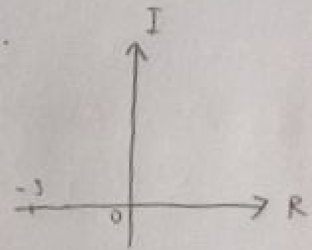
応用数学　　試験問題

第2講

(演習)

問1　次の複素数 z の極座標表示を求めよ.

(1) $z = -3$ 　　$0 \leq \theta < 2\pi$ で考える



$(3, \pi)$ より $\underline{3e^{\pi i}}$

$\left(\hookrightarrow 3(\cos\pi + i\sin\pi) \right)$

(2)

$z = \sqrt{3} + i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

よって $\underline{2e^{\frac{\pi}{6}i}}$

(3)

$z = i^3$

$= -i$

$= \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

よって $\underline{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$

(4) $z = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1+2i-1}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

よって $\underline{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}}$

(5)

$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}(1-2i-1) = -i$

$= \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$

よって $\underline{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$

4 + 12

(6)

$z = \frac{3}{(i-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{-1-2\sqrt{3}i+3} = \frac{3}{2-2\sqrt{3}i} = \frac{3(2+2\sqrt{3}i)}{(2-2\sqrt{3}i)(2+2\sqrt{3}i)}$

$= \frac{6+6\sqrt{3}i}{16} = \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$

$= \frac{6}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \frac{6}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

よって $\underline{\frac{3}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}}$

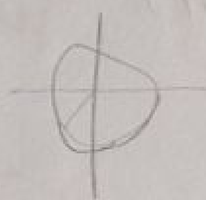
問2　zを複素数に直せ.

(1) $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \underline{1 + \sqrt{3}i}$



(2) $z = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$

$= \left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

$= \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i}$

(3) $z = (1 - \sqrt{3}i)^3$

$= (2)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

$= (2)^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3$

$= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times 3 + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times 3\right)$

$= 8\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)$

$= \underline{-8}$

(4) $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$

$= \frac{1 + 2i - 1}{1 - i}$

$= \frac{2i\,(1+i)}{1-i\,(1+i)}$

$= i(1+i)$

$= \underline{-1 + i}$

(5) $z = \frac{2-\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(2-\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2 - 2i - \sqrt{3}i - \sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{-2-\sqrt{3}}{2}i}$

(6) $z = \frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2 + 3i + 2i - 3}{13} = \underline{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i}$

応用数学　第3講

(例題1)　与えられた式を $u(x,y)+iv(x,y)$ の形に直せ.

$f(z)=\cos z \quad (z=x+yi)$

$=\cos(x+yi)$

$=\cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\cosh y\right) \quad \left(\frac{e^{-y}-e^{+y}}{2i}\times\frac{i}{i} = i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i\sinh y\right)$

$=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

☆ 重要

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{i\times(-ix)}+e^{i\times(ix)}}{2}=\cos ix$

$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{i}\sin ix$

?

(例題2)　与えられた式を $u(x,y)+iv(x,y)$ の形に直せ.

$f=\sinh(x+yi)$

$=\frac{1}{i}\sin i(x+yi)$

$=-i\sin(ix-y)$

$=-i(\sin ix\cos y-\cos ix\sin y)$

$=i(\sin y\underbrace{\cos ix}_{\cosh x}-\cos y\underbrace{\sin ix}_{i\sinh x})$

$=i(\sin y\cosh x-i\cos y\sinh x)$

$=\cos y\sinh x+i\sin y\cosh x$

(演習)

問1　次の加法定理を証明せよ.

(1)　$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$

(左辺) $=\cosh(z_1+z_2)=\frac{e^{(z_1+z_2)}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\frac{e^{z_1}\cdot e^{z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}}{2}$

(右辺) $=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$

$=\frac{e^{z_1}\cdot e^{z_2}+\cancel{e^{z_1}\cdot e^{-z_2}}+\cancel{e^{-z_1}\cdot e^{z_2}}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}}{4}+\frac{e^{z_1}\cdot e^{z_2}-\cancel{e^{z_1}\cdot e^{-z_2}}-\cancel{e^{-z_1}\cdot e^{z_2}}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}}{4}$

$=\frac{e^{z_1}\cdot e^{z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}}{2}$

$=$ (左辺)

よって証明された

(2) $\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

(左辺) $= \sinh(z_1+z_2) = \dfrac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2}$

(右辺) $= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

$$= \frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{(z_1+z_2)} + \cancel{e^{(z_1-z_2)}} - \cancel{e^{(-z_1+z_2)}} - e^{(-z_1-z_2)}}{4} + \frac{e^{(z_1+z_2)} - \cancel{e^{(z_1-z_2)}} + \cancel{e^{(-z_1+z_2)}} - e^{(-z_1-z_2)}}{4}$$

$$= \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2}$$

$=$ (左辺)

よって証明された

問2 例題1にならって、$\sin(x+iy)$ を $\sin x$, $\cos x$, $\sinh y$, $\cosh y$ で表す式を書け。

$$\sin(x+iy) = \sin x \underbrace{\cos iy}_{=\cosh y} + \cos x \underbrace{\sin iy}_{=i\sinh y}$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

問3 例題2にならって、$\cosh(x+iy)$ を $\cosh x$, $\sinh x$, $\cos y$, $\sin y$ で表す式を導け。

$$\cosh(x+iy) = \cos i(x+iy) = \cos(ix-y)$$

$$= \underbrace{\cos ix}_{=\cosh x} \cos y + \underbrace{\sin ix}_{=i\sinh x} \sin y$$

$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

問4 例題1,2にならって 次の複素数を、$u+iv$ の形で表せ。

(1) $\cos(2+i)$

$$= \cos(2) \underbrace{\cos i}_{=\cosh 1} - \sin 2 \underbrace{\sin i}_{=i\sinh 1}$$

$$= \cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1$$

(2) $\sinh(1+2i)$

$$= \frac{1}{i}\sin i(1+2i)$$

$$= -i\sin(i-2)$$

$$= -i(\underbrace{\sin i}_{=i\sinh 1}\cos 2 - \underbrace{\cos i}_{=\cosh 1}\sin 2)$$

$$= -i(i\sinh 1 \cos 2 - \cosh 1 \cdot \sin 2)$$

$$= \cos 2 \sinh 1 + i \sin 2 \cosh 1$$

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\underbrace{\cos 2i}_{\cosh 2} + \cos\frac{\pi}{4}\underbrace{\sin 2i}_{i\sinh 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} i \sinh 2$$

$$= \underline{\frac{\cosh 2}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sinh 2}{\sqrt{2}}}$$

(4) $\cosh\left(2+\frac{\pi}{4}i\right)$

$$= \cos i\left(2+\frac{\pi}{4}i\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}+2i\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\underbrace{\cos 2i}_{\cosh 2} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\underbrace{\sin 2i}_{i\sinh 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh 2 + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh 2$$

$$= \underline{\frac{\cosh 2}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sinh 2}{\sqrt{2}}}$$

第4講

例題　$\sqrt[4]{1}$ を $re^{i\theta}$ の形にせよ。

やり方　$W = \sqrt[n]{z}$

$$\downarrow$$

$$z = r\cdot e^{i\theta} \Rightarrow W = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{n}}$$

