8223036　東山淳

応用数学1

演習レポート課題

(1)

$$y'' - 6y' - 16y = 8$$

[1] 同次方程式：$y'' - 6y' - 16y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて

固有方程式：$p^2 - 6p - 16 = 0$

$$(p-8)(p+2) = 0$$

$$\therefore p = 8, -2$$

基本解：e^{8x}, e^{-2x}

一般解：$y = Ae^{8x} + Be^{-2x}$ （A, B：任意定数）

[2] 定数変化法：$A, B \to A(x), B(x)$

$$y = A(x)e^{8x} + B(x)e^{-2x}$$

$$\begin{cases} A'(x)e^{8x} + B'(x)e^{-2x} = 0 & \text{— ①} \\ 8A'(x)e^{8x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8 & \text{— ②} \end{cases}$$

①式より

$$A'(x) = \frac{-B'(x)e^{-2x}}{e^{8x}} = -B'(x)e^{-10x} \quad \text{— ③}$$

これを②式に代入，

$$8 \cdot \{-B'(x)e^{-10x}\} \cdot e^{8x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow -8B'(x)e^{-2x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow -10B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow B'(x)e^{-2x} = -\frac{4}{5}$$

$$B'(x) = -\frac{4}{5}e^{2x}$$

③より

$$A'(x) = -B'(x)e^{-10x}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{2x} \cdot e^{-10x}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{-8x}$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int -\frac{4}{5}e^{-8x}\,dx \qquad \left(-\frac{1}{8}e^{-8x}\right)$$

$$= -\frac{4}{5}\int e^{-8x}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{8}e^{-8x}\right) + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$

$$= \frac{1}{10}e^{-8x} + C_1$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int -\frac{4}{5}e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\int e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C_2 \quad (C_2 : \text{積分定数})$$

$$= -\frac{2}{5}e^{2x} + C_2$$

よって

$$y = A(x)e^{8x} + B(x)e^{-2x}$$

$$= \left(\frac{1}{10}e^{-8x} + C_1\right)e^{8x} + \left(-\frac{2}{5}e^{2x} + C_2\right)e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{10} + C_1e^{8x} - \frac{2}{5} + C_2e^{-2x}$$

$$= \underbrace{-\frac{3}{10}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{8x} + C_2e^{-2x}}_{\text{同次方程式の一般解}}$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

① 同次方程式: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y = e^{px}$ とすると.

固有方程式: $p^2 - 3p + 2 = 0$

$(p-2)(p-1) = 0$

$\therefore p = 1, 2$

基本解: e^x, e^{2x}

一般解: $y = Ae^x + Be^{2x}$ (A, B: 任意定数)

② 定数変化法: $A, B \to A(x), B(x)$

$y = A(x)e^x + B(x)e^{2x}$

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} = 0 & \text{—— ①} \\ A'(x)e^x + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x} & \text{—— ②} \end{cases}$$

① より

$$A'(x) = -B'(x)\cdot\frac{e^{2x}}{e^{x}} = -B'(x)e^{x} \quad \text{— ③}$$

これを ② に代入すると

$$-B'(x)e^{x}\cdot e^{x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad -B'(x)\cdot e^{2x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2x}B'(x) = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad B'(x) = e^{x}$$

これを ③ に代入すると

$$A'(x) = -B'(x)e^{x} = -e^{x}\cdot e^{x} = -e^{2x}$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int -e^{2x}\,dx = -\int e^{2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \quad (C_1\text{：積分定数})$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int e^{x}\,dx = e^{x} + C_2 \quad (C_2\text{：積分定数})$$

よって

$$\begin{aligned} y &= A(x)e^{x} + B(x)e^{2x} \\ &= \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^{x} + \left(e^{x} + C_2\right)e^{2x} \\ &= -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^{x} + e^{3x} + C_2e^{2x} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}e^{3x}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{x} + C_2e^{2x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \end{aligned}$$

(3) $y'' - 2y' + y = e^{x}$

同次方程式： $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{px}$ とすると.

