§§ ルジャンドル変換のまとめ

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \quad \Leftrightarrow \quad dU = \frac{\partial U}{\partial S}dS + \frac{\partial U}{\partial V}dV + \frac{\partial U}{\partial N}dN$$

$$\therefore \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad -P = \frac{\partial U}{\partial V}, \quad \mu = \frac{\partial U}{\partial N}$$

つまり，$S \leftrightarrow T$，　$V \leftrightarrow P$，　$N \leftrightarrow \mu$　共役な，示量変数↔示強変数　の組み合わせで変換が可能！！

例えば，$U[S,V,N] \to F[T,V,N]$ の変換は，$\dfrac{\partial U[S,V,N]}{\partial S} = T$ の関係があって可能となる！

ルジャンドル変換とは　　凸関数 $f[x]$ から凸関数 $\mathrm{g}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$ への変換

※　変換後の関数 g にもう一度ルジャンドル変換をすると f が復元できる

$$f[x,y,z] \xrightarrow[x\text{でルジャンドル変換}]{} \mathrm{g}\left[\frac{\partial f}{\partial x}, y, z\right] \xrightarrow[\frac{\partial f}{\partial x}\text{でルジャンドル変換}]{} f[x,y,z]$$

つまり，ルジャンドル変換により情報は失われない．

ルジャンドル変換の方法　$\boxed{\mathrm{g}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, y, z\right] = f[x,y,z] - \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot x}$

例１　$f[x] = x^2 + 2 \quad \to \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \equiv p \quad \to \quad \therefore \ x = \dfrac{p}{2}$

$$\to \quad \mathrm{g}[p] = f[x] - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x = f[x] - p\cdot x = x^2 + 2 - px = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2 - p\cdot\frac{p}{2} = -\frac{p^2}{4} + 2 \qquad //$$

例２　$\mathrm{g}[p]$ を p についてルジャンドル変換してみよう

$$\mathrm{g}[p] = -\frac{p^2}{4} + 2 \quad \to \quad \frac{\partial g}{\partial p} = -\frac{p}{2} \equiv z \quad \to \quad \therefore \ p = -2z$$

$$\to \quad f[z] = \mathrm{g}[p] - \frac{\partial g}{\partial p}\cdot p = -\frac{p^2}{4} + 2 - z\cdot(-2z) = -z^2 + 2 + 2z^2 = z^2 + 2 \qquad //\ \text{元に戻った！！}$$

例３　ラグランジュ関数 $L[x,y]$ からハミルトン関数 $H[x,p]$ へのルジャンドル変換

$$\frac{\partial L[x,y]}{\partial y} \equiv p \ \text{として，} \ H[x,p] = L[x,y] - \frac{\partial L[x,y]}{\partial y}\cdot y = L[x,y] - p\cdot y = L[x,y(x,p)] - p\cdot y(x,p)$$

または，

$$-\frac{\partial L[x,y]}{\partial y} \equiv p \ \text{として，} \ H[x,p] = L[x,y] + \frac{\partial L[x,y]}{\partial y}\cdot y = L[x,y] + p\cdot y = L[x,y(x,p)] + p\cdot y(x,p)$$

のどちらかである．

$y = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$，　$p = \dfrac{\partial L[x,\dot{x}]}{\partial \dot{x}}$　とすると，$L[x,\dot{x}]$ から $H[x,p]$ へ変換される．