§5　広義積分

1．有限区間の広義積分

f が $[a,b)$ で連続，b で非有界であるとする．$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ が有限確定するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい，値を

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \left(= \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx\right)$$

で定める．

※他の場合も広義積分が同様に定義される．

- $f:(a,b]$ で連続，a で非有界のときは

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

- $f:(a,b)$ で連続，a,b で非有界のときは

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- $c\in(a,b)$ として，$f:[a,c),(c,b]$ でそれぞれ連続，c で非有界のときは

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx\right\}$$

上で $\varepsilon=\varepsilon'$ とした場合を Cauchy の主値積分 という．定義から，広義積分が存在すれば Cauchy の主値積分も存在し値は等しいことはすぐわかる．一方，Cauchy の主値積分が存在しても広義積分は存在するとは限らない．実際，$0<\varepsilon<1,\ 0<\varepsilon'<1$ のとき

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon'}^{1}\frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \Big[\log|x|\Big]_{\varepsilon'}^{1} = \log\varepsilon - \log\varepsilon' = \log\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

であるから

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon'}^{1}\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \quad \text{は存在しない}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 0$$

よって，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ は存在しないが，Cauchy の主値積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ は存在し値は 0 である．

例 5.5

次の広義積分を求めよ．(1) において $\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0\ (\alpha > 0)$ は用いてよい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad (0<\alpha<1)$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad (\alpha \geqq 1)$

解答

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[x\log x - x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\{(1\cdot 0 - \varepsilon\log\varepsilon) - (1-\varepsilon)\} = -1$

※ $\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0\ (\alpha>0)$ は L'Hospital の定理より簡単に示せる．

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = \lim_{x\to+0} \underbrace{\frac{\log x}{x^{-\alpha}}}_{\frac{-\infty}{\infty}\text{の不定形}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\arcsin x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\arcsin(1-\varepsilon) - \frac{\pi}{6}\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(3) $0<\alpha<1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1-0}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

(4) $\alpha>1$ のとき

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1-\infty}{1-\alpha} = \infty$$

また

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(0-\log\varepsilon) = -(-\infty) = \infty$$

よって，$\alpha \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ は収束しない．

定理 5.10（広義積分の収束判定法）

f が $[a,b)$ で連続，b で非有界であるとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束

$$\iff \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall p,q\in[a,b))\left[b-\delta<p,q<b \ \Rightarrow\ \left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon\right] \quad \cdots\cdots(*)$$

証明

f が $[a,b)$ で連続，b で非有界であるとする．f の不定積分

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a\leqq x<b)$$

を考えると

$$\int_a^b f(x)dx \text{ が収束} \qquad \iff \qquad \lim_{x\to b-0}F(x) \text{ が収束}$$

であり，$p,q\in[a,b)$ に対して

$$\int_p^q f(x)dx=F(q)-F(p)$$

であるから，F に Cauchy の収束判定法（定理 3.2 の結果を片側極限で考えたもの）を適用すればよい． ∎

※ $(*)$ は

$$p,q\to b-0 \text{ のとき } \int_p^q f(x)dx\to 0$$

ということである．

定理 5.11

f が $[a,b)$ で連続，b で非有界であるとき

(1) $(\exists M>0)(\exists\alpha\in(0,1))(\forall x\in[a,b))\left[|f(x)|\leqq\dfrac{M}{(b-x)^\alpha}\right]$

または

(2) $(\exists\alpha\in(0,1))\left[\displaystyle\lim_{x\to b-0}(b-x)^\alpha f(x) \text{ が収束}\right]$

が成り立てば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する．

証明

f が $[a,b)$ で連続，b で非有界であるとする．

(1) が成り立つとき，$a\leqq p<q<b$ として

$$\left|\int_p^q f(x)dx\right| \leqq \int_p^q |f(x)|dx \leqq \int_p^q \frac{M}{(b-x)^\alpha}dx = \left[-\frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_p^q$$
$$= \frac{M}{1-\alpha}\left\{(b-p)^{1-\alpha} - (b-q)^{1-\alpha}\right\} \to 0 \qquad (p, q \to b-0)$$

よって，広義積分の収束判定法の $(*)$ が成り立つから $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する．

(2) が成り立つとき，$(b-x)^\alpha f(x)$ は b の近くで有界となるが，$[a,b)$ で連続であるから，結局 $[a,b)$ で有界となるので

$$|(b-x)^\alpha f(x)| \leqq M \qquad (x \in [a,b))$$

を満たす定数 $M>0$ が存在する．よって，(1) が成り立つから $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する． ∎

