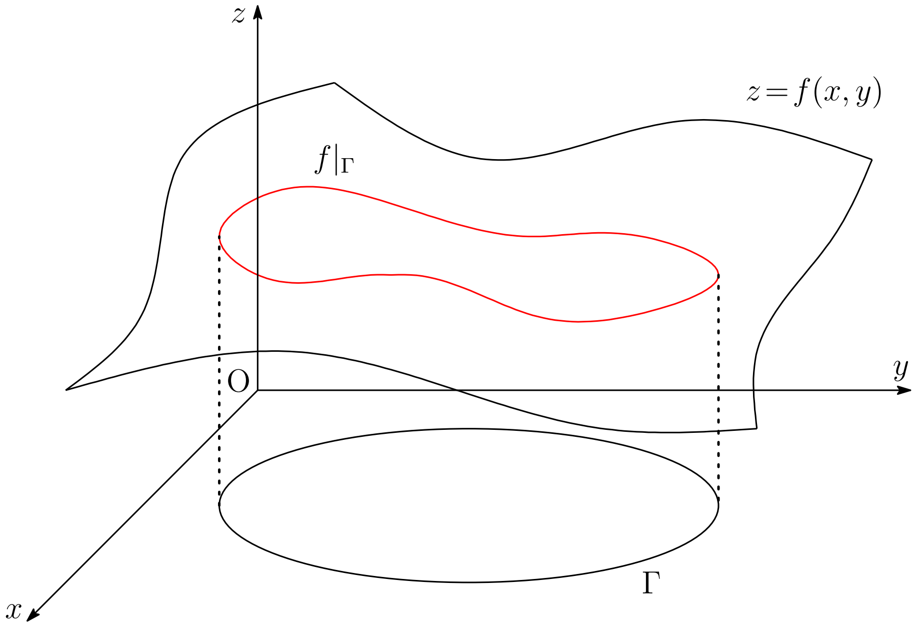
前回に引き続き今回も「条件付き極値」（下図の赤い曲線の極値）である．今回は Lagrange の未定乗数法で求めた候補についての判定法を紹介する．



曲線 $z=f|_\Gamma(x,y)$ は，曲面 $z=f(x,y)$ を Γ で筒切りしたときの切り口

方法 2（一般論を証明し具体例に適用する）
候補の点 (a,b) が Γ の特異点でなければ，陰関数定理を用いて (a,b) の近傍で Γ を 1 変数化 $(y=\varphi(x))$ しておく．このとき，(a,b) の近傍では $f|_\Gamma(x,y)=f(x,\varphi(x))$ となるから，これを $F(x)$ とおいて $F(x)$ が $x=a$ で極値をとるかどうか調べる．

定理 6.12（条件付き極値の判定法）

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f, g を O で C^2 級，

$$\Gamma = \{(x,y) \in O \mid g(x,y) = 0\}$$

とする．$(a,b) \in \Gamma$ が

$$g_x(a,b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a,b) \neq 0$$

を満たし，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ で

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 & \cdots\cdots① \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立っているとする．このとき

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

とおくと

(1) $D(a,b) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極大値

(2) $D(a,b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極小値

証明

定理の仮定が成り立つとする．

(i) $g_y(a,b) \neq 0$ のとき，陰関数定理より，(a,b) の近傍で $g(x,y) = 0$ が定める陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在し

$$\varphi(a) = b, \quad g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \cdots\cdots③, \quad \varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

が成り立つ．そして，g は C^2 級であるから，φ は a の近傍で C^2 級である．

ここで ③ の両辺を x で微分すると

$$g_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + g_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\therefore \quad g_x(x, \varphi(x)) + g_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \cdots\cdots④$$

