材料の物理2
（電磁気学）

第十四回：電磁場のエネルギー

ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を理解する。

おさらい

電場のエネルギー　$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2$

磁場のエネルギー　$u_m = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$

$$\xrightarrow{\text{合計}} \quad U_{em} = \int \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) dV$$

真空中の電磁場のエネルギー

時間変化を考慮して考える

Maxwell 方程式より

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \boldsymbol{i} \\ \left(\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = 0$$

2つの式の差をとる

$$\underbrace{\boldsymbol{E}(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\times\boldsymbol{E})}_{= -\nabla(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})} - \left(\varepsilon_0\mu_0 \underbrace{\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}_{= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^2} + \underbrace{\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}_{= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}^2}\right) = \mu_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$$

両辺をμ_0で割って

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i} + \frac{1}{\mu_0}\nabla(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

積分して

$$-\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) dV = \int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}\, dV + \int_V \nabla \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\, dV$$

ガウスの定理より

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}U_{em}}_{\text{電磁場エネルギーの時間変化}} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}\, dV}_{\text{電圧×電流}} + \int_S \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\boldsymbol{n}}_{?}\, dS$$

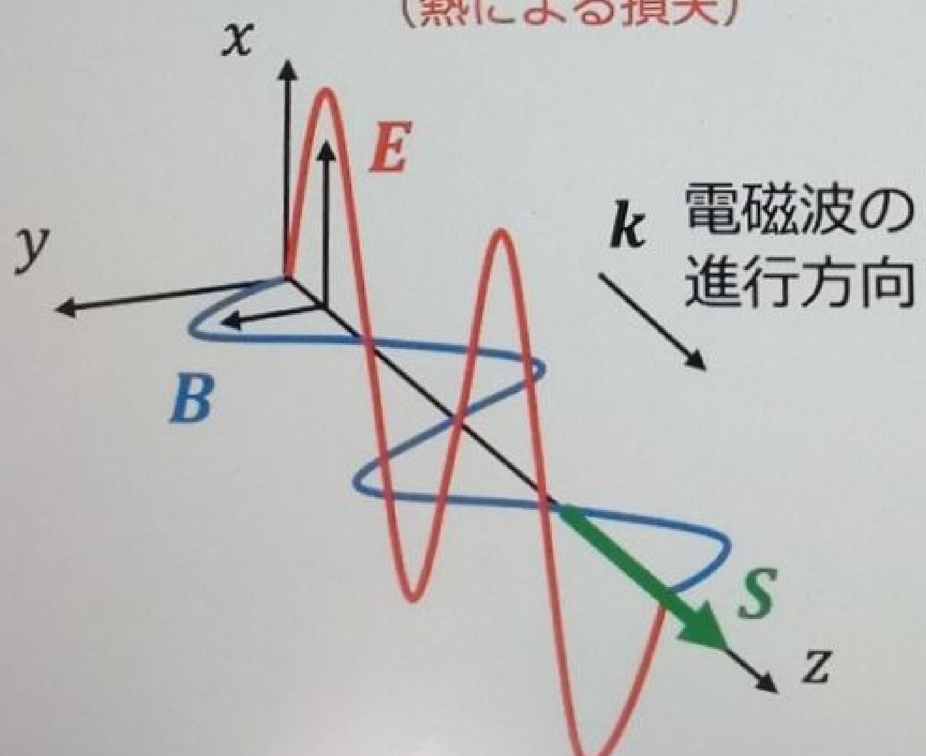
“エネルギー保存則”

電磁場エネルギーの時間変化

電圧×電流

ジュール熱
（熱による損失）

?　$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$



「ポインティングベクトル」
流出するエネルギーの流れ

電磁波の伝搬

▼

Sと平行で$|S|$に等しい量の
電磁波エネルギーの移動

11:03

今、ジュール熱＝0 とする　　（熱損失 0、真空中）

$$\frac{d}{dt}U_{em} + \int_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0$$

$u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$ より

$$\underbrace{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}}_{\text{電磁気的エネルギーの時間変化}} + \underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{S}}_{\text{ポインティングベクトルの発散（エネルギーの流れ）}} = 0$$

