第 3 章　1 変数関数の極限と連続性

§1　関数の極限

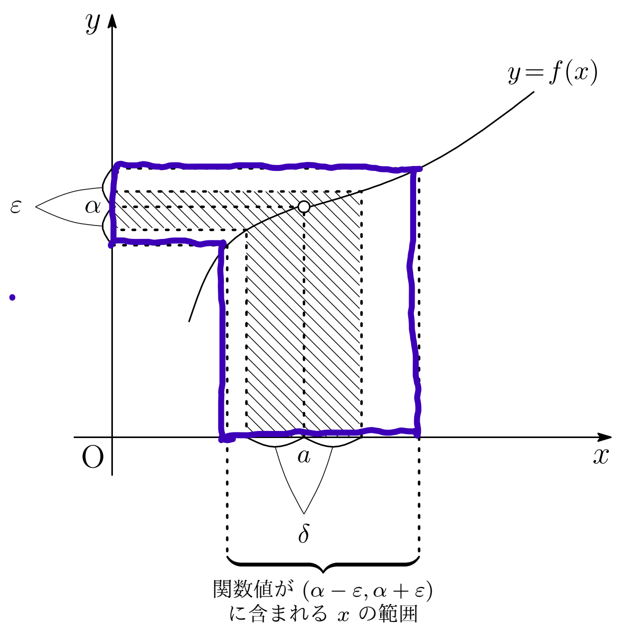
定義 3.1
(1) $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とし，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < r\}$ とおく．また，$f : X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．

(i) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon]$

（$|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ は $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$ のことであるから，かみ砕いて表現すると
「α のどんなに近くにも ある距離 より a に近い x はすべて
関数値がそこに含まれる」
となる．　極限値の立場になって考える）。

が成り立つとき，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値といい，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とかく．

※δ の定まり方のイメージ



$\varepsilon > 0$ を最初に与えたとき，関数値が $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ に含まれる x の範囲の境界と a の距離の短い方より $\delta > 0$ を小さくとると

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

を満たす．

(ii) $(\forall K>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in X)[0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>K]$

が成り立つとき，$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ とかく．

(iii) $(\forall K>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in X)[0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-K]$

が成り立つとき，$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ とかく．

※ $\lim_{x\to a+0} f(x)$ や $\lim_{x\to a-0}$ も同様に定義される．

(2) $r\in\mathbb{R}$ とし，$X=\{x\in\mathbb{R} \mid x>r\}$ とおく．また，$f:X\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とする．

(i) $(\forall \varepsilon>0)(\exists R>0)(\forall x \in X)[x>R \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon]$

（かみ砕いて表現すると

「α のどんなに近くにも ある値 より大きい x はすべて 関数値がそこに含まれる」

となる．）

が成り立つとき，α を $x\to\infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ とかく．

(ii) $(\forall K>0)(\exists R>0)(\forall x \in X)[x>R \Rightarrow f(x)>K]$

が成り立つとき，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ とかく．

(iii) $(\forall K>0)(\exists R>0)(\forall x \in X)[x>R \Rightarrow f(x)<-K]$

が成り立つとき，$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ とかく．

※ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ も同様に定義される．

定理 3.1

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha \qquad$ （k は定数）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0)$

※ $x\to\infty,\ x\to-\infty$ のときも同様である．

証明は数列のときと同様であるから省略する．

代表的な極限値

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ (n は自然数)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

定理 3.2（Cauchy の収束判定法）

$a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とし，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < r\}$ とおく．また $f : X \to \mathbb{R}$ とする．
$x \to a$ のとき $f(x)$ が極限値をもつための必要十分条件は

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p, q \in X)[0 < |p-a| < \delta,\ 0 < |q-a| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon] \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことである．　xがaに十分近ければ　関数値は
お互いに十分近い

証明

（必要性）

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とする．

$\varepsilon > 0$ を任意にとると，

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\left[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

よって，$p, q \in X,\ 0 < |p-a| < \delta,\ 0 < |q-a| < \delta$ のとき

$$|f(p) - f(q)| = |\{f(p) - \alpha\} - \{f(q) - \alpha\}| \leqq |f(p) - \alpha| + |f(q) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

より，$(*)$ が成り立つ．

（十分性）

$(*)$ が成り立つとする．

$\varepsilon > 0$ を任意にとると，$(*)$ より

$$(\exists \delta > 0)(\forall p, q \in X)\left[0 < |p-a| < \delta, 0 < |q-a| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

