スライド5枚目 ほそく

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2\hbar m\omega}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left((m\omega\hat{x})^2 + \underbrace{im\omega\hat{x}\hat{p} - im\omega\hat{p}\hat{x}}_{im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) = i\hbar} + \hat{p}^2\right)$$

$$= m\omega\hbar$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = +i\hbar$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\hat{x},\ \hat{p} \longrightarrow \hat{a}^+,\ \hat{a}$$

置き換える

スライド6枚目 ほそく

$$\hat{H}|\nu\rangle = \hbar\omega(\overset{\hat{N}}{\hat{a}^+\hat{a}} + \frac{1}{2})|\nu\rangle$$

$$= \hbar\omega[\underbrace{\hat{N}|\nu\rangle}_{\nu|\nu\rangle} + \frac{1}{2}|\nu\rangle]$$

$$\boxed{\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle}$$

$$\boxed{= \boxed{\hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}|\nu\rangle}$$

固有値

$$\hat{H}|\nu\rangle = \square|\nu\rangle$$

$|\nu\rangle$ は $\hat{H}$ の固有ケット

固有値は $E = \hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$

実数 → 整数 ≥ 0

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$$

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1}$$

$$\boxed{[\hat{N}, \hat{a}^+]} = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^+] = (\hat{a}^+\hat{a})\hat{a}^+ - \hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a})$$

$$= \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}$$

$$= \hat{a}^+\underbrace{(\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a})}_{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1} \boxed{= \hat{a}^+}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}]$$
$$= (\hat{a}^+\hat{a})\hat{a} - \hat{a}(\hat{a}^+\hat{a})$$
$$= \hat{a}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\hat{a}$$
$$= (\hat{a}^+\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+)\hat{a}$$
$$= -\underbrace{(\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a})}_{=1}\hat{a}$$
$$= -\hat{a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \\ &[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \\ &[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \end{aligned}}$$

交換関係：演算子の顔

スライド 7枚目 はうく

$$\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle \quad (\nu：実数)$$

$\hat{a}^+|\nu\rangle$
状態

$$\hat{N}(\hat{a}^+|\nu\rangle) = \hat{N}\hat{a}^+|\nu\rangle$$
$$= (\underbrace{\hat{N}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{N}}_{=[\hat{N}, \hat{a}^+]} + \hat{a}^+\hat{N})|\nu\rangle$$
$$= (\underbrace{[\hat{N}, \hat{a}^+]}_{=\hat{a}^+} + \hat{a}^+\hat{N}|\nu\rangle$$
$$= (\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{N}|\nu\rangle$$
$$= \hat{a}^+|\nu\rangle + \hat{a}^+\underbrace{\hat{N}|\nu\rangle}_{\nu|\nu\rangle}$$
$$= \hat{a}^+|\nu\rangle + \nu\hat{a}^+|\nu\rangle$$
$$= (\nu+1)\hat{a}^+|\nu\rangle$$

固有値

$$\hat{N}(\hat{a}^+|\nu\rangle) = (\nu+1)(\hat{a}^+|\nu\rangle)$$

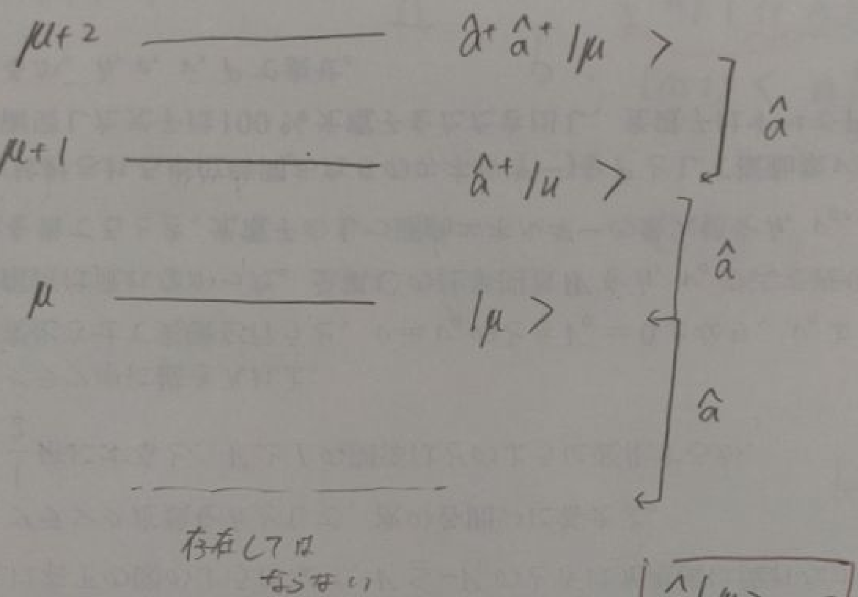
$\hat{a}^+$ が $\hat{N}$ の固有ケットで　　固有値が $\nu+1$

$\hat{a}^+$ 固有値 を1 増やす演算子

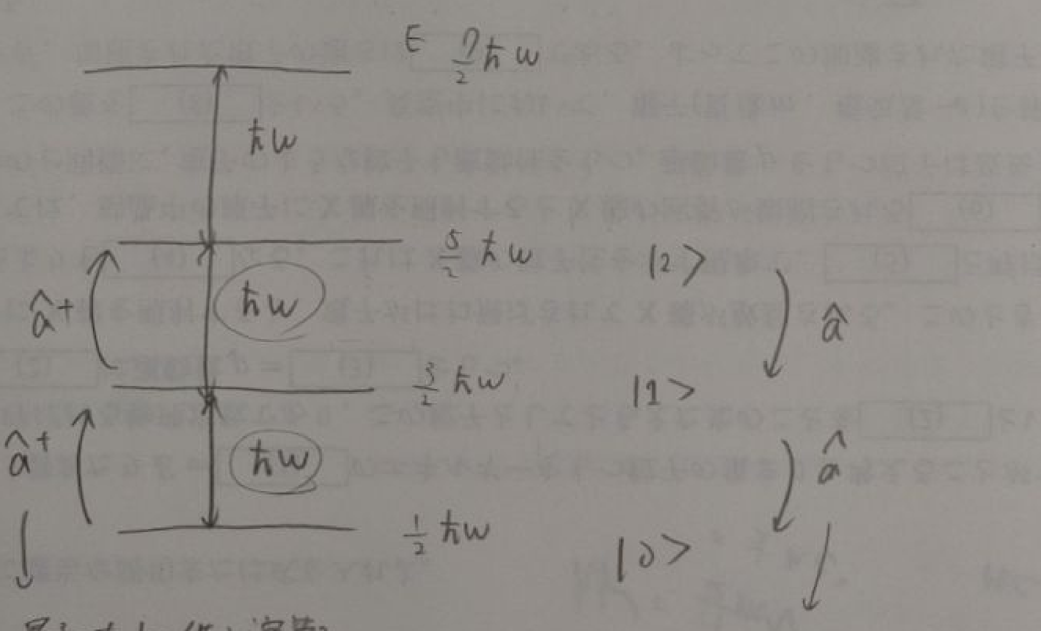
νには最小値がある

μ：νの最小値とする

固有値



$\boxed{\hat{a}|\mu\rangle = 0}$



量子を1つ作る演算子
生成演算子

量子を1つ消す演算子
消滅演算子

フォノン
振動エネルギーの量子
$E = \hbar\omega$