量子力学

第2回目（4/18）

2TM　前期木曜2限

先進工学部マテリアル創成工学科　田村隆治

tamura☺rs.tus.ac.jp

認証コード: ****

今回の授業で理解できること

光のエネルギーに単位量があること

光のエネルギーは量子化されているという。

太陽の放つエネルギーの計算方法

太陽の温度と半径が分かれば計算できる。

固体の比熱と空洞放射の意外な共通点

どちらも単位体積中に蓄えられるエネルギーと
関係している。

第2回目で学ぶ内容

太陽光スペクトル（黒体放射スペクトル）の研究が、量子力学誕生のもう一つの契機となったことを学ぶ。

光（電磁波）にかかわる二つの重要な発見

プランク仮説（1900年）	今回
光量子仮説（1905年）	次回

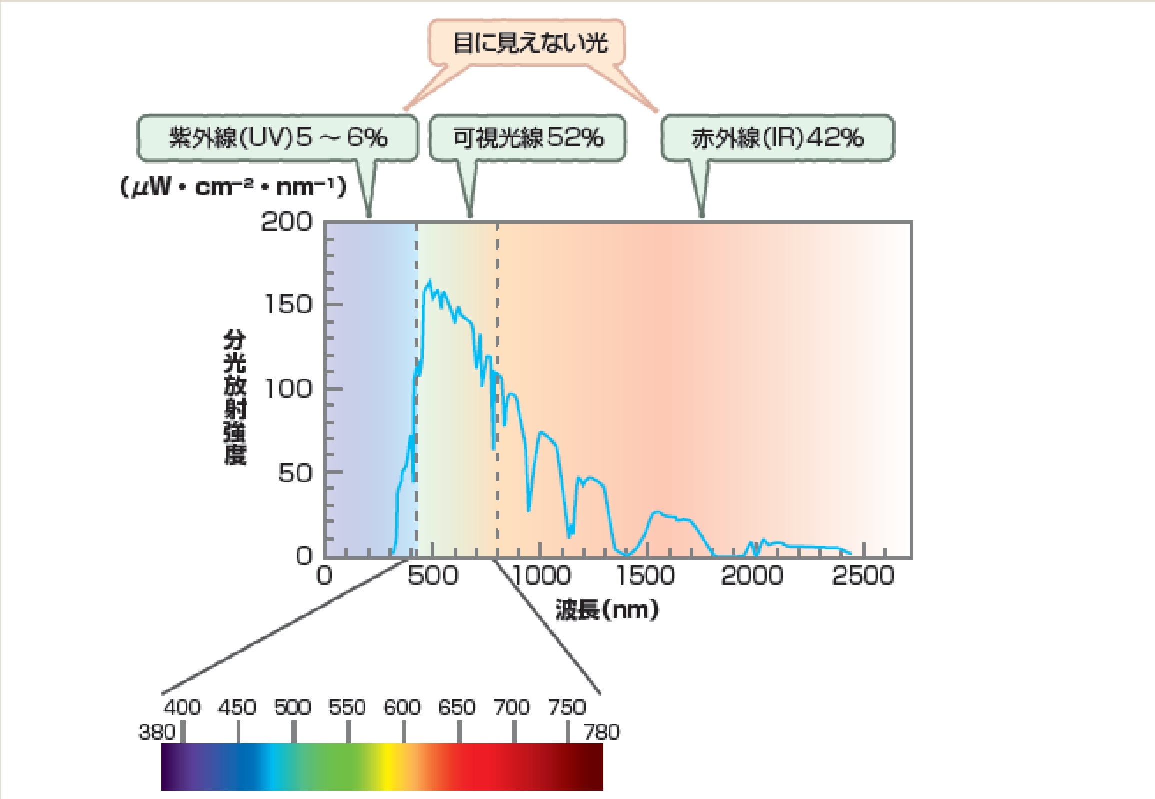
※「スペクトル」

信号を成分分解したときの各成分の強度（もしくはエネルギー）を表現したもの

光の場合は、振動数（もしくは波長）に対して、光の強度（もしくはエネルギー）を表したもの

※光量子（light quantum）：光のエネルギーの単位量

太陽光のスペクトル



太陽光の成分

可視光線(52%)