そこで，$n > \dfrac{1}{r}$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = a + \dfrac{1}{n}$ とおくと，$\{x_n\}$ は X 内の数列で a に収束するから，この $\delta > 0$ に対して

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \delta]$$

よって，$l, m \in \mathbb{N},\ l, m \geqq n_1$ のとき

$$x_l, x_m \in X, \quad 0 < |x_l - a| < \delta, \quad 0 < |x_m - a| < \delta$$

であるから　$|f(x_l) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

より $\{f(x_n)\}$ は Cauchy 列であるから，実数の完備性（定理 2.7）から $\{f(x_n)\}$ は収束する．極限値を α とすると

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left[n \geqq n_2 \Rightarrow |f(x_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

そこで，$n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$ とおくと

$$x_{n_0} \in X, \quad 0 < |x_{n_0} - a| < \delta$$

であるから，$x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - \alpha| &= |\{f(x) - f(x_{n_0})\} + \{f(x_{n_0}) - \alpha\}| \leqq |f(x) - f(x_{n_0})| + |f(x_{n_0}) - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

よって，　より　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$　∎

定理 3.3（Cauchy の収束判定法）

$r \in \mathbb{R}$ とし，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > r\}$ とおく．また $f : X \to \mathbb{R}$ とする．
$x \to \infty$ のとき $f(x)$ が極限値をもつための必要十分条件は

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R > 0)(\forall p, q \in X)[p > R,\, q > R \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon]$$

が成り立つことである．

§2　関数の連続性

定義 3.2
I を区間とし，$f : I \to \mathbb{R}$ とする．$a \in I$ として，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ……① すなわち

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)[|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$

が成り立つとき，f は a で連続であるという．a が I の端点でないときは

$$① \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

である．一方，a が I の端点のときは，① は片側極限で考える．また，f が I の各点で連続であるとき，f は I で連続であるという．

定理 3.4

(1) f, g が区間 I で連続なとき

$$kf\ （k \text{ は定数}），\quad f + g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$$

も I で連続である．

(2) f, g がそれぞれ区間 I, J で連続とする．$f(I) \subset J$ ならば，合成関数 $g \circ f$ も I で連続である．ここで，$f(I)$ は f の値域を表す．

(3) f が 区間 I で狭義単調かつ連続とする．f の値域を J とすると，逆関数 f^{-1} も J で連続である．

定理 3.5

I を区間とし，$f : I \to \mathbb{R}$ とする．f が $a \in I$ で連続なとき

$\{x_n\} : I$ 内の数列，$\lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ （点列連続）

証明
f を $a \in I$ で連続とし，$\{x_n\}$ を I 内の数列で $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ を満たすとする．

$\varepsilon > 0$ を任意にとると，f は a で連続であるから

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)[|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

この $\delta > 0$ に対して，$\lim_{n \to \infty} x_n = a$ であるから

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta]$$

よって，$n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0$ のとき，$x_n \in I$ とあわせて　$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

より　$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$　∎

定理 3.6（Weierstrass の最大値定理）

f が $[a,b]$ で連続 $\Longrightarrow$ f は $[a,b]$ で最大値と最小値をとる

証明

f を $[a,b]$ で連続な関数とする．

証明の方針

まず f の値域が有界であることを示し，公理から，f の値域に上限と下限が存在することを確認する．次にこれら上限と下限が関数値として実現できることを示す．

(Step 1)

f の値域を $A=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ とおく．

A が有界 でないと仮定すると

$$\neg\,(\exists M>0)(\forall x\in[a,b])[|f(x)|\leqq M]$$

すなわち

$$(\forall M>0)(\exists x\in[a,b])[|f(x)|>M]$$

そこで，$M=n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる x を t_n とかくと

$$t_n\in[a,b],\qquad |f(t_n)|>n\qquad (n\in\mathbb{N})$$

$\{t_n\}$ は有界であるから，B-W（定理 2.6，以下同様）より，$\{t_n\}$ は収束部分列 $\{t_{\psi(n)}\}$ をもつ．極限値を s とすると，$s\in[a,b]$ であり，f は $[a,b]$ で連続であるから

$$\lim_{n\to\infty}f(t_{\psi(n)})=f(s)\qquad\cdots\cdots①$$

一方

$$|f(t_{\psi(n)})|>\psi(n)\geqq n\to\infty\qquad(n\to\infty)$$

であるから，① と矛盾する．

よって，A は有界であるから，公理より

$$\alpha=\sup A,\qquad \beta=\inf A$$

が存在する．

(Step 2)

