§3 Taylor（テイラー）の定理

定義 4.2
開区間 I で微分可能な関数 f の導関数 f' が再び I で微分可能なとき，$(f')'$ を f の第 2 次導関数といい，f'' で表す．一般に，f を n 回微分した関数を f の第 n 次導関数といい，$f^{(n)}$ で表す．また，$f^{(0)} = f$ と定める．さらに，$f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ がすべて I で連続であるとき，f は I で C^n 級であるという．そして，f が I で何回でも微分可能であるとき，f は I で C^∞ 級であるという．

例 4.3（代表的な関数の高次導関数）
(1) $(e^x)^{(n)} = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x$，$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$，$(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

(4) $\{\log(1+x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$

※ $\{\log(1+x)\}^{(1)} = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$\{\log(1+x)\}^{(2)} = -(1+x)^{-2}$

$\{\log(1+x)\}^{(3)} = 2(1+x)^{-3}$

$\{\log(1+x)\}^{(4)} = 2 \cdot (-3)(1+x)^{-4} = -3!(1+x)^{-4}$

$\{\log(1+x)\}^{(5)} = -3! \cdot (-4)(1+x)^{-5} = 4!(1+x)^{-5}$

から類推できる．証明は数学的帰納法による．

(5) α を 0 でない定数とするとき

$$\{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

※ $\{(1+x)^\alpha\}^{(1)} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$\{(1+x)^\alpha\}^{(2)} = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\{(1+x)^\alpha\}^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$

$\{(1+x)^\alpha\}^{(4)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}$

から類推できる．証明は数学的帰納法による．

定理 4.11（Taylor の定理）

f が区間 I で連続，内部 I° で n 回微分可能で，$a \in I^\circ$，$x \in I$ $(x \neq a)$，$p > 0$ のとき

$$f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する． 近似多項式

※ $f(x) - \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$ を剰余項といい，$R_n(x)$ で表す．この場合

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

であり，これを Roche-Schlömilch の剰余項という．Roche-Schlömilch の剰余項において，$p = 1$ のときの

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を Cauchy の剰余項といい，$p = n$ のときの

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を Lagrange の剰余項という．剰余項の形は他にもいろいろある．

証明

定数　定数扱い

f が区間 I で連続，内部 I° で n 回微分可能であるとする．$a \in I^\circ$，$x \in I$ $(x \neq a)$ を任意にとり固定し，$p > 0$ とする．

$x \neq a$ より $a < x$ または $x < a$ であるが，どちらも同じであるから $a < x$ とする．

$$A = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{\frac{(x-a)^p}{n!}}$$

1… Cauchy
n… Lagrange

とおくと

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{A}{n!}(x-a)^p \quad \cdots\cdots ①$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

近似多項式

$$+ \boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

lagrangeの剰余項

$$a+\theta(x-a) \quad (0<\theta<1)$$

であるから，この A を求めにいく．

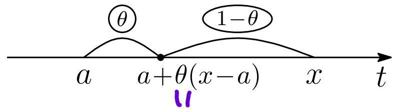
$$F(t) = f(x) - \underbrace{\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{A}{n!}(x-t)^p\right\}}_{\text{① の右辺で } a \text{ を } t \text{ にした式}}$$

変数t

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{A}{n!}(x-t)^p \quad (t \in [a,x])$$

Σの外へ

とおくと，F は $[a,x]$ で連続，(a,x) で微分可能である．
また，① より $F(a)=0$，実際に代入して $F(x)=0$ となるから，$F(a)=F(x)$ である．よって，Rolle の定理より，$F'(a+\theta(x-a))=0$ を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．



$= (1-\theta)a+\theta x$

内分公式

ここで，$n \geqq 2$ のとき

定数　変数

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \left\{ f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(t)\cdot\frac{(x-t)^k}{k!} - \frac{A}{n!}(x-t)^p \right\}' \\
&= 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\left\{ f^{(k+1)}(t)\cdot\frac{(x-t)^k}{k!} + f^{(k)}(t)\cdot\frac{-(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right\} + \frac{Ap}{n!}(x-t)^{p-1} \\
&= -f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \right\} + \frac{Ap}{n!}(x-t)^{p-1} \\
&= -f'(t) + \left\{ f'(t) - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right\} + \frac{Ap}{n!}(x-t)^{p-1} \\
&= \frac{Ap}{n!}(x-t)^{p-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}
\end{aligned}$$

