2023 年度 線形代数学 2 課題 4

学科 AM科 学籍番号 s22303 b 氏名 栗山 淳

問 1. 次のベクトル空間 W の基と次元を求めよ.

$$W = \{f \in \mathbb{R}[x]_3; f(1) = f(-1), f'(1) = f'(-1)\}$$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$f(1) = f(-1)$ より

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a_1 + a_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 + a_3 = 0 \quad \cdots ①$$

また

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$f'(1) = f'(-1)$ より

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = a_1 - 2a_2 + 3a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2 = 0 \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_0 = c_1$

$a_3 = c_2$ とおく

$$a_1 = -c_2$$

$$f(x) = c_1 - c_2 x + c_2 x^3$$

$$= c_1 + c_2(x^3 - x)$$

$$W = \langle 1, x^3 - x \rangle$$

$\{1, x^3 - x\}$ は W の基 $\quad \dim W = 2$