2023 年度 線形代数学 2 課題 10

学科 AM科　学籍番号 8223036　氏名 栗山 淳

問 1. $\mathbb{R}[x]_1$ の線形変換 $T(f)(x) = f(0)x + f(2) + 3f(x)$ の固有値と各固有値の固有空間を求めよ.

$V = \mathbb{R}[x]_1$ として

Vの一組の基として 標準基 $\{1, x\}$ をとる.

この基に関する Tの表現行列 Aを求める.

$$(T(1), T(x)) = (x+4, 3x+2)$$

$$= (1, x)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

となるから $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ である

よって

$$g_T(\lambda) = g_A(T) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3) - 2$$

$g_T(x) = 0$ を解いて $(t-4)(t-3) = 2$

固有値 $\lambda = 5, 2$

$\lambda = 2$ のとき　Aの固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(2E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解なので!,

$$2E - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = c$

$x_1 - 2x_2 = 0$

$$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})\ (c \neq 0)$$

$\therefore$ Tの固有ベクトルは、$u = (1, x)\begin{bmatrix} -c \\ c \end{bmatrix} = -c + cx \ (c \neq 0)$

$\therefore W(2; T) = \{-c + cx \mid c \in \mathbb{R}\} = \langle -1 + x \rangle$

$\lambda = 5$ のとき　Aの固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(5E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解なので

$$5E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})\ (c \neq 0)$$

$\therefore$ Tの固有ベクトルは $u = (1, x)\begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix} = 2c + cx \ (c \neq 0)$

$\therefore W(5; T) = \{2c + cx \mid c \in \mathbb{R}\} = \langle 2 + x \rangle$