であって，$n=1$ のときもこれでよい．
よって，$F'(a+\theta(x-a))=0$ より

$$\frac{Ap}{n!}\{(1-\theta)(x-a)\}^{p-1} = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}\{(1-\theta)(x-a)\}^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{A}{n!}(x-a)^p = \frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

これを ① に戻せば証明が終わる．　■

定理 4.12

f が区間 I で連続，内部 I° で無限回微分可能で，$a \in I^\circ$ のとき，$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ をみたす $x \in I$ に対しては

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \cdots\cdots (*)$$

と級数で表せる．

※ $(*)$ を f の a を中心とする Taylor 展開という．特に，$a = 0$ のときを Maclaurin（マクローリン）展開という．

証明

f が区間 I で連続，内部 I° で無限回微分可能で，$a \in I^\circ$ とすると，Taylor の定理より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \qquad (x \in I)$$

とかける．よって $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ をみたす $x \in I$ に対して

→ 0

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \lim_{n\to\infty} \{f(x) - R_n(x)\} = f(x)$$

剰余項

すなわち $(*)$ が成り立つ．∎

級数

Maclaurin 展開（1）

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Maclaurin 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

証明

$f(x) = e^x$ とすると

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である．Lagrange の剰余項は

変数

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \boxed{\frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \qquad (0 < \theta < 1)}$$

であるから，$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| = \frac{e^{\theta x}}{n!} |x|^n \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

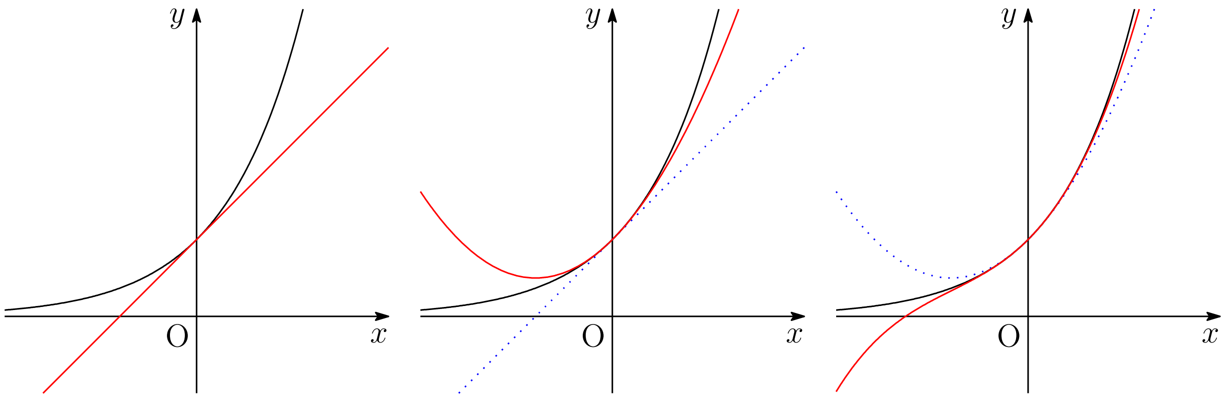
よって，$x \in \mathbb{R}$ に対して e^x は Maclaurin 展開でき

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \blacksquare$$

> $a \in \mathbb{R}$ のとき
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$
>
> (証明は 6 ページ)

※ e^x と近似多項式のグラフは次のようになる．近似多項式の次数を上げると，e^x のグラフにまとわりつくように近づく様子がわかる．

① $y = 1 + x$　　② $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$　　③ $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$



数列の極限についての結果

$$a_n > 0\ (n \in \mathbb{N}),\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,\quad 0 \leqq a < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

証明

$a_n > 0\ (n \in \mathbb{N}),\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a,\quad 0 \leqq a < 1$ とする．

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ より

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n \geqq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < \varepsilon \right] \quad \cdots\cdots(*)$$

また，$0 \leqq a < 1$ より，$a < r < 1$ を満たす r がとれる．
そこで，$(*)$ で $\varepsilon = r - a > 0$ として定まる n_0 を n_1 とすると，$n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_1$ のとき

