第 5 章　1 変数関数の積分

§1　定積分の定義と性質

定義 5.1

f を閉区間 $[a,b]$ で有界な実数値関数とする．
閉区間 $[a,b]$ の分割を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

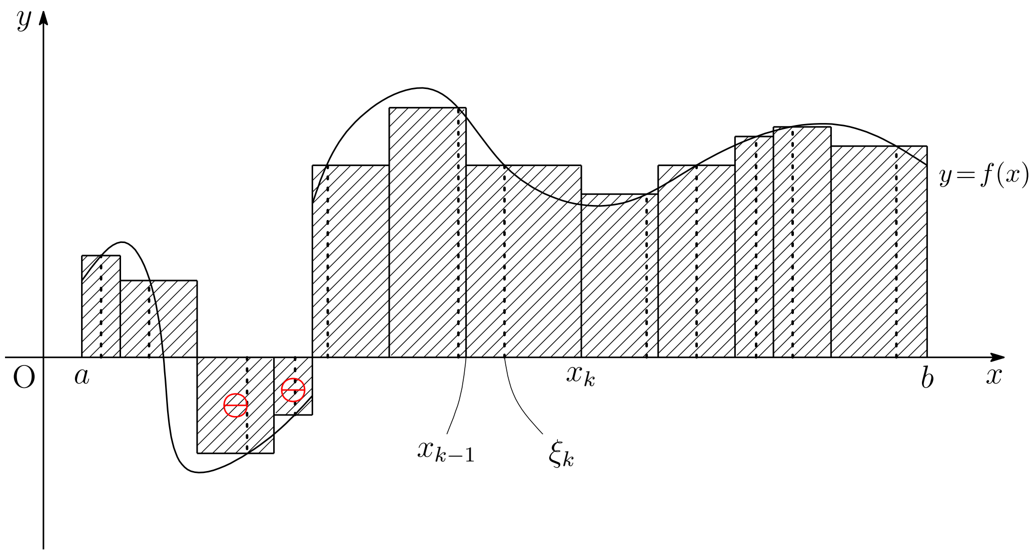
で定め，分割した小区間の最大幅を

$$|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leqq k \leqq n\}$$

で定める．また，$1 \leqq k \leqq n$ に対して

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \qquad \text{（小区間の代表点）}$$

を満たす ξ_k を任意にとる．



分割の仕方や代表点のとり方によらず一定の極限値

$$\underbrace{\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{斜線部の符号付き面積}}$$

が存在するとき，f は $[a,b]$ で Riemann（リーマン）積分可能または単に積分可能であるという．また，この極限値を f の $[a,b]$ 上の Riemann 積分または定積分といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す．

※便宜上

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と定める．

※ f, Δ, $\{\xi_k\}$ は定義内と同じものとする．また，M, m を

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

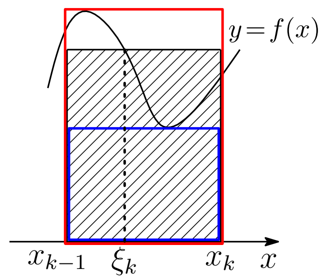
を満たす定数とする．各 k に対して

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$$

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$$

sup　上限

inf　下限



とおくと

$$m \leqq m_k \leqq f(\xi_k) \leqq M_k \leqq M$$

であるから，$x_k - x_{k-1} > 0$ をかけて $1 \leqq k \leqq n$ について加えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = b - a$ を用いると

$$m(b-a) \leqq \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \leqq M(b-a)$$

となる．そこで

$$s(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (\text{不足和})$$

$$S(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (\text{過剰和})$$

$$R(f, \Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (\text{Riemann 和})$$

とおくと

$$m(b-a) \leqq s(f, \Delta) \leqq R(f, \Delta, \{\xi_k\}) \leqq S(f, \Delta) \leqq M(b-a)$$

であるから

$$\{s(f, \Delta) \mid \Delta\text{は } [a, b] \text{ の分割}\}, \quad \{S(f, \Delta) \mid \Delta\text{は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

