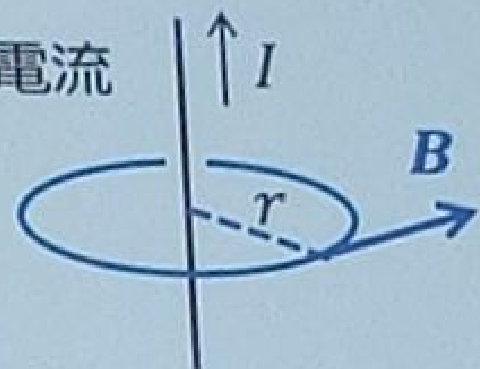
材料の物理2　きまりごと

- 手書きでノートをとってください（学習効果を上げるため）
- 毎回簡単な演習をします．（演習式 / 探索式）
- 課題はLETUS提出（〆切は木曜13:00）
- 提出内容に応じて加点することがあります．
- 節目に小テストをします．
- 期末試験は小テストから＋独自問題
- 期末試験ではバッサリ切ります．
- 総合得点は120点満点で付けています．

7.4　ビオ・サバールの法則

(J. Biot)　(F. Savart)

直線電流



磁場の強さ

電流 ⇄ 磁場

定式化
一般化

任意の電流に拡張　Goal

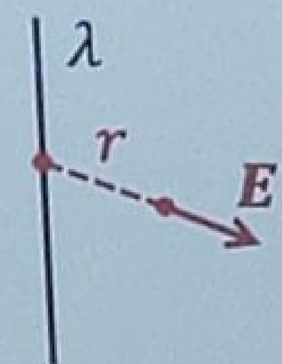
$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

(μ_0:真空の透磁率)
$4\pi \times 10^{-7}$ N・A^{-2}

Iに比例, rに反比例

類似の形式

電荷密度



(線電荷が作る)
電場の強さ

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

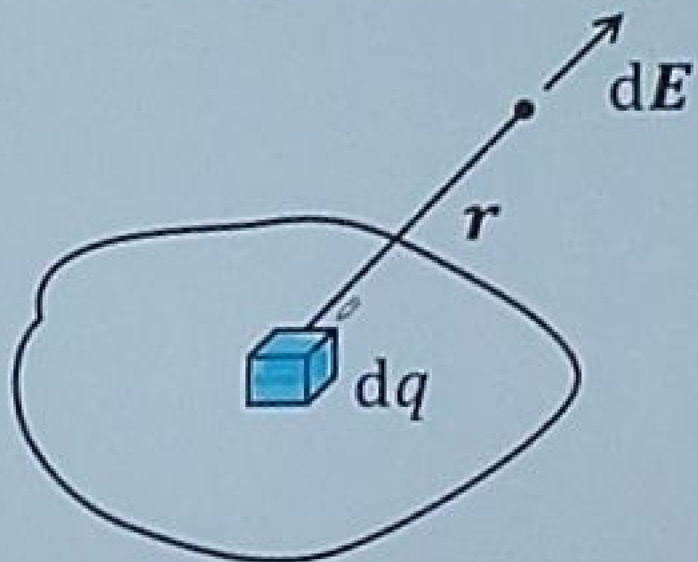
(ε_0:真空の誘電率)
8.854×10^{-2} C^2/(N・m^2)

λに比例, rに反比例

(電荷密度)

