量子力学（4/13）課題　　8222124　柳下 恭輔

〈運E の導出〉

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{2m} P(p)\, dp$$

$$= \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \cdot C e^{-\frac{1}{2mk_BT} p^2} dp \quad \cdots ①$$

（ただし C は比例定数）

ここで $\frac{1}{2mk_BT} = a$ … ★ とおくと

$$① = \frac{C}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-ap^2} dp$$

$$= \frac{C}{2m} \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$= \frac{C}{4ma} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \cdots ②$$

次に C を求める

$-\infty \leq p \leq \infty$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(p)\, dp = 1$$

$$\therefore C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2} dp = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2} dp}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad \cdots ③$$

$$② = \frac{1}{4ma}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (\because ③)$$

$$= \frac{k_B T}{2} \quad (\because ☆)$$

//

〈位E の導出〉

$$\left\langle \frac{1}{2}kx^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}kx^2 P(x)\,dx$$

$$= \frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot D e^{-\frac{E_p}{k_B T}}\,dx$$

(ただし D は比例定数)

$$= \frac{Dk}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{k}{2k_B T}x^2}\,dx \quad \cdots ④$$

ここで $\frac{k}{2k_B T} = b \cdots ⓑ$ とおくと

$$④ = \frac{Dk}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-bx^2}\,dx$$

$$= \frac{Dk}{2}\cdot\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad \cdots ⑤$$

D を C と同様に求めると

$$D = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \quad \cdots ⑥$$

$$⑤ = \frac{k}{4b}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{\pi}} \quad (\because ⑥)$$

$$= \frac{k}{4b}$$

$$= \frac{k_B T}{2} \quad (\because ⓑ)$$

//