固有方程式： $p^2 - 2p + 1 = 0$

$$(p-1)^2 = 0$$

$$\therefore p = 1 \ (\text{重複解})$$

基本解： $e^{x}, \ xe^{x}$

一般解： $y = Ae^{x} + Bxe^{x}$ (A, B：任意定数)

回 定数変化法：A、B → $A(x)$、$B(x)$

$$y = A(x)e^x + B(x)xe^x$$

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)xe^x = 0 & \text{——①} \\ A'(x)e^x + B'(x)(e^x + xe^x) = e^x & \text{——②} \end{cases}$$

①より

$$A'(x) = -B'(x)\frac{xe^x}{e^x} = -B'(x)x \quad \text{——③}$$

これを②に代入すると

$$\{-B'(x)\cdot xe^x + B'(x)(e^x + xe^x)\} = e^x$$

$$\Leftrightarrow (-\cancel{xB'(x)e^x} + B'(x)e^x + \cancel{xB'(x)e^x}) = e^x$$

$$\Leftrightarrow B'(x)e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow B'(x) = 1$$

これを③に代入すると

$$A'(x) = -x$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int -x\,dx = -\int x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1：積分定数)$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int 1\,dx = x + C_2 \quad (C_2：積分定数)$$

よって

$$\begin{aligned} y &= A(x)e^x + B(x)xe^x \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)e^x + (x + C_2)xe^x \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^x + C_1e^x + x^2e^x + C_2xe^x \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}x^2e^x}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^x + C_2xe^x}_{\text{同次方程式の一般解}} \end{aligned}$$

(4) $y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3x}$

$\boxed{1}$ 同次方程式： $y'' + 8y' + 17y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて.

固有方程式 $p^2 + 8p + 17 = 0$

$$p = -4 \pm \sqrt{16-17}$$
$$= -4 \pm \sqrt{-1}$$
$$= -4 \pm i$$

基本解： $e^{(-4+i)x}$. $e^{(-4-i)x}$

一般解： $y = Ae^{(-4+i)x} + Be^{(-4-i)x}$ (A.B：任意定数)

$\Leftrightarrow$ $y = Ae^{-4x}e^{ix} + Be^{-4x} \cdot e^{-ix}$

$\xrightarrow{\text{オイラーの関係}}$ $y = Ae^{-4x}(\cos x + i\sin x) + Be^{-4x}(\cos x - i\sin x)$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\Leftrightarrow$ $y = Ae^{-4x}\cos x + iAe^{-4x}\sin x + Be^{-4x}\cos x - iBe^{-4x}\sin x$

$\Leftrightarrow$ $y = (A+B)e^{-4x}\cos x + i(A-B)e^{-4x}\sin x$

$$\begin{cases} A+B = C \\ i(A-B) = D \end{cases}$$

$$y = Ce^{-4x}\cos x + De^{-4x}\sin x$$
$$= e^{-4x}(C\cos x + D\sin x)$$

$\boxed{2}$ 定数変化法 : $C, D \rightarrow C(x), D(x)$

$$y = e^{-4x}(C(x)\cos x + D(x)\sin x)$$

$$\begin{cases} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x = 0 & \text{—— ①} \\ C'(x)(-\sin x) + D'(x)\cos x = 2e^{-3x} & \text{— ②} \end{cases}$$

をみたす $C(x)$. $D(x)$ を求める。

①より.

$$C'(x) = -D'(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{— ③}$$

これを② に代入すると.

$$-D'(x)\tan x(-\sin x) + D'(x)\cos x = 2e^{-3x}$$
$$D'(x)\tan x \sin x + D'(x)\cos x = 2e^{-3x}$$
$$D'(x) = \frac{2e^{-3x}}{\tan x \sin x + \cos x}$$
$$= 2e^{-3x}\cos x$$

