8223036　栗山淳
熱力学２　第１講　課題

１

(1) 単振り子は，長さlの糸の先端に質量mの質点が取り付けられ，鉛直下方との角度を$\theta - \frac{\pi}{2}$として動く。

よって極座標は$\left(l, \theta - \frac{\pi}{2}\right)$となる

(2) x軸の原点 O の高さを位置エネルギー=0 の基準とするとき，(1)の位置における位置エネルギー

位置エネルギーVは力Fと微小変位dSを用いて次のように表すことができる。

$$V = -\int F \cdot dS$$

今回重力に逆らって持ち上げた時にかかる力は$-mg$，原点を基準としたときの振り子の角度θにおける質点の高さは$-lcos\theta$と表すことができる。よって求める位置エネルギーV は

$$V = -\int F \cdot dS = -(-mg) \cdot -lcos\theta = -mglcos\theta$$

(3)(1)における運動エネルギーKを求めると次のようになる。

速度は極座標で$v = l\frac{d\theta}{st}$と表せるので

$$K = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{st}\right)^2$$

(4)ラグランジュ関数Lは運動エネルギーKと位置エネルギーVの差として定義される

$$L = K - V = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mglcos\theta$$

(5)ラグランジュ方程式は次の形で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

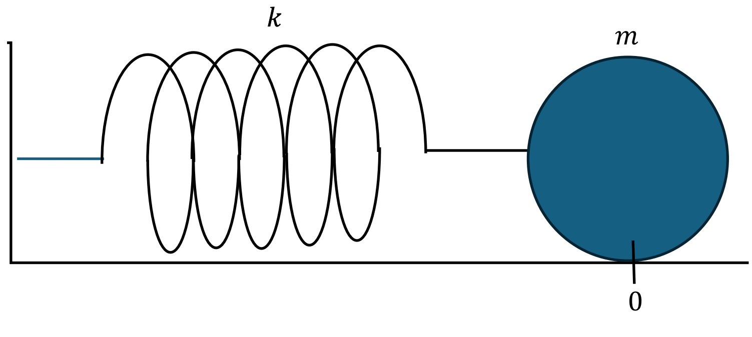
この式に(4)の値を代入して計算すると次の運動方程式が得られる

$$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - mglsin\theta = 0$$

(6)(5)の方程式の物理的意味は振り子の角加速度が重力と釣り合う力に依存することを示している。

2.

(1)



(2)

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

(3) 変位xにおける速度をvとすると

$v = \dot{x}$となる

よって運動エネルギーKは以下のようになる

8223036　栗山淳

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

(4)

$$L = K - V$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

(5)

$$H = K + V$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

(6)

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$
$$= m\dot{x}$$

ハミルトンの正準方程式

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P}$$
$$= \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right)$$
$$= \frac{p}{m}$$
$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}$$
$$= kx$$

(7)

$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$より，$p = m\frac{dx}{dt}$

これを$\frac{dp}{dt} = -kx$に代入すると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

よって単振動の運動方程式が得られる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

この運動方程式の一般解は次のようになる

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi)$$

ここで$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ は角振動数，Aは振幅，ϕは初期位相

次に位相空間での軌跡を求める

位相空間とは，位置xと運動量$p = m\frac{dx}{dt}$を軸とした空間

$x(t) = Acos(\omega t + \phi)$のとき，運動量$p$は

$$p(t) = m\frac{dx}{dt} = -mA\omega\sin(\omega t + \phi)$$

したがって，位相空間では次の関係が成り立つ

8223036　栗山淳

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{p^2}{(mA\omega)^2}=1$$

これは楕円軌道を示しており，図示すると以下のようになる