§3　変数変換の公式

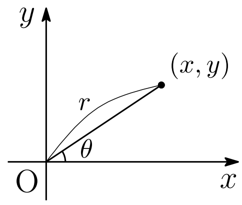
定理 7.6

(r,θ) 閉領域

$$I = [a,b]\times[\alpha,\beta] \qquad (a \geqq 0,\ \beta-\alpha \leqq 2\pi)$$

を極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



でうつした (x,y) 閉領域を D とする．このとき，D で連続な f に対して，次が成り立つ．

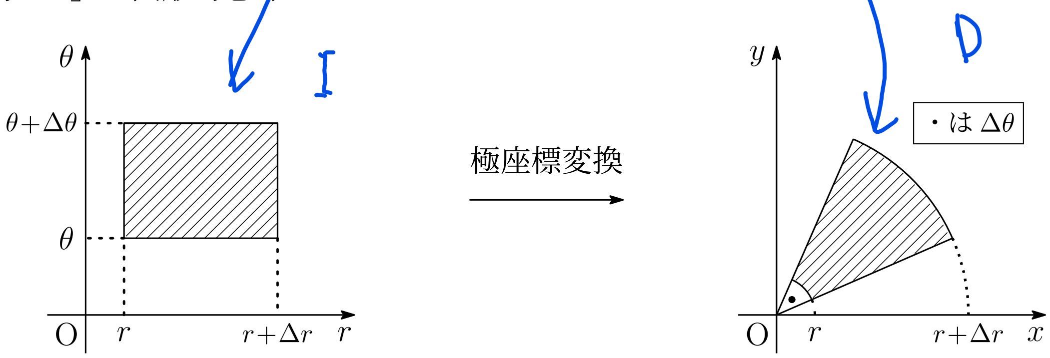
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_I f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta$$

※因子「r」は，極座標変換の Jacobian（ヤコビアン）

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r$$

の絶対値である．

※因子「r」の図形的意味



上左図の斜線部の面積を $\Delta S'$，上右図の斜線部の面積を ΔS とすると

$$\Delta S' = \Delta r\Delta\theta$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$$ ∵ $r\Delta r\Delta\theta$

であるから，$\Delta r \fallingdotseq 0$, $\Delta\theta \fallingdotseq 0$ のとき (⇒ 2次以上のは 0とみなす)

$$\frac{\Delta S}{\Delta S'} = r + \frac{1}{2}\Delta r \fallingdotseq r \qquad \therefore\ \Delta S \fallingdotseq r\Delta S'$$

である．これから，因子「r」は極座標変換の各場所における微小面積の拡大率を表していることが分かる．さらに，次のような略証ができる．

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &\fallingdotseq \sum\sum f(x,y)\Delta S \\ &\fallingdotseq \sum\sum f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\Delta S' \quad \left(= \sum\sum f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cdot \underbrace{\Delta r\Delta\theta}_{\Delta S'}\right. \\ &\fallingdotseq \iint_I f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdrd\theta\end{aligned}$$

定理 7.6 の証明

定理の仮定が成り立つとする．D は下右図である．

$[a,b]$ と $[\alpha,\beta]$ を

$$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_{m-1} < r_m = b, \quad \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

と分割し

$$I_{ij} = [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j] \quad (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

$$\Delta' = \{I_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

$$|\Delta'| = \max\{\delta(I_{ij}) \mid 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

とおく．ただし，$\mathbb{R}^2$ の有界集合 A に対して

$$\delta(A) = \sup\{\|(x,y) - (x',y')\| \mid (x,y),(x',y') \in A\}$$

である（これを A の直径という）．このとき，各 I_{ij} を極座標変換でうつした集合を D_{ij} とおくと

$$\Delta = \{D_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

は D の（一般）分割になる．また

$$|\Delta| = \max\{\delta(D_{ij}) \mid 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

とおくと

$$|\Delta'| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\Delta| \to 0$$

である．そして

$$x_{ij} = r_{i-1}\cos\theta_{j-1}, \quad y_{ij} = r_{i-1}\sin\theta_{j-1}$$

とおくと $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ で，D_{ij} の面積 $|D_{ij}|$ は I_{ij} の面積 $|I_{ij}|$ を用いて

$$\begin{aligned}
|D_{ij}| &= \frac{1}{2}{r_i}^2(\theta_j-\theta_{j-1})-\frac{1}{2}{r_{i-1}}^2(\theta_j-\theta_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1})(\theta_j-\theta_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})|I_{ij}| \\
&= r_{i-1}|I_{ij}|+\frac{1}{2}(r_i-r_{i-1})|I_{ij}|
\end{aligned}$$

