§5　陰関数定理とその応用

定理 6.9（陰関数定理）

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^1 級，$(a,b) \in O$ とする．
$f(a,b)=0,\ f_y(a,b) \neq 0$ ならば，ある $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ が存在して，次が成り立つ．

(1) $|x-a|<\delta_1$ を満たす任意の x に対して，$|y-b|<\delta_2$ かつ $f(x,y)=0$ を満たす y が一意に存在する．

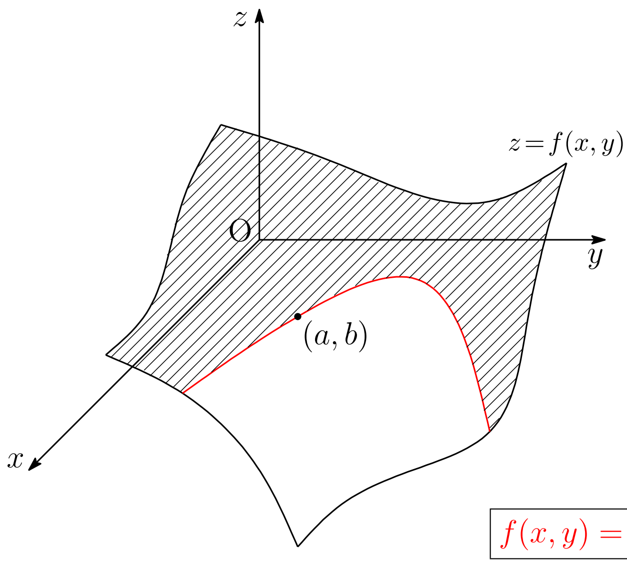
(2) (1) において，x に対して一意に存在する y を対応させる関数 φ が定まり，φ は定義域 $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ で C^1 級で

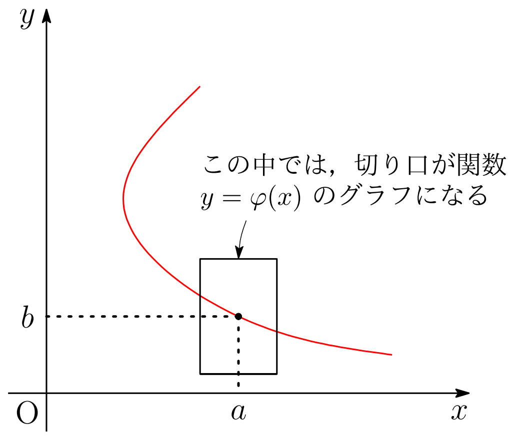
$$\begin{cases} f(x,\varphi(x)) = 0 \\ \varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす．

※ $y=\varphi(x)$ を (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数という．また，f が C^2 級ならば，f_x, f_y, φ は C^1 級なので $(*)$ の右辺も C^1 級である．よって，φ' は C^1 級となるから，φ は C^2 級である．同様に，x と y の役割を交換した主張も成り立つ．

※陰関数のイメージ

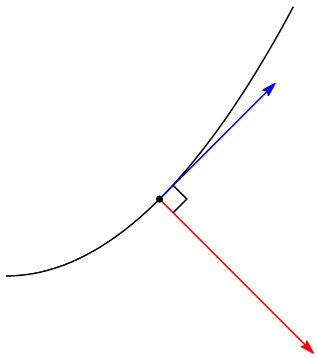




$\boxed{f(x,y)=0：曲面\ z=f(x,y)\ の\ xy\ 平面による切り口}$

※結局は φ は微分可能であるから，応用上は $f(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分した

$$f_x(x,\varphi(x))\cdot 1+f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0 \quad \cdots\cdots(**)$$



より $(*)$ を得ればよい．また，$(**)$ は

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi' \end{pmatrix}=0$$

となるから，$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi' \end{pmatrix}$$

である．$f(a,b)=0,\ f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を図形 $f(x,y)=0$ の特異点というので

「図形 $f(x,y)=0$ に特異点がなければ，普通の曲線になっている」

ということがわかる．また，$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ を f の勾配といい $\mathrm{grad} f$ で表すが，$\mathrm{grad} f$ が零ベクトルでなければ，$\mathrm{grad} f$ は曲線 $f(x,y)=0$ の各点において法線方向を向いている．$\mathrm{grad} f$ の曲面 $z=f(x,y)$ に対しての図形的意味についてはここでは省略するが