はともに有界である．よって，公理より

$$s = \sup\{s(f, \Delta) \mid \Delta\text{は } [a, b] \text{ の分割}\} \qquad \left(f \text{ の } [a, b] \text{ 上の下積分 } \underline{\int_a^b} f(x)dx\right)$$

$$S = \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta\text{は } [a, b] \text{ の分割}\} \qquad \left(f \text{ の } [a, b] \text{ 上の上積分 } \overline{\int_a^b} f(x)dx\right)$$

が存在する．

命題 5.1

Δ, Δ' を $[a,b]$ の分割とする．

(1) Δ の分点がすべて Δ' の分点にもなっているとき，Δ' は Δ の細分という．このとき

$$s(f,\Delta) \leqq s(f,\Delta') \leqq S(f,\Delta') \leqq S(f,\Delta)$$

が成り立つ．

(2) f の下積分，上積分をそれぞれ s, S とすると

$$s(f,\Delta) \leqq s \leqq S \leqq S(f,\Delta')$$

が成り立つ．

証明

(1) Δ' が Δ の細分であるとき，Δ の小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ は Δ' の小区間で分割される（1 つの場合も含む）．それを

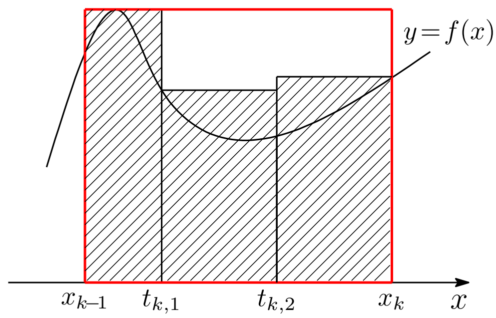
$$x_{k-1} = t_{k,0} < t_{k,1} < \cdots < t_{k,l_k-1} < t_{k,l_k} = x_k$$

とすると

$$M_k \geqq \underline{\sup\{f(x) \mid t_{k,j-1} \leqq x \leqq t_{k,j}\}}$$

であるから，$\underline{\qquad}$ を $M_{k,j}$ とおくと

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1})}_{\text{斜線部の符号付き面積}} \leqq \underline{M_k(x_k - x_{k-1})}$$



（$l_k = 3$ の場合の図）

となる．よって，両辺 $k = 1, \ldots, n$ について加えれば

$$S(f,\Delta') \leqq S(f,\Delta)$$

が成り立つことがわかる．

$s(f,\Delta) \leqq s(f,\Delta')$ が成り立つことも同様に示せるし，$s(f,\Delta') \leqq S(f,\Delta')$ が成り立つことは明らかである．

(2) Δ の分点と Δ' の分点を合わせたものを分点とする分割を Δ'' とすると，Δ'' は Δ の細分であり Δ' の細分でもある．よって，(1) より

$$s(f,\Delta) \leqq s(f,\Delta'') \leqq S(f,\Delta'') \leqq S(f,\Delta')$$

$$\therefore \quad s(f,\Delta) \leqq S(f,\Delta') \quad \cdots\cdots ①$$

まず，Δ を固定する．Δ' を $[a,b]$ の分割全体で動かしたときの $S(f,\Delta')$ の下限が S であるから，① より　$s(f,\Delta) \leqq S$　$\cdots\cdots$②

そして，Δ を $[a,b]$ の分割全体で動かしたときの $s(f,\Delta)$ の上限が s であるから，② より

$$s \leqq S$$

$$\therefore \quad s(f,\Delta) \leqq s \leqq S \leqq S(f,\Delta') \qquad \blacksquare$$

定理 5.1

$f:[a,b]$ で連続 $\implies$ $f:[a,b]$ で積分可能

証明

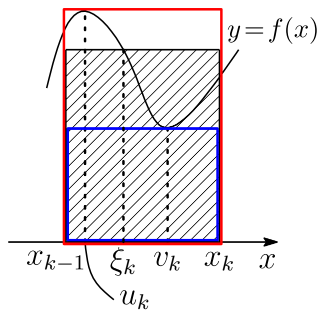
f を $[a,b]$ で連続とし，$\varepsilon>0$ を任意にとる．
f は $[a,b]$ で一様連続であるから

$$(\exists\delta>0)(\forall x,x'\in[a,b])\left[|x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right]$$

