

Prvi kolokvijum iz predmeta Matematika 4

8.1.2022.

Zadatak 1.

- (a) [2] Student je došao na ispit znajući 85 od 100 pitanja. Na ispitu izvlači cedulju sa tri pitanja. Kolika je vjerovatnoća da će student znati sva tri pitanja?
- (b) [2] Serija od 40 proizvoda je podvrgnuta kontroli. Na slučajan način se bira 5 proizvoda. Serija se ne prihvata ako se među ovih 5 proizvoda nađe makar jedan skart. Kolika je vjerovatnoća da se serija ne primi ako sadrži 5% skarta?

☐

Zadatak 2.

- [4] Đorđe baca novčić 2 puta. Ako pisano padne bar jednom, izvlači dvije kuglice sa vraćanjem iz kutije koja sadrži 3 zelene i 2 bijele kuglice. Ako pisano ne padne nijednom, izvlači dve kuglice bez vraćanja iz iste kutije. Ako Đorđe nije izvukao 2 zelene kuglice, koliko iznosi vjerovatnoća da je pri bacanju novčića 2 puta pao grb?

☐

Zadatak 3.

Predrag baca dvije kockice za igru. Neka je slučajna promjenljiva X - suma brojeva koji su pali, a slučajna promjenljiva Y - broj 1 ako su pali isti brojevi, inače 0.

- (a) [3] Naći raspodjelu slučajnog vektora (X, Y) .
- (b) [1] Ispitati nezavisnost slučajnih promjenljivih X i Y .

☐

Zadatak 4.

- [4] Funkcija raspodjele slučajne promjenljive X je $F_X(x) = \begin{cases} 3a - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Odrediti konstantu a i naći gustinu slučajne promjenljive X .

☐

Zadatak 5.

Slučajna promjenljiva X ima binomnu raspodjelu $B(100, \frac{1}{2})$. Odrediti približne vrijednosti vjerovatnoća:

- (a) [2] $P(40 < X < 60)$,
- (b) [2] $P(X = 50)$.

☐

Ukupno bodova

☐

1. Задаток

A - випуск на збір на два 3 півтора

a)

$$\begin{array}{r} \binom{85}{1} \binom{84}{1} \binom{83}{1} \\ \hline \binom{100}{3} \end{array}$$

b) Кого не пропуск не приймає? - Кого не у пів 5 пропуск (ауторизація)

Задані, якщо ми оба, не пропуск.

5% з 40 пропуск =

$$\frac{5 \cdot 40}{100} = 2$$

Відповідь: 1 - $\frac{38}{40} \frac{37}{39} \frac{36}{38} \frac{35}{37} \frac{34}{36}$

3. Задание

X — сумма брошенных костей

$Y = \begin{cases} 1 & \text{если сумма брошенных} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$$S_X = \left\{ \begin{array}{c} \text{1 кость} \\ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{array} , \begin{array}{c} \text{2 кости} \\ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \end{array} , \begin{array}{c} \text{3 кости} \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9 \end{array} , \begin{array}{c} \text{4 кости} \\ 5, 6, 7, 8, 9, 10 \end{array} , \begin{array}{c} \text{5 костей} \\ 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{array} , \begin{array}{c} \text{6 костей} \\ 7, 8, 9, 10, 11, 12 \end{array} \right\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \text{ а } S_Y = \{0, 1\}$$

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{30}{36}$
1	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Поскольку X и Y имеют конечное число значений, то можно проверить, являются ли они независимыми...

Напр. $P(X=2, Y=0) = \frac{1}{36} \cdot \frac{30}{36} \neq 0$

4.30gation

$$F_X(x) = \begin{cases} 3a-1 & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

W?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 3a-1$$

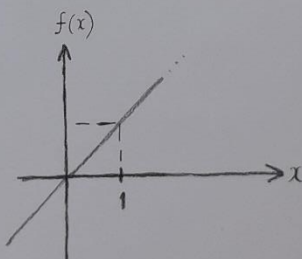
$$3a-1=0$$

$$a = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$f(x)?$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$



5. Zugabe

$$X \in B(n=100, p=\frac{1}{2}), \quad q=1-p=\frac{1}{2}, \quad a=40, \quad b=60$$

$$a) P(40 < X < 60)? = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq X^* \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$P(-2 < X^* < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$

$$= 2\Phi(2) - 1 = 0,9544$$

Prvi kolokvijum iz predmeta Matematika 4

16.6.2022.

