微分積分学１

担当：石川（a07315@rs.tus.ac.jp）

内容：1 変数関数の微分積分（各回の内容はシラバス参照）

成績：中間試験（50 点満点）と期末試験（80 点満点）の合計点のみ（出席は成績に含めない）

点数	成績
60 点以上 70 点未満	C
70 点以上 80 点未満	B
80 点以上 90 点未満	A
90 点以上 130 点以下	S

過去問：なし（担当が変わったため）

第 1 章　準備

§1　集合

数の集合を表す記号として

$\mathbb{N}$　自然数全体（自然数 natural number の頭文字）

$\mathbb{Z}$　整数全体（ドイツ語の zahl の頭文字／英語は integer）

$\mathbb{Q}$　有理数全体（商 quotient の頭文字／英語は rational number）（書き方 $\mathbb{R}$）

$\mathbb{R}$　実数全体（実数 real number の頭文字）　（覚える）→

$\mathbb{C}$　複素数全体（複素数 complex number の頭文字）

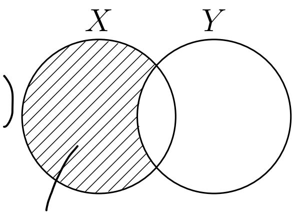
また，集合 X, Y に対して

$$X \cap Y \quad や \quad X \cup Y$$

は知っていると思うが

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \notin Y\}$$

（XからYを除く）



$X \setminus Y$

もときどき使う．

さらに，$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\} \qquad （有界閉区間）$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad （有界開区間）$$

や

$$[a, b), \quad (a, b], \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, a], \quad (-\infty, a), \quad (-\infty, \infty)$$

なども知っていると思う．最後の区間は $\mathbb{R}$ である．

[は等号が含まれ，

(は等号が含まれない．

§2 論理

命題（真偽が定まるもの）P, Q に対して，次のような記号を用いることにする．

（$\overline{P}$ は使わない）

とがらせる

$\neg P$	P でない（否定）
$P \wedge Q$	P かつ Q
$P \vee Q$	P または Q
$P \Rightarrow Q$	P ならば Q

また，命題が変数 x を含むとき，変数 x に着目したものを $p(x)$ で表し，x を変数とする述語という．このとき

(1) すべての x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\forall x[p(x)] \qquad (\leftarrow \text{All, Any の A を半回転した記号})$$

とかく．

(2) ある x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\exists x[p(x)] \qquad (\leftarrow \text{Exist の E を半回転した記号})$$

とかく．

※「$p(x)$ をみたす x が存在する」でもよい．

定理 1.1 （De Morgan（ド・モルガン）の定理）

$p(x)$ を述語とするとき，次が成り立つ．

(1) $\neg(\forall x[p(x)]) \equiv \exists x[\neg p(x)]$

(2) $\neg(\exists x[p(x)]) \equiv \forall x[\neg p(x)]$

さらに，$p(x), q(x)$ を述語とするとき

(1) $q(x)$ をみたすすべての x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\forall x(q(x))[p(x)]$$

とかく．

※ $\forall x(q(x))[p(x)]$ は $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$ と同じことである．

(2) $q(x)$ をみたすある x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\exists x(q(x))[p(x)]$$