赤外線(42%)

紫外線(6%)

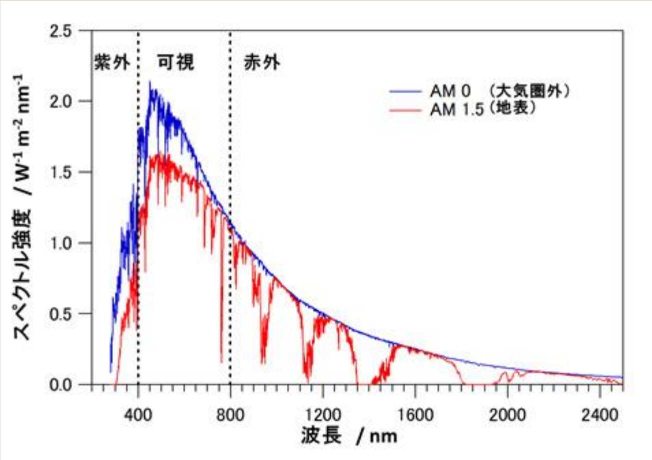
※太陽からの放射は500nm付近（可視光）に最大値が存在。一方、地球からの放射は8~12μm付近（赤外線）が最大（両者の差が地球のエネルギー源）

※地球のエネルギー収支（地球を一つの家族とみなしたときの家計！）
太陽から可視光と赤外線を受け取り、宇宙空間に赤外線を放射している。

問い：太陽光のスペクトル形状は一体どのように説明されるのだろう？

黒体（Black Body）

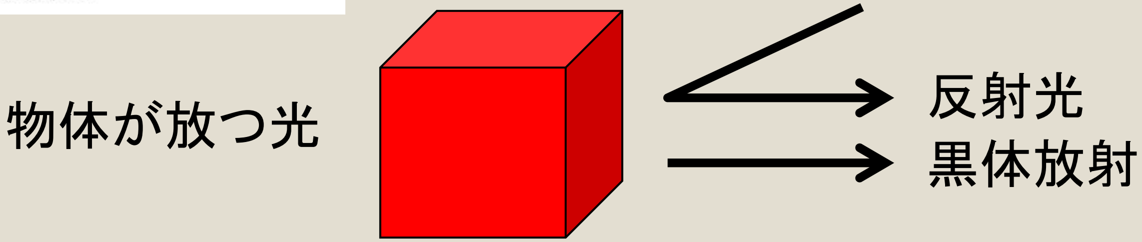
太陽光の放射スペクトル



物体は温度に応じた色を呈する。（キルヒホフ、1859年）

物体の色から物体の温度が分からないか？。
そのためには反射光を取り除く必要がある。

※19世紀後半に製鉄業が勃興し、溶鉱炉の温度を正確に知りたいという需要が背景にあった。



黒体：全ての光を（反射せずに）完全に吸収する物体

※完全な黒体は存在しない。黒体に近い物質はカーボン（吸収率95%）

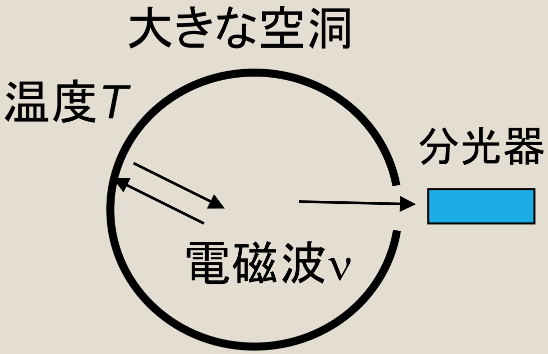
（光）
黒体放射：物質の振動エネルギーが電磁波のエネルギーに変換される現象

※前回学習したように物質は振動エネルギーを蓄える。この振動エネルギーが電磁波のエネルギーに変わる。逆も然り。

黒体放射に関する古典論

空洞放射：小さな孔を開けた大きな空洞からの放射

孔が十分小さいと反射光は孔から出られないので、黒体放射とみなすことができる。

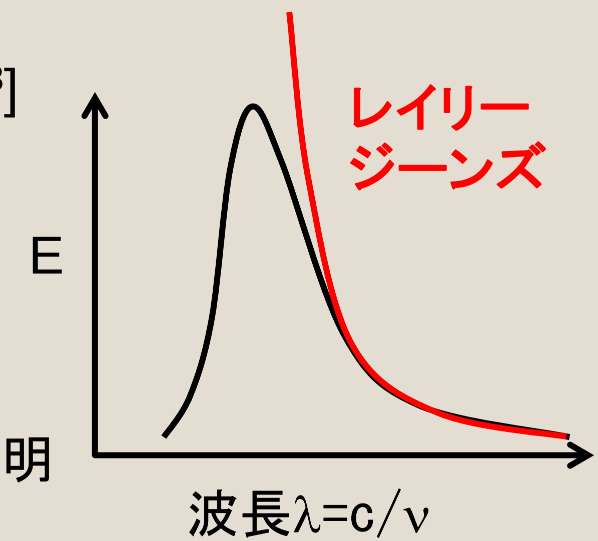


空洞内に存在する光は、空洞の壁とエネルギーのやり取りを繰り返し、温度Tだけで決まる熱平衡状態に達していると考える。

小さな孔から出てくる光は温度Tだけで決まる光のスペクトルを示すはず。

振動エネルギーから光エネルギー

黒体放射スペクトル



レーリー・ジーンズの式

振動数$\nu \sim \nu + d\nu$の電磁波のエネルギー密度 [J/m^3]

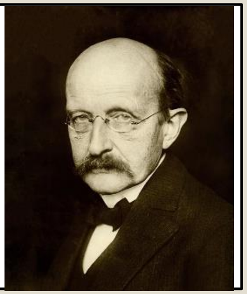
$$\boxed{\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2 d\nu}$$

※この式の意味は後で明らかになる。

この式は黒体放射スペクトルの長波長側を良く説明できるが、短波長側は全く説明できない。

プランク仮説（1900年）

