ベクトルポテンシャル（Vector potential）

?

電場

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \xleftrightarrow{\text{ガウス則}} \phi(\boldsymbol{r})$

静電ポテンシャル

スカラーポテンシャル

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$$

電荷密度と電場の関係式

磁場

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \xleftrightarrow{\text{ビオサバール則}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

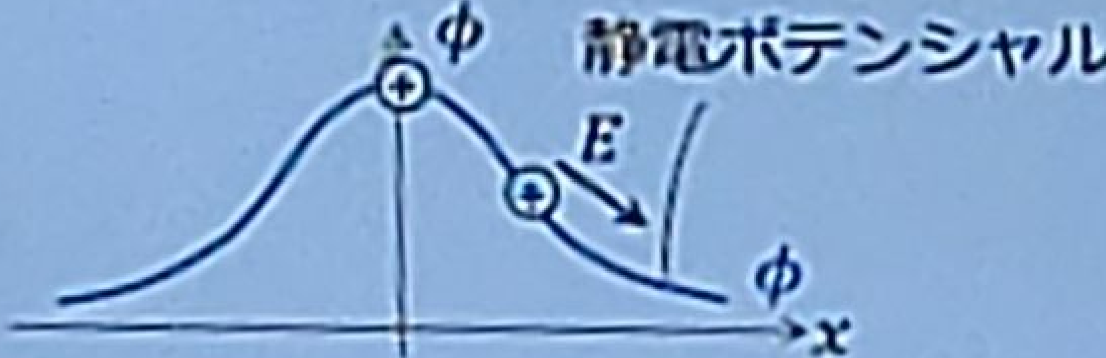
ベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

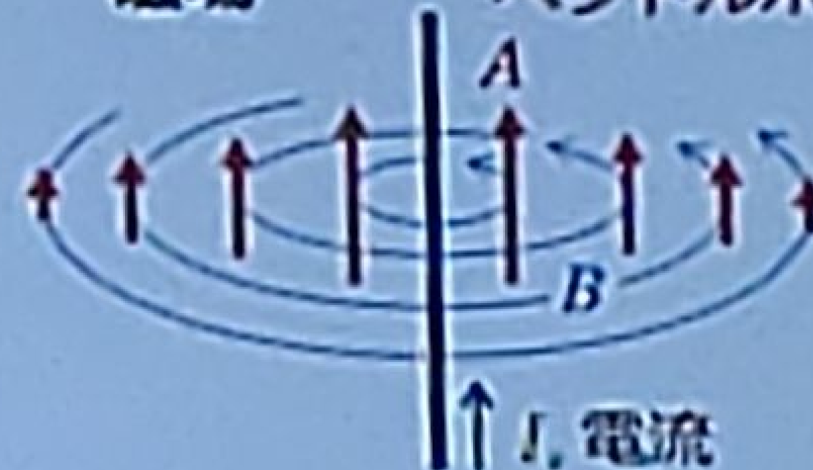
電流密度と磁場の関係式

ベクトルポテンシャルとは？

電場（電荷）



磁場　ベクトルポテンシャル



電流(密度)で発生する磁場を
ポテンシャルとして表現したい

⬇

ビオ・サバール則　外積
ベクトル表記

⬇

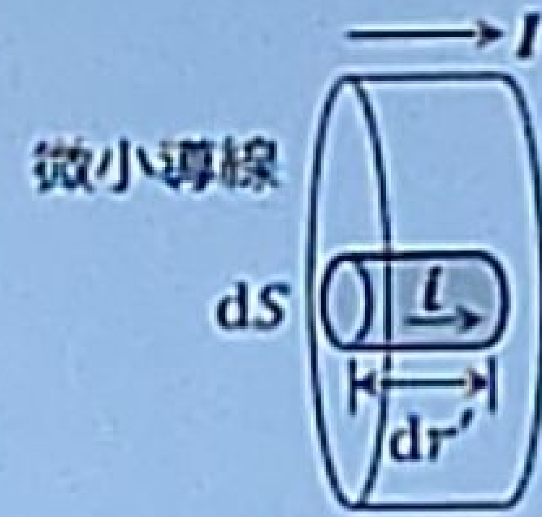
ポテンシャルをベクトルで表現

Point

- 電流で定まる
- 位置(r)で定まる　＋　数学的な整合性
- 方向と大きさをもつ

ビオ・サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$



電流密度$\boldsymbol{i}$を導入

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$

導線全体の体積

$$I \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}V'$$

ここでベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$ と置くと

$$\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \right)$$ でもOK

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$ とかける ?

証明は次ページで

（電場　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \cdot \phi(\boldsymbol{r})$　と対応する式）

証明（例題１）

代入して確認

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times A$ のx成分を求める

$$B_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_C \frac{\mathrm{d}z'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z}\int_C \frac{\mathrm{d}y'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]$$

ここで偏微分の公式

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^n} = -n\frac{(y-y')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{n+2}}$$ より

ベクトルの外積の形

$$B_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_C \frac{-(y-y')\mathrm{d}z'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} - \int_C \frac{-(z-z')\mathrm{d}y'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))_x}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$B_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))_x}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

