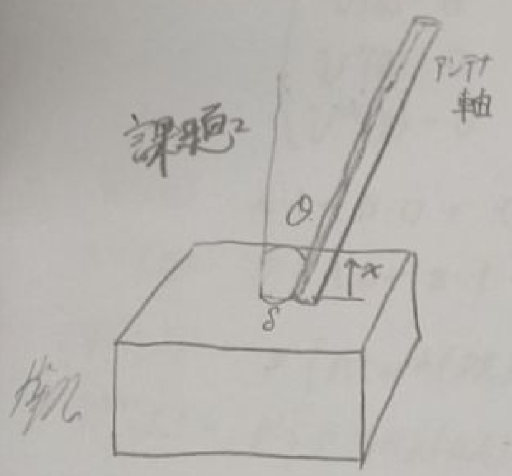
反応化学まとめ.

材料の力学2

課題2



長さl, 断面積A, 密度ρ
根本のモーメントを求めよ.

遠心力が分布荷重のはり

回転の半径はたわみなので境界条件と積分を利用する
遠心力 $mr\omega^2$ ⇒ たわみの4回微分として遠心力

$$EIv''''(x) = \rho A v(x)\omega^2$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI}\omega^2 v(x) = 0$$

$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EL}\omega^2}$ とおく

$$v''''(x) - \beta^4 v(x) = 0$$ この一般解は

初期条件

$$\begin{cases} v(0) = \delta \\ v'(0) = \theta \\ v''(l) = 0 \\ v'''(l) = 0 \end{cases}$$

$$v(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

ここで $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ なので

$$\begin{cases} e^{\beta x} = \cosh(\beta x) + \sinh(\beta x) \\ e^{-\beta x} = \cosh(\beta x) - \sinh(\beta x) \end{cases}$$ である

又、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$$
$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$$

$$v(x) = C_1(\cosh(\beta x) + \sinh(\beta x)) + C_2(\cosh(\beta x) - \sinh(\beta x)) + C_3(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + C_4(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

$$= (C_1 + C_2)\cosh(\beta x) + (C_1 - C_2)\sinh(\beta x) + (C_3 + C_4)\cos(\beta x) + (C_3 - C_4)i\sin(\beta x)$$

$$= A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$$ とおく

$(A = C_1 + C_2,\ B = C_1 - C_2,\ C = C_3 + C_4,\ D = (C_3 - C_4)i)$

又. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ であるので

$v(0) = \delta$, $v'(0) = \theta$. $v''(l) = 0$. $v'''(l) = 0$ を用いるため微分すると

$$v'(x) = \beta\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) - C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\}$$
$$v''(x) = \beta^2\{A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) - C\cos(\beta x) - D\sin(\beta x)\}$$
$$v'''(x) = \beta^3\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) + C\sin(\beta x) - D\cos(\beta x)\}$$

ここで始めに示した

$$\begin{cases} v(0)=\delta \\ v'(0)=\theta \\ v''(l)=0 \\ v'''(l)=0 \end{cases}$$ を用いる。

$$v(0)=A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 1+D\cdot 0=\delta \qquad \therefore C=\delta-A \cdots (*)$$

$$v'(0)=\beta\{A\cdot 0+B\cdot 1-C\cdot 0+D\cdot 1\}=\theta \Leftrightarrow B+D=\frac{\theta}{\beta} \Leftrightarrow D=\frac{\theta}{\beta}-B \cdots (*)'$$

$$v''(l)=\beta^2\{A\cosh(\beta l)+B\sinh(\beta l)-C\cos(\beta l)-D\sin(\beta l)\}=0 \cdots ①$$

$$v'''(l)=\beta^3\{A\sinh(\beta l)+B\cosh(\beta l)+C\sin(\beta l)-D\cos(\beta l)\}=0 \cdots ②$$

①,②に $(*)(*)'$ を代入すると

$$① = \beta^2[A\{\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)\}+B\{\sinh(\beta l)+\sin(\beta l)\} - \delta\cos(\beta l)-\frac{\theta}{\beta}\sin(\beta l)]=0 \cdots ①'$$

$$② = \beta^3[A\{\sinh(\beta l)-\sin(\beta l)\}+B\{\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)\}+\delta\sin(\beta l)-\frac{\theta}{\beta}\cos(\beta l)] \cdots ②'$$

$①' \times \{\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)\}$ より

$$[A\{\cosh^2(\beta l)+2\cosh(\beta l)\cos(\beta l)+\cos^2(\beta l)\}+B\{\sinh(\beta l)+\sin\beta l\}\{\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)\} - \delta\cosh(\beta l)\cos(\beta l)-\delta\cos^2(\beta l)-\frac{\theta}{\beta}\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\cos(\beta l)\sin(\beta l)]=0 \cdots ③$$

$② \times \{\sinh(\beta l)+\sin(\beta l)\}$

$$=[A\{\sinh^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)\}+B\{\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)\}\{\sinh(\beta l)+\sin(\beta l)\} + \delta\sinh(\beta l)\sin(\beta l)+\delta\sin^2(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\sinh(\beta l)\cos(\beta l)-\frac{\theta}{\beta}\sin(\beta l)\cos(\beta l)]=0 \cdots ④$$

③ − ④ は

$$-A\{1+1+2\cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}-\delta\{1+\cosh(\beta l)\cos(\beta l)+\sinh(\beta l)\sin(\beta l)\} - \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l)-\sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}=0$$

$$2A=\frac{\delta\{\cosh(\beta l)\cos(\beta l)+\sinh(\beta l)\sin(\beta l)+1\}+\frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l)-\sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\{1+\cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

$Q(x)$

$\downarrow$

$M(x)$

$\downarrow$ 微×$-EI$

$\phi(x)$

$\downarrow$ 微

$v(x)$

よって求める根元のモーメントは

$M(0) = -EI\,v''(0)$ より

$v''(0) = \beta^2(A - C)$ $\quad C = \delta \cdot A$

$M(0) = -EI\beta^2(2A - \delta)$

$$2A - \delta = \frac{\delta \sinh(\beta l)\sin(\beta l) + \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

$$M(0) = -EI\beta^2 \cdot \frac{\delta \sinh(\beta l)\sin(\beta l) + \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

$$= \frac{\theta\{\sinh(\beta l)\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)\sin(\beta l)\} - \delta\beta \sinh(\beta l)\sin(\beta l)}{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)} \cdot EI\beta$$