ポイント：極座標表示にする

$W = f(z) = \sqrt[4]{1} = (1)^{\frac{1}{4}}$

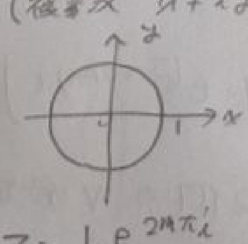
$\Updownarrow$ 逆関数

$z = W^4$

$= 1\cdot e^{2m\pi i}$

ポイント

$z = 1$（複素数 $x+iy$）



$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 + 2m\pi \end{cases}$

（m：整数）

$z = 1\cdot e^{2m\pi i}$（極座標表示）

$z = r\cdot e^{i\theta}$ とすると

$re^{i\theta} = 1\cdot e^{2m\pi i}$ より

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 2m\pi \end{cases}$$

$$W = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1\cdot e^{2m\pi i}} = \sqrt[4]{1}\cdot e^{\frac{2m\pi i}{4}}$$

$$= 1\cdot e^{\frac{m\pi i}{2}}$$

$$= e^{\frac{m\pi}{2}i}$$

$0 \leqq \frac{m\pi}{2} < 2\pi$ のとき、$n=4$ より、4個の W があり、

$m = 0, 1, 2, 3$ を代入すると　$W = e^{0},\ e^{\frac{\pi}{2}i},\ e^{\pi i},\ e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$= \underline{1,\ i,\ -1,\ -i}$

(演習)

(1) $\sqrt[3]{2}$

$W=f(z)=\sqrt[3]{2}=(2)^{\frac{1}{3}}$

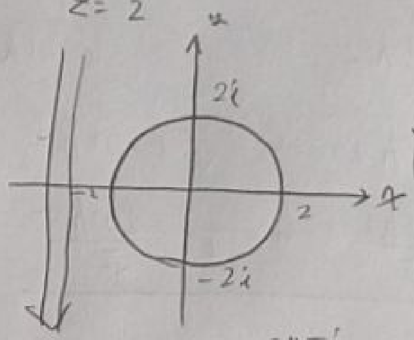
$\Updownarrow$ 逆関数

$z=W^3$

$z=re^{i\theta}$ とすると. $z=r\cdot e^{i\theta}=2\cdot e^{2m\pi i}$

よって $\begin{cases} r=2 \\ \theta=2m\pi \end{cases}$

$z=2$



$\begin{cases} r=2 \\ \theta=0+2m\pi \\ (m:\text{整数}) \end{cases}$

$z=2\cdot e^{2m\pi i}$

よって

$W=(z)^{\frac{1}{3}}=(2)^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{2m\pi}{3}i}$

$=\sqrt[3]{2}\cdot e^{\frac{2m\pi i}{3}}$

$0\leqq\frac{2m\pi}{3}<2\pi$ より 3個の Wがあるので. $m=0.1.2$ を代入すると

$\underline{W=\sqrt[3]{2}e^{0}.\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{2}{3}\pi i}.\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{4}{3}\pi i}}$

(2)

$W=f(z)=\sqrt{i}=(i)^{\frac{1}{2}}$

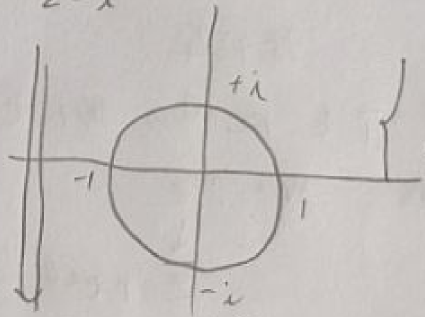
$\Updownarrow$ 逆関数

$z=W^2$

$z=r\cdot e^{i\theta}$ とすると $z=r\cdot e^{i\theta}=1\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i}$

$\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2}+2m\pi=(\frac{1}{2}+2m)\pi \end{cases}$

$z=i$



$\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2}+2m\pi \\ (m:\text{整数}) \end{cases}$

$z=1\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i}$

よって

$W=(z)^{\frac{1}{2}}=(1\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i})^{\frac{1}{2}}=e^{(\frac{1}{4}+m)\pi i}$

$0\leqq(\frac{1}{4}+m)\pi<2\pi$ より. 2個の Wがあるので.

$m=0.1$ を代入すると

$\underline{W=e^{\frac{\pi}{4}i}.\ e^{\frac{5}{4}\pi i}}$

(3)

$W=f(z)=\sqrt{1-i}=(1-i)^{\frac{1}{2}}$

$\Updownarrow$ 逆関数

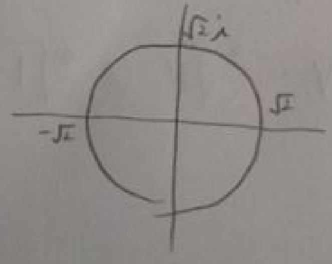
$z=W^2$

$z=r\cdot e^{i\theta}$ とすると. $z=r\cdot e^{i\theta}=\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)}$

$\begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{7}{4}\pi+2m\pi \end{cases}$

$z=1-i$

$=\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)$



$\begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{7}{4}\pi+2m\pi \\ (m:\text{整数}) \end{cases}$

$z=\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)}$

よって

$W=(z)^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{2}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi+2m\pi)i})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{2}\cdot e^{(\frac{7}{8}\pi+m\pi)i}$

$0\leqq\frac{7}{8}\pi+m\pi<2\pi$ より 2個の Wがあるので. $m=0.1$ を代入すると

$\underline{W=\sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{7}{8}\pi i}.\ \sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{15}{8}\pi i}}$

(4)

$$\frac{1}{\sqrt{1+i}} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{\frac{1}{2}}$$

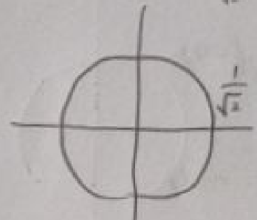
$\Updownarrow$ 逆関数

$$z = w^2$$

$z = r\cdot e^{i\theta}$ とすると.

$$z = r\cdot e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi + 2m\pi)i}$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$



$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi \end{cases}$$

(m: 整数)

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi + 2m\pi)i}$$

よって

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{7}{4}\pi + 2m\pi \end{cases}$$

よって

$$W = (z)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{(\frac{7}{4}\pi + 2m\pi)i}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{(\frac{7}{8}\pi + m\pi)i}$$

$0 \leqq \frac{7}{8}\pi + m\pi < 2\pi$ より. 2個の W があるので

$m = 0, 1$ を代入すると.

$$W = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{\frac{7}{8}\pi i},\quad \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{\frac{15}{8}\pi i}$$

第5講

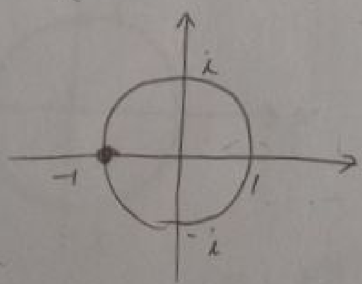
例題

$W = f(z) = \log(-1) \longrightarrow W = u + iv$ の形に表す.

