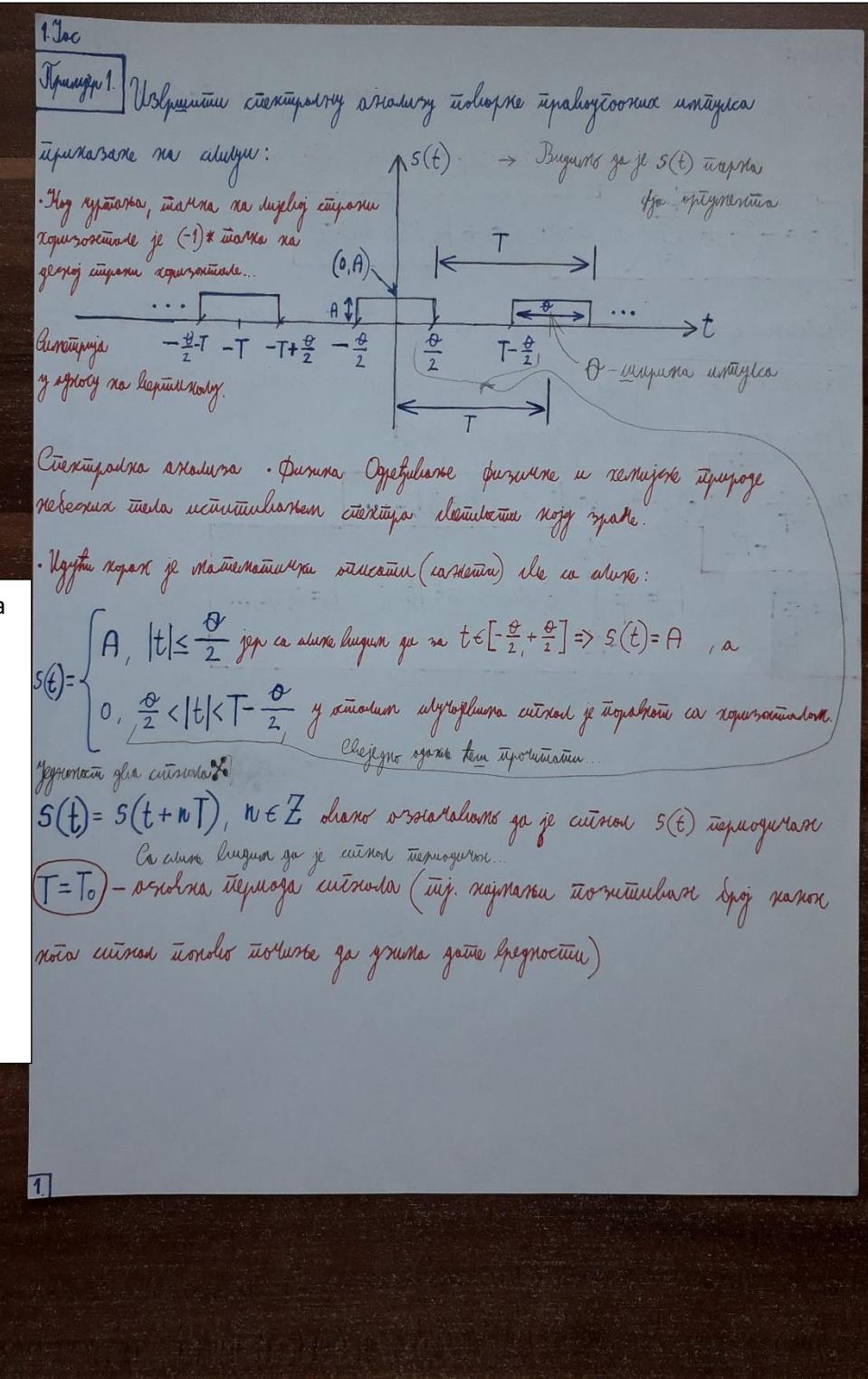


- 1) Zadatu povorku razviti u Fourier-ov red, odrediti koeficijente tog Fourierovog reda,
 - 2) odrediti Amplitudski spektar,
 - 3) odrediti fazni spekar,
 - 4) odrediti jednostrani-STVARNI spektar.
- Time je zadatak urađen!



Formule za $S(t)$, a_n i b_n se moraju znati napamet!

Posao se da obaviti preko istih ali taj isti posao signal-razviti-u-Fourier-ev-red se da obaviti još brže ako su poznate formule za Fourier-ov transformacioni par za periodične/aperiodične signale.

1. Kao:

Tomu je $s(t)$ -izravnjavanje u sagovornici Dirichlet-je tabele

može se možda razložiti u Fourier-ov red, taj. imamo:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Principi uvođenja se razlikujuju u svim periodičnostima i oblicima

Fourier-ova reda, a spojili a_n i b_n se razlikuju počinjenjem Fourier-ova reda u počinjenju se kao:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega_0 t dt ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dobro, nekegde pogrešno predstavljanje za zagatanu činjenicu.

Kako je to moguće da je $\int_{-T/2}^{T/2} a_0 = a_0 T$?

$T = ?$

$$\frac{\theta}{2} - (T - \frac{\theta}{2}) = 0, \text{ naravno kada } S(t) \text{ za } t \text{ uzme } \frac{\theta}{2} \text{ i } T - \frac{\theta}{2} \text{ redom...}$$

$$-T + 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow T = \theta$$

Još bolje, sa slike jasno vidim da je signal isti od $-\frac{\theta}{2}$ do $\frac{\theta}{2}$ što znači da je period dužine θ !

У најелем аутогију, када је $s(t)$ периодичка пољарска гармоничка компонента

Када на гармоничкој амплитуди, имамо: $|t| \leq \frac{\theta}{2}$ тада је његова величина...

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A \cos n\omega_0 t dt =$$

$$\frac{2A}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos n\omega_0 t dt = \boxed{\begin{array}{l} \text{Complex} \\ \frac{n\omega_0 t = y}{\text{const}} \\ n\omega_0 dt = dy \end{array}} = \frac{2A}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{1}{n\omega_0} \cos(y) dy =$$

$$\frac{2A}{Tn\omega_0} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos y dy = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left. \sin(y) \right|_{-\theta/2}^{\theta/2} = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left. \sin(n\omega_0 t) \right|_{-\theta/2}^{\theta/2}$$

Док је посматрано $\sin(-x) = -\sin(x)$ као искључива, његове резултате са пољаром су исти.

$$\frac{2A}{Tn\omega_0} \left[\sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - \sin(-n\omega_0 \frac{\theta}{2}) \right] = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left[\sin n\omega_0 \frac{\theta}{2} + \sin n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right] =$$

Иако је улога $(\sin/\cos)(-x)$ посматрана са пољаром то је

$$\frac{2A}{Tn\omega_0} 2 \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) = \boxed{\quad} \quad \frac{2A}{Tn\frac{2\pi}{\omega_0}} 2 \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\theta}{2}\right) =$$

Чима је да добијамо $\sin C$

$$\frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi \alpha) / \cdot \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{2A\alpha}{n\pi\alpha} \sin(n\pi\alpha) = \boxed{\quad}$$

$$2A\alpha \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} = 2A\alpha \sin C(n\pi\alpha), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Пиме ово добијамо кофицијент

a_n .

Напомена: $\sin(-x) = -\sin(x)$ тј. $\sin(x)$ је пољарска функција огруженица

тј. је $\cos(-x) = \cos(x)$ тј. $\cos(x)$ је пољарска функција огруженица.

2.

•••Ну и что же мирна и тихая!

- Потом хористами это забегло исполнение:

$\mathcal{D} = \frac{\theta}{T}$ → Фактор доли или фактор решения у сгл. линеаризаций

je Meine Interpretation „duty cycle“.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \text{Основна или фундаментална једиња у честоти амплитуде. Јединица јединица [rad/s]}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{Очолна фреквентуя, вида на язичку} \quad [\text{Hz}]$$

Hojivščine na základě jevu je $\omega = 2\pi f$ a $f = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Za parne funkcije (signale) – razvojem istih u

Fourier-ov red važi da je

$$a_n \neq 0 \quad \text{dok je} \quad b_n = 0$$

b_n ?

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A \sin n\omega_0 t dt =$$

$$\frac{2A}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \sin n\omega_0 t dt = \boxed{\begin{aligned} n\omega_0 t &= y \\ \text{const} & \\ dt &= \frac{dy}{n\omega_0} \end{aligned}} = \frac{2A}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \sin y \frac{dy}{n\omega_0} =$$

$$\frac{2A}{Tn\omega_0} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \sin y dy = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left(-\cos y \right) \Big|_{-\theta/2}^{\theta/2} = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left[-\cos(n\omega_0 t) \right]_{-\theta/2}^{\theta/2}$$

$$= \frac{2A}{Tn\omega_0} \left[-\cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - \left(-\cos(n\omega_0 \frac{-\theta}{2}) \right) \right] = \text{Pored toga, ovo pogodno da je } \cos(-x) = \cos(x), \text{ a } \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) \text{ je parni, a } \cos(n\omega_0 \frac{-\theta}{2}) \text{ je neparni, ovo znači da je }$$

moguće da su je parni/neparni

$$\frac{2A}{Tn\omega_0} \left[-\cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) + \cos(n\omega_0 \frac{-\theta}{2}) \right] = 0 \quad \text{da je parni/neparni}$$

Bastilo:

Ustvari na simetričnom zonu od neopre presekuje je jeftin x-akciju, a u stvari na simetričnom zonu od parne presekuje je guta između leđa od ustanova na izolatoru i točki simetrične ustanove $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Prethodni tekst je zapravo **HINT** koji nagovještava da se u situaciji kao što je ova (parne periodična povorka) za granice integrala mogu uzeti 0-donja i θ -gornja tj. $\frac{\theta}{2}$.

3. Zašto $\frac{\theta}{2}$, a ne θ ?

Pa zato što tako ide formula, kaže $2 * \int_0^{\frac{T}{2}} S(t) * \cos(\omega_0 t) dt$, a polovina od θ je jednaka...

$$a_n = 2 * \int_0^{\frac{\theta}{2}} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{što znatno uprosti integraljenje...}$$

Иј. ако је $s(t)$ -тарка функција (која има је одје објекату периодични синус) \Rightarrow

$$\int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

Увој мати да има беш постапеноста, фундаментална тачка тачка која је беш једнако.

$\boxed{\text{Спора}} \quad \boxed{\text{Непорка}} \quad \boxed{\text{Непорка}} = \boxed{\text{Непорка}}$

M

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 2 \int_0^T s(t) dt$$

Задеси он и убраниш у формулу.
* Доке, тарка функција има разлог само прено постапености $a_n, b_n = 0, \neq n$.

- Односно, разлог тарке функције представља постапеност тог:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) = a_0 + 2a_1 \left[\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\pi\alpha)}{3\pi\alpha} \cos(3\omega_0 t) + \dots \right]$$

јер је $b_n = 0$,

$\frac{\sin(2\pi\alpha)}{\pi\alpha} \cos(2\omega_0 t) + \frac{\sin(3\pi\alpha)}{\pi\alpha} \cos(3\omega_0 t)$
+ ... jer na papiru nisam uvrstio...
Human's make mistakes...

У ако тој непорка синусада $s(-t) = -s(t) \Rightarrow a_n = 0, b_n \neq 0, \neq n$.

Иј. разлог непорке функције представља синусаду тог. и тој функција има синусаду која има тараке која има непораке, тога у очијем односу има тараке која има непораке.

$$a_n \neq 0 \text{ и } b_n \neq 0.$$

2. Nastavak:

Štamparamo kontinuirano neizmijenjivo Fourier-ovo red sjeća.

Brojimo:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega t},$$

Uputi se na sljedeći

$$F_n = \frac{1}{T} (a_n - j b_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{Euler}$$
$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad (\text{gde je})$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt \right] \cdot \frac{1}{T} \left\{ e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t} \right\} dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \frac{1}{T} \left\{ e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t} \right\} dt =$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_{-T/2}^{T/2} S(t) \left\{ e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t} \right\} dt - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \left\{ e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t} \right\} dt \right] =$$

Dobije se uslijed razlike f3.

Djelatna funkcija, koju nećemo učiniti jednostavnim za početkom, može biti.

$$\frac{1}{2} \left[\int_{-T/2}^{T/2} S(t) \left\{ e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t} \right\} dt + \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \left\{ e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t} \right\} dt \right] =$$

3. Učinimo da je za učinkovitost učinak podataka.

Poznate su formule za a_n i b_n koeficijente Fourier-ovog reda.

Sada samo u tim formulama koju su zapamćene funkcije \sin/\cos se zapišu u Euler-ov eksponencijalnom obliku.

Gledaj, dosadašnji račun -potraga za F_n te je dovela do ove jednakosti.

Ako znaš Fourier-ov transformacioni par za periodične signale onda znaš i ovu formulu.

Stim u vezi raspišeš formulu te odmah direktno iz nje nastaviš sa zadatkom!

$$\frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

U trigonometrijskom matematičkom jeziku se korističu i mo Euler-ova
zapis funkcija \bar{x} :

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j \sin x \\ e^{-jx} &= \cos(-x) + j \sin(-x) = \cos(x) - j \sin(x) \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Sabiranjem imamo: $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x \Rightarrow$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad \cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\text{izj. } \cos(n\omega t) = \frac{1}{2} [e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}]$$

Oduzimanjem imamo: $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx})$

$$\text{izj. } \sin(n\omega t) = \frac{1}{2j} [e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}]$$

Задле, F_n су је нормирани амплитуди нормалекских споља ($F_n = \underline{F}_n$) и могу се изразити као $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Или $\underline{F}_n = \underline{F}_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$, и

\underline{F}_n - називамо нормалекским Fourier-олин кофицијентима.

И то су кофицијенти F_n посебни, штоа приједу

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j n \omega_0 t}$$

Ово је експоненцијални облик (нормалекско) Fourier-олаја пега.

Код периодичне њеличне уравноважеоскога синуса са 1. ампл. искака:

$$\underline{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} s(t) e^{-j n \omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-j n \omega_0 t} dt =$$

$$\begin{aligned} & \text{const} \\ & -j n \omega_0 t = y \\ & dt = \frac{-dy}{j n \omega_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{-j n \omega_0 T} \int_{-y_1}^{y_1} e^y dy = \frac{A}{-j n \omega_0 T} \left[e^{-j n \omega_0 t} \right]_{-\theta/2}^{\theta/2} =$$

$$= \frac{A}{-j n \omega_0 T} \left(e^{-j n \omega_0 \frac{\theta}{2}} - e^{+j n \omega_0 \frac{\theta}{2}} \right) / \frac{2}{2}$$

Значи, негде је подразумевано је комплексленом формом, тјеба да

$$= \frac{A}{jn\omega_0 T} \cdot \frac{2}{2} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{\theta}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\theta}{2}} \right) =$$

Задатак је трансформација Еuler (јуколе) узета иштамена.

$$\frac{2A}{-2jn\omega_0 T} \left[\cos\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) - j\sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) - \left[\cos\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) + j\sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) \right] \right] =$$

$$\frac{2A}{-2jn\omega_0 T} \left(-2j \sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) \right) = \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) =$$

у Jagor Ba
 $\text{sinc}(*)$

$$\frac{2A}{n \frac{2\pi}{T} T} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\theta}{2}\right) = \frac{A}{n\pi} \sin\left(n\pi\alpha\right) \cdot \frac{\alpha}{\alpha}$$

Јак бугар је је $\sin(\text{наподно узето у д})$

$$= \boxed{dA} \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} = dA \text{sinc}(n\alpha)$$

$$\boxed{\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$$

Odredili smo koeficijente Fourier-ovog reda, tj. imamo određeno F_n te to uvrštavamo u formulu za razvoj $S(t)$ u Fourier-ov red – eksponencijalni oblik Fourier-ovog reda!

- Laga spajač je učinkovit u izračunavanju periodične signalne funkcije

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = dA \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} e^{jn\omega_0 t} = \\ dA + \sum_{n=-\infty}^{-1} dA \frac{\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} dA \frac{\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} e^{jn\omega_0 t} =$$

Članak
 $n = -n$

Radi ljepešeg zapisa radi se raspakivanje pa pakovanje...

Za brojač $n=0, 1 + infinity, -infinity, -1$ redom rastavljamo formulom određenu sumu na tri sume. Uvodimo smjenu, okreću se granice brojača te 2 od 3 sume imaju zjd. faktor...

$$= dA + \sum_{n=1}^{+\infty} dA \frac{-\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} dA \frac{\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} e^{jn\omega_0 t}$$

$$= dA + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} dA \frac{\sin(n\pi\omega_0)}{n\pi\omega_0} \frac{1}{2} [e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}] = \\ = \cos(n\omega_0 t)$$

Kada se izvukao zajenički faktori... čitav taj izraz sa sumom se pomnožio sa $\frac{2}{2}$...
Čemu to sve?
Pa ako ispod $e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}$ imaš 2cu imaš čistu $\cos()$ funkciju.

$$dA + 2 dA \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega_0) \cos(n\omega_0 t)$$

→ Jelocnjerna komponenta (Tj. DC mreža $f = 0 [\text{Hz}]$)

Početni signal je sada razvijen u Fourier-ov red.

Slijedi prelaz na 2), 3) i 4) rubrike redom.

6.

Rezime, pravougaona-parna-periodična povorka je razvijena u Fourier-ov red.

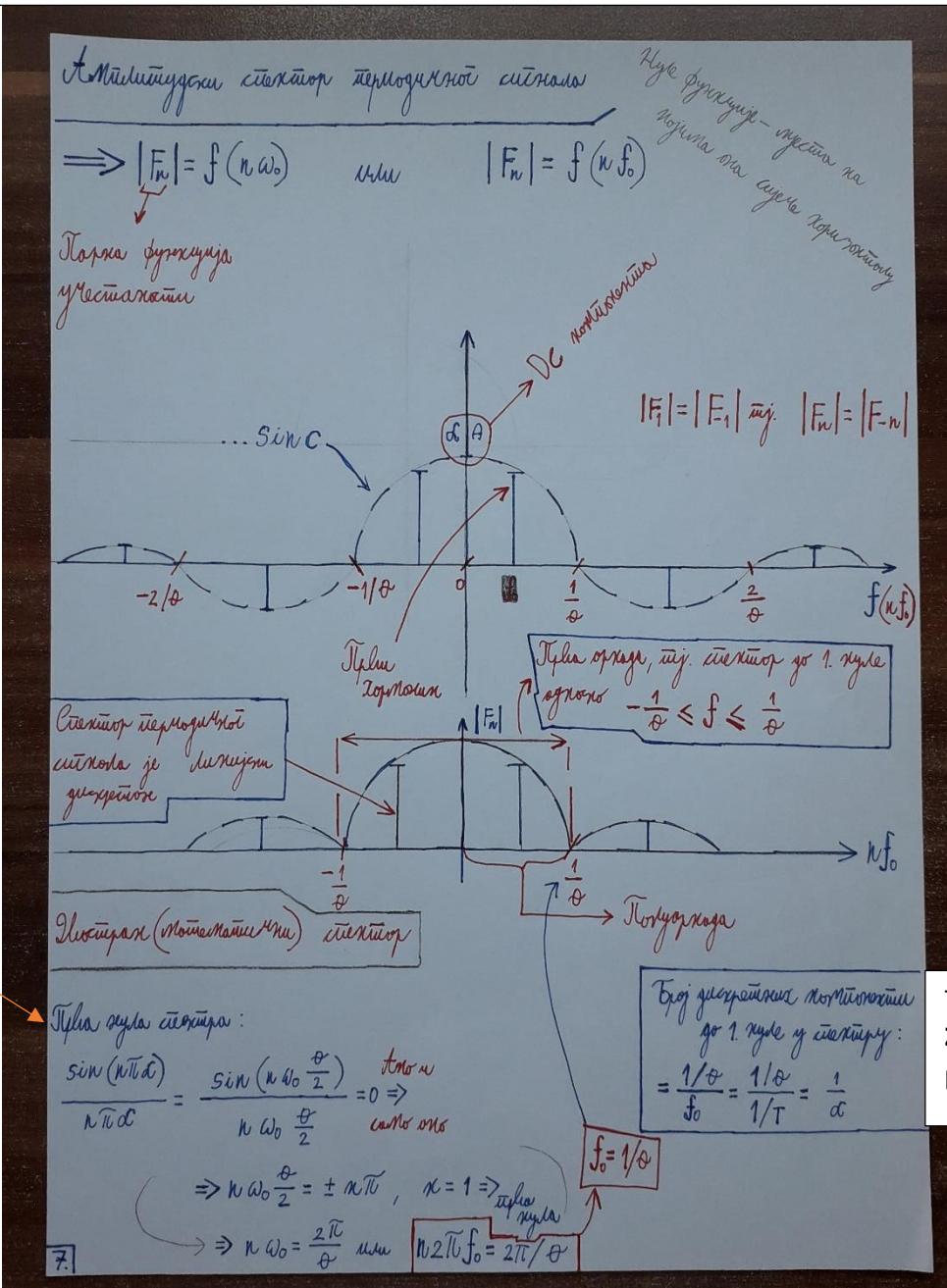
- Signal(funkcija) je parna pa odma znamo koji od koeficijenata a_n/b_n je jednak/različit od 0.

- Ako se napamet zna formula za Fourier-ov transformacioni par sav postupak može da se ubrza i riješi u 3,4 reda.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{pri čemu je} \quad X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{time je sekcija 1) riješena!}$$

U ovoj 2) sekciji zadatka, za određeno F_n koje je napominjem sa **SINC()-om** trebaš nacrtati grafik funkcije $|F_n|$ po kružnoj Učestanosti ili po frekvenciji kao argumentom. Kako to radiš? Pa lako, ovako...

$F_n = \alpha * \text{Asinc}(n * \alpha)$ te prvo odrediš nule funkcije – argument od $S/N()$ izjednačiš sa nulom kao što je na ovom listu urađeno u sekciji koja naglašava da tražimo prvu nulu spektra. Duž horizontale nacrtas prvu nulu, druga nula ti je prva nula pomnožena sa 2... i pošto kaže $|F_n|$ **SVE ARKADE SU IZNAD HORIZONTALE!**



Grafik funkcije $\text{SINC}(x)$ nacrtan samo kako bih isti bio smjernica prilikom crtanja grafika za $|F_n|$...

To dobro zapamti!
Znaj da vrijedi ali za pravougaone signale!

U ovoj 3) sekciji zadatka treba odrediti θ_n koje je za parne signale uvijek jednako nuli – Takva mu definicija.

Iako je $\theta_n = 0$, treba nacrtati ovaj grafik. SINC() funkcija ali bez parabole, kod periodičnih signala fazni spektar je diskretan pa otud i harmonike.

Parne slike su periodične slike parne vrijednosti

$$\arg\{F_n\} = f(n\omega_0)$$

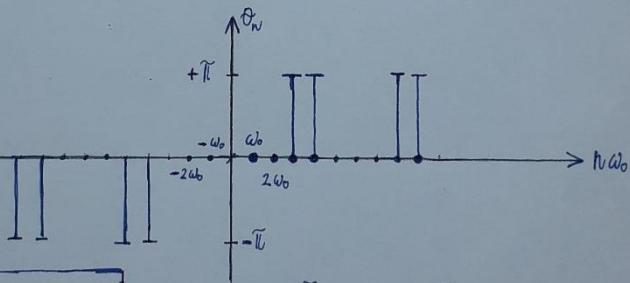
$$F_n = \underline{F}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \Rightarrow |\underline{F}_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\Rightarrow \arg\{\underline{F}_n\} = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$\arg\{F_{-n}\} = -\arg\{F_n\}$$

Parne slike su periodične slike parne vrijednosti.

