第4講

2024年5月10日　10:31

無理関数

$$w = f(z) = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

w：$u+iv$

⇕ 逆関数

$$z = w^n$$

ここで、オイラーの関係より

$$e^{2m\pi i} = \underbrace{\cos 2m\pi}_{1} + i\underbrace{\sin 2m\pi}_{0} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$= 1$$

よって、ある w_0 に対して、

※(2π×整数)の不定性

$$w_0^n = w_0^n \cdot e^{2m\pi i}$$

$$= w_0^n \cdot \overset{(m=0)}{e^0} = w_0^n \cdot \overset{(m=1)}{e^{2\pi i}} = w_0^n \cdot \overset{(m=2)}{e^{4\pi i}} = \cdots$$

$$= w_0^n \cdot e^0 = \left(\underbrace{w_0 e^{\frac{2\pi}{n} i}}\right)^n = \left(w_0 e^{\frac{4\pi}{n} i}\right)^n = \cdots$$

複素数の極座標表示の形

$re^{i\theta} \to (w_0 \cdot e^{\theta i})^n$

↓ $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると、

$$= \cdots = \left(w_0 \cdot e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i}\right)^n$$

$\left(\theta = 2\pi \text{ のとき } w_0 e^{\frac{2n\pi}{n} i}\right)$

$z = w^n$ は、

$w = w_0,\ w_0 e^{\frac{2\pi i}{n}},\ \cdots\cdots,\ w_0 e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i}$

の n 個に対して、同じ値 $z_0 = w_0^n$ をとる。

⇓ 逆関数

$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$ は、ある $z_0 = re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$

に対して、n 個の値 $w_0,\ w_0 e^{\frac{2\pi}{n} i},\ \cdots\cdots,\ w_0 e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i}$

$\left(w_0 = z_0^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}}\right)$ をとる。

↳ n 価の多価関数　※一意的に決まらない

↳ n価の多価関数　※一意的に決まらない

(例題)

$\sqrt[4]{1}$ を $re^{i\theta}$ の形にせよ。

・ $w = \sqrt[n]{z}$

$\underset{\sim}{z = re^{i\theta}} \Rightarrow w = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}}$

ポイント：極座標表示にする。

$w = f(z) = \sqrt[4]{1} = 1^{\frac{1}{4}} \quad (n = 4)$

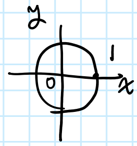
⇕ 逆関数

$z = w^4$

$= 1 \cdot e^{2m\pi i}$

ポイント

$z = 1$（複素数 $x + iy$）



$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 + 2m\pi \end{cases}$

（m：整数）

$z = 1 \cdot e^{2m\pi i}$（極座標表示）

$z = re^{i\theta}$ とすると

$re^{i\theta} = 1 \cdot e^{2m\pi i}$ より、

$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 2m\pi \end{cases}$

よって、

$w = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[4]{1}\, e^{\frac{i \cdot 2m\pi}{4}}$

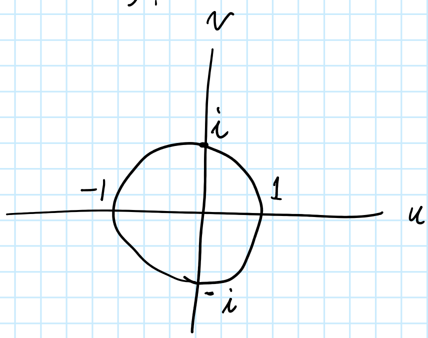
$= 1 \cdot e^{\frac{m\pi}{2} i} = e^{\frac{m\pi}{2} i}$

$0 \leqq \frac{m\pi}{2} < 2\pi$ のとき、 $n = 4$ より 4個の w があり、

$m = 0, 1, 2, 3$ を代入すると、

$w = e^0, e^{\frac{\pi}{2} i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3}{2}\pi i}$,

$= 1, i, -1, -i$



(演習)

問 例題にならって、次の複素数を $re^{i\theta}$ の形に表せ。

(1) $\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt{i}$

(3) $\sqrt{1-i}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+i}}$

| $w = \sqrt[n]{z}$ |

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+i}}$

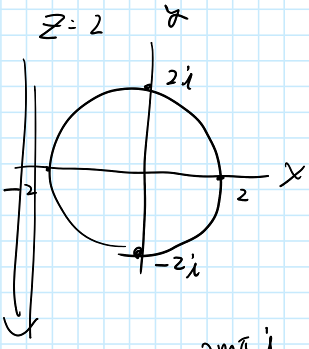
$$\left(\begin{aligned} &w = \sqrt[n]{z} \\ &\Updownarrow \\ &z = re^{i\theta} \\ &w = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} \end{aligned} \right)$$

(1) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$\Updownarrow$ 逆関数

$z = w^3$

$z = re^{i\theta}$ とすると　$re^{i\theta} = 2\cdot e^{2m\pi i}$



$z = 2\cdot e^{2m\pi i}$.

