

問 1. 次のベクトルの組は 1 次独立か 1 次従属か調べよ. ここで $a \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{と置く}$$

$$C_1 A + C_2 B + C_3 C = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2 + C_3 \\ C_1 + 3C_2 + C_3 \\ C_1 + C_2 + aC_3 \end{bmatrix}$$

これが 0 となるのは

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 3C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + aC_3 = 0 \end{cases} \quad \text{と解く}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1-a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3-6a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3-5a \end{bmatrix}$$

ここで $a \in \mathbb{R}$ より

$$\begin{bmatrix} 1/0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3-5a \end{bmatrix} \text{ は } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ と簡約化することが可能なため}$$

このベクトルは 1 次独立