定理 4.4（Rolle（ロル）の定理）

f が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能，$f(a)=f(b)$ ならば，$f'(c)=0$ をみたす c が (a,b) 内に存在する．

※図形的には，x 軸に平行な接線が途中で引けるということ．

証明

f が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であり，$f(a)=f(b)$ であるとする．

(i) f が定数のとき
$f'(x)=0$ $(a<x<b)$ であるから明らか．

(ii) f が定数でないとき
Weierstrass の最大値定理より，f は $[a,b]$ で最大値と最小値をとるが，このうち少なくとも一方は内部 (a,b) でとる．どちらの場合でも同じであるから，$f(c)$ $(a<c<b)$ が最大値であるとすると

$h>0,\ c+h\in[a,b]$ のとき，$f(c+h)\leqq f(c)$ より $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$ ……①

$h<0,\ c+h\in[a,b]$ のとき，$f(c+h)\leqq f(c)$ より $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0$ ……②

である．$f(x)$ は $x=c$ で微分可能であるから

① より $\quad f'(c)=\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$

② より $\quad f'(c)=\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0$

よって，$f'(c)=0$ であることがわかる．

以上 (i), (ii) より，定理は示された． ∎

定理 4.5（平均値の定理，Mean Value Theorem）

f が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能ならば，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ をみたす c が (a,b) 内に存在する．

※端点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるから，図形的には，端点を結ぶ直線に平行な接線が途中で引けるということ．

証明

f が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとする．

$$F(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}\qquad(x\in[a,b])$$

とおくと，F は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能である．また，$F(a)=0$，$F(b)=0$ より $F(a)=F(b)$ となるから，Rolle の定理より，$F'(c)=0$ をみたす c が (a,b) 内に存在する．そして $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるから，$F'(c)=0$ より $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となることがわかる． ∎

定理 4.6（Cauchy の平均値の定理）

f, g が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能ならば

$$f'(c)\{g(b) - g(a)\} = \{f(b) - f(a)\}g'(c) \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす c が (a, b) 内に存在する．さらに，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ であれば，$(*)$ は

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \cdots\cdots(**)$$

と書ける．

証明

f, g が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．

$$F(x) = \{f(x) - f(a)\}\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(x) - g(a)\} \quad (x \in [a, b])$$

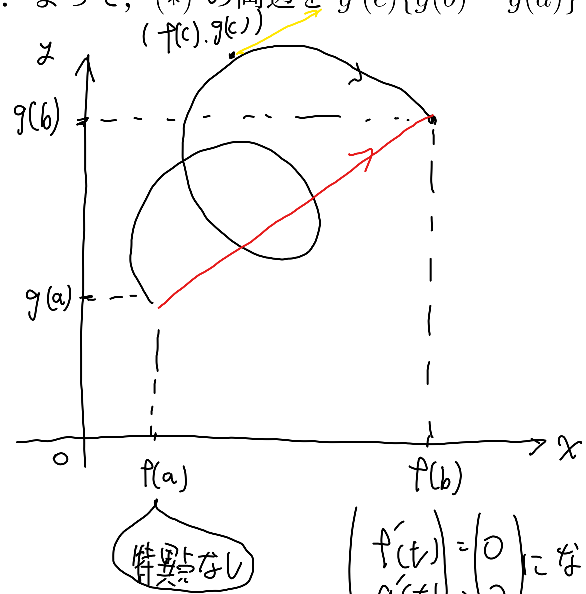
とおくと，F は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能である．また，$F(a) = 0$，$F(b) = 0$ より $F(a) = F(b)$ となるから，Rolle の定理より，$F'(c) = 0$ をみたす c が (a, b) 内に存在する．そして

$$F'(x) = f'(x)\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}g'(x)$$

であるから，$F'(c) = 0$ より $(*)$ が成り立つことが分かる．さらに，M-V-T より

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(p)$$

を満たす p が (a, b) 内に存在するから，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ であれば $g(b) - g(a) \neq 0$ である．よって，$(*)$ の両辺を $g'(c)\{g(b) - g(a)\} \neq 0$ で割れば $(**)$ が得られる． ■



$\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ になる所が特異点

C : $x = f(t)$, $y = g(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$

$\begin{pmatrix} f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} f'(c) \\ g'(c) \end{pmatrix}$

§2 L'Hospital（ロピタル）の定理

定理 4.7（L'Hospital の定理（１））

f, g が (a, b) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ のとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0 \quad \cdots\cdots ①, \qquad \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \cdots\cdots ②$$

であれば

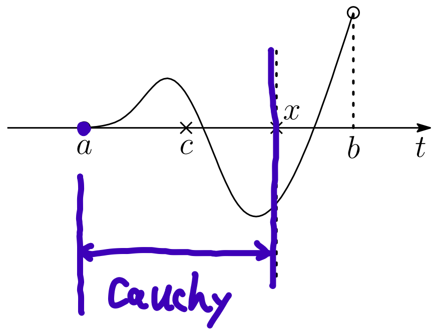
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

証明

f, g が (a, b) で微分可能，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ とし，①, ② が成り立つとする．

① より，$f(a) = g(a) = 0$ $\cdots\cdots$③ と定めれば，f, g は $[a, b)$ で連続になる．そこで，$a < x < b$ となる x を任意にとると，f, g は $[a, x]$ で連続，(a, x) で微分可能，$g'(t) \neq 0$ $(a < t < x)$ であるから，Cauchy の M-V-T より



