

問 1. 次のベクトルの組は 1 次独立か 1 次従属か調べよ. ここで $a \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{と置く}$$

$$C_1 A + C_2 B + C_3 C = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2 + C_3 \\ C_1 + 3C_2 + C_3 \\ C_1 + C_2 + aC_3 \end{bmatrix}$$

これが 0 となるのは

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 3C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + aC_3 = 0 \end{cases} \quad \text{と解く}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1-a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3-6a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3-5a \end{bmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}$ かつ

$a = \frac{3}{5}$ と $a \neq \frac{3}{5}$ のときに場合分けする.

(i) $a = \frac{3}{5}$ のとき

$\text{rank } B = 2$ かつ

C_1, C_2, C_3 は 複数 の 解をもつ.

のとき 1 次 従属 と なる.

(ii) (i) かつ $\left\{ \begin{array}{l} \text{1 次 従属 } (a = \frac{3}{5}) \\ \text{1 次 独立 } (a \neq \frac{3}{5}) \end{array} \right\}$

(ii) $a \neq \frac{3}{5}$ のとき

$\text{rank } B = 3$ かつ

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

と なる.

1 次 独立 と なる.