さらに ④ の両辺を x で微分すると

$$\{g_{xx}(x, \varphi(x)) \cdot 1 + g_{xy}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\}$$
$$+ \{g_{yx}(x, \varphi(x)) \cdot 1 + g_{yy}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\} \cdot \varphi'(x) + g_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi''(x) = 0$$

$$\therefore \quad g_{xx}(x, \varphi(x)) + 2g_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + g_{yy}(x, \varphi(x))\varphi'(x)^2 + g_y(x, \varphi(x))\varphi''(x) = 0 \quad \cdots\cdots⑤$$

さて，(a,b) の近傍では Γ は $y = \varphi(x)$ で表されるから，(a,b) の近傍では

$$f|_\Gamma(x,y) = f(x, \varphi(x))$$

となり，これは x の 1 変数関数である．そこで，これを $F(x)$ とおき，$F(x)$ が $x = a$ で極値をとるかどうか調べる．

このままでもいいが，最終的な表示を簡単にするため，Lagrange の未定乗数 λ（定理の中の ① と ② を満たすもの）を用いた

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) - \lambda \underbrace{g(x, \varphi(x))}_{\text{恒等的に } 0} \Big(= (f - \lambda g)(x, \varphi(x)) \Big)$$

の形で考える．
このとき，④ と ⑤ の左辺の計算と同様にして

$$\begin{aligned} F'(x) &= (f_x - \lambda g_x)(x, \varphi(x)) + (f_y - \lambda g_y)(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ F''(x) &= (f_{xx} - \lambda g_{xx})(x, \varphi(x)) + 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ &\qquad + (f_{yy} - \lambda g_{yy})(x, \varphi(x))\varphi'(x)^2 + (f_y - \lambda g_y)(x, \varphi(x))\varphi''(x) \end{aligned}$$

となるから

$$F'(a) = \underbrace{(f_x - \lambda g_x)(a, b)}_{\text{①より } 0} + \underbrace{(f_y - \lambda g_y)(a, b)}_{\text{②より } 0} \varphi'(a) = 0 \qquad \text{（念のため）}$$

$$\begin{aligned} F''(a) &= \underbrace{(f_{xx} - \lambda g_{xx})(a, b)}_{A \text{ とおく}} + 2\underbrace{(f_{xy} - \lambda g_{xy})(a, b)}_{B \text{ とおく}} \varphi'(a) \\ &\qquad + \underbrace{(f_{yy} - \lambda g_{yy})(a, b)}_{C \text{ とおく}} \varphi'(a)^2 + \underbrace{(f_y - \lambda g_y)(a, b)}_{\text{②より } 0} \varphi''(a) \\ &= A + 2B \cdot \left\{ -\frac{g_x(a, b)}{\underbrace{g_y(a, b)}_{\frac{g_x}{g_y} \text{ と略記}}} \right\} + C \cdot \left\{ -\frac{g_x(a, b)}{\underbrace{g_y(a, b)}_{\frac{g_x}{g_y} \text{ と略記}}} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{{g_y}^2} \Big(A{g_y}^2 - 2Bg_xg_y + C{g_x}^2 \Big) \\ &= \frac{1}{{g_y}^2} \Big\{ g_x(Cg_x - Bg_y) - g_y(Bg_x - Ag_y) \Big\} \\ &= \frac{1}{{g_y}^2} \left(g_x \begin{vmatrix} g_x & B \\ g_y & C \end{vmatrix} - g_y \begin{vmatrix} g_x & A \\ g_y & B \end{vmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{{g_y}^2} \left(-g_x \begin{vmatrix} g_x & B \\ g_y & C \end{vmatrix} + g_y \begin{vmatrix} g_x & A \\ g_y & B \end{vmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{{g_y}^2} \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & A & B \\ g_y & B & C \end{vmatrix} \\ &= -\frac{D(a, b)}{g_y(a, b)^2} \end{aligned}$$

よって

- $D(a, b) > 0$ のとき，$F''(a) < 0$ となるから $F(a) = f(a, b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極大値
- $D(a, b) < 0$ のとき，$F''(a) > 0$ となるから $F(a) = f(a, b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極小値

