2. Задатак

Нека је T стабло са n чворова, $n \geq 2$. За произвољан број i нека p_i означава број чворова степена i у стаблу T. Доказати да је

$$\underbrace{p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1}} = 2.$$

Решење:

Прво овог израза ништа не почињавој јер ћеш се само збунити. Искористи познато! ↯

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$ а ти си у стаблу! Ту ти је број грана $n-1$.

Не можеш имати чвор степена $\geq n$ ↯.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i p_i = 2(n-1)$$ па из ове релације само да сазнаш шта/колико је n

$$\sum_{i=1}^{n-1} i p_i = 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i - 1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2-i) p_i = 2$$ и тиме је доказ готов!

У графу од n чворова $\delta(v)$ је $\max = n-1$.

Зашто $\sum_{i=1}^{n-1} i p_i$ → бројач иде до $n-1$? ~~За $n=2$~~ ~~Видиш да су чворови само чвор~~ степена 1.

Резиме: $$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

(број чворова степена 1) + ... + (број чворова степена $n-1$)

$$\sum_{i=1}^{n-1} i p_i = 2(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i p_i = 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i - 1\right) \iff \sum_{i=1}^{n-1} (2-i) p_i = 2$$

- Када у датом графу сумирамо све P_i као резултат добијамо укупан број чворова у стаблу што је $= n$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i = n$$

- Када у датом графу сумирамо све iP_i као резултат добијамо суму свих степена у графу. $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{i=1}^{n-1} iP_i$

Задатак Ако бипартитни граф има n чворова и e грана, онда је $e \le \frac{n^2}{4}$. Доказати!

Рјешење:

G је наш бипартитни граф, тј. граф који ми посматрамо кроз задатак.

(V_1, V_2) је одговарајућа бипартиција.

$|V_1| = x$

$|V_1| = x = 2,\ 4 = n$ али пошто је ово је за $x(n-x) = 4$ гране ✓ комплетни бипартитни граф јер посматрани граф може бити комплетни или само бипартитни и зато је $\le$ за $e \le x(n-x)$ ↯.

$$e \le x(n-x)$$

$$f(x) = x(n-x) = nx - x^2$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = n - 2x \longrightarrow = 0 \text{ за } x = \frac{n}{2}$$

$$e \le x(n-x) \le \frac{n^2}{4}$$

У једној партицији ти имаш x чворова што значи да у другој имаш $n-x$ чворова. Што аутоматски значи да број грана e мора бити $\le x(n-x)$.

4. Задатак

Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи циклус парне дужине.

Рјешење: Значи да требам доказати да у графу G, $\delta(G)\geq 3$ постоје чворови који образују циклус парне дужине.

- Нека је $l = v_1 v_2 v_3 \cdots v_k$ пут највеће дужине у графу G. Како је $\delta(G)\geq 3$ то чвор v_k поред чвора v_{k-1} има још 2 суједа v_i и v_j који се налазе дуж пута $v_1 \dots v_{k-2}$ јер иначе да је другачије онда l не би био најдужи пут у графу G.

Примјетити да са v_i и v_j на таквом путу ми имамо циклус.

- Нека је v_j на путу између v_i и v_k.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Дужина циклуса } v_i v_{i+1} \dots v_j v_k \text{ је} & j-i+2 \\ \text{Дужина циклуса } v_j v_{j+1} \dots v_k \text{ је} & k-j+1 \\ \text{Дужина циклуса } v_i v_{i+1} \dots v_k \text{ је} & v_k-i+1 \end{array}\right\} +$$

$(j-i+2)+(k-j+1)+(k-i+1) = 2(k-i+2)$ што значи

да је бар један од тих циклуса парне дужине.

$\ell = v_1 v_2 \ldots v_k$, а v_i и v_j се налазе дуж те путање.

Елем како су v_i и v_j суседи од v_k примјетимо да дуж ℓ постоје циклуси $v_i \rightleftarrows v_k$ и $v_j \rightleftarrows v_k$.