微分積分学 II
宮島静雄　著　　（共立出版）

の 50 ページから 57 ページに詳しい解説があるので，興味があれば読んでみるとよい．

定理 6.9 の証明

定理の仮定が成り立つとする．

$f_y(a,b) \neq 0$ より $f_y(a,b) > 0$ または $f_y(a,b) < 0$ であるが，どちらでも同じであるから $f_y(a,b) > 0$ であるとして示す．

（Step 1）関数 φ の存在

f は C^1 級より f_y は連続であるから，ある $\delta_2 > 0$ が存在して

$$I = \{(x,y) \mid |x-a| \leqq \delta_2,\ |y-b| \leqq \delta_2\}$$

とすると

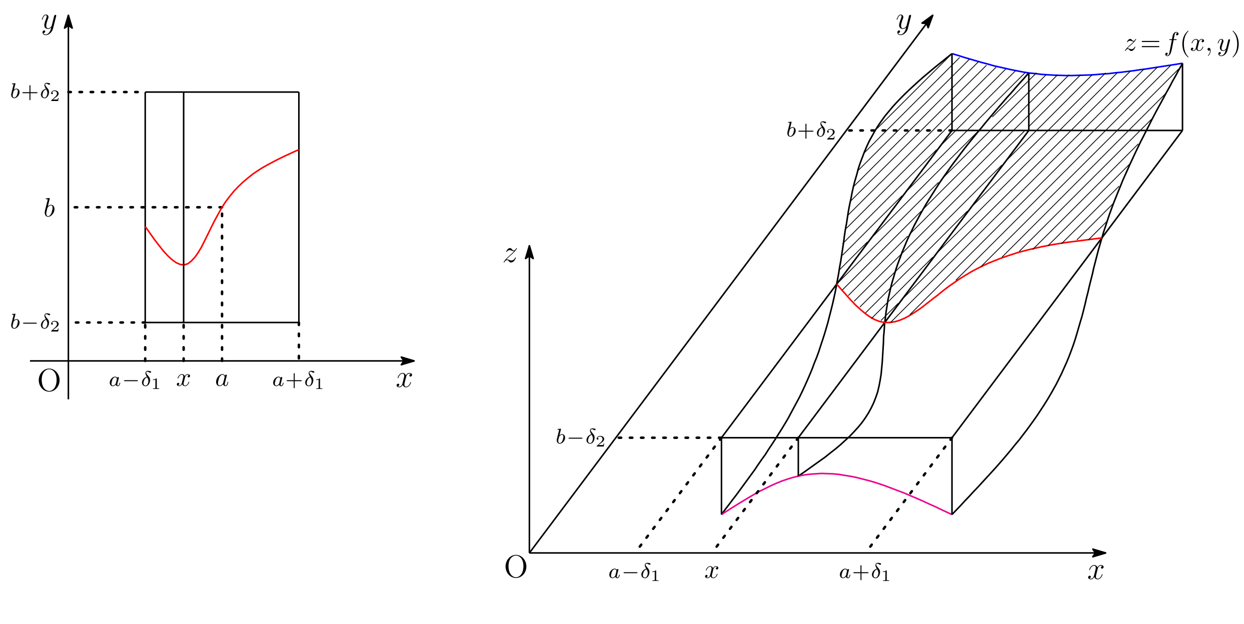
$$\begin{cases} I \subset O \\ (x,y) \in I \implies f_y(x,y) \geqq \dfrac{1}{2} f_y(a,b) > 0 \quad \cdots\cdots ① \end{cases}$$

が成り立つ．これから特に I 上では f は y について狭義単調増加となるので

$$f(a, b-\delta_2) < 0 < f(a, b+\delta_2)$$

となるが，f は連続であるから，ある $\delta_1 > 0$ $(\delta_1 \leqq \delta_2)$ が存在して

$$|x-a| < \delta_1 \implies f(x, b-\delta_2) < 0 \quad かつ \quad f(x, b+\delta_2) > 0$$



が成り立つ．このとき，$x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$ を満たす x を任意にとり固定すると，y の関数 $f(x,y)$ は連続で狭義単調増加であるから，$f(x,y)=0$ を満たす $y \in (b-\delta_2, b+\delta_2)$ が一意に存在する．よって，$x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$ に対して一意に存在する $y \in (b-\delta_2, b+\delta_2)$ を対応させる関数 φ が定まり

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in (a-\delta_1, a+\delta_1))$$

