

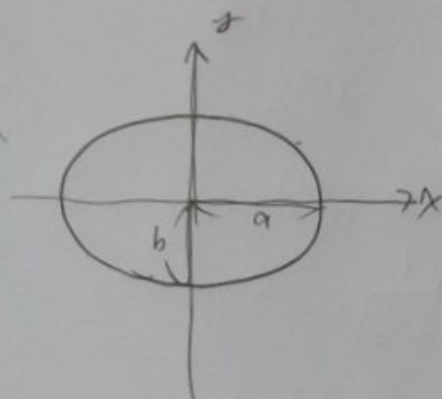
問題 1



次の断面2次モーメントを導いてください。

$$I = \int_{-R}^R y^2 x dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \sin \theta)^2 \cdot 2r \cos \theta \cdot r \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi d^4}{64}$$



$$I = \int_{-b}^b y^2 x dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (b \sin \theta)^2 \cdot a \cos \theta \cdot b \cos \theta \cdot d\theta$$

$$= ab^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} ab^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{8} ab^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} ab^3 \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} ab^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\pi - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(-2\pi) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{8} ab^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{8} ab^3 \pi$$

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = b \cos \theta$$

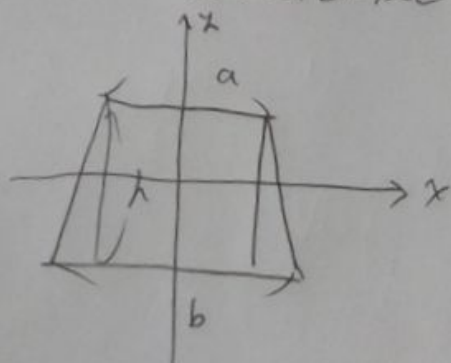
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)$$

問題 2

次の断面2次モーメントを導いてください。



台形の断面積 $A = \frac{1}{2}(a+b)h$

台形の重心 $y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$

長方形の2次モーメント $I_{\text{rect}} = \frac{1}{12} ah^3$

左部の三角形の2次モーメント $I_{\text{tri-left}} = \frac{1}{36} (b-a)h^3$

右部の三角形の2次モーメント $I_{\text{tri-right}} = \frac{1}{36} (b-a)h^3$

断面全体の2次モーメント

$$I = I_{\text{rect}} + I_{\text{tri-left}} + I_{\text{tri-right}}$$

$$= \frac{1}{12} ah^3 + \frac{1}{36} (b-a)h^3 + \frac{1}{36} (b-a)h^3$$

$$= \frac{1}{12} ah^3 + \frac{1}{18} bh^3 - \frac{1}{18} ah^3 = \frac{1}{36} ah^3 + \frac{1}{18} bh^3$$