$\Updownarrow$

$$z = e^w = -1$$

(ポイント ★ $z = r\cdot e^{i\theta}$ の極座標表示にする。)



$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi + 2m\pi \end{cases}$$

(mは整数)

$$z = -1 = 1\cdot e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

ここで

$z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$ より.

$$\begin{cases} e^u = 1 \\ e^{iv} = e^{i(\pi + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 1 = 0 \\ v = \pi + 2m\pi \end{cases}$$

ゆえに

$$W = u + iv = \underline{i(\pi + 2m\pi)}$$

演習

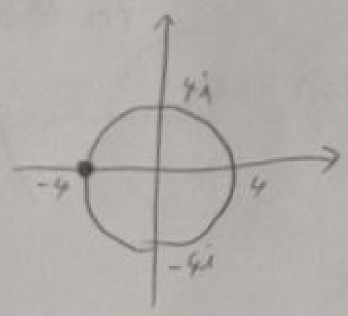
問. 例題にならって、次の複素数を $u+iv$ の形に表せ。

(1) $\log(-4)$

$w = f(z) = \log(-4)$

$\Updownarrow$

$z = e^{w} = -4$



$\begin{cases} r = 4 \\ \theta = \pi + 2m\pi \quad (m: 整数) \end{cases}$

$z = -4 = 4 \cdot e^{i(\pi + 2m\pi)}$

ここで

$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$ より

$\begin{cases} e^{u} = 4 \\ e^{iv} = e^{i(\pi + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log 4 \\ v = \pi + 2m\pi \end{cases}$

ゆえに

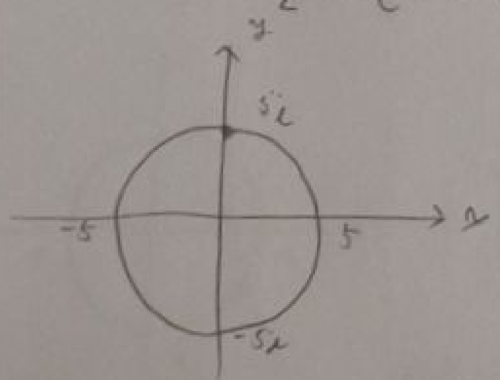
$w = u + iv = \underline{\log 4 + i(\pi + 2m\pi)}$

(2) $\log(5i)$

$w = f(z) = \log(5i)$

$\Updownarrow$

$z = e^{w} = 5i$



$\begin{cases} r = 5 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m: 整数) \end{cases}$

$z = 5 \cdot e^{(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)i}$

ここで

$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$ より

$\begin{cases} e^{u} = 5 \\ e^{iv} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = \log 5 \\ v = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \end{matrix}$

ゆえに

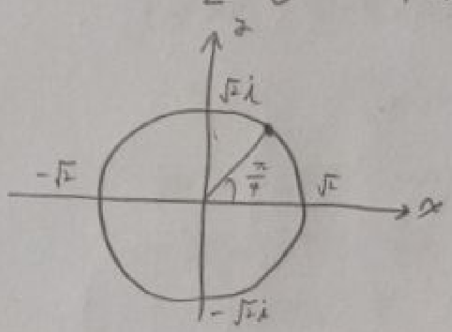
$w = u + iv = \underline{\log 5 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)}$

(3) $\log(1+i)$

$w = f(z) = \log(1+i)$

$\Updownarrow$

$z = e^w = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (m:\text{整数}) \end{cases}$$

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)}$

$z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$ より

$$\begin{cases} e^u = \sqrt{2} \\ e^{iv} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 \\ v = \frac{\pi}{4} + 2m\pi \end{cases}$$

ゆえに

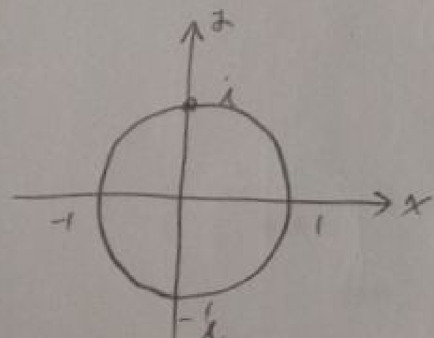
$w = u + iv = \underline{\frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)}$

(4) $\log(i)$

$w = f(z) = \log(i)$

$\Updownarrow$

$z = e^w = i$



$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m:\text{整数}) \end{cases}$$

$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)}$

$z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ より

$$\begin{cases} e^u = 1 \\ e^{iv} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \end{cases}$$

ゆえに

$w = u + iv = \underline{i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)}$

第6講

例題 $\frac{dy}{dx} = -2xy \longrightarrow y = y(x)$ の関数をもとめる。

両辺に$\times \frac{1}{y}$にしているため $y \neq 0$ と $y = 0$ で場合分けする必要あり。

※この後の演習問題では場合分けを考えない。

$y \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{y}dy = -2x\,dx$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -2x\,dx$$

$$\log|y| = -x^2 + C' \quad (C' : \text{積分定数})$$

$$|y| = e^{-x^2+C'} = e^{-x^2} \cdot e^{C'}$$

$$y = \pm e^{-x^2} \cdot e^{C'}$$

$C = \pm e^{C'}$ $(C \neq 0)$ とすると

$$y = C \cdot e^{-x^2} \quad (C \text{は} C \neq 0 \text{の任意定数})$$

$y = 0$ のとき

$(\text{左辺}) = \frac{dy}{dx} = 0$

$(\text{右辺}) = -2xy = 0$

成立 $\Rightarrow$ $y = 0$ も解

$y = C \cdot e^{-x^2}$ で $y = 0$ となるのは $C = 0$ のとき。

よって

$$\underline{y = C \cdot e^{-x^2} \quad (C : \text{任意定数})}$$

一般解（任意定数(C)を含む解）

$\Updownarrow$

一般解に含まれない解を特異解という。

演習

問1 例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $x\frac{dy}{dx} = y$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$$

$$\log|y| = \log|x| + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$

$$|y| = e^{\log|x| + C_1} = |x| \cdot e^{C_1}$$

$$y = \pm x \cdot e^{C_1}$$

$C = \pm e^{C_1}$ とすると

$$\underline{y = Cx \quad (C \text{は任意定数})}$$

(2) $y\dfrac{dy}{dx} = -x$

$\Leftrightarrow \quad y\,dy = -x\,dx$

両辺を積分すると

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C_1 \quad (C_1 \geqq 0)$$

$$x^2 + y^2 = 2C_1$$

$2C_1 = C \quad (C \geqq 0)$ とすると

$$\underline{x^2 + y^2 = C \quad (C \geqq 0 \text{ の任意定数})}$$

(3)

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx} + \sin x\cos^2 y = 0$$

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx} = -\sin x\cos^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 y}dy = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}dy = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$(左辺) = \int \frac{1}{\cos^2 y}dy = \tan y + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$(右辺) = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{a^2}da$$

$\left(\because a = \cos x, \quad \dfrac{da}{dx} = -\sin x \Rightarrow da = -\sin x\,dx\right)$

$$= -\frac{1}{a} + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

$$= -\frac{1}{\cos x} + C_2$$

ゆえに

$$\tan y + C_1 = -\frac{1}{\cos x} + C_2$$

$$\tan y + \frac{1}{\cos x} = C \quad (C = C_2 - C_1 \;\; C は任意定数)$$

$$\underline{\tan y + \frac{1}{\cos x} = C \quad (C : 任意定数)}$$

$$(\tan y + \sec x = C)$$

$$\left(\begin{aligned} \sec &= \frac{1}{\cos} \\ \operatorname{cosec} &= \frac{1}{\sin} \\ \cot &= \frac{1}{\tan} \end{aligned}\right)$$

