応用数学 課題　8223036　栗山 淳

演習

例題にならって、次の微分方程式を解け.

(1) $y' + y = x$

(2) $y' + y = \sin x$

(3) $xy' + y = \sin x$

(4) $xy' + y = e^x$

(1) まず、同次方程式を考える

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y}dy = dx$$

両辺を積分して

$$-\int \frac{1}{y}dy = \int dx \qquad -x - C_1$$

$$\Leftrightarrow -\log|y| = x + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-x-C_1}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-x} e^{-C_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^{-C_1} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y = C \cdot e^{-x} \quad (C : 任意定数,\ \pm e^{-C_1} = C)$$

次に定数変化法： $C \to C(x)$

$y = C(x)e^{-x}$ が与式(非同次方程式)を満たすように、$C(x)$ を求めてやればよい.

与式より

$$\frac{d}{dx}\{C(x)e^{-x}\} + C(x)e^{-x} = x$$

$$\left\{e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) + C(x)\underbrace{\frac{d}{dx}e^{-x}}_{-e^{-x}}\right\} + C(x)e^{-x} = x$$

0

$$e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) = x$$

$$\frac{d}{dx}C(x) = xe^{x}$$

両辺を x で積分して

$$\int dC(x) = \int xe^{x}\,dx$$

$$xe^x - \int e^x dx$$

[

$$-xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$-e^{-x}$$

$$C(x) = xe^{x} - e^{x} + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

ゆえに、

$$y = C(x)e^{-x}$$

$$= (xe^{x} - e^{x} + C_2)e^{-x}$$

$$= x - 1 + C_2 e^{-x}$$

非同次方程式の一般解

(2)

$$y' + y = \sin x$$

まず、同次方程式を考える

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{y}\,dy = dx$$

両辺を積分すると

$$-\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \ -\log|y| = x + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$\Leftrightarrow \ y = \pm e^{-C_1} \cdot e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ y = C \cdot e^{-x} \quad (C : 任意定数 ; \ C = \pm e^{-C_1})$$

次に定数変化法： $C \rightarrow C(x)$

$y = C(x)e^{-x}$ が与式(非同次方程式)を満たすように、$C(x)$ を求めてやればよい。

与式より

$$\frac{d}{dx}\{C(x)e^{-x}\} + C(x)e^{-x} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \ \Big\{e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) + \underbrace{C(x)\underbrace{\frac{d}{dx}e^{-x}}_{-e^{-x}}\Big\} + C(x)e^{-x}}_{0} = \sin x$$

$$e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}C(x) = e^{x}\sin x$$

$$\int e^{x}\sin x\,dx = e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x\,dx$$

$$\rightarrow \int e^{x}\sin x\,dx = e^{x}\sin x - e^{x}\cos x - \int e^{x}\sin x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ \int e^{x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x)$$

両辺を x で積分すると

$$\int dC(x) = \int e^{x}\sin x\,dx$$

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

ゆえに

$$y = C(x)\cdot e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C_2 e^{-x}$$

非同次方程式の一般解

(3)

$$xy' + y = \sin x$$

まず、同次方程式を考える

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

両辺を積分すると

$$-\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \quad -\log|y| = \log|x| + C_1 \quad (C_1：積分定数)$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = \frac{1}{|x|} \cdot e^{-C_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm e^{-C_1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = C \cdot \frac{1}{x} \quad (C：任意定数)$$

次に 定数変化法 $C \to C(x)$

$y = C(x) \cdot \frac{1}{x}$ が与式(非同次方程式)を満たすように、$C(x)$ を求めてやればよい。

与式より

$$x \frac{d}{dx}\left\{ C(x) \cdot \frac{1}{x} \right\} + C(x) \cdot \frac{1}{x} = \sin x$$

$$\left((x)^{-1} \right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot C(x) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \cdot C(x) + C(x) \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) \right\} + C(x) \cdot \frac{1}{x} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \cdot C(x) - \cancel{\frac{1}{x} C(x)} + \cancel{C(x) \cdot \frac{1}{x}} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \cdot C(x) = \sin x$$

両辺を x で積分すると

$$\int dC(x) = \int \sin x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad C(x) = -\cos x + C_2 \quad (C_2 : \text{積分定数})$$

ゆえに

$$y = \frac{1}{x} C(x)$$

$$= -\frac{\cos x}{x} + \frac{C_2}{x}$$

非同次方程式の一般解

(4) $xy' + y = e^x$

まず 同次方程式を考える.

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

両辺を積分して

$$\Leftrightarrow -\int\frac{1}{y}dy = \int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow -\log|y| = \log|x| + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$\Leftrightarrow y = C\cdot\frac{1}{x} \quad (C : 任意定数)$$

次に定数変化法 : $C \to C(x)$

$y = \frac{1}{x}C(x)$ が与式(非同次方程式)を満たすように, $C(x)$ を求めてやればよい

与式より

$$x\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}C(x)\right)\right) + \frac{1}{x}C(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow x\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(C(x)) + C(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} + \frac{1}{x}C(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow x\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(C(x)) - C(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right\} + \frac{1}{x}C(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(C(x)) - \cancel{\frac{1}{x}C(x)} + \cancel{\frac{1}{x}C(x)} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(C(x)) = e^x$$

$\Leftrightarrow$ 両辺を x で積分して

$$\int dC(x) = \int e^x dx$$

$$\Leftrightarrow C(x) = e^x + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

ゆえに

$$y = \frac{1}{x}C(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{C_2}{x}$$

非同次方程式の一般解