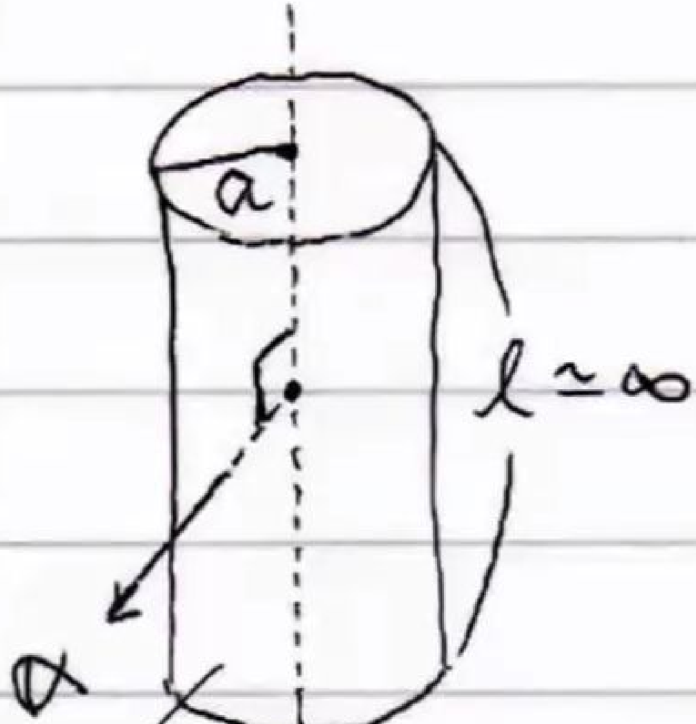
材料の物理1

第9回目

演習レポート課題　解答



・$\alpha < a$のとき、

ガウス曲面内に電荷なし$(Q=0)$

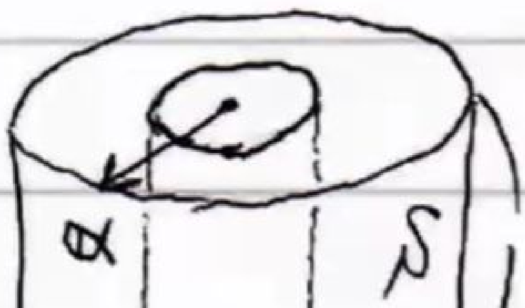
$$\hookrightarrow \underline{E_\alpha(\alpha) = 0}_{\ \alpha<a}$$

・$\alpha \geqq a$のとき

$Q = \sigma \times$ 側面積

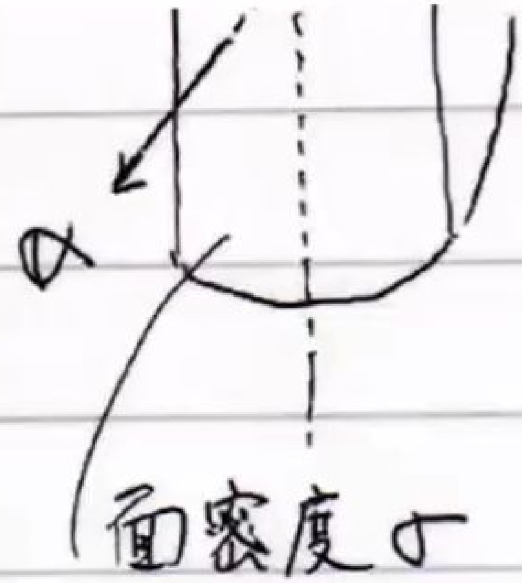
$\ \ = \sigma \times 2\pi a L$

$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \varepsilon_0 E_\alpha(\alpha) \int_{側面} dS$$