$\alpha=\sup A$ であるから，上限の特徴付け（完全版参照）より

$$\alpha \text{ は } A \text{ の上界}\qquad\cdots\cdots②$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x\in[a,b])[\alpha-\varepsilon<f(x)]\qquad\cdots\cdots③$$

③ において，$\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる x を x_n とかくと

$$x_n\in[a,b],\qquad \alpha-\frac{1}{n}<f(x_n)\qquad(n\in\mathbb{N})$$

$\{x_n\}$ は有界であるから，B-W より，$\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ をもつ．極限値を c とすると，$c\in[a,b]$ であり，f は $[a,b]$ で連続であるから

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(c) \quad \cdots\cdots④$$

一方，② より

$$\alpha - \frac{1}{n} \leqq \alpha - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leqq \alpha \quad (n \in \mathbb{N})$$

そして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n}\right) = \alpha$ であるから，はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \alpha \quad \cdots\cdots⑤$$

④, ⑤ より $\alpha = f(c)$ となるから　　$\alpha = \max A$

$\beta = \min A$ も同様.　　∎

定理 3.7（中間値の定理）

f が $[a,b]$ で連続であるとする．

(1) $f(a) < f(b)$ のとき

$$f(a) < \mu < f(b) \quad \Longrightarrow \quad (\exists c \in (a,b))[f(c) = \mu]$$

(2) $f(a) > f(b)$ のとき

$$f(a) > \mu > f(b) \quad \Longrightarrow \quad (\exists c \in (a,b))[f(c) = \mu]$$

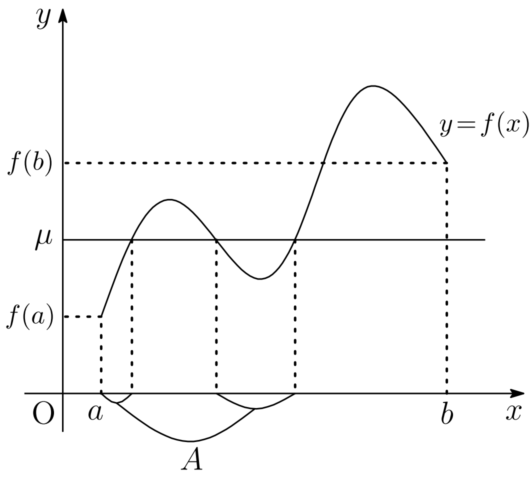
証明

(1) f を $[a,b]$ で連続，$f(a) < f(b)$ とする．

$f(a) < \mu < f(b)$ を満たす μ を任意にとり

$$A = \{x \mid a \leqq x \leqq b,\ f(x) < \mu\}$$

とおくと，$f(a) < \mu$ より $a \in A$ となるから $A \neq \emptyset$ であり，$A \subset [a,b]$ より A は有界である．よって，公理より $\sup A = c$ が存在する．このとき $a \leqq c \leqq b$ である．



(i) $\sup A = c$ であるから，上限の特徴付けより

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)[c - \varepsilon < x \leqq c]$$

そこで，$\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ として定まる x を x_n とかくと

$$x_n \in A, \quad c - \frac{1}{n} < x_n \leqq c \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(c - \frac{1}{n}\right) = c$ であるから，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = c$ である．また，$x_n \in A$ より $f(x_n) < \mu$ $(n \in \mathbb{N})$ である．よって，f の連続性より

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqq \mu$$

(ii) $a \leqq c \leqq b$ であるが，$f(c) \leqq \mu < f(b)$ より $a \leqq c < b$ である．よって，十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$c + \frac{1}{n} \in [a,b], \quad c < c + \frac{1}{n}$$

であるから

$$c + \frac{1}{n} \notin A \qquad \therefore\ f\left(c + \frac{1}{n}\right) \geqq \mu$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(c + \frac{1}{n}\right) = c$ であるから，f の連続性より

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f\left(c + \frac{1}{n}\right) \geqq \mu$$

以上 (i), (ii) より

$$f(c) = \mu \quad (a \leqq c < b)$$

であるが，$f(a) < \mu = f(c)$ であるから $a < c < b$ である．

(2) は (1) と同様であるから省略する．　∎

※ f が $[a, b]$ で連続であるとする．Weierstrass の最大値定理より

$$\text{最大値 } f(p),\ \text{最小値 } f(q) \qquad (p, q \in [a, b])$$

をとるから，p と q の間の区間（端点も含む）で中間値の定理を適用すれば，f は最大値と最小値の間の値をすべてとることがわかる．つまり，最大値を M，最小値を m とし，$m \leqq \mu \leqq M$ とすると，$f(c) = \mu$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する．