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < r - a$$

$$a - r < \frac{a_{n+1}}{a_n} - a < r - a$$

$$\therefore \quad 2a - r < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$a_n > 0$ より　　$0 < a_{n+1} < r a_n$
これを繰り返し用いると　　$0 < a_n \leqq a_{n_1} r^{n-n_1} \quad (n \geqq n_1)$
そして $\lim_{n\to\infty} a_{n_1} r^{n-n_1} = 0$ であるから，はさみうちの定理より　　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

※上の結果より

$$a \in \mathbb{R} \text{ のとき} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

であることが分かる．実際，$a = 0$ のときは明らか．$a \neq 0$ のとき $a_n = \left| \dfrac{a^n}{n!} \right| > 0$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \dfrac{a^n}{n!} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1$$

よって，上の結果より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Maclaurin 展開（2）

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

証明

$f(x) = \sin x$ とすると

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である．Lagrange の剰余項は

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{\sin\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから，$x \in \mathbb{R}$ に対して

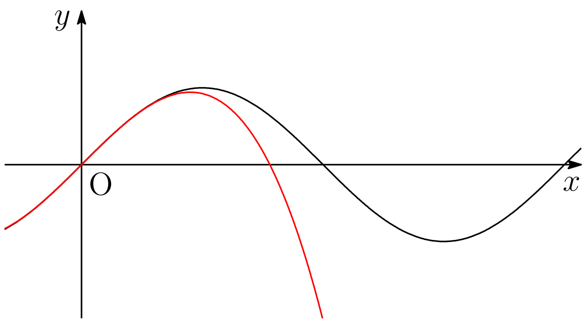
$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n \right| \leqq \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

よって，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$ は Maclaurin 展開でき

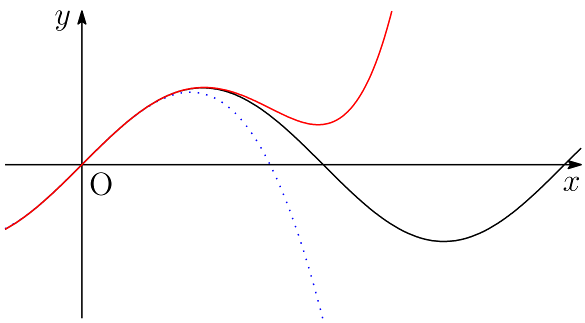
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \blacksquare$$

※ $\sin x$ と近似多項式のグラフは次のようになる．

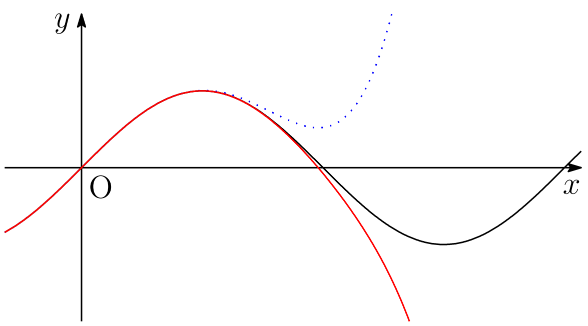
① $y = x - \dfrac{x^3}{6}$



② $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$



③ $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$



Maclaurin 展開（3）

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

証明

$f(x) = \cos x$ とすると

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である．Lagrange の剰余項は

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから，$x \in \mathbb{R}$ に対して

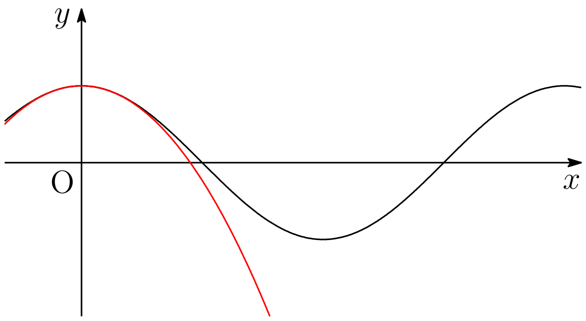
$$|R_n(x)| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n \right| \leqq \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

よって，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\cos x$ は Maclaurin 展開でき

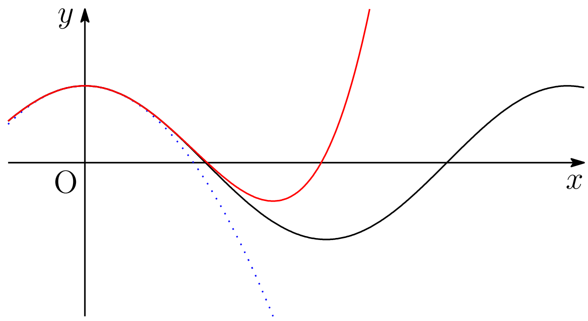
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \blacksquare$$