問2　物体が空気中を落下するとき、速さに比例する抵抗を受けると仮定する。そのとき、時刻 t における速度を v とすれば、次の微分方程式が成り立つ

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$ （kは比例定数、gは重力加速度）

(1) $t=0$ のときの初速度を 0 として、この微分方程式を解け。

(2) 速さの2乗に比例する抵抗を受けると仮定した場合について、微分方程式をたてて、(1)と同じ初期条件のもとで解け。

(1)

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\frac{1}{g-kv}\,dv = dt$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{g-kv}\,dv = \int dt$$

☆

空気抵抗：速さ v に比例 ⇒ $f = hv$

運動方程式

$$F = mg - hv$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mkv \quad (\leftarrow h = mk)$$

（加速度）$\dfrac{dv}{dt} = g - kv$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k}\log|g-kv| = t + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$\Leftrightarrow \log|g-kv| = -kt + kC_1$$

$$\Leftrightarrow \log|g-kv| = -kt + C_2 \quad (C_2 = kC_1)$$

$$\Leftrightarrow g - kv = \pm e^{-kt + C_2}$$

$$\Leftrightarrow g - kv = Ce^{-kt} \quad (C = \pm e^{C_2} ; 任意定数)$$

初期条件　$t=0$ のとき $v=0$ より これを上式に代入すると

$$g = C \cdot 1$$

$$\therefore C = g$$

ゆえに

$$g - kv = g \cdot e^{-kt}$$

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

(2) 空気抵抗：$f = hv^2$ より ☆から

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2$$ となることがわかる

$$\frac{1}{g-kv^2}\,dv = dt$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{g-kv^2}\,dv = \int dt$$

ここで

$$\frac{1}{g-kv^2} = \frac{1}{(\sqrt{g}+\sqrt{k}v)(\sqrt{g}-\sqrt{k}v)}$$

$-\sqrt{k}v$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} + \frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{g}}$$

よって

(左辺) $= \int \frac{1}{g-kv^2}dv = \frac{1}{2\sqrt{g}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} + \frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}\right)dv$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\log|\sqrt{g}-\sqrt{k}v| + \frac{1}{\sqrt{k}}\log|\sqrt{g}+\sqrt{k}v|\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{kg}}\log\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right| + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

(右辺) $= \int dt = t + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$

よって

$$\frac{1}{2\sqrt{kg}}\log\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right| + C_1 = t + C_2$$

$$\Leftrightarrow \log\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right| = 2\sqrt{kg}\,t + C_3 \quad (C_3 = 2\sqrt{kg}\,C_2 - C_1 : 任意定数)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} = \pm e^{2\sqrt{kg}t + C_3}$$

$$= C\cdot e^{2\sqrt{kg}t} \quad (C = \pm e^{C_3} : 任意定数)$$

初期条件： $t=0$ のとき $v=0$ より

$$C = 1$$

よって

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} = e^{2\sqrt{kg}t}$$

$$\sqrt{g}+\sqrt{k}v = \sqrt{g}e^{2\sqrt{kg}t} - \sqrt{k}v\cdot e^{2\sqrt{kg}t}$$

$$v(\sqrt{k}+\sqrt{k}e^{2\sqrt{kg}t}) = \sqrt{g}(e^{2\sqrt{kg}t}-1)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{kg}t}-1}{e^{2\sqrt{kg}t}+1}$$

分子と分母に $e^{-\sqrt{kg}t}$ をかけた。

$$= \sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{e^{\sqrt{kg}t}-e^{-\sqrt{kg}t}}{e^{\sqrt{kg}t}+e^{-\sqrt{kg}t}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{k}}\tanh\sqrt{kg}\,t$$

$$\left(\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$$

第7講

例題 (同次形)

$$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad ①$$

：同次形

$\frac{y}{x}=u \longrightarrow y=ux$

(u：関数)

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{u+u^3}{1-u^2}=\frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$$

変数分離

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{1}{x}dx$$

両辺を積分すると

$$\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \log|u|-\log|1+u^2|=\log|x|+C_1 \quad (C_1\text{：積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \log\left|\frac{u}{1+u^2}\right|=\log|x|+C_1$$

$$\Leftrightarrow \log\left|\frac{u}{(1+u^2)x}\right|=C_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{(1+u^2)x}=\pm e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{1+u^2}=\pm e^{C_1}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{1+u^2}=C_2x \quad (C_2=\pm e^{C_1}\neq 0)$$

※同次方程式では、$C=0$ があるとすれば、特異解に含まれる。

$u=\frac{y}{x}$ より

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=C_2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{1}{C_2}y=C_3y \quad (C_3=C_2^{-1}\text{；}C_3\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{C_3}{2}\right)^2=\left(\frac{C_3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2+(y-c)^2=c^2 \quad \left(c=\frac{C_3}{2}\neq 0\right)}$$ 一般解

※ cは任意定数で、正でも負でもよいため、$x^2+(y+c)^2=c^2$ も正解

特異解（任意定数Cを含まない解）について：$y = mx$（m：定数）

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{2m}{1-m^2} \quad (\because ①式と \ \frac{y}{x} = m)$$

$$m - m^3 = 2m$$

$$m(m^2+1) = 0$$

$\therefore m = 0$で成立

ゆえに $y = 0 \cdot x = 0$ も解

$y = 0$ …特異解

演習　例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

(2) $2xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

(3) $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = x - y$

(4) $(2x+y) + (x+2y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(1) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{：同次形} \ ①$$

$u^2 - 1 - u \cdot 2u$

$u^2 - 1 - 2u^2$

$\frac{y}{x} = u \rightarrow y = ux$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u} - u$$

$$= \frac{-u^2-1}{2u}$$

変数分離

$$-\frac{2u}{u^2+1}du = \frac{1}{x}dx$$

両辺を積分すると

$$-\int \frac{2u}{u^2+1}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$\Leftrightarrow -\log|u^2+1| = \log|x| + C_1$ （C_1：積分定数）

$\Leftrightarrow \log|x(u^2+1)| = C_2$ （$C_2 = -C_1$：任意定数）

$\Leftrightarrow x(u^2+1) = \pm e^{C_2}$ $(C_2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow x(u^2+1) = C_3$ $(C_3 = \pm e^{C_2} \neq 0)$

$u = \frac{y}{x}$ より

$\Leftrightarrow x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = C_3$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x} + x = C_3$

$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = C_3 x$

$\Leftrightarrow y^2 + \left(x - \frac{C_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{C_3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \underline{y^2 + (x-C)^2 = C^2 \quad \left(C = \frac{C_3}{2},\ C \neq 0\right)}$ → 一般解

特異解. $y = mx$ について：（m：定数）

$\frac{dy}{dx} = m = \frac{m^2-1}{2m}$

$\Leftrightarrow 2m^2 = m^2 - 1$

$\Leftrightarrow m^2 = -1$ より、実数 m は存在しない。

→ <u>特異解はない.</u>

(2)

$2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

$= \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\frac{y}{x} = u$ とおくと　$y = ux$

