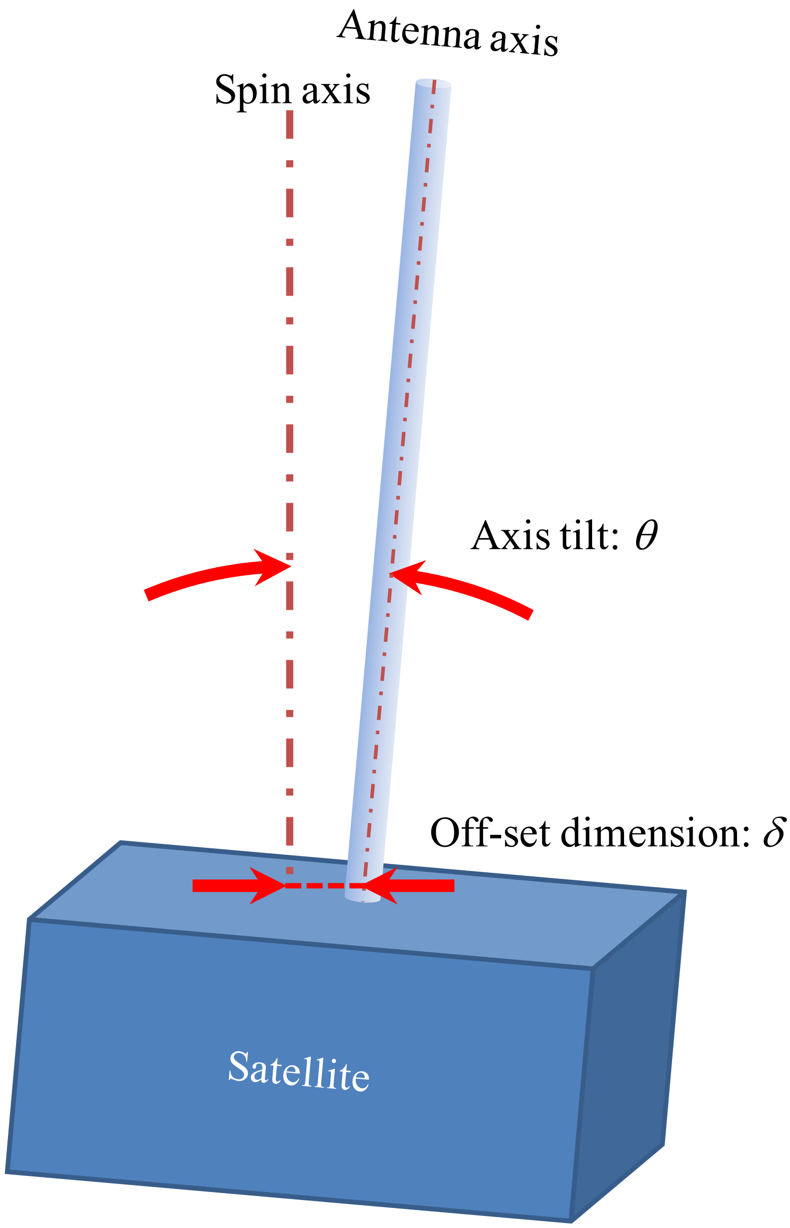
図のように，スピン衛星から長さ $l$ アンテナが伸びている．衛星のスピン軸とアンテナの軸がなす角を$\theta$とし，アンテナの根元でのオフセット寸法を$\delta$とする．これらスピン軸のずれにより，アンテナには回転遠心力が分布荷重として作用し，たわみが発生する．アンテナの根元の部分に作用するモーメントを求めよ．衛星のスピン角速度を$\omega$，アンテナの密度を$\rho$，断面積を $A$，ヤング率を $E$，断面二次モーメントを $I$ とする．答えは下記の通りとなる。xxx にはそれぞれ、sin, cos, sinh, cosh が当てはまる。下記の形式で答えを記述すること。

$$M\,\frac{\theta\{\mathrm{xxx}\beta l\mathrm{xxx}\beta l-\mathrm{xxx}\beta l\mathrm{xxx}\beta l\}-\delta\beta\mathrm{xxx}\beta l\mathrm{xxxx}\beta l}{1+\mathrm{xxx}\beta l\mathrm{xxxx}\beta l}_{max}$$