振動数νの光のエネルギーは$h\nu$を単位とする。



※科学史上初めて、プランクは光のエネルギーに単位量があることに全く意図せず突き当たった。量子の発見につながったことから量子力学の父と呼ばれる。

統計力学の結論

系がエネルギーE_nをとる確率 $P(E_n)$ は、$\exp\left(-\dfrac{E_n}{k_B T}\right)$ に比例する。

温度Tにおける振動数νの光のエネルギーの期待値を求めよう。

ただし、 $E_n = nh\nu \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$ （プランク仮説）

従って、$P(E_n)$はCを比例定数として右式のように表される。

$$P(E_n) = C\exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$$

次に、Cの値を求めよう。すべての場合の確率を足し合わせると1となる。nの取り得る範囲は0から∞なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n / k_B T)} \equiv \frac{1}{Z} \text{（とおく）}$$

Z: 分配関数

振動数νの電磁波のエネルギーの期待値

レポート課題

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) \frac{1}{Z} e^{-nh\nu/k_B T} = \boxed{\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

1. *kT*が光のエネルギー間隔より十分大きい場合

熱エネルギー

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \cong \frac{h\nu}{(1 + h\nu/k_B T) - 1} = k_B T$$

*kT*のエネルギーを受け取る。

※これはエネルギー等分配則にほかならない！一つの自由度につき *kT*/2のエネルギーが分配されることを思い出そう。これは、電磁波の自由度が2であることを意味していないか。

(光)

$\frac{k_B T}{2} \times 2 = k_B T$

※電磁波は電場*E*と磁場*H*の振動であるが、各電磁波のエネルギーが一次元調和振動子のエネルギーと数学的に等価であることを示すことができる（本授業のレベルを超えるので証明は省略）。従って、電磁波の自由度は2となる。