$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u}$

$\frac{1+u^2-2u^2}{2u}$

$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u$

$= \frac{1-u^2}{2u}$

変数分離

$\int \frac{2u}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\Leftrightarrow -\log|1-u^2| = \log|x| + C_1$　（C_1：積分定数）

$\Leftrightarrow \log|x(1-u^2)| = C_2$　（$C_2 = -C_1$；$C_2 \neq 0$）任意定数

$\Leftrightarrow x(1-u^2) = \pm e^{C_2}$

$\Leftrightarrow x(1-u^2) = C_3$　（$C_3 = \pm e^{C_2}$，$C_3 \neq 0$）

$u = \left(\frac{y}{x}\right)$ より

$\Leftrightarrow x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C_3$

$\Leftrightarrow x - \frac{y^2}{x} = C_3$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{C_3}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{C_3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \underline{(x-C)^2 - y^2 = C^2 \quad \left(C = \frac{C_3}{2},\ C \neq 0,\ \text{任意定数}\right)}$ ← 一般解

特異解について

$y=mx$ (m: 定数)

$$\frac{dy}{dx}=m=\frac{1+m^2}{2m}$$

$$2m^2=1+m^2$$

$$m^2=1$$

$m=\pm 1$ より

特異解 $y=\pm x$

(3)

$$(x+y)\frac{dy}{dx}=x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$$

$$=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$$\frac{1-u}{1+u}-u$$

$$\frac{1-u-u(1+u)}{1+u}$$

$$\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$\frac{y}{x}=u$ とおて $y=ux$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{1-u}{1+u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

↓ 変数分離

$2u+2$

$$\int\frac{1+u}{1-2u-u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{1+u}{u^2+2u-1}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log|u^2+2u-1|=-\log|x|+C_1 \quad (C_1:\text{積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \log|x\sqrt{u^2+2u-1}|=C_1$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{u^2+2u-1}=\pm e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{u^2-2u-1}=C_2 \quad (C_2=\pm e^{C_1},\ C_2\neq 0,\ \text{任意定数})$$

$u=\frac{y}{x}$ より

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{y}{x}\right)-1}=C_2$$

両辺を2乗すると

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{y}{x}\right)-1\right)=C_2^2$$

$$\Leftrightarrow y^2-2xy-x^2=C \quad (C=C_2^2,\ C\neq 0,\ \text{任意定数})$$

$$\Leftrightarrow (y-x)^2=C \quad (C\neq 0,\ \text{任意定数})$$ ← 一般解

特異解 $y=mx$ (m:定数)について

$$\frac{dy}{dx}=m=\frac{1-m}{1+m}$$

$\Leftrightarrow$ $m+m^2=1-m$

$\Leftrightarrow$ $m^2+2m-1=0$

$\Leftrightarrow$ $m=-1\pm\sqrt{1+1}$

$=-1\pm\sqrt{2}$

よって 特異解 $y=(-1\pm\sqrt{2})x$

(4) $(2x+y)+(x+2y)\frac{dy}{dx}=0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}$

$=-\frac{2+\frac{y}{x}}{1+2(\frac{y}{x})}$

$\frac{y}{x}=u$ とすると $y=ux$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=-\frac{2+u}{1+2u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{-2u^2-2u-2}{1+2u}$$

変数分離

$$\int\frac{1+2u}{-2u^2-2u-2}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$\Leftrightarrow$ $\int\frac{2u+1}{2u^2+2u+2}=-\int\frac{1}{x}\,dx$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\log|2u^2+2u+2|=-\log|x|+C_1$ (C_1:積分定数)

$\Leftrightarrow$ $\log|x\sqrt{2u^2+2u+2}|=C_1$

$\Leftrightarrow$ $x\sqrt{2u^2+2u+2}=\pm e^{C_1}$

$\Leftrightarrow$ $x\sqrt{2u^2+2u+2}=C_2$ ($C_2=\pm e^{C_1}$. $C_2\neq0$. 任意定数)

両辺を2乗すると

$x^2(2u^2+2u+2)=C_2^2$

$u=\frac{y}{x}$ より

$x^2\left(2\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+2\right)=C_3$ ($C_3=C_2^2$. $C_3\neq0$. 任意定数)

$2y^2+2xy+2x^2=C_3$

$x^2+xy+y^2=\frac{C_3}{2}$

$x^2+xy+y^2=C$ ($C=\frac{C_3}{2}$, $C\neq0$. 任意定数)

一般解

特異解 $y = mx$ (m:定数)について

$$\frac{dy}{dx} = m = -\frac{2+m}{1+2m}$$

$\Leftrightarrow$ $m + 2m^2 = -2 - m$

$\Leftrightarrow$ $2m^2 + 2m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $m^2 + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

mは実数ではない。

よって 特異解は存在しない。

第9回

例題

$y' - y = x$: 非同次方程式

解① まず、同次方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

$$\log|y| = x + C_1 \quad (C_1 : 積分定数)$$

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^x$$

$$= C \cdot e^x \quad (C : 任意定数) \quad C \neq 0$$ ← 同次方程式の一般解

☆ 1階線形

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} + P(x)y}_{yの一次} = \underbrace{Q(x)y^0}_{yの0次} \quad (y = y(x))$$

(yにとっての定数項)

(右辺) $Q(x) = 0$ のときの方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

を同次方程式といい

右辺 $Q(x) \neq 0$ のときを非同次方程式という

② 次に定数変化法: $C \to C(x)$

$y = C(x) \cdot e^x$ が 与式(非同次方程式)を満たすように、$C(x)$を求めてやればよい。

与式より

$$\frac{d}{dx}\{C(x) \cdot e^x\} - C(x)e^x = x$$

$$\underbrace{\left\{e^x \frac{d}{dx}C(x) + C(x)\underbrace{\frac{d}{dx}e^x}_{= e^x}\right\} - C(x)e^x}_{= 0} = x$$

$$\frac{d}{dx}C(x) = xe^{-x}$$

↓ 変数分離

$$\int dC(x) = \int xe^{-x} dx$$

$$\int dC(x) = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_2 \quad (C_2 : 積分定数)$$

ゆえに

$$y = C(x)e^{x}$$
$$= (-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)\, e^{x}$$
$$= \underbrace{-x-1}_{\text{非同次方程式の特解(特殊解)}} + \underbrace{C_1 e^{x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \rightarrow \text{非同次方程式の一般解}$$

演習　例題にならって、次の微分方程式を解け。

(1)　$y' + y = x$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx$$
$$\log|y| = -x + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$
$$y = \pm e^{-x + C_1}$$
$$= Ce^{-x} \quad (C : \text{任意定数}, C \neq 0)$$

② 定数変化法

$$C \to C(x)$$
$$y = C(x)e^{-x}$$

与式は

$$\frac{d}{dx}\{C(x)e^{-x}\} + C(x)e^{-x} = x$$
$$\left\{e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) \underbrace{- C(x)e^{-x}\} + C(x)e^{-x}}_{0} = x\right.$$
$$\frac{d}{dx}C(x) = xe^{x}$$

↓ 変数分離

$$\int dC(x) = \int xe^{x}\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int dC(x) = xe^{x} - \int e^{x}\,dx$$
$$\Leftrightarrow C(x) = xe^{x} - e^{x} + C \quad (C : \text{積分定数})$$