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}}$$



回転の半径はたわみなので境界条件と積分

遠心力 $mr\omega^2$ はたわみの4回微分

$$EIv''''(x) = \rho A v(x)\omega^2$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI} v(x)\omega^2$$

$$v''''(x) - \beta^4 v(x) = 0$$

$$v(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^{\beta x} = \cosh(\beta x) + \sinh(\beta x)$$

$$e^{-\beta x} = \cosh(\beta x) - \sinh(\beta x)$$

オイラー $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$$

よって

$$v(x) = C_1(\cosh(\beta x + \sinh(\beta x))$$

$$+ C_2(\cosh(\beta x) - \sinh(\beta x))$$

$$+ C_3(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

$$+ C_4(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

$\downarrow$

$$v(x) = (C_1 + C_2)\cosh(\beta x) + (C_1 - C_2)\sinh(\beta x) + (C_3 + C_4)\cos(\beta x) + (C_3 - C_4)\, i \sin(\beta x)$$

$$v(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$$

$$(\cosh(\beta x))' = \sinh(\beta x)$$

$$(\sinh(\beta x))' = \cosh(\beta x)$$

$$(\cos(\beta x))' = -\sin(\beta x)$$

$$(\sin(\beta x))' = \cos(\beta x)$$ を用いて

$$V'(x) = \beta\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) - C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\} \quad \cdots ①$$

$$V''(x) = \beta^2\{A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) - C\cos(\beta x) - D\sin(\beta x)\} \quad \cdots ②$$

$$V'''(x) = \beta^3\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) + C\sin(\beta x) - D\cos(\beta x)\}$$

$$V(0) = \delta \quad V'(0) = \theta \quad V''(l) = 0 \quad V'''(l) = 0$$

$$V(0) =$$

(3) × (4)

$$= A \{ 1 + 1 + 2\cosh(\beta x)\cos(\beta x)$$

$$- \delta \left( 1 + \cosh(\beta x)\cos(\beta x) + \sinh(\beta x)\sin(\beta x) \right)$$

$$- \frac{\theta}{\beta} \left( \cosh(\beta x)\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)\cos(\beta x) \right)$$

$$M(0) = -EI\,v''(0)$$

$$v(0)'' = \beta^2 (A - C)$$

$$= \beta^2 (2A - \delta)$$

$$= A\{ 1 + [1 + 2\cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}$$

$$- \delta ( 1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l) + \sinh(\beta l)\sin(\beta l))$$

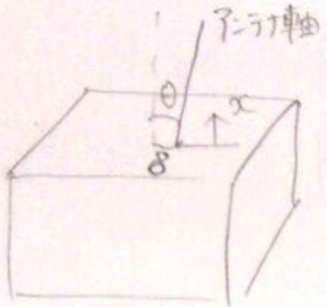
$$- \frac{\theta}{\beta} ( \cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l))$$

$$EI\, v''''(x) = \rho A\, v(x)\, \omega^2$$

$$v''''(x) - \beta^4 \cdot v(x)$$

$$v(x) = c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x} + c_3 e^{i\beta x} + c_4 e^{-i\beta x}$$

材力2




長さ$l$，断面積$A$，密度$\rho$　　遠心力が分布荷重のはり

根本のモーメントを求めよ。

初期条件

$$\begin{cases} v(0)=\delta \\ v'(0)=\theta \\ v''(l)=0 \\ v'''(l)=0 \end{cases}$$

回転の半径はたわみなので境界条件と積分を利用する。

遠心力 $mr\omega^2$　⇒たわみの4回微分すると遠心力

$$EIv''''(x)=\rho A\, v(x)\,\omega^2$$

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4}-\frac{\rho A}{EI}\omega^2 v(x)=0 \qquad \beta=\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}\omega^2}\ \text{とおく。}$$

$$v''''(x)-\beta^4 v(x)=0$$ この一般解は

$$v(x)=C_1e^{\beta x}+C_2e^{-\beta x}+C_3e^{i\beta x}+C_4e^{-i\beta x}$$

ここで $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ なので

$$\begin{cases} e^{\beta x}=\cosh(\beta x)+\sinh(\beta x) \\ e^{-\beta x}=\cosh(\beta x)-\sinh(\beta x) \end{cases}$$ である。

又. オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より

$$\begin{cases} e^{i\beta x}=\cos(\beta x)+i\sin(\beta x) \\ e^{-i\beta x}=\cos(\beta x)-i\sin(\beta x) \end{cases}$$

$$\therefore v(x)=C_1(\cosh(\beta x)+\sinh(\beta x))+C_2(\cosh(\beta x)-\sinh(\beta x))+C_3(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))$$
$$+C_4(\cos(\beta x)-i\sin(\beta x))$$
$$=(C_1+C_2)\cosh(\beta x)+(C_1-C_2)\sinh(\beta x)+(C_3+C_4)\cos(\beta x)+(C_3-C_4)i\sin(\beta x)$$
$$=A\cosh(\beta x)+B\sinh(\beta x)+C\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)$$ とおく。

$(A=C_1+C_2,\ B=C_1-C_2,\ C=C_3+C_4,\ D=(C_3-C_4)i)$

又. $(\sinh x)'=\cosh x$，$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$ であるので

$v(0)=\delta$，$v'(0)=\theta$，$v''(l)=0$，$v'''(l)=0$ を用いるため微分すると

$$v'(x) = \beta\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) - C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\}$$

$$v''(x) = \beta^2\{A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) - C\cos(\beta x) - D\sin(\beta x)\}$$

$$v'''(x) = \beta^3\{A\sinh(\beta x) + B\cosh(\beta x) + C\sin(\beta x) - D\cos(\beta x)\}$$

ここで始めに示した $\begin{cases} v(0)=\delta \\ v'(0)=\theta \\ v''(l)=0 \\ v'''(l)=0 \end{cases}$ を用いる。

$$v(0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D\cdot 0 = \delta \quad \therefore\ C = \delta - A \ \cdots (*)$$

$$v'(0) = \beta\{A\cdot 0 + B\cdot 1 - C\cdot 0 + D\cdot 1\} = \theta \iff B + D = \frac{\theta}{\beta} \iff D = \frac{\theta}{\beta} - B \ \cdots (*)'$$

$$v''(l) = \beta^2\{A\cosh(\beta l) + B\sinh(\beta l) - C\cos(\beta l) - D\sin(\beta l)\} = 0 \quad \cdots ①$$

$$v'''(l) = \beta^3\{A\sinh(\beta l) + B\cosh(\beta l) + C\sin(\beta l) - D\cos(\beta l)\} = 0 \quad \cdots ②$$

①②に $(*)(*)'$ を代入すると

$$① = \cancel{\beta^2}\Big[A\{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)\} + B\{\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)\} - \delta\cos(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\sin(\beta l)\Big] = 0 \quad \cdots ①'$$

?

$$② = \cancel{\beta^3}\Big[A\{\sinh(\beta l) - \sin(\beta l)\} + B\{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)\} + \delta\sin(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\cos(\beta l)\Big] \quad \cdots ②'$$

$(A-B)(A+B)$
$A^2 - B^2$

$①' \times \{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)\}$ より

$$\Big[A\{\cosh^2(\beta l) + 2\cosh(\beta l)\cos(\beta l) + \cos^2(\beta l)\} + B\{\sinh(\beta l) + \sin\beta l\}\{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)\}$$
$$- \delta\cosh(\beta l)\cos(\beta l) - \delta\cos^2(\beta l)$$
$$- \frac{\theta}{\beta}\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\cos(\beta l)\sin(\beta l)\Big] = 0 \quad \cdots ③$$

$$② \times \{\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)\} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$= \Big[A\{\sinh^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)\} + B\{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)\}\{\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)\}$$

$$+ \delta \sinh(\beta l)\sin(\beta l) + \delta \sin^2(\beta l)$$

$$- \frac{\theta}{\beta}\sinh(\beta l)\cos(\beta l) - \frac{\theta}{\beta}\sin(\beta l)\cos(\beta l)\Big] = 0 \quad \cdots ④$$