が成り立つ．

(Step 2) φ の連続性
f は C^1 級より f_x は連続であるから，Weierstrass の最大値定理より

$$|f_x(x,y)| \leqq M \quad ((x,y)\in I) \quad \cdots\cdots②$$

を満たす定数 $M>0$ が存在する．
さて，$x\in(a-\delta_1, a+\delta_1)$ を任意にとり，$h\neq 0$ を $x+h\in(a-\delta_1,a+\delta_1)$ となるようにとる．
また，$k=\varphi(x+h)-\varphi(x)$ とおき

$$F(t)=f(x+th,\varphi(x)+tk) \quad (0\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$F'(t)=f_x(x+th,\varphi(x)+tk)\cdot h+f_y(x+th,\varphi(x)+tk)\cdot k$$

であるから，M-V-T より

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)(1-0) \quad \text{すなわち}$$

$$f(x+h,\varphi(x)+k)-f(x,\varphi(x))=(hf_x+kf_y)(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．そして，φ の定め方から

$$f(x,\varphi(x))=0, \quad f(x+h,\varphi(x)+k)=f(x+h,\varphi(x+h))=0$$

であるから

$$(hf_x+kf_y)(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)=0 \quad \cdots\cdots③$$

である．よって，① ～ ③ より

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|=|k|=\left|-\frac{f_x(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)}{f_y(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)}h\right|\leqq\frac{M}{\frac{1}{2}f_y(a,b)}|h|\to 0 \quad (h\to 0)$$

となるから，φ は $(a-\delta_1,a+\delta_1)$ で連続である．

(Step 3) φ' の存在と連続性
$h\to 0$ のとき $x+\theta h\to x$ で，Step 2 の過程より $k\to 0$ であるから $\varphi(x)+\theta k\to\varphi(x)$ である．
よって，③ と f_x, f_y の連続性より

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\frac{f_x(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)}{f_y(x+\theta h,\varphi(x)+\theta k)}\to-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \quad (h\to 0)$$

$$\therefore \quad \varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

また，右辺は連続であるから，左辺の φ' も連続である． ∎

定理 6.10（陰関数の極値判定法）

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^2 級，$(a,b) \in O$ とし，$f(a,b)=0$，$f_y(a,b) \neq 0$ をみたすとする．このとき，(a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とすると，次が成り立つ．

(1) $\varphi(a)(=b)$ が（広義の）極値 $\implies$ $f_x(a,b)=0$

(2) $f_x(a,b)=0$ のとき

(i) $\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0 \implies \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極大値

(ii) $\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} < 0 \implies \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極小値

証明

陰関数定理より，(a,b) の近傍で

$$f(x,\varphi(x))=0 \quad \cdots\cdots ①$$

であり，a の近傍で φ は C^2 級である．

(1) ① の両辺を x で微分すると

$$f_x(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore \quad f_x(a,b)+f_y(a,b)\varphi'(a)=0$$

よって，$\varphi(a)(=b)$ が（広義の）極値であるとき，$\varphi'(a)=0$ より　$f_x(a,b)=0$

(2) ② の両辺を x で微分すると

$$\{f_{xx}(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_{xy}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\}$$
$$+\{f_{yx}(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_{yy}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\}\cdot\varphi'(x) + f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x) = 0$$

$$\therefore \quad f_{xx}(a,b)+2f_{xy}(a,b)\varphi'(a)+f_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2+f_y(a,b)\varphi''(a)=0$$

$f_x(a,b)=0$ のとき $\varphi'(a)=0$ であるから

$$f_{xx}(a,b)+f_y(a,b)\varphi''(a)=0$$

$$\therefore \quad \varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}$$

よって

(i) $\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0$ ならば $\varphi''(a)<0$ であるから，$\varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極大値である．

(ii) $\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} < 0$ ならば $\varphi''(a)>0$ であるから，$\varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極小値である． ∎

※φ が a の近傍で C^2 級であるから，$\varphi''(a)<0$ より a の近傍で $\varphi''<0$ となる．よって，a の近傍で φ は上に凸であり，さらに $\varphi'(a)=0$ であるから，$\varphi(a)$ は（狭義の）極大値である．$\varphi''(a)>0$ のときも同様．

☆陰関数の極値の求め方

$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求め，$\dfrac{f_{xx}(x,y)}{f_y(x,y)}$ の符号で判定する．

