第3講

2023年9月28日　13:01

2.3 述語論理

(※) $\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{p}$ ならば $\underbrace{x^2 \geqq 0}_{q}$　$p \longrightarrow q$

p「$x \in \mathbb{R}$」

q「$x^2 \geqq 0$」

$p \to q$

Def 2.2.3

X : set (もっと大きくても ok)

このとき　$P(x)$が X 上の 述語 であるとは、

各 $x \in X$ 毎に、$P(x)$ が 命題 となることをいう。

また、X を P の議論領域という。

例 2.2.4

$P(x)$:「$x \in \mathbb{R}$」、$Q(x)$:「$x^2 \geqq 0$」とすると、

P, Q は $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)

上の述語となる。

$P(1)$:「$1 \in \mathbb{R}$」: T

$P(1+i)$:「$1+i \in \mathbb{R}$」: F

$Q(-1)$:「$(-1)^2 \geqq 0$」T

$Q(i)$:「$(i)^2 \geqq 0$」F

Rem 2.2.5

P, Q : 述語 (on X)

$\neg P(x)$、$P(x) \vee Q(x)$

$P(x) \wedge Q(x)$、$P(x) \longrightarrow Q(x)$

も述語 (on X)

2.3.1 量化記号

Def 2.2.6 (全称)

Def 2.2.6 (全称)

P : X上の述語

このとき

$\forall x\, P(x)$:「すべての $x \in X$ に対して、$P(x)$ は T」とおく.

$\forall x\, P(x)$: 命題

これは

$\forall x \in X .\ P(x)$

などとも書かれる

$\forall$ / forall

Def 2.2.7 (存在)

P : X上の述語

このとき.

$\exists x\, P(x)$「ある $x \in X$ に対して $P(x)$ は T」

とおく. $\exists x\, P(x)$: 命題

$\exists x \in X .\ P(x)$

と書くこともある.

$\exists$: \ exists

Th. 2.2.9

P : X上の述語のとき、

(i) $\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x\,(\neg P(x))$

(ii) $\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x\,(\neg P(x))$

例 2.3.0

$Q(x)$:「$x^2 \geqq 0$」

$\forall x \in \mathbb{R}\quad Q(x)$: T

$\forall x \in \mathbb{C}\quad Q(x)$: F

$\forall x \in \mathbb{C} .\ Q(x)$ を示すためには

$\neg(\forall x \in \mathbb{C} .\ Q(x))$: T を示す.

$\neg(\forall x \in \mathbb{C}.\ Q(x))$: T を示す

$$\parallel$$

$\exists x \in \mathbb{C}.\ \neg Q(x)$

つまり、$Q(x)$: F となる $x \in \mathbb{C}$ を具体的に見つければよい。
(反例を挙げる)

実際、$\underbrace{Q(i) : \text{「}i^2 \geqq 0\text{」}}_{\text{反例}}$: F

より、

「$\exists x \in \mathbb{C}.\ \neg Q(x)$」: T

2.3.2 含意と同値

Def 2.3.1 (含意)
implication

P, Q : X 上の述語

$P \Rightarrow Q = \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

とすると、$P \Rightarrow Q$: 命題

$P \Rightarrow Q$: T のとき、「P は Q を導く」といい、
- P は Q であるための十分条件
- Q は P であるための必要条件

$P \Rightarrow Q$: F であることを
$P \not\Rightarrow Q$ と書くこともある。

また、

$Q \Rightarrow P$、$\neg P \Rightarrow \neg Q$、$\neg Q \Rightarrow \neg P$
逆　　裏　　対偶

より、

$$P \Rightarrow Q = \neg Q \Rightarrow \neg P$$

∵

$$P \Rightarrow Q = \forall x\,(P(x) \to Q(x))$$
$$= \forall x\,(\neg Q(x) \to \neg P(x))$$
$$= \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Rem 2.3.2

