

問 1. 次の  $\mathbb{R}^2$  の部分集合は部分空間であるか調べよ.

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_2 = 0 \right\}$$

$$(2) W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 x_2 \geq 0 \right\}$$

(1)

$x_2 = 0$  かつ

$\mathbf{0} \in W_1$  が成り立つ (条件① 成立)  $\dots$  ①

$u, v \in W_1$ ,  $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  とおくと

$$u + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

よって  $u + v \in W_1$  が成り立つ (条件② 成立)  $\dots$  ②

$c \in \mathbb{R}$  とおくと

$$cu = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

よって  $cu \in W_1$  が成り立つ (条件③ 成立)  $\dots$  ③

以上 ①, ②, ③ より ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $W_1$  は 部分空間である.

(2)

$x_1 x_2 \geq 0$  かつ

$\mathbf{0} \in W_2$  が成り立つ (条件① 成立)  $\dots$  ④

$u, v \in W_2$ ,  $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  とおくと

$$u + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin W_2$$

よって  $u + v \notin W_2$  となるので

条件② は成立しない.  $\dots$  ⑤

以上 ④, ⑤ より ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $W_2$  は  
部分空間でない.