第 4 章　1 変数関数の微分

§1　微分の基本性質

定義 4.1

I を開区間とし $f : I \to \mathbb{R}$ とする．$a \in I$ として，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，f は a で微分可能であるという．そして，この極限値を f の a における微分係数といい，$f'(a)$ で表す．

また，f が I の各点で微分可能なとき，f は I で微分可能であるといい

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を f の導関数という．

定理 4.1

f, g が開区間 I で微分可能なとき，次が成り立つ．

(1) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$　(k は定数)

(2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　（複号同順）

(3) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\displaystyle\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$　特に　$\displaystyle\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

ただし，$g(x) \neq 0$ とする．

高校で学ぶ導関数

(1) $(c)' = 0$　(c は定数)

(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　($\alpha \neq 0$)

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

※ (2) で $\alpha = \dfrac{1}{2}$ とした $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は公式としたい．

覚えておく．

定理 4.2

f, g をそれぞれ開区間 I, J で微分可能とする．$f(I) \subset J$ を満たすとき，合成関数 $g \circ f$ は I で微分可能で

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (x \in I)$$

が成り立つ．特に，次が成り立つ．

(1) $f(x) > 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\{f(x)^\alpha\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x) \qquad (\alpha \neq 0)$$

$$\left\{\sqrt{f(x)}\right\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

※ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは $f(x) > 0$ $(x \in I)$ でなくてもよい．

(2) $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\{g(f(x))\}'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\{f(x)^\alpha\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x) \qquad (\alpha \neq 0)$$

$$\left\{\sqrt{f(x)}\right\}' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

定理 4.3

f が開区間 I で狭義単調かつ微分可能とし，$f(x) \neq 0\ (x \in I)$ を満たすとする．f の値域を J とするとき，逆関数 f^{-1} は J で微分可能で

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (x \in J)$$

が成り立つ．

※逆関数の微分公式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

と略記するとわかりやすい．

公式として覚える

逆三角関数の導関数

(1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

$x = \sin\theta$ で置換できる.

(2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

$x = \tan\theta$ で置換でき

証明

(1) $y = \arcsin x\ \ (-1 < x < 1)$ とおくと $x = \sin y\ \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから，$\cos y > 0$ に注意すると

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}\ (\neq 0)$$

$$\therefore \quad (\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = \arccos x\ \ (-1 < x < 1)$ とおくと $x = \cos y\ \ (0 < y < \pi)$ であるから，$\sin y > 0$ に注意すると

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}\ (\neq 0)$$

$$\therefore \quad (\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $y = \arctan x\ \ (x \in \mathbb{R})$ とおくと $x = \tan y\ \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2\ (\neq 0)$$

$$\therefore \quad (\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2} \quad \blacksquare$$

※合成微分は次のようになる．ただし，f は微分可能とする．

(1) $\{\arcsin f(x)\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \quad (-1 < f(x) < 1)$

(2) $\{\arccos f(x)\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \quad (-1 < f(x) < 1)$

(3) $\{\arctan f(x)\}' = \dfrac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

$$\{\arcsin f(x)\}' = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$$

$$\{\arccos f(x)\}' = -\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$$

$$\{\arctan f(x)\}' = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$$

例 4.1
次の関数を微分せよ．

(1) $\arctan\sqrt{\dfrac{3x-11}{2x+7}}$　　(2) $\arccos\sqrt{1-9x^2}$

(3) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$

☆ ルートをはずしたり、数を入れたりするときは
符号に気をつける。
→もともとの形を崩さない

解答

(1)
$$\left(\arctan\sqrt{\frac{3x-11}{2x+7}}\right)' = \frac{1}{1+\dfrac{3x-11}{2x+7}}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-11}{2x+7}}}\cdot\frac{3\cdot(2x+7)-(3x-11)\cdot 2}{(2x+7)^2}\right\}$$
$$= \frac{2x+7}{(2x+7)+(3x-11)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+7}{3x-11}}\cdot\frac{43}{(2x+7)^2}$$
$$= \frac{43}{2(5x-4)(2x+7)}\sqrt{\frac{2x+7}{3x-11}} \neq \frac{43}{2(5x-4)}\sqrt{\frac{1}{(3x-11)(2x+7)}}$$

2x+7が負の場合成り立たない

文字式の符号が同じかどうかわからないのでできない

ルートの中に負の数を入れられない

※解答以外は
$$\frac{43}{2(5x-4)(3x-11)}\sqrt{\frac{3x-11}{2x+7}} \quad\text{または}\quad \frac{43}{2(5x-4)(2x+7)\sqrt{\dfrac{3x-11}{2x+7}}}$$
が正解．他の表示はなぜだめなのか考えよ．

(2)
$$(\arccos\sqrt{1-9x^2})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-9x^2)}}\cdot\frac{-18x}{2\sqrt{1-9x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{9x^2}}\cdot\frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}}$$
$$= \frac{1}{3|x|}\cdot\frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}} \quad \longleftarrow \sqrt{x^2}=|x| \quad (x\in\mathbb{R})$$
$$= \frac{3x}{|x|\sqrt{1-9x^2}}$$

$x(\pm 3x)$

(3)
$$\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4x^2+1}}}\cdot\left(-\frac{\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{4x^2+1}{4x^2}}\cdot\frac{-4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2|x|}\cdot\frac{-4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}} \quad \longleftarrow \sqrt{x^2}=|x| \quad (x\in\mathbb{R})$$
$$= -\frac{2x}{|x|(4x^2+1)}$$

【問題】

次の関数を微分せよ.

(1) $\arctan \dfrac{11x-9}{9x+11}$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

(2) $\arctan \sqrt{\dfrac{13x-3}{8x+5}}$

$$= \frac{89}{2(21x+2)(8x+5)}\sqrt{\frac{8x+5}{13x-3}}$$

(4) $\arcsin \sqrt{1-7x^2}$

$$= \frac{-\sqrt{7}x}{|x|\sqrt{1-7x^2}}$$

(4) $\arccos \dfrac{5}{\sqrt{x^2+25}}$

$$= \frac{5x}{|x|(x^2+25)}$$

($\sqrt{x^2+25}$ は x^2+25 が
正なので
約分できる)