とかく．

※ $\exists x(q(x))[p(x)]$ は $\exists x[q(x) \wedge p(x)]$ と同じことである．

定理 1.2 （De Morgan の定理）

$p(x), q(x)$ を述語とするとき，次が成り立つ．

(1) $\neg(\forall x(q(x))[p(x)]) \ \equiv\ \exists x(q(x))[\neg p(x)]$

(2) $\neg(\exists x(q(x))[p(x)]) \ \equiv\ \forall x(q(x))[\neg p(x)]$

証明

$$
\begin{aligned}
\text{(1)}\quad \neg(\forall x(q(x))[p(x)]) &\equiv \neg(\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]) \\
&\equiv \neg(\forall x[(\neg q(x)) \vee p(x)]) \\
&\equiv \exists x[\neg((\neg q(x)) \vee p(x))] \\
&\equiv \exists x[q(x) \wedge (\neg p(x))] \\
&\equiv \exists x(q(x))[\neg p(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(2)}\quad \neg(\exists x(q(x))[p(x)]) &\equiv \neg(\exists x[q(x) \wedge p(x)]) \\
&\equiv \forall x[\neg(q(x) \wedge p(x))] \\
&\equiv \forall x[(\neg q(x)) \vee (\neg p(x))] \\
&\equiv \forall x[q(x) \Rightarrow (\neg p(x))] \\
&\equiv \forall x(q(x))[\neg p(x)]
\end{aligned}
$$

よって，示された． ∎

例 1.1

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})[x^2 \geqq 0]$ $\quad\leftarrow \forall x(x \in \mathbb{R})[x^2 \geqq 0]$ の略記（以下も同様）

読み方：すべての実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ である．

真偽：真

$\xrightarrow[\text{否定}]{}$ $(\exists x \notin \mathbb{R})[x^2 < 0]$ ×

$(\exists x \in \mathbb{R})[x^2 < 0]$ ○

(2) $(\exists x \in \mathbb{R})[x^2 \leqq 0]$

読み方：ある実数 x に対して $x^2 \leqq 0$ である．
$x^2 \leqq 0$ をみたす実数 x が存在する．

真偽：真（$x^2 \leqq 0$ をみたす実数 x として $x = 0$ がとれる）

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[x < y]$ $\quad\leftarrow$ 一般に，y は x に依存して定まる

読み方：すべての実数 x に対して，ある実数 y が存在し $x < y$ である．
すべての実数 x に対して，$x < y$ をみたす実数 y が存在する．

真偽：真（すべての実数 x に対して，$x < y$ をみたす実数 y として $y = x + 1$ がとれる）

(4) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[x < y]$ $\quad\leftarrow$ 一般に，y は x に依存しないで定まる

読み方：ある実数 y が存在し，すべての実数 x に対して $x < y$ である．
ある実数 y で，すべての実数 x に対して $x < y$ であるようなものが存在する．

真偽：偽（すべての実数 x を上からおさえる一定の実数 y は存在しない）

※ (4) の否定は

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})[x \geqq y]$$

であって，これは真であるから，(4) は偽であると判断してもよい．

∀ や ∃ が複数だと……

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[\quad] \Longleftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[\quad]$$

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[\quad] \Longleftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})[\quad]$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[\quad] \underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow} (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[\quad]$$

y は x に依存する
（x ごとに変わってよい）

y は x に依存しない
（y は一定）

§3 関数

高校で

n 次関数，有理関数，指数関数，対数関数，三角関数

などは扱ってきた．微分積分では，指数関数と対数関数は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

（値は $e = 2.71828\cdots$ である）

を底とすることが多い．

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^2	$2.70481382942\cdots\cdots$
10^4	$2.71814592682\cdots\cdots$
10^6	$2.71828046931\cdots\cdots$
10^8	$2.71828181486\cdots\cdots$
10^{10}	$2.71828182832\cdots\cdots$