まず電場の場合を考える

微小電荷$\mathrm{d}q$が作る電場



$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{r^3}$$

$$\downarrow$$

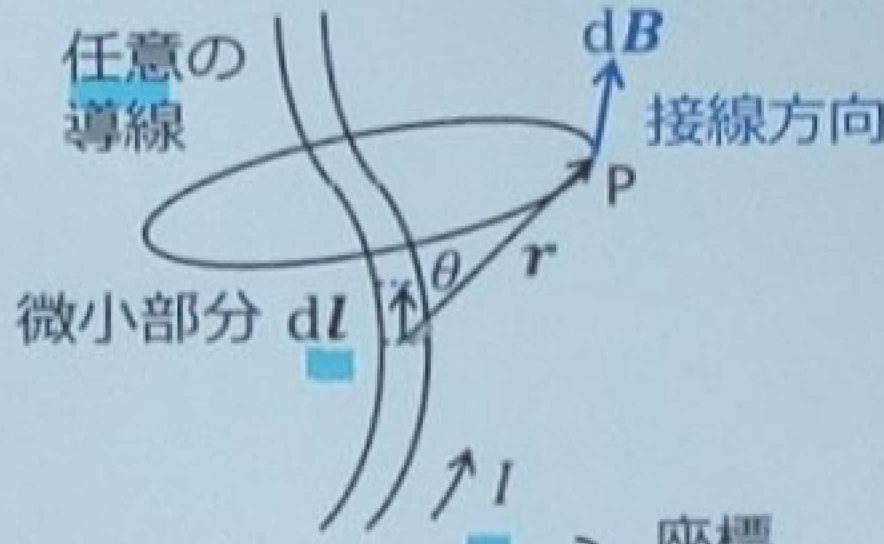
$$\mathrm{d}E \propto \frac{\mathrm{d}q}{r^2}$$

