2023 年度 線形代数学 2 課題 14

学科 AM科 学籍番号 8223036 氏名 栗山 淳

問 1. 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ.

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 \\ -2 & t & -2 \\ 1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t+2)(t-4)^2$$

より A の固有値は -2、4 である。各固有値に対してそれぞれ固有空間を求めると.

$$W(-2;A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(4;A) = \left\{ c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$W(-2;A)$ の基 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化すると $\left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\right\}$

$W(4;A)$ の基 $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化すると $\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}\right\}$ となる.

$W(-2;A)$ の各ベクトルと $W(4;A)$ の各ベクトルは直交するため、

$\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基である

よって

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$ は直交行列