材料の物理2
（電磁気学）

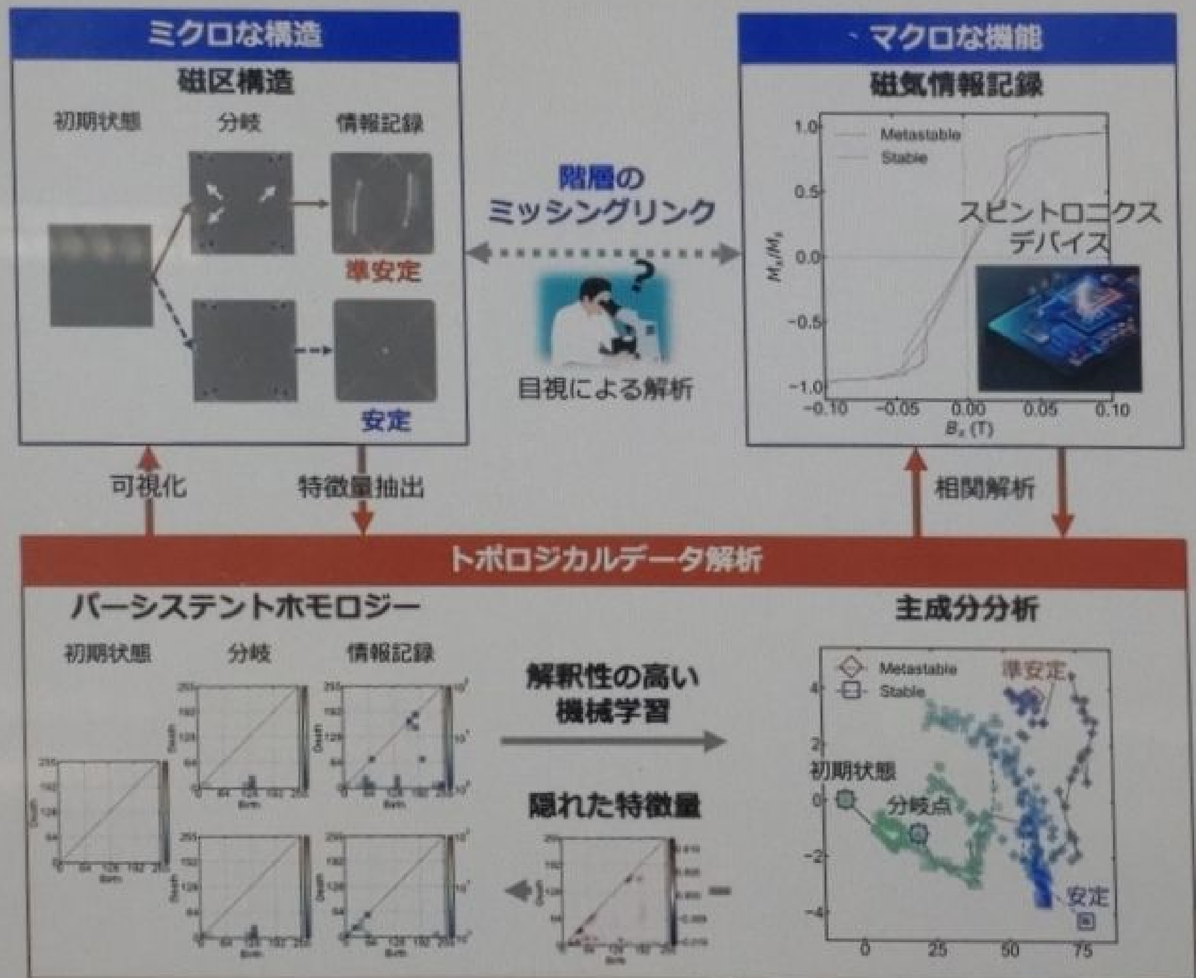
第十三回：真空中の電磁波

電磁波における電場と磁場の向きを理解する。

最近の出来事

拡張ランダウ自由エネルギーモデルの最新論文が出版されました！

プレスリリースも同時配信！



Science and Technology of Advanced Materials: Methods 2, (2022), 445–459

$$H_{eff} = -\frac{\partial E(PC)}{\partial PC} \cdot \frac{\partial PC}{\partial M}$$

拡張型ランダウ
自由エネルギーモデル

未来の予測ができる

パスコード：1216

Masato Kotsugi

真空中の電磁波

$\rho = 0, i = 0$　　光、ラジオ波、X線、γ線

おさらい　Maxwell方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = ? \quad \text{——— ①}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{——— ②}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{——— ③}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{i} = ? \quad \text{——— ④}$$

0:18:57

簡単のため$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ はz, t の関数とする

$\boldsymbol{E}(z,t)$　変数を2つに減らす　$\left(E_x(z,t)\,,E_y(z,t)\,,E_z(z,t)\right)$

$\boldsymbol{B}(z,t)$　z方向に進む波　$\left(B_x(z,t)\,,B_y(z,t)\,,B_z(z,t)\right)$

成分は3つ

①,② より

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

E_z, B_z は空間的に一定

③, ④ よりz成分について考えて

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial E_z}{\partial t}=0$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})_z=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t}=0$$

E_z, B_z は
時間的に一定

0:20:49

Kotsugilab.

