応用数学1

第9回目

00:08

1.4 1階線形

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} + P(x)y}_{} = \underbrace{Q(x)}_{}y^0 \quad (y = y(x))$$

yの1次　　yの0次

(yにとっての定数項)

右辺 $Q(x) = 0$ のときの方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

を同次方程式といい、

右辺 $Q(x) \neq 0$ のときを非同次方程式という

を同次方程式といい、

右辺 $Q(x) \neq 0$ のときを非同次方程式という。

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \text{変数分離形}$$

<u>例題</u>

$y' - y = x$: 非同次方程式

例題

$y' - y = x$ ：非同次方程式

解）① まず同次方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\log|y| = x + c_1 \quad (c_1 : 積分定数)$$

$$y = \pm e^{c_1} e^x$$

$$= \underline{c e^x} \quad (c : 任意定数)$$

同次方程式の一般解

② 次に<u>定数変化法</u>：$c \to c(x)$

$y = c(x) e^x$ が与式（非同次方程式）を満たすように、$c(x)$ を求めてやればよい。

与式より、

$$\frac{d}{dx}\{c(x)e^x\} - c(x)e^x = x$$

与式より、

$$\frac{d}{dx}\left\{c(x)e^{x}\right\} - c(x)e^{x} = x$$

$$\left\{e^{x}\frac{d}{dx}c(x) + c(x)\underbrace{\frac{d}{dx}e^{x}}_{e^{x}}\right\} - c(x)e^{x} = x$$

$$0$$

$$\frac{d}{dx}c(x) = xe^{-x}$$

$$\int dc(x) = \int xe^{-x}dx$$

$$(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$\Big\downarrow \text{両辺積分}$$

$$\int dC(x) = \int x e^{-x} dx$$

$$(x e^{-x})' = e^{-x} - x e^{-x}$$

両辺積分

$$x e^{-x} = \int e^{-x} dx - \int x e^{-x} dx$$

$$\int dC(x) = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$C(x) = -x e^{-x} - e^{-x} + C_2 \quad (C_2\text{：積分定数})$$

ゆえに、

$$
\begin{aligned}
y &= c(x)e^{x} \\
&= \left(-xe^{-x} - e^{-x} + c_2\right)e^{x} \\
&= \underbrace{-x-1}_{\text{非同次方程式の特解(特殊解)}} + \underbrace{c_2 e^{x}}_{\text{同次方程式の一般解}}
\end{aligned}
$$

非同次方程式の一般解

演習

例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $y' + y = x$

演習

例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $y' + y = x$

(2) $y' + y = \sin x$

(3) $xy' + y = \sin x$

(4) $xy' + y = e^{x}$

(1)を本授業内で解いてみましょう。

(2)〜(4)はレポート課題とします。

解)

(1) $y' + y = x$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int dx$$

$$\log|y| = -x + c_1 \quad (c_1：積分定数)$$

$$y = \pm e^{-x+c_1}$$

$$= c e^{-x} \quad (c：任意定数)$$

② 定数変化法

$$c \rightarrow c(x)$$

解)

(1) $y' + y = x$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx$$

$$\log|y| = -x + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$y = \pm e^{-x+C_1}$$

$$= C e^{-x} \quad (C ; 任意定数)$$

② 定数変化法

$$C \to C(x)$$

$$y = \pm e^{-x+c_1}$$

$$= c\,e^{-x} \quad (c\text{;任意定数})$$

② 定数変化法

$$c \to c(x)$$

$$y = c(x)\,e^{-x}$$

与式は、

$$\frac{d}{dx}\left\{c(x)e^{-x}\right\} + c(x)e^{-x} = x$$

$$\left\{e^{-x}\frac{d}{dx}c(x) \underbrace{- c(x)e^{-x}\right\} + c(x)e^{-x}}_{0} = x$$

$$\frac{d}{dx}c(x) = xe^{x}$$

$$\int dc(x) = \int xe^{x}\,dx$$

$$(xe^{x})' = e^{x} + xe^{x}$$

$$xe^{x} = \int e^{x}dx + \underline{\int xe^{x}dx}$$

$$= xe^{x} - \int e^{x}dx$$

$$= xe^{x} - e^{x} + c \quad (c: 積分定数)$$

$$= xe^{x} - \int e^{x}\,dx$$

$$= xe^{x} - e^{x} + c \quad (c: 積分定数)$$

No.

ゆえに、

$$y = c(x)\,e^{-x}$$

$$= (xe^{x} - e^{x} + c)\,e^{-x}$$

$$= \underline{x - 1 + ce^{-x}}$$