※ $\cos x$ と近似多項式のグラフは次のようになる．

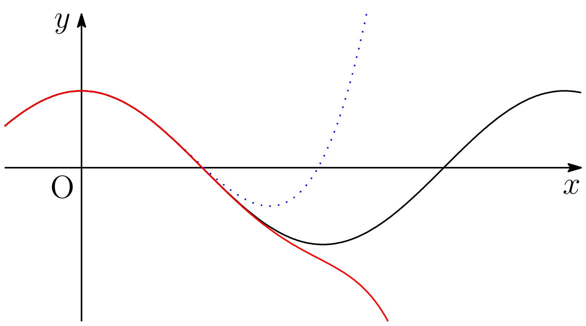
① $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$



② $y = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$



③ $y = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720}$



Maclaurin 展開（４）

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqq 1)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

証明

$f(x) = \log(1+x)$ とすると

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n \in \mathbb{N})$$

である．

(i) $-1 < x < 1$ のとき，Cauchy の剰余項は

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n$$
$$= \frac{(1-\theta)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1}(n-1)!(1+\theta x)^{-n}}{(n-1)!} x^n$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

である．ここで

$0 < \theta < 1,\ |x| \geqq 0$ より $|\theta x| = \theta |x| \leqq |x| \qquad \therefore \quad -|x| \leqq \theta x \leqq |x|$

$-|x| \leqq \theta x,\ |x| < 1$ より $1 + \theta x \geqq 1 - |x| > 0 \qquad \therefore \quad 0 < \dfrac{1}{1+\theta x} \leqq \dfrac{1}{1-|x|}$

$x > -1,\ 0 < \theta < 1$ より $1 + \theta x > 1 - \theta > 0 \qquad \therefore \quad 0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$

よって

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} x^n \right| = \frac{1}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} |x|^n$$
$$\leqq \frac{1}{1-|x|} \cdot 1^{n-1} \cdot |x|^n = \frac{|x|^n}{1-|x|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(ii) $x = 1$ のとき，Lagrange の剰余項は

$$R_n(1) = \frac{f^{(n)}(\theta \cdot 1)}{n!} \cdot 1^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(1+\theta)^{-n}}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n} \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから

$$|R_n(1)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n} \right| = \frac{1}{n(1+\theta)^n} \leqq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

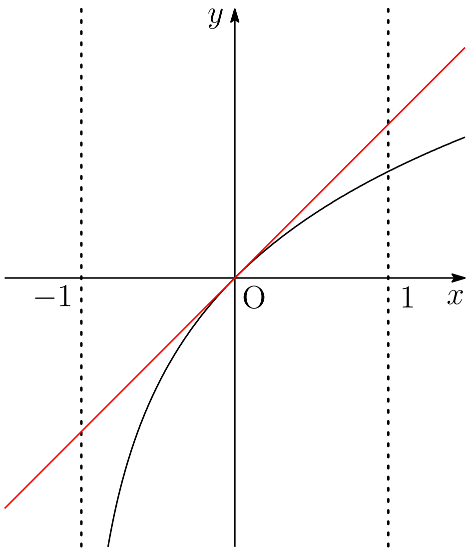
以上 (i), (ii) より，$-1 < x \leqq 1$ に対して $\log(1+x)$ は Maclaurin 展開でき