Teško je: $\theta_n = \arg\{\underline{F}_n\}$, už. $\underline{F}_n = |\underline{F}_n| e^{j\theta_n}$



Kada je $|\underline{F}_n|=0$ možemo

zbrojiti sve nove vrijednosti

za θ_n , jer

$$\underline{F}_n = |\underline{F}_n| e^{j\theta_n} = 0 e^{j\theta_n} = 0$$

Učinak je uoga zbroje nulu

$\theta_n=0$ ili $\theta_n=\pm\pi$

ili zbroj moga ga bude

$$8. \quad \theta_n = -\theta_n$$

Naime, za $\frac{-2\pi}{\phi} < n\omega_0 < \frac{2\pi}{\phi}$ už. $\frac{-1}{\phi} < n f_0 < \frac{1}{\phi}$

$$\text{Budući } \underline{F}_n = |\underline{F}_n| \Rightarrow \theta_n = 0$$

zad je pravog opsega už. za $\frac{1}{\phi} < n f_0 < \frac{2}{\phi}$ už.

$$\frac{-1}{2\phi} < n f_0 < \frac{1}{2\phi} \text{ Budući } |\underline{F}_n| = -|\underline{F}_n| = |\underline{F}_n| e^{\pm j\pi}$$

$$\Rightarrow \theta_n = \pm\pi \text{ pri } \text{sinc}(nd) \text{ uoga vrijesna max.}$$

U ovoj 4) i završnoj sekciji zadatka treba odrediti (tačnije već je određeno...) i nacrtati jednostrani-stvarni spektar zadatog signala... **Taj jednostrani-stvarni spekar jeste ono što ima/se vidi u praksi!**
Kako se to radi? Pa lako, ovako...

Za $F_n = 2 * \alpha * \text{sinc}(n * \alpha)$ odrediš C_n po formuli $= 2 * |F_n|$ znači kada pogledaš grafik amplitudskog spektra zadatog signala sve ono što je na lijevoj strani od vertikale uzmeš-prebacis na desnu stranu vetrikale (pazi mijenja se znak) – te nalijepiš na one harmonike koje su već naslikane na desnoj strani horizontale od vertikale...

Činjenica (Ugostoprivreda) cijekom

$$S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) =$$

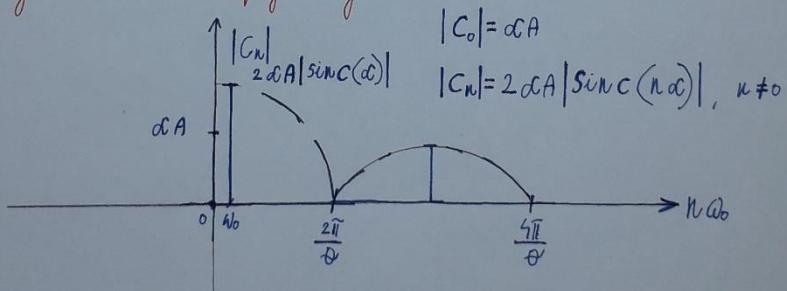
$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n \omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |F_n|, \quad n \neq 0$$

$$C_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$\theta_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \quad \begin{bmatrix} \text{Ugostoprivreda je} \\ \text{korisna je oznaka } \varphi_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{bmatrix}$$

Može je smatrati da cijekom pogledajuće željene periodičnosti ugašuju se svi ostaci osim na obujem slijedi:



Zadatak je završen.

Избраним постороним

стотинију појединачних гарнитура представља наименовање $C_n = 2 |F_n|$
за посебне вредности честота.

[Пј. јесностојаша стотинију симетрија].

За биско дошли до Fourier-овог реда у комплекскомј форми, укади
свој посторније вредности за ред гарнитура (n). Али тај начин
своје добија и посторније честоте које физички немају никаквог
смысла, а наиме су тој ради поделе изостављајују
простопериодичних осцилација комплекским начином представљавања.

Efektivna vrijednost strujice [eng r(root) m(ean) s(square)]

$$[S(t)]_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt}$$

Formulu znati napamet... Pazi, recimo za naš signal iz prethodnog zadatka $S^2 = A^2$. U jednoj pripremi za lab.vježbu – trougaona periodična povorka je bila u pitanju te sam uvrstio signal razvijen u Fourier-ov red... Naravno nasukao sam se!

P - srednja vrijednost strujice

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 R, \text{ za } R = 1[\Omega] (\text{učinkovitost je jedinica učinkovitosti})$$

$$\Rightarrow P = U^2 = I^2 A^2$$

$$P = \frac{1}{T} \int_T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt \quad \begin{matrix} \text{izraziti pomoću} \\ \text{jednog vremenskog} \\ \text{intervala} \end{matrix}$$

Formulu znati napamet...

zv: $u(t) = S(t)$ nazivamo strujom strujice, a za

$i(t) = S(t)$ nazivamo strujom struje.

$$[S(t)]_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt \quad \text{isto je}$$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

za obog ugovor nastavio da prebacujem u vremensku
strujicu u frekvenciju koju imaju svi komponenti uzgledajući
mocnu strujicu u vremenskoj strujici.

Normirano-normireno strujice

10.

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^* e^{-jn\omega t}$$

osim * - normirano-normireno
strujice.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ef}} &= [S(t)]^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} \right] dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^* \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^* F_n = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2} \quad \begin{array}{l} \text{Постојања теорема} \\ \text{за} \\ \text{периодичне} \\ \text{сигнале.} \end{array}
 \end{aligned}$$

Доказано симео:

Иако је $S(t)$ периодични сингуларитети са R захтевани да је
имајући симетрију спектра симетрију у временом и спектралном
ободу. Тада симетрија у временом и спектралном ободу означавају
теорему за периодичне сингуларитети.

Нпр. Одредити средњу моћу и промјенати онај изразак за 1. ред
и стакав да периодичне токове прављују некада на 1. ред.

$$P = \frac{1}{T} \int_T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A^2 dt = \frac{1}{T} A^2 \int_{-\theta/2}^{\theta/2} t^2 dt = \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{-\theta/2}^{\theta/2} =$$

$$\frac{1}{T} A^2 (\theta/2 + \theta/2) = A^2 \frac{\theta}{T} = A^2 \omega$$

$$\text{Зв. } \omega = \frac{T}{2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}, \text{ те ако је } A = 1[V] \Rightarrow P = \frac{1}{2}[V^2]$$

До 1. реду узимамо $1/\omega$ комоненту

Izraz za broj (harmonika=komponenta) komponenata je već poznat...

U stvarnosti(U praksi!) mi imamo/vidimo samo stvarni spektar signala.

Recimo, pusti se signal, isti se prati na osciloskopu te od vremenskog trenutka $t=0$,

signal teče s lijeva u desno... tako da kada računamo snagu tog signala, interesuje nas snaga tog signala u stvarnosti(U praksi!) sabiramo C_n za $n=0,1,2,\dots,m$ redom.

$$P_1 = |F_0|^2 + 2|F_1|^2 = \alpha^2 A^2 + 2\alpha^2 A^2 \sin^2(\alpha)$$

Snaga sastavljena je
1. ordočni sastavnik.

Preostalim sastavnik (jednostavniji) sastavnik

$$\text{Ako je } \alpha = \frac{1}{2} \cdot n \quad A = 1[V] \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{2^2} \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 1^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0,4526 [V^2]$$

Snaga dvostrukog sastavnika

'RAD' kada radujemo

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

je - faktor uskorjenja udušen uklonjen
djeluju. Zanimljivo: Ono 90% od ukupne snage može

$$\eta = \frac{P_1}{P} \cdot 100[\%] \approx \frac{0,4526}{0,5} \cdot 100[\%] \approx 90[\%]$$

sustava je sastavljeno u 1. ordu.

Tj. Možemo pretpostaviti da slobodno-prirodni sustav je u izjednačenju

ta kros srednjeg stupnja snage

$$\text{kanal } B = \frac{1}{\theta} [\text{Hz}] \text{ za}$$

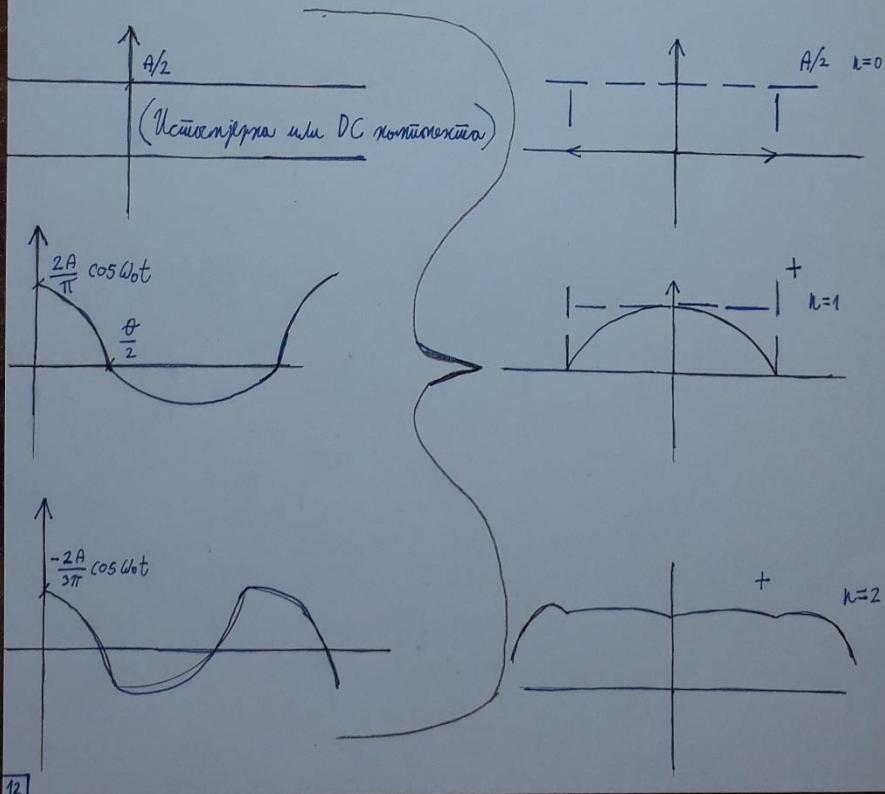
upravljanje snage ($P \approx 90\%$).

$$\text{Za 2. red: } \eta_2 = \frac{P_2}{P} \cdot 100[\%] \approx 95[\%] \text{ i sl...}$$

Иако видим да синусоидалните компоненти простирају се у све
сношенија од времена, то избрисани звукови суперпозиции у показателном облику
имају добри ако анализирају синус $s(t)$.

Показатимо то на примеру за $\alpha = 0.5$, када је реализован синус $s(t)$ још ка:

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos \omega_0 t - \frac{2A}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \dots$$



Naravno i ovdje ako je poznata formula za Fourier-ov transformacioni par za periodične signale tj.

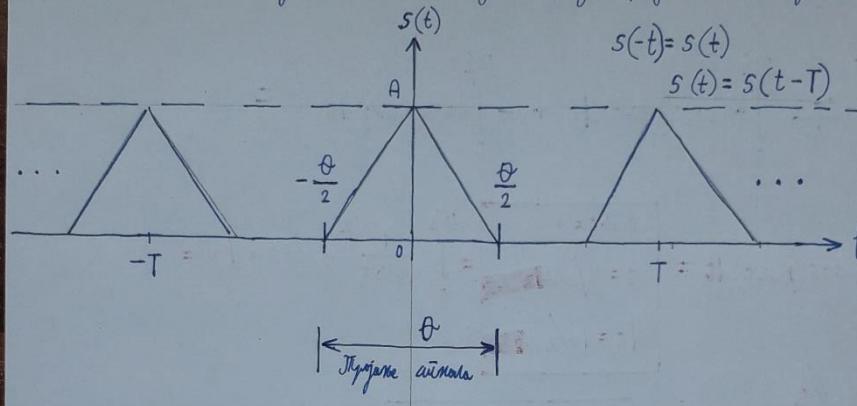
$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{pri čemu je} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad S(t) \text{ koje se na}$$

osnovu jednačine prave pročita sa grafika signala se uvrsti u formulu za F_n te se određeno F_n uvrsti u formulu za razvoj signala u Fourier-ov red i zadatak je kompletiran.

Ako treba nacrtaju se još amplitudski, fazni i jednostrani spektri...

2. Zad

Tijekom 2 - Podeliti y Fourier-om nego izložiti uvođenje u matematice.



$a_n \neq 0, b_n = 0$ (Broj uvođenja) Izvodi učimo paštoj y načinjeni nego taj.

Ako se ovo uoči zadatak se uprosti čak i više nego opisano u gornjem tekstu...

$$S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\theta/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt =$$

$$\frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{\theta/2} \left(\frac{-2A}{\theta} t + A \right) \cos(n\omega_0 t) dt =$$

$$= S(t), \text{ jer je } \text{tuo tipa}: \quad S(0) = A = \kappa \cdot 0 + n \Rightarrow n = A$$

$$S(\theta/2) = 0 \Leftrightarrow \kappa \frac{\theta}{2} + A = 0 \\ \kappa = -2A/\theta$$

12.

$T = ?$

Od 0 do $\frac{\theta}{2}$ pa nakon T ponovo uzima taj trougao...

$$\frac{-\theta}{2} - T - \frac{\theta}{2} = 0$$

$T = \theta$? Daaaa... još lakše - obidi signal duž horizontale (jer na osnovu njenih tačaka signal se i ponavlja) od $\frac{-\theta}{2}$ do $\frac{\theta}{2}$ pa izmjeri dužinu puta...

Ipak meni je lakše i brže odraditi preko Fourier-ovog transformacionog para ...

$$\frac{1}{T} \int_0^{\theta/2} \left(\frac{-2A}{\theta} t + A \right) \cos(n\omega_0 t) dt = \text{Раскладимо на два окремих інтеграла.}$$

$$\frac{1}{T} \left\{ \frac{-2A}{\theta} \int_0^{\theta/2} t \cos(n\omega_0 t) dt + A \int_0^{\theta/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right\} =$$

$$\int_0^{\theta/2} t \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{aligned} & n\omega_0 t = y \quad \text{Приєдн.} \\ & t = y/n\omega_0 \\ & dt = dy/n\omega_0 \end{aligned} = \int_0^{\theta/2} \left(\frac{1}{n\omega_0 t} \right)^2 y \cos y dy =$$

$$\frac{1}{n^2 \omega_0^2} \int_0^{\theta/2} y \cos y dy = \begin{aligned} & u = y \quad dr = \cos y dy \\ & du = dy \quad r = \sin y \end{aligned} =$$

$$\frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[y \sin y - \int_0^{\theta/2} \sin y dy \right] = \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[y \sin y - \left(-\cos y \right) \Big|_0^{\theta/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[\left(y \sin y + \cos y \right) \Big|_0^{\theta/2} \right] = \text{Врахування огорож.}$$

$$\frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[\left(n\omega_0 \sin(n\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t) \right) \Big|_0^{\theta/2} \right] =$$

$$\frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[n\omega_0 \frac{\theta}{2} \sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) - (0 \cdot \sin(0) + \cos(0)) \right] =$$

$$\frac{\theta/2}{n\omega_0} \sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \cos\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \cos(0)$$

Другий окремий інтеграл
тобожу чи не є огорожа \neq

$$\frac{4}{T} \left\{ \frac{-2A}{\theta} \left[\frac{\theta/2}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{n^2\omega_0^2} \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - \frac{1}{n^2\omega_0^2} \right] + A \int_0^{\theta/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right\} =$$

$$A \int_0^{\theta/2} \cos(n\omega_0 t) dt = \boxed{\begin{aligned} n\omega_0 t &= y \\ dt &= dy/n\omega_0 \end{aligned}} = A \frac{1}{n\omega_0} \int_0^{\theta/2} \cos(y) dy = \frac{A}{n\omega_0} \sin(y) \Big|_0^{\theta/2}$$

$$= \frac{A \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2})}{n\omega_0}$$

Get rid of []!



$$= \frac{4}{T} \left\{ \frac{-2A}{\theta} \left[\frac{\theta/2}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{n^2\omega_0^2} \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - \frac{1}{n^2\omega_0^2} \right] + \frac{A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) \right\} =$$

$$\frac{4}{T} \left\{ \cancel{\frac{-2A}{\theta} \frac{\theta}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2})} - \cancel{\frac{2A}{\theta n^2\omega_0^2} \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2})} - \cancel{\frac{2A}{\theta n^2\omega_0^2}} + \frac{A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) \right\} =$$

Убираем ненужные функции и выражения...

$$\frac{4}{T} \left(\frac{-2A}{\theta n^2\omega_0^2} \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - \frac{2A}{\theta n^2\omega_0^2} \right) =$$

Помножим и умножим на 2
на следующем шаге

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}, \text{ поэтому}$$

перепишем как $1 - \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2})$

передел (и можем) убрать из выражения...

$$\frac{4}{T} \frac{-2A}{\theta n^2\omega_0^2} \frac{2 \left[\cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}) - 1 \right]}{2} =$$

$$\frac{4}{T} \frac{-2A}{\theta n^2\omega_0^2} \frac{2(-1)(1 - \cos(n\omega_0 \frac{\theta}{2}))}{2} =$$

$$\frac{4}{T} \frac{2A}{\theta n^2\omega_0^2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{4} \right) =$$

$$\boxed{\frac{16}{T} \frac{A}{\theta n^2 \frac{4\pi^2}{T^2}} \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{4} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16A \sin^2\left(n\frac{\pi}{T} - \frac{\alpha}{2}\right)}{T + n^2 \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{16A \sin^2\left(n\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\pi^2 n^2 \alpha} / \frac{\alpha}{\alpha} \\
 &= \frac{16A\alpha \sin^2\left(n\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{4(n\pi\alpha)^2} = A\alpha \left(\frac{\sin \frac{n\pi\alpha}{2}}{\frac{n\pi\alpha}{2}} \right)^2
 \end{aligned}$$

Ans.

$$s(t) = \frac{CA}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} CA \left(\frac{\sin(n\pi\alpha/2)}{n\pi\alpha/2} \right)^2 \cos(n\omega_0 t)$$

$$F_n = A\alpha \left(\frac{\sin(\frac{n\pi\alpha}{2})}{\frac{n\pi\alpha}{2}} \right)^2 \quad C_n = 2 * |F_n| \quad \text{je ono šta se crta...}$$

Kako odrediti nule C_n funkcije? Pa lako, argument SIN() iz $F_n || C_n$ izjednačiš sa nulom ...

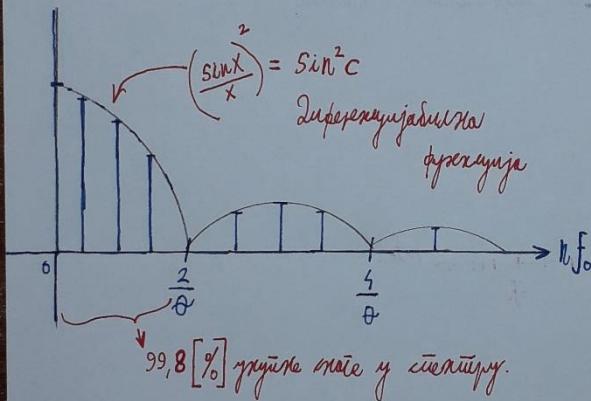
Nule u zavisnosti slobodnog:

$$\frac{n\pi\alpha}{2} = m\pi$$

$$\frac{n\pi}{2} \frac{\theta}{T} = m\pi \quad / \cdot 2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$n \frac{1}{T} = \frac{2m}{\theta} \quad \Rightarrow \quad n f_0 = \frac{2m}{\theta}$$

za $m=1 \Rightarrow$ prva reda je $n f_0 = \frac{2}{\theta}$



- Broj karakteristika je prve reda u slobodnu (ili pravilno prve
slike slobodnu)

$$n = \frac{2m/\theta}{f_0} = \frac{2m}{\theta c}$$

14.

$$\frac{FrekvencijaPrveNule(f_0 = \frac{2m}{\theta})}{Frekvencija(f = \frac{1}{T})}$$

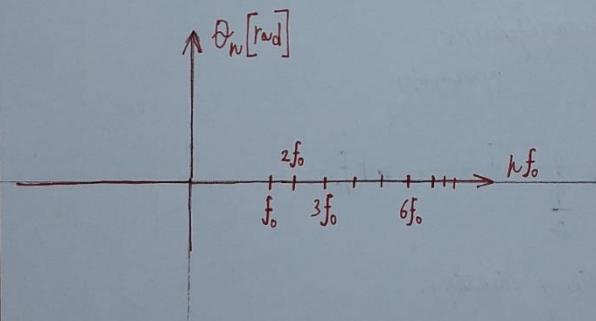
Захтјеван: Амплитудни стекијор је угао пукави шаре под њиворе
прајугласних ~~излаза~~ система у углуу за амплитудни стекијор
под њиворе прајугласних излаза.

Стекијор је ефикаснији (има већу снагу садржану унутар
иског описа фреквенција) прајугасни стекијор.

Фазни стекијор под њивре периодичне њиворе прајугласних излаза:

$$\Theta_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0, \quad \forall n \text{ где је } a_n \neq 0, \text{ а } b_n = 0.$$

(Иако физички $\sin c^2(x) \geq 0$ (иако никада нестанка))



Нұр. Оғерілген үкімет (100%) сұрынғы салынған мерзілдік шаруаудегің
мәндересінде және шаруаудегің түрлі арқада олардың

$$A = 1 \text{ [V]}, T = 1 \text{ [S]} \quad \text{и} \quad \theta = 0,5 \text{ [S]} \quad \text{т.б.} \quad \alpha = \frac{\theta}{T} = 0,5.$$

Из беткескөй жөненде мәннен:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\theta/2} \left(\frac{-2A}{\theta} t + A \right)^2 dt =$$

$$\frac{2}{T} \int_0^{\theta/2} \left(\frac{4A^2}{\theta^2} t^2 + 2 \frac{-2A}{\theta} t \cdot A + A^2 \right) dt =$$

$$\frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta^2} \int_0^{\theta/2} t^2 dt - \frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta} \int_0^{\theta/2} t dt + \frac{2A^2}{T} \int_0^{\theta/2} dt =$$

$$\frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\theta/2} - \frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\theta/2} + \frac{2A^2}{T} t \Big|_0^{\theta/2} =$$

$$\frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta^2} \frac{\theta^3}{3} - \frac{2}{T} \frac{4A^2}{\theta} \frac{\theta^2}{2} + \frac{2A^2}{T} \frac{\theta}{2} =$$

Демек, $P = P_0$ т.б. деңгээ салына $R = 1 \text{ [Ω]}$ және шаруаудегің мәннен

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left[V^2 \right], \quad \text{оған я} \Rightarrow$$

$$\text{мәннен барлық шаруауда} \Rightarrow \frac{1}{6} \left[A^2 \right].$$

Na osnovu Fourieovih meraža slijedi:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

$F_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \Rightarrow$ Kog periodičnosti periodicitet signalu je

$$F_n = \frac{1}{2} a_n = \frac{A \alpha}{2} \left[\frac{\sin(n \pi \alpha / 2)}{n \pi \alpha / 2} \right]^2$$

↑
n, $\alpha = \frac{\Phi}{T}$

$$\Rightarrow F_n = A \frac{\alpha}{2T} \left(\frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\alpha}{4}\right)}{n \frac{2\pi}{T} \frac{\alpha}{4}} \right)^2$$

$n \left(\frac{2\pi}{T} \right) \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow \frac{n \pi \alpha}{2} / \frac{2}{2}$

$$A \frac{\alpha}{2} \operatorname{sinc}^2\left(n \frac{\alpha}{2}\right)$$

Za $\alpha = \frac{\Phi}{T} = \frac{1}{2}$ kog periodičnosti slijedi da je 1. red u fazi ~~0~~ i slijedi

možemo $n = \left[\frac{2}{\alpha} \right] = 4$ - koštavac (četvrtina dužine)

Ugurani gur (zadnjih) trij. $\Rightarrow [1, 2] = 1, [2, 3] = 2$

Ovo moraš dobro da shvatiš

- razumiješ!