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = 0 + 2m\pi \end{cases}$$
(m：整数)

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = 2m\pi \end{cases}$$

よって

$w = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[3]{2}\cdot e^{\frac{2m\pi i}{3}}$

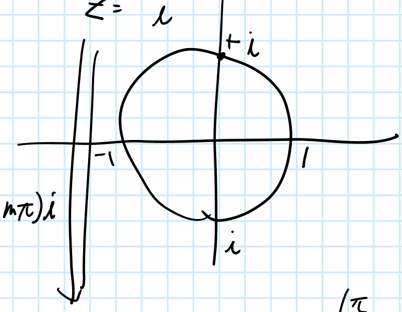
$n = 3$ より、3個の w があるので、$m = 0, 1, 2$ を代入すると、　$w = \sqrt[3]{2}e^0,\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{2}{3}\pi i},\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{4}{3}\pi i}$

(2) $\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$

$\Updownarrow$ 逆関数

$z = w^2$

$z = r\cdot e^{i\theta}$ とすると　$r\cdot e^{i\theta} = 1\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i}$



$z = 1\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i}$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \end{cases}$$
(m：整数)

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi = \left(\frac{1}{2} + 2m\right)\pi \end{cases}$$

よって

$w = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[2]{1}\cdot e^{\frac{i(\frac{1}{2}+2m)\pi}{2}}$

$= e^{(\frac{1}{4}+m)\pi i}$

$0 \leq (\frac{1}{4}+m)\pi < 2\pi$ のとき　$n = 2$ より　2個の w があるので

$m = 0, 1$ を代入すると

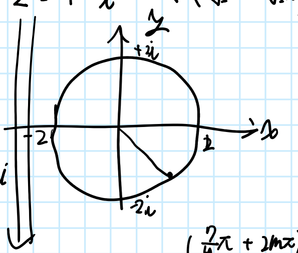
$w = e^{\frac{\pi}{4}i},\ e^{\frac{5}{4}\pi i}$

(3) $\sqrt{1-i} = (1-i)^{\frac{1}{2}}$

$\Updownarrow$ 逆関数

$z = w^2$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$



$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi \end{cases}$$
(m：整数)

$z = re^{i\theta}$ とすると　$r\cdot e^{i\theta} = 2\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)i}$

$z = 2\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)i}$

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi = \left(\frac{7}{4} + 2m\right)\pi \end{cases}$$

よって

$w = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[2]{2}\cdot e^{\frac{(\frac{7}{4}+2m)\pi i}{2}}$

よって

$$W = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[2]{2}\cdot e^{\frac{(\frac{7}{4}+2m)\pi i}{2}}$$
$$= \sqrt{2}\cdot e^{(\frac{7}{8}+m)\pi i}$$

$0 \leqq \frac{7}{8}+m < 2\pi$ のとき $n=2$ より 2個の W があるので

$m=0,1$ を代入すると、

$$W = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{8}\pi i},\quad \sqrt{2}\, e^{\frac{15}{8}\pi i}$$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

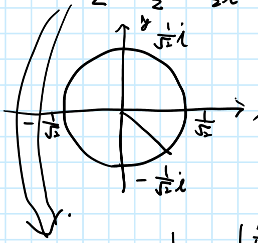
$\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\frac{2}{4}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+i}} = (1+i)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Updownarrow$ 逆関数

$z = w^2$

$z = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$



$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi \\ \quad (m: 整数) \end{cases}$$

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi + 2m\pi)i}$

$z = r\cdot e^{i\theta}$ とすると、　$r\cdot e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)i}$

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi = \left(\frac{7}{4}+2m\right)\pi \end{cases}$$

よって

$$W = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}} = \sqrt[2]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot e^{\frac{(\frac{7}{4}+2m)\pi i}{2}}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot e^{(\frac{7}{8}+m)\pi i}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{(\frac{7}{8}+m)\pi i}$$

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$0 \leqq \frac{7}{8}+m < 2\pi$ のとき、$n=2$ より 2個の W があるので

$m=0,1$ を代入すると、

$$W = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{\frac{7}{8}\pi i},\quad \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\, e^{\frac{15}{8}\pi i}$$