そこで，$|\Delta|<\delta$ となる任意の分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

と小区間の代表点の列 $\{\xi_k\}$ $(x_{k-1}\leqq\xi_k\leqq x_k)$ をとる．各 k に対して，f は $[x_{k-1},x_k]$ で連続であるから，Weierstrass の最大値定理より



最大値 $M_k=f(u_k)$，最小値 $m_k=f(v_k)$

を満たす $u_k,v_k\in[x_{k-1},x_k]$ が存在し

$$f(v_k)(x_k-x_{k-1})\leqq f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\leqq f(u_k)(x_k-x_{k-1})$$

となる．$1\leqq k\leqq n$ について加えれば

$$\sum_{k=1}^{n}f(v_k)(x_k-x_{k-1})\leqq R(f,\Delta,\{\xi_k\})\leqq\sum_{k=1}^{n}f(u_k)(x_k-x_{k-1})$$

また，f の $[a,b]$ 上の上積分 S は

$$\sum_{k=1}^{n}f(v_k)(x_k-x_{k-1})\leqq S\leqq\sum_{k=1}^{n}f(u_k)(x_k-x_{k-1})$$

を満たす．そして，各 k に対して

$$|u_k-v_k|\leqq x_k-x_{k-1}\leqq|\Delta|<\delta$$

であるから

$$\begin{aligned}|R(f,\Delta,\{\xi_k\})-S| &\leqq \sum_{k=1}^{n}f(u_k)(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}f(v_k)(x_k-x_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f(u_k)-f(v_k)\}(x_k-x_{k-1})\\ &< \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x_k-x_{k-1})\\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}R(f,\Delta,\{\xi_k\})=S$ となるから，f は $[a,b]$ で積分可能である． ∎

定理 5.2（Darboux の定理）

f を閉区間 $[a,b]$ で有界な実数値関数とする．f の下積分，上積分をそれぞれ s, S とすると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta) = s, \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta) = S$$

が成り立つ．

証明

$\varepsilon > 0$ を任意にとる．下限の特徴付けより

$$S \leqq S(f,\Delta_0) < S + \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす $[a,b]$ の分割 Δ_0 が存在する．そこで，Δ_0 の分点の個数を N とし

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2N(M-m)} > 0$$

とおく．

さて，$|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ を任意にとり，Δ_0 の分点と Δ の分点をあわせたものを分点とする分割 Δ' を考える．このとき，Δ' は Δ_0 の細分であるから，① と命題 5.1(1),(2) より

$$S \leqq S(f,\Delta') \leqq S(f,\Delta_0) < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \quad 0 \leqq S(f,\Delta') - S < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

また，Δ' は Δ の細分でもあるから，命題 5.1(1) の証明内の記号を用いると

$$\begin{aligned}
M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) &= M_k \sum_{j=1}^{l_k}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) - \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{l_k}(M_k - M_{k,j})(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \\
&\leqq \sum_{j=1}^{l_k}(M - m)(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \\
&= (M-m)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leqq (M-m)|\Delta| \\
&< (M-m)\delta \\
&= \frac{\varepsilon}{2N}
\end{aligned}$$

ただし，$l_k = 1$ すなわち，Δ の小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の内部に Δ_0 の分点がないときは

$$M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) = 0$$

である．そして，$l_k \neq 1$ を満たす k の個数は Δ_0 の分点の個数の N 以下であるから

$$
\begin{aligned}
0 \leqq S(f,\Delta) - S(f,\Delta') &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \right\} \\
&= \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq n \\ l_k \neq 1}} \left\{ M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j}(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \right\} \\
&< \frac{\varepsilon}{2N} \times N = \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

② + ③ より $0 \leqq S(f,\Delta) - S < \varepsilon$ となるから　$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta) = S$

$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta) = s$ も同様である．　∎

定理 5.3

f を閉区間 $[a,b]$ で有界な実数値関数とする．f の下積分，上積分をそれぞれ s, S とすると

$$f \text{ が } [a,b] \text{ で Riemann 積分可能} \quad \Longleftrightarrow \quad s = S$$