Trebaće ti ako na kolokvijumu ili ispitu dobiješ trougaoni signal...

$$F_0 = A \frac{\alpha}{2} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$F_1 = A \frac{\alpha}{2} \operatorname{sinc}^2\left(1 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(1/4\right) = 0,2026$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(2 \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{4} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) / \frac{\pi}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \approx 0,1$$

$$F_3 = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(3 \frac{\alpha}{4}\right) \approx 0,0225$$

$$F_4 = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(4 \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2(1) = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(\pi)}{\pi} \right]^2 = 0$$

Сюда уравнение 1. уравнение же:

$$P_1^{\Delta} = \sum_{k=-3}^3 |E_k|^2 = |E_{-3}|^2 + |E_{-2}|^2 + |E_{-1}|^2 + |E_0| + |E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 =$$

$$|E_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^3 |E_n|^2 = \sum_{n=0}^3 |C_n|^2$$

$$\approx \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 2 \left(0,2026 \right)^2 + 2 \left(0,101 \right)^2 + 2 \left(0,0225 \right)^2 \approx \boxed{0,166 [V^2]}$$

$$\eta = \frac{P_1^{\Delta}}{P^{\Delta}} \cdot 100\% \approx \frac{0,16602}{0,16666} \cdot 100\% \approx 99,6 [\%]$$

\downarrow
 $\frac{1}{6} [V^2]$

3. Yax | Čuveni predavač u studiju aperiodičnih signalova

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Fourier-ov transformacioni izraz za
aperiodične signalove. Niz $x(t)$ je aperiodičan
poslužen u Fourier-ovoj, a X_n je spektralna
moć signala.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T = T_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Kad $T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$

$$n\omega_0 \rightarrow \omega$$

$\omega_0 = \omega$ kontinualna promjenjiva.

Poznavanje ove kombinacije je
olakšica koju sam spomenuo u
prethodna dva zadatka.

Polazeći od Fourier-ovog
transformacionog para za periodične
signale, kroz limese dolazimo do
Fourier-ovog transformacionog para za
aperiodične signale.

! Aperiodičnim signalom možemo pomenuti i ovaj aperiodični signal koji
je nepravilan $T = \infty$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow d\omega$$

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \text{ (kontinualna frekvencija ω)}$$

Periodičan signal – nakon T vremena se ponavlja,
aperiodičan signal – vidiš signal i to što vidiš na
grafiku se nikada neće ponoviti – takav je kakav je i
nakon $+\infty$ vremena se neće ponoviti...

• Za razliku (njegovi) periodični integrator, kada je moć signal
izmjenjiva vrednost.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n$$

Periodic signal analysis

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jnwot} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega t} \omega \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jnwot} dt = \boxed{\begin{array}{l} T \rightarrow \infty \\ ab \rightarrow d\omega \\ n\omega b \rightarrow \omega \\ \varepsilon \rightarrow \int \end{array} \Rightarrow x(t) \Big|_{T \rightarrow \infty}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Fourier's transform
 \Rightarrow used for
 aperiodic signals
 analysis.

Znati napamet i za periodične,
 a i za aperiodične signale!

$$\omega = 2\pi f, \quad d\omega = 2\pi df$$

$$X(j\omega) = X(j2\pi f)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) e^{j2\pi ft} df$$

$X(jf)$ - Fourier-ova transformacija periodičnog signala $x(t)$.

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) e^{j2\pi ft} df$$

Osnova za operaciju inverzne Fourier-ove transformacije.

Uvod za eksistenciju Fourier transformacije je sileznostna konvergencija (ili konvergencija u smislu).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < +\infty$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ - amplitudna čestinka transformacije (storka funkcija amplitudne).

$\theta(\omega)$ - amplitudna čestinka faze (storka funkcija faze).

Средна снага сприможнога синауса је нула!

Периодични синуси: конактна снага, бесконечна енергија.

Апериодични синуси: средна снага нула, конактна енергија.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{=X(j\omega)} d\omega = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

УМУ

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(jf)|^2 df, \quad d\omega = 2\pi df$$

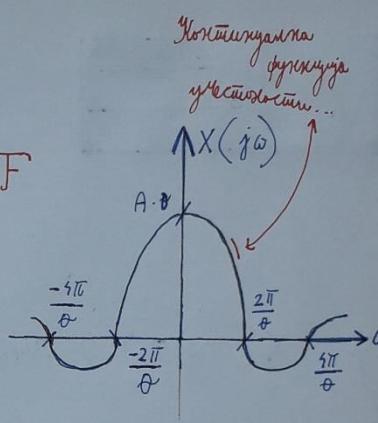
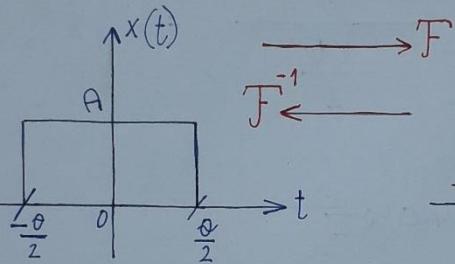
Фурьеовска теорема за апериодичне синусе.

Uspomenj: Oprezno Fourier-ovu transformaciju:

a) uvek učinak u vremenu

b) uvek učinak u frekvenciji

a)



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$\int_{-\theta/2}^{\theta/2} A e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-j\omega t} dt = \boxed{\begin{aligned} -j\omega t &= y \\ dt &= -\frac{1}{j\omega} dy \end{aligned}} = A \frac{-1}{j\omega} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^y dy =$$

Premašeno
ukratko
uglavno...

$$\frac{-A}{j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{\theta}{2}} - e^{j\omega \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{A}{j\omega} \underbrace{\left(e^{j\omega \frac{\theta}{2}} - e^{-j\omega \frac{\theta}{2}} \right)}_{\text{Euler's identities}} =$$

$$\frac{A}{j\omega} \left[\cos\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) - j \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) \right) \right] =$$

$$\frac{A}{j\omega} 2j \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)$$

19]

a) Početni pravougaoni aperiodični (Nikada se neće ponoviti... kažemo da $T \rightarrow +\infty$.)

signal jestе zadat u vremenskom domenu, nad istim treba izvršiti Fourier-ovu transformaciju što znači da za to $x(t)$ treba naći $X(j\omega)$.

Dakle iz vremena prelazimo u frekvenciju!

1. Način jeste iskoristiti formulu za Fourier-ov transformacioni par za aperiodične signale...

$$\frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right) / \frac{\partial}{\theta} \Rightarrow$$



$$\frac{\frac{A\theta \sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)}{1}}{\frac{\omega \theta}{2}} = X(j\omega)$$

$$\text{izj. } X(j\omega) = A\theta \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)$$

nakon izvođenja u

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T F_n =$$

Drugi način koji je možda čak i lakši jeste da se zapamti izraz za F_n ali periodične povorke (pravougaonih, trougaonih, trapez...) te da se limesom kada $T \rightarrow +\infty$ prođe kroz taj izraz... PAZI – **TRAŽIŠ $X(j\omega)$!**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{A\theta}{T} \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{\theta}{2}} = A\theta \frac{\sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)}{\omega \frac{\theta}{2}}$$

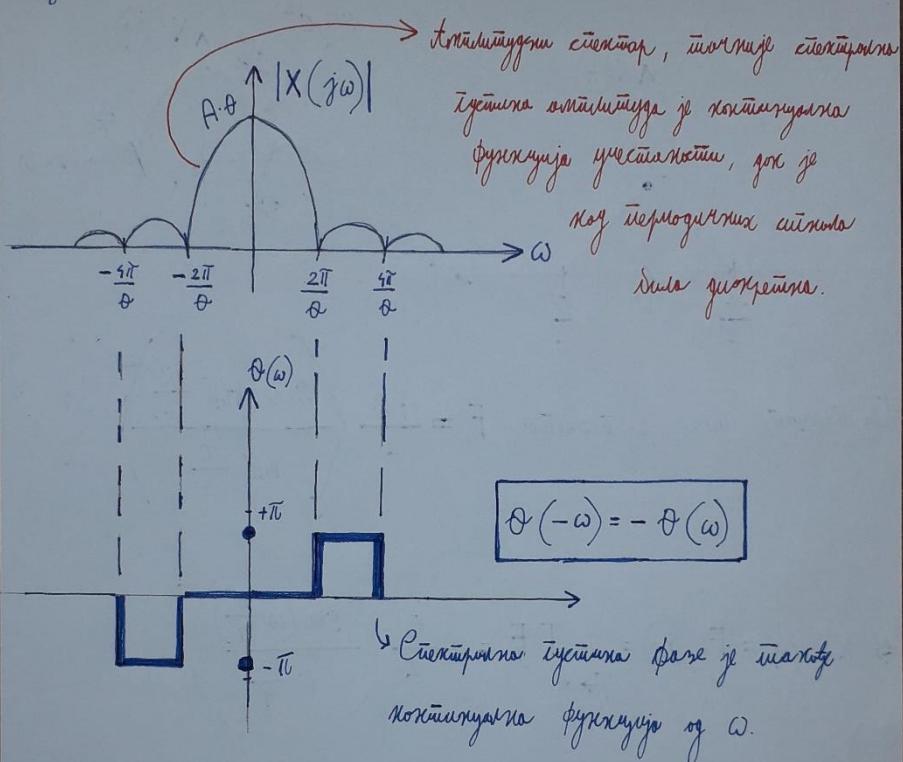
$$\text{jer } n \omega_0 \rightarrow \infty \Rightarrow n\omega_0 = \omega$$

$$\frac{\omega \theta}{2} = m\tilde{\pi} \Rightarrow \omega = \frac{2m\tilde{\pi}}{\theta} \Rightarrow \text{za } m=1 \Rightarrow \omega = \frac{2\tilde{\pi}}{\theta}$$

Dobio si $X(j\omega)$ te za isto na već poznat način možeš nacrtati amplitudski, fazni i stvarni spektar.

Nule u anvelopi spektra odrediš tako što argument sinusa izjednačiš sa nulom kao i kod periodične pravougaone povorke što si crtao...

Crtanje:

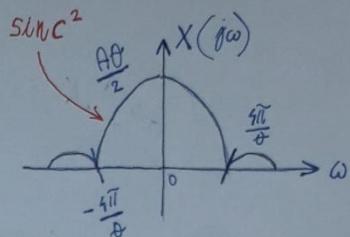
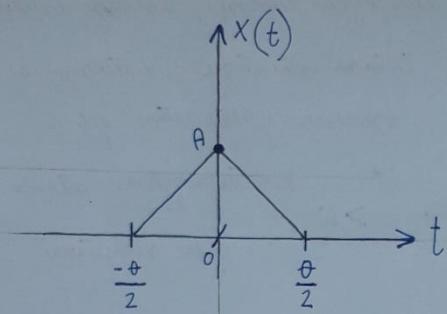


Kod aperiodičnih signala fazni spekar je KONTINUALNA funkcija od ω

za razliku od periodičnih signala kod kojih je fazni spektar diskretan!

Kada crtaš fazni spekar za periodične/aperiodične signale
ti prvo nacrtas amplitudski spektar te ispod kao na ovoj slici docrtas
sebi skelet (horizontala + vertikala) i crtaš diskretno/kontinualno
harmonike/linije ...

b)



U pitanju je X (veliko-capital X)
-iz vremena idemo u frekvenciju-...

$$\text{Og } \text{upoznatosti} \text{ moga je } \text{izvrsenje} \quad F_n = \frac{A\alpha}{2} \left\langle \frac{\sin(n\pi \frac{\alpha}{2})^2}{n\pi \frac{\alpha}{2}} \right\rangle$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T F_n = A \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\sin(\omega \frac{\alpha}{2})}{\omega \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

U pitanju je X (veliko-capital X)
-iz vremena idemo u frekvenciju-...

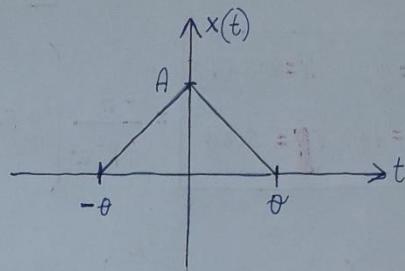
Задача

Определить стехиом (коэффициенты) израсхода:

израсходований единицы времени A и израсходований θ по θ .

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$x(t) = \frac{A}{\theta} (t - \theta) = \frac{-At}{\theta} + A$$



$$x(t) = \begin{cases} -\frac{A}{\theta}t + A, & 0 < t < \theta \\ \frac{A}{\theta}t + A, & -\theta < t \leq 0 \\ 0, & t > \theta, t < -\theta \end{cases}$$

Gesucht sind die Koeffizienten a_n und b_n .

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{1}{2} \left(a_n \right) \text{ при } b_n = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График единицы времени } y \\ \text{имеет вид } K0 \end{array} \right.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T X(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^\theta \left(\frac{-At}{\theta} + A \right) \cos(n\omega_0 t) dt =$$

$$\frac{4}{T} \left(\int_0^\theta \frac{-At}{\theta} \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^\theta A \cos(n\omega_0 t) dt \right) =$$

21. Установите правильность вычисления единицы времени.

$$I_1 = \frac{-A}{\theta} \int_0^\theta t \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} n\omega_0 t = y \\ t = y \frac{1}{n\omega_0} \\ dt = \frac{1}{n\omega_0} dy \end{cases} = \frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \int_0^\theta y \cos y dy =$$

$$\begin{cases} u = y & dr = \cos y dy \\ du = dy & v = \sin y \end{cases} = \frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(y \sin y - \int_0^\theta \sin y dy \right) =$$

$$\frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(y \sin y + \cos y \Big|_0^\theta \right) = \text{Ja naga pismenni obrazec u yazykamno priyegnostem - imone igranaya usmenopis.}$$

$$\frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(n\omega_0 \theta \sin(n\omega_0 \theta) + \cos(n\omega_0 \theta) - 1 \right) =$$

$$\frac{-A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \theta) + \frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(\cos(n\omega_0 \theta) \quad \boxed{} - 1 \right)$$

$$I_2 = \int_0^\theta A \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} n\omega_0 t = y \\ dt = dy/n\omega_0 \end{cases} = \frac{A}{n\omega_0} \int_0^\theta \cos y dy$$

$$= \frac{A}{n\omega_0} \sin y \Big|_0^\theta = \frac{A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 \theta)$$

$$x_n = \frac{4}{T} \left[\frac{-A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) + \frac{-A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(\cos(n\omega_0 t) - 1 \right) + \frac{A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$= \frac{4}{T} \frac{A}{\theta n^2 \omega_0^2} \left(1 - \cos(n\omega_0 t) \right) = \frac{4}{T} \frac{A}{\theta n^2 \omega_0^2} 2 \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{t}{2} \right)$$

Резултат издавање токуса нешто јесте комплицирано изразено па
приложеној формулама 'Поточни утицај' пај.

$$2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 - \cos(\theta) \text{ и}$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 + \cos(\theta)$$

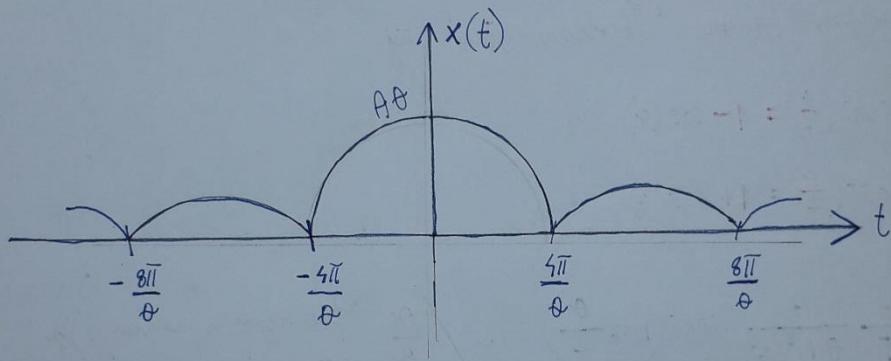
$$= \frac{8}{T} \frac{A}{\theta n^2 \omega_0^2} \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right) \quad / \frac{\theta}{\theta} \quad \text{тако израз је комплицираној јер}\newline \text{хоту да користим sinc.}$$

$$\frac{8}{T} A \frac{\sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right)}{\frac{\left(\theta n \omega_0 \right)^2}{\theta}} = \frac{2A\theta}{T} \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{\frac{8A \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right)}{T}}{\frac{\theta^2 \left(n\omega_0 \right)^2}{\theta}} = \frac{8A \theta \sin^2 \left(n\omega_0 \frac{\theta}{2} \right)}{T \theta^2 \left(n\omega_0 \right)^2} \cdot \frac{4}{4}$$

$$F_n = \frac{A\theta}{T} \sin^2\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot F_n = A\theta \sin^2\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right)$$



Prepoznavanje ovih osobina je od velikog značaja.

U mnogim situacijama poznavanje ovih osobina tj. Fourier-ovih transformacionih parova istih rješava zadatak!

Tako npr. kod linearnosti prepoznaš da je po vremenu neki signal linearna kombinacija više signala i odgovarajućih skalara iz polja kompleksnih brojeva jer znaš osobinu linearnosti tj. znaš u šta ga je Fourier-ova transformacija prebacila.

Prebacije ga u signal po frekvenciji, taj signal je linearna kombinacija tih istih skalara i više signala po frekvenciji.
Ivan Vanja Boroja – „Inžinjer shvati da se radi o linearnom operatoru!“. Idemo dalje...

Osobine Fourier-ove transformacije

1. Linearost

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$$

Oznaka: $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ množi samo \longleftrightarrow osnovna mreža Fourier-ov

transformacija množi samo slike u mrežu transformacije.

2. Pomeraj u vremenu: Ako je $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ tada je
 $x(t-t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

E sada ako signal $x(t)$ kasni za t_0 [s]
Vidim da Fourier-ova transformacija $x(t-t_0)$ transformiše u $X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
te samo odredim $X(j\omega)$ koje može biti i poznato te dopišem $e^{-j\omega t_0}$.

Za F^{-1} važi isto. Nije problem.

3. Preduzme $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

4. Pomeraj u frekvenciju (Mognatljivost spektra)

$$x(t)e^{\pm j\omega t} \leftrightarrow X\left(j(\omega \pm \omega_0)\right)$$

23.

3. Se da uočiti tako što vidim da se signal tj. nezavisna promjenjiva t množi nekim realnim brojem.
Čak se na lab.vježbama iz OET2 ovo radilo praktično. Što veće a to uži pregledniji spektar i suprotno.

4. Ako gledam po vremenu vidim da je signal pomnožen sa $e^{+ili-j\omega t_0}$, a ako gledam po frekvenciji
vidim da u argumentu od $X(j\omega)$ imam $X(j(\omega + ili - \omega))$...

5. Симетрија удијејући



$$\text{тако је } x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \text{ и тако је } X(t) \leftrightarrow 2\pi X(-\omega)$$

6. Диференцирање

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \text{ те за узлом } n\text{-тиот ред}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$$

Samo пази, извод константе неће бити чиста 0
већ у складу са физичком интерпретацијом извода...

Dirac... или ти deltaFunction како је још познат исти.

7. Учињавајте је пример:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \cdot \delta(\omega),$$

$$\text{изје је } \delta(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \neq 0 \\ +\infty, \omega = 0 \end{cases} \text{ да } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

Доказивање (демонстрација) физичкија

Obojenim strelicama sam povezao matematičku relaciju koja opisuje signal sa grafikom tog signala.

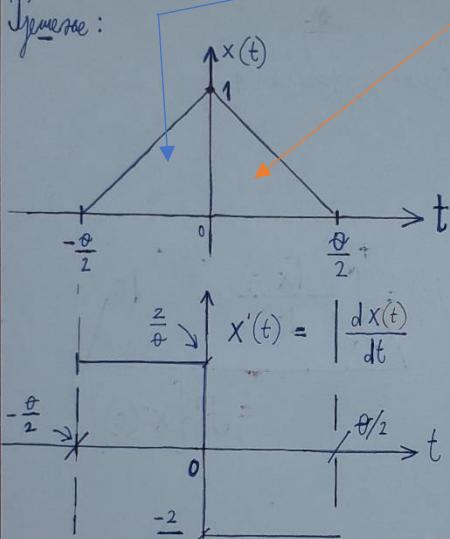
Dakle, kada budem diferencirao

$x(t) = \frac{-2}{\theta} t + 1$ prava $x(t) = \frac{-2}{\theta}$ koja je u 4. Kvadrantu i proteže se sve do tačke $\frac{\theta}{2}$.

Primjer: Oprezentirajte periodičnu amplitudnu projekciju nelinečkog

Nelinečki signal u obliku stepenica.

Prijevode:



$$x(t) = kt + n;$$

$$\text{Za } 0 \leq t \leq \frac{\theta}{2}$$

$$x(t=0) = 1 \text{ pa}$$

$$kt + n = 1 \text{ tj. } n=1$$

&&

$$x(t = \frac{\theta}{2}) = 0 \text{ pa}$$

$$k \frac{\theta}{2} + n = 0$$

$$k = \frac{-2}{\theta}$$

pa je naš signal

$$x(t) = \frac{-2}{\theta} t + 1$$

$$x(t) = kt + n;$$

$$\text{Za } -\frac{\theta}{2} \leq t \leq 0$$

$$x(t=0) = 1 \text{ pa}$$

$$kt + n = 1 \text{ tj. } n=1$$

&&

$$x(t = -\frac{\theta}{2}) = 0 \text{ pa}$$

$$k \frac{-\theta}{2} + n = 0$$

$$k = \frac{2}{\theta}$$

pa je naš signal

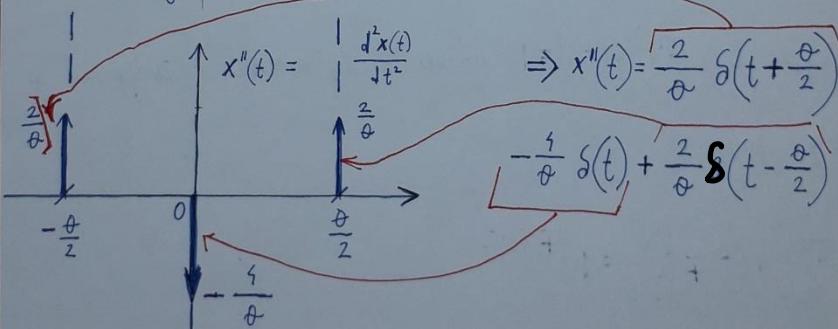
$$x(t) = \frac{2}{\theta} t + 1$$

Za t
lijevo od $\frac{-\theta}{2}$
i

desno od $\frac{\theta}{2}$
sa

horizontale
signal je
jednak nuli.

Boldovano
se diferencira!



$$x'(t) = \frac{-2}{\theta} \text{ za } 0 \leq t \leq \frac{\theta}{2} \text{ to je prava!}$$

Međa signala je od vertikale do $\frac{\theta}{2}$.

$$x'(t) = \frac{2}{\theta} \text{ za } -\frac{\theta}{2} \leq t \leq 0 \text{ to je prava!}$$

Međa signala je od vertikale do $\frac{-\theta}{2}$.

**Kod prvog izvoda trebaš pogledati u
grafik signala i prepoznati
Heaviside-ovu funkciju!**

24.

Radiš drugi izvod, OK? Prije nego što poletiš i sebi kažeš šta je to izvod od konstante... gledaj u grafik signala za funkciju $x'(t)$.

Kada odradiš izvod gubiš ove dvije prave $x'(t) = \frac{-2}{\theta}$ za $0 \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ i $x'(t) = \frac{2}{\theta}$ za $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq 0$

(Jer iz M1 znaš šta je izvod konsante...) tj. signal ti pada od $\frac{2}{\theta}$ sve do $-\frac{2}{\theta}$ a dužina tog pada ti je $\frac{4}{\theta}$ što je i nacrtano odgovarajućim vektorom.

Od početnog signala ostali su ti Dirac-i i to na vertikali čist Dirac samo pomnožen sa $\frac{-4}{\theta}$, a na lijevoj strani horizontale imas Dirac-a koji kasni za $\frac{-2}{\theta}$ pa kada to uvrstiš u $\text{delta}(t - \frac{-2}{\theta})$ dobijaš onako kako je i napisano. Analogno na desnoj strani horizontale, $\text{delta}(t - \frac{2}{\theta})$ jer tu figuriše $\frac{2}{\theta}$ te dobiješ raspisani zapis: jedan Dirac koji prednjači + Dirac + jedan Dirac koji kasni.

Izje je Impulsni signal u vremenu karakteriziran sa amplitudom ∞ .