例 5.6

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p>0,\ q>0)$$

を Euler の Beta（ベータ）関数という．

収束することの証明

$f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ とおく．

(i) $p \geqq 1,\ q \geqq 1$ のとき

f は $[0,1]$ で連続であるから $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は普通の定積分である．

(ii) $p \geqq 1,\ 0<q<1$ のとき

f は $[0,1)$ で連続，1 で非有界であり

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{1-q}f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^{p-1} = 1, \qquad 0<1-q<1$$

よって，前の定理 5.11(2) が成り立つから $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は収束する．

(iii) $0<p<1,\ q \geqq 1$ のとき

f は $(0,1]$ で連続，0 で非有界であり

$$\lim_{x\to +0} x^{1-p}f(x) = \lim_{x\to +0}(1-x)^{q-1} = 1, \qquad 0<1-p<1$$

よって，(ii) と同様に $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は収束する．

(iv) $0<p<1,\ 0<q<1$ のとき

$c \in (0,1)$ を任意にとると，(ii), (iii) と同様に $\displaystyle\int_0^c f(x)dx$ と $\displaystyle\int_c^1 f(x)dx$ はともに収束する．
よって

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^c f(x)dx + \int_c^1 f(x)dx$$

も収束する． ∎

例 5.7

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx = -\pi \log 2$$

証明

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log(\sin x) = \lim_{x \to +0} \left(\sqrt{x} \log x + \sqrt{x} \log \frac{\sin x}{x} \right) = 0, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{x \to \pi - 0} \sqrt{\pi - x} \log(\sin x) = \lim_{t \to +0} \sqrt{t} \log\{\sin(\pi - t)\} = \lim_{t \to +0} \sqrt{t} \log(\sin t) = 0, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1$$

であるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ と $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)dx$ はともに収束する．よって

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)dx$$

も収束する．また，広義積分の値は

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right\} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log(\sin 2x) - \log 2\right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \\
&= \int_0^{\pi} \log(\sin t) \cdot \frac{1}{2}dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx - \frac{\pi}{2}\log 2
\end{aligned}$$

より $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx = -\pi \log 2$ ∎

【問題】

次の広義積分を求めよ．(3) ～ (5) では，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{\alpha} \log x = 0$ $(\alpha > 0)$ を用いてよい．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{e^3} x^{-\frac{1}{3}} \log x dx$

(4) $\displaystyle\int_0^e \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{e}\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(\log x)^2dx = \int\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)'(\log x)^2dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 2\int(x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 4\int\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(\log x)dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 4\int\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)'(\log x)dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 8x^{\frac{1}{2}}(\log x) + 8\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 8x^{\frac{1}{2}}(\log x) + 16x^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{e}\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2 - 8x^{\frac{1}{2}}(\log x) + 16x^{\frac{1}{2}}\right]_{\varepsilon}^{e}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{2e^{\frac{1}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} + 16e^{\frac{1}{2}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\log\varepsilon)^2 + 8\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\log\varepsilon) - 16\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= 10e^{\frac{1}{2}}$$

$$= \underline{10\sqrt{e}}$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^3}dx$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{(x+1)^3}dx$$

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^3}dx = \int (x+1)^{-3}\log x\,dx = \int\left(-\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\right)'\log x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\log x + \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\log x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$ とすると

(右辺) $\displaystyle = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + Bx^2 + Bx + Cx}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$$

よって $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$ なので

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\log x + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\log x + \frac{1}{2}\left(\log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{(x+1)^3}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{2}(x+1)^{-2}\log x + \frac{1}{2}\left(\log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\varepsilon+1)^{-2}\underbrace{\log\varepsilon - \frac{1}{2}\log\varepsilon}_{まとめる} + \frac{1}{2}\log(\varepsilon+1) - \frac{1}{2(\varepsilon+1)}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} + \frac{\log\varepsilon - (\varepsilon+1)^2\log\varepsilon}{2(\varepsilon+1)^2} + \frac{1}{2}\log(\varepsilon+1) - \frac{1}{2(\varepsilon+1)}\right)$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon = \lim_{\gamma\to+\infty}\frac{1}{\gamma}\log\frac{1}{\gamma} = \lim_{\gamma\to+\infty}\frac{-\log\gamma}{\gamma} = 0}$$