が成り立ち，このとき

$$\int_a^b f(x)dx = s = S$$

である．

証明

$[\Longrightarrow]$

f が $[a,b]$ で Riemann 積分可能であるとし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I$ とおく．

f の積分可能性より，$\varepsilon > 0$ を任意にとると，ある $\delta > 0$ が存在し，$|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と，任意の代表点の列

$$\{\xi_k\} \quad (x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ 1 \leqq k \leqq n)$$

に対して

$$-\varepsilon < R(f, \Delta, \{\xi_k\}) - I < \varepsilon \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ξ_k を $[x_{k-1}, x_k]$ の中で動かしたときの $f(\xi_k)$ の上限，下限がそれぞれ M_k, m_k であるから，Δ を固定して ξ_k を $[x_{k-1}, x_k]$ の中で動かしたときの $R(f, \Delta, \{\xi_k\})$ の上限，下限がそれぞれ $S(f, \Delta), s(f, \Delta)$ である．よって，① より

$$S(f, \Delta) - I \leqq \varepsilon, \quad -\varepsilon \leqq s(f, \Delta) - I$$

$$\therefore \quad I - \varepsilon \leqq s(f, \Delta) \leqq S(f, \Delta) \leqq I + \varepsilon$$

これと $s(f, \Delta) \leqq s \leqq S \leqq S(f, \Delta)$ とあわせれば

$$I - \varepsilon \leqq s \leqq S \leqq I + \varepsilon$$

となるが，$\varepsilon > 0$ は任意であるから　　$s = S$

$[\Longleftarrow]$

$s = S$ とし，この等しい値を I とおく．
任意の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と，任意の代表点の列

$$\{\xi_k\} \quad (x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ 1 \leqq k \leqq n)$$

に対して

$$s(f, \Delta) \leqq R(f, \Delta, \{\xi_k\}) \leqq S(f, \Delta)$$

が成り立つが，Darboux の定理より

$$\lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta) = s = I, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta) = S = I$$

であるから，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} R(f,\Delta,\{\xi_k\}) = I$

よって，f は $[a,b]$ で Riemann 積分可能である． ∎

定理 5.4

$[a, b]$ で連続な関数 f, g と定数 K に対して，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_a^b K dx = K(b-a)$

(2) $\displaystyle\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$　（複号同順）

(4) $f(x) \leqq g(x)\ (a \leqq x \leqq b)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$

(6) $p, q, r \in [a, b]$ に対して $\displaystyle\int_p^q f(x)dx = \int_p^r f(x)dx + \int_r^q f(x)dx$

※ Riemann 和を考えれば容易に確認できるから証明は省略する．

定理 5.5（積分の平均値の定理）

$f : [a, b]$ で連続

$\displaystyle\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する．

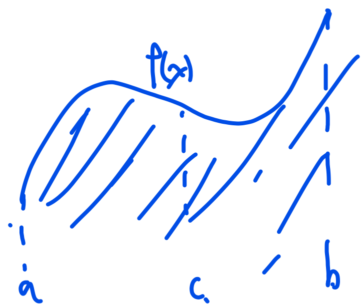
証明

f を $[a, b]$ で連続とすると，Weierstrass の最大値定理より f は $[a, b]$ で最大値 M と最小値 m をとる．このとき $m \leqq f(x) \leqq M\ (a \leqq x \leqq b)$ であるから，定理 5.4(1),(4) より

$$\int_a^b m dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a)$$

$$\therefore \quad m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq M$$



よって，中間値の定理より

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \quad \text{すなわち} \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

を満たす $c \in [a, b]$ が存在する．　∎

定理 5.6（微積分の基本定理）

$[a,b]$ で連続な関数 f に対して

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと，F は $[a,b]$ で微分可能で，$F'(x)=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が成り立つ．

証明

f を $[a,b]$ で連続とする．$x \in [a,b]$ を任意にとり，$h \neq 0$ を $x+h \in [a,b]$ となるようにとると，最初の定理 (6) より

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt \quad \cdots\cdots ①$$

そして，積分の平均値の定理より

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\{(x+h)-x\}=f(c)h \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす c が x と $x+h$ の間に存在するから，① と ② より

