8222104 松崎太輔

$\hat{A}$、$\hat{B}$ はエルミート演算子であるため、

$$\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle^* = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\hat{B}|\phi\rangle^* = \langle\phi|\hat{B}|\psi\rangle$$

$\hat{A}+i\hat{B}$ と $\hat{A}-i\hat{B}$ が互いにエルミート共役な演算子であると示すために、

$$\langle\psi|(\hat{A}+i\hat{B})|\phi\rangle^* = \langle\phi|(\hat{A}-i\hat{B})|\psi\rangle \quad \cdots ①$$

を証明する。

①の左辺より、

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \langle\psi|(\hat{A}+i\hat{B})|\phi\, dx\rangle^* \\
&= \left(\int\psi^*(\hat{A}+i\hat{B})\phi\, dx\right)^* \\
&= \left(\int\psi^*\hat{A}\phi\, dx\right)^* + \left(\int\psi^*(i\hat{B})\phi\, dx\right)^* \\
&= \int\phi^*\hat{A}^*\psi\, dx + \int\phi^*(i\hat{B})^*\psi\, dx \\
&= \int\phi^*\hat{A}\psi\, dx - i\int\phi^*\hat{B}\psi\, dx \\
&= \int\phi^*(\hat{A}-i\hat{B})\psi\, dx \\
&= \langle\phi|(\hat{A}-i\hat{B})|\psi\rangle \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

①の右辺より

$= \langle \phi | (\hat{A} - i\hat{B}) | \psi \rangle$

$= \int \phi^* (\hat{A} - i\hat{B}) \psi \, dx$

$= \int \phi^* \hat{A} \psi \, dx + \int \phi^* (-i\hat{B}) \psi \, dx$

$= \left(\int \psi^* \hat{A}^* \phi \, dx \right)^* + \left(\int \psi^* (-i\hat{B})^* \phi \, dx \right)^*$

$= \left(\int \psi^* \hat{A} \phi \, dx \right)^* + \left(\int \psi^* (i\hat{B}) \phi \, dx \right)^*$

$= \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^* + \langle \psi | (i\hat{B}) | \phi \rangle^*$

$= \langle \psi | (\hat{A} + i\hat{B}) | \phi \rangle^*$

$=$ 左辺

よって. $\langle \psi | (\hat{A} + i\hat{B}) | \phi \rangle^* = \langle \phi | (\hat{A} - i\hat{B}) | \psi \rangle$ は成り立つ。