第2講

2024年4月17日　　13:30

(例題)

$\mathbb{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbb{B} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ のとき、

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ をもとめよ.

解)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

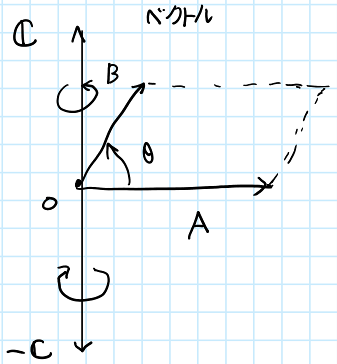
$$= -2\underbrace{\mathbf{i}^2}_{1} - \underbrace{\mathbf{k}^2}_{1}$$

$$= -2 - 1$$

$$= \underline{-3} \rightarrow \text{スカラー}$$

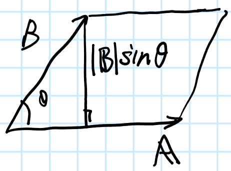
・ベクトル積(外積)

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \underset{\text{ベクトル}}{\mathbb{C}}$: $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ のベクトル積 $\mathbb{C}$



・向き: $\mathbb{A}$ から $\mathbb{B}$ に回転するときの右ねじの進む方向.

・大きさ: $|\mathbb{C}| = \underbrace{|\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta}$



$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ がつくる平行四辺形の面積に等しい

・$\mathbb{B} \times \mathbb{A} = -\mathbb{C}$

$\hookrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$

・$\mathbb{A} \parallel \mathbb{B} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow |\mathbb{C}| = 0$

$\Rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{O}$

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = 0$$

(例題) $\mathbb{A} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$、$\mathbb{B} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ のとき、

$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ をもとめよ.

(例題) $\mathbb{A} = 2\mathbb{i} - 7\mathbb{j} - 3\mathbb{k}$、$\mathbb{B} = 5\mathbb{i} - 2\mathbb{j} + 3\mathbb{k}$ のとき、

$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ を求めよ。

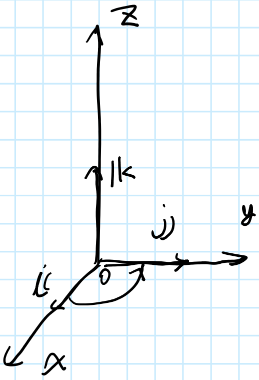
解)

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = (2\mathbb{i} - 7\mathbb{j} - 3\mathbb{k}) \times (5\mathbb{i} - 2\mathbb{j} + 3\mathbb{k})$$

$$= 10\,\mathbb{i}\times\mathbb{i} - 4\,\mathbb{i}\times\mathbb{j} + 6\,\mathbb{i}\times\mathbb{k}$$

$$- 35\,\mathbb{j}\times\mathbb{i} + 14\,\mathbb{j}\times\mathbb{j} - 21\,\mathbb{j}\times\mathbb{k}$$

$$- 15\,\mathbb{k}\times\mathbb{i} + 6\,\mathbb{k}\times\mathbb{j} - 9\,\mathbb{k}\times\mathbb{k}$$

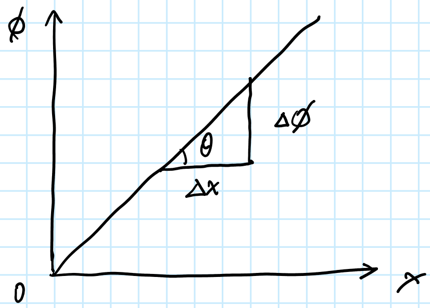


例) $\mathbb{i} \times \mathbb{j} = \mathbb{k}$

$$= -4\mathbb{k} - 6\mathbb{j} + 35\mathbb{k} - 21\mathbb{i} - 15\mathbb{j} - 6\mathbb{i}$$

$$= \underline{-27\mathbb{i} - 21\mathbb{j} + 31\mathbb{k}}$$ ベクトル量

1.4 ベクトル量と勾配(空間の曲がり)



勾配: $\dfrac{\Delta \phi}{\Delta x} = \tan\theta$

⇓

微分: $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta x} = \frac{d\phi}{dx}$ (勾配)

ϕ: 一定方向(x方向)についてのみ変化の場合: $\phi(x)$ 一変数x

3次元の任意方向(x, y, z)に変化の場合: $\phi(x, y, z)$ 〃 x, y, z

・x, y, z 方向の勾配を個別に知りたい

→ 例えば、y, z が変化しない状態でxが変化したときの勾配

$$\frac{d\phi}{dx} \neq \frac{d\phi(x,y,z)}{dx} \Rightarrow \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$: 偏微分

$$〃\ \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} : & \phi(x,y,z) \text{ の } x \text{ 方向についての勾配} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} : & \quad〃 \quad y \quad 〃 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} : & \quad〃 \quad z \quad 〃 \end{array}\right.$$

→ 勾配ベクトル $\mathbb{A} = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{偏微分演算子}} \phi$$