$$\varepsilon_0 E_\alpha(\alpha)\, 2\pi \alpha l$$

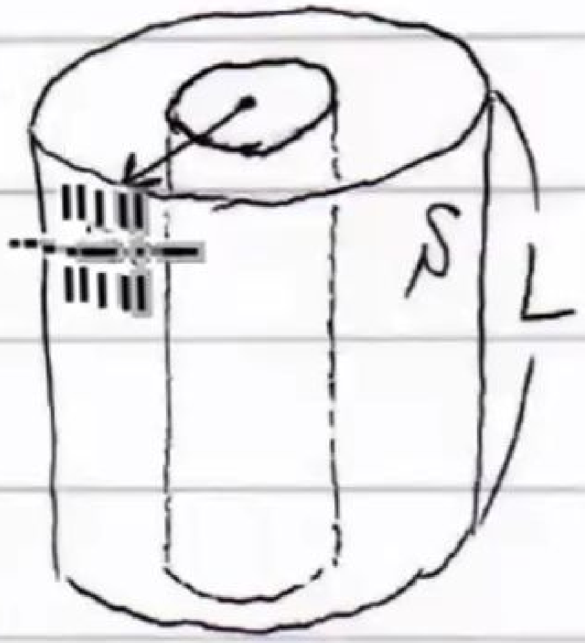
$\alpha < a$



・$\alpha \geqq a$ のとき

$$Q = \sigma \times \text{側面積}$$

$$= \sigma \times 2\pi a L$$



$$\varepsilon_0 \int_S E_n \, dS = \varepsilon_0 E_\alpha(\alpha) \int_{\text{側面}} dS$$

$$= \varepsilon_0 E_\alpha(\alpha) \cdot 2\pi \alpha L$$

$$= Q = 2\pi a L \sigma$$

$$\therefore \underline{E_\alpha(\alpha) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \alpha}} \quad \alpha \geqq a$$

<u>方向：円筒面に垂直</u>

(前回、電場 → 電位を考えたが、

逆に、電位 → 電場も求められる。

$$\int_{\underbrace{P}_{\text{基準点}}}^{A} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \underbrace{\phi_P}_{=0} - \phi_A$$

$$= -\phi_A$$

(一般化)

$$\mathbb{r} = (x, y, z), \quad \phi_A \to \phi$$

$$\phi = -\left\{ \int E_x dx + \int E_y dy + \int E_z dz \right\}$$

$\Downarrow$ 微分

$$\mathbb{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

・ $$\int_{\underbrace{P}_{\text{基準点}}}^{A} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \underbrace{\phi_P}_{=0} - \phi_A$$

$$= -\phi_A$$

(一般化)