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(c)$$

となる．$h \to 0$ のとき $c \to x$ であるから，f の連続性より

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{c\to x} f(c)=f(x) \qquad \blacksquare$$

定義 5.2

I を区間とする．

(1) f を I で積分可能な関数とする．$a \in I$ を固定するとき I で定義された関数

$$\int_a^x f(t)dt \qquad (x \in I)$$

を f の不定積分という．

(2) I で定義された関数 f に対して，$F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$ を満たす関数 F を f の（I における）原始関数という．そして，f の原始関数（全体）を

$$\int f(x)dx$$

で表す．

※ F_1 と F_2 を f の（I における）原始関数とするとき

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

が成り立つから，平均値の定理より，$F_1 - F_2$ は I で定数である．よって，F を f の原始関数のひとつとするとき，f の任意の原始関数は定数 C を用いて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

で与えられる．この定数 C を積分定数という．

※微積分の基本定理は,「連続関数の不定積分は，その関数の原始関数になる」ということを述べているから，連続関数を扱う限りは不定積分と原始関数を区別しない習慣がある．なので，$\displaystyle\int f(x)dx$ を不定積分と言ってもそれほど問題ではない．

※不定積分が原始関数とはならない簡単な例として

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1 & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

がある．実際 f の不定積分は

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

となる（導出省略）が，これは 0 で微分可能でないから f の原始関数ではない．

定理 5.7（定積分の計算方法）

$[a, b]$ で連続な関数 f の原始関数のひとつを F とするとき，定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

で求められる．

証明

$[a, b]$ で連続な関数 f の原始関数のひとつを F とする．微積分の基本定理より，f の不定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は f の原始関数であるから，定数 C を用いて

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \qquad (a \leqq x \leqq b) \qquad \cdots\cdots①$$

とかける．$\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ であるから，① において $x = a$ とすると

$$0 = F(a) + C \qquad \therefore \quad C = -F(a)$$

これより

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

となるから，特に $x = b$ とすると

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

となる． ∎

※ $F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ または単に $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表すことが多く，定積分の計算では

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

のような書き方をする．

定理 5.8（置換積分）

f を $[a,b]$ で連続，g を $[\alpha,\beta]$ で C^1 級とする．さらに

$$g(t) \in [a,b] \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta), \quad g(\alpha)=a, \quad g(\beta)=b$$

であるとき，次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

証明

f を $[a,b]$ で連続，g を $[\alpha,\beta]$ で C^1 級とし

$$g(t) \in [a,b] \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta), \quad g(\alpha)=a, \quad g(\beta)=b$$

であるとする．f の原始関数のひとつを F とすると

$$\{F(g(t))\}' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

で，$f(g(t)) \cdot g'(t)$ は $[\alpha,\beta]$ で連続である．よって，$F(g(t))$ は連続関数 $f(g(t)) \cdot g'(t)$ の原始関数のひとつであるから

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \qquad \blacksquare$$

※計算するときは，次のように書くとよい．

$x = g(t)$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = g'(t), \qquad \begin{array}{c|ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & \alpha & \to & \beta \end{array}$$

であるから

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

定理 5.9（部分積分）

$f, g : [a, b]$ で C^1 級

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

証明

f, g が $[a, b]$ で C^1 級のとき

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

で，$f'g + fg'$ は $[a, b]$ で連続である．よって，fg は連続関数 $f'g + fg'$ の原始関数のひとつであるから

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

$f'g$，fg' も $[a, b]$ で連続であるから

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad \blacksquare$$

§2　逆三角関数の積分

プチ置換

f を区間 I で微分可能な関数とするとき，次が成り立つ．積分定数は省略．
下の 2 つは，置換するのではなく，積分公式として用いることが望ましい．

(1) $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

(2) $f(x) > 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1 \text{ は定数})$$

※ α が整数のときは，$f(x) > 0$ $(x \in I)$ でなくてもよい．

部分積分

f, g を区間 I で微分可能な関数とする．$f'g$ の原始関数が求められるときは

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad \begin{array}{ccc} f(x) & & g(x) \\ f'(x) & & g'(x) \end{array}$$