とかける．よって，f は D で連続であるから

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(x_{ij},y_{ij})|D_{ij}|}_{\text{（一般）Riemann 和}} \\
&= \lim_{|\Delta'|\to 0}\left\{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_{i-1}\cos\theta_{j-1},r_{i-1}\sin\theta_{j-1})\cdot r_{i-1}|I_{ij}|\right. \\
&\qquad \left.+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_{i-1}\cos\theta_{j-1},r_{i-1}\sin\theta_{j-1})\cdot\frac{1}{2}(r_i-r_{i-1})|I_{ij}|\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r$ は I で連続であるから

$$\lim_{|\Delta'|\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_{i-1}\cos\theta_{j-1},r_{i-1}\sin\theta_{j-1})\cdot r_{i-1}|I_{ij}|}_{f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\text{ の Riemann 和}}=\iint_I f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdrd\theta$$

また，f は有界閉集合 D で連続より

$$|f(x,y)|\leqq M \qquad ((x,y)\in D)$$

を満たす定数 $M>0$ が存在するから

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_{i-1}\cos\theta_{j-1},r_{i-1}\sin\theta_{j-1})\cdot\frac{1}{2}(r_i-r_{i-1})|I_{ij}|\right| \\
\leqq\ &\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |f(r_{i-1}\cos\theta_{j-1},r_{i-1}\sin\theta_{j-1})|\cdot\frac{1}{2}(r_i-r_{i-1})|I_{ij}| \\
\leqq\ &\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n M\cdot\frac{1}{2}|\Delta'||I_{ij}| \\
=\ &\frac{1}{2}M|I||\Delta'|\to 0 \qquad (|\Delta'|\to 0)
\end{aligned}$$

以上より

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_I f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdrd\theta$$

が成り立つ． ∎

定理 7.7

g, h を $[\alpha, \beta]$ $(\beta - \alpha \leqq 2\pi)$ で連続とし，$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ で $0 \leqq g(\theta) \leqq h(\theta)$ を満たすとする．このとき，(r, θ) 閉領域

$$D' : \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \quad g(\theta) \leqq r \leqq h(\theta)$$

を極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

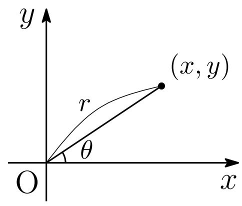
でうつした (x, y) 閉領域を D とする．このとき，D で連続な f に対して，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr d\theta$$

例 7.3（D から D' を求める方法）

(x, y) 閉領域 D を極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} r \geqq 0 \\ \theta : 1 \text{ 周分} \end{array} \right)$$



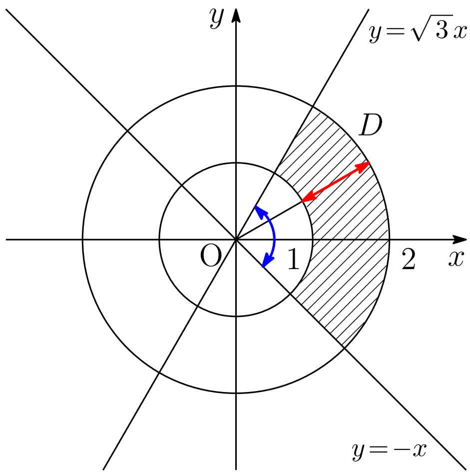
で引き戻した (r, θ) 閉領域 D' は一般には式で求めるが，D が図示できるときは図形的に読み取ると簡単である．ここでは，代表的な例を 2 つ紹介する．

(1) $D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}\,x$

は図の斜線部であるから

$$D' :\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\ ,\qquad 1 \leqq r \leqq 2$$

である．



(2) $D :\ x^2 + y^2 \leqq 2x\ ,\ y \geqq 0$

$$\left(\begin{array}{l} \text{平方完成すると} \\ (x-1)^2 + y^2 \leqq 1 \end{array} \right)$$

は図の斜線部であるから

$$D' :\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\qquad 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$$

である．