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ +\infty, t=0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 - \text{ukupna vrednost impulsa je jednaka 1.}$$

Djeluje slično:

$$x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2x(t)}{dt^2} e^{-j\omega t} dt$$
$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \mathcal{F}\{x''(t)\}$$

S obzirom da je $\mathcal{F}\{s(t)\} = 1$ u na osnovu osobine o kompoziciji u vremenu vrijedi:

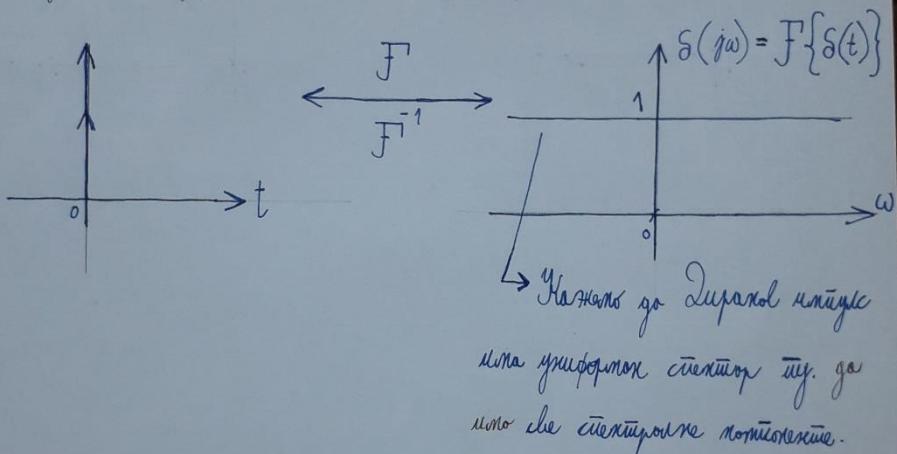
$$\mathcal{F}\{\delta(t \mp t_0)\} = 1 e^{\mp j\omega t_0}$$

Δ – Delta ili ti Dirac-ova funkcija, malo ili veliko Delta slovo grčkog alfabetu se koristi za zapisivanje...

Prepoznamo Fourier-ovu transformaciju Dirakove delta funkcije, da vidimo

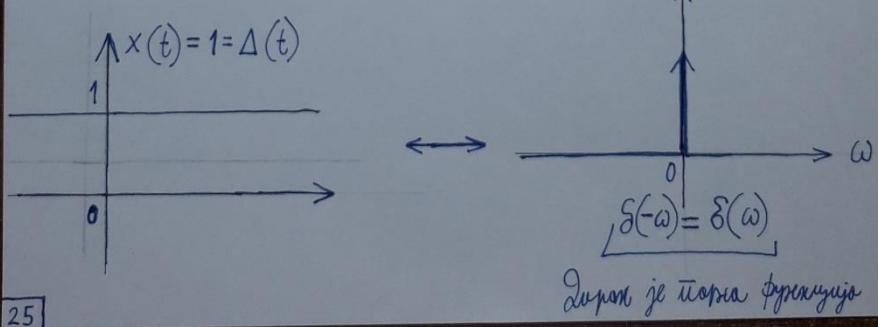
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0+} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

to je tako definisano.



Na osnovu očekuje gledačevim govorimo [tako je $x(t) \leftrightarrow X(\omega) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$]

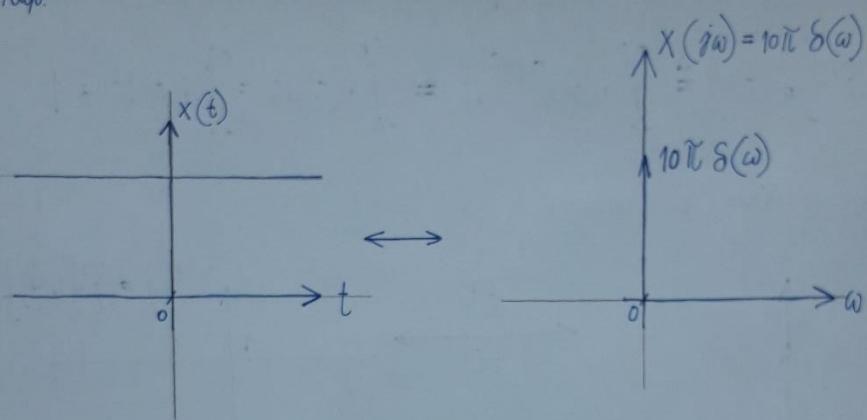
to je Dirakova transformacija postavljena:



25.

Fourier-ova transformacija konstante!

Hin:



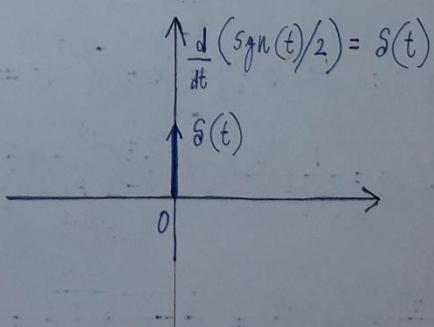
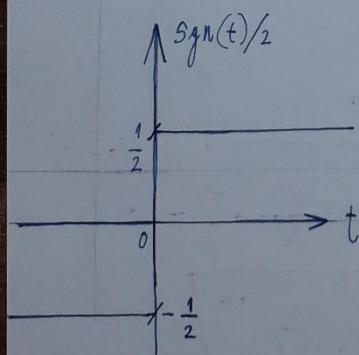
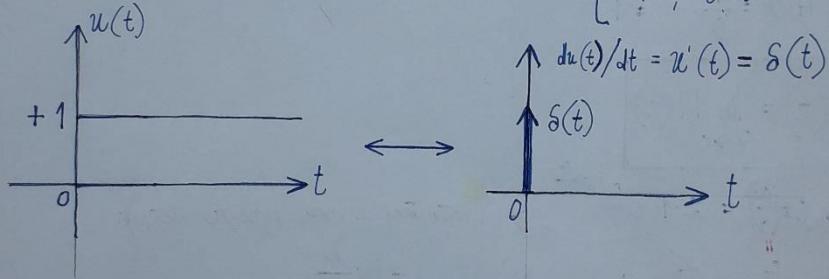
Угемо још неке важније функције:

1. Хенкисидова функција или јединична одложчна функција

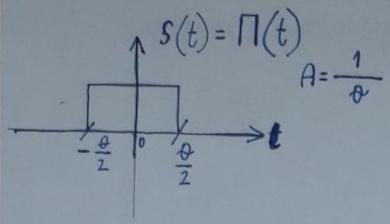
$$h(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Heaviside unit

2. Функција знака (signum): $\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



3. $\delta(t)$ - Јединка највећа људска физијика



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t=0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Нага употребе правоугаоног импулса $s(t) = \Pi(t)$ када је $\theta \rightarrow 0$,

тога његова амплитуда $A = \frac{1}{\theta} \rightarrow \infty$, јер је убрајана испод импулса $A \cdot \theta = \frac{1}{\theta} \cdot \theta = 1$.

Задаје $\delta(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi(t)$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{\theta} \delta\left(t + \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \frac{2}{\theta} \cdot 1 \cdot e^{+j\omega \frac{\theta}{2}} \quad \text{Употребом се може избегнути корак.}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{\theta} \delta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \frac{2}{\theta} \mathcal{F}\left\{\delta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \frac{2}{\theta} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega \frac{\theta}{2}}$$

Тјеље: $\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega) \Rightarrow$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(\omega)^2} \frac{2}{\theta} \left(e^{j\omega \frac{\theta}{2}} - 2 + e^{-j\omega \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{-2}{\theta \omega^2} \left(2 \cos \frac{\omega \theta}{2} - 2 \right) =$$

$$\frac{4}{\theta \omega^2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \theta}{4} \right) = \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega \theta}{4} \right)}{\omega^2 \theta^2} = \boxed{\frac{\theta}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{\omega \theta}{4} \right)}{\omega \theta} \right)^2}$$

Uz neke osobine Fourierove transformacije su:

8. Konvolucija u vremenskom prostoru

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(j\omega) X_2(j\omega)$$

9. Konvolucija u frekvencijskom prostoru (množenje u poljubivom)

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

Za određivanje Fourier-ovih transformacija korištena je teorema o diferenciranju.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\{u(t)\} &= \frac{1}{j\omega} & \mathcal{F}\left\{\frac{du(t)}{dt}\right\} &= \frac{1}{j\omega} & \mathcal{F}\{\delta(t)\} &= \frac{1}{j\omega} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{sgn(t)}{2}\right\} &= \frac{1}{j\omega} & \mathcal{F}\left\{\frac{d sgn(t)}{dt}\right\} &= \frac{1}{j\omega} & \mathcal{F}\{\delta(t)\} &= \frac{1}{j\omega} \end{aligned} \right\}$$

»

Pravljene akcije na stup. 2*

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \\ sgn(t) &= \frac{1}{2} [u(t) - u(-t)] \\ \frac{sgn(t)}{2} &= u(t) - \frac{1}{2} \implies \frac{d}{dt} \left[\frac{sgn(t)}{2} \right] = \frac{du}{dt} = \delta(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{j\omega} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

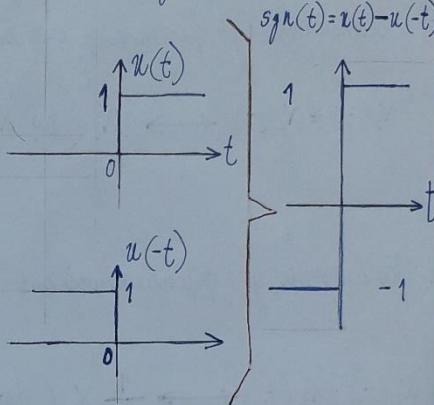
$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$

ja je:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(u)$$

$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega) = \underline{\pi \delta(\omega)}$$



* Постављајући посебну ствар $x(t)$ са њеномјеом функцијом

$$u(t) \text{ тј. } x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{F}\{x(t)*u(t)\} = X(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] =$$

\uparrow
Ovo je gornji $= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \underbrace{X(0)\pi \delta(\omega)}_{\omega \neq 0}$ ja je $\delta(\omega) = 0$, за

извадак укапорен !

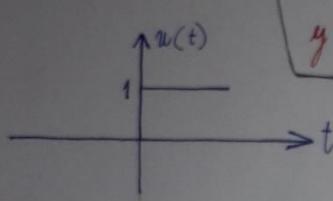
! Тако, под општима штава, описанома функција и споменутима јесенима дочирије Михе Fourier-ов преводилачни

шар.

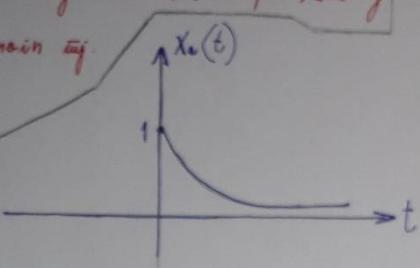
Задание

Определение Fourier-ды түрлекшемдердеги алгебра сұнада

$$x_a(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$



Параллель к оси времени $x_a(t)$ изображено в
Frequency domain by
 $y X(j\omega)$.



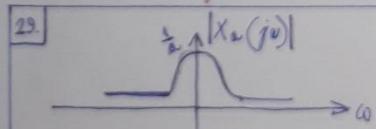
$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt = \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot u(t) dt}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \underbrace{u(t)}_{=1, \text{ Heaviside's function...}} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \boxed{\frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}} =$$

$$\frac{1}{-(a+j\omega)} \int_0^{+\infty} e^y dy = \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{e^{(a+j\omega)t}} = 0$$

$$\frac{1}{-(a+j\omega)} \left(\boxed{e^{-\infty}} - e^0 \right) = \frac{1}{a+j\omega} \cdot \frac{a-j\omega}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2 + \omega^2} \quad \text{pp } (j)^2 = -1$$

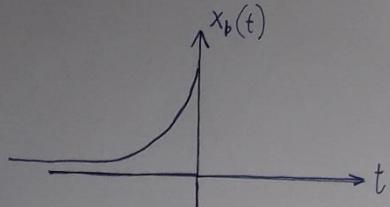
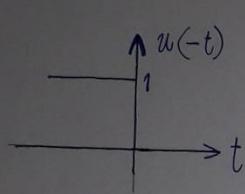
Заде $X(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$



$$28. \quad |X(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + \omega^2}}{\sqrt{(a^2 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$X(j\omega)$ як ниста друго неге комплексан бро, а $|X(j\omega)|$ модуло тог комплексног броја.

$$\text{b) } x_b(t) = e^{at} u(-t)$$



$$X_b(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_b(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} \left[e^{(a-j\omega)t} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega} \cdot \frac{a+j\omega}{a+j\omega} = \frac{a}{a^2+\omega^2} + j \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

на графике (левее): $x_b(t) = x_a(-t) \Rightarrow X_b(j\omega) = X_a(-j\omega)$

Множитель e^{at} не изменяет видов.

$$\text{d) } x_c(t) = e^{-|at|}$$

$$x_c(t) = x_a(t) + x_b(t) \Rightarrow X_c(j\omega) = X_a(j\omega) + X_b(j\omega) =$$

Множитель

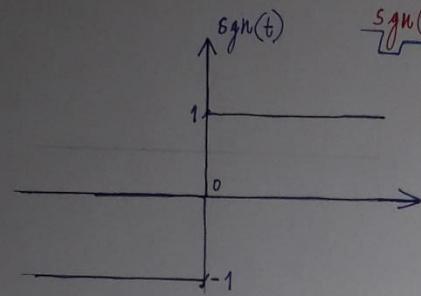
дискретен...

$$\frac{2a}{a^2+\omega^2} \in \mathbb{R} \quad \text{так.}$$

30.

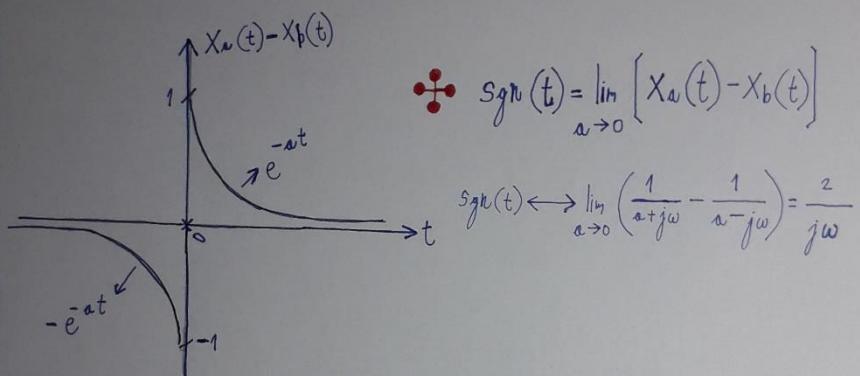
$X_c(j\omega) = X_c(\omega)$ реальная функция от ω .

$$\text{ii) } x(t) = \text{sgn}(t)$$



Са таблици се јасно види да постоларна функција
sgn(t) није дислоцијално изостављена

\Rightarrow Fourierова трансформација се
не може одредити директно из
дефиниције у објектном простору.

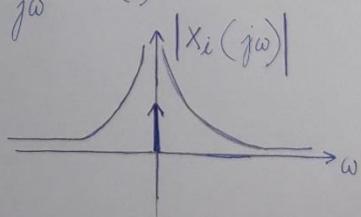


$$\text{••• } \text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [X_a(t) - X_b(t)]$$

$$\text{sgn}(t) \leftarrow \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{\text{sgn}(t)}{2} = u(t) - \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \begin{cases} \pi \delta(\omega), & \omega=0 \\ \frac{1}{j\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

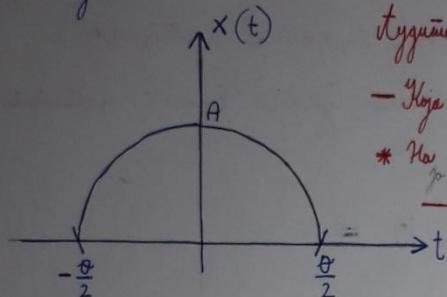


31.

$$\begin{aligned} \text{ACOS } x(t) &= \beta \cos(\omega_0 t) \\ \text{BECOS } x(t) &= \alpha \cos(\omega_0 t) \\ \text{BESIN } x(t) &= \beta \sin(\omega_0 t) \\ \text{BESIN } x(t) &= \alpha \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Задатак

Уредити стеклоподлогу тајнику остваривши симетрију пружањем
на дну.



Стеклоподлога бјезве 01.04.2022...

- Која је обр. физичка? На максимум висине?

* На sinc(), на sinc()...

— На $-\cos(x)$!

$$x(t) = A \cos(\beta t), \quad |t| \leq \frac{\theta}{2}$$

$$\beta = ?$$

$\cos(\beta t) = 0$ Мјесец на којима симетрија симетријом

$$\beta t = \frac{\pi}{2}, \text{ а за трапезна фигура је } \cos\left(\beta \frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ па}$$

$$\beta \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{\theta} \text{ јер је}$$

$$x(t) = A \cos\left(\frac{\pi}{\theta} t\right), \quad |t| \leq \frac{\theta}{2} \text{ је } \underline{\text{максимум}} \text{ у границама}$$

граница. Симетрија је остваривана што тима да ће Fourierова

спектрална анализа имала компоненту која симетрију оствари у

пременујућем гомеги.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A \cos\left(\frac{\pi}{\theta}t\right) e^{-j\omega t} dt =$$

- Овој начин едноставен и користи се за постапање са комплиексним бројевима... Испоштовајте Euler's формула.

$$\begin{aligned} & A \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi}{\theta}t} + e^{-j\frac{\pi}{\theta}t} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ & \frac{A}{2} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \left(e^{j\frac{\pi}{\theta}t} + e^{-j\frac{\pi}{\theta}t} \right) e^{-j\omega t} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e^{j\frac{\pi}{\theta}t} \cdot e^{-j\omega t} = e^{jt\frac{\pi}{\theta} - jt\omega} \\ & e^{-j\frac{\pi}{\theta}t} \cdot e^{-j\omega t} = e^{-jt\frac{\pi}{\theta} - jt\omega} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} \left[\int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-jt(\omega - \frac{\pi}{\theta})} dt + \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{-jt(\omega + \frac{\pi}{\theta})} dt \right] =$$

Коначност се постапају
изједначавају се и овај чланок
поступајући узимајући једнакост
изједначавајући једнакост!

$$\frac{A}{2} \left[\left. \frac{-1}{j(\omega - \frac{\pi}{\theta})} e^{-j(\omega - \frac{\pi}{\theta})t} \right|_{-\theta/2}^{\theta/2} - \left. \frac{1}{j(\omega + \frac{\pi}{\theta})} e^{-j(\omega + \frac{\pi}{\theta})t} \right|_{-\theta/2}^{\theta/2} \right] =$$

У овде изједначавају
изједначавају се и овај чланок
изједначавајући једнакост!

$$\begin{aligned} & \cos(*) - j \sin(*) - [\cos(*) - j \sin(*)] \\ & \frac{A}{2} \left[\left. \frac{-1}{j(\omega - \frac{\pi}{\theta})} \left(e^{-j(\omega - \frac{\pi}{\theta})\frac{\theta}{2}} - e^{j(\omega - \frac{\pi}{\theta})\frac{\theta}{2}} \right) \right] - \\ & \frac{1}{j(\omega + \frac{\pi}{\theta})} \left[\left. \left(e^{-j(\omega + \frac{\pi}{\theta})\frac{\theta}{2}} - e^{j(\omega + \frac{\pi}{\theta})\frac{\theta}{2}} \right) \right|_{\cos(*) - j \sin(*) - [\cos(*) - j \sin(*)]} \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} \left(\frac{-1}{j(\omega - \frac{\pi}{\theta})} \left(-2j \sin \left((\omega - \frac{\pi}{\theta}) \frac{\theta}{2} \right) \right) - \frac{1}{j(\omega + \frac{\pi}{\theta})} \left(-2j \sin \left((\omega + \frac{\pi}{\theta}) \frac{\theta}{2} \right) \right) \right) =$$

$$\frac{A}{2} \left[\frac{2j}{j(\omega - \frac{\pi}{\theta})} \sin \left(\frac{\omega\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2j}{j(\omega + \frac{\pi}{\theta})} \sin \left(\frac{\omega\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$A \left[\frac{\sin \left(\frac{\omega\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{\omega - \frac{\pi}{\theta}} + \frac{\sin \left(\frac{\omega\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)}{\omega + \frac{\pi}{\theta}} \right] = A \left[\frac{-\cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right)}{\omega - \frac{\pi}{\theta}} + \frac{\cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right)}{\omega + \frac{\pi}{\theta}} \right] =$$

$$A \cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right) \left(\frac{-1}{\omega - \frac{\pi}{\theta}} + \frac{1}{\omega + \frac{\pi}{\theta}} \right) = A \cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right) \cdot \frac{\omega - \frac{\pi}{\theta} + \omega + \frac{\pi}{\theta}}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2} =$$

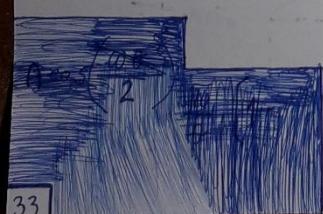
$$A \cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right) \frac{-2 \frac{\pi}{\theta}}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2} =$$

$A \cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right) \frac{-2 \frac{\pi}{\theta}}{\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \left[\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right]} =$

Придаю
хору

хору

хору



33.

$$A \cos \left(\frac{\omega\theta}{2} \right) \frac{-2 \frac{\pi}{\theta}}{\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \left(\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 - 1 \right)} =$$

$$A \cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) \frac{-2}{\frac{\pi}{\theta} \left[\left(\frac{\omega\theta}{\pi}\right)^2 - 1 \right]} = \frac{2A\theta}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\theta}{\pi}\right)^2} \quad \text{here}$$

Here:

$$\frac{\omega\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad / \cdot \frac{2}{\theta}$$

$$\omega = \frac{\pi}{\theta} + n \frac{2\pi}{\theta} \quad / : 2\pi$$

$$\frac{2\pi f}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi\theta} + \frac{n2\pi}{2\pi\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{\theta}} \frac{2A\theta}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\theta}{\pi}\right)^2} \xrightarrow[\text{Nenennbruch}]{\text{Klammern hinein}} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{\theta}} \frac{2A\theta}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\theta}{\pi}\right)^2} =$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{\theta}} \frac{A\pi \sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{2\omega} = \frac{A\pi \sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{\frac{2\pi}{\theta}} = \frac{A\pi \sin\left(\frac{\omega\theta/1}{2}\right)}{\frac{2\pi}{\theta}} = \frac{A\theta}{2}$$

Here: $\omega = \frac{\pi}{\theta} + n \frac{2\pi}{\theta}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \{ \circ \}$

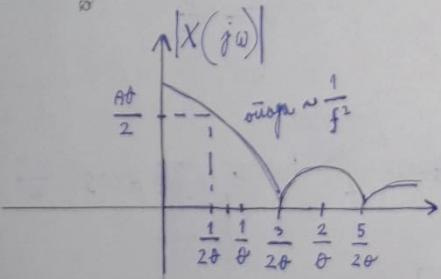
For $n=0$ we have starting value!

