2023 年度 線形代数学 2 課題 11

学科 AM科　　学籍番号 82L3036　　氏名 栗山 淳

問 1. $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ が対角化可能であるか調べ, 可能ならば対角化する正則行列を求めよ.

Aの固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t+1 & 4 & -6 \\ -3 & t-7 & 9 \\ -1 & -2 & t+2 \end{vmatrix} = (t+1)(t-7)(t+2) - 36 - 36 - \big(6(t-7) - 12(t+2) - 18(t+1)\big)$$

$$= (t^2 - 6t - 7)(t+2) - 72 - (6t - 42 - 12t - 24 - 18t - 18)$$

$$= (t^3 + 2t^2 - 6t^2 - 12t - 7t - 14) - 72 - (-24t - 84)$$

$$= \cancel{t^3 - 4t^2 - 19t} - 14 - 72 + \cancel{24t} + 84$$

$$= t^3 - 4t^2 + 5t - 2$$

$$= (t-1)(t^2 - 3t + 2)$$

$$= (t-1)^2(t-2)$$ より

T_Aの固有値は $\lambda = 1, 2$ である. T_Aの各固有値の固有空間を求める.

$\lambda = 1$ とすると

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x = 0$ を解き, $W(1; T_A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

$\lambda = 2$ とすると

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -3 & -5 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} x = 0$ を解き, $W(2; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

従って $\dim(W(1; T_A)) + \dim(W(2; T_A)) = 2 + 1 = 3$ となるので A は対角化される

更に $W(1; T_A)$ と $W(2; T_A)$ の基を用いて

$P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -5 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

よって対角化する正則行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$