例 6.6

$3x^2+2y^2+2xy-14x-8y+3=0$ が定める陰関数の極値を求めよ．

解答

$f(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-14x-8y+3$ とおくと

$$f_x(x,y)=6x+2y-14,\ f_y(x,y)=4y+2x-8,\ f_{xx}(x,y)=6$$

まず，$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求める．

$f_x(x,y)=0$ より　　$y=-3x+7$

$f(x,y)=0$ へ代入して

$$3x^2+2(-3x+7)^2+2x(-3x+7)-14x-8(-3x+7)+3=0$$

$$3x^2+18x^2-84x+98-6x^2+14x-14x+24x-56+3=0$$

$$15x^2-60x+45=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

よって　　$(x,y)=(1,4),\ (3,-2)$

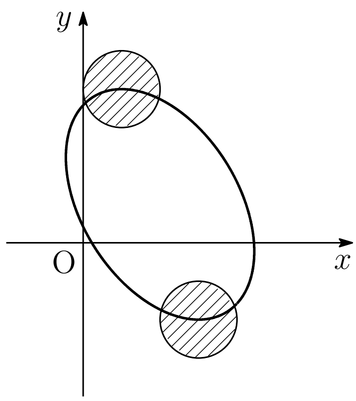
- $f_y(1,4)=10\neq 0$ より，$(1,4)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(1,4)}{f_y(1,4)}=\dfrac{6}{10}>0$ より　　$x=1$ のとき $y=4$ は極大値

- $f_y(3,-2)=-10\neq 0$ より，$(3,-2)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(3,-2)}{f_y(3,-2)}=\dfrac{6}{-10}<0$ より　　$x=3$ のとき $y=-2$ は極小値

※ $f(x,y)=0$ の概形を太線で示す．斜線部でそれぞれ陰関数が定まる．



【問題】

$f(x,y)=0$ が定める陰関数の極値を求め，次の形式で解答欄に記入せよ．ただし，解答欄は多めに作ってある．

$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ の解の 1 組を $(x,y)=\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ とする．

$f_y\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)=\boxed{\text{ウ}}\neq 0$ より，$\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．そして，$\dfrac{f_{xx}\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)}{f_y\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)}=\boxed{\text{エ}}$ であるから

$x=\boxed{\text{ア}}$ のとき $y=\boxed{\text{イ}}$ は極 $\boxed{\text{オ}}$ 値

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^3+9$

ア	イ	ウ	エ	オ
-1	-2	13	$\frac{2}{13}$	大

$f_x(x,y)=2x-y$, $f_y(x,y)=-x+3y^2$, $f_{xx}(x,y)=2$

$f(x,y)=0$, $f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求める

$f_x(x,y)=0$ より $2x-y=0 \iff y=2x$

$f(x,y)=0$ に代入して

$x^2-x(2x)+(2x)^3+9=0$

$8x^3-x^2+9=0$

$(x+1)(8x^2-9x+9)=0$

よって $(x,y)=(-1,-2)$

$f_y(-1,-2)=1+12=13\neq 0$ より $(-1,-2)$ の近傍で $f(x,y)=0$ をみたす陰関数が存在する.

$\dfrac{f_{xx}(-1,-2)}{f_y(-1,-2)}=\dfrac{2}{13}>0$ より $x=-1$ のとき $y=-2$ は極大値

(2) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y + 1$

ア	イ	ウ	エ	オ
-1	0	-1	-2	小
$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	2	大

$\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2$

$\frac{7}{3}$

$f_x(x,y) = 2x - y + 2$、$f_y(x,y) = -x + 2y - 2$

$f_{xx}(x,y) = 2$

$f(x,y) = 0$、$f_x(x,y) = 0$ をみたす (x,y) を求める

$f_x(x,y) = 0$ より $2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$

これを $f(x,y) = 0$ に代入すると　　$-\frac{2}{3} + \frac{6}{3}$

$$x^2 - x(2x+2) + (2x+2)^2 + 2x - 2(2x+2) + 1 = 0$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + \cancel{4x^2} + \cancel{8x} + \cancel{4} + \cancel{2x} - \cancel{4x} - \cancel{4} + 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$\begin{matrix} 1 & & 1 & \to 3 \\ 3 & \times & 1 & \to 1 \end{matrix}$

$$(x+1)(3x+1) = 0$$

$x = -1, -\frac{1}{3}$ より $(x,y) = (-1, 0)$ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$f_y(-1,0) = -1 \neq 0$ より $(x,y) = (-1,0)$ の近傍に $f(x,y) = 0$ を定める陰関数が存在する。