※光は調和振動子の集まりとして数学的に理解できることがわかった。では、調和振動子の数は何個か？調和振動子の数は許されるνの数だけある。

振動数がν~ν+dνの電磁波の数(/m³)

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

導出方法は参考資料にあります。

※この式をνで積分すれば電磁波の総数が得られるが、明らかに発散する。
従って、電磁波は無限個ある。

※一つの電磁波の自由度は2なので、エネルギー等分配則を適用してみよう。
ただちにレーリー・ジーンズの式が得られる。

【古典論】振動数がν~ν+$d\nu$の電磁波のエネルギー密度 [J/m³]

$$\rho(\nu)d\nu = k_B T \cdot N(\nu)d\nu = \boxed{\frac{8\pi}{c^3}k_B T\nu^2 d\nu}$$

エネルギーの期待値

数

レーリー・ジーンズの式

※レーリー・ジーンズの式は、各電磁波に$k_B T$のエネルギーを分配したもの。

※電磁波が無限個あるためにエネルギー密度は発散する。

【古典論】電磁波のエネルギー密度 [J/m³]

$$\int_0^\infty \rho(\nu)d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3}kT\nu^2 d\nu = \frac{8\pi}{c^3}kT\left[\frac{\nu^3}{3}\right]_0^\infty = \infty$$

※聡明な人は気が付いたかも知れないが、この矛盾は実験結果を必要としない。古典統計力学に内在する自己矛盾であり、古典統計力学が理論として不完全であることを示すものである。

※電磁波の数が無限個あるので、高振動数の電磁波の期待値がゼロにならない限り、エネルギーは必ず発散する。このことはエネルギーに単位量があることを示唆していないだろうか？しかし、プランク以前に指摘した人はいない。

2. *kT*が光のエネルギー間隔より十分小さい場合

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1} = \frac{h\nu e^{-h\nu/k_BT}}{1 - e^{-h\nu/k_BT}} \cong h\nu e^{-h\nu/k_BT} (\neq k_BT)$$

*kT*のエネルギーを受け取れない。

※前回の授業では物質の比熱を学習したが、今回は空洞の比熱を考えていることになる。空洞内に物質は無い。しかし、何も無いわけでは無い。電磁波（従ってエネルギー）が充満している。光は調和振動子の集まりと見なせるので、調和振動子の集まりである物質の比熱と数学的な構造は同じである。

※物質と空洞の主な違いは、物質は調和振動子の数が3*N*個と有限個なのに対し、電磁波はすでに見たように調和振動子が無限個あることである。

プランクの熱放射式

振動数がν~ν+dνの電磁波のエネルギー密度[J/m³]

$$\rho(\nu)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu\cdot\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}=\boxed{\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu}$$

