**定理 7.8**（変数変換の公式）

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$D' \subset O$ を有界閉かつ可測，$N \subset D'$，$\mu(N) = 0$ とする．また，$u, v$ は $O$ で $C^1$ 級とし，変換

$$(*) \quad \begin{cases} x = u(s,t) \\ y = v(s,t) \end{cases} \quad ((s,t) \in O)$$

が $D' \setminus N$ で 1 対 1 かつ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ を満たすとする．このとき，$D'$ を $(*)$ でうつした集合 $D$ は有界閉かつ可測であり，$D$ で積分可能な $f$ に対して次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(u(s,t), v(s,t)) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| dsdt$$

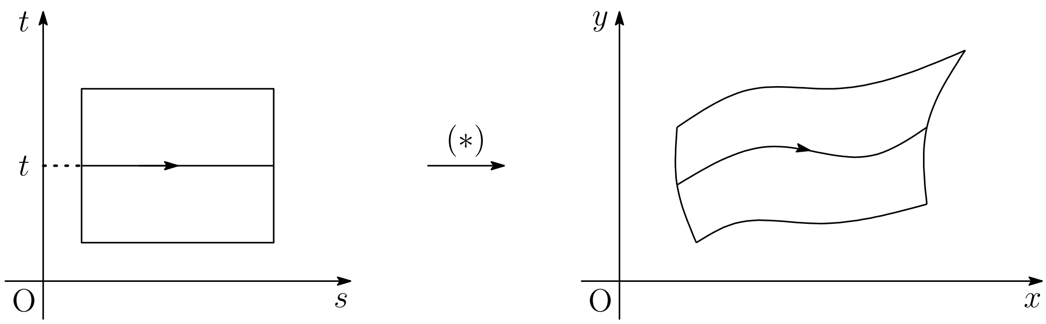
※ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} u_s(s,t) & u_t(s,t) \\ v_s(s,t) & v_t(s,t) \end{vmatrix}$ は $(*)$ の Jacobian である．

※変換と Jacobian について

(1) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \neq 0$ のとき，特に $\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，$t$ を固定し，$s$ を動かすとき

$$x = u(s,t), \quad y = v(s,t)$$

を満たす点 $(x,y)$ の軌跡は普通の曲線（特異点なし）を描く．



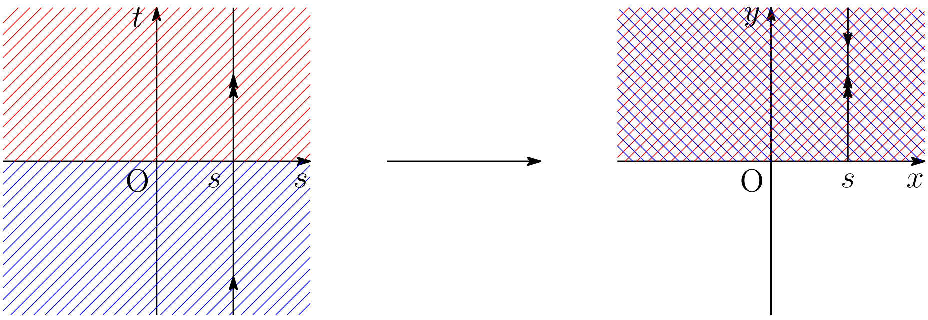
(2) Jacobian が 0 になるところで集合が折り返される可能性がある．

