第5講

2024年5月17日　10:34

対数関数

自然対数：$\log z$

$w = f(z) = \log z \quad (w = u + iv)$

$\Updownarrow$ 逆関数

$z = e^w \longrightarrow$ ☆極座標表示

$z = re^{i\theta}$ とすると、

$$re^{i\theta} = e^w$$
$$\downarrow w = u + iv$$
$$= e^{u+iv}$$
$$= e^u \cdot e^{iv}$$

よって

$$\begin{cases} r = e^u \\ e^{(\theta+2m\pi)i} = e^{iv} \end{cases}$$

※ $0 \leqq \theta < 2\pi$ としても、$0 \leqq v < 2\pi$ とは限らない！

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u = \log r \\ v = \theta + 2m\pi \end{cases} \quad (m：整数)$$

$0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\underset{u+iv}{\parallel}}{w} = \log z = \log r + i(\theta + 2m\pi)$$

周期 $2\pi i$ の無限多価関数
但し、例えば、$0 \leqq \arg w < 2\pi$ とすれば、$w = \log z$ の値は一意的に決まる：主値。

例題

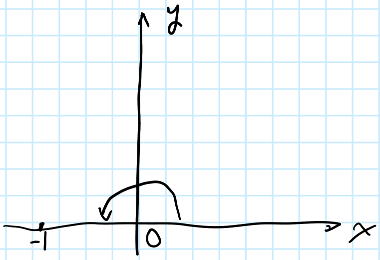
$w = f(z) = \log(-1) \longrightarrow w = u + iv$ を決める。

$\Updownarrow$

$z = e^w = -1$

☆ $z = re^{i\theta}$ の極座標表示にする。

☆ $z = re^{i\theta}$ の極座標表示にする。



$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi + 2m\pi \end{cases}$$ （mは整数）

$$z = -1 = 1 \cdot e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

ここで、

$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv}$ より、

$$\begin{cases} e^{u} = 1 \\ e^{iv} = e^{i(\pi + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 1 = 0 \\ v = \pi + 2m\pi \end{cases}$$

故に、

$$w = u + iv = i(\pi + 2m\pi)$$

（主値：$w = i\pi$）

演習

問．例題にならって、つぎの複素数を、$u+iv$ の形に表せ．

(1) $\log(-4)$

(2) $\log(5i)$

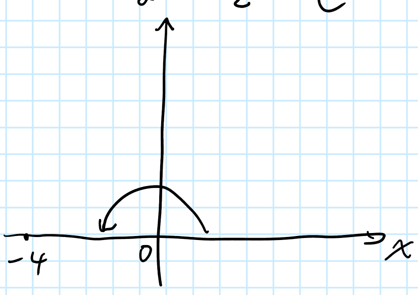
(3) $\log(1+i)$

(4) $\log i$

(1) $w = f(z) = \log(-4)$

$$\Updownarrow$$

$$z = e^{w} = -4$$



$$\begin{cases} r = 4 \\ \theta = \pi + 2m\pi \end{cases}$$ （mは整数）

$$z = -4 = 4 \cdot e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

ここで

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \text{ より}$$

$$\begin{cases} e^u = 4 \\ e^{iv} = e^{i(\pi + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 4 \\ v = \pi + 2m\pi \end{cases}$$

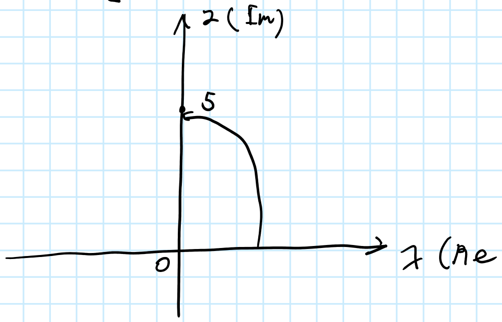
ゆえに、

$$w = u + iv = \underline{\log 4 + i(\pi + 2m\pi)}$$

(2) $w = f(z) = \log(5i)$

$\Updownarrow$

$$z = e^w = 5i$$



$$\begin{cases} r = 5 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m\text{は整数}) \end{cases}$$

$$z = 5i = 5 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)}$$

ここで

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \text{ より}$$

$$\begin{cases} e^u = 5 \\ e^{iv} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 5 \\ v = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \end{cases}$$