Therefore $\omega = \frac{\pi}{\theta}$ is

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{\theta}\theta\right)}{1 - \left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2} = \frac{0}{0} !$$

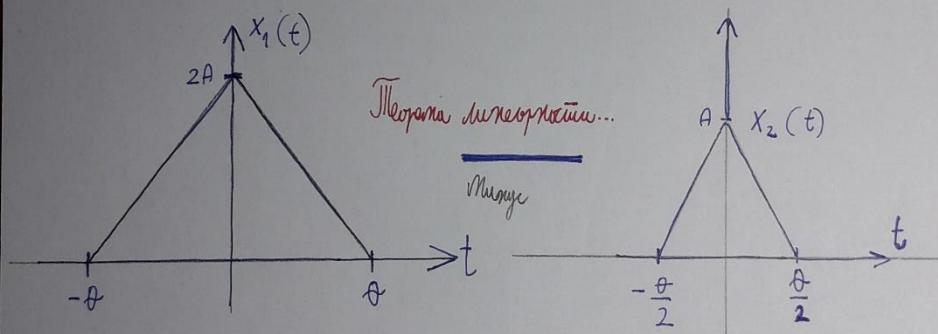
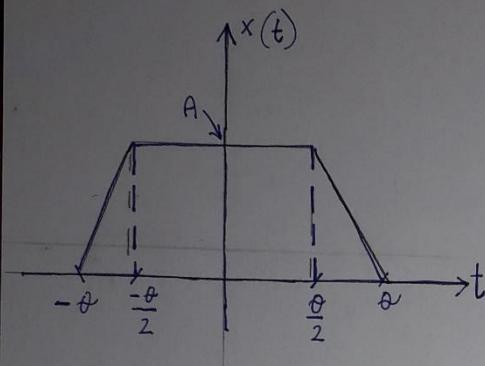
$$A \sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi \omega}$$



Задача

Определить Fourierову преобразованную сигнала за счет



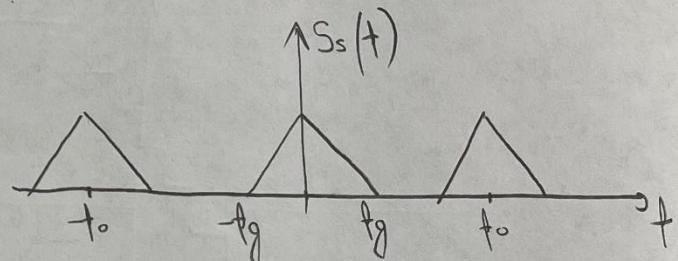
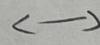
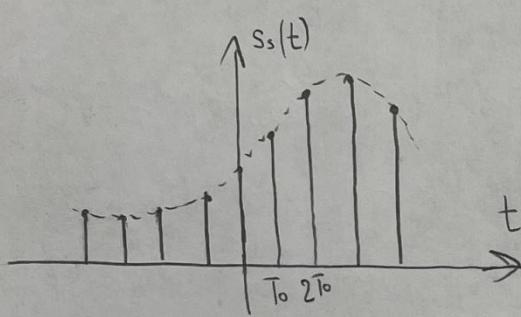
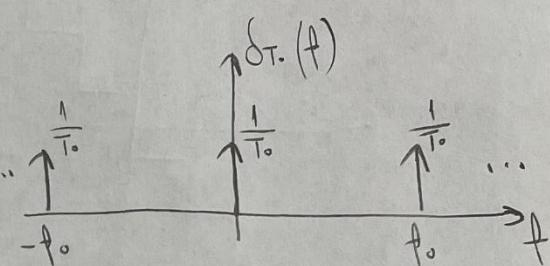
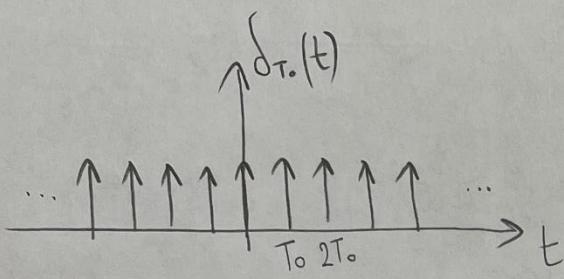
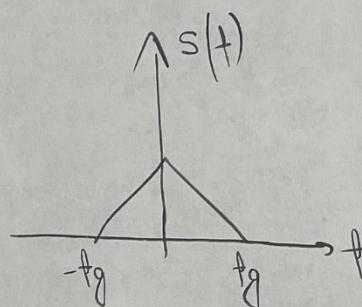
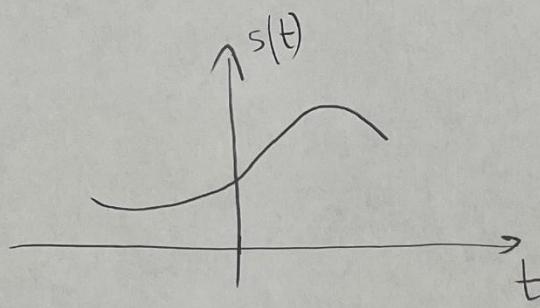
$$X(j\omega) = X_1(j\omega) - X_2(j\omega)$$

$$= 2A\theta \left[\frac{\sin(\omega \frac{\theta}{2})}{\omega \frac{\theta}{2}} \right]^2 - \frac{A\theta}{2} \left[\frac{\sin(\omega \frac{\theta}{4})}{\omega \frac{\theta}{4}} \right]^2$$

35.

ЧАС 6

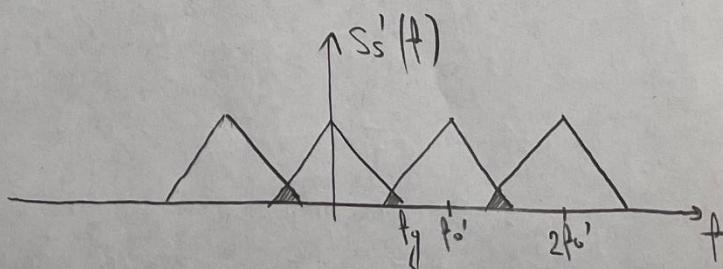
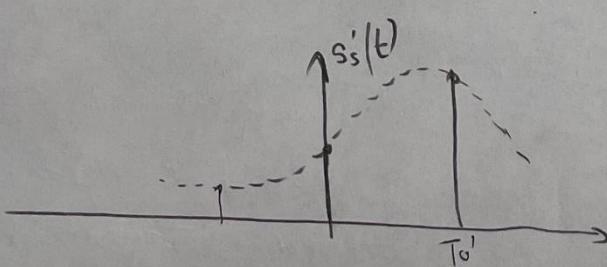
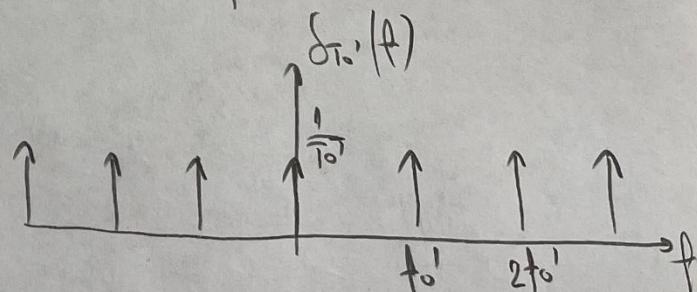
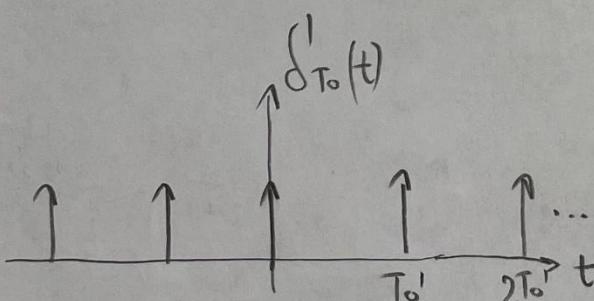
Линейнаяизация
сигнала
у времени
и его амплитуды



$$f_0 = \frac{W_0}{2T_0} = \frac{1}{T_0}$$

$$f_0 \geq 2f_g$$

- услов кои мора бити исчукват
га не да дошло до преклоняв
спектрът



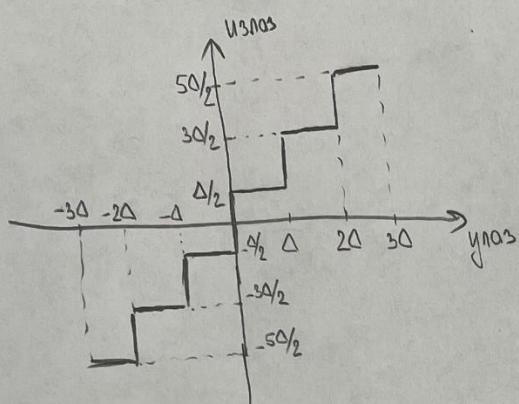
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2f_g}$$

- Найблизчата брзина оглъдяване

- дискретизација синал та амплитудата - квантовање

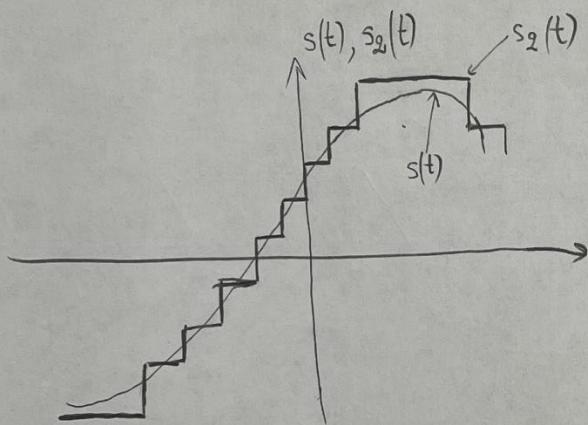
- унiformно квантовање

- претпоставено да су вриједности синала $x(t)$ у амплитудском ободу $\{ -X_{\max}, X_{\max} \}$ и да је опис подиљен у 2^q зона са хораком Δ , тада карактеристика квантизера изгледа:



$$\Delta = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2^q} = \frac{2X_{\max}}{2^q}$$

$2^q = 2^n$, n - број бити у кодном рифни дигитарни кодеру



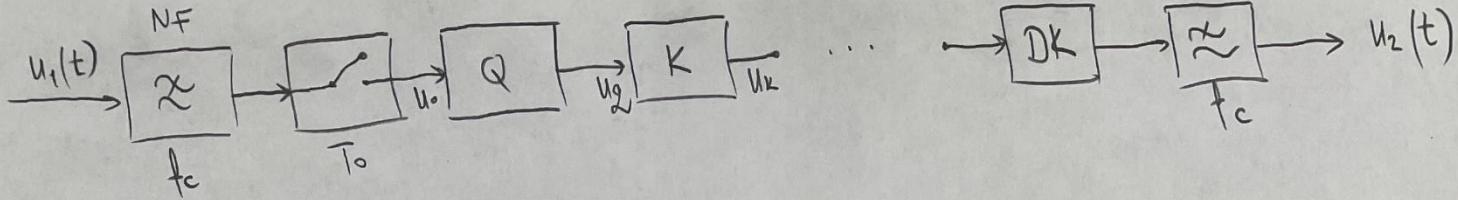
$s_2(t) - s(t) = \varepsilon_2$ - грешка квантовања

- амплитудско квантовање нисе реверзибилан процес

$P_{N,q}$ - средња стапа шума квантовања

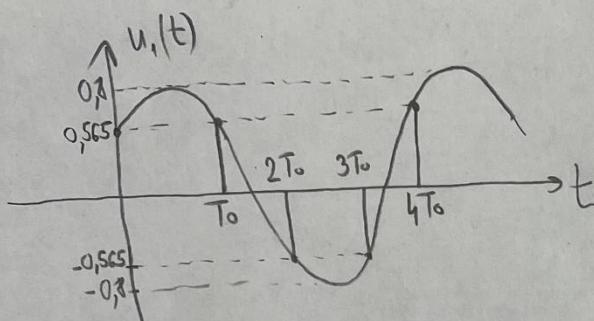
$$P_{N,q} = \overline{\varepsilon_2^2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

- 1) На слици је приказан блок шема систем за пренос синала импулсном кодном модулацијом. Одејување синала $u_1(t)$ врши се у преткујући $t = kT_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при чему је $T_0 = 125\text{ns}$ период одејувања. Амплитуда одејујућег синала $u_1(t)$ се налази у интервалу $|u_1(t)| < 0,3\text{V}$ и квантују се у унiformном квантизеру са $q = 8$ квантизационих нивоа. У које K сада се кодује квантованих одејујућих дигитарни кодон. Ако је $u_1(t) = V \cdot \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{4})$, при чему је $V = 0,8\text{V}$, $\omega_1 = 2\text{kHz}$:
- приказати временске облике синала та излозу из одејујућег квантизера Q и кодера K ,
 - пронаћи синал на излозу из пријемника и израчунати грешку која се уноси постуком квантовања.



$$u_1(t) = U \cdot \sin \left(\omega_m t + \frac{\pi}{4} \right)$$

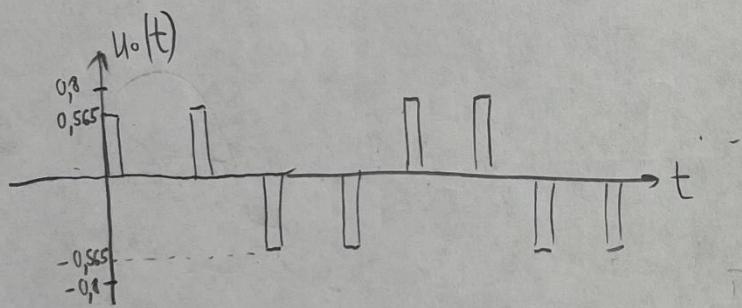
$$T_m = \frac{1}{f_m} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 500 \mu s = 4 \cdot T_0 \quad (\text{у огнепка и тириоды})$$



$$u_1(0) = U \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,565 \text{ V}$$

$$u_1(T_0) = U \cdot \sin \left(2\pi \frac{f_m}{f_0} + \frac{\pi}{4} \right) = 0,8 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ = 0,8 \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,565 \text{ V}$$

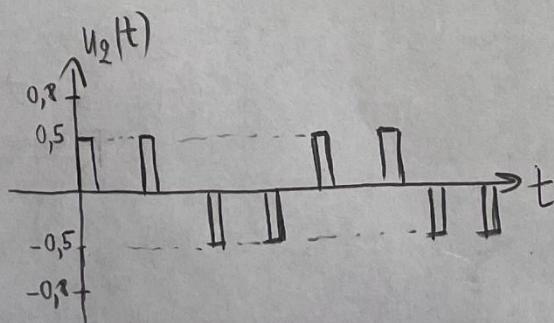
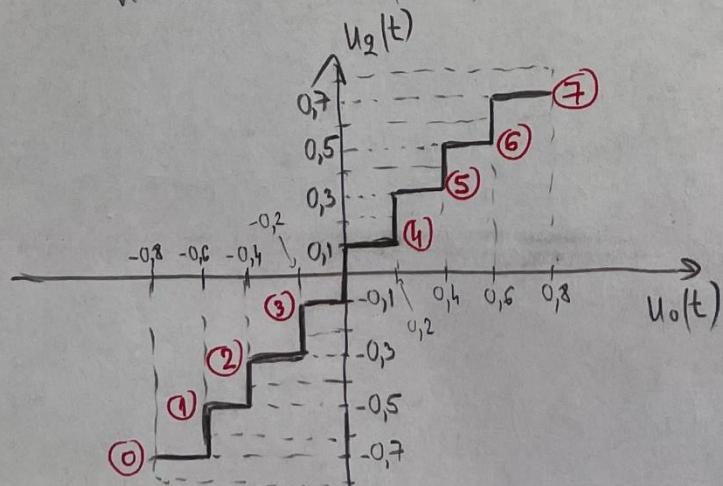
$$u_1(2T_0) = u_1(3T_0) = U \cdot \sin \left(4\pi \frac{f_m}{f_0} + \frac{\pi}{4} \right) = U \cdot \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \\ = -U \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = -0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,565 \text{ V}$$



$$\Delta u = \frac{U - (-U)}{2} = \frac{2U}{2} = \frac{1,6}{8} = \boxed{0,2 \text{ V}}$$

$$2^n \geq 2, n=?$$

$$V = 11 \text{ min} = 3b \quad (2^3 = 8)$$



квантизаторы	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8
анализатор	0	1	2	3	4	5	6	7	
коды	000	001	010	011	100	101	110	111	

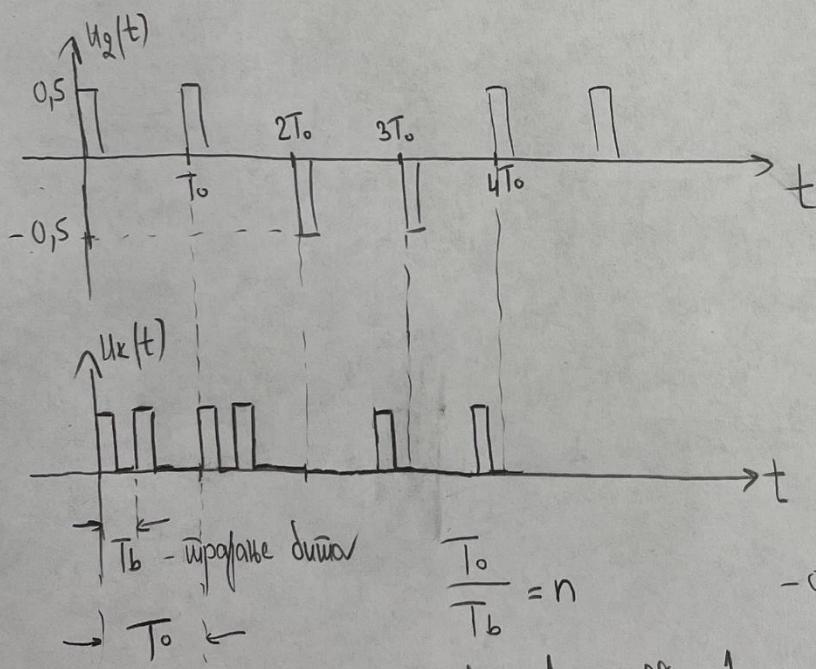
$$U_2 = \begin{cases} 0,5 \text{ V} & , 3a \\ -0,5 \text{ V} & , 3a \end{cases} \quad U_0(0) = U_0(T_0) = 0,565 \text{ V}$$

$$U_0(2T_0) = U_0(3T_0) = -0,565 \text{ V}$$

- постом се умисло брифностин $0,5[\text{V}]$ претоци четирь битартоу комбинацияна
110 жа сөзгөтін оғылжекі, а умисло $-0,5[\text{V}]$ се претоци битин 001
жа сөзгөтін оғылжекі сүйнелор

- екебарлықтын бійнен тұрғын на пінниң береңде дәни:

$$V_b = f_0 \cdot n = \frac{1}{T_0} \cdot n = 8 \text{ kHz} \cdot 3 \text{ bit} = \underline{\underline{24 \frac{\text{kb}}{\text{s}}}}$$



$$\frac{T_0}{T_b} = n$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \quad V_b = \frac{1}{T_b}$$

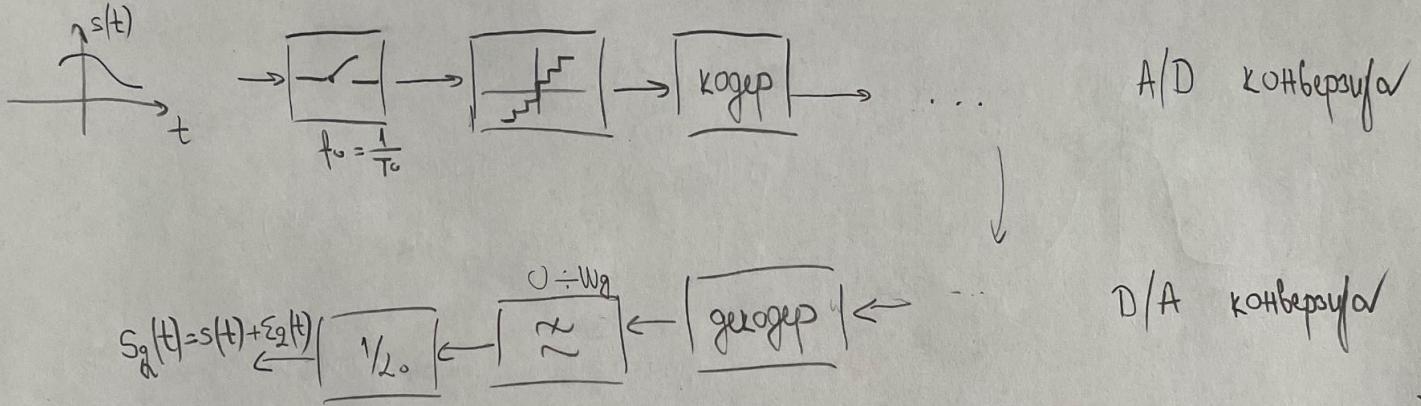
- облыға ға искоринштетт Р2 формат
(return to zero)

8) $U_2(t) = V' \cdot \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4})$
 $U_2(0) = V' \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = 0,5 \Rightarrow V' = \frac{0,5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \leftarrow \text{анализатор}\text{ сүйнелор}$

$$U_2(t) = V' \cdot \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4}) = 0,707 \cdot \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4})$$

ішемдек: $\Delta u(t) = (U - U') \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4}) = (0,8 - 0,707) \cdot \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4}) = 0,093 \cdot \sin(\omega_m t + \frac{\pi}{4})$
 \Rightarrow квантимование ға кривизнелотт ғоситында

ЧАС 7



PCM (Pulse Code Modulation) или ICM (импульсная кодовая модуляция)

- квантование реального непрерывного аудиосигнала / шум квантования, т.е.

$$SNR_Q [\text{dB}] = 10 \log \frac{P_S}{P_Q} = 10 \log \frac{s^2}{\bar{\epsilon}_Q^2}$$

P_S - мощность сигнала

P_Q - мощность шума из-за квантования

$$\bar{\epsilon}_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad - \text{коэффициент квантования}$$

1. Анализируем унiformное квантование под Гауссовой процессуры нульте среднее броскости

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_s} \cdot e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}}$$

σ_s - стандартное отклонение

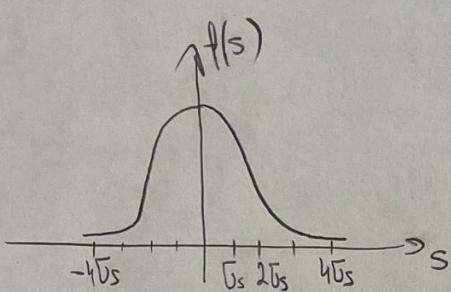
σ_s^2 - дисперсия

$$\sigma_s^2 = \bar{s}^2 - \bar{\bar{s}}^2$$

$$\Rightarrow \text{с однородной по распределению } \bar{s} = 0 \Rightarrow \sigma_s^2 = \bar{s}^2 \Rightarrow P_S = \bar{s}^2 = \sigma_s^2$$

Конечно ли здесь квантования?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds = 1$$



$$P(|s| < U_s) \approx 0.88$$

$$P(|S| < 2\bar{v}_s) \approx 0,954$$

$$P(|z| < 35s) \approx 0.997 \quad (99.7\%)$$

\Rightarrow Монгемо үсбөгүйниң оңсай квантимизерлер (-45s, 45s) кеп же
шагал скоро лериничкөн бөрөваштыжар да се бригадностары
обоз Тасысбөй бирлеуесар налазе үтүйшар оңсай $|s| < 45s$

$$\Delta = \frac{45s - (-45s)}{2} = \frac{85s}{2} = \frac{85s}{2^n}$$

$$SNR_Q = 10 \log \frac{P_s}{P_Q} = 10 \log \frac{\bar{s}^2}{\sum_Q^2} = 10 \log \frac{\bar{s}^2}{Q^2 / 12} = 10 \log \frac{\bar{s}^2}{\frac{64 \bar{s}^2}{2^{2n}} / 12} =$$

$$= 10 \log \frac{12 \cdot 2^{2n}}{64} = 10 \log 2^{2n} + 10 \log \frac{12}{64} \left(= \underline{\underline{6n - 7,2 \text{ [dB]}}} \right)$$

\Rightarrow соки додатни бин подобришава
SNRa зор ГДВ

2) Определить SNR_Q как нелинейное квантование сигнала на логарифмической шкале.

$$s(t) = A_s \cdot \sin(\omega_s t)$$

$$P_s = V \cdot I = \frac{V^2}{R} = I^2 \cdot R$$

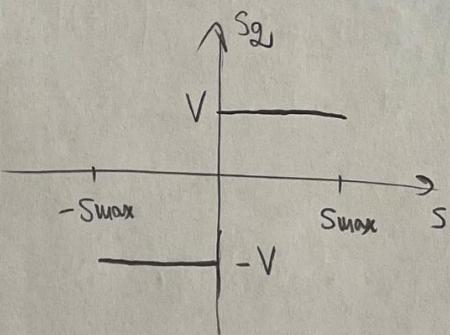
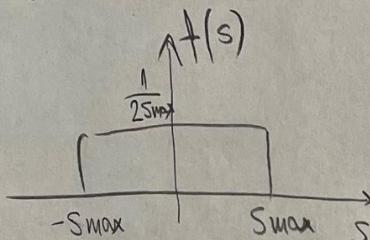
$$R = 1\Omega \Rightarrow P_s = V^2 = \left(\frac{A_s}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{A_s^2}{2}$$

$$P_Q = \frac{\sum Q^2}{12} = \frac{A_s^2 - (-A_s)^2}{12} = \frac{\left(\frac{2A_s}{2}\right)^2}{12} = \frac{4A_s^2}{9g^2 \cdot 12} = \frac{A_s^2}{3g^2}$$

$$SNR_Q = 10 \log \frac{P_S}{P_Q} = 10 \log \frac{\frac{A_s^4}{2}}{\frac{A_s^3}{32^2}} = 10 \log \frac{32^2}{2} = 10 \log \frac{3 \cdot 2^{2n}}{2} = 10 \log \frac{3}{2} + 20n \cdot \log 2 = \\ = 6n + 1,7 \boxed{10}$$

3.