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

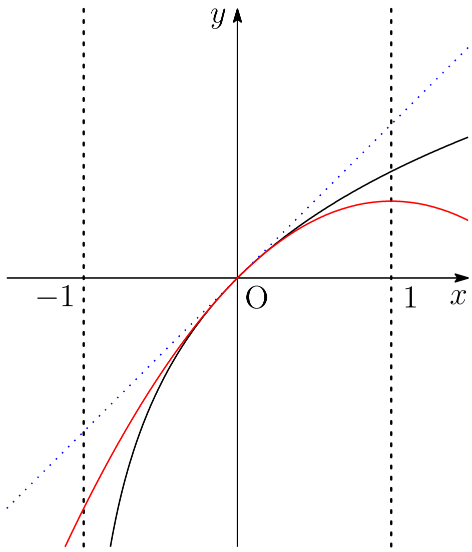
$$(-1 < x \leqq 1)$$ ∎

※ $\log(1+x)$ と近似多項式のグラフは次のようになる．

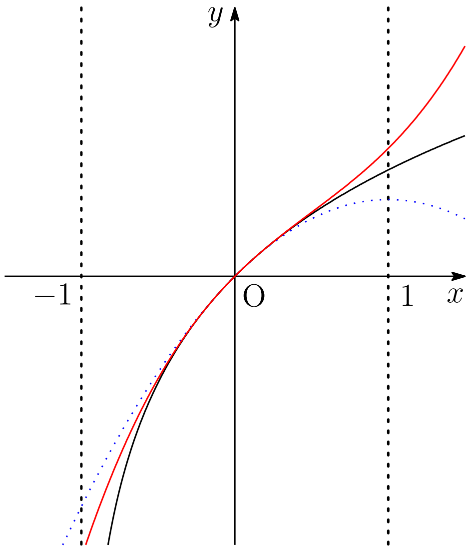
① $y = x$



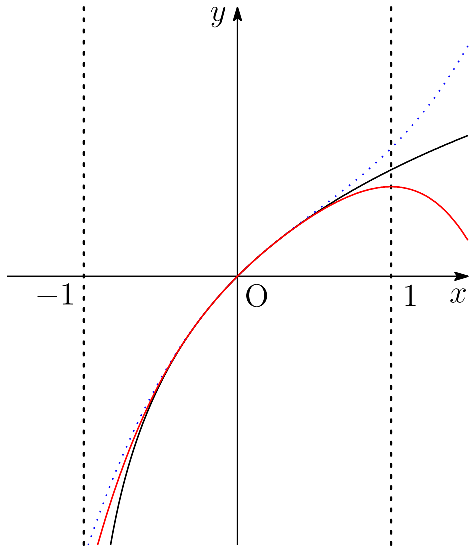
② $y = x - \dfrac{x^2}{2}$



③ $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$



④ $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$



Maclaurin 展開（５）

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

ただし，$\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ とし

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である．

※ $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N}$ のときは $-1 \leqq x \leqq 1$ で展開式が成り立つ．また，$-1 < \alpha < 0$ のときは $-1 < x \leqq 1$ で展開式が成り立つ．これらについては証明を省略する．

証明

$f(x) = (1+x)^\alpha$ とすると

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

である．$-1 < x < 1$ のとき，Cauchy の剰余項は

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}}{(n-1)!} x^n \\ &= (1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

である．ここで

$0 < \theta < 1,\ |x| \geqq 0$ より $|\theta x| = \theta|x| \leqq |x| \qquad \therefore\quad -|x| \leqq \theta x \leqq |x|$

これと $|x| < 1$ より $0 < 1 - |x| \leqq 1 + \theta x \leqq 1 + |x|$

$x > -1,\ 0 < \theta < 1$ より $1 + \theta x > 1 - \theta > 0 \qquad \therefore\quad 0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$

よって

$$\left| (1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \right| \leqq M$$

を満たす n に依存しない実数 $M > 0$ が存在する．また

$$a_n = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n \right|$$

とおくと，$x = 0$ のときは $a_n = 0$ で，$x \neq 0$ のときは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}\right|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n}x\right|=|-x|<1$$

であるから，6 ページの結果より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

いずれにしても $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるから

$$|R_n(x)|\leqq Ma_n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

よって，$-1<x<1$ に対して $(1+x)^\alpha$ は Maclaurin 展開でき

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n \quad (-1<x<1) \qquad \blacksquare$$

Maclaurin 展開（６）

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot 2n} x^n \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

証明

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot \cdots \cdot (-\frac{2n-3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot 2n}$$

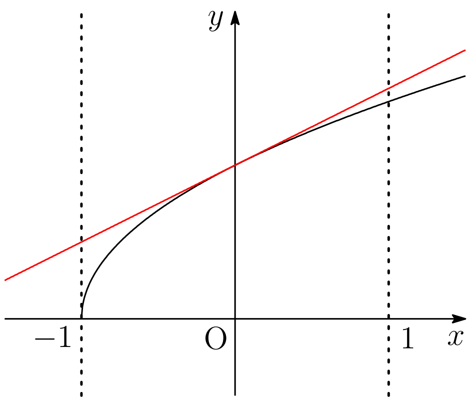
であるから，Maclaurin 展開（５）で $\alpha = \frac{1}{2}$ とすれば