B_y, B_zも同様に考えると

$$\underline{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}}$$

ビオ・サバール則が導かれた！

よって

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を満たす

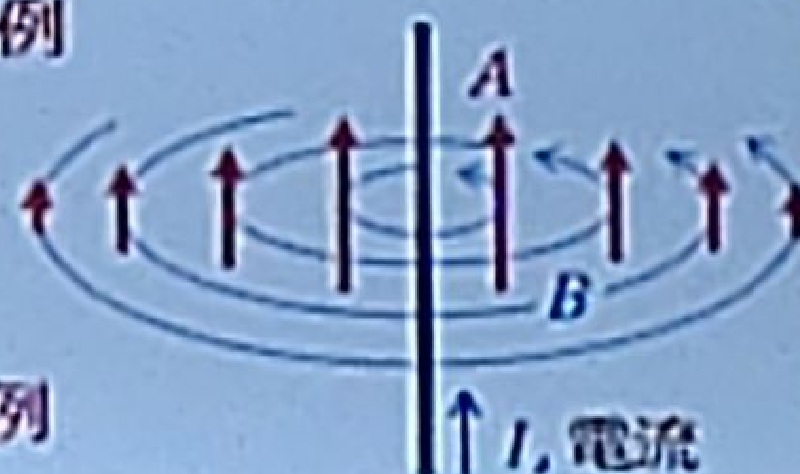
<u>ベクトルポテンシャルの意味</u>

電流に比例

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

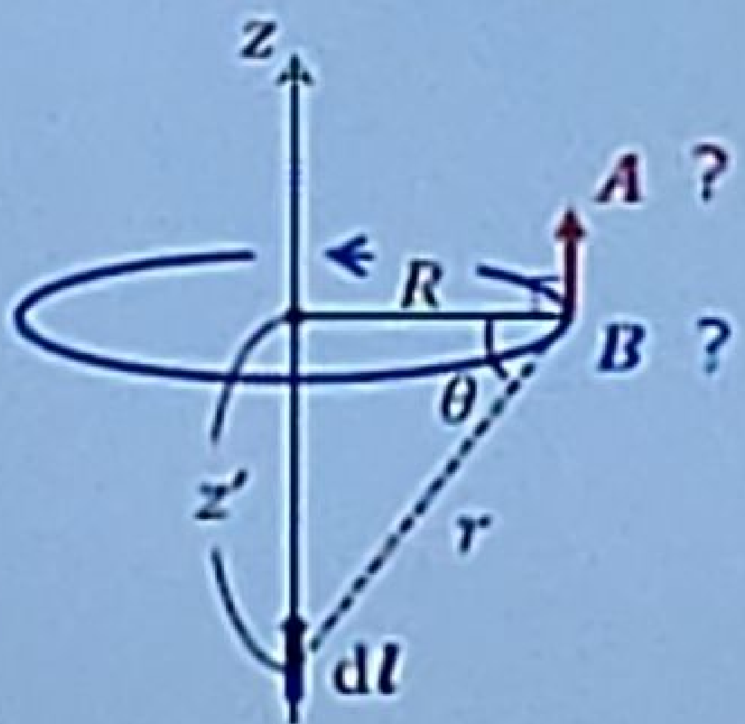
電流と平行

距離に反比例



例題２　直線電流が作るベクトルポテンシャルと磁場

$(I, \mathrm{d}\boldsymbol{l}, z')$



ベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r}$$

変数変換　$r, \boldsymbol{l} \rightarrow x, y, z$

$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \parallel z$ より　　$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}z'$

$R^2 + z^2 = r^2$, $R^2 = x^2 + y^2$ より

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A_z(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

また　$A_x = 0$,　　$A_y = 0$

$B = \nabla \times A$ より

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,\mathrm{d}z'}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{R^2}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{d}z'}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{R^2}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

$z' = R\tan\theta$ とおくと　$dz' = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$　($z' \to \theta$, 変数変換)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z'}{(R^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta = \frac{2}{R^2}$$

これより

$$|\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}$$

右ねじの法則
（ビオ・サバール則で求めた値）と一致

(p113)

ベクトルポテンシャルの性質

任意のベクトルAについて

$$\nabla(\nabla\times A) = 0$$ が成立

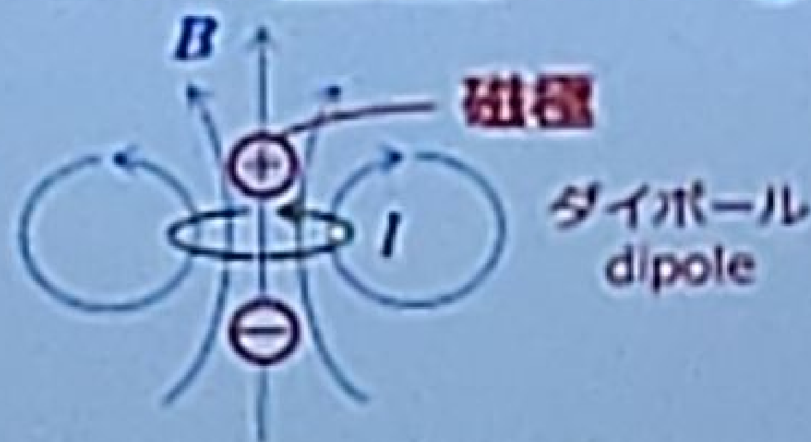
おさらい

$$\nabla(\underbrace{\nabla\times A}_{=B\text{ より}}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla\cdot B = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ガウス則

磁場の発散は本質的にゼロ !



流出と流入の差し引きゼロ

磁極(磁荷)は必ずペア

単磁極(monopole)は
存在しない

発散あり