Определить величину квантна за процесс са унiformном дистрибуцион түстинде
бірданнан расынде шренгінің амплитуда око са ради са жетекшісін
кодовать.



$$\overline{\varepsilon_2^2} = ?$$

$$\overline{\varepsilon_{2i}^2} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} (s - s_{2i})^2 f(s) ds$$

$$i=1$$

$$i=2$$

$$\overline{\varepsilon_2^2} = \sum_i \overline{\varepsilon_{2i}^2}$$

$$\overline{\varepsilon_{21}^2} = \overline{\varepsilon_{22}^2} \Rightarrow \overline{\varepsilon_2^2} = 2 \overline{\varepsilon_{21}^2} = 2 \overline{\varepsilon_{22}^2}$$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_2^2} &= 2 \cdot \int_0^{S_{\max}} (s - V)^2 \cdot \frac{1}{2S_{\max}} ds = \frac{1}{S_{\max}} \int_0^{S_{\max}} (s^2 - 2V \cdot s + V^2) ds = \\ &= \frac{1}{S_{\max}} \cdot \left(\frac{s^3}{3} - V \cdot s^2 + V^2 \cdot s \right) \Big|_0^{S_{\max}} = \frac{1}{S_{\max}} \left(\frac{S_{\max}^3}{3} - V \cdot S_{\max}^2 + V^2 \cdot S_{\max} \right) = \\ &= V^2 - V \cdot S_{\max} + \frac{S_{\max}^2}{3} \end{aligned}$$

Минимизација саіде шұма квантовауда үз оғысуы нау квантлизациянын ниво (V):

$$\frac{\partial (\overline{\varepsilon_2^2})}{\partial V} = 0$$

$$2V - S_{\max} = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{S_{\max}}{2}}$$

4.

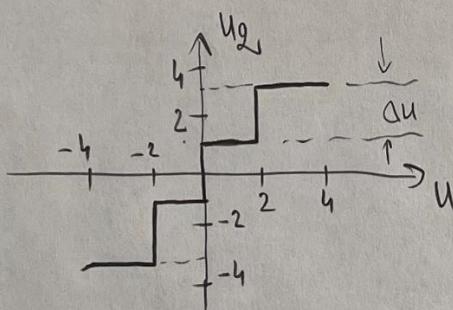
Сигнал $u(t)$ се преноси системом са ИКМ (PCM) модулацијом. Квантовање однапред/сигнал $u(t)$ се обавља са h квантисациског нивоа.
Фундаментални густините бројеватијите амплитудаје је дати изразом:

$$p(u) = \begin{cases} K \cdot e^{-|u|}, & |u(t)| \leq 4V \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определими:

- a) корак квантовања Δu при равноточном унiformном квантовању,
- б) стапак сигнала и стапак шума,
- в) однос сигнал/шум квантовања (SNR_Q).
- г) Плоштински постапак из пачака а), б) и в) ако је фундаментални густините бројеватијите унiformне, т.ј. $p(u) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & |u(t)| \leq 4V \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$$\text{а)} \Delta u = \frac{A_2 - (-A_2)}{2} = \frac{4 - (-4)}{4} = \frac{8}{4} = \boxed{2V}$$



$$\text{б)} P = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1 \quad (\text{Бројеватијонај да је сигнал } -\infty < u(t) < +\infty)$$

$$\int_{-4}^4 K \cdot e^{-|u|} du = 1 \Rightarrow 2K \int_0^4 e^{-u} du = -2K \cdot e^{-u} \Big|_0^4 = 2K \cdot e^{-4} =$$

$$= 2K \left(1 - e^{-4} \right) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2(1 - e^{-4})} \approx 0,509$$

$$P_s = \bar{u}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot p(u) du = \int_{-4}^4 u^2 \cdot K \cdot e^{-|u|} du = 2 \cdot 0,509 \int_0^4 u^2 \cdot e^{-u} du$$

$$\int_a^b u^n \cdot e^{-u} du = - \left(u^n + n \cdot u^{n-1} + n(n-1) u^{n-2} + \dots \right) \cdot e^{-u} \Big|_a^b$$

$$P_s = 2 \cdot 0,509 \cdot (u^2 + 2u + 2) \cdot e^{-u} \Big|_4^0 = 2 \cdot 0,509 \left(2 - 26 \cdot e^{-4} \right) = 1,55 [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_g^2} = ?$$

$$\overline{\varepsilon_g^2} = \overline{\varepsilon_{g1}^2} + \overline{\varepsilon_{g2}^2} + \overline{\varepsilon_{g3}^2} + \overline{\varepsilon_{g4}^2}$$

$$\overline{\varepsilon_{g1}^2} = \overline{\varepsilon_{g4}^2}$$

$$\overline{\varepsilon_{g2}^2} = \overline{\varepsilon_{g3}^2}$$

}

- здоти симетриче характеристики вбачимо зважа

$$\begin{array}{lcl} u_0 = -4V & \rightarrow & u_{g1} = -3V \\ u_1 = -2V & \rightarrow & u_{g2} = -1V \\ u_2 = 0V & \rightarrow & u_{g3} = 1V \\ u_3 = 2V & \rightarrow & u_{g4} = 3V \\ u_4 = 4V & \rightarrow & \end{array}$$

$$\overline{\varepsilon_{g3}^2} = \int_0^2 (u-1)^2 K \cdot e^{-|u|} du = K \cdot \int_0^2 (u-1)^2 e^{-u} du = K \left((u-1)^2 + 2(u-1) + 2 \right) e^{-u} \Big|_0^2 =$$

$$= K \left(u^2 - 2u + 1 + 2u - 2 + 2 \right) e^{-u} \Big|_0^2 = K \cdot (u^2 + 1) e^{-u} \Big|_0^2 = K \left(1 - 5e^{-2} \right) = 0,1646 [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_{g4}^2} = \int_2^4 (u-3)^2 K \cdot e^{-|u|} du = K \int_2^4 (u-3)^2 e^{-u} du = K \left((u-3)^2 + 2(u-3) + 2 \right) \cdot e^{-u} \Big|_2^4 =$$

$$= K \left(u^2 - 6u + 9 + 2u - 6 + 2 \right) e^{-u} \Big|_2^4 = K \left(u^2 - 4u + 5 \right) e^{-u} \Big|_2^4 = K \left(e^{-2} - 5e^{-4} \right) = 0,0223 [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_g^2} = 2 \left(\overline{\varepsilon_{g3}^2} + \overline{\varepsilon_{g4}^2} \right) = 0,374 [V^2]$$

b)

$$SNR_A = \frac{\overline{u^2}}{\overline{\varepsilon_g^2}} = \frac{1,55}{0,374} \boxed{= 4,144}$$

$$SNR_A [dB] = 10 \log 4,144 \boxed{= 6,17 dB}$$

$$i) p(u) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & |u(t)| \leq 4V \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\overline{u^2} = \int_{-4}^4 u^2 p(u) du = \int_{-4}^4 \frac{1}{8} \cdot u^2 du = \frac{1}{8} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-4}^4 = \frac{1}{24} (64 - (-64)) = \frac{128}{24} = \frac{16}{3} [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = \frac{\Delta u^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} [V^2]$$

$$SNR_Q = \frac{\overline{u^2}}{\overline{\varepsilon_q^2}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}} \left| = 16 \right| \left| = 4^2 = 2^2 \right|$$

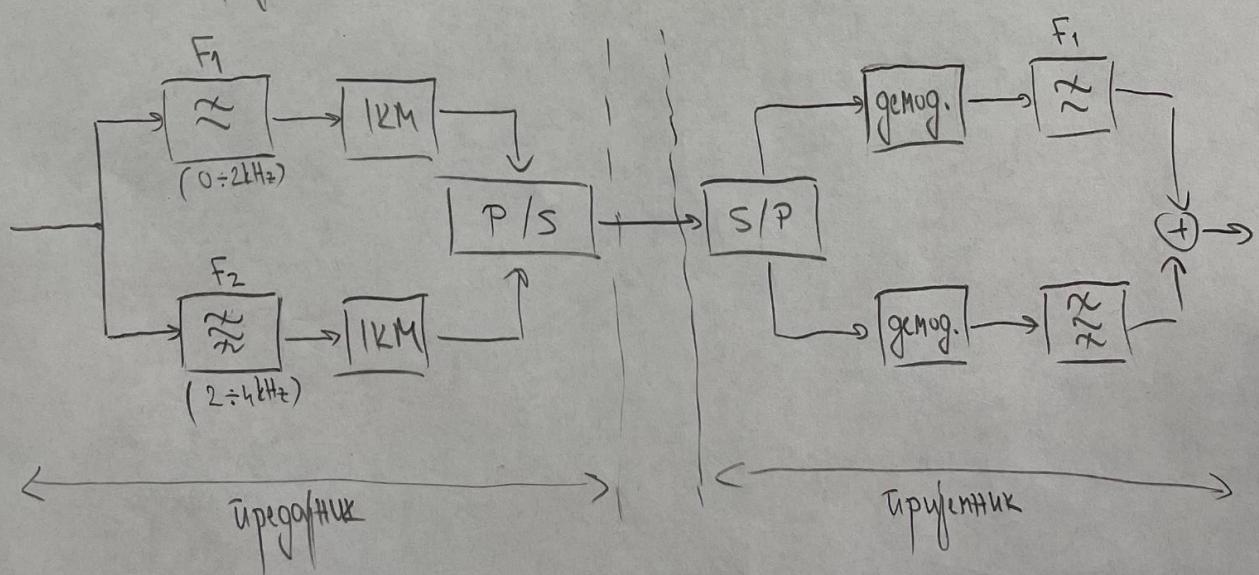
$$SNR_Q [dB] = 10 \log 16 \left| = 12 dB \right|$$

①

Нареди се да се изрази блок шема системи за пренос сигналов по оптическим ИКМ, у кои е изразено диференцијално детекција. Сигнал кој се преноси ги има са $0 \text{ до } 2 \text{ kHz}$, и $0 \text{ до } 2 \text{ kHz}$ до 4 kHz . Честотскиот одредбата χ од dB е $\text{f}_0 = 1 \text{ kHz}$.

Учењаточниот одредбата χ од dB е $\text{f}_0 = 1 \text{ kHz}$ со n_1 , а $\text{f}_0 = 1 \text{ kHz}$ со n_2 бидејќи тој е одредбата. Проток дигиталниот сигнал на линијата е $V = 64 \text{ kbit/s}$. Однос средните стапои користени сигналови χ и f_0 и f_0 е $P_1/P_2 = 2^8$. Постапки: $\text{SNR}_1 = 2^{2n_1}$, $\text{SNR}_2 = 2^{2n_2}$. Определете:

- сумарните бројбите бити n_1 и n_2 , тако да однос сигнал /шум квантација на излезот од префилтерот бидејќи максимален,
- максималната вриједност односот сигнал /шум квантација на излезот од префилтерот,
- вриједностот односот сигнал - шум у класичната системи за ИКМ кој се раков со вакум бинарниот протокол како и модификован систем.



$$a) n_1, n_2 = ?$$

$$f_0 = 4 \text{ kHz}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 2^8$$

$$V = 64 \text{ b/s}$$

$$V_1 = f_0 \cdot n_1$$

$$V_2 = f_0 \cdot n_2$$

$$V = V_1 + V_2 = f_0 (n_1 + n_2) \Rightarrow n_1 + n_2 = \frac{V}{f_0} = \frac{64 \text{ b/s}}{4 \text{ kHz}} = 16 \text{ b}$$

$$SNR_Q = \frac{P_1 + P_2}{N_1 + N_2} = \frac{P_2 \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \right)}{N_2 \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right)} = \left(\frac{P_2}{N_2} \right) \cdot \frac{1 + \frac{P_1}{P_2} \rightarrow 2^8}{1 + \frac{N_1}{N_2}} \xrightarrow{2^{2n_2}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{N_1}{P_1} \cdot P_1}{\frac{N_2}{P_2} \cdot P_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \cdot \frac{\frac{1}{SNR_1}}{\frac{1}{SNR_2}} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{SNR_2}{SNR_1} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{2^{2n_2}}{2^{2n_1}}$$

$$SNR_Q = 2^{2n_2} \frac{1 + 2^8}{1 + 2^8 \cdot 2^{2(n_2 - n_1)}} = 2^{2n_2} \frac{1 + 2^8}{1 + 2^8 \cdot 2^{2(2n_2 - 16)}} = 2^{2n_2} \frac{1 + 2^8}{1 + 2^{2n_2 - 24}}$$

$$\frac{dSNR_Q}{dn_2} = 0 \quad \dots$$

$$\Rightarrow n_2 = 6 \text{ b}, n_1 = 10 \text{ b}$$

$$b) SNR_Q = 526 \text{ dB}$$

$$SNR_Q [\text{dB}] \boxed{= 57,21 \text{ dB}}$$

$$\boxed{f_0 = 8 \text{ kHz}}$$

$$n = \frac{Vb}{f_0} = \frac{64 \text{ b/s}}{8 \text{ kHz}} = 8 \text{ b} \quad \underline{\underline{}}$$

$$SNR_Q \approx 2^{2n} = 2^{10} = 65536$$

$$SNR_Q [\text{dB}] \approx 6n = 6 \cdot 8 \boxed{= 48 \text{ dB}}$$

(2)

Бинарното PCM същност е застапено да изпълни огнова същност на квадратния (SNR_Q) и то са наимене 40dB. Определението за застапяваните нивоа в употребата SNR_Q за същността на честота.

$$\Delta = \frac{A - (-A)}{2} = \frac{2A}{2}$$

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4A^2}{12g^2} = \frac{A^2}{3g^2}$$

$$\text{за същност: } P_s = \frac{A^2}{2}, \quad SNR_Q = 10 \log \frac{P_s}{P_Q} = 10 \log \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{A^2}{3g^2}} = 10 \log \frac{3g^2}{2} = \\ = 10 \log \frac{3}{2} + 10 \log 2^n = 6n + 1,76 \text{ [dB]}$$

$$SNR_{Q,\min} = 40 \text{ dB}$$

$$10 \log \left(\frac{P_s}{P_Q} \right) \geq 40$$

$$\log \frac{P_s}{P_Q} \geq 4$$

$$\frac{P_s}{P_Q} \geq 10^4 \Rightarrow \left(\frac{P_s}{P_Q} \right)_{\min} = 10^4$$

$$\frac{3g^2}{2} \geq 10^4$$

$$g \geq \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 10^4} = 81,64 \Rightarrow \boxed{g_{\min} = 82}$$

$$g \leq 2^n \Rightarrow n_{\min} = \lceil \log_2 82 \rceil = \lceil 6,36 \rceil = \boxed{7}$$

$$\underline{SNR_Q = 6n + 1,76 = 43,76 \text{ dB}}$$

3.

Компакт диск (CD) съхранаващи 2 стерео сънапса / 16-битни A/D конвертори, брзина 44,1 kbps, чр. 44,1 kHz.

a) Определете изложни SNR_Q за сънапса и тънк скан.

б) Изчислете битова брзина (bit rate) ако се приемат сънапсите користен
изложни битови за корекция грешки, окончанието пакети и
контролни битови кои употреба чине залавяне og 100%.

в) Ако CD сънапси 1h музикална сънапса, определете количеството сънапси
изложни.

$$a) \text{SNR}_Q = 6n + 1,76 = 6 \cdot 16 + 1,76 \boxed{97,7 \text{ dB}}$$

(ако изложи SNR_Q,
чр. широк диптични
отно сънапса)

$$b) \mathcal{V}_b = 2 \cdot 44,1 \cdot 10^3 \cdot 16 = 1,411 \frac{\text{Mb}}{\text{s}} (\text{Mbps})$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 стерео то n

и с 100% залавяне (overhead) изложни битови брзина ѝ

$$\mathcal{V}_b = 2 \cdot 1,411 \text{ Mbps} = 2,822 \text{ Mbps}$$

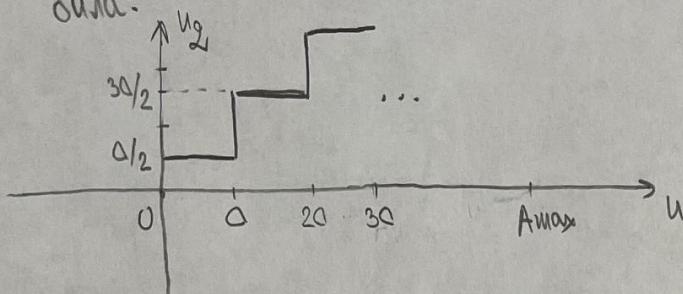
$$b) 1h = 60 \text{ min} = 3600s$$

$$J = \mathcal{V}_b \cdot t = 2,822 \cdot 10^6 \frac{\text{b}}{\text{s}} \cdot 3600s \boxed{= 10,16 \text{ Гб} \approx 1,27 \text{ ГБ}}$$

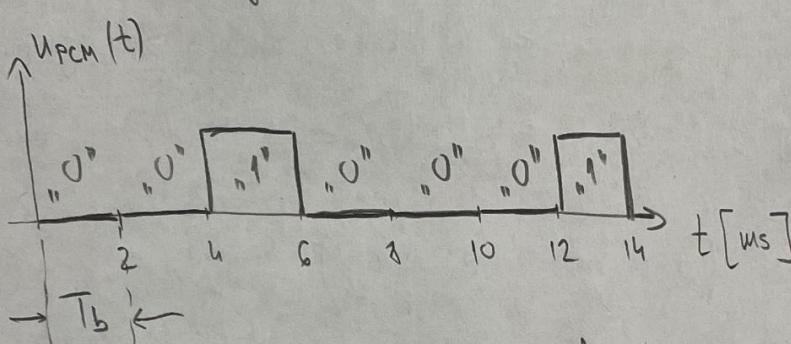
ДОДАТКИ

→ $x(t)$ є амплітуда нелінійного сигналу від $[0, A_{\max}]$, характеризується хванилищем

бу була:



→ Hyp. - однак дійсній змінної сигналів є стежки:



T_b - ймовірно дійсного інтервалу

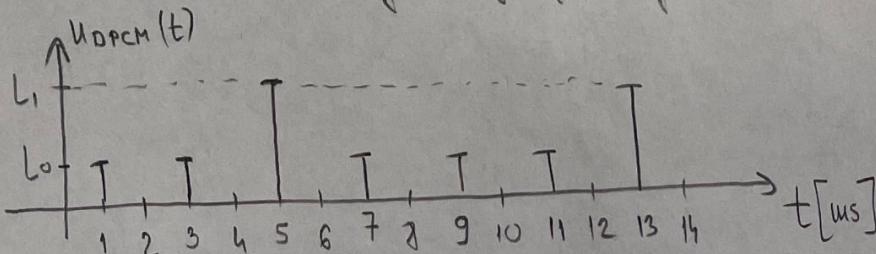
- кориштено що $q=2$ дес
обратка на нуль

два хванилищами нивою
(L_0, L_1)

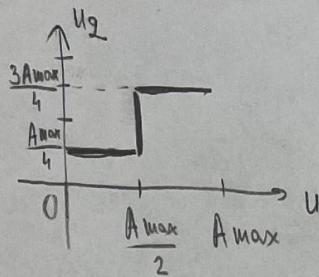
- приведені деякі обсяги сигналів, дійсні (кодовані) сигнал є сумурачкою
над середнім дійсного інтервалу якож є єнергетичні ірешки
мінімізовані при переносу

- надале, логічкою "0" є приведені деякі обсяги дійсні "майстрини" я
нівою L_0 , а логічкою "1" я L_1

- однак сигналів на нуль не дістаємо є:



- с однором да ѕе представити създаване, характеристика на квантанизера є:



- Накото дигитализаторът, тъй като има линеарна характеристика, на изходу ѹрифемтика ѡодвато същия $U_R(t)$

- Един от начините за превръщане на изходу ѹрифемтика ѡодвато същия $U_R(t)$ е

случају $\frac{A_{max}}{2}$, на ако є пренуждато оглушиване тк, имамо:

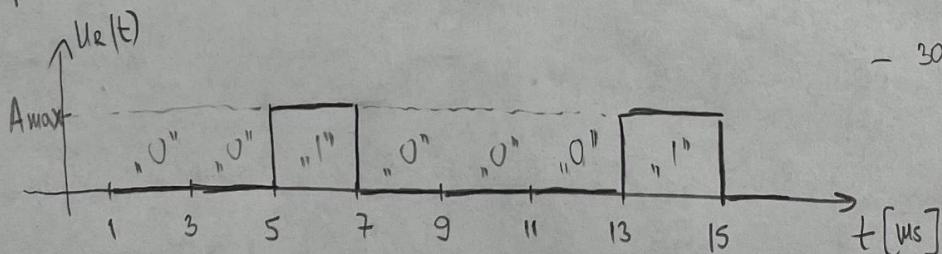
$$U_{PCM}(t_2) \approx U_{NF}(t_2) < U_{THRESHOLD} \Rightarrow U_R(t_2) = "0", \text{ огнусто}$$

$$U_{PCM}(t_2) \approx U_{NF}(t_2) > U_{THRESHOLD} \Rightarrow U_R(t_2) = "1"$$

"0" \rightarrow A_{min} (оръг обом случају)

"1" \rightarrow A_{max}

На є когато един същало на изходу ѹрифемтико:



- захватът за 1мс є
огнусу на $U_{PCM}(t)$!