Zadatak 1.

- (a) [2] Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Vjerovatnoća da će se morati zaustaviti kod prvog iznosi 0.4, a kod drugog 0.5. Takođe je poznato da vjerovatnoća da će morati da se zaustavi kod bar jednog semafora iznosi 0.6. Naći vjerovatnoću događaja B - inženjer će morati da se zaustavi samo kod prvog semafora i C - inženjer će morati da se zaustavi kod tačno jednog semafora.
- (b) [2] U kutiji se nalazi 30 numerisanih kuglica od 1 do 30. Izvlačimo odjedanput 4 kuglice. Kolika je vjerovatnoća da će među izvučenim kuglicama biti kuglice sa brojevima 14 i 22.

☐

Zadatak 2.

[4] Prva kutija sadrži 5 crvenih i 6 bijelih kuglica, a druga kutija sadrži 4 crvene i 4 bijele kuglice. Iz prve kutije se nasumično izvlači jedna kuglica i premješta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.

- (a) Izračunati vjerovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.
- (b) Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi vjerovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premještena crvena kuglica?

☐

Zadatak 3.

Naći raspodjelu slučajne promjenljive Z koja predstavlja zbir parnih brojeva koji su dobijeni pri bacanju dvije kockice za igru, s tim što smatramo da je zbir 0 ako su na obje kockice pali neparni brojevi.

☐

Zadatak 4.

[4] Slučajna promjenljiva X data je gustinom $f_X(x) = \begin{cases} k(1 - (x - 3)^2), & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Odrediti konstantu k , funkciju raspodjele i naći $P(X > 3)$.

☐

Zadatak 5.

Pretpostavimo da broj telefonskih poziva ima Poasonovu raspodjelu sa parametrom $\lambda = 2$ na sat.

- (a) [2] Izračunati vjerovatnoću da će u toku sata biti objavljeno tačno tri telefonska poziva.
- (b) [2] Izračunati vjerovatnoću da će u toku jednog sata biti obavljeno najviše dva telefonska poziva.

☐

Ukupno bodova

☐

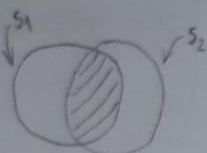
1. Задаток

a)

S_1 — множество те морских га се размножава ~~тоже~~ пог топлим климатом

S_2 — множество те морских га се размножава ~~тоже~~ пог сувом климатом

$S_1 \cap S_2$ — множество те морских га се размножава пог оба типа климата



C — множество те морских га се размножава пог ^{само} једном типом климата

$$P(C) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = 0.3$$

B — множество те морских га се размножава пог топлим ^{само} климату

$$P(B) = P(S_1) - P(C) = 0.1$$

3. Зоси́тання

$$S_Z = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 31 \\ 33 \\ 35 \\ 51 \\ 53 \\ 55 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 21 \\ 12 \\ 23 \\ 32 \\ 25 \\ 52 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 22 \\ 41 \\ 14 \\ 43 \\ 34 \\ 45 \\ 54 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 42 \\ 24 \\ 61 \\ 16 \\ 63 \\ 36 \\ 65 \\ 56 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 44 \\ 62 \\ 26 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 10 \\ 64 \\ 46 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 66 \end{array} \right\}$$

$$Z: \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ \frac{9}{36} & \frac{6}{36} & \frac{7}{36} & \frac{8}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array} \right)$$