プランクの熱放射式

※ この式の意味は、（ν~ν+dνの電磁波の数）×（その期待値）である。

プランク定数 $\boxed{h=6.626\times10^{-34}\ \mathrm{Js}}$

※物理量に不連続があるとき、物理量の単位量を量子とよぶ。「量子」は「量の単位」と理解すると良い。光のエネルギーの単位は光量子（こうりょうし）と呼ばれる。

※プランク定数は古典力学には存在しない、量子力学で初めて現われる定数。従って、プランク定数が現れれば量子力学的効果である。

※プランクの熱放射式は以下に示すように、$h\to0$で古典力学に一致する。

プランクの熱放射式　　　　レーリー・ジーンズの式

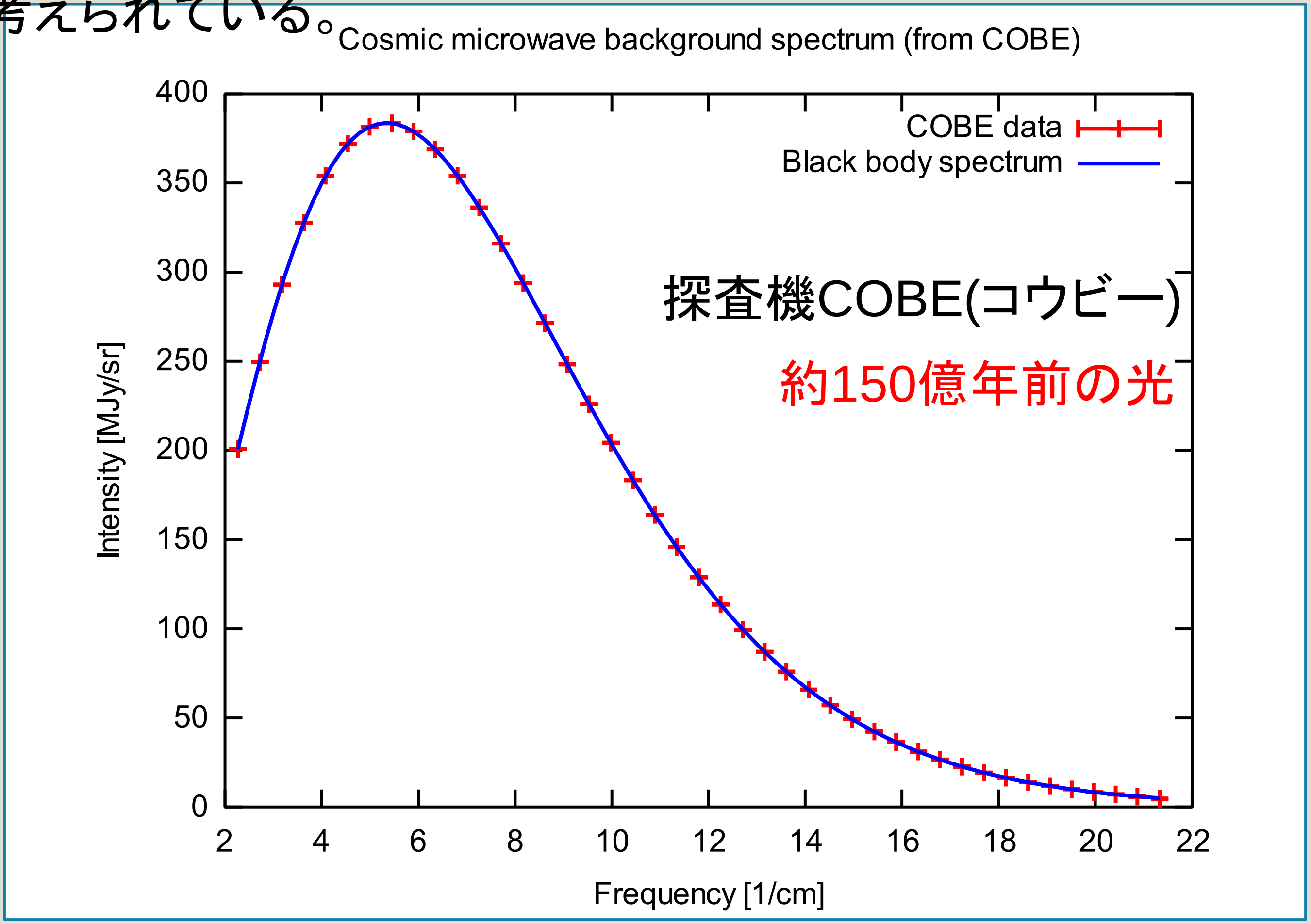
$$\rho(\nu)=\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\xrightarrow{h\to0}\rho(\nu)=\frac{8\pi}{c^3}kT\nu^2$$

参考資料:宇宙背景放射の発見(1965年)

宇宙の全天から降り注ぐ光(マイクロ波)のスペクトル

T=2.726Kの黒体放射スペクトル(プランクの熱放射式)と完全に一致。

※かつて宇宙が熱平衡状態にあったことを意味している。だとするといつの熱平衡か?約150億年前の“晴れ上がり”直前に存在した熱平衡と考えられている。



黒体放射スペクトルのピーク波長

プランクの熱放射式　$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1}d\nu$

振動数νから波長λに変数変換　$\nu = \frac{c}{\lambda}, d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\frac{c^3}{\lambda^3}}{\exp(hc/\lambda kT)-1}\frac{c}{\lambda^2}d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}d\lambda$$