$$\mathbb{r} = (x, y, z), \quad \phi_A \to \phi$$

$$\phi = -\left\{ \int E_x dx + \int E_y dy + \int E_z dz \right\}$$

$\Downarrow$ 微分

$$\mathbb{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

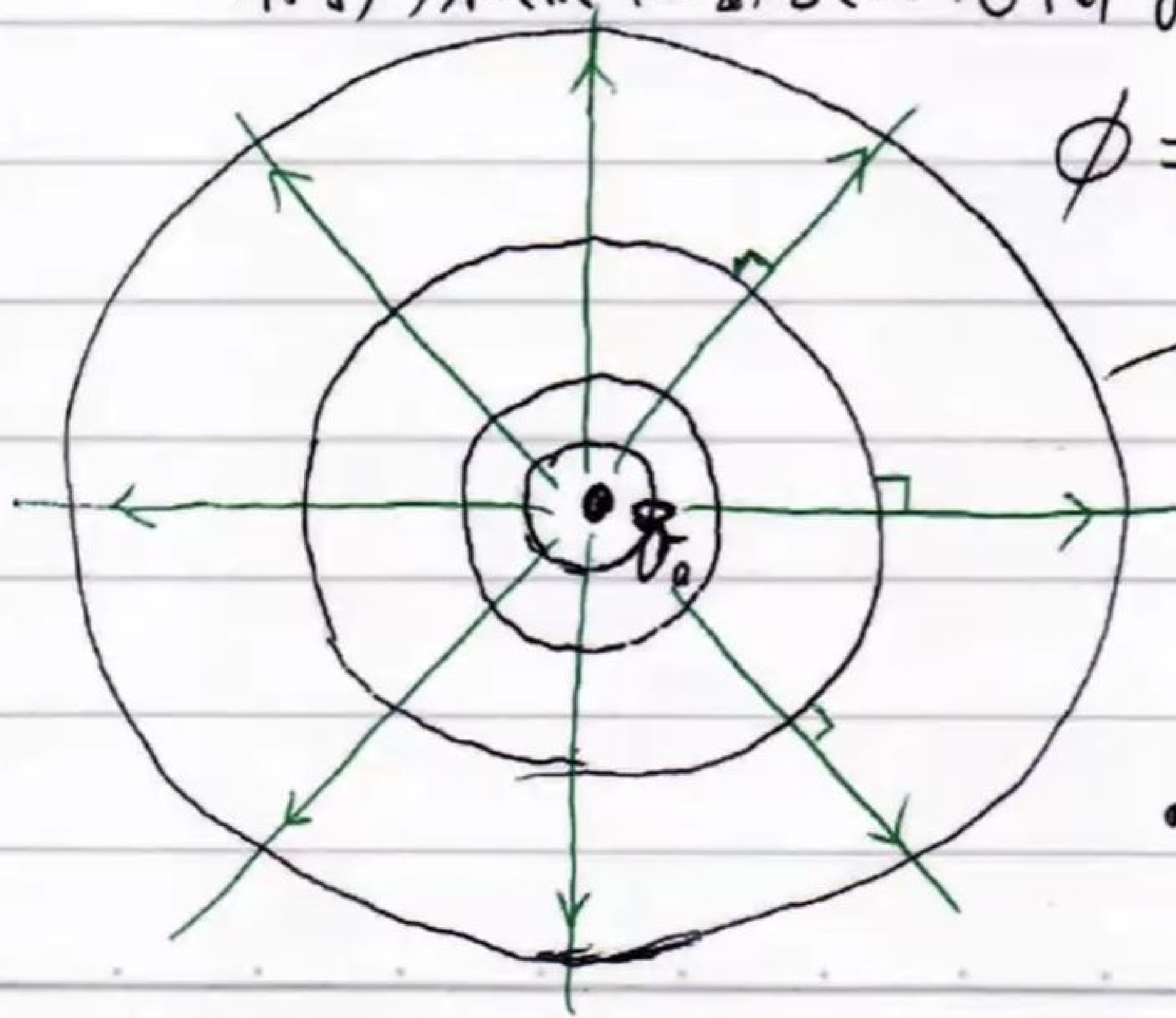
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= -\nabla\phi \text{ or } -\mathrm{grad}\,\phi$$

