2023 年度 線形代数学 2 課題 5

学科 AM 学籍番号 8223036 氏名 栗山 [illegible]

問 1. 行列 $A = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&3&4&1\\3&3&2&1&4\end{bmatrix}$ で与えられる線形写像 T_A の退化次数と階数を求め, 像と核の基を求めよ.

$$T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&3&4&1\\3&3&2&1&4\end{bmatrix} x \quad : \quad R^5 \to R^3$$

Aを簡約化すると、

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&3&4&1\\3&3&2&1&4\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&2&-1\\0&0&-1&-2&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&2&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&1&0&-1&2\\0&0&1&2&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \end{array}$$

$null(T_A) = dim(Ker(T_A))$ なので

$null(T_A) = dim(key(T_A)) = dim(Ax)$

$Ax = 0$ の連立方程式を解くと

$$x = \begin{bmatrix}-c_2 + c_4 - 2c_5\\ c_2\\ -2c_4 + c_5\\ c_4\\ c_5\end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + c_5\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

明らかに一次独立

$null(T_A) = dim(Ax) = 3$

核の基は $\left\{ \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$

$rank(T_A) = dim(Im(T)) = 2$ (一次独立な最大個数)

$Im(T_A) = \{T_A(x) \mid x \in R^5\}$

$$T_A(x) = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&3&4&1\\3&3&2&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

$Im(T)$ の基として $\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \right\}$