8223036　栗山 淳

熱力学　第8講課題

① ポアソンの関係式を証明せよ

第一法則より　　　　　　　　　　断熱なので

$$d'U = d'Q + d'W \qquad d'Q = 0 \qquad \therefore dU = d'W$$

Cv の定義より $\left(C_{Vm} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \right)$

$$dU = n C_{Vm} dT$$

代入

また

$$d'W = -PdV = -\frac{nRT}{V} dV$$

代入すると

$$\frac{C_{Vm}}{T} dT = -\frac{R}{V} dV$$

断熱変化 $V_B \to V_C$, $T_B \to T_C$ への変化を考える

$$C_{Vm} \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = -R \int_{(V_B)}^{V_C} \frac{dV}{V}$$

$$C_{Vm} \log\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = -R \log\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$\left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{C_{Vm}} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^R$$

状態方程式より

$$P_B V_B = nRT_B; \quad P_C V_C = nRT_C$$

$$\left(\frac{P_C V_C}{P_B V_B}\right)^{C_{Vm}} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^R$$

$$\left(\frac{P_C}{P_B}\right)^{C_{Vm}} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{R + C_{Vm} = C_{pm}}$$

（マイヤーの関係式　$R + C_{Vm} = C_{pm}$）

これより

$$P_B^{C_{Vm}} V_B^{C_{pm}} = P_C^{C_{Vm}} V_C^{C_{pm}}$$

ここで $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$ とおくと

$$P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$$

したがって　$PV^{\gamma} = $ 一定　（ポアソンの関係式）