これより

$$B_z(z,t)=0 \quad , \quad E_z(z,t)=0$$

z 方向 (進行方向) に成分をもたない
=
横波

$\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$は$x,y$成分のみ

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=(E_x,E_y,0) \\ \boldsymbol{B}=(B_x,B_y,0) \end{cases}$$

③, ④のx, y 成分について考える

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z}+\dfrac{\partial B_x}{\partial t}=0 & \text{―――― ⑤} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}+\dfrac{\partial B_y}{\partial t}=0 & \text{―――― ⑥} \\ -\dfrac{\partial B_y}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t}=0 & \text{―――― ⑦} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_y}{\partial t}=0 & \text{―――― ⑧} \end{cases}$$

対

対

0:28:58

Kotsugilab.

Masato Kotsugi

確認)　$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の形は？　※ y 成分のみでも同じ解

$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), 0, 0)$ の場合を考える ―― (x 成分のみ)

⑤, ⑧ より

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

B_x は時間、空間に対して一定

$B_x = 0$ にとると

$\boldsymbol{B} = (0, B_y(z,t), 0)$ ―― (y 成分のみ)

電場と磁場は「対」を成す

⑤～⑧ を解く

⑦ を時間で偏微分し、⑥ を代入

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

⑥ を時間で偏微分し、⑦ を代入

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

波動方程式

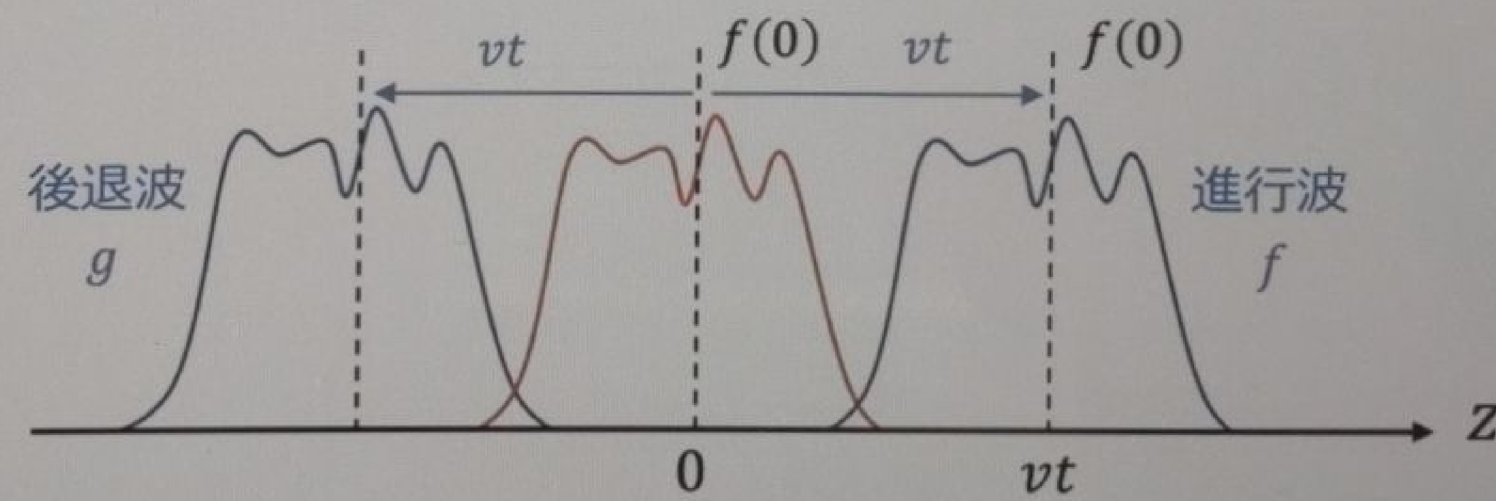
E_x と B_y は同じ解

E_x, B_y の一般解として Fをおき、$\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{v^2}$ とする

$$\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad ⑨$$

EとBを一つに結合！

解は　$F(z,t) = \underbrace{f(z - vt)}_{\text{進行波}} + \underbrace{g(z + vt)}_{\text{後退波}}$　となる　（ f, g　任意関数）



$t = 0$ のとき　$z = 0$ の波は $f(0)$

t 秒後　$f(0)$ の波は　$z = vt$

zがvt進行している

$f(z - vt) = 0$

Masato Kotsugi

f, g の確認

$$u = z - vt\,,\quad s = z + vt$$ とおく

F を時間微分

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f(z - vt)}{\partial t} + \frac{\partial g(z + vt)}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dg}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{df}{du}(-v) + \frac{dg}{ds}v$$

これより

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2}v^2 + \frac{d^2 g}{ds^2}v^2$$

同様に

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{ds^2}$$

元の式を満たす

⑨

Kotsugilab.

