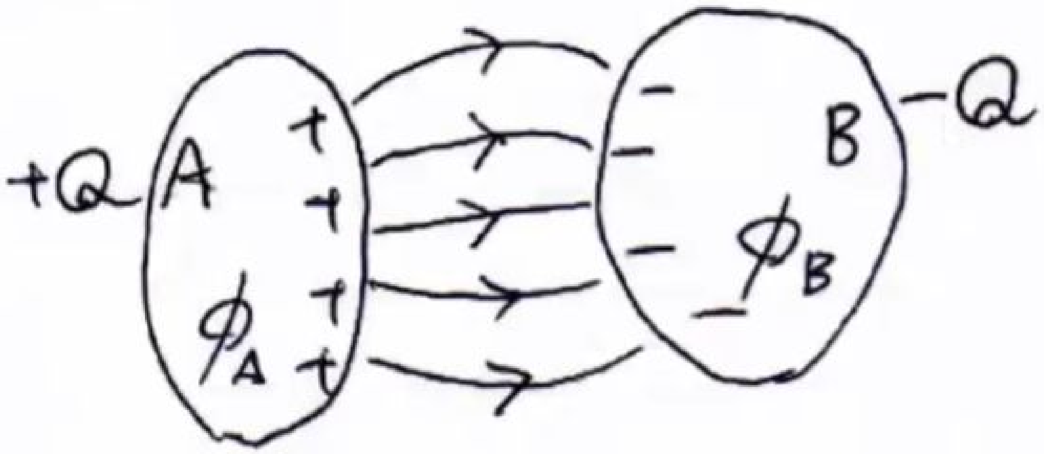
6. 誘電体（絶縁体）

6.1 コンデンサーと電気容量（キャパシター）

○孤立した2つの導体AとBに$+Q$と$-Q$の電荷をそれぞれ与える。

↓



電気力線：$A \to B$の表面

電場は主にA, Bの間にのみ存在

・このように、常に等量の逆符号の電荷を蓄える仕組をコンデンサー（キャパシター）という。

・導体間の電位差：$\phi_A - \phi_B \equiv V$ → "電圧"という。

単位はボルト（V）

電荷 Q と V は比例：$Q = \underset{\sim}{C} V$

電気容量（キャパシタンス）

単位はファラド（F）

○ 導体に電荷 Q を与えるとエネルギーが増大。

静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})\,dV_{体}$ 体積

に対し、導体では ϕ ＝ 一定より、

$$U = \frac{1}{2}\phi \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})\,dV_{体}}_{=Q} = \frac{1}{2}\phi Q$$

コンデンサー：2つの導体 A と B に $+Q$ と $-Q$

電位 ϕ_A ϕ_B

$$U = \frac{1}{2}(Q\phi_A - Q\phi_B)$$

$$= \frac{1}{2}Q(\phi_A - \phi_B)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}QV}$$

