応用数学1

第12回目

3.3 線形非同次方程式

定数係数の2階線形非同次方程式

$$y'' + by' + cy = f(x) \quad : y = y(x)$$

$f(x) \neq 0$　　b, cは実定数

(解き方)

$\boxed{1}$ $f(x) = 0$として同次方程式を解く。

$$y'' + by' + cy = 0$$

$\longrightarrow$ 一般解：$y = Ay_1(x) + By_2(x)$

(A, Bは任意定数)

固有方程式：$\rho^2 + b\rho + c = 0$

$\boxed{2}$ 定数変化法：A, Bをxの関数$A(x)$, $B(x)$とする。

$\boxed{2}$ 定数変化法：A, B を x の関数 $A(x), B(x)$ とする。

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \quad \text{——— (1)}$$

この $y(x)$ が与式（非同次方程式）をみたすように、
$A(x), B(x)$ を求めてやればよい。

$$y'(x) = A'(x)y_1(x) + A(x)y_1'(x) + B'(x)y_2(x) + B(x)y_2'(x)$$

☆ 仮定1

ここで $\underline{A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0}$ とすると、

$$y'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x) \quad \text{——— (2)}$$

$$y''(x) = A'(x)y_1'(x) + A(x)y_1''(x) + B'(x)y_2'(x) + B(x)y_2''(x)$$

☆ 仮定2

☆ 仮定2

ここで $\underline{A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x)}$ とすると、

$$y''(x) = f(x) + A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) \quad \text{——— (3)}$$

となる。

(1)〜(3)式より、

$$\begin{aligned} & y'' + by' + cy \\ &= f(x) \boxed{\begin{aligned} &+ A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) \\ &+ b\{A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x)\} \\ &+ c\{A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)\} \end{aligned}} \neq 0 \end{aligned}$$

となる。

(1)〜(3)式より、

$$
\begin{aligned}
& y'' + by' + cy \\
&= f(x) + \boxed{\begin{aligned} & A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) \\ & + b\{A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x)\} \\ & + c\{A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)\} \end{aligned}} = 0
\end{aligned}
$$

ここで、$y = Ay_1(x) + By_2(x)$ (A, B は任意定数) は、同次方程式 $y'' + by' + cy = 0$ の一般解であるから、$y'' + by' + cy = f(x)$ となり与式と一致する。

ゆえに、仮定部分

$$
\begin{cases}
A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\
A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x)
\end{cases}
$$

をみたす、$A(x), B(x)$ を求めてやれば、

$$\boxed{\begin{aligned}&+b\{A(x)y_1'(x)+B(x)y_2'(x)\}\\&+c\{A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x)\}\end{aligned}} = 0$$

ここで、$y=Ay_1(x)+By_2(x)$ (A,Bは任意定数)は、

同次方程式 $y''+by'+cy=0$ の一般解であるから、

$y''+by'+cy=f(x)$ となり与式と一致する。

ゆえに、☆仮定部分

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)=0 \\ A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

をみたす、$A(x), B(x)$ を求めてやれば、

$$y=A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x)$$

が、与式(2階非同次方程式)の解である。

例題1 $y''-3y'+2y=x$

$\boxed{1}$ 同次方程式：$y''-3y'+2y=0$

$y=e^{px}$とすると、

固有方程式：$p^2-3p+2=0$

$$(p-1)(p-2)=0$$

$$\therefore p=1,2$$

基本解：e^x, e^{2x}

一般解：$y=Ae^x+Be^{2x}$ (A,Bは任意定数)

$\boxed{2}$ 定数変化法：$A,B \to A(x), B(x)$

(条件式) $\begin{cases} A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)=0 \\ A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$

をみたす$A(x)$, $B(x)$を求める。

$\boxed{2}$ 定数変化法：$A, B \to A(x), B(x)$

(条件式) $\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

をみたす $A(x)$, $B(x)$ を求める。

$$\begin{cases} A'(x)e^{x} + B'(x)e^{2x} = 0 & \text{―――― ①} \\ A'(x)e^{x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = x & \text{―――― ②} \end{cases}$$

①式より、 $A'(x) = \dfrac{-B'(x)e^{2x}}{e^{x}} = -B'(x)e^{x}$ ―――― ③

これを②式に代入、

$$-B'(x)e^{x}\cdot e^{x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = x$$

$$B'(x) = \frac{x}{e^{2x}} = xe^{-2x}$$

③式より、 $A'(x) = -\dfrac{x}{e^{2x}}e^{x} = -\dfrac{x}{e^{x}} = -xe^{-x}$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)dx = -\int xe^{-x}dx$$

$$(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$xe^{-x} = \int e^{-x}dx - \int xe^{-x}dx$$

$$xe^{-x} + e^{-x} = -\int xe^{-x}dx$$

$$= xe^{-x} + e^{-x} + C_1 \quad (C_1\text{:積分定数})$$

$$B(x) = \int xe^{-2x}dx$$

$$(xe^{-2x})' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$xe^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x} - 2\int xe^{-2x}dx$$

$$xe^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x} - 2\underbrace{\int xe^{-2x}dx}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_2 \quad (C_2\text{：積分定数})$$

よって、

$$y = A(x)e^{x} + B(x)e^{2x}$$

$$= (xe^{-x} + e^{-x} + C_1)e^{x} + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_2\right)e^{2x}$$

$$= x + 1 + C_1e^{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C_2e^{2x}$$

$$= \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{3}{4}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{x} + C_2e^{2x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \quad //$$