ゆえに

$$y = C(x)e^{-x}$$
$$= (xe^{x} - e^{x} + C)e^{-x}$$
$$= x - 1 + Ce^{-x} \rightarrow \text{非同次方程式の一般解}$$

(2) $y' + y = \sin x$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int dx$$

$$\log|y| = -x + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm e^{-x+C_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = Ce^{-x} \quad (C : \text{任意定数},\ C \neq 0)$$

② 定数変化法

$$C \to C(x)$$

$$y = C(x)e^{-x}$$

与式は

$$\frac{d}{dx}\{C(x)e^{-x}\} + C(x)e^{-x} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) + \cancel{C(x)\frac{d}{dx}e^{-x}} + \cancel{C(x)e^{-x}} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}\frac{d}{dx}C(x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}C(x) = e^{x}\sin x$$

変数分離

$$\int dC(x) = \int e^{x}\sin x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad C(x) = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$$

よって

$$y = C(x)e^{-x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C\right)e^{-x}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^{-x} \quad (C : \text{任意定数})}$$

(3) $xy' + y = \sin x$ $\qquad \left(\because \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{0}\right)$

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\log|y| = -\log|x| + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$

$$\log|xy| = C_1$$

$$xy = \pm e^{C_1}$$

$$y = \frac{C}{x} \quad (C : \text{任意定数})$$

② 非同次方程式

$c \to c(x)$

$y = \dfrac{c(x)}{x}$

与式は

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} c(x) - \frac{c(x)}{x^2} \right\} + \frac{\frac{c(x)}{x}}{x}}_{\shortparallel} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{d}{dx} c(x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \int dc(x) = \int \sin x \, dx$$

$$\Leftrightarrow c(x) = -\cos x + C \quad (C: 積分定数)$$

ゆえに $y = \dfrac{c(x)}{x} = \underline{-\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{C}{x}} \to$ 非同次方程式の一般解

(4) $xy' + y = e^x$

$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x}$

① 同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

(3)より

$$y = \frac{C}{x} \quad (C: 任意定数)$$

② 非同次方程式

$c \to c(x)$

$y = \dfrac{c(x)}{x}$

(3)より

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} c(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{d}{dx} c(x) = e^x$$

$$\int d\, c(x) = \int e^x dx$$

$$c(x) = e^x + C$$

ゆえに

$$y = \frac{c(x)}{x}$$

$$= \underline{\frac{e^x}{x} + \frac{C}{x} \quad (C: 任意定数)} \to 非同次方程式の一般解$$

第10講、第11講

2階線形

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y}_{yの1次}=\underbrace{R(x)}_{yの0次}$$

例題1

$y''-3y'+2y=0$

$y=e^{px}$ とすると、$y''=p^2e^{px}$, $y'=pe^{px}$ より

$p^2e^{px}-3pe^{px}+2e^{px}=(p^2-3p+2)e^{px}=0$

固有方程式： $p^2-3p+2=0$

$(p-2)(p-1)=0$

$\therefore p=1, 2.$

基本解 e^{x}, e^{2x}

一般解： $y=Ae^{x}+Be^{2x}$ (A, Bは任意定数)

例題2

$y''+2y'+y=0$

$y=e^{px}$ とすると、

固有方程式： $p^2+2p+1=0$

$(p+1)^2=0$

$\therefore p=-1$ (重解)

基本解： e^{-x}, xe^{-x} ← 重解のときは気を付ける。

一般解： $y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$

$=(A+Bx)e^{-x}$ (A, Bは任意定数)

例題3

$y''-4y'+13y=0$

$y=e^{px}$ とすると、

固有方程式： $p^2-4p+13=0$

$p=2\pm 3i$

基本解： $e^{(2+3i)x}$ $e^{(2-3i)x}$

一般解： $y=Ae^{(2+3i)x}+Be^{(2-3i)x}$ (A, Bは任意定数)

$=Ae^{2x}e^{3ix}+Be^{2x}e^{-3ix}$ ←オイラーの関係

$=e^{2x}\{A(\cos 3x+i\sin 3x)$

$+B(\cos(-3x)+i\sin(-3x))\}$

$=e^{2x}\{(A+B)\cos 3x+(A-B)i\sin 3x\}$

演習

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて

固有方程式: $p^2 + p - 2p = 0$

$(p+2)(p-1) = 0$

$p = -2, 1$

基本解: e^{-2x}, e^{x}

一般解: $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$ (A, Bは任意定数)

(2) $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて.

固有方程式: $p^2 - 2p + 1 = 0$

$(p-1)^2 = 0$

$p = 1$

基本解: e^{x}, xe^{x}

一般解: $y = Ae^{x} + Bxe^{x}$

$= (A + Bx)e^{x}$ (A, Bは任意定数)

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて.

$p = 1 \pm \sqrt{1-2}$

固有方程式: $p^2 - 2p + 2 = 0$

$p = 1 \pm i$

基本解: $e^{(1+i)x}, e^{(1-i)x}$

一般解: $y = Ae^{(1+i)x} + Be^{(1-i)x}$

$\Leftrightarrow y = Ae^{x} \cdot e^{ix} + Be^{x} \cdot e^{-ix}$

$= Ae^{x}(\cos x + i\sin x) + Be^{x}(\cos(-x) + i\sin(-x))$

$= e^{x}\{(A+B)\cos x + (A-B)i\sin x\}$

$C = A+B$

$D = (A-B)i$

$= e^{x}(C\cos x + D\sin x)$ (C, D: 任意定数)

第12講

例題1　$y''-3y'+2y=x$

[1] 同次方程式：　$y''-3y'+2y=0$

$y=e^{px}$ とすると、

固有方程式：$p^2-3p+2=0$

$(p-2)(p-1)=0$

$\therefore p=1, 2$

基本解：e^x　e^{2x}

一般解：$y=Ae^x+Be^{2x}$（A, Bは任意定数）

[2] 定数変化法：　$A, B \longrightarrow A(x), B(x)$

（条件式）
$$\begin{cases} A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)=0 \\ A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

をみたす $A(x)$, $B(x)$ を求める。

$$\begin{cases} A'(x)e^x+B'(x)e^{2x}=0 & —— ① \\ A'(x)e^x+B'(x)\cdot 2e^{2x}=x & —— ② \end{cases}$$

①式より、　$A'(x)=\dfrac{-B'(x)e^{2x}}{e^x}=-B'(x)e^x$ —— ③

これを②式に代入、

$$-B'(x)e^x e^x+B'(x)\cdot 2e^{2x}=x$$

$$B'(x)=\frac{x}{e^{2x}}=xe^{-2x}$$

③式より

$$A'(x)=-\frac{x}{e^{2x}}e^x=-\frac{x}{e^x}=-xe^{-x}$$

（積分）

$$A(x)=\int A'(x)dx=-\int xe^{-x}dx=xe^{-x}+e^{-x}+C_1 \quad (C_1：積分定数)$$

$$B(x)=\int B'(x)dx=\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C_2 \quad (C_2：積分定数)$$

よって

$$y=A(x)e^x+B(x)e^{2x}$$

$$=(xe^{-x}+e^{-x}+C_1)e^x+\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C_2\right)e^{2x}$$

$$=\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{3}{4}}_{\text{非同次方程式の特解}}+\underbrace{C_1e^x+C_2e^{2x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \quad //$$