**例 7.8**

$$\begin{cases} x = s \\ y = t^2 \end{cases}$$ のとき

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = 2t$$

である．また，$s$ を固定し $t$ を動かすとき，点 $(x, y)$ は下図のように動く．



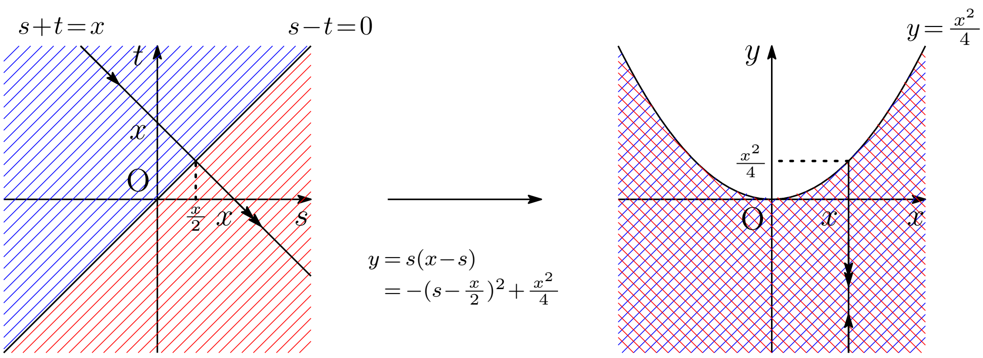

図より，点 $(x, y)$ は Jacobian が 0 になる直線 $t = 0$ をうつした直線 $y = 0$ のところで折り返されていることが分かる．

**例 7.9**

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = st \end{cases}$$ のとき

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & s \end{vmatrix} = s - t$$

である．また，$x$ を固定し $s, t$ を動かすとき，点 $(x, y)$ は下図のように動く．



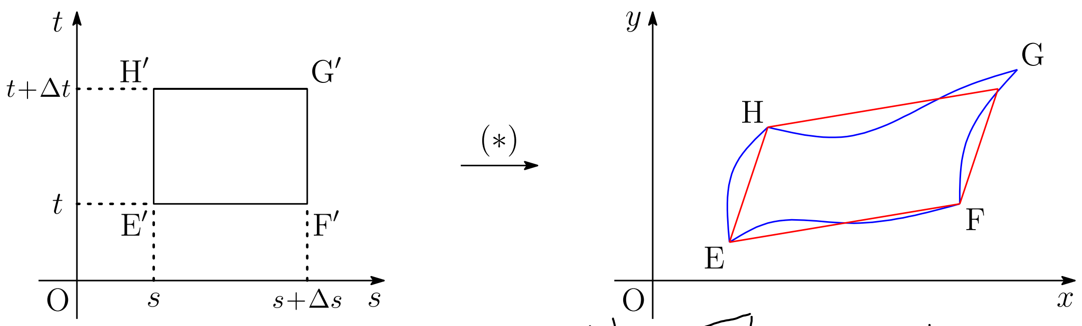

図より，点 $(x, y)$ は Jacobian が 0 になる直線 $s - t = 0$ をうつした曲線 $y = \dfrac{x^2}{4}$ のところで折り返されていることが分かる．

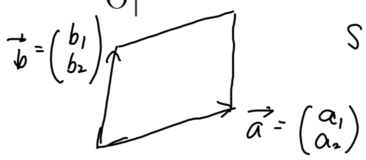
**定理 7.8 の略証**

$D'$ を座標軸に平行な直線で細かく分割し，分割した小長方形を代表して

$$\mathrm{E}'(s,t),\quad \mathrm{F}'(s+\Delta s,t),\quad \mathrm{G}'(s+\Delta s,t+\Delta t),\quad \mathrm{H}'(s,t+\Delta t)$$

を頂点とする長方形を考える．このとき，$\Delta s \fallingdotseq 0$, $\Delta t \fallingdotseq 0$ である．




$S = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$

長方形 E′F′G′H′ の面積を $\Delta S'$ とすると

$$\Delta S' = \Delta s \Delta t$$

また，長方形 E′F′G′H′ を $(*)$ でうつした集合（図の青線部とその内部）の面積を $\Delta S$ とすると，$\Delta S$ は $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ で張られる平行四辺形（図の赤線部とその内部）の面積で十分近似できる．ただし

$$\mathrm{E}(u(s,t),v(s,t)),\quad \mathrm{F}(u(s+\Delta s,t),v(s+\Delta s,t)),$$
$$\mathrm{G}(u(s+\Delta s,t+\Delta t),v(s+\Delta s,t+\Delta t)),\quad \mathrm{H}(u(s,t+\Delta t),v(s,t+\Delta t))$$