(ii) $g_x(a, b) \neq 0$ のとき，上の議論で x と y を入れかえて考えれば，行変形と列変形を 1 回ずつ実行しても行列式の値は変わらないので，結果は同じである． ∎

3 次正方行列の行列式の計算方法を忘れていたら思い出しておくこと．

3 次正方行列の行列式（サラスの方法）

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} \\
&\quad + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\qquad\qquad
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

(1)
$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix}
&= 3\cdot(-3)\cdot(-7) + 2\cdot 6\cdot 5 + 4\cdot 4\cdot 3 - 4\cdot(-3)\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot(-7) - 3\cdot 6\cdot 3 \\
&= 63 + 60 + 48 + 60 + 56 - 54 = 233
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{vmatrix} 1 & 5 & -9 \\ -12 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + (-108) - (-81) - (-60) - (-2) = 68
$$

例 6.8

$x^3y+xy^3-xy=1$ に制限した $f(x,y)=x^3+y^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}y^2+2xy$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

解答

$f(x,y)=x^3+y^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}y^2+2xy$ より

$$f_x(x,y)=3x^2+3x+2y,\ f_y(x,y)=3y^2+3y+2x$$

$$f_{xx}(x,y)=6x+3,\ f_{yy}(x,y)=6y+3,\ f_{xy}(x,y)=2$$

また，$g(x,y)=x^3y+xy^3-xy-1$ とおくと

$$g_x(x,y)=3x^2y+y^3-y,\ g_y(x,y)=x^3+3xy^2-x$$

$$g_{xx}(x,y)=6xy,\ g_{yy}(x,y)=6xy,\ g_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1$$

$(x,y)=(1,1)$ のとき

$$f_x=8,\ f_y=8,\ g_x=3,\ g_y=3$$

より，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda=\dfrac{8}{3}$

さらに

$$f_{xx}-\lambda g_{xx}=9-\frac{8}{3}\cdot 6=-7,\ f_{yy}-\lambda g_{yy}=9-\frac{8}{3}\cdot 6=-7,\ f_{xy}-\lambda g_{xy}=2-\frac{8}{3}\cdot 5=-\frac{34}{3}$$

であるから

$$D(1,1)=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -7 & -\dfrac{34}{3} \\ 3 & -\dfrac{34}{3} & -7 \end{vmatrix}=0+(-102)+(-102)-(-63)-(-63)-0=-78<0$$

$$\therefore\quad f(1,1)=7 \text{ は極小値}$$

※ Lagrange の未定乗数 λ は $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ から求めるとよい．

【問題】
$\Gamma : g(x,y)=0$ に制限した $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるかどうか次の手順で調べ，解答欄に記入せよ．

(1) $f(x,y)=x+y+6xy,\ g(x,y)=x^2+y^2-xy-1,\ (a,b)=(-1,-1)$

$(x,y)=(a,b)$ のとき，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda=\boxed{\text{ア}}$
また

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{vmatrix}=\boxed{\text{キ}}$$

であるから，$f(a,b)=\boxed{\text{ク}}$ は極 $\boxed{\text{ケ}}$ 値である．

(1). $f(x,y)=x+y+6xy$. $g(x,y)=x^2+y^2-xy-1$.　　$-2+6$
$f_x(x,y)=1+6y$, $f_y(x,y)=1+6x$
$f_{xx}(x,y)=0$　　$f_{yy}(x,y)=0$.　$f_{xy}(x,y)=6$
$g_x(x,y)=2x-y$.　$g_y(x,y)=2y-x$
$-2+1$
$g_{xx}(x,y)=2$,　$g_{yy}(x,y)=2$,　$g_{xy}(x,y)=-1$
$(x,y)=(-1,-1)$ のとき
$f_x(-1,-1)=-5$, $f_y(-1,-1)=-5$,　$g_x(-1,-1)=-1$,　$g_y(-1,-1)=-1$
より，Lagrange の未定乗数 $\lambda=5$
$f_{xx}(-1,-1)-\lambda g_{xx}(-1,-1)=0-5\cdot2=-10$.　$f_{yy}(-1,-1)-\lambda g_{yy}(-1,-1)=0-5\cdot2=-10$
$f_{xy}(-1,-1)-\lambda g_{xy}(-1,-1)=6-5\cdot(-1)=11$

$$D(-1,-1)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -10 & 11 \\ -1 & 11 & -10 \end{vmatrix}=11+11+10+10$$
$=42>0$
$f(-1,-1)=4$ は 極大値

