$$

$$|y| = e^{-x^2+C} = e^{-x^2} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{-x^2} \cdot e^{C}$$

$c = \pm e^{C}$ $(c \neq 0)$ とすると、

$$y = ce^{-x^2} \quad (c は\ c \neq 0 の任意定数)$$

$y = 0$ のとき、

(左辺) $\frac{dy}{dx} = 0$

(右辺) $-2xy = 0$

} 成立 $\Rightarrow$ $y = 0$ も解

$y = ce^{-x^2}$ で $y = 0$ となるのは $c = 0$ のとき。

よって

$$\underline{y = ce^{-x^2} \quad (c：任意定数)}$$

※今後は細かく見ない。

$\Downarrow$

c の値によって、無数の y が存在する。

→ 何か条件を付けないと、y は一意的に決まらない。

$\Downarrow$

任意定数 (c) を含む解を"一般解"という。

"初期条件"

例えば、$x = 0$ のとき $y = 1$ $(y(0) = 1)$ が与えられれば

$$y = ce^{-0^2} = c = 1$$

よって

$$\underline{y = e^{-x^2}}$$

演習

問1 例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $x\frac{dy}{dx}$

問1 例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $x\frac{dy}{dx}=y$

(2) $y\frac{dy}{dx}=-x$

(3) $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+\sin x\cos^2 y=0$

問2 物体が空気中を落下するとき、速さに比例する抵抗を受けると仮定する。その とき、時刻 t における速度を v とすれば、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dv}{dt}=g-kv \quad (k\text{は比例定数}、g\text{は重力加速度})$$

(1) $t=0$ のときの初速度を 0 として、この微分方程式を解け。

(2) 速さの2乗に比例する抵抗を受けると仮定した場合について、微分方程式をたてて、(1)と同じ初期条件のもとで解け。

問1

(1)

$$x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}dx=\frac{1}{y}dy$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y}dy$$

$$\log|y|=\log|x|+C \quad (C\text{：積分定数})$$

$$|y|=e^{\log|x|+C}$$

$$=e^{\log|x|}\cdot e^{C}$$

$$=|x|\cdot e^{C}$$

$$y=\pm x\cdot e^{C}$$

$C=\pm e^{C}$ とすると

$$y=Cx \quad (C\text{は任意定数})$$

(2)

$$y\frac{dy}{dx}=-x$$

$$\int y\,dy=\int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1 \quad (C_1\text{：積分定数})$$

$$y^2+x^2=2C_1 \quad (C_1\geqq 0)$$

$$y^2+x^2=C \quad (C=2C_1\text{；}C\geqq 0\text{の任意定数})$$

(3) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + \sin x \cos^2 y = 0$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

(左辺) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \tan y + C_1$ (C_1：積分定数)

(右辺)

$a = \cos x$

$\dfrac{da}{dx} = -\sin x \Rightarrow da = -\sin x\, dx$

よって、

$$\int \frac{\overbrace{-\sin x \, dx}^{da}}{\underbrace{\cos^2 x}_{a^2}} = \int \frac{1}{a^2} da$$

$= -\dfrac{1}{a} + C_2$ (C_2：積分定数)

$= -\dfrac{1}{\cos x} + C_2$

$= -\sec x + C_2$

ゆえに、

$\tan y + C_1 = -\sec x + C_2$

$\tan y + \sec x = C$ (C：任意定数) //

cf. $\sec = \dfrac{1}{\cos}$

$\operatorname{cosec} = \dfrac{1}{\sin}$
csc

$\cot = \dfrac{1}{\tan} = \dfrac{\cos}{\sin}$

2.2 同次形（相似形）

$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ → 右辺が $\dfrac{y}{x}$ の関数である場合

$\dfrac{y}{x} = u$ → $y = ux$

⇓

xの関数であり、
実数ではない。

$\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{f(u)} = u + x\dfrac{du}{dx}$

$f(u) - u = x\dfrac{du}{dx}$

$f(u)-u \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{f(u)-u}du \quad \text{——} \quad ①$$

(変数分離形)

$$\log|x| + C = \int \frac{1}{f(u)-u}du$$

→ u の関数を求め、
$u = \frac{y}{x}$ により解が求められる。

$f(u)-u = 0$ のとき、

$f(u) = u$ より、 $\frac{dy}{dx} = u = \frac{y}{x}$

$\Downarrow$

$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$ より解を求められる。

一般解

但し、u が定数で $y = mx$ (m: 定数) も解となるとき、
$\frac{dy}{dx} = m$ となり、①式の形にならない。

$\frac{dy}{dx} = m = f(m)$ を満たす定数 m があれば、
$y = mx$ も解となる。
→ 一般解に含まれない解を特異解という。