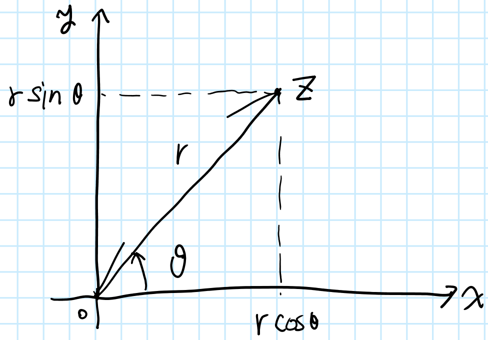
第2講

2024年4月19日　10:32

1.2 複素数の極座標表示（極形式）



$$z = x + yi = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

r：zの絶対値 大きさ

θ：zの偏角（$\theta = \arg z$）

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ：zに対して一意的に定まる。

$\theta = \arg z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ：$\theta_0 + 2n\pi$（$0 \leqq \theta_0 < 2\pi$　n：整数）が存在する。⇒（$2\pi \times$整数）の不定性

↑ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ ：オイラーの関係式

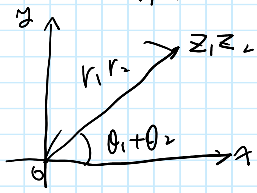
↪ $z = r\cdot e^{i\theta}$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

（乗算）

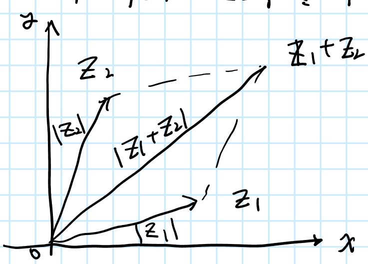
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$



除算（商）：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

・三角不等式：

r：$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$



$\arg z_1 = \arg z_2\ (+2n\pi)$ のとき

$|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$

※ 複素数の表示には2通りある：$x+yi$、$re^{i\theta}$

（演習）

(演習)

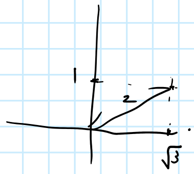
問 次の複素数 z の極座標表示を求めよ.

$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

(1)

$z = -3$

$\underline{(3, \pi)}$ $\quad$ $\underline{3e^{\pi i}}$

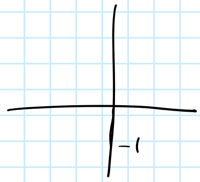


(2)

$z = \sqrt{3} + i$

$\underline{\left(2, \frac{\pi}{6}\right)}$ $\quad$ $\underline{2e^{\frac{\pi}{6}i}}$

(3)



$z = i^3$

$= -i$

$\underline{\left(1, \frac{3}{2}\pi\right)}$ $\quad$ $\underline{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$

(4)

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1+2i-1}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{\cancel{1-i\,(1+i)}} = -1+i$$

$\underline{\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)}$ $\quad$ $\underline{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}}$

$+\sqrt{3}(i)^2$

(5)

$$z = \frac{1-i\,(1-i)}{1+i\,(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$\underline{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$

$4 - 12(i)^2$

$4+12$

(6)

$$z = \frac{3}{(i-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{-1+3-2\sqrt{3}i} = \frac{3(2+2\sqrt{3}i)}{(2-2\sqrt{3}i)(2+2\sqrt{3}i)}$$

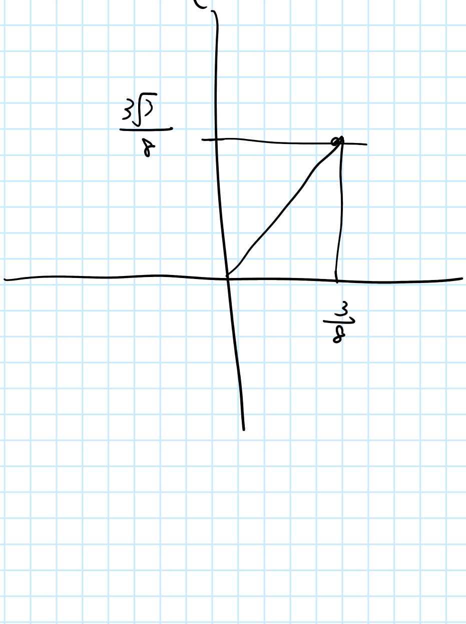
$$= \frac{3(2+2\sqrt{3}i)}{16}$$

$$= \frac{3(1+\sqrt{3}i)}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$$= \frac{6}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{6}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



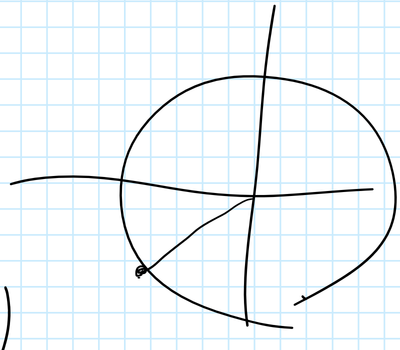
$\underline{\frac{3}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}}$

問2

(1)

$$z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{1+\sqrt{3}i}$$



(2)

$$z = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$z = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

(3)

$$z = (1-\sqrt{3}i)^3 = (2)^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = \underline{-8}$$

$4+3$

(4)

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1+2i+(i)^2}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i-2}{2} = \underline{-1+i}$$

(5)

$$z = \frac{(2-\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}}{2} = \frac{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})i}{2} = \underline{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{-2-\sqrt{3}}{2}i}$$

(6)

$$z = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+2i-3}{13} = \frac{-1+5i}{13} = \underline{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i}$$

指数関数 e^x のテイラー展開:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

三角関数 $\sin x$、$\cos x$ のテイラー展開：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

以上より

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$ ：オイラーの関係

・ $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$= \cos\theta - i\sin\theta$

・ $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

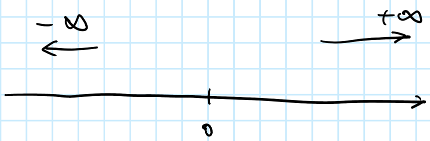
$$\therefore \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$\therefore \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

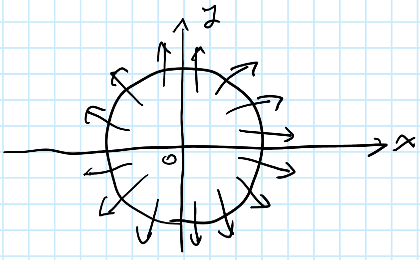
1.4 無限遠点

実数：$\mathbb{R}$



⇒ 極限は2方向のみ

複素数：$\mathbb{C}$



⇒ あらゆる方向無数にあり

・複素平面 ⇒ 球面に対応させる。（平面で球を作るイメージ）