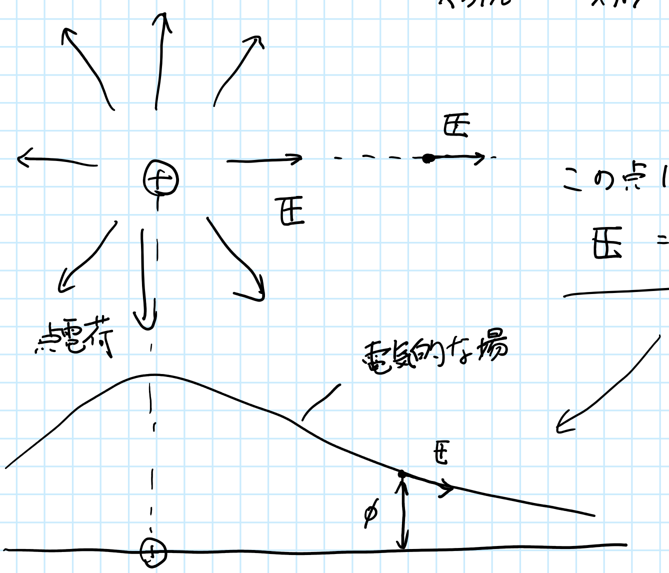
$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= \underbrace{\nabla}_{\text{ナブラ}} \phi = \text{grad}\,\phi$$

⇒ ϕ : $\mathbb{A}$ のポテンシャル

○静電場における例：電場と電位

$\mathbb{E}$ ベクトル　ϕ スカラー



この点における電位 ϕ

$\mathbb{E} = -\text{grad}\,\phi$

(例題)

$\phi(x,y,z) = 3x^2y + y^2z - 2y^3z^2$ の空間において、
点 $(-1, 2, -1)$ における勾配ベクトル $\mathbb{A}(=\text{grad}\,\phi)$ を求めよ。

解) $\mathbb{A} = \text{grad}\,\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)(3x^2y + y^2z - 2y^3z^2)$

解) $A = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(3x^2y + y^2z - 2y^3z^2)$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 6xy$、$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2 + 2yz - 6y^2z^2$、$\frac{\partial \phi}{\partial z} = y^2 - 4y^3z$

$(x, y, z) = (-1, 2, -1)$ を代入すると、

$$A = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= \underline{(-12, -25, 36)}$$

1.5 ベクトルの発散(わき出し)

・例えば、水、空気、電流などの一様な定常流体において
流体は3次元方向に流れでて、この速度ベクトル v を

$v = (v_x, v_y, v_z)$ とすると、

$\left(※\ v_x = v(x),\ v_x = \underbrace{v_x}_{x方向成分}\underbrace{(x, y, z)}_{位置} \right)$

$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}$: 流体のそれぞれ成分の変化量

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$: 流体の変化量・わき出し量

・ベクトル関数 $A(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ に対し、

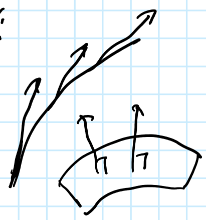
(発散) $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$　内積 ← 勾配と異なる

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x, A_y, A_z)$$

$$= \nabla \cdot A = \mathrm{div}\,A$$

1.6 ベクトルの積分

※



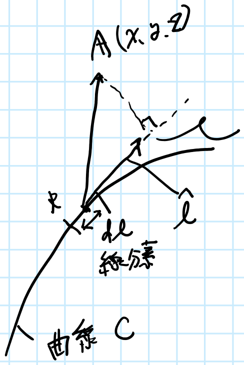
線をベクトルで表そうとすると 接線ベクトル
面を 〃 法線ベクトル

・線積分

・ある曲線に力が作用している

↳ その全部の力を知りたい。

↳ 細かく分けて足し合わせる。



$A_l = A \cdot \hat{l}$
$= |A| \cos\theta$

A：場において作用しているベクトル $A(x.y.z)$

↳ 場を表わすベクトル　例、流れ→力

$\hat{l}$：R点における接線の単位ベクトル

↳ 接線方向を表わすベクトル

$\int_C (\underbrace{A \cdot \hat{l}}) \, dl$ ：曲線 C に沿っての線積分

↳ $|A| |\hat{l}| \cos\theta = |A| \cos\theta$

$= \int_C |A| \cos\theta \, dl$

$A(x.y.z)$ ： $A = (A_x. A_y. A_z)$

$\int_C (A \cdot \hat{l}) dl = \int_C A \, d\boldsymbol{l} \; (\because \hat{l} \, dl = d\boldsymbol{l})$

$= \int_C (A_x. A_y. A_z) \cdot (dx. dy. dz)$

$= \int_{Cx} A_x \, dx + \int_{Cy} A_y \, dy + \int_{Cz} A_z \, dz$

(例題)

ベクトル $F = (x. y. z^2)$ が作用する場において

点P(1, 0, 1) から点Q(0, 1, 0) へ向かう線路について、

$\int_C F \, dl$ の線積分を求めよ。

解) $\int_C F \cdot dl = \int_C (x. y. z^2) \cdot (dx. dy. dz)$

$= \int_{Cx} x \, dx + \int_{Cy} y \, dy + \int_{Cz} z^2 \, dz$

$$= \int_{C_x} x\,dx + \int_{C_y} y\,dy + \int_{C_z} z^2\,dz$$

$$= \int_1^0 x\,dx + \int_0^1 y\,dy + \int_1^0 z^2\,dz$$

$$= \underline{-\frac{1}{3}}$$