ア	5	イ	-1	ウ	-1
エ	-10	オ	11	カ	-10
キ	42	ク	4	ケ	大

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 + 6xy,\ g(x,y) = x^2y + xy^2 - 2,\ (a,b) = (1,1)$

$(x,y) = (a,b)$ のとき，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda = \boxed{\text{ア}}$
また

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{vmatrix} = \boxed{\text{キ}}$$

であるから，$f(a,b) = \boxed{\text{ク}}$ は極 $\boxed{\text{ケ}}$ 値である．

$f_x(x,y) = 3x^2 + 9x + 6y$、 $f_y(x,y) = 3y^2 + 9y + 6x$

$f_{xx}(x,y) = 6x + 9$、 $f_{yy}(x,y) = 6y + 9$、 $f_{xy}(x,y) = 6$

$g_x(x,y) = 2xy + y^2$、 $g_y(x,y) = \underbrace{x^2 + 2xy}$ 　$1+2$

$g_{xx}(x,y) = 2y$、 $g_{yy}(x,y) = 2x$、 $g_{xy}(x,y) = 2x + 2y$

$(x,y) = (1,1)$ のとき

$f_x(1,1) = 18$、 $f_y(1,1) = 18$、 $g_x(1,1) = 3$、 $g_y(1,1) = 3$ より

Lagrange の未定乗数 $\lambda = 6$

$f_{xx}(1,1) - \lambda g_{xx}(1,1) = 15 - 6\cdot 2 = 3$、 $f_{yy}(1,1) - \lambda g_{yy}(1,1) = 6 - 6\cdot 2 = -6$

$f_{xy}(1,1) - \lambda g_{xy}(1,1) = 6 - 6\cdot 4 = -18$

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -18 \\ 3 & -18 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot(-18)\cdot 3 + 3\cdot 3\cdot(-18) - 3\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot(-6)$$

$= -378 < 0$ より

$f(1,1) = 17$ は極小値

ア	6	イ	3	ウ	3
エ	3	オ	−18	カ	−6
キ	−378	ク	17	ケ	小

(3) $f(x,y) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}y^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2xy,\ g(x,y) = x^3 + y^3 - xy - 1,\ (a,b) = (1,1)$

$(x,y) = (a,b)$ のとき，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda = \boxed{\text{ア}}$
また

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b) - \lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b) - \lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) - \lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{vmatrix} = \boxed{\text{キ}}$$

であるから，$f(a,b) = \boxed{\text{ク}}$ は極 $\boxed{\text{ケ}}$ 値である．

$\frac{10}{3} + \frac{5}{2} + 2$

$\frac{10}{3} + 10\,5$

$f_x(x,y) = 5x^2 + 3x + 2y$、 $f_y(x,y) = 5y^2 + 3y + 2x$,
$f_{xx}(x,y) = 10x + 3$, $f_{yy}(x,y) = 10y + 3$, $f_{xy}(x,y) = 2$
$g_x(x,y) = 3x^2 - y$, $g_y(x,y) = 3y^2 - x$.
$g_{xx}(x,y) = 6x$, $g_{yy}(x,y) = 6y$, $g_{xy}(x,y) = -1$

