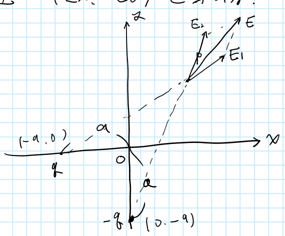
(演習) 図のように xy 平面上に 2つの電荷 q と $-q$ があるとき、点 $P(x,y)$ における $E=(E_x, E_y)$ を求めよ.



解) ※ 点Pは xy 上の任意の点

$$E = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-(-a)}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3}, \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3}, 0\right)$$

$$E_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}^3}, \frac{y-(-a)}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}^3}, 0\right)$$

$$\left(E_2 = \frac{|-q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}^3}, \frac{-(y-(-a))}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}^3}, 0\right)\right)$$

※ 正電荷は、正の向きと距離ベクトル $\hat{r}_{qp}$ が一致。一方、負電荷は、向きが逆。

⇓

電荷 or 距離ベクトルに "−" を付ける.

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x+a}{((x+a)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y}{((x+a)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

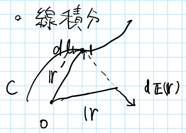
・連続的電荷分布による電場

◦分布の仕方：線、面、体積（バルク）

⇓

電荷量：電荷分布を微小部分に分割し、各部分を点電荷と見なして、それぞれが作る電場を合成すればよい。→ 積分

◦ 線積分



線電荷密度 λ [C/m]
$\mathbf{r}$ の位置の線分素 dl [m] $\Big\}$ $dq = \lambda dl$

dq が $\mathbf{r}$ の位置に作る電場 $dE(\mathbf{r})$：

$$dE(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\mathbf{r}')dl(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

⇓

曲線C

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dl$$

・面積分

面電荷密度 σ [C/m²]

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dS$$

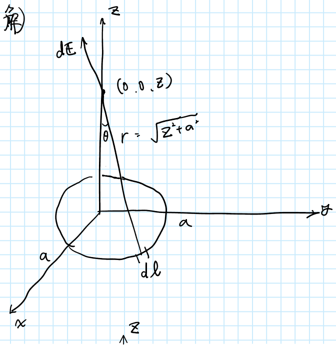
・体積分

(体積) 電荷密度 ρ [C/m³]

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV$$

(例題)
電荷が xy 平面上の円環（中心：原点、半径：a）に線密度 λ で一様に分布している場合の z 軸上の点P(0, 0, z) における電場を求めよ

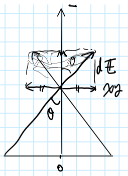
解)



一様な線電荷密度 λ
円環上の線分長 dl $\Big\}$ $dq = \lambda dl$

dq が作る電場 dE：

$$\text{大きさ } |dE| = dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dl}{z^2+a^2}$$



⇒ 幾何学的に、z成分以外は打ち消し合う。

⟶ 向き：z軸方向

$$dE_z = dE\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\, dl}{z^2+a^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

大きさ：$E_z = \int_C dE_z = \int_0^{2\pi a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dl$

↳ lの関数ではない。

（zもaもlに対して独立変数）

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi a} dl$$

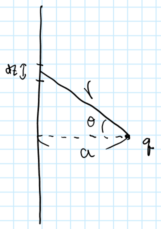
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,[l]_0^{2\pi a}$$

$$= \frac{2\pi a}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

（演習）

無限に長い直線状の棒に電荷が一様に線電荷密度λで分布している。
このとき、図に示すように、棒からaだけ離れた電荷qに働く力を求めよ



ある部分が受ける力 $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\lambda dz}{r^2}\cos\theta = \frac{q\lambda\cos^2\theta\, dz}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\theta$

（水平成分のみ）

$$dq = \lambda dz$$

$$r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$z = a\tan\theta$ より $\frac{dz}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow dz = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

全体が受ける力 $F = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\lambda dz}{r^2}\cos\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{q\lambda\cancel{\cos^2\theta}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{a}{\cancel{\cos^2\theta}}\cdot\cos\theta\, d\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{q\lambda \cancel{a}}{4\pi\varepsilon_0 a^{\cancel{2}}}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\,[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

h