8223036 栗山 洋

量子力学　第8講 課題

一次元調和振動子の第一励起 $|1\rangle$ の規格化された固有関数を求めよ。

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!}}\hat{a}^{+}|0\rangle$$

基底状態 $|0\rangle$: $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$

※ $\hat{a}^{+}$ の定義

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

ただし. $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!}}\hat{a}^{+}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1!}}\hat{a}^{+} \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \hat{a}^{+} \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega x - \hbar\frac{d}{dx}\right) \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \left(\frac{m\omega x}{\sqrt{2\hbar m\omega}} - \frac{\hbar}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\cdot\frac{d}{dx}\right) \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \left(\frac{(m\omega)^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{2}\cdot(\hbar)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\hbar)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(m\omega)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}\right) \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} - \frac{(\hbar)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(m\omega)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{d}{dx}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} - \frac{(\hbar)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(m\omega)^{\frac{1}{4}}}\cdot\left(-\frac{m\omega x}{\hbar}\right)\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} + \frac{(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{2(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{\sqrt{2}(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(m\omega)^{\frac{3}{4}}x}{(\pi)^{\frac{1}{4}}(\hbar)^{\frac{3}{4}}}\cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$