材料の物理1

ガウス則

積

磁場も同様に考える



座標変換

微小導線 d*l*が作る磁場

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

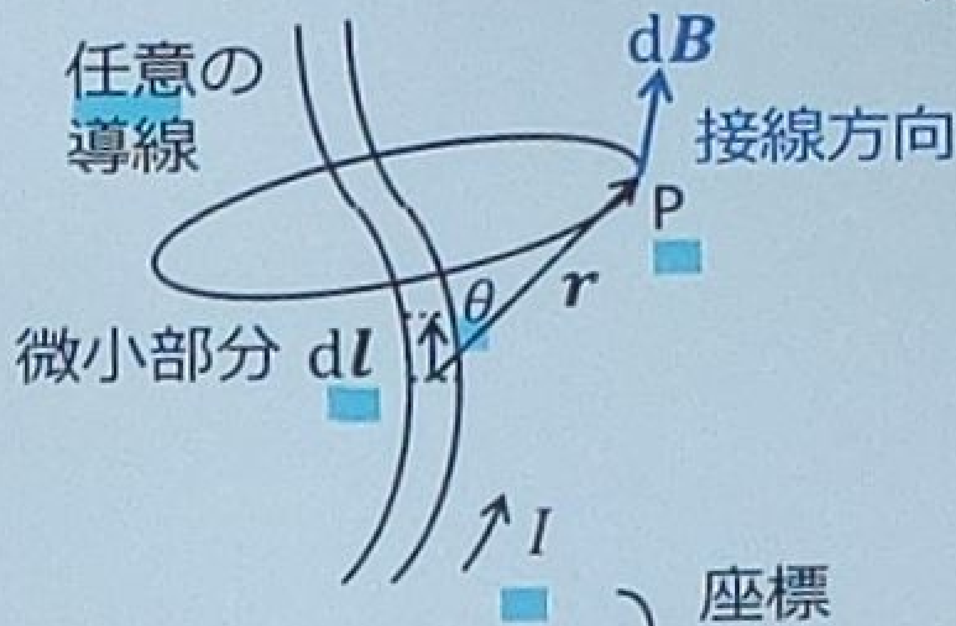
ベクトル表記

外積

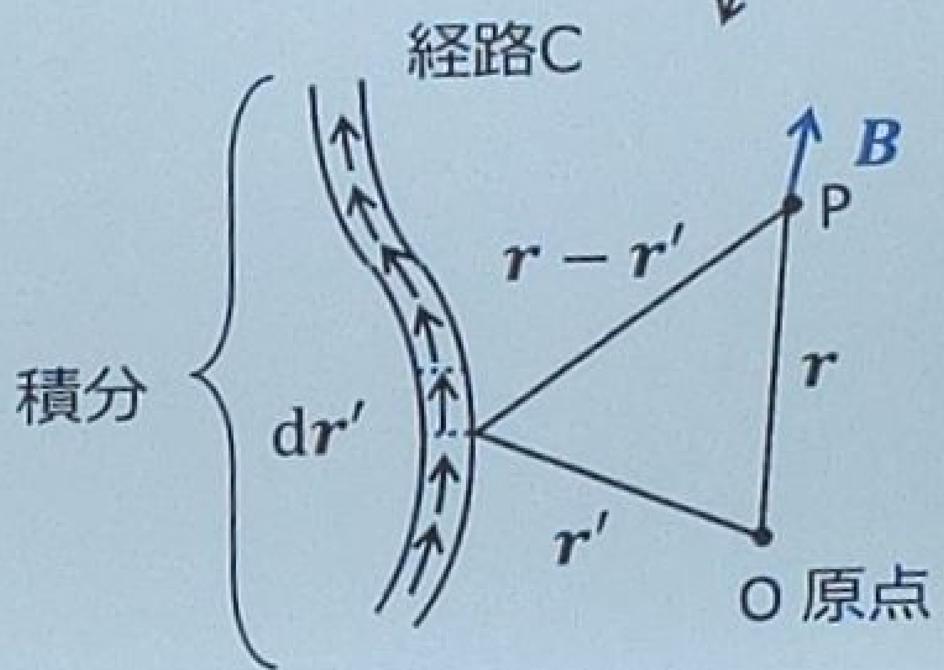
$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

ビオ・サバールの法則

磁場も同様に考える



座標変換



微小導線 d$\boldsymbol{l}$が作る磁場

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

ベクトル表記

外積

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

ビオ・サバールの法則

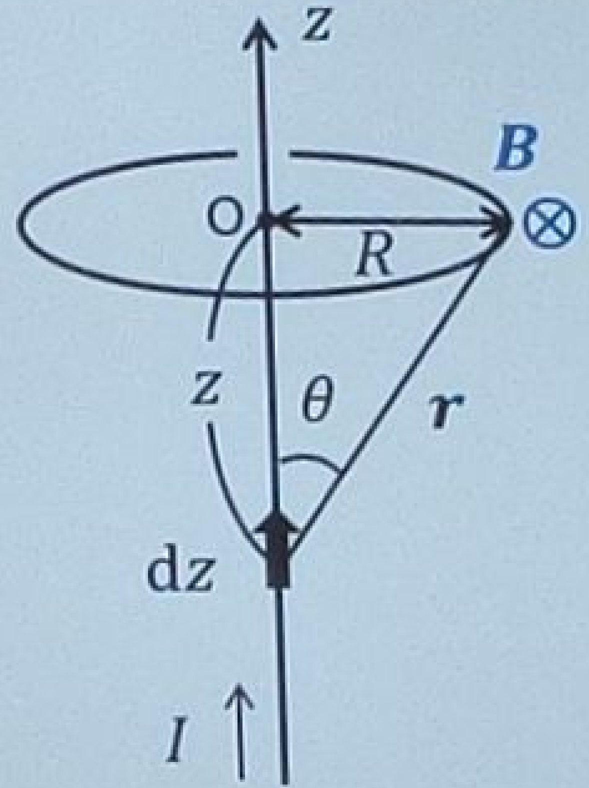
導線に沿って積分

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

座標変換

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

例題５　直線電流が作る磁場



ビオ・サバール則より

$$\boldsymbol{B}(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

ここで $|\mathrm{d}\mathbf{z}\times\boldsymbol{r}| = \mathrm{dz}\cdot r\cdot\sin\theta$ より

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{r^2}\mathrm{dz}$$

$z(\theta)$を変数変換する

$$-\frac{R}{z} = \tan\theta \Leftrightarrow \mathrm{dz} = \frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \quad \text{また，} \quad R = r\sin\theta$$

これより

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{R^2}\cdot\frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

