2023 年度 線形代数学 2 課題 5

学科 AM　　　学籍番号 8223036　　　氏名 栗山 [illegible]

問 1. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ で与えられる線形写像 T_A の退化次数と階数を求め, 像と核の基を求めよ.

$$T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} x \quad : \quad \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$$

Aを簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{null}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = 5 - \mathrm{rank}A = \underline{3}$ …退化次数

$\mathrm{rank}(T_A) = \dim(\mathrm{Im}\,T_A) = \mathrm{rank}A = \underline{2}$ … 階数

$\mathrm{null}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A))$

$Ax = 0$ の連立方程式を解くと

$$x = \begin{bmatrix} -c_2 + c_4 - 2c_5 \\ c_2 \\ -2c_4 + c_5 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

核の基は $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$

$$\mathrm{Im}\,T_A = \{ y : (\exists x \in \mathbb{R}^5)\,[Ax = y] \}$$

であるから, 像のベクトル y は, Aを構成する列ベクトルの一次結合で表せる. Aを構成する列ベクトルと, Bを構成する列ベクトルの一次関係は同等であり, Bを構成するほかの列ベクトルは一次独立な二つのベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で表せる

よって Aの像の基は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対応するAの列ベクトルの組 $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}$