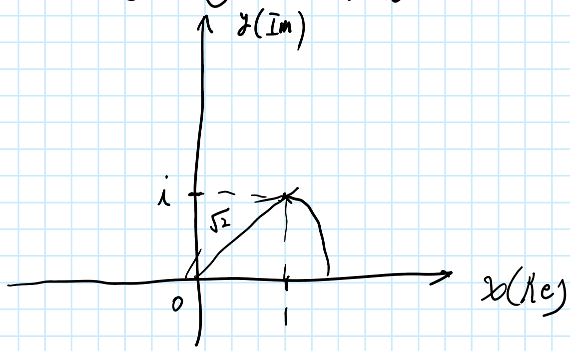
ゆえに、

$$w = u + iv = \underline{\log 5 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)}$$

(3) $w = f(z) = \log(1+i)$

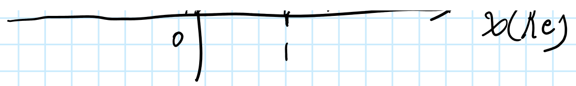
$\Updownarrow$

$$z = e^w = 1 + i$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (m\text{は整数}) \end{cases}$$

$$\ldots \, e^{i(\frac{\pi}{4} + 2m\pi)}$$



$$z = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2m\pi\right)}$$

ここで

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}\cdot e^{iv} \text{ より}$$

$$\begin{cases} e^{u} = \sqrt{2} \\ e^{iv} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2m\pi\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 \\ v = \frac{\pi}{4}+2m\pi \end{cases}$$

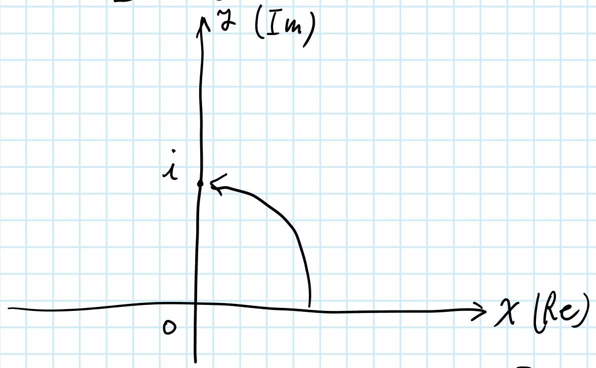
ゆえに

$$w = u+iv = \underline{\frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{\pi}{4}+2m\pi\right)}$$

(4) $w = f(z) = \log(i)$

$\Updownarrow$

$z = e^{w} = i$



$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \ (m\text{は整数}) \end{cases}$$

$$z = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)}$$

ここで

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}\cdot e^{iv} \text{ より}$$

$$\begin{cases} e^{u} = 1 \\ e^{iv} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 1 = 0 \\ v = \frac{\pi}{2}+2m\pi \end{cases}$$

ゆえに

$$w = u+iv = \underline{i\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)}$$

- 微分方程式

常微分方程式：$y = y(x)$ の導関数 $y', y'', \cdots$ を含む方程式

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

例) $y = ax^2+bx+c$ ⇒ $\left.\begin{array}{l} y' = 2ax+b \\ y'' = 2a \end{array}\right\}$ 微分方程式

(解)

例) $y = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow$ $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$ 微分方程式

解

微分方程式を解く

導関数を含まない式 $y(x)$

偏微分方程式：例えば $z = z(x, y)$ の z', z'' … を含む方程式

複数の変数　[illegible]

例) $z = ax^2 + bxy + cy^2$

微分方程式

↳ 解けるものには何通りかのタイプがある。

↳ 解き方(コツ)を学ぶ。

2. 1階常微分方程式

2.1 変形分離形

"1階"：1階微分 y' $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ のみを含む。

↳ $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ の形で表わせる。

変数分離形：$F(x, y) = (x の関数) \times (y の関数)$

$f(x)$　　$1/g(y)$

$\Downarrow$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ ※ x と y の関数に分離できる

$\Downarrow$

$g(y)\,dy = f(x)\,dx$

$\Downarrow$

$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

積分を解けばよい。