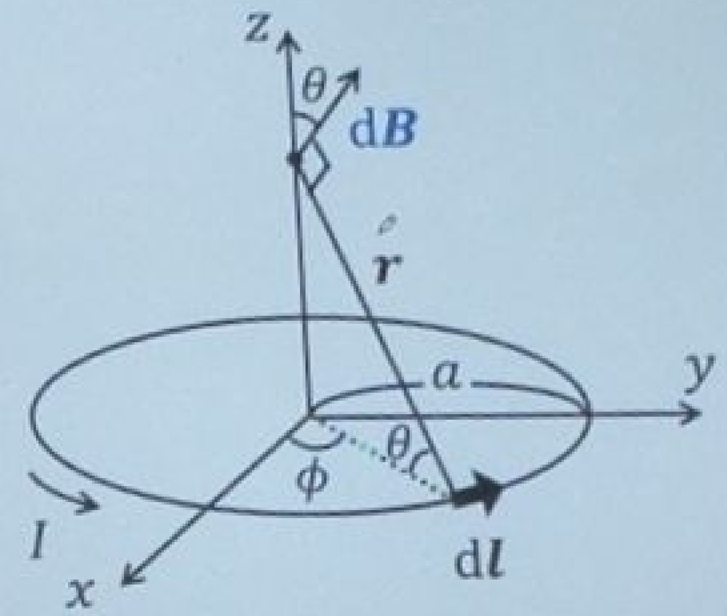
よって

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

となる

演習

例題7　環状電流が作る磁場



ビオ・サバール則より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

$\boldsymbol{l}$と$\boldsymbol{r}$は直交なので

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}| = \mathrm{d}lr$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}l}{r^2}$$

z成分の磁場の強さは

$$\mathrm{d}B_z = \mathrm{d}B\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}l}{r^2}$$

円に沿って積分

$$B_z = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot 2\pi a$$

演習

円に沿って積分

$$B_z = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot 2\pi a$$

$a = r\cos\theta$より

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

aとzで表現

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$z = 0$(中心位置)での B_zは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

磁場の強さは
電流に比例し、半径に反比例する。

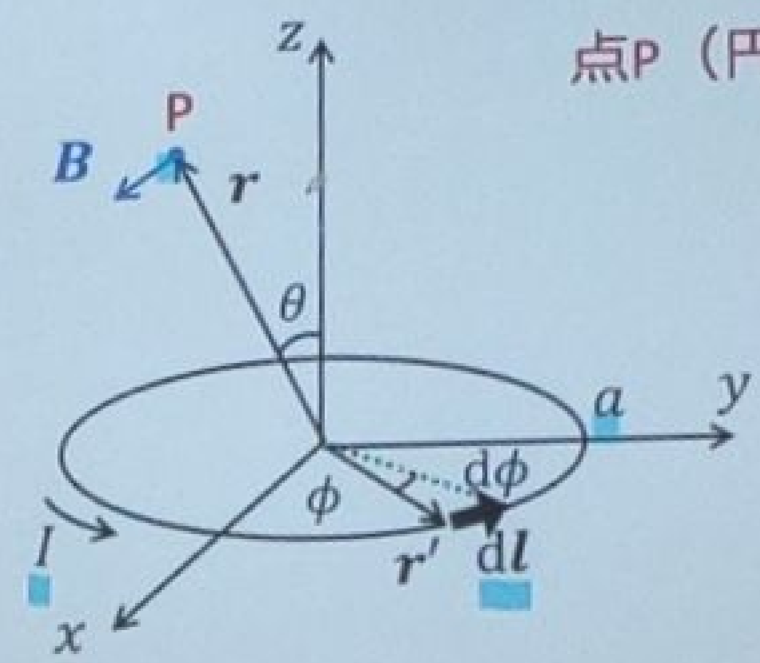
ビオ・サバール則を用いれば**任意形状の導線の磁場**を計算できる。

本日の課題

演習問題（P123)の[8]を解いてください。
(グループワーク)

例題９　磁気双極子

(magnetic dipole)



