8223036 栗山淳

応用数学 第6回課題

演習

問2

物体が空気中を落下するとき、速さに比例する抵抗を受けると仮定する
そのとき、時刻tにおける速度をvとすれば、次の微分方程式が成り立つ

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$ （kは比例定数、gは重力加速度）

(1) t=0のときの初速度を0として、この微分方程式を解け

(2) 速さの2乗に比例する抵抗を受けると仮定した場合について、微分方程式をたてて、(1)と同じ初期条件のもとで解け

(1)

$$\underbrace{\frac{dv}{dt} = g - kv}_{g-kv\neq 0\text{ のとき}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g-kv}dv = dt$$

両辺を積分すると

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{g-kv}dv = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k}\log(g-kv) + C = t$$ （積分定数をCとおく）

$t=0,\ v=0$

$$-\frac{1}{k}\log g + C = 0$$

$$\frac{1}{k}\log g = C$$

よって

$$-\frac{1}{k}\log(g-kv) + \frac{1}{k}\log g = t$$

$g-kv=0$のとき

$$v = \frac{g}{k}$$

(2)

$$\underbrace{\frac{dv}{dt} = g - kv^2}_{g-kv^2\neq 0\text{ のとき}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g-kv^2}dv = dt$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{g-kv^2}dv = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{k}{2\sqrt{gk}}\int\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right) - \left(\frac{1}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right)dv = \int dt$$

$$\frac{1}{-k\left(v^2-\frac{g}{k}\right)}$$

$$\frac{1}{-k\left(v+\sqrt{\frac{g}{k}}\right)\left(v-\sqrt{\frac{g}{k}}\right)}$$

$$2\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{1}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right)\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{gk}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}\right)dv=\int dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(-\log\left|\sqrt{\frac{g}{k}}-v\right| \quad \log\left|\sqrt{\frac{g}{k}}+v\right|\right)=t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{gk}}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}\right|+C=t$$

$t=0$、$v=0$ を代入すると

$$C=0$$

よって

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}\right|=t$$

$g-kv^2=0$ のとき

$$v=\pm\sqrt{\frac{g}{k}}$$