$x \in X$ のとき、 $P(x)$: T or F

もし、 $P(x)$: F ならば、 $P(x) \longrightarrow Q(x)$: T より、

「$P(x) = T$ となる x に対して、 $Q(x) = T$」が示せれば、

$P \Rightarrow Q$: T がわかる。

他方、 $P \Rightarrow Q$: F を示すには、

$\underbrace{\neg (P \Rightarrow Q)}$: T を示す

$\neg [\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x))]$

$\exists x \; \neg (P(x) \longrightarrow Q(x))$

ここで、

$\neg (P(x) \longrightarrow Q(x))$

$= \neg (\neg P(x) \vee Q(x))$

$= P(x) \wedge (\neg Q(x))$

より、

$\exists x . \neg (P(x) \rightarrow Q(x))$

$= \exists x (P(x) \wedge (\neg Q(x)))$

よって

「$P(x)$: T から $Q(x)$: F である x」

を1つ見つければよい。

Rem 2.3.3

X 上の述語 P, Q に対して、 $P \Rightarrow Q$: T というのは、

$P(x)$: T となる $x \in X$ に対して、常に $Q(x)$: T ということ。

例えば、

X : $[a, b]$ 上の $\mathbb{R}$ の全体

$P(f)$: f は $[a, b]$ で微分可能

$Q(f)$: f は $[a, b]$ 上で連続

$R(f)$: f は $[a, b]$ で最大値、最小値をとる。

とすると $P \Rightarrow Q$: T $Q \Rightarrow R$: T

R(f)： f は [a, b] で最大値、最小値をとる。

とすると、 $P \Rightarrow Q$ ：T 、 $Q \Rightarrow R$ ：T

最大値・最小値定理のこと

これより、 $P \Rightarrow R$ ：T

つまり、 f ： [a, b] 上 微分可能ならば、

f は [a, b] 上で最大値、最小値をとる。

⇝ ロルの定理の証明にも見られる。

Def 2.3.6 (同値)

P, Q ： X 上の述語

$\underbrace{P \Leftrightarrow Q}_{\text{命題}} := (P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow P)$

$P \Leftrightarrow Q$ ：T のとき 「P と Q は同値」といわれる。

例 2.3.7

$\mathbb{R}$ 上の述語

P(x)：「 $(x+2)(x-1) = 0$ 」

Q(x)：「 $x = -2$ 、または $x = 1$ 」

このとき

$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ ：T

(:) P(x)：T のとき、

$\underbrace{(x+2)(x-1) = 0}$ 条件として使える。

$\therefore x = -2$ 、 or $x = 1$

$\therefore Q(x)$ ：T　　$\therefore P \Rightarrow Q$ ：T

逆に

Q(x)：T のとき

$x = -2$ 、 or $x = 1$

$(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore P(x)$ ：T　　$\therefore P \Leftrightarrow Q$ ：T

$\therefore Q \Rightarrow P$ ：T

$\therefore Q \Rightarrow P : T$

Rem 2.38

$P \Rightarrow Q : T$ であることを
$P \Rightarrow Q$（が成り立つ）
$P \Leftrightarrow Q : T$ であることを
$P \Leftrightarrow Q$（が成り立つ） などという.

$(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$a_n \to a$ as $n \to \infty$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 . \exists N \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 ,$
$|a_n - a| < \varepsilon$

$\neg (\forall \varepsilon > 0 . \exists N \in \mathbb{N} . \forall n \geq N , |a_n - a| < \varepsilon)$

$= \exists \varepsilon > 0 \ \neg (\exists N \in \mathbb{N} . \forall n \geq N . |a_n - a| < \varepsilon)$

$= \exists \varepsilon > 0 . \forall N \in \mathbb{N} . \neg (\forall n \geq N . |a_n - a| < \varepsilon)$

$= \exists \varepsilon > 0 . \forall N \in \mathbb{N} . \exists n \geq N . \neg (|a_n - a| < \varepsilon)$

$= \exists \varepsilon > 0 . \forall N \in \mathbb{N} . \exists n \geq N , |a_n - a| \geq \varepsilon$

3. 集合 たいくつ

4. 集合族と直積集合

5. 写像
二項関係