・等電位面：電位の直観的表現

（cf. 電場 → 電気力線）

例）原点にある点電荷 q_0 による等電位面

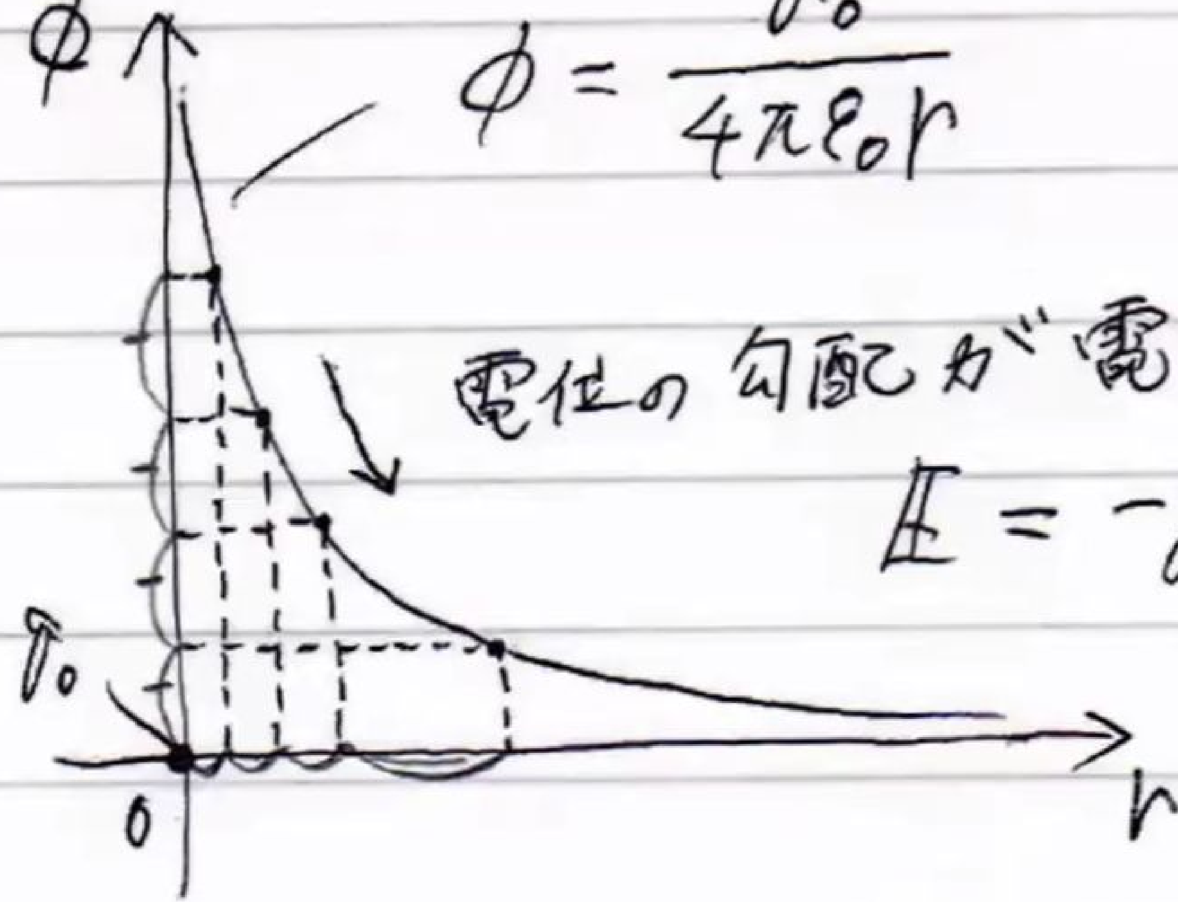


$$\phi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

— 半径 $r = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 \phi}$ の球面

注：電気力線は等電位面に垂直

・等電位面は地図の等高線に対応



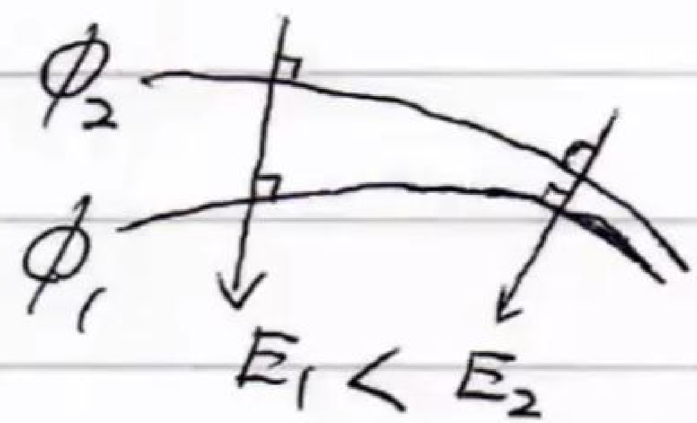
$$\phi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