指数関数　　e^x

対数関数　　$\log x$　または　$\ln x$

※数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ が収束することの証明は p.13 にある．

逆 $\sin^2 x = (\sin x)^2$ ○

$\sin^{-1} x = (\sin x)^{-1}$ ×

大学では，逆三角関数や双曲線関数も必要である．

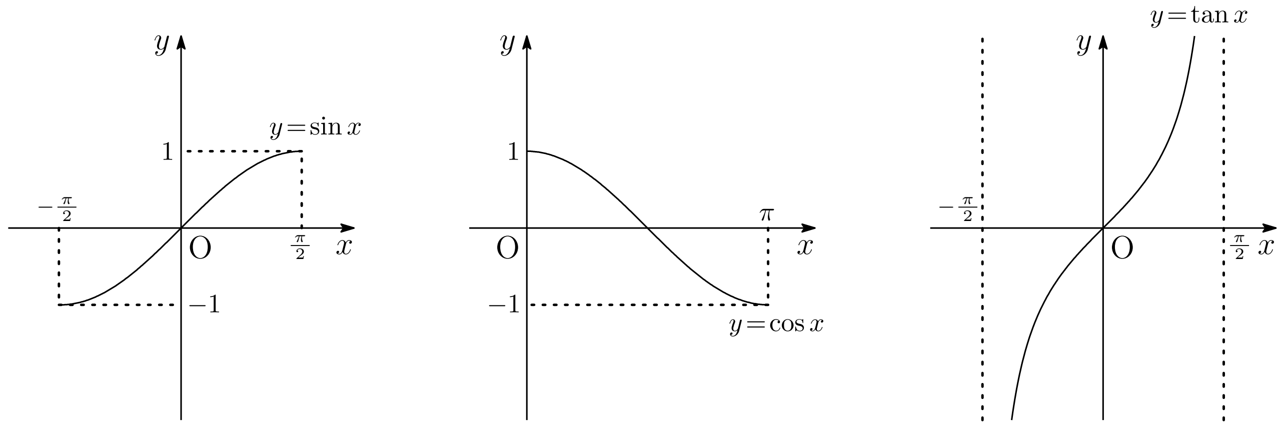
単調関数で成り立つ

逆三角関数

(1) $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ の逆関数を arcsin（アークサイン）で表す.（または $\sin^{-1}$）

(2) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ の逆関数を arccos （アークコサイン）で表す.

(3) $\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数を arctan（アークタンジェント）で表す.



例 1.2

次の値を求めよ．

(1) $\sin\left(\arctan\dfrac{12}{5}\right)$

(2) $2\arctan\dfrac{1}{2}-\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{18}$

解答

(1) $\arctan\dfrac{12}{5}=\alpha$ とおくと　　$\tan\alpha=\dfrac{12}{5}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

底辺が 5，高さが 12 の直角三角形の斜辺は 13 であるから　　$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$

よって　　$\sin\left(\arctan\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{12}{13}$

(2) $\arctan\dfrac{1}{2}=\alpha,\ \arctan\dfrac{1}{5}=\beta,\ \arctan\dfrac{1}{18}=\gamma$ とおくと

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2},\ \tan\beta=\dfrac{1}{5},\ \tan\gamma=\dfrac{1}{18}\ \left(0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan 2\alpha=\frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{5}}=\frac{20-3}{15+4}=\frac{17}{19}$$

$$\tan(2\alpha-\beta+\gamma)=\frac{\dfrac{17}{19}+\dfrac{1}{18}}{1-\dfrac{17}{19}\cdot\dfrac{1}{18}}=\frac{306+19}{342-17}=\frac{325}{325}=1$$

ここで，$0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<2\alpha-\beta+\gamma<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから　　$2\alpha-\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

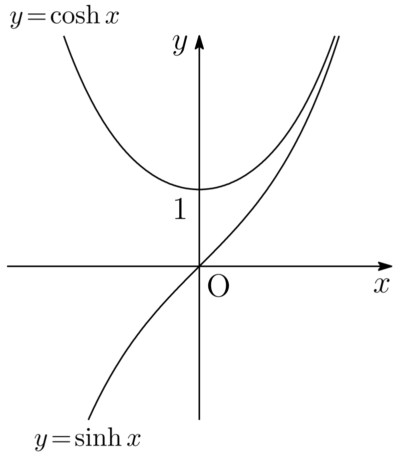
よって　　$2\arctan\dfrac{1}{2}-\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{18}=\dfrac{\pi}{4}$

双曲線関数

(1) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ （ハイパボリックコサイン）

(2) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ （ハイパボリックサイン）

(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ （ハイパボリックタンジェント）



例 1.3

$\sinh^{-1} x$ を求めよ.