である．ここで，M-V-T より

$$u(s+\Delta s,t)-u(s,t)=u_s(s+\theta_1\cdot\Delta s,t)\Delta s$$

を満たす $\theta_1 \in (0,1)$ が存在し，同様に

$$v(s+\Delta s,t)-v(s,t)=v_s(s+\theta_2\cdot\Delta s,t)\Delta s$$
$$u(s,t+\Delta t)-u(s,t)=u_t(s,t+\theta_3\cdot\Delta t)\Delta t$$
$$v(s,t+\Delta t)-v(s,t)=v_t(s,t+\theta_4\cdot\Delta t)\Delta t$$

を満たす $\theta_2,\theta_3,\theta_4 \in (0,1)$ が存在するから

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \begin{pmatrix} u(s+\Delta s,t)-u(s,t) \\ v(s+\Delta s,t)-v(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s(s+\theta_1\cdot\Delta s,t)\Delta s \\ v_s(s+\theta_2\cdot\Delta s,t)\Delta s \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \begin{pmatrix} u(s,t+\Delta t)-u(s,t) \\ v(s,t+\Delta t)-v(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t(s,t+\theta_3\cdot\Delta t)\Delta t \\ v_t(s,t+\theta_4\cdot\Delta t)\Delta t \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \Delta S \fallingdotseq \left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}}\ \ \overrightarrow{\mathrm{EH}}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} u_s(s+\theta_1\cdot\Delta s,t)\Delta s & u_t(s,t+\theta_3\cdot\Delta t)\Delta t \\ v_s(s+\theta_2\cdot\Delta s,t)\Delta s & v_t(s,t+\theta_4\cdot\Delta t)\Delta t \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} u_s(s+\theta_1\cdot\Delta s,t) & u_t(s,t+\theta_3\cdot\Delta t) \\ v_s(s+\theta_2\cdot\Delta s,t) & v_t(s,t+\theta_4\cdot\Delta t) \end{pmatrix}\right| \Delta s\Delta t$$

$$\fallingdotseq \left|\det\begin{pmatrix} u_s(s,t) & u_t(s,t) \\ v_s(s,t) & v_t(s,t) \end{pmatrix}\right| \Delta s\Delta t = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| \Delta S'$$

よって，変換 $(*)$ の各場所における微小面積の拡大率が $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|$ であるから

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &\fallingdotseq \sum\sum f(x,y)\Delta S \\
&\fallingdotseq \sum\sum f(u(s,t),v(s,t))\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|\Delta S' \\
&\fallingdotseq \iint_{D'} f(u(s,t),v(s,t))\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|dsdt \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**例 7.10**

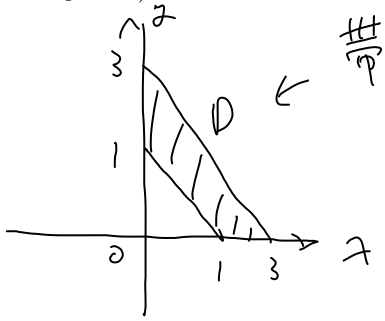
指定した変換を用いて次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\log(x+y)dxdy \quad (D: 1 \leqq x+y \leqq 3,\ -1 \leqq x-y \leqq 1)$

変換　$x+y=u,\ x-y=v$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy \quad (D: 1 \leqq x+y \leqq 3,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

変換　$x+y=u,\ y=uv$




帯状の
領域では
y=uv
とするとよい

**解答**

(1) $x+y=u,\ x-y=v$ とおくと

$1 \leqq x+y \leqq 3$ より　　$1 \leqq u \leqq 3$

$-1 \leqq x-y \leqq 1$ より　　$-1 \leqq v \leqq 1$

また，$x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2}$ であるから，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-y)^2\log(x+y)dxdy &= \iint_{D'} v^2 \log u \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv \quad (D': 1 \leqq u \leqq 3,\ -1 \leqq v \leqq 1) \\
&= \left(\int_1^3 \log u du\right) \times \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2}v^2 dv\right) \\
&= \Big[u\log u - u\Big]_1^3 \times \left[\frac{1}{6}v^3\right]_{-1}^1 \\
&= \{(3\log 3 - 1\cdot 0) - (3-1)\} \times \frac{1}{6}\{1-(-1)\} \\
&= \log 3 - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(2) $x+y=u,\ y=uv$ とおくと　　$x=u-y=u-uv$