電位の勾配が電場

$$\mathbb{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

。等電位面の間隔が狭いほど、勾配は大。

⟷ $\mathbb{E}$は大。

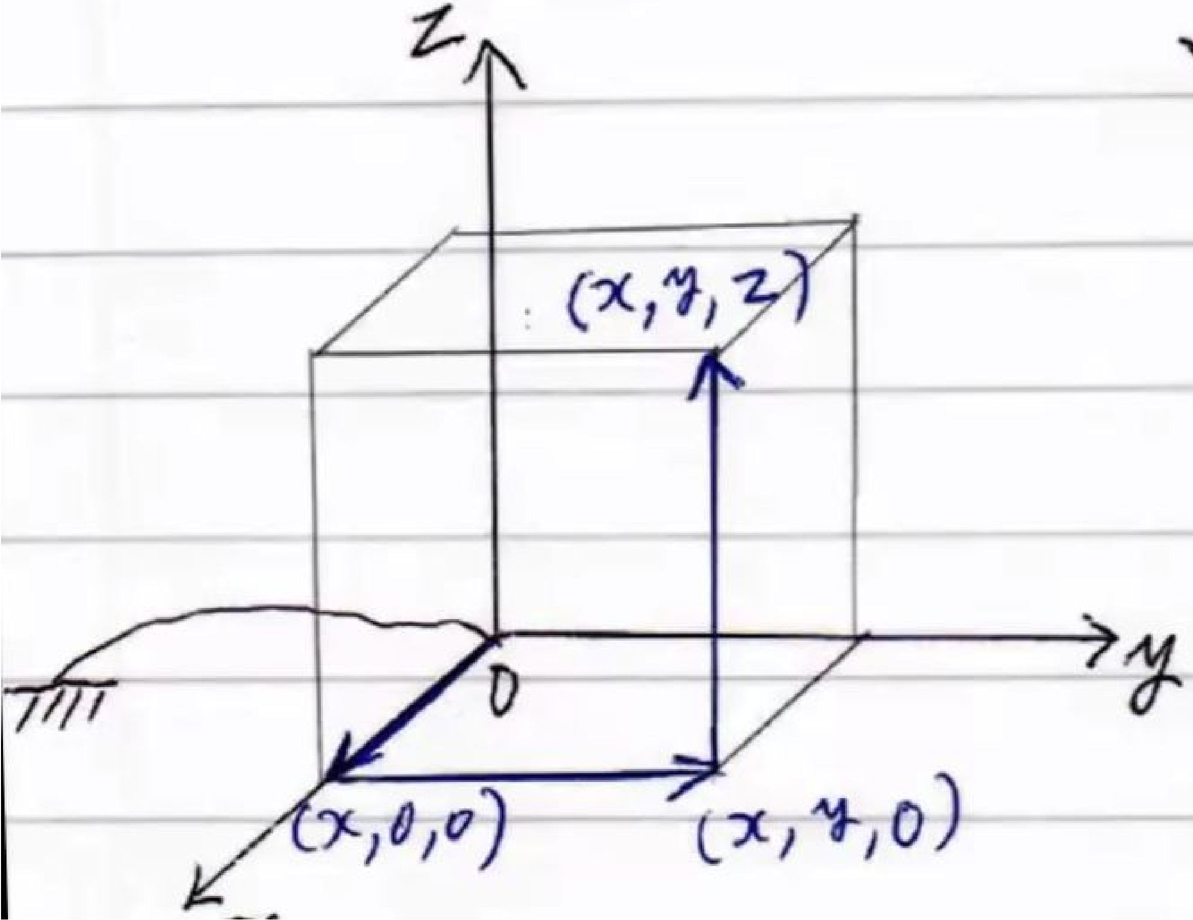


例題 (p.49、5)

電場が $E_x = Ayz$, $E_y = Azx$, $E_z = Axy$ で与えられているとき、そのポテンシャル(電位)を求めよ。

解) $\phi = -\left\{ \int E_x dx + \int E_y dy + \int E_z dz \right\}$ ※線積分

。基準点($\phi = 0$)を原点：



☆経路：$x \to y \to z$ のとき、

$$\phi = -\left\{ \int_0^x E_x(x,0,0)\,dx + \int_0^y E_y(x,y,0)\,dy + \int_0^z E_z(x,y,z)\,dz \right\}$$