Теория информации

- количина информации $Q(s_i)$ некой единице s_i обратно пропорциональна броятността $p(s_i)$ и дефинирана е чрез \log :

$$Q(s_i) = \log\left(\frac{1}{p(s_i)}\right) = -\log p(s_i)$$

- ако съдим по неизвестните боязни s_i и s_j са обобщаващи броятността $p(s_i)$ и $p(s_j)$, здравителната количина информация за тях е збирът на отделните количини на информация.

$$Q(s_i, s_j) = \log\left(\frac{1}{p(s_i, s_j)}\right) = \log\left(\frac{1}{p(s_i) \cdot p(s_j)}\right) = \log\left(\frac{1}{p(s_i)}\right) + \log\left(\frac{1}{p(s_j)}\right) = Q(s_i) + Q(s_j)$$

$$Q(s_i) = \log_2\left(\frac{1}{p(s_i)}\right) \quad [\text{sh}]$$

$$Q(s_i) = \log\left(\frac{1}{p(s_i)}\right) \quad [\text{Hartley}]$$

$$Q(s_i) = \log_e\left(\frac{1}{p(s_i)}\right) \quad [\text{NAT}]$$

* датите показват: $Q(s_i) = \log\frac{1}{0,5} = \log 2 = 1 \quad [\text{sh}]$

* битартият избор: $p(0) = p(1) = 0,5 ; Q(s_i) = \log\frac{1}{0,5} = 1 \quad [\text{sh}]$

* датите показват: $Q(s_i) = \log\frac{1}{\frac{1}{6}} = \log 6 = 2,583 \quad [\text{sh}]$

* количината на информация е когато са известни всички случаи за броятността на всички случаи $1/30$

$$Q(s_i) = \log\frac{1}{1/30} = \log 30 = 4,904 \quad [\text{sh}]$$

* Колко се информацията що даде като саща за n минути и 32 карти извличат
 a) гама
 b) гама скрип?

a) χ минути имат n гама; броят на гама извличането е било k от n гама

$$f: p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$\text{то } f: Q = \lg \frac{1}{p} = \lg \frac{1}{2^{-3}} = \lg 2^3 = 3 \text{ [sh]}$$

b) броят на гама скрип: $p = \frac{1}{32} = 2^{-5}$

$$Q = \lg \frac{1}{p} = \lg \frac{1}{2^{-5}} = \lg 2^5 = 5 \text{ [sh]}$$

- за дискретни извори на информация, информациите са равното χ :

$$H(S) = \sum_{i=1}^2 p(s_i) \lg \frac{1}{p(s_i)} \quad [\text{sh}]$$

- максимална информација при извор кога съдържа всички вероятности са равни (това е неизвестността на извора)

- ако извор има 2 съдара отговарящи $p(s_i) = \frac{1}{2}$

$$H(S) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \lg 2 = \lg 2 = H_{\max}(S)$$

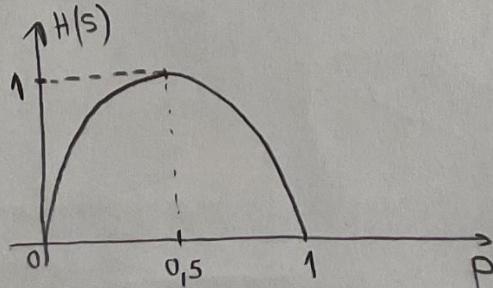
$$\boxed{H_{\max}(S) = Q(S)}$$

* Определение на информативността на извора χ функция на броя на гамите n .

$$p(0) = P$$

$$p(1) = 1 - p(0) = 1 - P$$

$$H(S) = \sum_{i=1}^2 p(s_i) \lg \frac{1}{p(s_i)} = P \lg \frac{1}{P} + (1-P) \lg \frac{1}{1-P}$$



- ако са H означено ентропију извора чији су симболи независни и имају истију бројеваносту податакова, односно

$$H_0 = H_{\max},$$

онда се H означава стварну брифетносам ентропије, што је једнак

$$\frac{H}{H_{\max}} = \eta \quad \text{представља} \quad \text{степен испоруџивава} \quad \text{символа или релативну ентропију}$$

- сврхностосам (редукционностосам) дефинишејмо као:

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - \eta \quad \text{или} \quad R[100\%] = 100 \cdot R$$

- n -то уроширење дискретног извора је извор чији су симболи се свршавају од n симбола урбодиног извора

- Ако урбодини извор има g симбола, онда је ивртоби n -то уроширење извора који има g^n симбола

* 2-ади е дискретни извор без меморија со истим симболов

$$S_i = \{S_1, S_2, S_3\}$$

$$P(S_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(S_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(S_3) = \frac{1}{4}$$

Определение:

- a) Количину информации коју носи сваки симбол.
- б) Ентропију извора.
- в) Редундантну информацију.
- г) Ентропију извора у случају промените грубоји речи.

$$a) Q(S_i) = \text{Id} \frac{1}{P(S_i)} = \text{Id} 2 = 1 [\text{бит}]$$

$$Q(S_2) = Q(S_3) = \text{Id} \frac{1}{P(S_2)} = \text{Id} \frac{1}{P(S_3)} = \text{Id} 4 = 2 [\text{бит}]$$

$$б) H(S) = \sum_{i=1}^3 P(S_i) \cdot \text{Id} \frac{1}{P(S_i)} = \frac{1}{2} \text{Id} 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \text{Id} 4 = 1,5 \left[\frac{\text{бит}}{\text{символ}} \right]$$

$$б) R = 1 - \eta = 1 - \frac{H}{H_{\max}}$$

$$H_{\max} = \text{Id} 2 = \text{Id} 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$$

$$R = 1 - \frac{1,5}{1,585} = 1 - 0,946 = 0,054$$

$$2[\%] = 5,4\%$$

$$г) 2^3 = 8, n = 2$$

$$2^n = 3^2 = 9 \text{ симболова}$$

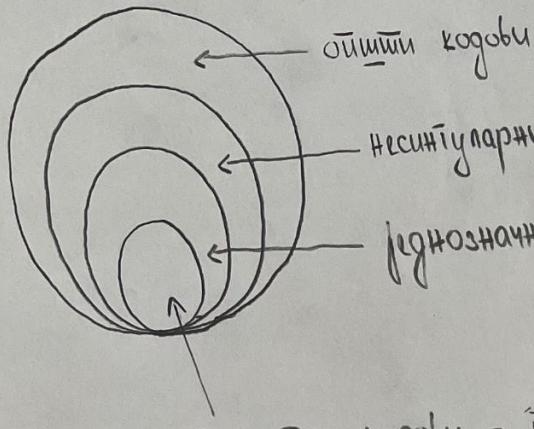
$S_i S_j$	$P(S_i, S_j)$
$S_1 S_1$	$\frac{1}{4}$
$S_1 S_2$	$\frac{1}{8}$
$S_1 S_3$	$\frac{1}{8}$
$S_2 S_1$	$\frac{1}{8}$
$S_2 S_2$	$\frac{1}{16}$
$S_2 S_3$	$\frac{1}{16}$
$S_3 S_1$	$\frac{1}{8}$
$S_3 S_2$	$\frac{1}{16}$
$S_3 S_3$	$\frac{1}{16}$

$$H(S^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} \text{Id} 4 + 4 \cdot \frac{1}{8} \text{Id} 8 + 4 \cdot \frac{1}{16} \text{Id} 16 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3 \left[\frac{\text{бит}}{\text{символ}} \right] = 2 \cdot H(S)$$

$$\boxed{H(S^n) = n \cdot H(S)}$$

- кодуване:
 - статистичко (ентропийско)
 - зашифровано
 - шифроване (криптозашифтува)



несигурни кодови - различни символика извора одговору различни кодни речи

предупреждение кодови - било која съвсемка кодни речи кореспондира предупреждение само предно поради информационалното извора

предупреждение кодови = префиксни кодови

- кога е префиксант ако в нему няма префикса кодни речи тие префикс на о други
- кога е предупреждение ако и само ако е префиксант

1. Испитвати предупреждение скита кодни речи:

a	$\rightarrow 1$
b	$\rightarrow 00$
c	$\rightarrow 10$

x_0	x_1	x_2	x_3	...
1	0	0	0	...
00				
10				

- в бинарни симетрични класови нема кодни речи из нулите симетрични клас, доколи кога ќе има предупреждение скита, или ќе има бесконечно

2. Испитвати да ли се дати кодови предупреждени и предупреждение.

a) кога A	
x_i кога A	
x_1	10
x_2	100
x_3	11
x_4	111

x_0	x_1	x_2
10	0	0
100	1	00
11		1
111		11

- кога тие предупреждени скита
- кога тие префиксант, па сами тие тие ќе предупреждат

8) $\log \Sigma$

x_i	$\log \Sigma$
x_1	0
x_2	01
x_3	011
x_4	0111

x_0	x_1
0	1
01	11
011	111
0111	1
	11
	1

- \log ясные логистичные геногубиватт

- \log түлең түрдиксатт, сибір түлең түрдиксатт

9)

$\log B$

x_i	$\log B$
x_1	1
x_2	01
x_3	001
x_4	0001

10) $\log \Gamma$

x_i	$\log \Gamma$
x_1	00
x_2	01
x_3	10
x_4	11

- Истине каса $\log b$)

3.

Исследование логистичных геногубований скіна когніз пурви: TO, AM, TOM, ALI, MAT, ANALI, ATAMAN.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
TO	M	AT	AMAN	AN	<u>ALI</u>
AM					
TOM					
ALI					
MAT					
ANALI					
ATAMAN					

Шеннон - Фаноов префиксни код

- Шеннонова теорема кодовања (1. виј): $E[L] \geq \frac{H(S)}{\log_2 D}$
- Шеннон - Фаноов код, иако нисе оптималан, у оштети случају се добијају добре приближавајуће дужине очекивате брифектносни дужине кодне ријечи
- већа је снага на избор дужине ли кодне ријечи си иако да баш:

$$L = \lceil -\frac{\log_2 p_i}{\log_2 D} \rceil$$

- Шеннонова теорема кодовања (2. виј): $E[L] < \frac{H(S)}{\log_2 D} + 1$

- Постулат за случај динарног кода:

- 1° симболи са листе са поредајућим симбалима $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_D$
- 2° сви симболи са групама које имају једнаку или приближну једнаку бројеватицу група
- 3° кодне ријечи са симболе једини једнаки су 0, а други једнаки су 1
- 4° сваки од ових једнакости са групама које имају једнаку бројеватицу група

① Задача је дисперсијни избор дес меморије S са симболима s_1, s_2, s_3 и s_4 и одговарајућим бројеватицама једнакима p_1, p_2, p_3 и p_4 .

Шенноновим постулатом одредимо кодне ријечи и њиховим да су је добијени код контрактант.

S	p_i	1. једнака	2. једнака	3. једнака	
s_1	0,5	0	0	0	$s_1 (0)$
s_2	0,25	1	10	10	$s_2 (10)$
s_3	0,125	1	11	110	$s_3 (110)$
s_4	0,125	1	11	111	$s_4 (111)$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = -(0,5 \log_2 0,5 + 0,25 \log_2 0,25 + 2 \cdot 0,125 \log_2 0,125) = 1,75 \frac{s}{81mb}$$

$$\bar{L} = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 3 \cdot 0,125 = 0,5 + 0,5 + 0,75 = 1,75 \frac{b}{81mb} \Rightarrow \text{додирни код је контрактант}$$

(2)

S	Pi	I	II	III	
S ₁	0,6	0	0	0	S ₁ (0)
S ₂	0,2	1	10	10	S ₂ (10)
S ₃	0,1	1	11	110	S ₃ (110)
S ₄	0,07	1	11	111	S ₄ (1110)
S ₅	0,03	1	11	111	S ₅ (1111)

$$H(S) = -\sum_{i=1}^5 p_i \log_2 p_i = 1,66 \frac{b}{8imb}$$

$$\bar{L} = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,07 + 5 \cdot 0,03 = 1,7 \frac{b}{8imb}$$

(3)

S	Pi	I	II	III	
S ₁	0,3	0	00	00	S ₁ (00)
S ₂	0,2	0	01	01	S ₂ (01)
S ₃	0,2	1	10	10	S ₃ (10)
S ₄	0,2	1	11	110	S ₄ (110)
S ₅	0,1	1	11	111	S ₅ (111)

$$H(S) = -\sum_{i=1}^5 p_i \log_2 p_i = 2,25 \frac{b}{8imb}$$

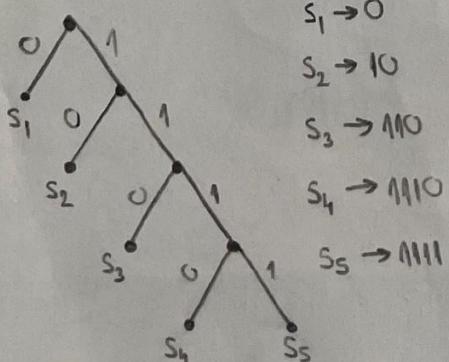
$$\bar{L} = 2 \cdot (0,3 + 0,2 + 0,2) + 3 \cdot (0,2 + 0,1) = 2,3 \frac{b}{8imb}$$

- **Източникът**: Тристанът е същият като при метода на **Метковски** постъпъкъв, само се употребяват користни когто съадно.

Помедото е изобразен като съадно и затворити чворовите **триъгълници** съдържат, с това да бъде обяснено, че гранката в свакия чвор е държана от триъгълника посредством.

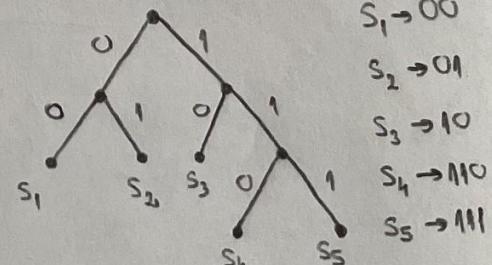
(4) Методът постъпъкъм (користни когто съадно) решението задачки 2 и 3.

Si	Pi
S ₁	0,6
S ₂	0,2
S ₃	0,1
S ₄	0,07
S ₅	0,03



$S_1 \rightarrow 0$
 $S_2 \rightarrow 10$
 $S_3 \rightarrow 110$
 $S_4 \rightarrow 1110$
 $S_5 \rightarrow 1111$

Si	Pi
S ₁	0,3
S ₂	0,2
S ₃	0,2
S ₄	0,2
S ₅	0,1



$S_1 \rightarrow 00$
 $S_2 \rightarrow 01$
 $S_3 \rightarrow 10$
 $S_4 \rightarrow 110$
 $S_5 \rightarrow 111$

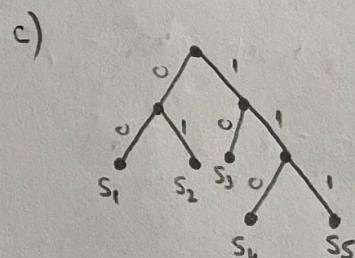
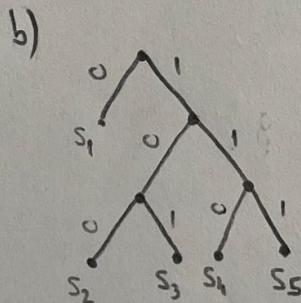
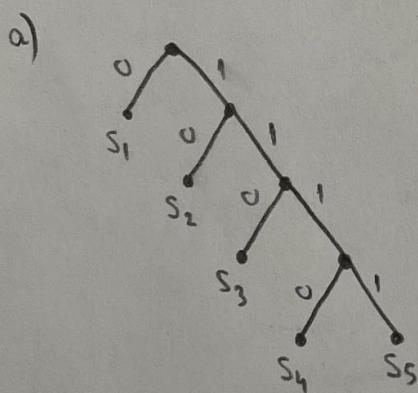
Ког Шенон - франсовой пастирка може да се изтиче више различитих когова (кодни симбола) зависи од расположение бјероватноста.

У овом случају требало ћи испитати сва могућа кодна симбола (има их конечан број) а постот изадраши симбол које дјелује најмању средњу дужину кодних ријечи. Такве једносимпуке/ преносе/ ови пастирке не гарантују добијање компактног кога.

* Нека ће дати извор са $q=5$ симбола. Могући су три различита бинарна кога.

s_i	p_i	a)	b)	c)	$H(S) = 1,66 \frac{b}{symbol}$
s_1	0,6	0	0	00	
s_2	0,2	10	100	01	$\bar{L}_a = 1,7 \frac{b}{symbol}$
s_3	0,1	110	101	10	$\bar{L}_b = 1,8 \frac{b}{symbol}$
s_4	0,07	1110	110	110	$\bar{L}_c = 2,1 \frac{b}{symbol}$
s_5	0,03	1111	111	111	

$\Rightarrow \bar{L}_a$ одређује компактни ког



Хаджиманов постапуник

- Хаджиманов алгоритам кодовања изворов информација без memorije, помоћу D-аркот префиксног кода, где оптимално је минималне мотиве очекивате бриљантност дуплите кодних ријечи

- 1° бјероватност се подесава у синагалитету редоследу
- 2° одреди се највећи индекс број 2^o ($2 \leq 2^o \leq m$) који задовољава услов даје $\frac{2^o - 2^{o-1}}{m-1}$ утицај броја (m представља општину кода којим се брши кодовање)
- 3° формирај се посредни ог 2- симбола/ најмање бјероватност
- 4° формирајмо нову листу S_1
- 5° премахнемо из најмање бјероватних симбола/
- 6° формирајмо нову листу S_2

Постапуник се понавља док не добијено да је симбол.

1) Задана је изворна миса U са $2=6$ симболом чији су бројеватинсци подавани
даље у табели. Са формулом постапком конструисани је при
чиму се кодовање бржи бинарним кодом.

U	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
p_i	0,05	0,1	0,15	0,27	0,2	0,23

U	U_1	U_2	U_3	U_4	
U_i	$P(U_i)$				
U_4	0,27	01	0,27	01	0,57
U_6	0,23	10	0,23	10	0,43
U_5	0,2	11	0,2	11	0,3
U_3	0,15	000	0,15	000	0,27
U_2	0,1	0010	0,15	001	00
U_1	0,05	0011			01

$$U_1 \rightarrow 0011$$

$$U_2 \rightarrow 0010$$

$$U_3 \rightarrow 000$$

$$U_4 \rightarrow 01$$

$$U_5 \rightarrow 11$$

$$U_6 \rightarrow 10$$

$$H(U) = - \sum_{i=1}^6 p_i \log_2 p_i = 2,42 \frac{\text{sh}}{\text{symbol}}$$

$$E(U) = 2 \cdot (0,27 + 0,2 + 0,23) + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot (0,05 + 0,1) =$$

$$= 2,45 \frac{\text{b}}{\text{symbol}}$$

2. Задача по статистични симболи и ниние бързоподавателни тоналитици.

s_i	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$p(s_i)$	0,55	0,15	0,15	0,10	0,05

Конструирането 2 различни бинарни кодификации при 3-важностни тоналитици на брз подаване, а при първия комбинационните символи при конструирането на брз подаване, а при втория при изразяването на тоналите. При този случай изразяването на тоналите е по-лесно. При този случай изразяването на тоналите е по-лесно.

S	s_i	$p(s_i)$	s_1	s_2	s_3
s_0		0,55	0	0,55	0,55
s_1		0,15	100	0,15	0,15
s_2		0,15	101	0,15	0,15
s_3		0,1	110	0,15	0,15
s_4		0,05	111	0,15	0,15

$$\bar{L} = \sum_{i=0}^4 p(s_i) \cdot l_i = 0,55 \cdot 1 + 3 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,1 + 0,05) = 0,55 + 1,35 = \boxed{1,9 \frac{b}{8imb}}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sum_{i=0}^4 p(s_i) \cdot (l_i - \bar{L})^2 = 0,55 \cdot (1 - 1,9)^2 + (0,15 + 0,15 + 0,1 + 0,05) (3 - 1,9)^2 = 0,55 \cdot (-0,9)^2 + 0,45 \cdot (1,1)^2 = \boxed{0,99}$$

S	s_i	$p(s_i)$	s_1	s_2	s_3
s_0		0,55	0	0,55	0,55
s_1		0,15	11	0,15	0,15
s_2		0,15	100	0,15	0,15
s_3		0,1	1010	0,15	0,15
s_4		0,05	1011	0,15	0,15

$$\bar{L} = \sum_{i=0}^4 p(s_i) \cdot l_i = 0,55 \cdot 1 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,15 + 4 (0,1 + 0,05) = 0,55 + 0,3 + 0,45 + 0,6 = \boxed{1,9 \frac{b}{8imb}}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sum_{i=0}^4 p(s_i) \cdot (l_i - \bar{L})^2 = 0,55 \cdot (1 - 1,9)^2 + 0,15 (2 - 1,9)^2 + 0,15 (3 - 1,9)^2 + (0,1 + 0,05) (4 - 1,9)^2 = \boxed{1,29}$$

→ кога има малко варианти на тонал

(3.) Листа је изворна листа S са $q=8$ симбола чије су бројеватините дефиле $p(s_i)$ дате у табелу. Конструисани компактни код Шифмановим поступком при чему се користе брзи тернарни кодон са кодном листом $\{0, 1, 2\}$.

$$q = 8$$

$$m = 3$$

$\frac{q-q_0}{m-1}$ треба да је једно број, при чему је $2 \leq q_0 \leq m$

$$\frac{8-q_0}{3-1} = \frac{8-q_0}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow q_0 = 2$$

s_i	$p(s_i)$	s_1	s_2	s_3
s_1	0,28	1	0,28	1
s_2	0,18	00	00	2
s_3	0,15	01	01	00
s_4	0,13	02	02	01
s_5	0,1	20	20	02
s_6	0,07	22	21	
s_7	0,05	210	22	
s_8	0,04	211		

$$E(L) = \sum_{i=1}^8 p(s_i) \cdot i = 0,28 \cdot 1 + 2 \cdot (0,18 + 0,15 + 0,13 + 0,1 + 0,07) + 3 \cdot (0,05 + 0,04) = \\ = 0,28 + 1,26 + 0,27 = 1,81 \frac{b}{symbol}$$

$$H(L) = - \sum_{i=1}^8 p_i \log_2 p_i = \dots = 2,76 \frac{sh}{symbol}$$

$$E(L) \geq \frac{H(L)}{\log_2 D} = \frac{H(L)}{\log_2 3} = \frac{2,76}{1,58} = 1,75$$

$$1,75 \leq 1,81 < 2,75 \quad \checkmark$$

LZ 77, LZ 77 bootstrap, LZ 78 кодовање
и аритметичко кодовање

①

Кодовање се свртнув LZ77 алгоритмом и израчунати стапет компресије ако
 је величината употреба $W=8$.
 $\begin{cases} (0, \text{char}) \\ (1, a, b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - \text{губитак match-a} \\ b - \text{губитак match-b} \end{cases} \quad \boxed{b \leq a}$
 MANASTIR PASTIR PAST! MAST! IMAT!

$[0, M][0, A][0, N][1, 2, 1][0, S][0, T][0, I][0, R][0, -][0, P][1, 7, 7]$
 $[1, 7, 4][1, 6, 1][0, M][1, 6, 3][1, 5, 1][1, 7, 1][1, 6, 2][1, 5, 1][1, 4, 1]$

- непредавај број битова за стандардно ASCII кодовање: $32 \cdot 8 = \underline{256b}$
 - непредавај број битова и спуњај LZ77 кодовање: $10 \cdot 9 + 10 \cdot 7 = 90 + 70 = \underline{160b}$
 $\eta = \frac{160}{256} = 0,625$
 $1 - 0,625 = \underline{0,375} \Rightarrow 37,5\%$ непредавај битови компресије

$$\begin{cases} [0, \text{char}] - 9 \text{ битова} \\ [1, a, b] - 7 \text{ битова} \end{cases} \quad (1+8)$$

$$\text{size}(a) = \text{size}(b) = \log_2 W$$

②

Кодовање се свртнув LZ77 и LZ78 алгоритмом.
 LZ77: /WED/W/E/W/E/E/W/E/B/ . . .