$1 \leqq x+y \leqq 3$ より　　$1 \leqq u \leqq 3$

$x \geqq 0$ より $u(1-v) \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$1-v \geqq 0$　　$\therefore\quad v \leqq 1$

$y \geqq 0$ より $uv \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$v \geqq 0$

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v)+uv = u \neq 0$$

さらに

$$x^2+y^2 = (u-uv)^2+(uv)^2 = u^2\{(1-v)^2+v^2\} = u^2(1-2v+2v^2)$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy &= \iint_{D'} \frac{u^2(1-2v+2v^2)}{u^3}\cdot|u|dudv \qquad (D' : 1 \leqq u \leqq 3,\ 0 \leqq v \leqq 1) \\
&= \left(\int_1^3 du\right) \times \left\{\int_0^1 (1-2v+2v^2)dv\right\} \\
&= \Big[u\Big]_1^3 \times \left[v-v^2+\frac{2}{3}v^3\right]_0^1 \\
&= (3-1)\times\left(1-1+\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

※ $x+y=u,\ xy=v$ とおいてもできるが，かなり複雑な計算が必要になる．

**【問題】**

指定した変換を用いて次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)^2\sin(2x-y)dxdy \quad \left(D: 0 \leqq x+2y \leqq \pi,\ 0 \leqq 2x-y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad -\frac{5}{\cancel{2}6}$

変換　$x+2y=u,\ 2x-y=v$

(1) $x+2y=u$, $2x-y=v$ とおくと

$0 \leqq x+2y \leqq \pi$, $0 \leqq 2x-y \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$

また $x = \dfrac{u+2v}{5}$ $y = \dfrac{2u-v}{5}$ であるから Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{25} - \frac{4}{25} = -\frac{1}{5} \neq 0$$

$\left(D': 0 \leqq u \leqq \pi,\ 0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

よって

$$\iint_D (x+2y)^2 \sin(2x-y)dxdy = \iint_{D'} u^2 \sin v \left|-\frac{1}{5}\right| du\,dv$$
$$= +\frac{1}{5}\left(\int_0^\pi u^2 du\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\, dv\right)$$
$$= +\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^\pi \times \left[-\cos v\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \underline{+\frac{1}{15}\pi^3}$$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1+(x+y)^2}dxdy \quad (D : 1 \leqq x+y \leqq \sqrt{3},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

変換　$x+y=u,\ y=uv$

$x+y=u$、 $y=uv$ とおくと　$x=u(1-v)$

$1 \leqq x+y \leqq \sqrt{3}$ より　$1 \leqq u \leqq \sqrt{3}$

$x \geqq 0$ より　$u(1-v) \geqq 0$. $u \geqq 0$ より　$1 \geqq v$

$y \geqq 0$ より　$uv \geqq 0$　$u \geqq 0$ より　$v \geqq 0$

また Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u-uv+(uv) = u \neq 0$$

よって

$$\iint_D \frac{y}{1+(x+y)^2}dxdy = \iint_{D'} \frac{uv}{1+u^2}\cdot|u|dudv \quad \left(D' : \begin{array}{l} 1 \leqq u \leqq \sqrt{3} \\ 0 \leqq v \leqq 1 \end{array}\right)$$

$$= \iint_{D'} \frac{u^2v}{1+u^2}dudv$$

$$= \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}du\right)\left(\int_0^1 v\,dv\right)$$

$$= \left(\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{-1}{1+u^2}+1\right)du\right)\left(\int_0^1 v\,dv\right)$$

$$= \Big[u - \arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}} \times \Big[\frac{1}{2}v^2\Big]_0^1$$

$$= \left(\sqrt{3} - \arctan\sqrt{3} - 1 + \arctan 1\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{12}\pi\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{24}$$

(3) $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{x}{x+y}dxdy \quad (D : 1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