$$\phi = -\left(0 + 0 + \int_0^z Axy\,dz\right)$$

$$= \underline{-Axyz}$$

☆ $z \to y \to x$ とすると、

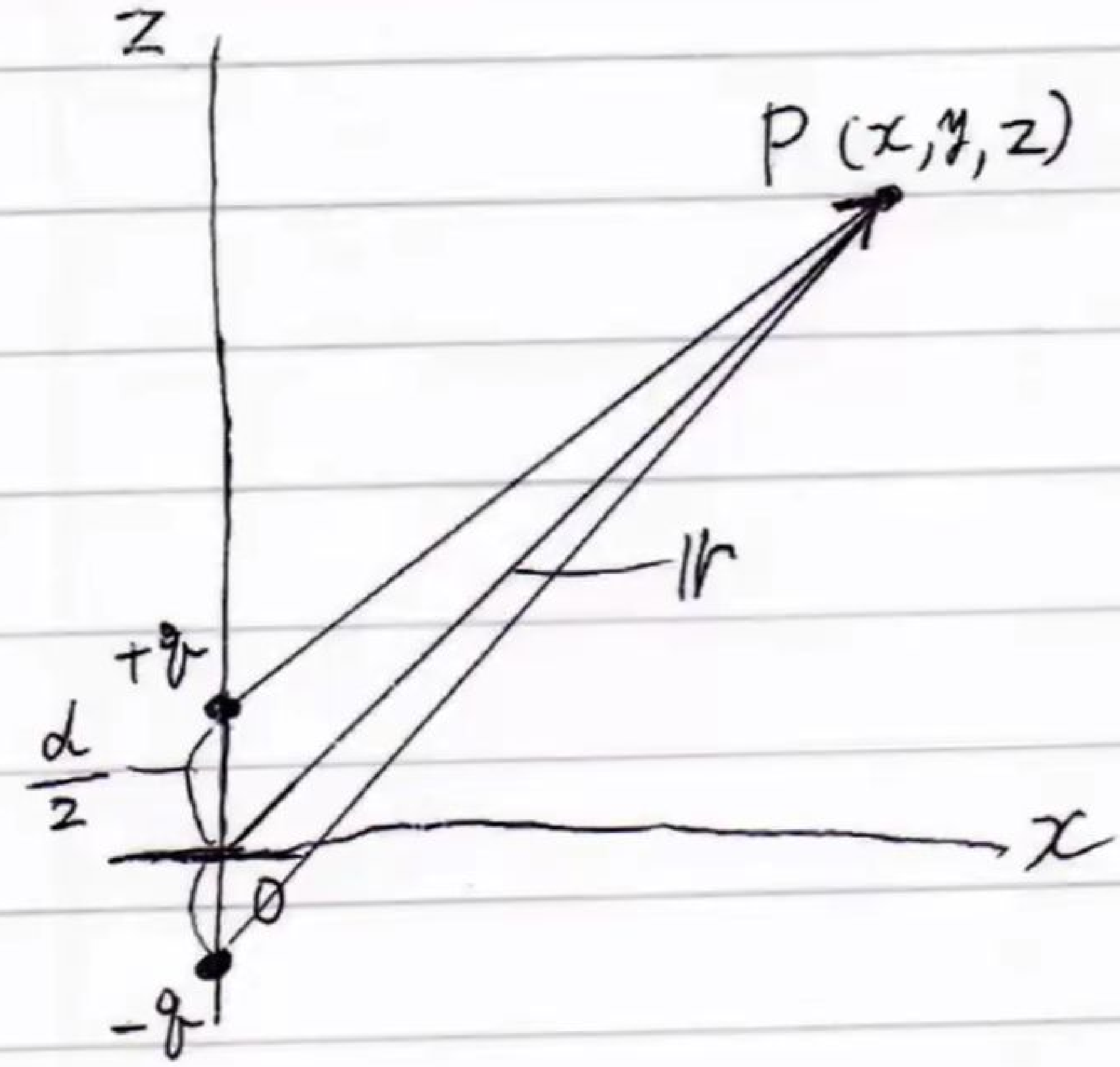
$$\phi = -\left\{\int_0^x E_x(x,y,z)\,dx + \int_0^y E_y(0,y,z)\,dy + \int_0^z E_z(0,0,z)\,dz\right\}$$

$$= -\left(\int_0^x Ayz\,dx + 0 + 0\right)$$

$$= \underline{-Axyz}$$ ※経路には無関係

例題 (P.49、6)

電気双極子の静電ポテンシャル(電位)と電場を求めよ。



。静電ポテンシャル(電位)

まず、2つの点電荷による

電位 (→重ね合わせの原理)

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-(-\frac{d}{2}))^2}}$$

電気双極子：$r \gg d$

($\sqrt{\ }$ の中身) $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} \mp zd + \underbrace{\frac{d^2}{4}}_{0} \simeq r^2 \mp zd$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 \mp zd}} = \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{zd}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\frac{zd}{r^2} \ll 1 \longrightarrow$ $x \ll 1$ のとき、