← 非同次方程式の一般解

例題2　$y'' - 4y' + 4y = e^{x}$

[1] 同次方程式：　$y'' - 4y' + 4y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて、

固有方程式：　$p^2 - 4p + 4 = 0$

$(p-2)^2 = 0$

$\therefore p = 2$ （重解）

基本解：　e^{2x}, xe^{2x}

一般解：　$y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$ （A, Bは任意定数）

[2] 定数変化法：　$A, B \to A(x), B(x)$

$y = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}$

$$\begin{cases} A'(x)e^{2x} + B'(x)xe^{2x} = 0 \\ A'(x)\cdot 2e^{2x} + B'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) = e^{x} \end{cases}$$

をみたす $A(x)$, $B(x)$ を求める。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(x) + B'(x)x = 0 & \text{―― ①} \\ 2A'(x) + B'(x)(1+2x) = e^{-x} & \text{―― ②} \end{cases}$$

①より

$A'(x) = -B'(x)x$ ―― ③

②に代入

$-2B'(x)\cdot x + B'(x)(1+2x) = e^{-x}$

$\therefore B'(x) = e^{-x}$

③に代入

$A'(x) = -xe^{-x}$

[積分]

$A(x) = \int A'(x)\,dx = -\int xe^{-x}\,dx = xe^{-x} + e^{-x} + C_1$ （C_1：積分定数）

$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C_2$ （C_2：積分定数）

ゆえに、非同次方程式の一般解は、

$y = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}$

$= (\cancel{xe^{-x}} + e^{-x} + C_1)e^{2x} + (\cancel{-e^{-x}} + C_2)xe^{2x}$

$= e^{x} + (C_1 + C_2x)e^{2x}$ //

例題3 $y''+y=2\cos x$

(i) 同次方程式： $y''+y=0$

$y=e^{px}$ とおくと.

固有方程式： $p^2+1=0$

$\therefore p=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

基本解： e^{ix}、e^{-ix}

一般解： $y=Ae^{ix}+Be^{-ix}$ (A、B：任意定数)

オイラーの関係式 $\longrightarrow$ $=A(\cos x+i\sin x)+B(\cos x-i\sin x)$

$=(A+B)\cos x+(A-B)i\sin x$

$C=A+B$
$D=(A-B)i$

$=C\cos x+D\sin x$

(ii) 定数変化法： $C, D\to C(x), D(x)$

$y=C(x)\cos x+D(x)\sin x$

$$\begin{cases} C'(x)\cos x+D'(x)\sin x=0 & \text{--- ①} \\ C'(x)(-\sin x)+D'(x)\cos x=2\cos x & \text{--- ②} \end{cases}$$

をみたす $C(x)$、$D(x)$ を求める.

①より.

$$C'(x)=\frac{-D'(x)\sin x}{\cos x} \quad \text{--- ③}$$

②に代入.

$$\frac{D'(x)\sin^2x}{\cos x}+D'(x)\cos x=2\cos x$$

$$D'(x)=2\cos^2x$$

③に代入

$$C'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$$

(積分)

$$C(x)=\int C'(x)\,dx=-\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$$

$$D(x)=2\int\cos^2x\,dx=\int(1+\cos 2x)\,dx=x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$$ (C_1、C_2：積分定数)

ゆえに、与式の一般解は

$y=C(x)\cos x+D(x)\sin x$

$=\left(\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right)\cos x+\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2\right)\sin x$

$=x\sin x+\left(\frac{1}{2}+C_1\right)\cos x+C_2\sin x$

$=\underline{x\sin x+C_3\cos x+C_2\sin x}$ $\left(C_3=\frac{1}{2}+C_1\right)$

8223036　栗山淳

応用数学1

演習レポート課題

(1)

$$y'' - 6y' - 16y = 8$$

[1] 同次方程式： $y'' - 6y' - 16y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて

固有方程式： $p^2 - 6p - 16 = 0$

$(p-8)(p+2) = 0$

$\therefore p = 8, -2$

基本解： e^{8x}, e^{-2x}

一般解： $y = Ae^{8x} + Be^{-2x}$ （A, B：任意定数）

[2] 定数変化法： $A, B \to A(x), B(x)$

$$y = A(x)e^{8x} + B(x)e^{-2x}$$

$$\begin{cases} A'(x)e^{8x} + B'(x)e^{-2x} = 0 & \text{— ①} \\ 8A'(x)e^{8x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8 & \text{— ②} \end{cases}$$

①式より

$$A'(x) = \frac{-B'(x)e^{-2x}}{e^{8x}} = -B'(x)e^{-10x} \quad \text{— ③}$$

これを②式に代入，

$$8 \cdot \{-B'(x)e^{-10x}\} \cdot e^{8x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow -8B'(x)e^{-2x} - 2B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow -10B'(x)e^{-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow B'(x)e^{-2x} = -\frac{4}{5}$$

$$B'(x) = -\frac{4}{5}e^{2x}$$

③より

$$A'(x) = -B'(x)e^{-10x}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{2x} \cdot e^{-10x}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{-8x}$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int -\frac{4}{5}e^{-8x}\,dx \qquad \left(-\frac{1}{8}e^{-8x}\right)'$$

$$= -\frac{4}{5}\int e^{-8x}\,dx$$

$$= -\frac{\cancel{4}^{1}}{5}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{8}_{2}}e^{-8x}\right) + C_1 \quad (C_1:積分定数)$$

$$= \frac{1}{10}e^{-8x} + C_1$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int -\frac{4}{5}e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\int e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C_2 \quad (C_2:積分定数)$$

$$= -\frac{2}{5}e^{2x} + C_2$$

よって

$$y = A(x)e^{8x} + B(x)e^{-2x}$$

$$= \left(\frac{1}{10}e^{-8x} + C_1\right)e^{8x} + \left(-\frac{2}{5}e^{2x} + C_2\right)e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{10} + C_1e^{8x} - \frac{2}{5} + C_2e^{-2x}$$

$$= \underbrace{-\frac{3}{10}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{8x} + C_2e^{-2x}}_{\text{同次方程式の一般解}}$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

① 同次方程式: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y = e^{px}$ とおいて.

