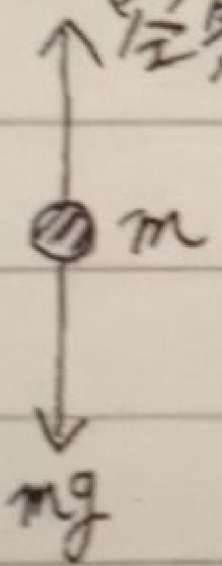
演習レポート課題　解答

問2

(1)



空気抵抗：速さvに比例 $\Longrightarrow f = hv$

（運動方程式）

$$F = mg - hv$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mkv \quad (\leftarrow h = mk)$$

加速度：$\dfrac{dv}{dt} = g - kv$

$$\int \frac{1}{g-kv}\,dv = \int dt \longrightarrow \text{変数分離形}$$

加速度：$\frac{dv}{dt} = g - kv$

$$\int \frac{1}{g-kv} dv = \int dt$$ → 変数分離形

$$-\frac{1}{k}\log|g-kv| = t + C_1$$ (C_1：積分定数)

$$\log|g-kv| = -kt + C_2 \quad (C_2 = -kC_1)$$

$$g - kv = \pm e^{-kt+C_2}$$

$$= Ce^{-kt}$$ (C：任意定数)

初期条件：$t=0$のとき$v=0$より、

$$g - k \cdot 0 = Ce^{-k \cdot 0}$$

$$\therefore C = g$$

$$g - kv = \pm e^{-kt + C_2}$$

$$= Ce^{-kt} \quad (C：任意定数)$$

初期条件：$t=0$ のとき $v=0$ より、

$$g - k \cdot 0 = Ce^{-k \cdot 0}$$

$$\therefore \ C = g$$

ゆえに、

$$g - kv = ge^{-kt}$$

$$v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

(1)

(2) 空気抵抗：$f=kv^2$より、

加速度：$\underline{\dfrac{dv}{dt}=g-kv^2} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{g-kv^2}dv=\int dt$

ここで、

$$\frac{1}{g-kv^2}=\frac{1}{(\sqrt{g}+\sqrt{k}v)(\sqrt{g}-\sqrt{k}v)}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}-\frac{1}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right)\frac{1}{2\sqrt{g}}$$

よって、

$$\int\frac{1}{g-kv^2}dv=\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\log\left|\sqrt{k}v+\sqrt{g}\right| -\frac{1}{\sqrt{k}}\log\left|\sqrt{k}v-\sqrt{g}\right|\right)\frac{1}{2\sqrt{g}}+C_1$$

$$\int \frac{1}{g-kv^2}\,dv = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\log\left|\sqrt{k}v+\sqrt{g}\right| - \frac{1}{\sqrt{k}}\log\left|\sqrt{k}v-\sqrt{g}\right|\right)\frac{1}{2\sqrt{g}} + c_1$$

$(c_1$：積分定数$)$

$$= \int dt = t + c_2 \quad (c_2\text{：積分定数})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{kg}}\log\left|\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right| + c_1$$

$$\log\left|\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right| = 2\sqrt{kg}\,t + c_3 \quad (c_3 \equiv 2\sqrt{kg}(c_2-c_1)\text{：任意定数})$$

$$\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\ldots} = \pm e^{2\sqrt{kg}\,t + c_3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{kg}} \log\left|\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right| + C_1$$

$$\log\left|\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right| = 2\sqrt{kg}\,t + C_3 \quad (C_3 \equiv 2\sqrt{kg}(C_2 - C_1):$$

任意定数)

$$\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}} = \pm e^{2\sqrt{kg}\,t + C_3}$$

$$= C e^{2\sqrt{kg}\,t}$$ (C：任意定数)

初期条件：$t=0$ のとき $v=0$ より、

$$C=-1$$

ゆえに、

$$\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}=-e^{2\sqrt{kg}t}$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{e^{2\sqrt{kg}t}-1}{e^{2\sqrt{kg}t}+1}$$

$$=\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{e^{\sqrt{kg}t}-e^{-\sqrt{kg}t}}{e^{\sqrt{kg}t}+e^{-\sqrt{kg}t}}$$

$$=\sqrt{\frac{g}{k}}\tanh\sqrt{kg}t$$

//(2)