点P（円形回路、十分遠方）の磁場$\boldsymbol{B}$は？

ビオ・サバール則

$$B(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

点Pはxz面内と考える（簡単のため）

P点

$$\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\,, 0, r\cos\theta)$$

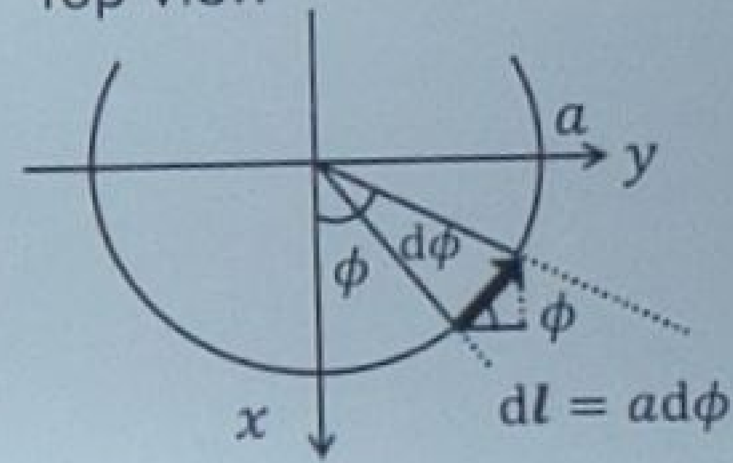
回路

$$\boldsymbol{r}' = (a\cos\phi\,, a\sin\phi\,, 0)$$

微小部分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (-a\sin\phi\,\mathrm{d}\phi, a\cos\phi\,\mathrm{d}\phi, 0)$$

Top view



演習（今日の課題）

これより

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = a\mathrm{d}\phi(r\cos\theta\cos\phi\,, r\cos\theta\sin\phi\,, a - r\sin\theta\cos\phi)$$

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 = [r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi]^{\frac{3}{2}}$$

が得られる

ビオ・サバール則に代入

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ar\cos\theta\cos\phi}{[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\phi$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ar\cos\theta\sin\phi}{[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\phi = 0$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - ar\sin\theta\cos\phi}{[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\phi$$

十分遠方の場合、$r \gg a \to \frac{a^2}{r^2}$ の項は無視できる

演習（今日の課題）

$$(r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi)^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{2a\sin\theta\cos\phi}{r}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

さらに近似

$$\approx \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3a\sin\theta\cos\phi}{r}\right)$$

これより

$$B_x \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} ar \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \cos\theta\cos\phi\left(1 + \frac{3a\sin\theta\cos\phi}{r}\right) \mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi a^2}{r^3} 3\sin\theta\cos\theta$$

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} ar \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} (a^2 - ra\sin\theta\cos\phi)\frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3a\sin\theta\cos\phi}{r}\right) \mathrm{d}\phi$$

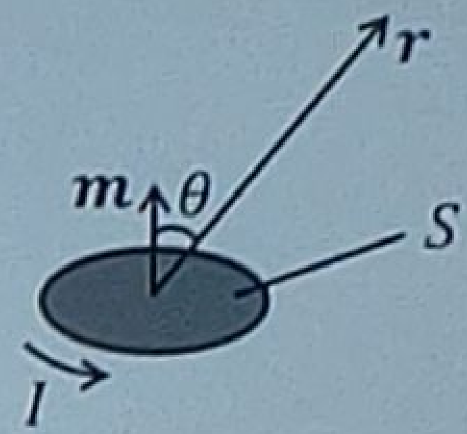
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi a^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

ここで双極子モーメントベクトル$\boldsymbol{m}$を導入

磁化

$$\boldsymbol{m} = \underline{S}\cdot\underline{I}\cdot\underline{\boldsymbol{k}}$$

面積　電流　法線,単位ベクトル



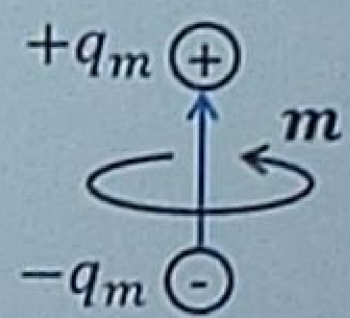
$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r} = SIr\cos\theta$$

と書けるので

$$(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} = SIr^2(\sin\theta\cos\theta\,,0,\cos^2\theta)$$

まとめると

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{r}^5}\right]$$



電気双極子(p51)と比較

同じ形式で書ける！

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{r}^5}\right]$$