$X = \frac{hc}{\lambda kT}$ とおくと、 $\rho(\lambda) = \frac{8\pi k^5T^5}{h^4c^4}\frac{X^5}{e^X-1}$

$\rho(\lambda)$が最大となるのは、 $X = \frac{hc}{\lambda kT} = 4.965$ のとき。

$\rho(\lambda)$が最大となる波長をλ_mとすると、$\lambda_m T = \frac{hc}{4.965k} = 0.002898\,\mathrm{m\cdot K}$

$\boxed{\lambda_m T = 2.90\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}}$　ウィーンの変位則

黒体放射に関する例題（15分）

ウィーンの変位則　$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$

1．太陽光スペクトルのピーク波長は約500nmである。
太陽の表面温度を推定せよ。

2．白熱灯（タングステン、2800K）のピーク波長を求めよ。

3．人間（体温36℃）からの放射のピーク波長を求めよ。

4．白熱灯（黒体放射）を照明に用いるとき、どのような無駄があるか、考えてみよう。

黒体放射に関する例題（15分）

ウィーンの変位則 $\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$

１．太陽光スペクトルのピーク波長は約500nmである。
太陽の表面温度を推定せよ。

$$T = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{500 \times 10^{-9}} = 5800(\mathrm{K})$$

太陽の表面温度は、約6000℃と考えられている。

２．白熱灯（タングステン、2800K）のピーク波長を求めよ。

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{2800} = 1.04 \times 10^{-6}(\mathrm{m}) = 1.04(\mu\mathrm{m})$$ 赤外線

黒体放射に関する例題（15分）

ウィーンの変位則　$\lambda_m T = 2.90\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}$

３．人間（体温36℃）からの放射のピーク波長を求めよ。
人間の体温を計測するにはどのような電磁波を使えば良いか。

$$\lambda_m = \frac{2.90\times10^{-3}}{36+273} = 9.39\times10^{-6}\left(\mathrm{m}\right) = 9.39\ \left(\mu\mathrm{m}\right)$$　赤外線

赤外線サーモグラフィー（非接触型体温計）は、黒体放射を利用している。

４．白熱灯（黒体放射）を照明として用いるとき、どのような無駄があるか、考えてみよう。

照明に必要なのは可視光であるが、可視光の放射は実は少なく、電力の大部分が赤外線の放射に使われてしまい、無駄である。特に夏場は余計に部屋の温度を高めてしまう。

ステファン・ボルツマンの法則

空洞内の電磁波の全エネルギー密度u[J/m^3]

$$u = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

変数変換: $x \equiv \frac{h\nu}{kT}, \nu = \frac{kT}{h} x, dx = \frac{h}{kT} d\nu$

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \frac{h(kTx/h)^3}{e^x - 1} \frac{kT}{h} dx = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

数学公式: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ $\therefore u = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3}$