変換　$x = uv,\ x+y = v$

$x = uv$, $x+y = v$ とおくと　$y = v - uv = v(1-u)$

$1 \leqq x+y \leqq 2$ より　$1 \leqq v \leqq 2$

$x \geqq 0$ より　$uv \geqq 0$　$v \geqq 0$ より　$u \geqq 0$

$y \geqq 0$ より　$v(1-u) \geqq 0$　$v \geqq 0$ より　$1 \geqq u$

また、Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v(1-u) + uv = v \neq 0$$

よって

$$\iint_D \arctan\frac{x}{x+y}dxdy = \iint_{D'} \arctan\frac{u\cancel{v}}{\cancel{v}}\cdot|v|\,dudv \quad \left(D' : \begin{array}{l} 1 \leqq v \leqq 2 \\ 0 \leqq u \leqq 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\int_1^2 v\,dv\right)\left(\int_0^1 \arctan u\,du\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^2 \times \left[u\arctan u - 2\log(1+u^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\arctan 1 - 2\log 2\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{\pi}{4} - 2\log 2\right)$$

$$= \frac{3}{8}\pi - 3\log 2$$

**練習問題**

指定した変換を用いて次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy \quad \left(D : \frac{1}{2} \leqq x+y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right)$

変換　$x+y=u,\ y=uv$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+(x+y)^2}dxdy \quad (D : 3 \leqq x+y \leqq 7,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

変換　$x+y=u,\ y=uv$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy \quad (D : 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x)$

変換　$x=u,\ y=uv$

(4) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy \quad (D : 1 \leqq x+y \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

変換　$x=u+uv,\ y=u-uv$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}}dxdy \quad (D : 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x)$

変換　$x=u(1+v),\ y=v(1+u)\ (u \geqq 0,\ v \geqq 0)$

**解答**

(1) $x+y=u,\ y=uv$ とおくと　　$x=u-y=u-uv$

$\dfrac{1}{2} \leqq x+y \leqq 1$ より　　$\dfrac{1}{2} \leqq u \leqq 1$

$x \geqq 0$ より $u(1-v) \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$1-v \geqq 0$　　$\therefore\quad v \leqq 1$

$y \geqq 0$ より $uv \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$v \geqq 0$

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v)+uv = u \neq 0$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy &= \iint_{D'} e^{\frac{uv}{u}} \cdot |u|dudv \quad \left(D' : \frac{1}{2} \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1\right) \\
&= \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} udu\right) \times \left(\int_0^1 e^v dv\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \times \left[e^v\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) \times (e-1) \\
&= \frac{3}{8}(e-1)
\end{aligned}$$

(2) $x+y=u,\ y=uv$ とおくと　　$x=u-y=u-uv$

$3 \leqq x+y \leqq 7$ より　　$3 \leqq u \leqq 7$

$x \geqq 0$ より $u(1-v) \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$1-v \geqq 0$　　$\therefore \quad v \leqq 1$

$y \geqq 0$ より $uv \geqq 0$ で，$u>0$ であるから　　$v \geqq 0$

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v)+uv = u \neq 0$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{xy}{1+(x+y)^2}dxdy &= \iint_{D'} \frac{(u-uv)\cdot uv}{1+u^2}\cdot |u| dudv \quad (D' : 3 \leqq u \leqq 7,\ 0 \leqq v \leqq 1) \\
&= \left(\int_3^7 \frac{u^3}{1+u^2}du\right) \times \left\{\int_0^1 (v-v^2)dv\right\} \\
&= \left\{\int_3^7 \frac{u(1+u^2)-u}{1+u^2}du\right\} \times \left[\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3\right]_0^1 \\
&= \left\{\int_3^7 \left(u - \frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\right)du\right\} \times \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\log(1+u^2)\right]_3^7 \times \frac{1}{6} \\
&= \left\{\frac{1}{2}(49-9) - \frac{1}{2}(\log 50 - \log 10)\right\} \times \frac{1}{6} \\
&= \left(20 - \frac{1}{2}\log 5\right) \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{1}{12}\log 5
\end{aligned}$$