$\dfrac{f_{xx}(x,y)}{f_y(-1,0)} = -2 < 0$ より $x = -1$ のとき $y = 0$ は極小値

$f_y\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 1 \neq 0$ より $(x,y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ の近傍に $f(x,y) = 0$ の定める陰関数が存在する。 $\dfrac{f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)}{f_y\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)} = 2 > 0$ より $x = -\frac{1}{3}$ のとき $y = \frac{4}{3}$ は極大値

(3) $f(x,y) = x^4 + 2x^2 + y^3 - y$

ア	イ	ウ	エ	オ
0	0	−1	−4	小
0	−1	2	2	大
0	1	2	2	大

$f_x(x,y) = 4x^3 + 4x$ 、 $f_y(x,y) = 3y^2 - 1$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4$

$f_x(x,y) = 0$ 　$f(x,y) = 0$ をみたす (x,y) をもとめる

$f_x(x,y) = 0$ より

$4x^3 + 4x = 0 \iff 4x(x^2+1) = 0$ より

$x = 0$

これを $f(x,y) = 0$ に代入して

$y^3 - y = 0$

$y(y^2 - 1) = 0$

$y(y+1)(y-1) = 0$

$y = 0, -1, 1$ より $(0,0)\ (0,-1)\ (0,1)$

$f_y(0,1) = 2 \neq 0$ より

$\dfrac{f_{xx}(0,1)}{f_y(0,1)} = 2 > 0$ より

$x=0$ のとき $y=1$ は極大値

$f_y(0,0) = -1 \neq 0$ より 　$(x,y) = (0,0)$ の近傍に $f(x,y)=0$ を定める陰関数が存在する。

$\dfrac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)} = -4 < 0$ より 　$x=0$ のとき $y=0$ は極小値

$f_y(0,-1) = 2 \neq 0$ より 　$(x,y) = (0,-1)$ の近傍に $f(x,y)=0$ を定める陰関数が存在する

$\dfrac{f_{xx}(0,-1)}{f_y(0,-1)} = 2 > 0$ より 　$x=0$ のとき $y=-1$ は極大値

(4) $f(x,y) = (x-y)^3 + y^2 - 3x - 2$

ア	イ	ウ	エ	オ
0	-1	-5	$-\frac{6}{5}$	小
5	4	5	$\frac{6}{5}$	大
-1	0	-3	2	大
2	3	3	-2	小

$f_x(x,y) = 3(x-y)^2 - 3$. $f_y(x,y) = -3(x-y)^2 + 2y$

-3 .

$f_{xx}(x,y) = 6(x-y)$

$-3+8$

$f(x,y) = 0$. $f_x(x,y) = 0$ をみたす (x,y) を求める

$f_x(x,y) = 0$ より

$3(x-y)^2 - 3 = 0$

-3

$(x-y)^2 = 1$

$-3+6$

$(x-y) = \pm 1$

(i) $y = x-1$ のとき

$f(x,y) = 0$ に代入して

$1 + (x-1)^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

$x = 0, 5$ より $(0,-1)(5,4)$

(ii) $y = x+1$ のとき

$f(x,y) = 0$ に代入して

$-1 + (x+1)^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = -1, 2$ より $(-1,0)(2,3)$

【問題】

$f(x,y) = 8y^3 + 6x^2y - 12xy^2 - 12y^2 + 6xy + 6y - 1$　について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $f(x,y) = 0$ の特異点を求めよ．

(2) (1) で求めた特異点以外の $f(x,y) = 0$ で定まる陰関数の極値を求めよ．

$f_y(0,-1) = -5 \neq 0$

$\dfrac{f_{xx}(0,-1)}{f_y(0,-1)} = \dfrac{6}{-5} < 0$ より $x=0$で $y=-1$は極小値

$f_y(5,4) = 5 \neq 0$

$\dfrac{f_{xx}(5,4)}{f_y(5,4)} = \dfrac{6}{5} > 0$ より　$x=5$で $y=4$は極大値

$f_y(-1,0) = -3 \neq 0$

$\dfrac{f_{xx}(-1,0)}{f_y(-1,0)} = \dfrac{-6}{-3} = 2 > 0$ より　$x=-1$で $y=0$ は極大値

$f_y(2,3) = 3 \neq 0$

$\dfrac{f_{xx}(2,3)}{f_y(2,3)} = \dfrac{-6}{3} = -2 < 0$ より　$x=2$で $y=3$は極小値