$(x,y) = (1,1)$ のとき
$f_x(1,1) = 10$、 $f_y(1,1) = 10$、 $g_x(1,1) = 2$、 $g_y(1,1) = 2$ より
Lagrange の未定乗数 $\lambda = 5$
$f_{xx}(1,1) - \lambda g_{xx}(1,1) = 13 - 5 \cdot 6 = -17$. $f_{yy}(1,1) - \lambda g_{yy}(1,1) = 13 - 5 \cdot 6 = -17$
$f_{xy}(1,1) - \lambda g_{xy}(1,1) = 2 - 5 \cdot (-1) = 7$

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -17 & 7 \\ 2 & 7 & -17 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 7 - 2 \cdot (-17) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-17)$$
$$= 28 + 28 + 68 + 68$$
$$= 192 > 0 \text{ より}$$
$f(1,1) = \frac{25}{3}$ は 極大値

ア	5	イ	2	ウ	2
エ	−17	オ	7	カ	−17
キ	192	ク	$\frac{25}{3}$	ケ	大

(4) $f(x,y)=x^3+y^3-\dfrac{7}{4}x^2-\dfrac{7}{4}y^2-\dfrac{5}{2}xy,\ g(x,y)=x^3y^2+x^2y^3-x^2y^2-1,\ (a,b)=(1,1)$

$(x,y)=(a,b)$ のとき，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda=$ $\boxed{\text{ア}}$
また

$$D(a,b)=\begin{vmatrix}0 & g_x(a,b) & g_y(a,b)\\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b)\\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}}\\ \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}}\\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}}\end{vmatrix}=\boxed{\text{キ}}$$

であるから，$f(a,b)=$ $\boxed{\text{ク}}$ は極 $\boxed{\text{ケ}}$ 値である．

$2-\frac{14}{4}-\frac{5}{2}$

$\frac{8-14-10}{4}$

$6-\frac{7}{2}$

$\frac{12-7}{2}$

$\frac{8-24}{4}$

$\frac{-16}{4}$

$f_x(x,y) = 3x^2-\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}y$ 、$f_y(x,y) = 3y^2-\frac{7}{2}y-\frac{5}{2}x$

$f_{xx}(x,y) = 6x-\frac{7}{2}$ 、$f_{yy}(x,y) = 6y-\frac{7}{2}$ 、$f_{xy}(x,y) = -\frac{5}{2}$

$g_x(x,y) = 3x^2y^2+2xy^3-2xy^2$ 、$g_y(x,y) = 2x^3y+3x^2y^2-2x^2y$

$g_{xx}(x,y) = 6xy^2+2y^3-2y^2$　$g_{yy}(x,y) = 2x^3+6x^2y-2x^2$

$g_{xy}(x,y) = 6x^2y+6xy^2-4$

$(x,y)=(1,1)$ ので

$f_x(1,1) = -3$ 、$f_y(1,1) = -3$ 、$g_x(1,1) = 3$、$g_y(1,1) = 3$

より Lagrange の未定乗数 $\lambda = -1$

$f_{xx}(1,1) - \lambda g_{xx}(1,1) = \frac{5}{2}-(-1)\cdot 6 = \frac{5}{2}+6 = \frac{17}{2}$

$f_{yy}(1,1) - \lambda g_{yy}(1,1) = \frac{5}{2}-(-1)\cdot 6 = \frac{5}{2}+6 = \frac{17}{2}$

$f_{xy}(1,1) - \lambda g_{xy}(1,1) = -\frac{5}{2}-(-1)\cdot 8 = \frac{11}{2}$

$D(1,1) = \begin{vmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & \frac{15}{2} & \frac{11}{2}\\ 3 & \frac{11}{2} & \frac{17}{2}\end{vmatrix} = 3\cdot\frac{11}{2}\cdot 3 + 3\cdot 3\cdot\frac{11}{2} - 3\cdot 3\cdot\frac{17}{2} - 3\cdot 3\cdot\frac{17}{2}$

$= -54 < 0$ なので $f(1,1) = -4$ は極小値

ア	-1	イ	3	ウ	3
エ	$\frac{17}{2}$	オ	$\frac{11}{2}$	カ	$\frac{17}{2}$
キ	-54	ク	-4	ケ	小