$Q = CV$ より、

$\underline{U = \frac{1}{2}CV^2}$ （コンデンサーの静電エネルギー）

- $U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV_{体}$

電荷 ⇒ 電場ができる

⇓

電場のエネルギー

平行平板コンデンサー：

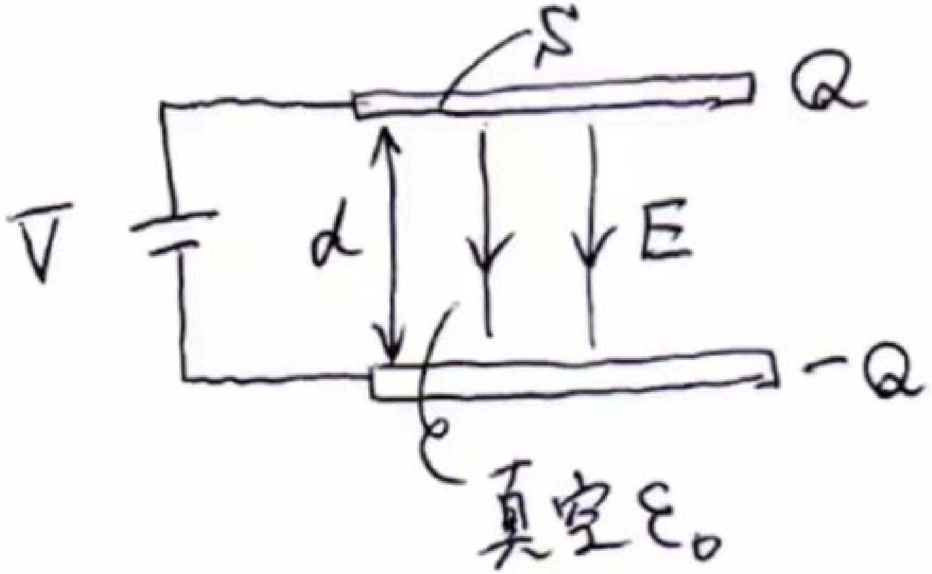
• $U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})\,dV_{体}$

電荷 ⇒ 電場ができる

⇓

電場のエネルギー

平行平板コンデンサー：



エネルギーの体積密度をuとすると、

$$U = u \times Sd \qquad E = \frac{V}{d}$$

一方、$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times \varepsilon_0 \frac{S}{d} \times (Ed)^2$

、真空 ε_0

エネルギーの体積密度を u とすると、

$$U = u \times Sd$$

$$E = \frac{V}{d}$$

一方、$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times \varepsilon_0 \frac{S}{d} \times (Ed)^2$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{Sd}_{V_{体}}$$

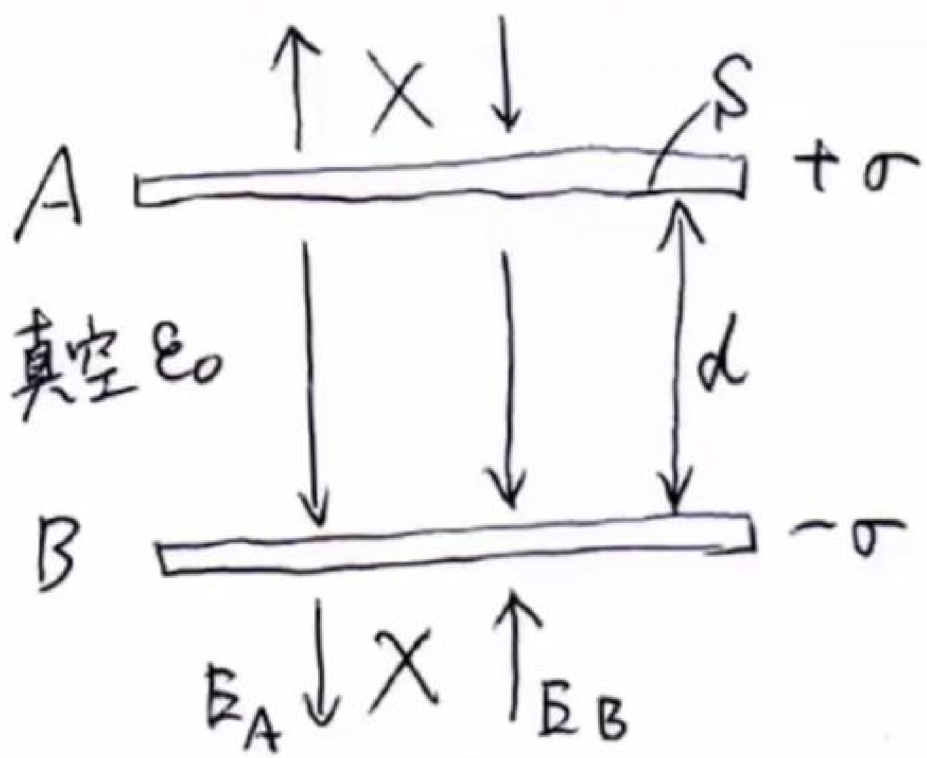
ゆえに、 $\underline{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