定義 3.3

f を区間 I で定義された実数値関数とする．

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in I)[|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$

を満たすとき，f は I で一様連続であるという．

※（各点）連続と一様連続の違い

f は I で（各点）連続

$\iff (\forall x' \in I)[f$ は x' で連続$]$

$\iff (\forall x' \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)[|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\forall x' \in I) \underbrace{(\exists \delta > 0)}_{\varepsilon\text{ と }x'\text{ に依存}} (\forall x \in I)[|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$

$\Longleftarrow (\forall \varepsilon > 0) \underbrace{(\exists \delta > 0)}_{\varepsilon\text{ にのみ依存}} (\forall x' \in I)(\forall x \in I)[|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in I)[|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$

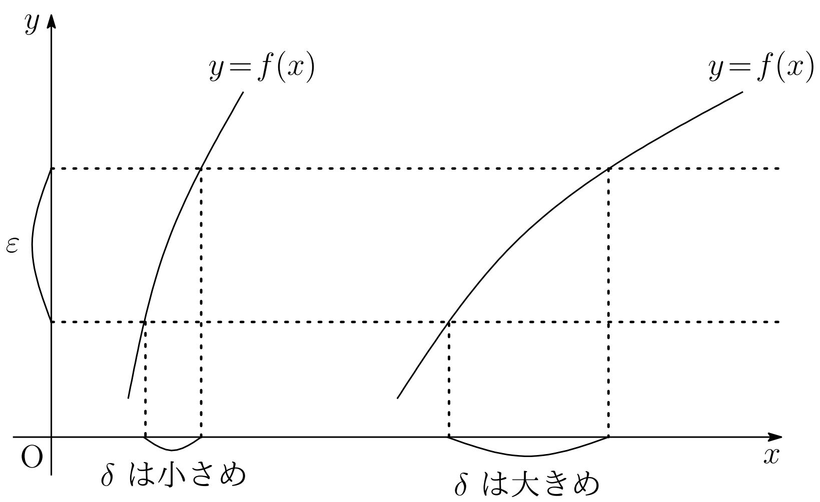
$\iff f$ は I で一様連続

であるから，それぞれのイメージは

- （各点）連続 …… 場所ごと δ のとり方が異なる
- 一様連続 …… 場所によらず δ のとり方が同じ

ということになる．

※δ の決まり方は下図のようになるから，グラフに最も急な場所があれば，そこで決まる δ は他の場所でも共通に使えることが分かる．つまり，グラフがそんなに急でない連続関数は一様連続であり，例えば y 軸に平行な漸近線をもつ場合のようにグラフが限りなく急になっている場合は一様連続でない，というイメージで理解してもよい．このような理解があれば，次の定理は明らかであるように思える．



定理 3.8

$f:[a,b]$ で連続 $\quad\Longrightarrow\quad$ $f:[a,b]$ で一様連続

証明

f が $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，f が $[a,b]$ で一様連続でないと仮定すると

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x,x'\in[a,b])[|x-x'|<\delta\wedge|f(x)-f(x')|\geqq\varepsilon]$$

そこで，$\delta=\dfrac{1}{n}>0$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる $x,x'\in[a,b]$ をそれぞれ x_n,x_n' とかくと

$$x_n,x_n'\in[a,b],\quad |x_n-x_n'|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(x_n')|\geqq\varepsilon\quad(n\in\mathbb{N})$$

となる．$\{x_n\}$ は有界であるから，B-W より，$\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ をもつ．極限値を $c\in[a,b]$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}x_{\varphi(n)}=c,\quad |x_{\varphi(n)}-x'_{\varphi(n)}|<\frac{1}{\varphi(n)}\leqq\frac{1}{n}\to0\quad(n\to\infty)$$

より $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}x'_{\varphi(n)}=c$

よって，f の連続性より $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}|f(x_{\varphi(n)})-f(x'_{\varphi(n)})|=|f(c)-f(c)|=0$

これは $|f(x_{\varphi(n)})-f(x'_{\varphi(n)})|\geqq\varepsilon$ であることに矛盾する．

したがって，f は $[a,b]$ で一様連続である． ∎

今日

中間値の定理と最大値の定理を理解する.