により fg' の原始関数が求められる．

☆部分積分のやり方
基本的に，被積分関数が積の形のときに用いる．
(1) 被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．
まずはやってみる．うまくいかなければ逆配置．経験をつむと，配置の仕方がわかってくる．

- $x^{\bullet}$ は「左上」に置くとよさそう．
- 「右下」には，原始関数が（簡単に）求まるものしか置けない．$\to$ log は「左上」？

(2) 「左下」と「右上」を埋める．

(3) 矢印の通りに部分積分を実行する．

※特殊形
(1) 「右下」を 1 として部分積分する．

(2) 左辺と同じ積分が右辺にも現れた場合，最後は方程式を解くようにして求める．

※テクニック
「左下」をみてから「右上」を定数で修正する．

例 5.1

(1) $\displaystyle\int \arcsin x dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int \arctan x dx$ を求めよ.

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)dx \\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \arcsin x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 1 \end{tikzcd}$$

※これは公式としてよい.

(2)
$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \arctan x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\ \frac{1}{1+x^2} & 1 \end{tikzcd}$$

※これは公式としてよい.

【問題】
次の定積分を求めよ.

三角関数の 逆関数の 変換 の 範囲

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(1) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} \arcsin x dx$

$= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} (x)' \arcsin x dx$

$= \left[x \arcsin x \right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} - \left[\sqrt{1-x^2} \right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}$

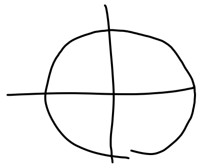
$= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3}\pi - \frac{1}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}$

$1 - \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x dx$

$\frac{1}{3}$

$= \left[x \arctan x \right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2) \right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3} \arctan(-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\log 4$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3} \arctan(-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\log\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3} \arctan(-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\log 3$

$\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\log 3$

$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{2}\log 3$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} (\arctan x)^{-4} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \left((\arctan x)^{-3}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(\arctan x)^{-3}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left((\arctan(\sqrt{3}))^{-3} - (\arctan(1))^{-3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{27}{\pi^3} - \frac{64}{\pi^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{-37}{\pi^3}\right)$$

$$= \frac{37}{3\pi^3}$$

$$\begin{array}{r} \overset{5}{\cancel{6}}4 \\ -27 \\ \hline 37 \end{array}$$

ヒント：$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx = \int_1^{\sqrt{3}} (\arctan x)^{-4} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$

として「プチ置換 (2)」で計算する．

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= -\frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left((\arccos x)^4\right)' dx$

$\cos x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$= -\frac{1}{4}\left[(\arccos x)^4\right]_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= -\frac{1}{4}\left\{\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^4 - \left(\arccos\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right)^4\right\}$

$= -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \left(\frac{5}{12}\pi\right)^4\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^4}{256} - \frac{5\times5\times5\times5\times\pi^4}{12\times12\times12\times12}\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(3\times3\times3\times3 - 5\times5\times5\times5)\pi^4}{12\times12\times12\times12}\right)$

$= \frac{\cancel{544}\,\pi^4}{4\times12\times12\times12\times12}$

$= \frac{17\pi^4}{2592}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\beta = \frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{3\pi+2\pi}{12}$

$= \frac{5}{12}\pi$

ヒント：$\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\arccos x)^3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

として「プチ置換 (2)」で計算する．

また，$\arccos\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ は $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を満たす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

を満たす α, β を見つければよい（有名角の組み合わせ）．

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} (4x^3+2x)\arctan x dx$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$

$\frac{1+3}{9}$

$= \displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} (x^4+x^2)' \arctan x \, dx$

$= \Big[(x^4+x^2)\arctan x\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} - \displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \overset{x^2}{\cancel{x^4+x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x^2}} dx$

$= 2\arctan(1) - \frac{4}{9}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} x^2 dx$

$\frac{\pi}{6}$

$= 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{9}\cdot\frac{5\pi}{\cancel{6}_3} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{10}{27}\pi - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{10}{27}\pi - \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$

$27\pi - 20\pi$

$= \frac{7}{54}\pi - \frac{3\sqrt{3}+1}{9\sqrt{3}}$

$= \frac{7}{54}\pi - \frac{9+\sqrt{3}}{27}$