2.2 同次形

例題 $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \text{①}$$

: 同次形

$$\frac{y}{x} \equiv u \longrightarrow y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} - u$$

$$= \frac{2u-u(1-u^2)}{1-u^2}$$

$$= \frac{u+u^3}{}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} - u$$

$$= \frac{2u - u(1-u^2)}{1-u^2}$$

$$= \frac{u+u^3}{1-u^2}$$

$$= \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$$

変数分離

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\log|u| - \log\overset{\text{正}}{(1+u^2)} = \log|x| + C_1 \quad (C_1\text{は積分定数})$$

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right) du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

正

$$\log|u| - \log(1+u^2) = \log|x| + c_1 \quad (c_1\text{は積分定数})$$

$$\log\left|\frac{u}{1+u^2}\right| - \log|x| = c_1$$

$$\log\left|\frac{u}{(1+u^2)x}\right| = c_1$$

$$\frac{u}{(1+u^2)x} = \pm e^{c_1}$$

$$\frac{u}{1+u^2} = \pm e^{c_1} x$$

$u=\frac{y}{x}$ より、

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c_2 x \quad \left(c_2 \equiv \pm e^{c_1} \neq 0\right)$$

※同次形では、$c=0$ があるとすれば特異解に含まれる。

$$\frac{yx}{x^2+y^2} = c_2 x$$

$$x^2+y^2 = \frac{1}{c_2} y = c_3 y \quad \left(c_3 \equiv c_2^{-1},\ c_3 \neq 0\right)$$

$$x^2+\left(y-\frac{c_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2$$

$$x^2+(y-c)^2 = c^2 \quad \left(c \equiv \frac{c_3}{2} \neq 0\right)$$

//

$u=\dfrac{y}{x}$ より、

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c_2 x \quad \left(c_2 \equiv \pm e^{c_1} \neq 0\right)$$

※同次形では、$c=0$ が含まれれば特異解に含まれる。

$$\frac{yx}{x^2+y^2} = c_2 x$$

$$x^2+y^2 = \frac{1}{c_2}y = c_3 y \quad \left(c_3 \equiv c_2^{-1},\ c_3 \neq 0\right)$$