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot 2n} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

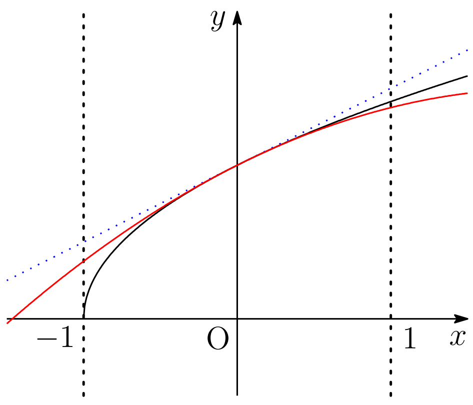
$x = \pm 1$ については証明を省略する． ∎

※ $\sqrt{1+x}$ と近似多項式のグラフは次のようになる．

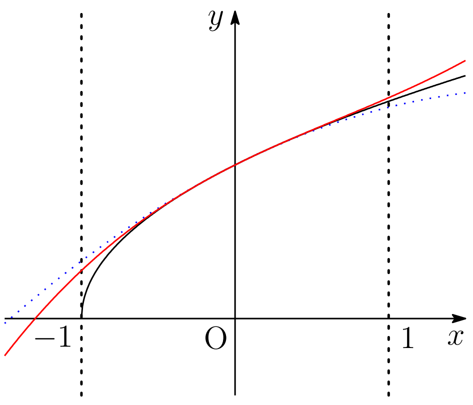
① $y = 1 + \frac{1}{2}x$



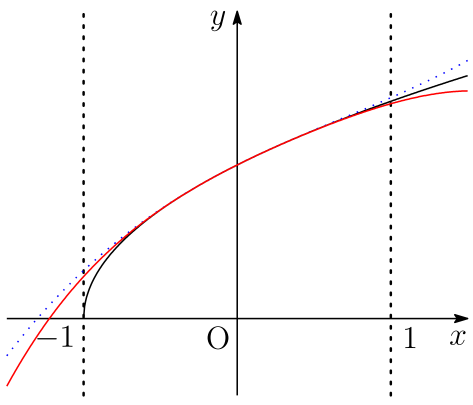
② $y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$



③ $y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$



④ $y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$



Maclaurin 展開（７）

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}x^n \quad (-1<x\leqq 1)$$
$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\frac{63}{256}x^5+\cdots \quad (-1<x\leqq 1)$$

証明

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})\cdot(-\frac{7}{2})\cdot\cdots\cdot(-\frac{2n-1}{2})}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot n} = (-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}$$

であるから，Maclaurin 展開（５）で $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ とすれば

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}x^n \quad (-1<x<1)$$

また，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ とおくと

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \binom{-\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$$

であるから，$x=1$ のとき，Lagrange の剰余項は

$$R_n(1) = \frac{f^{(n)}(\theta\cdot1)}{n!}\cdot1^n = \binom{-\frac{1}{2}}{n}(1+\theta)^{-\frac{1}{2}-n} \quad (0<\theta<1)$$

よって，$|(1+\theta)^{-\frac{1}{2}-n}|\leqq 1$ と 15 ページの結果より

$$|R_n(1)| = \left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}(1+\theta)^{-\frac{1}{2}-n}\right| \leqq \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから，$x=1$ のときも展開式は成り立つ． ∎

※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}=0$

証明

$a_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n},\quad b_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\qquad(n\in\mathbb{N})$

とおく．$k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\frac{2k}{2k+1}-\frac{2k-1}{2k}=\frac{4k^2-(4k^2-1)}{2k(2k+1)}=\frac{1}{2k(2k+1)}>0$$

であるから　$0<\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$

$k=1,\ldots,n$ として積をとると　$0<a_n<b_n$

$a_n>0$ をかけて　$0<{a_n}^2<a_nb_n$

ここで

$$a_nb_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$

であるから　$0<{a_n}^2<\dfrac{1}{2n+1}$

そして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ であるから，はさみうちの定理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$　▮

Maclaurin 展開（８）

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

証明

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot\cdots\cdot(-n)}{n!} = (-1)^n$$

