2023 年度 線形代数学 2 課題 13

学科 AM科　学籍番号 8223036　氏名 栗山 淳

問 1. $\mathbb{R}[x]_2$ において内積を

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

と定義するとき, 基 $\{1, x, x^2\}$ からシュミットの方法で正規直交基をつくれ.

$v_1 = 1 \quad v_2 = x \quad v_3 = x^2$ とおく.

$\|v_1\| = (v_1, v_1) = \int_0^1 1\cdot 1\,dx = 1 \qquad \|v_2\| = (v_2, v_2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$\|v_3\| = (v_3, v_3) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2\,dx = \frac{1}{5}$

求める基を $\{u_1, u_2, u_3\}$ とおくと.

$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = 1$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\{v_2 - (v_2 u_1) u_1\} = 3\left(x - \left(\int_0^1 1\cdot x\,dx\right)\cdot 1\right)$$
$$= 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 3x - \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|}\{v_3 - (v_3 u_1) u_1 - (v_3 u_2) u_2\}$$
$$= 5\left\{x^2 - \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\cdot 1 - \left(\int_0^1 x^2\left(3x - \frac{3}{2}\right)dx\right)\cdot\left(3x - \frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$= 5\left\{x^2 - \frac{1}{3} - \left(\int_0^1 \left(3x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx\right)\cdot\left(3x - \frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$= 5\left\{x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(3x - \frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$= 5\left\{x^2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right\}$$
$$= 5x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{5}{24}$$

以上より求める基は

$$\left\{1,\ 3x - \frac{3}{2},\ 5x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{5}{24}\right\}$$