$|1+x|^{\alpha} \simeq 1+\alpha x$

$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{zd}{2r^2}\right)$$

ゆえに、

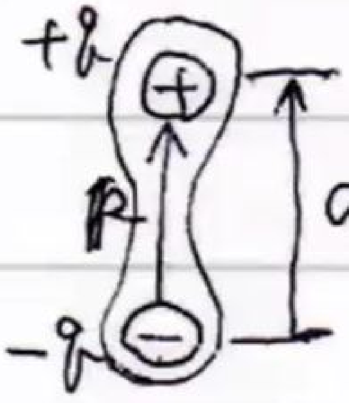
$$\phi \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\left(1+\frac{zd}{2r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{2r^2}\right)\right\}$$

$q \quad zd$

$$\phi \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\left(1+\frac{zd}{2r^2}\right)-\frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{2r^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zd}{r^3}$$

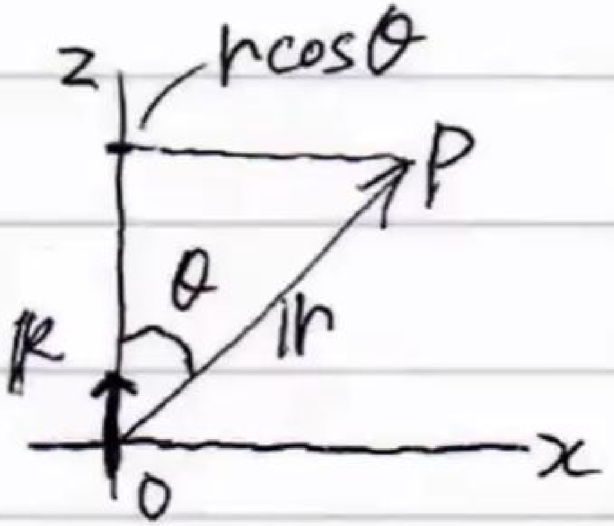
◦ 電気双極子モーメント $\mathbf{p}$：



$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad [\mathrm{C\,m}]$$

（大きさ：$p = qd$）

$$\Longrightarrow \phi \simeq \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



$pz = pr\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$ より、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

○電場 —— $\mathbb{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$$

$$= -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{1}{r^3}$$

$$= -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{}}$$

$$= -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{x}{r}$$

$$= \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{3pzy}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$= \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{3pzy}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(z)}_{1} + z\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{\frac{-3}{r^4}\frac{z}{r} = \frac{-3z}{r^5}}\right\}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

演習

(p.56、3)

静電ポテンシャル(電位) ϕ が以下のように与えられているとき、電場を求めよ。 $(\phi \to \boldsymbol{E})$

(1) $\phi(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2)$

(2) $\phi(x, y, z) = a(x^2 - xy)$

(3) $\phi(r) = \dfrac{a}{r}$

↪ 本授業内で解いてみましょう。

(p.57, [illegible])

以下のベクトル場に対してポテンシャル ϕ を求めよ。

└電場　　　　　　　　└電位　　($E \to \phi$)

(1) $E_x = Ax,\ E_y = Ay,\ E_z = Az$

(2) $E_x = 2Ax(y+z),\ E_y = A(x^2 - y^2),$

$E_z = A(x^2 - z^2)$

(3) $E_x = A(2x^2 - 3y^2 - 3z^2)x,$

$E_y = A(2y^2 - 3z^2 - 3x^2)y,$

$E_z = A(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)z$

↳ レポート課題

解)

$$\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

(1) $\phi(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2)$

$$(E_x, E_y, E_z) = (-2ax, -2ay, -2az)$$

(2) $\phi(x, y, z) = a(x^2 - xy)$

$$\begin{cases} E_x = -2ax + ay \\ E_y = ax \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$E_z = 0$

(3) $\phi(r) = \dfrac{a}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\left(-\frac{a}{r^2}\right)\left(\frac{x}{r}\right) \quad \because 例題$$

$$= \frac{ax}{r^3}$$

$E_y = \dfrac{ay}{r^3}$, $E_z = \dfrac{az}{r^3}$