$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が (a, x) 内に存在する．さらに，③ より

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

であるから，結局

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる．$x \to a+0$ のとき $c \to a+0$ であるから，② より

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A \qquad \blacksquare$$

定理 4.8（L'Hospital の定理（２））

f, g が (a, ∞) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x > a)$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \cdots\cdots ①, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \cdots\cdots ②$$

であれば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

証明

f, g が (a, ∞) で微分可能，$g'(x) \neq 0$ $(x > a)$ とし，①, ② が成り立つとする．

$\dfrac{1}{x} > a$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

とおくと，十分小さい $b > 0$ に対して，F, G は $(0, b)$ で微分可能であり

$$F'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad G'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

また，$G'(x) \neq 0$ $(0 < x < b)$ であり，① より

$$\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

$$\lim_{x\to+0} G(x) = \lim_{x\to+0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

さらに，② より

$$\lim_{x\to+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{x}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$$

よって，L'Hospital の定理（１）より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F\left(\dfrac{1}{x}\right)}{G\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{F(t)}{G(t)} = A \qquad ■$$

定理 4.9（L'Hospital の定理（３））

f, g が (a, b) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ のとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty \quad \cdots\cdots①, \qquad \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \cdots\cdots②$$

であれば

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

※証明は難しすぎるから省略する．

定理 4.10（L'Hospital の定理（４））

f, g が (a, ∞) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x > a)$ のとき

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \quad \cdots\cdots①, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \cdots\cdots②$$

であれば

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

※定理 4.8 と同様に $F(x), G(x)$ を導入し，定理 4.9 を用いると証明できる．

※ L'Hospital の定理は，おおざっぱにいうと次のようになる．

$\dfrac{\lim_{x\to\square} f(x)}{\lim_{x\to\square} g(x)}$ が不定形，すなわち，$\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{(\pm)\infty}{(\pm)\infty}$ の形になるとき，$\displaystyle\lim_{x\to\square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，

$\displaystyle\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ．

無条件で成り立つわけではない．

公式化して
覚えておこう

例 4.2
次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+\log(1-2x)}{e^{3x}-1-3x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$

解答

(1) 分母・分子で極限をとると $\dfrac{0}{0}$ の不定形で

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

※応用上は次のように書いてしまうことが多いかもしれない．

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x-\sin x}{x^3}}_{\frac{0}{0}\text{の不定形}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(2) 分母・分子で極限をとると $\dfrac{0}{0}$ の不定形で

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$

※応用上は次のように書いてしまうことが多いかもしれない．

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\tan x-x}{x^3}}_{\frac{0}{0}\text{の不定形}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(3) 分母・分子で極限をとると $\dfrac{0}{0}$ の不定形で

$$\lim_{x\to0}\frac{\{2x+\log(1-2x)\}'}{(e^{3x}-1-3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{2+\dfrac{-2}{1-2x}}{3e^{3x}-3}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-4x}{1-2x}}{3e^{3x}-3}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-4}{1-2x}}{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot9}$$

$$=\frac{-4}{1\cdot9}=-\frac{4}{9}$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x+\log(1-2x)}{e^{3x}-1-3x}=-\frac{4}{9}$

※応用上は次のように書いてしまうことが多いかもしれない．

もう1回使う.

$$\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{2x+\log(1-2x)}{e^{3x}-1-3x}}_{\frac{0}{0}\text{の不定形}}=\lim_{x\to0}\frac{\{2x+\log(1-2x)\}'}{(e^{3x}-1-3x)'}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{2+\dfrac{-2}{1-2x}}{3e^{3x}-3}}_{\frac{0}{0}\text{の不定形}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(2+\dfrac{-2}{1-2x}\right)'}{(3e^{3x}-3)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{4}{(1-2x)^2}}{9e^{3x}}=\frac{-4}{9}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos5x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\log(\cos5x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\log(\cos5x)}{x^2}}$ ← 対数をとって $\square^{\square}$をなくす

である．ここで

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos5x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\{\log(\cos5x)\}'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-5\sin5x}{\cos5x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-5\tan5x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan5x}{5x}\cdot\frac{-25}{2}=1\cdot\frac{-25}{2}=-\frac{25}{2}$$

であるから

$$\lim_{x\to0}(\cos5x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\log(\cos5x)}{x^2}}=e^{-\frac{25}{2}}$$

※要するに，log をとってから極限値を求め，その極限値を e の肩にのせたものが答えになるということ．

【問題】

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

$= \dfrac{1}{3}$

$t = \arctan x$ として考えてもよい

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-6x-e^{-6x}}{7x-\log(1+7x)}$

$= -\dfrac{36}{49}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\log(\cos x)}{x^4}$

$= -\frac{1}{6}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x - x\cos x}$

$= -2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{x\sin 3x}}$

$= e^{-\frac{8}{3}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+x}+1-e^x}{x^3}$

$= -\frac{7}{24}$

いつまでも積の微分になる.

※いきなり分母・分子を微分するのではなく

$$x\sqrt{1+x} = \{(1+x)-1\}(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

工夫する

としてから微分すると計算がかなり簡単になる.