$$x^2+\left(y-\frac{c_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2$$

$$x^2+(y-c)^2 = c^2 \quad \left(c \equiv \frac{c_3}{2} \neq 0\right)$$

一般解

↳ 中心$(0, c)$, 半径$|c|$の円

※ cは任意定数で、正でも負でもよいから、

$$x^2+(y-c)^2 = c^2 \quad \left(c \equiv \frac{c_3}{2} \neq 0\right)$$

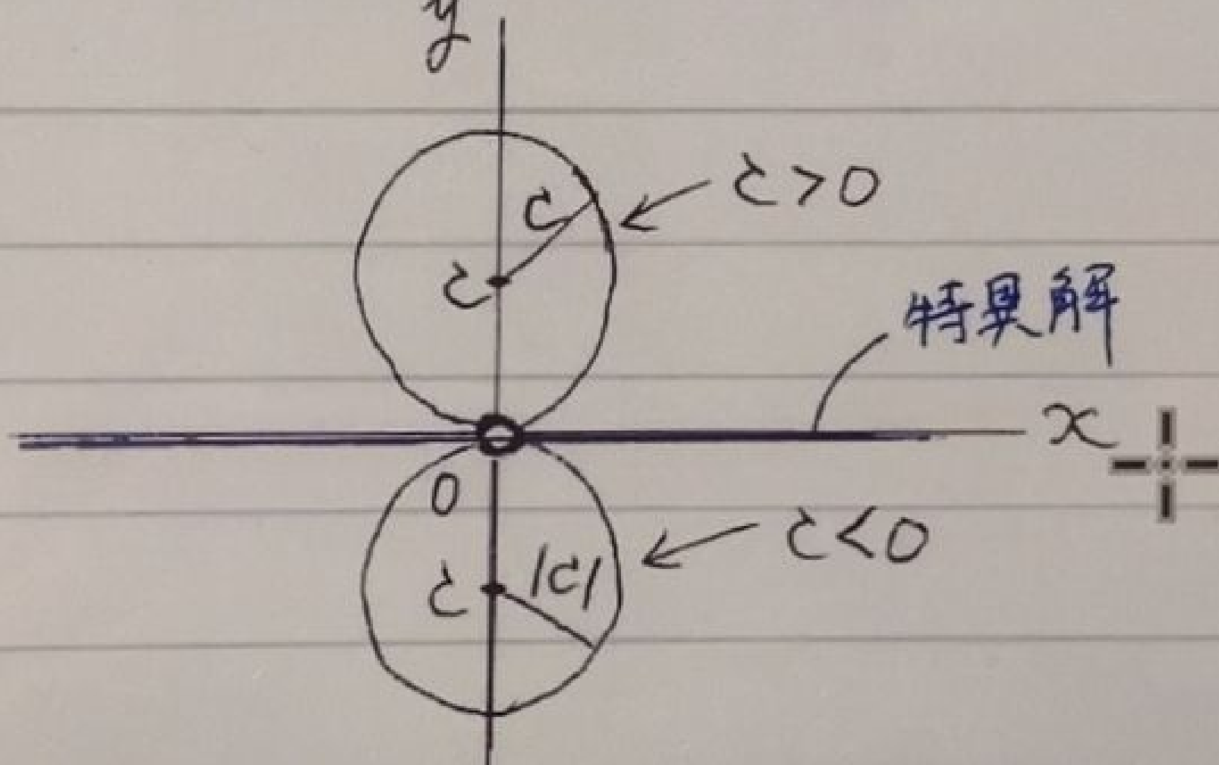
一般解

↳ 中心$(0, c)$, 半径$|c|$の円

※ cは任意定数で、正でも負でもよいから、

$x^2+(y+c)^2 = c^2$ も正解。

（積分定数の置き場所による）



特異解について：$y=mx$ (m:定数)

$$\frac{dy}{dx}=m=\frac{2m}{1-m^2} \quad (\because ①式と \frac{y}{x}=m)$$

$$m-m^3=2m$$

$$m(m^2+1)=0$$

$\therefore m=0$ で成立.

ゆえに、$y=0x=0$ も解

$y=0$ 特異解

演習 例題にならって、次の微分方程式を解け。

演習 例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

(2) $2xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

(3) $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = x - y$

(4) $(2x+y) + (x+2y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(1)を本授業内で解いてみましょう。

(2)〜(4)はレポート課題にします。

解) (1) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$= \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$ ：同次形

$$\frac{y}{x} \equiv u \to y = ux \to \frac{dy}{dx} = \boxed{u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u}}$$

よって、

$$2u^2 + 2ux\frac{du}{dx} = u^2 - 1$$

$$2ux\frac{du}{dx} = -u^2 - 1$$

$$= \frac{u^2-1}{2u}$$

よって、

$$2u^2 + 2ux\frac{du}{dx} = u^2-1$$

$$2ux\frac{du}{dx} = -u^2-1$$

変数分離

$$\frac{2ux}{u^2+1}\frac{du}{dx} = -1$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}\,du = -\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log(u^2+1) = -\log|x| + c_1 \quad (c_1：積分定数)$$

$$\log|x(u^2+1)| = c_1$$

$$x(u^2+1) = \pm e^{c_1}$$

$$\Big\downarrow\ u = \frac{y}{x}$$

$$x(u^2+1) = \pm e^{c_1}$$

$$\downarrow \; u = \frac{y}{x}$$

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = c_2 \quad (c_2 \equiv \pm e^{c_1},\ c_2 \neq 0)$$

$$\frac{y^2}{x} + x = c_2$$

$$y^2 + x^2 = c_2 x$$

$$y^2 + \left(x - \frac{c_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_2}{2}\right)^2$$

$$\underline{y^2 + (x-c)^2 = c^2 \quad \left(c \equiv \frac{c_2}{2},\ c \neq 0\right)} \quad //$$

↳ $+$ もok.　　一般解

特異解 $y=mx$ について：

$$\frac{dy}{dx}=m=\frac{m^2-1}{2m}$$

$$2m^2=m^2-1$$

$m^2=-1$ より、実数 m は存在しない。

$\longrightarrow$ 特異解はない。