8223036　栗山淳

1.　立方体の 1 辺の長さをlとすると各ベクトルは次のようになる。

$$\boldsymbol{a} = \frac{l}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{l}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求める角度αはベクトルの内積の式を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{l}^2}{\boldsymbol{4}}$$

$$|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{l}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} \times \frac{\boldsymbol{l}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} \times \cos \boldsymbol{\alpha}$$

よって

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$$

また外積の式を用いると求める角度αは次のように表される。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin \alpha$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left| \frac{l^2}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{l}^2}{\boldsymbol{4}}$$

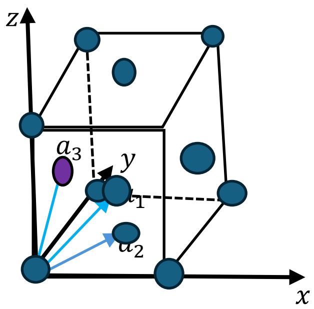
$$|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin \alpha = \frac{l^2}{2} \times \sin \alpha$$

よって

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より求める角度αは$\frac{\pi}{3}$である。

2.　右の図のようにa_1, a_2, a_3とすると



$$a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで逆格子ベクトルをb_1^*, b_2^*, b_3^*とすると

$$b_1^* = \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

$$b_2^* = \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

$$b_3^* = \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

この時,

8223036　栗山淳

$$a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$a_2 \times a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$a_3 \times a_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$a_1 \times a_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_1^* = \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2^* = \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

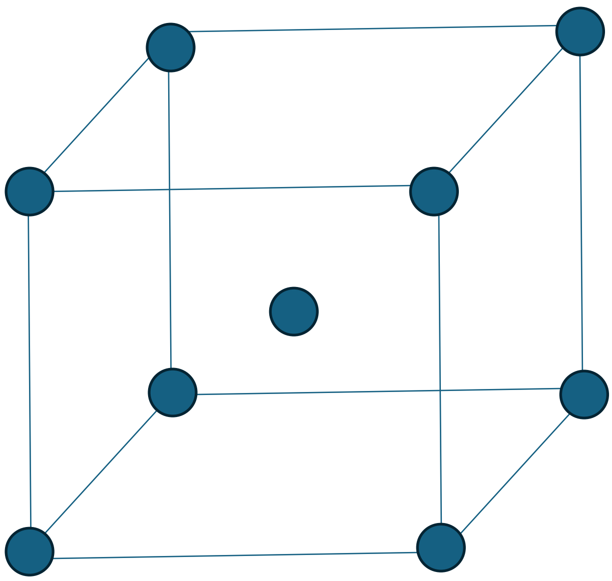
$$= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_3^* = \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

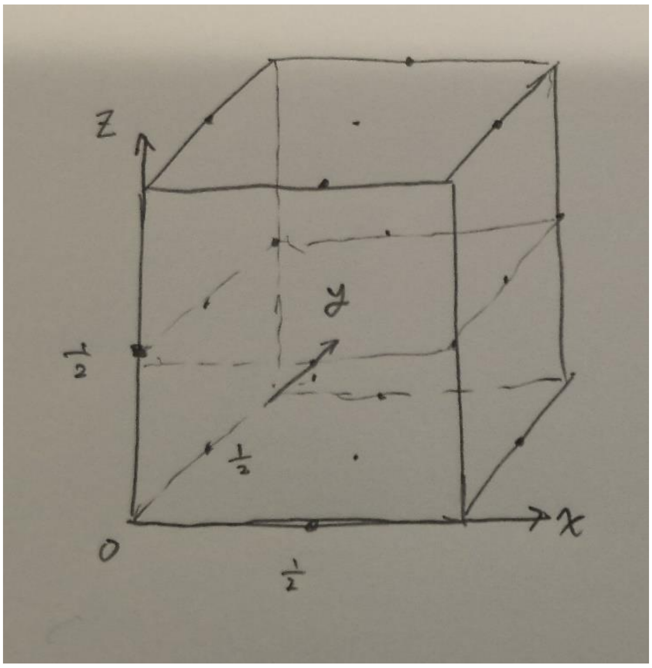
$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

これより，逆格子ベクトルは以下の図の水色のようになるため，逆格子は以下の図の緑の線のようになる。

8223036　栗山淳



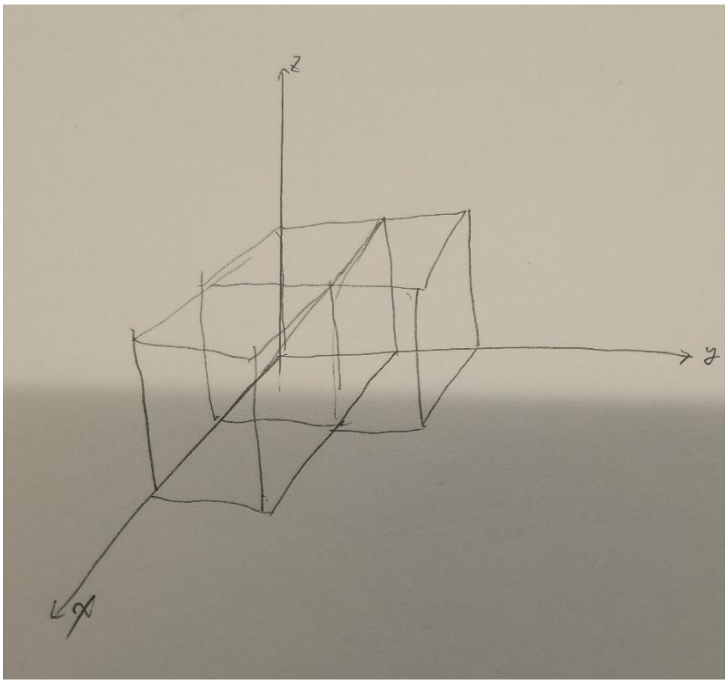
3.



この単位胞の中に独立な格子点は 3 個ある

４.

8223036　栗山淳



この単位胞の中に独立な格子点は 5 個ある。