エネルギーの連続性（保存則）

偏光

Maxwell 方程式（真空中）

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 & \text{①} \\ \nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 & \text{②} \end{cases}$$

rot をとる

$$\underline{\nabla\times(\nabla\times E)} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) = 0$$

$$\|$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \Delta\boldsymbol{E} = 0$$

ガウス則より（真空中なので $\rho = 0$）

整理すると

$$-\Delta\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) = 0$$

② を代入して

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\boldsymbol{E} = 0$$

磁場についても同様に

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\boldsymbol{B} = 0$$

3次元での電場、磁場に対する

“波動方程式”

26:47

解の1つとして

$$\boldsymbol{E} = E_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$$ とおく　（簡単のため）

元の式に代入

$$\underbrace{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{=0} E_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) = 0$$

=0　式の成立には =0 である必要

これより

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

$$\omega = ck$$

ω : 角振動数

k : 波数

c : 光速

また、ガウス則により　（$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$）

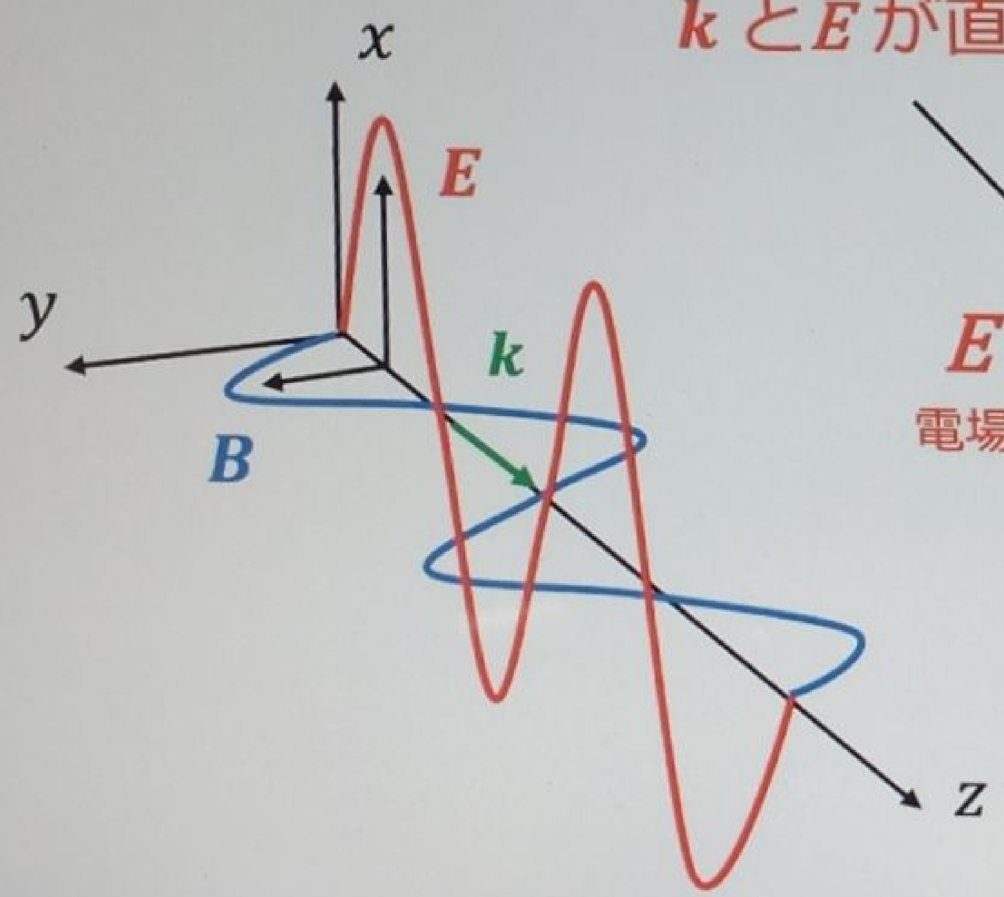
$$-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) = 0$$

式の成立には $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$ である必要

▼

$\boldsymbol{k}$ と E が直交

前回授業より
E と B も直交



E と B と k が互いに直交

電場　磁場　波数ベクトル
（進行方向）

本日の課題

①ポインティングベクトルと磁場と電場が直交していることを証明しなさい。

電磁波の種類と波長の違い