おさらい

- ガウスの法則（電場）
- ガウスの法則（磁場）
- アンペールの法則
- ファラデーの電磁誘導の法則

統合 → **Maxwell 方程式** ⟶ 相対論
(1864)

今日のゴール

電場Eと磁場Bの対称性

E と B ・・・式の形類似している ⟶ 整理したい

基本方程式（Maxwell以前）

- ガウス則（電）　$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- ガウス則（磁）　$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$
- ファラデー則　$\int_C \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
- アンペール則　$\int_C \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$

要修正

$$\left(= \mu_0 \frac{dq}{dt}\right)$$

対称

モノポール無し

非対称

矛盾

アンペール則を変形

モノポールはないので 0

$$\begin{cases} \displaystyle\int_C E\,dl + \frac{d\Phi_B}{dt} = \qquad\qquad = \underline{0} \\[2em] \displaystyle\int_C B\,dl + \qquad\quad = \mu_0 \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

対称性が良くなった

Φ_E : 電束

$\dfrac{d\Phi_E}{dt}$: **変位電流**　を導入

磁場の変化を考えたように
電場の変化を考える

アンペール則の矛盾を修正

$$\int_C B\,dl = \mu_0 \int_{S} i \cdot n\,dS$$

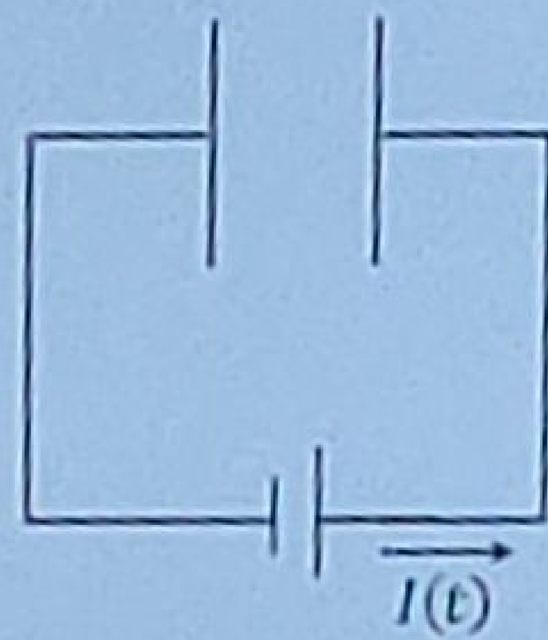
任意の面内でOK（のはず）

S_1 と S_2 で貫く電流が異なる

$$\mu_0 \int_{S_1} i \cdot n\,dS \neq \mu_0 \int_{S_2} i \cdot n\,dS$$

矛盾

$\neq 0$　　　$= 0$



変位電流の導入で解決　!

コンデンサの電場に注目

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

S：コンデンサの面積

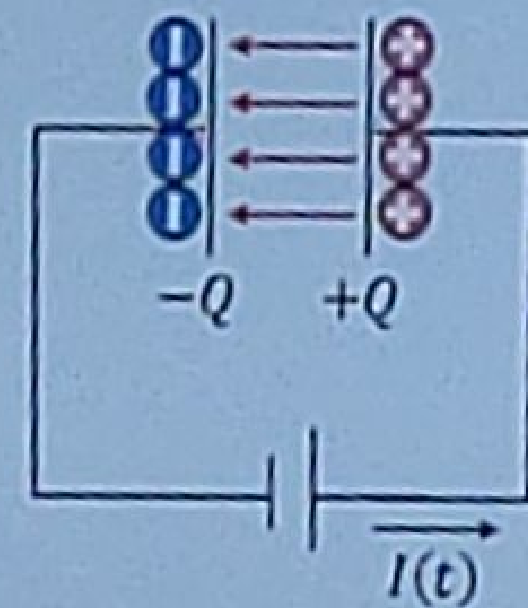
時間微分

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I(t)} = \frac{I(t)}{\varepsilon_0 S}$$

アンペール則の矛盾を修正

$$\int_C B\,dl = \mu_0 \int_{S} i \cdot n\,dS$$

任意の面内でOK（のはず）



S_1 と S_2 で貫く電流が異なる

$$\mu_0 \int_{S_1} i \cdot n\,dS \neq \mu_0 \int_{S_2} i \cdot n\,dS$$

矛盾

$\int_{S_1}$ の項 $\neq 0$、$\int_{S_2}$ の項 $= 0$

変位電流の導入で解決 !

コンデンサの電場に注目

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \underline{S}}$$

コンデンサの面積

時間微分

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I(t)} = \frac{I(t)}{\varepsilon_0 S}$$