が、非同次方程式の一般解である。

例題2 $y'' - 4y' + 4y = e^{x}$

$\boxed{1}$ 同次方程式：$y'' - 4y' + 4y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、

固有方程式：$p^2 - 4p + 4 = 0$

$$(p-2)^2 = 0$$

$$\therefore p = 2 \quad (\text{重複解})$$

基本解：$e^{2x}, \ xe^{2x}$

一般解：$y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$ (A, Bは任意定数)

$\boxed{2}$ 定数変化法：$A, B \longrightarrow A(x), B(x)$

$$y = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}$$

2 定数変化法：$A, B \longrightarrow A(x), B(x)$

$$y = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}$$

$$\begin{cases} A'(x)e^{2x} + B'(x)xe^{2x} = 0 \\ A'(x)\cdot 2e^{2x} + B'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) = e^{x} \end{cases}$$

をみたす $A(x)$、$B(x)$ を求める。

$$\begin{cases} A'(x) + B'(x)x = 0 & \text{①} \\ 2A'(x) + B'(x)(1+2x) = e^{-x} & \text{②} \end{cases}$$

①より、

$$A'(x) = -B'(x)x \quad \text{③}$$

②に代入

$$-2B'(x)x + B'(x)(1+2x) = e^{-x}$$

$$\therefore B'(x) = e^{-x}$$

③に代入

$$\therefore B'(x) = e^{-x}$$

③に代入

$$A'(x) = -xe^{-x}$$

$$A(x) = -\int xe^{-x}dx$$

$$= xe^{-x} + e^{-x} + c_1 \quad (\because 例題1)$$

$$B(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + c_2 \quad (c_1, c_2 : 積分定数)$$

ゆえに、非同次方程式の一般解は、

$$y = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}$$

$$A(x) = -\int x e^{-x} dx$$

$$= x e^{-x} + e^{-x} + c_1 \quad (\because 例題1)$$

$$B(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c_2 \quad (c_1, c_2 : 積分定数)$$

ゆえに、非同次方程式の一般解は、

$$y = A(x) e^{2x} + B(x) x e^{2x}$$

$$= (\cancel{x e^{-x}} + e^{-x} + c_1 \cancel{- x e^{-x}} + c_2 x) e^{2x}$$

$$= e^{x} + (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

例題3　$y'' + y = 2\cos x$

[1] 同次方程式：$y'' + y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、

固有方程式：$p^2 + 1 = 0$

$$\therefore p = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

基本解：e^{ix}, e^{-ix}

一般解：$y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ （A, B：任意定数）

$\xrightarrow{\text{オイラーの関係}}$ $= A(\cos x + i\sin x) + B(\cos x - i\sin x)$

$= (A+B)\cos x + (A-B)i\sin x$

$\downarrow$ $C \equiv A+B$

$D \equiv (A-B)i$

1 同次方程式：$y'' + y = 0$

$y = e^{px}$とすると、

固有方程式：$p^2 + 1 = 0$

$$\therefore p = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

基本解：e^{ix}, e^{-ix}

一般解：$y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ (A, B：任意定数)

$$\xrightarrow{\text{オイラーの関係}} = A(\cos x + i\sin x) + B(\cos x - i\sin x)$$

$$= (A+B)\cos x + (A-B)i\sin x$$

$$\downarrow \begin{array}{l} C \equiv A+B \\ D \equiv (A-B)i \end{array}$$

$$= C\cos x + D\sin x$$

$\boxed{2}$ 定数変化法：$C, D \to C(x), D(x)$

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$$

$$\begin{cases} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x = 0 & \text{——— ①} \\ C'(x)(-\sin x) + D'(x)\cos x = 2\cos x & \text{——— ②} \end{cases}$$

をみたす $C(x), D(x)$ を求める。

①より、
$$C'(x) = \frac{-D'(x)\sin x}{\cos x} \quad \text{——— ③}$$

②に代入

$$\frac{D'(x)\sin^2 x}{\cos x} + D'(x)\cos x = 2\cos x$$

$$D'(x) = 2\cos^2 x$$

$\cos x$

$$D'(x) = 2\cos^2 x$$

③に代入

$$C'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$C(x) = -\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$D(x) = 2\int \cos^2 x\, dx = \int (1+\cos 2x)\, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= x + \frac{1}{2}\sin 2x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{積分定数})$$

ゆえに、与式の一般解は、

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$$

$$=\left(\frac{1}{2}\underbrace{\cos 2x}_{=\,1-2\sin^2 x}+C_1\right)\cos x+\left(x+\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x}_{=\,2\sin x\cos x}+C_2\right)\sin x$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)\cos x+\left(x+\sin x\cos x\right)\sin x$$
$$+C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{定数}}\cos x+x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$=x\sin x+\left(\frac{1}{2}+C_1\right)\cos x+C_2\sin x$$

$$=x\sin x+C_3\cos x+C_2\sin x$$

$$\left(C_3\equiv\frac{1}{2}+C_1\right)$$

演習レポート課題

(1) $y'' - 6y' - 16y = 8$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

(3) $y'' - 2y' + y = e^{x}$

(4) $y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3x}$

(5) $y'' + y = \sin x$