4. Задача

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\kappa \int_2^4 (1 - (x-3)^2) dx = 1$$

$$\kappa \left[\int_2^4 dx - \int_2^4 (x-3)^2 dx \right] = 1$$

$$\kappa(4-2) - \kappa \int_2^4 (x-3)^2 dx = 1$$

$$2\kappa - \kappa \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_2^4 = 1$$

$$2\kappa - \kappa \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 1$$

$$2\kappa - \frac{2}{3}\kappa = 1$$

$$\kappa \left(2 - \frac{2}{3} \right) = 1$$

$$\frac{4}{3}\kappa = 1$$

$$\kappa = \frac{3}{4} \checkmark$$

$$P(X > a) = P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

$$P(X > 3) = \frac{3}{4} \int_3^4 (1 - (t-3)^2) dt$$

$$= \frac{3}{4} \left[\int_3^4 dt - \int_3^4 (t-3)^2 dt \right] =$$

$$\frac{3}{4} \left[1 - \frac{(t-3)^3}{3} \Big|_3^4 \right] =$$

$$\frac{3}{4} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

5. Задача

$$\lambda = 2$$

$$a) P(X=3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2}$$

$$b) P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}$$

Drugi kolokvijum iz predmeta Matematika 4
9.6.2022.

Zadatak 1.

[4] Nепrekidna slučajna promjenljiva X ima gustinu

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1, e], \\ \ln x, & x \in [1, e]. \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X .

Zadatak 2.

[4] U jednoj igri igrač osvaja 50 poena sa vjerovatnoćom 0.5, 10 poena sa vjerovatnoćom 0.3 i -100 poena sa vjerovatnoćom 0.2 (tj. gubi 100 poena). Koliko igara treba da odigra, pa da sa vjerovatnoćom 0.90 osvoji bar 1000 poena?

Zadatak 3.

[4] Obilježje X ima zakon raspodjele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ \frac{p}{5} & \frac{p}{5} & 1 - \frac{2p}{5} \end{pmatrix}, \quad 0 < p < \frac{5}{2}.$$

Na osnovu uzorka $(0, -2, 7, -2)$ naći ocjenu maksimalne vjerodostojnosti za nepoznati parametar p .

Zadatak 4.

[4] Ocjene za petoro studenata iz predmeta Matematika 1 i Matematika 2 date su tabelarno

Matematika 1	6	7	8	9	10
Matematika 2	6	6	7	7	10

Naći jednačinu regresione prave i očekivanu ocjenu iz Matematike 1 za studenta koji ima ocjenu 8 iz Matematike 2.

Zadatak 5.

[4] Koristeći inverznu interpolaciju riješiti jednačinu $f(x) = 0$ ako je funkcija f zadata tablicom

x	2.3	2.4	2.5	2.6
$f(x)$	0.1024	0.0067	-0.0479	-0.0893

Ukupno bodova

1. Задание $E(x)$?

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx = \boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int_1^e \frac{1}{2} x dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln(e) - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097 \checkmark$$

$Var(x)$?

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 4,5745 - 4,3974 = 0,177$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ln x dx = \int_1^e x^2 \ln x dx = \boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array}} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int_1^e \frac{1}{3} x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^e = \left(\frac{e^3}{3} \ln(e) - \frac{e^3}{9} \right)$$

$$1. - \left(0 - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4,5745$$

5. Aggremierung $L(0, -2, 7, -2; p) = \prod_{x=1}^n p_x(x_k) = P(X=0)P(X=-2)P(X=7)P(X=-2)$

$$= \frac{p}{5} \frac{p}{5} \left(1 - \frac{2p}{5}\right) \frac{p}{5} = \left(\frac{p}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{2p}{5}\right) \dots / \ln()$$

$$\ln L(0, -2, 7, -2; p) = \ln \left[\left(\frac{p}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{2p}{5}\right) \right] = 3 \ln \left(\frac{p}{5}\right) + \ln \left(1 - \frac{2p}{5}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(0, -2, 7, -2; p)}{\partial p} = 0$$

$$3 \frac{5}{p} \left(\frac{1}{5} p'\right) + \frac{1}{\frac{5-2p}{5}} \left(1 - \frac{2}{5} p'\right) = 0$$

