$$\left(\int c c^* \Phi \hat{\Omega} \Phi \, dx\right)^*$$

定義1 $\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle$

定義2 $\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* = \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle$

$\left(\langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle = \int \Phi^* \hat{\Omega} \Psi \, dx \right)$ ☆ 重要

定義2 で $\Psi = \Psi + c\Phi$ $(c = 1, i)$ とすると.

$$\langle \Psi + c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi + c\Phi \rangle^* = \langle \Psi + c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi + c\Phi \rangle$$

(左辺) $= (\langle \Psi + c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi + c\Phi \rangle)^* = \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + \langle \Psi | \hat{\Omega} | c\Phi \rangle^*$
$+ \langle c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + \langle c\Phi | \hat{\Omega} | c\Phi \rangle^*$
$= \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + c^* \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + c \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + c^2 \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^*$

(右辺) $= \langle \Psi + c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi + c\Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + \langle c\Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{\Omega} | c\Phi \rangle$
$+ \langle c\Phi | \hat{\Omega} | c\Phi \rangle$
$= \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + c^* \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + c \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$
$+ c^2 \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$

定義2より $\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* = \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle$ ……☆
$\langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$

上記の式は

$\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + c^* \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + c \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* + c^2 \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^*$ (first and last terms struck through)
$= \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + c^* \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + c \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$ (first term struck through)
$+ c^2 \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$ (struck through)
(∵☆)

$\Leftrightarrow c^* \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + c \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^*$
$= c^* \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + c \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$ …①

(i) c=1 のとき

①に c=1 を代入すると.

$\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* = \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$ …②

(ii) c=i のとき

①に c=i を代入すると

$-i \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + i \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^*$
$= -i \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + i \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$

$\Leftrightarrow -\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* + \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle^* = -\langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle$ …③

②.③より

$\langle \Psi | \hat{\Omega} | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle$

よって定義2から定義1は証明された.