解答

$y = \sinh x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすると

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$(e^x)^2 - 1 = 2ye^x$$

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$e^x > 0$ より $\quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$$\therefore \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

よって $\quad \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

第 2 章　実数の連続性と数列の極限

高校でも 1 変数関数の微積分を学んではいるが，直感的な説明で済ませることがほとんどであった．微積分を厳密に展開していくためには

- 実数のとらえ直し　（四則演算，大小関係，連続性の公理または順序完備性を備えたもの）
- 極限の厳密な定義　（ε-n_0 式定義，ε-δ 式定義）

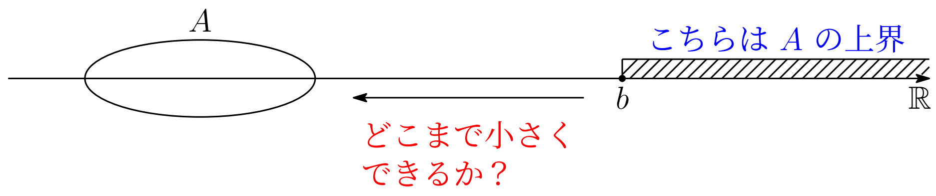
が必要である．この授業では「すべて厳密に」というわけにはいかないので，授業プリントは抜粋したものだけ紹介する．完全版は別のプリントにして LETUS にアップする（後日）ので，将来厳密な扱いが必要になったら参考にしてほしい．

§1　実数

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする．

(1) $(\exists b \in \mathbb{R})(\forall a \in A)[a \leqq b]$

が成り立つとき，A は上に有界であるといい，このような b を A の上界という．



また，A の上界全体に最小数があるとき，それを A の上限といい，$\sup A$ で表す．

(2) $(\exists b \in \mathbb{R})(\forall a \in A)[b \leqq a]$

が成り立つとき，A は下に有界であるといい，このような b を A の下界という．また，A の下界全体に最大数があるとき，それを A の下限といい，$\inf A$ で表す．

(3) A が上に有界かつ下に有界のときは，A は単に有界であるという．

この授業では，実数を

　　四則演算，大小関係（順序）

と次の公理を備えたものとしてとらえる．

公理（順序完備性）

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする．

(1) A が上に有界ならば $\sup A$ が存在する．

(2) A が下に有界ならば $\inf A$ が存在する．

※これは連続性の公理（数直線には穴がないということを数学的に表現したもの）と同値である．連続性の公理や他の同値なものを公理とする流儀もあるが，これから出てくるいくつかの定理を証明するにはこの公理が都合がよい．

※ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ と順に構成していけば，この公理も証明できる（実数論）が，非常に手間と時間のかかる作業になるから授業で扱うのは現実的ではない．そこで通常は，この公理を認めて微積分を始めている．

§2 数列の収束・発散

$\{a_n\}$ を実数列とする．

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする．

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$ 　　$\leftarrow \varepsilon > 0$ は十分小さいものを想定

$|a_n - a| < \varepsilon$ は $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ のことであるから，かみ砕いて表現すると

「a のどんなに近くにも ある番号 より先の項はすべて そこに含まれる」

となる．

これは，$\{a_n\}$ が近づいていますという自己申告ではなく，極限値 a の立場に立ってここまで近くに来てくださいと要請し，それに数列が答えられたら近づいていると判断する，という定義の仕方．

が成り立つとき，$\{a_n\}$ は a に収束するといい，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とかく．また，a を $\{a_n\}$ の極限値という．

(2) $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は発散するという．
発散するうち，次は極限が存在する．

(i) $(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \geqq K]$ 　　$\leftarrow K > 0$ は十分大きいものを想定

かみ砕いて表現すると

「どんなに大きい値に対しても ある番号 より先の項はすべて それより大きい」

となる．

が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とかく．

(ii) $(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \leqq -K]$

が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とかく．

定理 2.1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = ka$ 　（k は定数）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ 　$(b \neq 0)$

