第2回 課題 (4/20)　　　　8222124 柳下 恭輔

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) \frac{1}{Z} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}$$

$a = \dfrac{h\nu}{k_B T}$ とおくと

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-na}$$

ここで

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-na} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k e^{-ak}$ を求めていく

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k e^{-ak} = S_n$ とおく

$$S_n = 0 + 1\cdot e^{-a} + 2\cdot e^{-2a} + \cdots + n e^{-na}$$

$$-)\ e^{-a} S_n = \qquad 0 + 1\cdot e^{-2a} + \cdots + (n-1)e^{-na} + n e^{-(n+1)a}$$

$$(1-e^{-a}) S_n = e^{-a} + e^{-2a} + \cdots + e^{-na} - n e^{-(n+1)a}$$

$$(1-e^{-a}) S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-ak} - n e^{-(n+1)a}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{1-e^{-a}} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-ak} - n e^{-(n+1)a} \right)$$

これより

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-na} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-e^{-a}} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-ak} - \underbrace{n e^{-(n+1)a}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \right)$$

$$= \frac{Z-1}{1-e^{-a}} \quad \left(\because \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} = Z\right)$$

$\cdots$ ①

ここで

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} = \frac{1}{1-e^{-a}} \quad \left(\because \sum_{k=0}^{\infty} b \cdot r^k = \frac{a}{1-r}\right)$$

$\cdots ②$

より

$$① = \frac{e^{-a}}{(1-e^{-a})^2}$$

したがって

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{Z} \cdot \frac{e^{-a}}{(1-e^{-a})^2}$$

$$= \frac{h\nu e^{-a}}{1-e^{-a}} \quad (\because ②)$$

$$= \frac{h\nu}{e^{a}-1}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}$$

//

[問 2]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} c\cos\theta \times \frac{1}{4\pi} u\sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{uc}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot (2\pi - 0) \, d\theta$$

$$= \frac{uc}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} uc \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} uc$$

//