アンペール則の矛盾を修正

$$\int_C B\,dl = \mu_0 \int_S i \cdot n\,dS$$

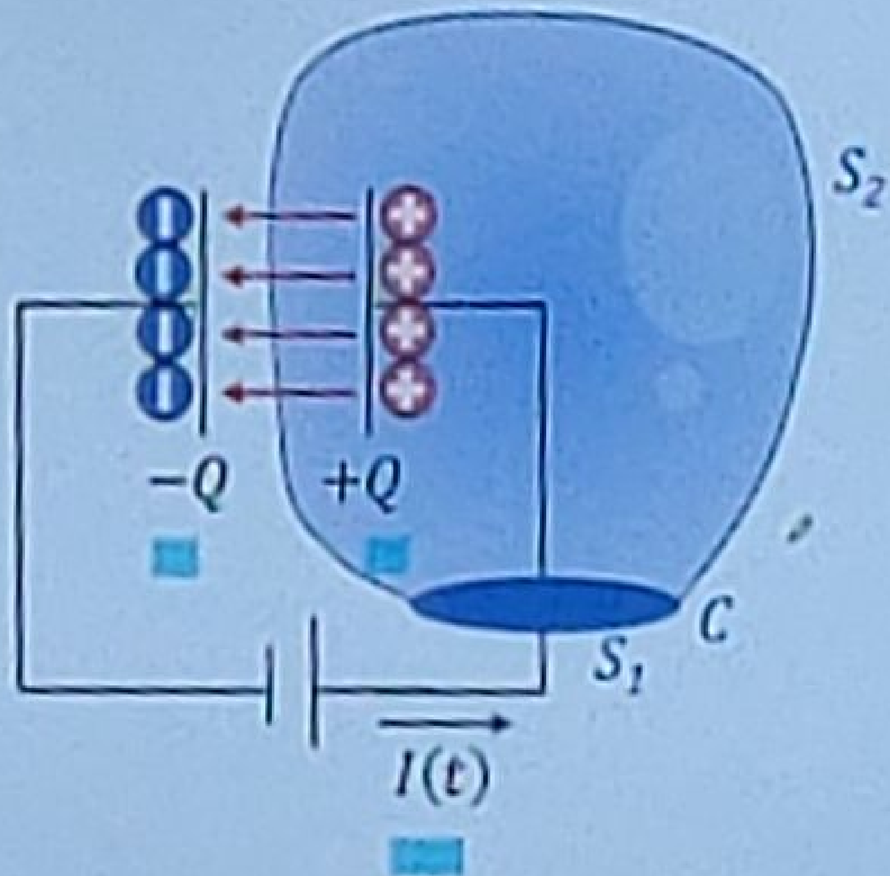
任意の面内でOK（のはず）

S_1 と S_2 で貫く電流が異なる

$$\mu_0 \int_{S_1} i \cdot n\,dS \neq \mu_0 \int_{S_2} i \cdot n\,dS$$

矛盾

$\neq 0$　　$= 0$



変位電流の導入で解決 !

コンデンサの電場に注目

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \underline{S}}$$

コンデンサの面積

時間微分

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I(t)} = \frac{I(t)}{\varepsilon_0 S}$$

ここで電束Φ_Eを導入（磁束密度の電場版）

電気力線を定量化したもの

定義

$$\Phi_E = \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \quad \xleftrightarrow{\text{対応}} \quad \Phi_B = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

コンデンサ内 S_2だと

$$\Phi_E = \varepsilon_0 ES$$ となる

Φ_Eの時間微分を変位電流 I_d と定義する

$$\underbrace{I_d}_{\text{変位電流}} = \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \underbrace{I}_{\text{回路の電流}}$$

等しい

矛盾なくアンペールの法則が成り立つ！

これより

$$\int_C B\,dl = \mu_0(I + I_d)$$

$$= \mu_0 \int_S \left(i(r,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} \right) \cdot n\,dS$$

矛盾なし！

アンペール－マクスウェルの法則（積分形）

微分形で表す

変位電流密度　$i_d = \frac{I_d}{S} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$　を導入

$$i_d(r,t) = \varepsilon_0 \frac{dE(r,t)}{dt}$$

（ベクトル表記）

$$\nabla \times B(r,t) = \mu_0 \left(i(r,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} \right)$$

アンペール－マクスウェルの法則（微分形）

確認）

divをとると左辺は0となり、

$$0 = \nabla \cdot i(r,t) + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial E(r,t)}{\partial t}$$

ガウス則

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho(r,t)}{\varepsilon_0}$$ を代入

$$\underbrace{\nabla \cdot i(r,t)}_{\text{電流の発散}} + \underbrace{\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t}}_{\text{電荷の時間変化}} = 0$$

電荷は保存

↓

変位電流の項が必要

Maxwell方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{—— ①} \\ \nabla \cdot B = 0 & \text{—— ②} \\ \nabla \times E + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 & \text{—— ③} \\ \nabla \times B - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}}_{\text{変位電流の項}} = \mu_0 i & \text{—— ④} \end{cases}$$

電流密度 $D = \varepsilon_0 E$

磁場 $H = \dfrac{B}{\mu_0}$

$\xrightarrow{\text{さらに簡単に}}$

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times H - \dfrac{\partial D}{\partial t} = i \end{cases}$$

本講義のゴール

電磁気学の基本方程式

Maxwell方程式の関係　（①、② は ③、④ の初期条件）

③ のdivをとる

$$\underbrace{\cancel{\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})}}_{=0}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ は時間的に一定 $\xleftarrow{\text{初期条件}}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$　（式 ②）

ガウス則

同様に ④ のdivをとる

$$\underbrace{\cancel{\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})}}_{=0}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\mu_0\underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{i}}_{=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

電荷の変化＋電流＝0

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)=0$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ は時間的に一定 $\xleftarrow{\text{初期条件}}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$　（式 ①）

ガウス則

式③、④ ⟵ 式①、②

基本方程式　　**初期条件**

本日の課題

① 教科書p194の演習問題2を解答せよ。