固有方程式: $p^2 - 3p + 2 = 0$

$(p-2)(p-1) = 0$

$\therefore p = 1, 2$

基本解: e^{x}、e^{2x}

一般解: $y = Ae^{x} + Be^{2x}$ (A.B.: 任意定数)

② 定数変化法: $A, B \to A(x), B(x)$

$$y = A(x)e^{x} + B(x)e^{2x}$$

$$\begin{cases} A'(x)e^{x} + B'(x)e^{2x} = 0 & \text{— ①} \\ A'(x)e^{x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x} & \text{— ②} \end{cases}$$

① より

$$A'(x) = -B'(x)\cdot\frac{e^{2x}}{e^{x}} = -B'(x)e^{x} \quad — ③$$

これを ② に代入すると

$$-B'(x)e^{x}\cdot e^{x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad -B'(x)\cdot e^{2x} + B'(x)\cdot 2e^{2x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2x}B'(x) = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad B'(x) = e^{x}$$

これを ③ に代入すると

$$A'(x) = -B'(x)e^{x} = -e^{x}\cdot e^{x} = -e^{2x}$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int -e^{2x}dx = -\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \quad (C_1:\text{積分定数})$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int e^{x}dx = e^{x} + C_2 \quad (C_2:\text{積分定数})$$

よって

$$\begin{aligned} y &= A(x)e^{x} + B(x)e^{2x} \\ &= \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^{x} + (e^{x} + C_2)e^{2x} \\ &= -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^{x} + e^{3x} + C_2e^{2x} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}e^{3x}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{x} + C_2e^{2x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \end{aligned}$$

(3) $y'' - 2y' + y = e^{x}$

同次方程式： $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、

固有方程式： $p^2 - 2p + 1 = 0$

$(p-1)^2 = 0$

$\therefore p = 1$ (重複解)

基本解： $e^{x},\ xe^{x}$

一般解： $y = Ae^{x} + Bxe^{x}$ (A, B: 任意定数)

③ 定数変化法：A、B → A(x) B(x)

$$y = A(x)e^{x} + B(x)xe^{x}$$

$$\begin{cases} A'(x)e^{x} + B'(x)xe^{x} = 0 & \text{―― ①} \\ A'(x)e^{x} + B'(x)(e^{x} + xe^{x}) = e^{x} & \text{― ②} \end{cases}$$

①より

$$A'(x) = -B'(x)\frac{xe^{x}}{e^{x}} = -B'(x)x \quad \text{― ③}$$

これを②に代入すると

$$\{-B'(x)\cdot xe^{x} + B'(x)(e^{x} + xe^{x})\} = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow (\cancel{-xB'(x)e^{x}} + B'(x)e^{x} + \cancel{xB'(x)e^{x}}) = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow B'(x)e^{x} = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow B'(x) = 1$$

これを③に代入すると

$$A'(x) = -x$$

(積分)

$$A(x) = \int A'(x)dx = \int -x\,dx = -\int x\,dx = -\frac{1}{2}x^{2} + C_1 \quad (C_1：積分定数)$$

$$B(x) = \int B'(x)dx = \int 1\,dx = x + C_2 \quad (C_2：積分定数)$$

よって

$$\begin{aligned} y &= A(x)e^{x} + B(x)xe^{x} \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^{2} + C_1\right)e^{x} + (x + C_2)xe^{x} \\ &= -\frac{1}{2}x^{2}e^{x} + C_1e^{x} + x^{2}e^{x} + C_2xe^{x} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}x^{2}e^{x}}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1e^{x} + C_2xe^{x}}_{\text{同次方程式の一般解}} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{}$

(4) $y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3x}$

[I] 同次方程式： $y'' + 8y' + 17y = 0$

$y = e^{px}$ とすると.

固有方程式： $p^2 + 8p + 17 = 0$

$p = -4 \pm i$

基本解： $e^{(-4+i)x}$、 $e^{(-4-i)x}$

一般解： $y = Ae^{(-4+i)x} + Be^{(-4-i)x}$

$= Ae^{-4x} \cdot e^{ix} + Be^{-4x} \cdot e^{-ix}$

$= Ae^{-4x}(\cos x + i\sin x) + Be^{-4x}(\cos x - i\sin x)$

$= e^{-4x}\{(A+B)\cos x + (A-B)i\sin x\}$

$\downarrow$ $A+B = C$, $(A-B)i = D$

$= e^{-4x}(C\cos x + D\sin x)$ （C. D.：任意定数）

[II] 非同次方程式： $y = e^{-4x}(C(x)\cos x + D(x)\sin x)$

$C.D \to C(x).D(x)$

$$\begin{cases} C'(x)e^{-4x}\cos x + D'(x)e^{-4x}\sin x = 0 & \text{—— ①} \\ C'(x)(-4e^{-4x}\cos x - e^{-4x}\sin x) + D'(x)(-4e^{-4x}\sin x + e^{-4x}\cos x) = 2e^{-3x} & \text{—— ②} \end{cases}$$

①より. $C'(x) = -D'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x}$ —— ③

(② × e^{4x}) に代入.

$$-D'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}(-4\cos x - \sin x) + D'(x)(-4\sin x + \cos x) = 2e^{x}$$

$$-D'(x)\left(-4\sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) + D'(x)(-4\sin x + \cos x) = 2e^{x}$$

$\downarrow$ 両辺に $\cos x$ をかける

$$D'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2e^{x}\cos x$$

$$D'(x) = 2e^{x}\cos x$$

③に代入. $C'(x) = -2e^{x}\sin x$

(積分)

$C(x) = -2\int e^{x}\sin x\,dx = e^{x}(\cos x - \sin x) + C_1$

$D(x) = 2\int e^{x}\cos x\,dx = e^{x}(\cos x + \sin x) + C_2$ （C_1, C_2：積分定数）

ゆえに、与式の一般解

$y = e^{-4x}\{(e^{x}(\cos x - \sin x) + C_1)\cos x + (e^{x}(\cos x + \sin x) + C_2)\sin x\}$

$= \underline{e^{-3x} + e^{-4x}(C_1\cos x + C_2\sin x)}$ //

(5) $y'' + y = \sin x$

$\boxed{1}$ 同次方程式： $y'' + y = 0$

$y = e^{px}$ とすると、

固有方程式： $p^2 + 1 = 0$

$\therefore p = \pm i$

基本解：e^{ix}, e^{-ix}

一般解： $y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ (A・B：任意定数)

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\xrightarrow{\text{オイラーの関係式}} y = A(\cos x + i\sin x) + B(\cos x - i\sin x)$

$\Leftrightarrow y = (A+B)\cos x + (A-B)i\sin x$

$\downarrow$ $A+B = C$, $(A-B)i = D$ とすると

$y = C\cos x + D\sin x$

$\boxed{2}$ 定数変化法： $C, D \rightarrow C(x), D(x)$

$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$

$$\begin{cases} C'(x)\cos x + D'(x)\sin x = 0 & \text{——①} \\ -C'(x)\sin x + D'(x)\cos x = \sin x & \text{——②} \end{cases}$$

①より

$$C'(x) = -D'(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -D'(x)\tan x \quad \text{——③}$$

これを②に代入すると

$$D'(x)\tan x \cdot \sin x + D'(x)\cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow D'(x)(\tan x\sin x + \cos x) = \sin x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow D'(x) = \frac{\sin x}{\tan x\sin x + \cos x}$$

cos

$$\Leftrightarrow D'(x) = \sin x\cos x$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x$$

これを③に代入すると

$$-\sin x\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C'(x) = -D'(x)\tan x$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \tan x$$

$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

$$= -\sin^2 x$$

$$= \frac{\cos 2x - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$$

(積分)

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C_1 \quad (C_1：積分定数)$$

$$D(x) = \int D'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2 \quad (C_2：積分定数)$$

よって　　　　$- 2\cos^2 x + 1$

$$y = C(x)\cos x + D(x)\sin x$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C_1\right)\cos x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2\right)\sin x$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\cos x - \frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x - \frac{1}{4}\sin x\cos 2x + C_2\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{4}\sin x\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \frac{1}{4}\sin x\left(2\cos^2 x - \cos 2x\right) - \frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x}_{\text{非同次方程式の特解}} + \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{\text{同次方程式の一般解}} \quad //$$