であるから，Maclaurin 展開（５）で $\alpha = -1$ とすれば

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1) \qquad \blacksquare$$

※等比級数の和の公式からも導ける．

Maclaurin 展開（９）

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

証明

$\arctan x$ の高次導関数の表示公式はあるが複雑なので，高校流で示す．
$t \in \mathbb{R}$ に対して $-t^2 \neq 1$ なので

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$\therefore \quad \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right\} dt = \int_0^x \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

ここで

$$\int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right\} dt = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1} \right]_0^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \Big[\arctan t \Big]_0^x = \arctan x - 0 = \arctan x$$

であるから

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

そして，$|x| \leqq 1$ のとき

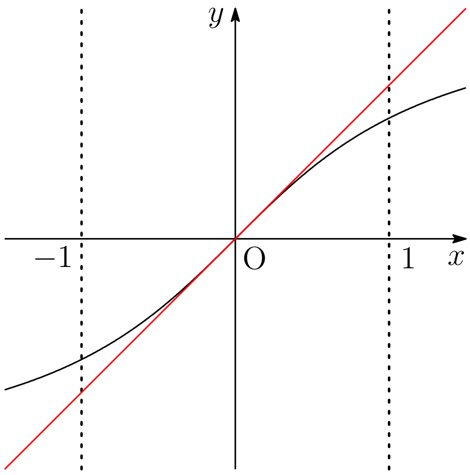
$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqq \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+0} dt$$
$$= \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \left[\frac{1}{2n+3} t^{2n+3} \right]_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$
$$\leqq \frac{1}{2n+3} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

よって，$|x| \leqq 1$ に対して $\arctan x$ は Maclaurin 展開でき

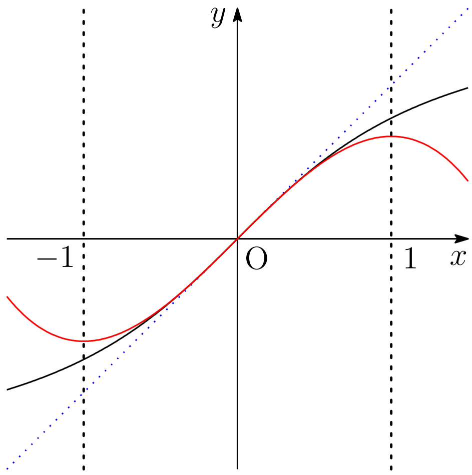
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \blacksquare$$

※ $\arctan x$ と近似多項式のグラフは次のようになる.

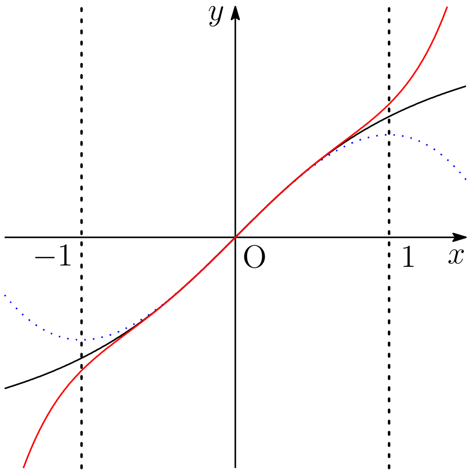
① $y = x$



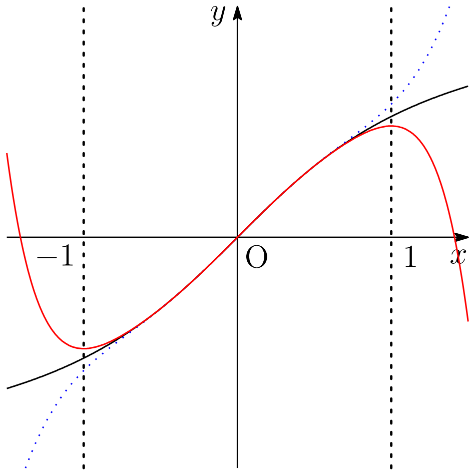
② $y = x - \dfrac{x^3}{3}$



③ $y = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$



④ $y = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$



Maclaurin 展開（１０）

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

現時点では証明できないが…

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開において，$x = -t^2$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1+(-t^2)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}\cdot(-t^2)^n \quad (-1 < -t^2 \leqq 1)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}t^{2n} \quad (-1 < t < 1)$$

両辺を 0 から x $(-1 < x < 1)$ まで項別積分すると

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}t^{2n}\right\}dt$$

$$\therefore \quad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$