(3) $x = u,\ y = uv$ とおくと

$1 \leqq x \leqq 2$ より　　$1 \leqq u \leqq 2$

$0 \leqq y \leqq x$ より $0 \leqq uv \leqq u$ で，$u > 0$ であるから　　$0 \leqq v \leqq 1$

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u \neq 0$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{u^2+u^2v^2} \cdot |u| dudv \qquad (D' : 1 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 1) \\
&= \left( \int_1^2 \frac{1}{u} du \right) \times \left( \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv \right) \\
&= \Big[ \log u \Big]_1^2 \times \Big[ \arctan v \Big]_0^1 \\
&= (\log 2 - 0) \times \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \log 2
\end{aligned}$$

(4) $x = u + uv,\ y = u - uv$ とおくと

$1 \leqq x + y \leqq 4$ より　　$1 \leqq 2u \leqq 4$　　$\therefore\ \ \dfrac{1}{2} \leqq u \leqq 2$

$x \geqq 0$ より $u(1+v) \geqq 0$ で，$u > 0$ であるから　　$1 + v \geqq 0$　　$\therefore\ \ v \geqq -1$

$y \geqq 0$ より $u(1-v) \geqq 0$ で，$u > 0$ であるから　　$1 - v \geqq 0$　　$\therefore\ \ v \leqq 1$

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u(1+v) - u(1-v) = -2u \neq 0$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy &= \iint_{D'} e^{\frac{2uv}{2u}} \cdot |-2u|\,dudv \quad \left(D' : \frac{1}{2} \leqq u \leqq 2,\ -1 \leqq v \leqq 1\right) \\
&= \left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} 2u\,du\right) \times \left(\int_{-1}^{1} e^v\,dv\right) \\
&= \left[u^2\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \times \left[e^v\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(4 - \frac{1}{4}\right) \times \left(e - \frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{15}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

※（指数が複雑だから $\cdots$ ）$\dfrac{x-y}{x+y} = v$ とおくと，変形して　　$(1-v)x = (1+v)y$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1+v \\ 1-v \end{pmatrix}$ となるから，比を $u$ とすれば

$$x = u(1+v), \quad y = u(1-v)$$

が出てくる．このような変換を自分で定めるのは難しいので，すでに知られている変換をいろいろ試してみるとよい．

$x + y = u,\ x - y = v$ とおいてもできるので，余裕があれば解いてみるとよい．

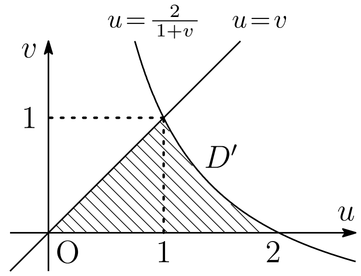
(5) $x = u(1+v),\ y = v(1+u)\ (u \geqq 0,\ v \geqq 0)$ とおく．

$0 \leqq x \leqq 2$ より $0 \leqq u(1+v) \leqq 2$ で，$1+v>0$ であるから　　$0 \leqq u \leqq \dfrac{2}{1+v}$

$y \geqq 0$ より $v(1+u) \geqq 0$ で，$1+u>0$ であるから　　$v \geqq 0$

$y \leqq x$ より $v(1+u) \leqq u(1+v)$　　$\therefore\ \ v \leqq u$

これらを満たす点 $(u,v)$ の存在範囲は図の斜線部（境界を含む）になるから




$D' : 0 \leqq v \leqq 1,\ v \leqq u \leqq \dfrac{2}{1+v}$

である．

また，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix} = (1+u)(1+v) - uv = u+v+1 \neq 0$$

さらに

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + 2(x+y) + 1 &= (u-v)^2 + 2(u+v+2uv) + 1 = (u+v)^2 + 2(u+v) + 1 \\ &= (u+v+1)^2\end{aligned}$$

よって

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{\sqrt{(u+v+1)^2}} \cdot |u+v+1|dudv$$

$$= \int_0^1 \left( \int_v^{\frac{2}{1+v}} du \right) dv = \int_0^1 \left( \frac{2}{1+v} - v \right) dv = \left[ 2\log(1+v) - \frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 = 2\log 2 - \frac{1}{2}$$

※ $x+y=u,\ x-y=v$ とおいてもできるが，複雑な計算が必要になる．