4. Задатак

Седам пријатеља који одлазе на одмор договоре се да ће сваки од њих да се јави разгледницом тројици од преосталих шест. Да ли је могуће организовати кореспонденцију тако да свако пише оним пријатељима који ће и њему писати?

Рјешење:

Постоји ли граф са 7 чворова од којих је сваки чвор степена 3?

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

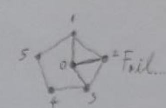
Паран број никако не може бити $= 3 \cdot 7 = 21$ и

тиме закључујемо да такав граф не постоји!

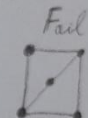
5. Задатак | Нека је G непразан граф са бар једном граном у којем свака два чвора истог степена немају заједничког суседа. Докажите да G садржи чвор степена 1.

Решење:

(Не значи ни да је он једини чвор тог степена!



$v \in G$ и то нека буде чвор највећег степена у графу G.



$\delta(v) = k$

$u_1, u_2, \dots u_k$ нека су то чворови суседи чвора v.

На основу претпоставке u_i и u_j, $i \neq j$ имају заједничког суседа v, па имају различите степене.

Максималан степен чвора u_i је k, а минималан 1. То значи да постоји чвор степена 1.

Какав је то граф? Како изгледа граф који одговара овом горе опису?

 Котомети?

4. Задатак Граф има 13 тјемена. Три тјемена имају степен 1, седам тјемена имају степен 4. Да ли он може имати 31 ивицу? Образложити одговор.

Рјешење:

3 тјемена степена 1, $3 \cdot 1$

7 тјемена степена 4, $7 \cdot 4 = 28$

$\Rightarrow$ $3+7=10$

$13-10=3$ чвора непознатог степена и нека су то чворови a, b и c редом...

$$\delta(a)+\delta(b)+\delta(c)+\overbrace{3\cdot 1+7\cdot 4}^{=31}=2\cdot 31$$

$$\delta(a)+\delta(b)+\delta(c)=31$$

Ако избришемо три чвора степена 1, добијамо граф са 10 чворова, а максималан степен у таквом графу је $(10-1)=9$ па

$$\delta(a)+\delta(b)+\delta(c)=(31-3)$$

$$9+9+9<28$$

тако да наш граф у суштини и не постоји.

б) Нека је G граф који садржи n чворова степена 4 и $2n+2$ чворова степена један. Ако је G повезан граф, онда G не садржи ниједну контуру.

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Повезан граф G садржи $3n+2$ чворова.

$|V| = 3n+2$

Контрадикција!

$$4n + 1(2n+2) = \cancel{2(3n+2)}\ 6n+2$$

$$6n+2 = 6n+2$$

Граф постоји.

$E = |V| - 1 = 3n+1$, стабло!

$$|V| = n + 2n + 2 = 3n+2$$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

$$4n + 1(2n+2) = 2|E|$$

$$6n+2 = 2|E| \quad \dots / :2$$

$3n+1 = |E| \Leftrightarrow |E| = |V| - 1$ стабло, пошто је мој повезан граф.

2. Задатак

a) Доказати да је бар један од графова G или $\overline{G}$ повезан.

Решење:

Ако је граф G повезан тврђење важи. ✓

Претпоставимо да G није повезан и нека су $S_1, S_2, \dots, S_k$ његове компоненте повезаности. (Кажемо, тада је $\overline{G}$ повезан.)

Покажимо да за свака два чвора u и v $(u \neq v)$ постоји шетња од u до v у графу $\overline{G}$. (У повезаном графу између било која два чвора постоји шетња.)

· Ако се u и v налазе у различитим компонентама повезаности рецимо $u \in S_1$ и $v \in S_2$, онда су они повезани граном у $\overline{G}$, а шетња која их повезује је uev, $e = \{u, v\}$. Видиш Видиш!

· Ако су u и v у истој компоненти повезаности, рецимо у S_1, онда посматрајмо произвољан чвор $w \in S_2$. → у G он није повезан са u и v јер су у различитим компонентама повезаности..

$e_1 = \{u, w\}$

$e_2 = \{v, w\}$

а то су гране у графу $\overline{G}$ па је

$u e_1 w e_2 v_2$ шетња која спаја u и v у графу $\overline{G}$.