Masato Kotsugi

E, B を f, g を用いて表す

$$\begin{cases} E_x = f(z - vt) + g(z + vt) \\ B_y = \tilde{f}(z - vt) + \tilde{g}(z + vt) \end{cases}$$

$u = z - vt\,, s = z + vt$ とおき、式⑦を計算

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{d\tilde{f}}{du} + \frac{d\tilde{g}}{ds}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{df}{du} + \frac{1}{v}\frac{dg}{ds} \qquad \text{より}$$

⑦は

$$\frac{d}{du}\underbrace{\left(\tilde{f} - \frac{1}{v}f\right)}_{=c} + \frac{d}{ds}\underbrace{\left(\tilde{g} + \frac{1}{v}g\right)}_{=c'} = 0 \qquad \text{となる}$$

(c, c' は定数)

0:54:59

u, s は独立変数より

$$\tilde{f} = \frac{1}{v} f + c \qquad \tilde{g} = -\frac{1}{v} g + c'$$

$c = c' = 0$ とおくと B_y の形は

$$B_y = \frac{1}{v} f(z - vt) - \frac{1}{v} g(z + vt)$$

電場と磁場は同じ形で伝わっていく

簡単のため

$$f(z - vt) = E_0 \sin k(z - vt)$$

$$g(z + vt) = 0$$

を考える

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin k(z - vt) \\ B_y = \dfrac{E_0}{v} \sin k(z - vt) \end{cases}$$

（ $\frac{1}{v}$ のfactor 振幅にかかるが ）

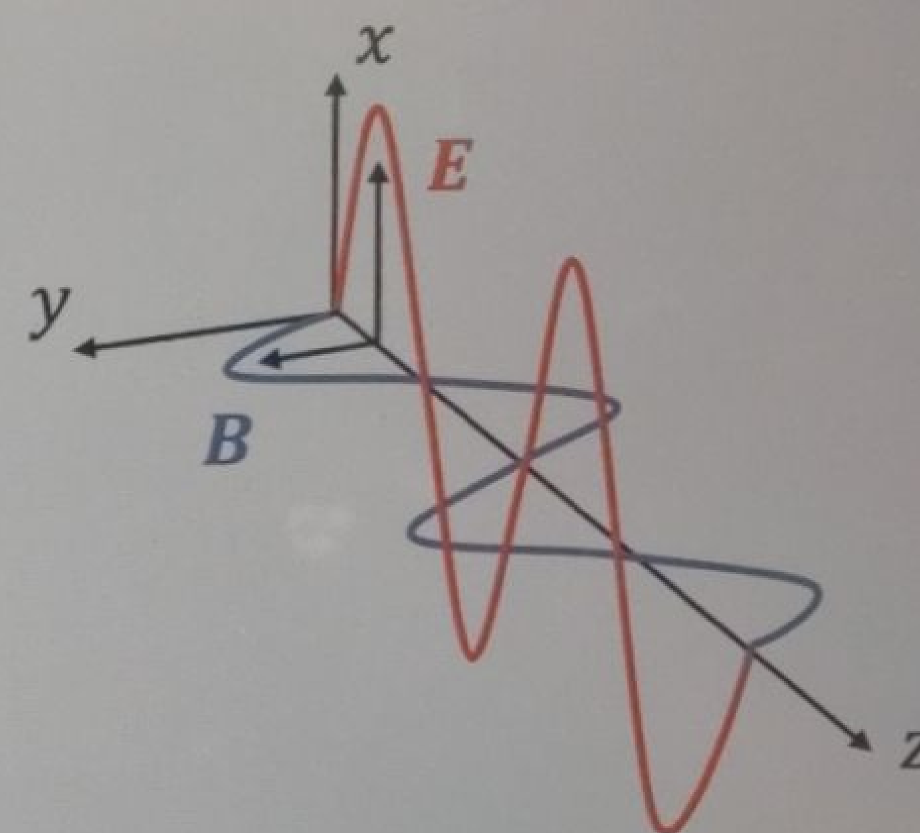
電場と磁場は同一の形で一緒に伝わる

同じ位相

0:59:52

ここで $kv = \omega$ とおくと　ω : 角振動数

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_y = \dfrac{E_0}{v} \sin(kz - \omega t) \end{cases}$$



振動数 $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$　波長 $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$　より

$k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ “波数” (2π の中の波の数)

ちなみに　$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8\ m/s$
光速

電磁波　Ex) ラジオ波、マイクロ波、赤外線、可視光、紫外線、X線、γ線

- 電場、磁場は横波 ($E_z = B_z = 0$)
- 電場と磁場は進行方向に垂直な面内に成分をもつ
- 電場と磁場は直交している
- 電場と磁場は一緒に進む (同じ方向)

Masato Kotsugi

本日の課題

① 真空中を伝搬する電磁波において、磁場と電場が直交していることを証明しなさい。