第6講

2023年10月19日　　13:01

Th 4.1.2

X. set

$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^X$

(i) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$

(ii) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$

Proof (i)

$x \in X$ に対して、

$$\neg \underbrace{[\exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda]}_{x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$$

$x \in A_\lambda^c$

$$= \underbrace{\forall \lambda \in \Lambda, x \notin A_\lambda}_{x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c}$$

$$\therefore x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

$$\therefore \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

(ii) $A_\lambda \longrightarrow A_\lambda^c$ として、(i)を用いると、

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^c_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A^c_\lambda)^c$$

$$= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

$$\therefore \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^c_\lambda = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c$$

Th. 4.1.3

A: set, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. family of sets

Th. 4.1.5

A: set, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ family of sets

(i) $A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$

(ii) $A \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A \cap A_\lambda)$

Proof

(i) $x \in A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ のとき

$(x \in A) \vee \left(x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$

もし $x \in A$ ならば

$\forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A \subset A \cup A_\lambda$

$\therefore\ x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$

また、$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とすると、

$\forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda \subset A \cup A_\lambda$

$\therefore\ x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$

いずれの場合も

$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$

$\therefore\ A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$

逆に、$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$ とすると、

$\forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A \cup A_\lambda$

$(x \in A) \vee (x \in A_\lambda)$

もし $x \in A$ ならば

$x \in A \subset A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$

また、$x \notin A$ のときは、

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda$$

$$\therefore\ x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$$

$$\therefore\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda) \subset A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$$

$$\therefore\ A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup A_\lambda)$$

(ii) $X = A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ とおき、

complement は X の中で考える。

A^c と $(A^c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して (i) を用いると、

$$A^c \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A^c_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A^c \cup A^c_\lambda)$$

両辺の complement を考えると、

$$(\text{左辺}) = \left(A^c \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A^c_\lambda\right)\right)^c$$

$$= A \cap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A^c_\lambda\right)^c$$

$$= A \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$$

$$(\text{右辺}) = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{(A^c \cup A^c_\lambda)}_{\substack{\shortparallel \\ (A \cap A_\lambda)^c}}\right)^c$$

$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A \cap A_\lambda)$$

4.2 直積集合

Def 4.1.4

X, Y : set

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

これを X と Y の 直積集合

これを XとYの 直積~~集合~~

より. 一般に $X_1, \cdots, X_n$: set

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

$\prod$: product (かけ算)

$\sum$: sum (たし算)

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

これを $X_1, \cdots, X_n$ の 直積集合という.

$X_1 = \cdots = X_n$ のとき $\prod_{j=1}^{n} X_j = X^n$ と書く.

(注) $X_1 \times \cdots \times X_n$ と

$((X_1 \times X_2) \times X_3) \cdots) \times X_n$ とは 本質的に 同じ.

Def 4.15.

$X_1, \cdots, X_n$: set

$(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \prod_{j=1}^{n} X_j$

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall j \in \{1, \cdots, n\}, \ x_j = y_j$$

例. $\mathbb{R}$: real line.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

xy平面

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

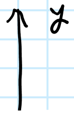
$$= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

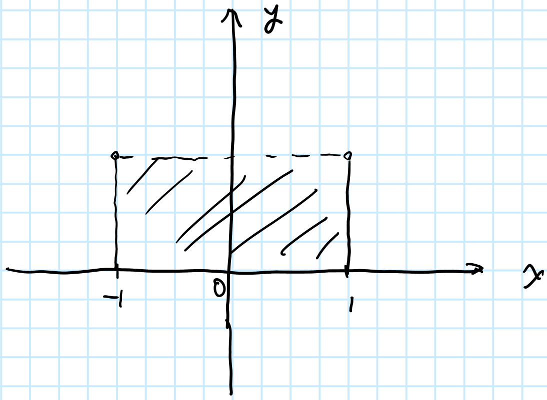
x, y, z平面

例 4.17

$I = [-1, 1]$, $J = [0, 1]$

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [0, 1]\}$$





注 4.18

$X \times Y = \{xy : x \in X, y \in Y\}$

ではない！

$X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ のとき,

$X \times Y = \{(1,2), (1,3)\}$ ○

$\{2,3\}$ ×

Def 4.19

X : set

$\Delta_n = \{(x, \dots, x) : x \in X\} \subseteq X^n$

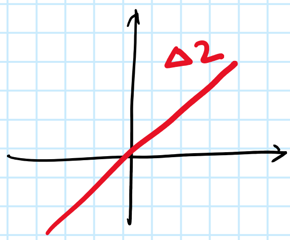
(単に Δ と書くこともある)

これを X^n の対角線集合という.

diag. set

$X = \mathbb{R}$

$\Delta_2 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$



Def 4.21

$(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$: family of sets

このとき,

このとき、

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{ \underbrace{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}_{\text{System}} : \forall\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in X_\lambda \}$$

これを $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積集合という。

Def 4.22

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: family of sets.

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

このとき、

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda = y_\lambda$$

注 4.23

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: family of sets

$\forall\lambda\in\Lambda,\ X_\lambda\neq\phi$

このとき

$$\forall\lambda\in\Lambda,\ \exists x_\lambda\in X_\lambda$$

であるが、$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は存在するか？

つまり、

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \phi$ となるか？

実は Λ : infinite set のときは、

ZF から、これを示すことはできない（反証もできない）

選択公理（The axiom of choice）

$$[\forall\lambda\in\Lambda,\ X_\lambda\neq\phi] \Rightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \phi$$

これを認めるか認めないかは個人の判断（普通は認める）

5. 写像

Def 5.1

X, Y : set

各 $x \in X$ に対して、1つの $f(x) \in Y$ を対応させる $\boxed{\text{規則}}$

を X から Y への写像 (map, mapping)

といい、$f : X \to Y$ で表す

X : f の定義域 (始域)

Y : f の終域

という。特に $Y \subset \mathbb{C}$ のとき、

f を関数 (function) という。

注 5.2

X, Y : set 、 $G \subset X \times Y$ は、

(*) $\forall x \in X$ 、 $\exists! y \in Y$

$(x, y) \in G$

この y を $f(x)$ とおく。

例 5.4

$X = \{ x : x$ は広辞苑第七版に収録されているひらがなの単語$\}$

このとき、

$Y = \{ y : y$ はひらがな $\}$

$f(x) = x$ の頭文字

$f : X \to Y$ 写像

例. 5.5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 2$

$g(x) = e^x$

$f(x) = x^2 - 2$
$g(x) = e^x$

このとき

$$F(x) = (f(x), g(x))$$

とすると、$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 曲線

例 5.6

$P = \{ p : p$ は 複素多項式$\}$

$\varphi(p) = P(z) = 0$ をみたす

$z \in \mathbb{C}$

とすると、φ: 写像でない

$$\varphi(z^2+1) = \pm i$$

$\psi(p) = \{ z \in \mathbb{C} : P(z) = 0 \}$

$\psi : P \to 2^{\mathbb{C}}$