2023 年度 線形代数学 2 課題 9

学科 AM科　　学籍番号 8223036　　氏名 栗山淳

問 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とするとき, A の固有値と各固有値の固有空間を求めよ.

$$g_A(t) = \left| \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -1 & t-1 & 2 \\ -1 & -1 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)(t-1)(t+1) + 4 - (2(t+1) - 2(t-1))$$

$$= (t^2-1)(t-1) + \cancel{4} - \cancel{4}$$

$$= (t+1)(t-1)^2$$

よって A の固有値 $\lambda = 1, -1$

$\lambda = 1$ とする. $(E-A)x = 0$ の解空間が A の固有値 $\lambda = 1$ の固有空間である.

このとき $E - A$ を簡約化すると

$$E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので, $(E-A)x = 0$ の解は

$$x = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$x_1 + 2x_3 = 0$

$x_2 - 2x_3 = 0$

$x_3 = c$ とすれば

$x_1 = -2c$

$x_2 = 2c$

従って

$$W(1; A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\} \text{ (固有空間)}$$

$\lambda = -1$ とする. 同様にして $-E - A$ を簡約化すると

$$-E - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので, $(-E-A)x = 0$ の解は

$$x = c\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

従って

$$W(-1; A) = \left\{ c\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\} \text{ (固有空間)}$$