※空洞内に物質は無いが、単位体積あたりこのエネルギーが蓄えられている。

※黒体からの単位時間、単位面積あたりのエネルギー放射量Kは以下の式で与えられる。

$$\boxed{K = \frac{1}{4} cu}$$

この式の導出はレポート課題とします。

【ヒント】黒体の単位面積の法線方向にz軸をとり、極座標θ, ϕを導入しよう。空洞内で電磁波はあらゆる方向に均等に進む。ところで、$\theta \sim \theta + d\theta,\ \phi \sim \phi + d\phi$方向に進む電磁波の割合は、単位球を考えたときに単位球上の面積素片$\sin\theta d\phi d\theta$が表面を占める割合に等しい。単位球の表面積は4πなので、$\theta \sim \theta + d\theta,\ \phi \sim \phi + d\phi$方向に進む電磁波のエネルギー密度は$\frac{1}{4\pi} u \sin\theta d\phi d\theta$となる。次に、この方向に進む電磁波が黒体の単位面積を単位時間にどの位通過するかを考えよう。光の速度をcとすると、1秒間に光がすすむ距離はcなので、単位面積に垂直な方向に1秒間にすすむ距離は$c\cos\theta$となる。従って、$c\cos\theta$ の体積中に含まれる電磁波が1秒間に単位面積を通過する。以上より、単位時間に単位面積を通過する$\theta \sim \theta + d\theta, \phi \sim \phi + d\phi$方向に進行する電磁波のエネルギーは$c\cos\theta \times \frac{1}{4\pi} u \sin\theta d\phi d\theta$となる。これを$\theta = 0 \sim \pi/2$、$\phi = 0 \sim 2\pi$で積分すると、$K = \frac{1}{4} cu$が得られる。

単位時間、単位面積あたりの輻射量K[J/m^3/s]

$$K = \frac{1}{4} cu = \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15 c^2 h^3} = \sigma T^4$$

ステファン・ボルツマンの法則

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.6704 \times 10^{-8}\ W/m^2 K^4$$

※黒体から放射されるエネルギーはT^4に比例する（電気ストーブの原理）。

黒体放射に関する例題(15分)

ステファン・ボルツマンの法則

$$K = 5.6704 \times 10^{-8}\ T^4 W/m^2$$

太陽から単位時間に放射されるエネルギーを計算せよ。
ただし、太陽の表面温度は5800K、半径を7.0×10^5 kmとする。

(答)$K = 4.0 \times 10^{26}\ W$

古典力学のどこに問題があるのか？

高い振動数の光にもエネルギーが分配されるとしたこと。

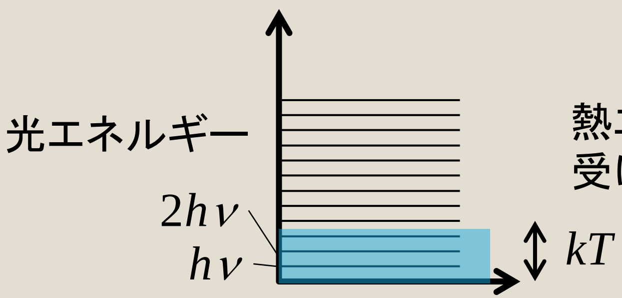
※6000Kの空洞内で波長1nm（ν=3×10^{17}[s^{-1}]）のX線が存在する確率

$$P(E_1) \cong \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{6.626\times10^{-34}\cdot 3\times10^{17}}{1.38\times10^{-23}\cdot 6000}\right) = e^{-2400} \approx 10^{-1040}$$