(一般化)

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})^2$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r})^2 \, dV_{体}$$

1) 平行平板コンデンサー (p.83、[3])



全電荷 $Q = \sigma S$

打消 ⟶ 極板間のみ電場

cf. 演習 p.37 [2] (2)

ガウスの法則より、

$$E_A = E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

電場：$E = E_A + E_B = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (1) $\left(= \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)$

σ

(1)

q を持ち込んだときに、q に働く力：$F = qE = q\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (2)

電位差(電圧)：$V = Ed = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}d$ (3) $\left(= \dfrac{d}{\varepsilon_0 S}Q\right)$

$\uparrow$

$E = \dfrac{V}{d}$

電気容量：$Q = CV$ より、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d} = \varepsilon_0\frac{S}{d} \quad (4)$$

S に比例し、d に反比例

↳ S を変化させて C を変化：可変容量コンデンサー

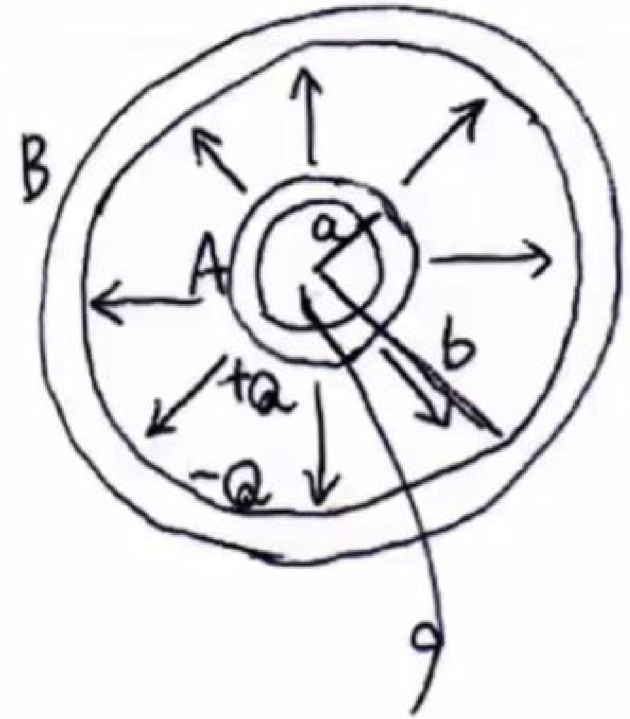
静電エネルギー：$u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

$$U = uV_{体} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2\cdot Sd = \frac{Sd\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (5)$$

$\left(= \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}QV\right)$

2) 同心球殻コンデンサー (p.77、例2)

半径aとb (a<b)の同心球殻状の導体から作られるコンデンサーの電気容量を求めよ。



※中空でなく、導体球でも状況は同じ。

※ $C=\dfrac{Q}{V}$ $V=-\int E\,ds$

・電場はAB間 $(a<r<b)$ にのみ存在、球対称のガウスの法則より、

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

・電位差：$V=\phi_A-\phi_B$

$$=-\int_b^a E\,dr$$

$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\,dr$$

導体球でも
状況は同じ。

・電位差：$V = \phi_A - \phi_B$

$$= -\int_b^a E\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^{-1}\right]_b^a$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

・電気容量：$C = \dfrac{Q}{V}$

$$= 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

※幾何学的な大きさで
決まる。

(p.83 演習[1])

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

・電気容量：$C = \frac{Q}{V}$

$$= 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

※幾何学的な大きさで決まる。

(p.83、演習[1])

半径 a の孤立導体球の電気容量 C を求めよ。

$b \to \infty$ とすると、$C_A = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty}\right)^{-1} \simeq 4\pi\varepsilon_0 a$

また、無限遠方の電位 $\phi_B = 0$ とすれば、$V = \phi_A - \phi_B = \phi_A$

$\longrightarrow$ $Q_A = C_A V = C_A \phi_A$ より、$C_A = \frac{Q_A}{\phi_A}$