③ − ④ は

$$= A\{1 + 1 + 2\cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}$$

$$- \delta\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l) + \sinh(\beta l)\sin(\beta l)\}$$

$$- \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\} = 0$$

ここまで
まだ頑張る

$$2A = \frac{\delta\{\cosh(\beta l)\cos(\beta l) + \sinh(\beta l)\sin(\beta l) + 1\} + \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\cancel{2}\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

---

$Q(x)$
↓
$M(x)$  微分×EI
↓
$\phi(x)$  微分
↓
$v(x)$

よって求める根元のモーメントは

$M(0) = -EI\, v''(0)$ より

$v''(0) = \beta^2 (A - C) \qquad C = \delta - A$

$M(0) = -EI\beta^2 (2A - \delta)$

$$2A - \delta = \frac{\delta \cdot \sinh(\beta l)\sin(\beta l) + \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

$$\therefore M(0) = -EI\beta^2 \cdot \frac{\delta \cdot \sinh(\beta l)\sin \beta l + \frac{\theta}{\beta}\{\cosh(\beta l)\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)\cos(\beta l)\}}{\{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)\}}$$

$$= \frac{\theta\{\sinh(\beta l)\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)\sin(\beta l)\} - \delta\beta \sinh(\beta l)\sin(\beta l)}{1 + \cosh(\beta l)\cos(\beta l)} \cdot EI\beta \quad //$$

[1]

① 長さNaの車輪の上のNコの同等の格子点を考える。
ポテンシャルエネルギーは周期aで周期的であって $V(x)=V(x+sa)$
と書くことができる。

$V(x)=V(x+a)$ におけるシュレディンガー方程式はそれぞれ

・ $$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right\}\psi(x)=E\psi(x)$$

・ $$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x+a)\right\}\psi(x+a)=E\psi(x+a)$$

$$\Leftrightarrow \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right\}\psi(x+a)=E\psi(x+a)$$

この2式は同じシュレディンガー方程式の固有関数であるので位相がずれている
だけで同じ波動関数であるべき。

又 存在確率 $|\psi(x+a)|^2=|\psi(x)|^2$ より

$$\psi(x+a)=C\psi(x)$$

$C^N=\cos\frac{2\pi s}{N}+i\sin\frac{2\pi s}{N}=1$

車輪を1周すると $\psi(x)$ は1価関数であることから

$=\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{N}\right)$

$$\psi(x+Na)=\psi(x)=C^N\psi(x)$$ //

$\cos\frac{2\pi s}{N}+i\sin\frac{2\pi s}{N}$

② $$\psi(x+a)=C\psi(x)$$
$$\psi(x+2a)=C^2\psi(x)$$
$$\vdots$$
$$\psi(x+Na)=C^N\psi(x)$$

であり, $C^N=1$ であることから
オイラーの公式を用いると

$$C=\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{N}\right)$$ sは整数 //

③ ブロッホの定理を満足する$\psi(x)$は結晶の周期性$u(x)$と平面波$e^{i\cdot\frac{2\pi s}{Na}x}$の積で表すことができる。

$$\psi(x) = u(x)\, e^{i\frac{2\pi s}{Na}x}$$ とした時

②の$\psi(x+a) = C\psi(x)$の右辺に代入して

$$\psi(x+a) = \exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{Na}\cdot a\right)\cdot u(x)\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{Na}x\right)$$

$$= u(x)\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{Na}(x+a)\right)$$

$u(x)$は結晶の周期性をもつことから$u(x) = u(x+a)$となるので

$$= u(x+a)\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{Na}(x+a)\right)$$ となり

結晶の周期性をもつときに$\psi(x+a) = C\psi(x)$の式は

$\psi(x+a) = u(x)\exp\left(i\cdot\frac{2\pi s}{Na}x\right)$が成立する。

④ $k = \frac{2\pi s}{Na}$は波数を表す。

$\psi_k(x) = u_k(x)\exp(ikx)$とおいたとき$x \to x+a$にすると

$$\psi_k(x+a) = u_k(x+a)\exp(ik(x+a))$$

ここで$u_k$は周期性をもつことから$u_k(x) = u_k(x+a)$

$$\psi_k(x+a) = u_k(x)\exp(ikx)\cdot\exp(ika)$$

ここで$u_k(x)\exp(ikx) = \psi_k(x)$より

$$\psi_k(x+a) = \exp(ika)\,\psi_k(x)$$

//