7. Задатак

На једном скупу постоји укупно 9 држава. Доказати да на том скупу постоји држава која међу којима њима има паран број пријатељских држава.

(Ако је држава A пријатељска са државом B, тада је држава B пријатељска са државом A)

Рјешење: $|V| = 9$

$\sum_{v\in V} \delta(v) = 2|E|$ што није могуће ако су сви чворови непарног степена, тако да међу државама постоји бар једна са парним бројем пријатељских држава.

$\boxed{\text{3. Задатак}}$ Претпоставимо да је граф $G=(V,E)$ стабло код кога је $|V| \geq 2$.

Показати да граф G има бар два чвора са степеном 1.

Рјешење:

Нека је T стабло са бар 2 чвора и нека је $v_1 v_2 \ldots v_s$ максималан пут у стаблу T.

Докажимо да су v_1 и v_5 висећи чворови.

Претпостовимо да v_1 није висећи чвор. Тада он има суседа $x \neq v_1$.

Пут $v_1 v_2 \ldots v_n$ је максималан пут у стаблу T, па је $x = v_i$, $i = 3, \ldots, s$.

Одавде закључујемо да је $v_1 v_2 \ldots v_i$ контура у стаблу T што је немогуће.

2. Задатак

а) Дат је граф $G=(V,E)$, при чему је $|V|=6$. Доказати да бар један од графова G или $\overline{G}$ као подграф има C_3.

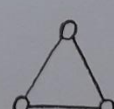
Рјешење:

$$\delta(v\,G)+\delta(v\,\overline{G}) = |V|-1 = 5$$

$v \in G$

$3 \leq \delta(v) \leq 5$

Нека су v_1, v_2 и v_3 суседи чвора v у графу G. Ако једна од грана $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$ или $\{v_1, v_3\}$ припада графу G тада $\{v, v_1, v_2\}$ или $\{v, v_2, v_3\}$ или $\{v, v_1, v_3\}$ образују Δ у G. У супротном имамо троугао у $\overline{G}$.

b) На основу а) у G или у $\overline{G}$ постоји 

при чему су о – такмичари, а

гране представљају њихова споразумијевања.

4. Задатак a) Постоји ли бипартитни граф са степенима чворова

3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 ?

Рјешење: Нека је G бипартитни граф са наведеним низом степена чворова и (V_1, V_2) одговарајућу партицију чворова. Вриједи

$$\sum_{x\in V_1}\delta(x) = \sum_{y\in V_2}\delta(y).$$

Нека је чвор v графа G са степеном 5. Претпоставимо да $v\in V_1$. Како су степени осталих чворова дјељиви са 3, а

$$3 \nmid \sum_{x\in V_1}\delta(x)$$

закључујемо да такав низ степена чворова не постоји.

b) Одредити бар по једну матрицу сусједства за графове K_n и $K_{m,n}$.

Рјешење:

Матрица од K_n има нуле по главној дијагонали.

За $K_{m,n}$

$$\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & 1_{m\times n} \\ 1_{n\times m} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$$

4. Ako je u grafu G, $\delta(G) \geq 2$, dokazati da G sadrži ciklus dužine bar $\delta(G)+1$.

4. Pretpostavimo da je $l = u_1u_2\dots u_k$ najduži put u grafu G. Kako je $\delta(G) \geq 2$, tada čvor u_k pored čvora u_{k-1} mora imati bar još jednog susjeda. Neka je to čvor w. Čvor w se mora nalaziti na putu $u_1u_2\dots u_{k-2}$, jer je u protivnom put $l' = u_1u_2\dots u_kw$ duži od l, a pretpostavka je da je l najduži put u grafu G. Dakle, graf G sadrži konturu. Pokažimo da je dužine bar $\delta(G)+1$. Neka je $\delta(G) = m \geq 2$, $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{m-1}}$ susjedi čvora u_k i neka je čvor u_{i_1} najudaljeniji čvor od čvora u_k na putu l. Tada je $u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_k}u_{i_1}$ ciklus dužine bar $m+1$.