$$\frac{3}{p} + \frac{5}{5-2p} \left(-\frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\frac{3}{p} - \frac{2}{5-2p} = 0$$

$$\frac{3}{p} = \frac{2}{5-2p}$$

$$2p = 3(5-2p)$$

$$2p = 15 - 6p$$

$$8p = 15$$

$$\hat{p} = \frac{15}{8} = 1,875$$

4. Задача

$$Y = aX + b, \quad a, b?$$

$$a \sum_{k=1}^n x_k + nb = \sum_{k=1}^n y_k$$

$$a \cdot 40 + 5b = 36$$

$$b \sum_{k=1}^n x_k + a \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$b \cdot 40 + a \cdot 330 = 297$$

$$\begin{cases} 40a + 5b = 36 \\ 330a + 40b = 297 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 40 & 5 \\ 330 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 297 \end{bmatrix} \quad \text{Контрастирование...}$$

$$(330a - 320a) + (40b - 40b) = 297 - 288$$

~~$$\begin{aligned} 10a &= 9 \\ a &= 9/10 = 0,9 \\ 40 & \end{aligned}$$~~

$$a = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$40 \frac{9}{10} + 5b = 36$$

$$36 + 5b = 36$$

$$b = 0$$

$$Y = 0,9X, \quad \text{на } Y = 8$$

$$0,9X = 8$$

$$X \approx 9$$

5. Задача

x	2,3	2,4	2,5	2,6
$f(x)$	0,1024	0,0067	-0,0479	-0,0893

1. Нужно решить задачу интерполяции и $f(x)$ сложено у расчётной функции.

$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3
	-0,0893	-0,0479	0,0067	0,1024
x	2,6	2,5	2,4	2,3

2. Нужно

$$\begin{array}{cccc|c} y-y_0 & y-y_1 & y-y_2 & \dots & y-y_n & D_0 \\ y_1-y_0 & y_1-y_1 & y_1-y_2 & \dots & y_1-y_n & D_1 \\ y_2-y_0 & y_2-y_1 & y_2-y_2 & \dots & y_2-y_n & D_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n-y_0 & y_n-y_1 & y_n-y_2 & \dots & y_n-y_n & D_n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y - (-0,0893) \\ -0,0047 + 0,0893 \\ 0,0067 + 0,0893 \\ 0,1024 + 0,0893 \end{array} \begin{array}{l} -0,0893 + 0,0479 \\ y + 0,0479 \\ 0,0067 + 0,0479 \\ 0,1024 + 0,0479 \end{array} \begin{array}{l} -0,0893 - 0,0067 \\ -0,0479 - 0,0067 \\ y - 0,0067 \\ 0,1024 - 0,0067 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} -0,0893 - 0,1024 \\ -0,0479 - 0,1024 \\ 0,0067 - 0,1024 \\ -0,1024 \end{array} \begin{array}{l} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}$$

w_n

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0,0893 & -0,0414 & -0,096 & -0,1917 & 6,8036 \cdot 10^{-5} \\
 0,0846 & 0,0479 & -0,0546 & -0,1503 & 3,3255 \cdot 10^{-5} \\
 0,096 & 0,0546 & -0,0067 & -0,0957 & 3,3608 \cdot 10^{-5} \\
 0,1917 & 0,1503 & 0,0957 & -0,1024 & -2,8235 \cdot 10^{-4}
 \end{array}$$

$$W_n = 2,9346 \cdot 10^{-6}$$

$$P_3(x) = W_n(y) \left[\frac{x_0}{D_0} + \frac{x_1}{D_1} + \frac{x_2}{D_2} + \frac{x_3}{D_3} \right]$$

$$\begin{aligned}
 = & 2,9346 \cdot 10^{-6} \left(\frac{2,6}{-6,8036 \cdot 10^{-5}} + \frac{2,5}{3,3255 \cdot 10^{-5}} \right. \\
 & \left. + \frac{2,4}{3,3608 \cdot 10^{-4}} + \frac{2,3}{-2,8235 \cdot 10^{-4}} \right)
 \end{aligned}$$