これを③に代入すると

$$C'(x) = -D'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -2e^{-3x}\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -2e^{-3x}\sin x$$

(積分)

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = -2\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

$$= \frac{3}{5}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{5}e^{-3x}\cos x + C_1$$

(C_1:積分定数)

$$D(x) = \int D'(x)\,dx = 2\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$= -\frac{3}{5}e^{-3x}\cos x + \frac{1}{5}e^{-3x}\sin x + C_2 \quad (C_2\text{:積分定数})$$

よって

$$y = e^{-4x}(C(x)\cos x + D(x)\sin x)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-4x}\left(\left(\frac{3}{5}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{5}e^{-3x}\cos x + C_1\right)\cos x + \left(-\frac{3}{5}e^{-3x}\cos x + \frac{1}{5}e^{-3x}\sin x + C_2\right)\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \cancel{\frac{3}{5}e^{-3x}\sin x\cos x} + \frac{1}{5}e^{-3x}\cos^2 x - \cancel{\frac{3}{5}e^{-3x}\sin x\cos x} + \frac{1}{5}e^{-3x}\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{5}e^{-3x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \underbrace{e^{-4x}(C_1\cos x + C_2\sin x)}_{\text{同次方程式の一般解}} + \underbrace{\frac{1}{5}e^{-7x}}_{\text{非同次方程式の特解}} \quad //$$

$$\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\sin x\,dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{9}e^{-3x}\cos x - \frac{1}{9}\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

$$\frac{10}{9}\int e^{-3x}\sin x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{9}e^{-3x}\cos x$$

$$\int e^{-3x}\sin x\,dx = -\frac{3}{10}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{10}e^{-3x}\cos x$$

$$\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x - \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\cos x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x + \frac{1}{9}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{9}\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$\frac{10}{9}\int e^{-3x}\cos x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x + \frac{1}{9}e^{-3x}\sin x$$

$$\int e^{-3x}\cos x\,dx = -\frac{3}{10}e^{-3x}\cos x + \frac{1}{10}e^{-3x}\sin x$$

(5) $y' + y = \sin x$

□ 同次方程式 : $y'' + y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて、

固有方程式 : $p^2 + 1 = 0$

$\therefore p = \pm i$

基本解 : e^{ix}, e^{-ix}

一般解 : $y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ (A, B : 任意定数)

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\xrightarrow{\text{オイラーの関係式}} y = A(\cos x + i\sin x) + B(\cos x - i\sin x)$

$\Leftrightarrow y = (A+B)\cos x + (A-B)i\sin x$

$\downarrow$ $A+B = C$, $(A-B)i = D$ とおく

$y = C\cos x + D\sin x$

□ 定数変化法 : $C, D \to C(x), D(x)$

$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$

$$\begin{cases} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x = 0 & \text{— ①} \\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x = \sin x & \text{— ②} \end{cases}$$

①より

$C'(x) = -D'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= -D'(x)\tan x$ — ③

これを②に代入して

$D'(x)\tan x \cdot \sin x + D'(x)\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow D'(x)(\tan x\sin x + \cos x) = \sin x$

$\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow D'(x) = \dfrac{\sin x}{\tan x\sin x + \cos x}$

cos

$\Leftrightarrow D'(x) = \sin x\cos x$

$= \frac{1}{2}\sin 2x$

これを③に代入して

$-\sin x\cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$C'(x) = -D'(x)\tan x$

$= -\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \tan x$

$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

$= -\sin^2 x$

$= \dfrac{\cos 2x - 1}{2}$

$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$

(積分)

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$D(x) = \int D'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

よって

$-2\cos^2 x + 1$

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C_1\right)\cos x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2\right)\sin x$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\cos x - \frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x - \frac{1}{4}\sin x\cos 2x + C_2\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{4}\sin x\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \frac{1}{4}\sin x\left(2\cos^2 x - \cos 2x\right) - \frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x}_{非同次方程式の特解} + \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{同次方程式の一般解} \quad //$$