ゼロ！

黒体の温度と黒体から発生する光の関係

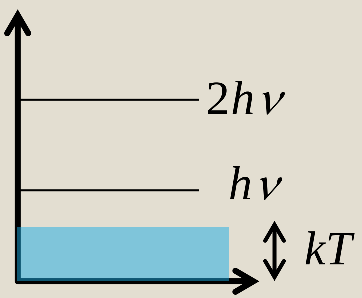
低振動数の光



熱エネルギーを
受け取る

赤外線など

高振動数の光



熱エネルギーを
受け取れない

紫外線、X線など

【低振動数】熱エネルギーがエネルギー間隔に比べて十分大きいので、*kT*の熱エネルギーを受け取る（電磁波が励起される）。

【高振動数】*kT*程度の熱エネルギーでは最低エネルギー（$h\nu$）にも足りない。（電磁波は励起されない。）

低温比熱と黒体放射の共通点

いずれのケースも、数学的な構造は多数の調和振動子からなる系の比熱に逢着する。熱エネルギー*kT*とエネルギー間隔Δ*E*の関係で状況が一変する。

$k_B T >> \Delta E$　エネルギー等分配則が成立（古典力学が成立）

$k_B T << \Delta E$　エネルギー等分配則が破綻（古典力学が破綻）

振動エネルギーや電磁波のエネルギーが量子化されていると考えれば、いずれも定性的に説明できる。

※黒体放射に関しては定量的にも説明できることを学習した。

第2回目のまとめ

以下の内容を良く消化して、人に説明できるようにしましょう。

1．古典力学では、光のエネルギーを連続量と考えるが、この考え方だと高振動数側の黒体放射スペクトルを全く説明できない。

2．光のエネルギーは振動数をνとして$h\nu$が単位になっていると考えることで（エネルギー量子化）、黒体放射スペクトルを完全に説明することができる。

※光のエネルギーに単位量（$h\nu$）が存在する。単位量の存在は、光の粒子性の発見につながった。この点については次回学習しよう。

※地球に紫外線やX線が殆ど届かないのは、エネルギー量子化のお蔭である。エネルギー量子化が無ければ地球上で人間は生きていけない。

参考資料：ν~ν+dνに含まれる定常波の数の求め方

仮定：熱平衡状態では電磁波は空洞内で定常波をつくるものとする。

一辺がLの立方体の空洞を考え、空洞中に含まれる定常波の数を数える。

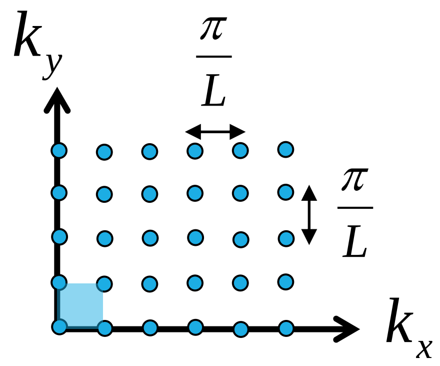
※黒体放射スペクトルは空洞の形に依らない。

定常波の条件：　$n\dfrac{\lambda}{2}=L$　　n:自然数　　$\therefore \lambda=\dfrac{2L}{n}$

波数表示：　$k\equiv\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{2\pi}{2L/n}=\dfrac{n\pi}{L}$　　π/L間隔

このように波数空間だと等間隔になって数えやすい！

2次元の場合



以上より、波数を使って定常波は以下のように表される。

$$\left(k_x,k_y,k_z\right)=\left(\frac{n_x\pi}{L},\frac{n_y\pi}{L},\frac{n_z\pi}{L}\right)$$

ただし、　$n_x,n_y,n_z=0,1,2,\cdots$

k_x,k_y,k_z>0であることに注意

体積素片 $\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^3=\dfrac{\pi^3}{V}$ につき、一つの波数kが存在

k~$k+dk$の間にある定常波の数（単位体積あたり）を$N(k)dk$とし、$N(k)$を求める。

半径kの球の薄皮（厚みdk）の体積を求めて、それを $\dfrac{\pi^3}{V}$ で割ればよい。

ただし、$k_x,k_y,k_z>0$なので、体積に1/8を掛ける。

$$N(k)dk = \frac{2}{V}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi k^2 dk}{\pi^3/V} = \frac{k^2}{\pi^2}dk$$

因子2は、電磁波は横波であり、電場の振動方向に関し2つの自由度があることによる。（一つのkにつき2つの電磁波が存在する）

波数kから振動数νへ変数変換

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}, \therefore dk = \frac{2\pi d\nu}{c}$$

$$N(k)dk = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2\frac{2\pi d\nu}{c} = \boxed{\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu}$$

ν~$\nu+d\nu$に含まれる定常波の数（単位体積あたり）

レポート課題（40分）

以下の2式を導きなさい。

プランク仮説にもとづく電磁波（振動数ν）のエネルギーの期待値

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) \frac{1}{Z} e^{-nh\nu/k_B T} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \qquad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k_B T}$$

黒体の単位時間、単位面積あたりのエネルギー放射量K

$$K = \frac{1}{4} cu \qquad \text{ただし、} u = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3}$$

ヒント>>tamura☺rs.tus.ac.jpまで

※提出方法

〆切：4/24(水)　　提出先：LETUS

フォーマット：手書き・ワープロいずれも可

ファイル形式：PDF　　ファイル名書式：”82xxxxx材料太郎.pdf”