定理 2.2 （Archimedes（アルキメデス）の原理）

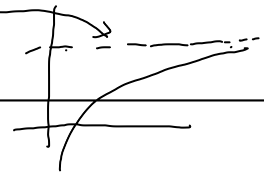
$a > 0,\ b > 0$ とすると $(\exists n \in \mathbb{N})[na > b]$

※これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であることが分かる．

定理 2.3（はさみうちの定理）

$a_n \leqq c_n \leqq b_n\ (n \in \mathbb{N}),\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c,\ \lim_{n\to\infty} b_n = c \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$

グラフに天井がある



定理 2.4（単調数列の収束定理）

(1) 単調増加で上に有界な数列は収束する．

(2) 単調減少で下に有界な数列は収束する．

例 2.1

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ とおく．数列 $\{a_n\}$ は単調増加で上に有界であるから収束する．この極限値を Napier（ネピア）の数といい e で表す．値は $e = 2.718281828459045\cdots$ である．

証明

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ とおくと，二項定理より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

である．$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = {}_n\mathrm{C}_0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 2 + \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

であり，$k = 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k! \cdot n^k} \\ &= \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \end{aligned}$$

であることに注意する．

(i) $n \geqq 2$ のとき，$k = 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \\
&< \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}{k!} \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

よって　　$a_n < a_{n+1}$ $(n \geqq 2)$

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$k = 2, \ldots, n$ に対して

$$ {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} < \frac{1}{k!} \leqq \frac{1}{2^{k-1}} $$

であるから

$$ a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 $$

よって　　$a_n < 3$ $(n \geqq 2)$

以上 (i), (ii) より，$\{a_n\}$ は単調増加で上に有界である．
よって，単調数列の収束定理より，$\{a_n\}$ は収束する．　■

§3　実数の完備性

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が狭義単調増加であるとする．

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は

定義域が $\mathbb{N}$（左側）で関数値が $\mathbb{N}$（右側）に属す関数 φ

のことを表す（今後もこの表し方を用いる）．
この φ が狭義単調増加であるとは

$$(\forall n \in \mathbb{N})[\varphi(n) < \varphi(n+1)]$$

を満たすことである．

数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{a_{\varphi(n)}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という．例えば

$\varphi(n) = 2n$ ならば　　$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \ldots$

$\varphi(n) = n^2$ ならば　　$a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \ldots$

である．

※部分列 $\{a_{\varphi(n)}\}$ は数列 $\{a_n\}$ から「項を取り出す」感じである．ただし「取り出す順番」が大事であって，φ が狭義単調増加ということは,「次々先の方で項を取り出す」ということである．例えば

$$a_1, a_3, a_7, a_9$$

の順に取り出した後で戻って a_5 を取り出しても

$$a_1, a_3, a_7, a_9, a_5 \qquad (\leftarrow a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 \text{ としてはいけない})$$

となるので，これでは部分列にならないことに注意する．

定理 2.6（Bolzano-Weierstrass（ボルツァノ ワイエルストラス）の定理）

有界な数列は収束する部分列をもつ．

数列 $\{a_n\}$ が

$$\lim_{l,m\to\infty} |a_l - a_m| = 0$$

すなわち

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall l, m \in \mathbb{N})[l, m \geqq n_0 \Rightarrow |a_l - a_m| < \varepsilon]$$

（ある番号 より先の項はすべて お互い十分近い
ということ.）

を満たすとき，$\{a_n\}$ を Cauchy（コーシー）列という.

定理 2.7（実数の完備性）

$\{a_n\}$ を実数列とすると

$\{a_n\}$ が収束 $\iff$ $\{a_n\}$ が Cauchy 列

※大事なのは $[\Longleftarrow]$ であり，なぜ大事かというと

「極限値を持ち出さなくても収束することの確認ができる」

からである．そして，収束することが分かっていれば，極限値の真値が求められなくても近似値を求めておけば応用上は有効である.