$[0, 1][0, W][0, E][0, D][1, 4, 3][1, 3, 3][1, 4, 4][0, B]$

$$\text{ASCII: } 15 \cdot 8 = 120b$$

$$\text{LZ77: } 5 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 45 + 21 = 66b$$

$$\eta = \frac{66}{120} = 0,55$$

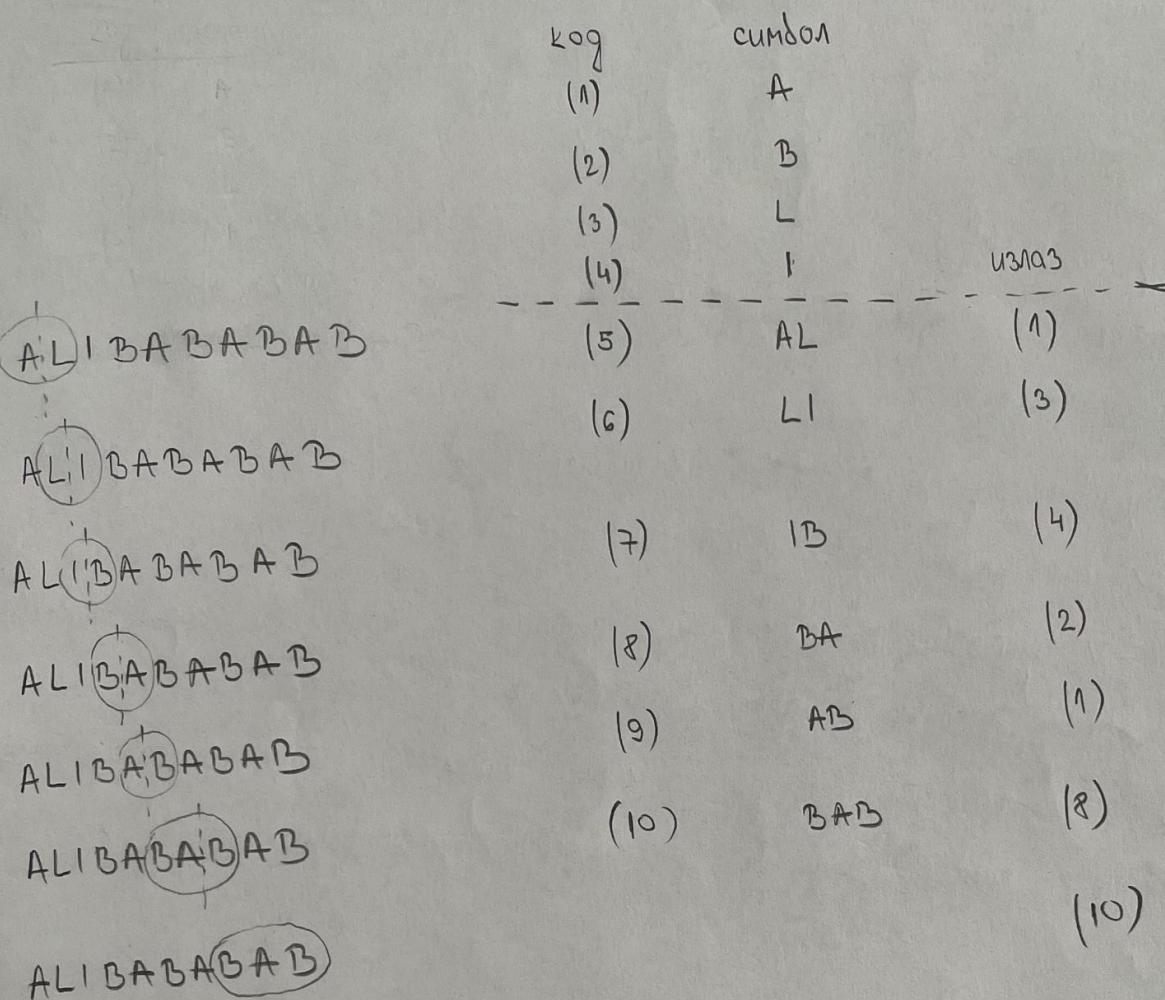
$$1 - 0,55 = \underline{0,45} \Rightarrow \text{стапет компресије је } 45\%.$$

агресор	сімейний	університет
1	/	(0, 1)
2	W	(0, W)
3	E	(0, E)
4	D	(0, D)
5	1W	(1, W)
6	E/	(3, 1)
7	WE	(2, E)
8	E/W	(6, W)
9	EB	(3, B)

LZW алгоритам (Lempel - Ziv - Welch)

- алгоритам за компресију дес табличака у којем се когда ћеја определеје односиво
- за конструисање когте ћеје нир пошредно постављати статистику извора, већ, у тој самој кодовању и декодовању, кадер и декодер на основу примењене података конструишу идентичну когту ћеју
- за разлику од Харфматовој кодовању ког који су кодови симбола променљиве дужине, LZW алгоритам придржан је когте руфије фиксне дужине низовима симбола променљиве дужине
- компресија је у овом случају постинте коришћењем малог броја дата за кодовање низа симбола као уједините нело свакој симбола посебначко
- Помоћи је LZW односивој алгоритам, тени пошреде за претпоставен когте јадре чиме се испрепороди увећаје количине података који се претпостављају
- основна идеја LZW алгоритма је да се когта јадре у тој кодовању промијује низовима изворних симбола који ће при следећим пофлуктиваним дата кодовати једним кодом

* Неха ю даи извор чифар ю листа симбола тај. алфавет $\{A, B, L, I\}$.
Помредно ю кодоваши тих симбола ALIBABABA B LZW алгоритмом.



на основу оригиналните кодте може да се излази (1)(3)(4)|2|(1)(2)(1)(2)(1)(2)
 LZW алгоритмом излаз (1)(3)(4)|2|(1)(8)|(10) 10 кодних симбола
+ кодних симбола

$$\eta = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$1 - 0,7 = \underline{\underline{0,3}} \Rightarrow \overbrace{30\% \text{ синтет компресије}}$$

3. Заданы дискретный избіор информации, кої таємниче симбоне від складу $\{A, B, C\}$. Імовірності символів су $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,05$, $P(C) = 0,25$. Кодований поруки ACBA аритметичним кодуванням.

символ	імовірність	інтервал
$S_1 = A$	0,7	$[0; 0,7)$
$S_2 = B$	0,05	$[0,7; 0,75)$
$S_3 = C$	0,25	$[0,75; 1)$

ACBA:

$$l^{(0)} = 0$$

$$U^{(0)} = 1$$

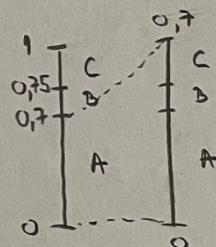
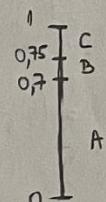
$$r^{(0)} = U^{(0)} - l^{(0)} = 1$$

$$X(A) = 1 \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0,7$$

$$l^{(1)} = l^{(0)} + r^{(0)} \cdot F(0) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$U^{(1)} = l^{(0)} + r^{(0)} \cdot F(1) = 0 + 1 \cdot 0,7 = 0,7$$

$$r^{(1)} = U^{(1)} - l^{(1)} = 0,7 - 0 = 0,7$$

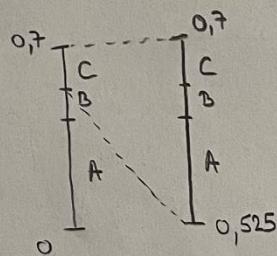


$$X(C) = 3 \quad F(2) = 0,75, \quad F(3) = 1$$

$$l^{(2)} = l^{(1)} + r^{(1)} \cdot F(2) = 0 + 0,7 \cdot 0,75 = 0,525$$

$$U^{(2)} = l^{(1)} + r^{(1)} \cdot F(3) = 0 + 0,7 \cdot 1 = 0,7$$

$$r^{(2)} = U^{(2)} - l^{(2)} = 0,7 - 0,525 = 0,175$$

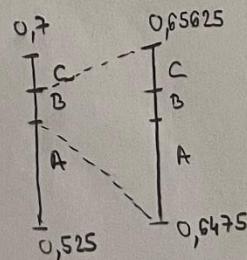


$$X(B) = 2 \quad F(1) = 0,7, \quad F(2) = 0,75$$

$$l^{(3)} = l^{(2)} + r^{(2)} \cdot F(1) = 0,525 + 0,175 \cdot 0,7 = 0,6475$$

$$U^{(3)} = l^{(2)} + r^{(2)} \cdot F(2) = 0,525 + 0,175 \cdot 0,75 = 0,65625$$

$$r^{(3)} = U^{(3)} - l^{(3)} = 0,65625 - 0,6475 = 0,00875$$

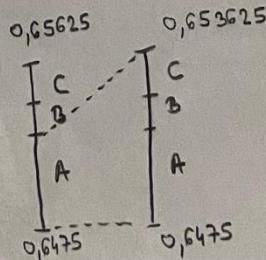


$$X(A) = 1 \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0,7$$

$$l^{(4)} = l^{(3)} + r^{(3)} \cdot F(0) = 0,6475 + 0,00875 \cdot 0 = 0,6475$$

$$U^{(4)} = l^{(3)} + r^{(3)} \cdot F(1) = 0,6475 + 0,00875 \cdot 0,7 = 0,653625$$

$$r^{(4)} = U^{(4)} - l^{(4)} = 0,653625 - 0,6475 = 0,006125$$



$[0,6475 ; 0,653625)$

бруттоносін (1) = $(0,1)_2 = 0,5 < 0,653625 \Rightarrow 1.$ бит $\neq 1$
 $0,5 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (11) = $(0,11)_2 = 0,75 > 0,653625 \Rightarrow 2.$ бит $\neq 0$
бруттоносін (10) = $(0,10)_2 = 0,5 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (101) = $(0,101)_2 = 0,625 < 0,653625 \Rightarrow 3.$ бит $\neq 1$
 $0,625 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (1011) = $(0,1011)_2 = 0,6875 > 0,653625 \Rightarrow 4.$ бит $\neq 0$
бруттоносін (1010) = $(0,1010)_2 = 0,625 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (10101) = $(0,10101)_2 = 0,65625 > 0,653625 \Rightarrow 5.$ бит $\neq 0$
бруттоносін (10100) = $(0,10100)_2 = 0,625 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (101001) = $(0,101001)_2 = 0,640625 < 0,653625 \Rightarrow 6.$ бит $\neq 1$
 $0,640625 < 0,6475 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (1010011) = $(0,1010011)_2 = 0,6484375 < 0,653625 \Rightarrow 7.$ бит $\neq 1$
 $0,6484375 > 0,6475 \Rightarrow$ краї

|
когта рука: 1010011 |

4) Задан е дискретни извор информации који генерише симболе из склопа $\{M, A, \$\}$ со вероватноћама $\{0,4, 0,4, 0,2\}$ редом.

a) Одредити ентропију извора. Колико истих минималних сређава дужине кодирају за компресију без губитака (дигитно кодовање) по прво Шенноновом тврденију?

b) Кодовањи порука MAMA\$ са фиктивним алгоритмом. Колико битна заузима порука?

c) Кодовањи исту поруку из b) аритметичким кодовањем. Колико битна заузима порука?

s_i	M	A	\$
p_i	0,4	0,4	0,2

$$a) H(S) = - \sum_{i=0}^2 p_i \log_2 p_i = - (0,4 \cdot \log_2 0,4 + 0,4 \cdot \log_2 0,4 + 0,2 \cdot \log_2 0,2) = \\ = 1,52 \frac{\text{бит}}{\text{бит}}$$

$$E[L] \geq \frac{H(S)}{\log_2 D}$$

$$D = 2 \Rightarrow \log_2 D = 1$$

$$E[L] \geq H(S) = 1,52 \frac{\text{бит}}{\text{бит}}$$

S	$p(s_i)$		s_i	
s_i				
M	0,4	1	0,6	0
A	0,4	00	0,4	1
\$	0,2	01		

MAMA\$: 10010001

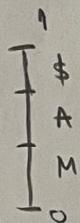
дужина кода је рифен на 8 битна

б)

сущность	вероятность	погрешность
$S_1 = M$	0,4	$[0; 0,4)$
$S_2 = A$	0,4	$[0,4; 0,8)$
$S_3 = \$$	0,2	$[0,8; 1)$

MAMA\$:

$$\ell^{(0)} = 0 \quad U^{(0)} = 1 \quad r^{(0)} = U^{(0)} - \ell^{(0)} = 1$$

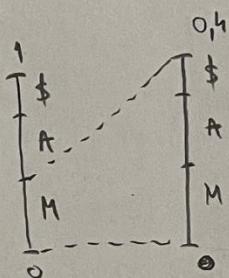


$$X(M) = 1 \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0,4$$

$$\ell^{(1)} = \ell^{(0)} + r^{(0)} \cdot F(0) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$U^{(1)} = \ell^{(0)} + r^{(0)} \cdot F(1) = 0 + 1 \cdot 0,4 = 0,4$$

$$r^{(1)} = U^{(1)} - \ell^{(1)} = 0,4 - 0 = 0,4$$

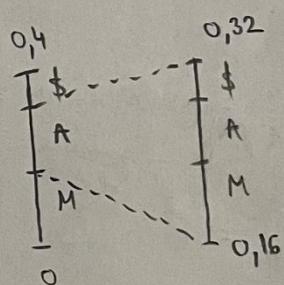


$$X(A) = 2 \quad F(1) = 0,1, \quad F(2) = 0,8$$

$$\ell^{(2)} = \ell^{(1)} + r^{(1)} \cdot F(1) = 0,16 + 0,16 \cdot 0,4 = 0,16$$

$$U^{(2)} = \ell^{(1)} + r^{(1)} \cdot F(2) = 0,16 + 0,16 \cdot 0,8 = 0,32$$

$$r^{(2)} = U^{(2)} - \ell^{(2)} = 0,32 - 0,16 = 0,16$$

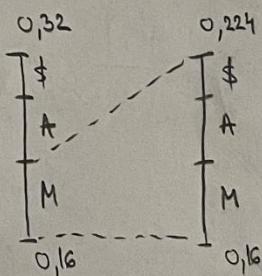


$$X(M) = 1 \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0,4$$

$$\ell^{(3)} = \ell^{(2)} + r^{(2)} \cdot F(0) = 0,16 + 0,16 \cdot 0 = 0,16$$

$$U^{(3)} = \ell^{(2)} + r^{(2)} \cdot F(1) = 0,16 + 0,16 \cdot 0,4 = 0,224$$

$$r^{(3)} = U^{(3)} - \ell^{(3)} = 0,224 - 0,16 = 0,064$$

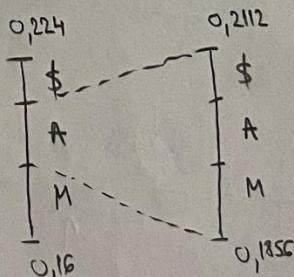


$$X(A) = 2 \quad F(1) = 0,4, \quad F(2) = 0,8$$

$$\ell^{(4)} = \ell^{(3)} + r^{(3)} \cdot F(1) = 0,16 + 0,064 \cdot 0,4 = 0,1856$$

$$U^{(4)} = \ell^{(3)} + r^{(3)} \cdot F(2) = 0,16 + 0,064 \cdot 0,8 = 0,2112$$

$$r^{(4)} = U^{(4)} - \ell^{(4)} = 0,2112 - 0,1856 = 0,0256$$

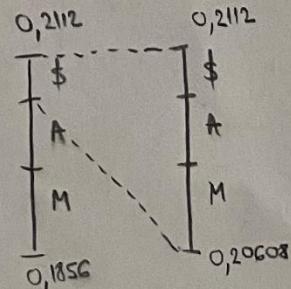


$$X(\$) = 3 \quad F(2) = 0,8, \quad F(3) = 1$$

$$\ell^{(5)} = \ell^{(4)} + r^{(4)} \cdot F(2) = 0,1856 + 0,0256 \cdot 0,8 = 0,20608$$

$$U^{(5)} = \ell^{(4)} + r^{(4)} \cdot F(3) = 0,1856 + 0,0256 \cdot 1 = 0,2112$$

$$r^{(5)} = U^{(5)} - \ell^{(5)} = 0,2112 - 0,20608 = 0,00512$$



$[0,20608; 0,2112]$

бруттоносін (1) = $(0,1)_2 = 0,5 > 0,2112 \Rightarrow 1.$ бити є 0
бруттоносін (0) = $(0,0)_2 = 0 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (01) = $(0,01)_2 = 0,25 > 0,2112 \Rightarrow 2.$ бити є 0

бруттоносін (00) = $(0,00)_2 = 0 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (001) = $(0,001)_2 = 0,125 < 0,2112 \Rightarrow 3.$ бити є 1
 $0,125 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (0011) = $(0,0011)_2 = 0,1875 < 0,2112 \Rightarrow 4.$ бити є 1
 $0,1875 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (00111) = $(0,00111)_2 = 0,21875 > 0,2112 \Rightarrow 5.$ бити є 0
бруттоносін (00110) = $(0,00110)_2 = 0,1875 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (001101) = $(0,001101)_2 = 0,203125 < 0,2112 \Rightarrow 6.$ бити є 1
 $0,203125 < 0,20608 \Rightarrow$ настілька

бруттоносін (0011011) = $(0,0011011)_2 = 0,2109375 < 0,2112 \Rightarrow 7.$ бити є 1
 $0,2109375 > 0,20608 \Rightarrow$ kpa

кодна рулем: 0011011

дліжній кодне рулем є 7 битів

Семиніс көз

1.

Као замыннаның көз ү телекомуникациялық систему салыну әрекети Семиніс көз (7,4).

- Кодубаптың сәкбеттүү 1101.
- Ү каналы ар десимал ірешке на мешіттөн біттүү. Определити бүтін синдрома.
- Израчыннатың եрөваптіншүй ірешке көзар ар не мөнде дешифроватын ако
кө եрөваптіншүй ірешке жеткілік біттің $P = 0,01$.

a) Семині (7,4)

$k=4 \rightarrow 4$ информациинаң біттің

$n=7$

$n-k=3 \rightarrow 3$ контроллер біттің

$$\boxed{2^{n-k} \geq n+1}$$

$$2^{7-4} \geq 7+1$$

$$2^3 \geq 8$$

$8 = 8$ - уңынъ залубалын

-көз ке сабралаш

1101 : $i_1=1$, $i_2=1$, $i_3=0$, $i_4=1$

3 контроллер біттің нау нозынудама: 2^0 , 2^1 , 2^2

$$X: \boxed{c_1 | c_2 | i_1 | c_3 | i_2 | i_3 | i_4 |}$$

Базичният
дигитарни запис

1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$c_1, c_2, i_1, i_2, i_3, i_4$

11011

$$c_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$c_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$c_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$X: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline c_1 & c_2 & i_1 & c_3 & i_2 & i_3 & i_4 \\ \hline \end{array}$$

d) $x: 1010101$
 $e: 0000010$

$y: 1010111$

- на табулем се формираат дигити синдрома

s_3	s_2	s_1	
0	0	1	y_1
0	1	0	y_2
0	1	1	y_3
1	0	0	y_4
1	0	1	y_5
1	1	0	y_6
1	1	1	y_7

$$s_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$s_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$S(s_3, s_2, s_1) = (110)_2 = 6_{10}$$

b) $p = 0,01$ - броят на грешки в единица време

$$P_e = \sum_{k=2}^7 \binom{7}{k} p^k (1-p)^{7-k} = \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 + \binom{7}{3} p^3 (1-p)^4 + \dots + \binom{7}{7} p^7$$

$p \ll 1$ - съвсем малко и 2 грешки застапяват само съвсем малка вероятност;
 като допълнително същата съвсем малка вероятност

$$1-p \approx 1$$

$$P_e \approx \frac{7!}{2!5!} p^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} p^2 = 21 p^2 = 21 \cdot 10^{-4} = 2,1 \cdot 10^{-3}$$

2. Код замінити ког 4 та використати кодом систему з користю Лемнітів ког (12,8).

a) Кодований схематично 10101101.

b) Як канал з ірешкою досягнула на гебітом биту. Опреділіти бити синдрому.

b) Визрахувати ймовірності Ірешкою кога з те може деструкція або не ймовірності Ірешкою фагтої битка $P = 0,001$.

a)

Лемніті (12,8)

$k=8 \rightarrow 8$ інформаційних битів

$n=12$

$n-k=4 \rightarrow 4$ контролючих битів

$$\boxed{2^{n-k} \geq n+1}$$

$$2^{12-8} \geq 12+1$$

$$2^4 \geq 13$$

$16 \geq 13$ - умови задовільно

10101101 : $i_1 = 1 \quad i_5 = 1$

$i_2 = 0 \quad i_6 = 1$

$i_3 = 1 \quad i_7 = 0$

$i_4 = 0 \quad i_8 = 1$

4 контролючих битів на позиціях: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

X:

c_1	c_2	i_1	c_3	i_2	i_3	i_4	c_4	i_5	i_6	i_7	i_8
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Номер	Бинарный запись		10101101
1	0001	$c_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 =$	
2	0010	i_1	$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$
3	0011	c_2	
4	0100	i_2	$c_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 =$
5	0101	i_3	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$
6	0110	i_4	
7	0111	c_3	$c_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 =$
8	1000	i_5	$= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$
9	1001	i_6	
10	1010	i_7	$c_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 =$
11	1011	i_8	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$
12	1100		

X: 101111010110111101

$c_1 \ c_2 \ i_1 \ c_3 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ c_4 \ i_5 \ i_6 \ i_7 \ i_8$

8)

X: 011001011101

e: 000000001000 \oplus

y: 011001010101

- находим и формируем биты сложных синдромов

$$s_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S(s_4, s_3, s_2, s_1) = (1001)_2$$

- используя табличную форму и биты избыточной компоненты

b) $p = 0,001$ - бројевата вероватноста на прешка једното битија

$$P_e = \sum_{k=2}^{12} \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$$

$$P_e = \binom{12}{2} p^2 (1-p)^{10} + \binom{12}{3} p^3 (1-p)^9 + \dots + \binom{12}{12} p^{12}$$

$p \ll 1 \Rightarrow$ сите симболи битија од 2 грешки затемарливо малку
вероватност, што еако сумирањето на всички възможни
погрешки

$$1-p \approx 1$$

$$P_e \approx \binom{12}{2} p^2 (1-p)^{10} = \frac{12!}{2! 10!} p^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} p^2 = 66 p^2 = 6,6 \cdot 10^{-5}$$

→ претпоставимо да се прешка грешка и то първата и то деветата битија

$$y = 0 \boxed{1} 0 0 1 0 1 \boxed{0} 1 0 1$$

$$s_1 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

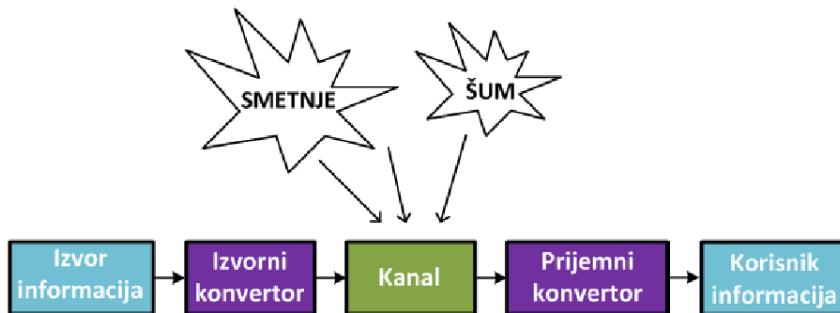
$$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S(s_4, s_3, s_2, s_1) = (1010)_2$$

1. Dati prikaz opšte blok šeme telekomunikacionog sistema i kratak opis uloge pojedinih blokova



Slika 1: Opšta blok šema telekomunikacionog sistema

Izvor informacija generiše poruke koje treba prenijeti korisniku.

Poruke mogu biti u različitim vidovima kao što su tekst, govor, muzika, slika, video, itd.

Izvor informacija uvijek bira jednu poruku iz skupa mogućih i zatim je šalje korisniku. Sama izvorna informacija je najčešće neelektrična veličina.

Da bismo informaciju prenijeli na daljinu posredstvom nekog telekomunikacionog sistema, neophodno je izvornu informaciju konvertovati u električni signal pogodan za prenos kroz određeni medijum.

Ovu konverziju obavlja izvorni konvertor na blok šemi.

Sam sistem prenosa mora biti takav da zadovolji uslove prenosa za bilo koju od mogućih poruka a ne za ovu ili onu unaprijed datu poruku.

Sistem prenosa ili kanal predstavlja sredinu kroz koju se prenosi od izvora informacije do korisnika informacije.

Prenosni sistem može da bude: fizički vod, prostor kroz koji se prostiru radio-talasi (eter), snop svjetlosti, niz pojačavača ili nešto drugo.

Fluktuacija parametara prenosnog sistema i pojava smetnji utiču na oblik signala na prijemnoj strani. Tako se pri prenosu zvuka čuje pucketanje, prenosu slike svjetlucanje itd. Svi ti efekti u opštem slučaju kažemo da su prouzrokovani šumom.

Izvor šuma može biti aditivni (šum se sabira sa korisnim signalom) i multiplikativni (šum se množi sa korisnim signalom).

2. Signali kao fizički nosioci informacija

Pojam signala se može definisati na više načina. Dvije razumljive definicije su:

1. Signal je električni ekvivalent poruke
2. Signal je skup podataka o nekoj pojavi ili događaju

Primjer: Promjena napona ili struje na izlazu mikrofona, EKG medicinski signal, podaci kojim se očitava vodostaj Vrbasa, slika na ekranu monitora ...

U telekomunikacijama signal se posmatra kao zavisna fizička veličina koja se mijenja u zavisnosti od druge fizičke veličine (nezavisna promjenljiva). Ako je broj nezavisnih promjenljivih veći od 1 riječ je o višedimenzionalnom signalu.

Zavisna promjenljiva: napon, struja, električni potencijal, skup podataka, itd.

Nezavisna promjenljiva: vrijeme, neka od prostornih koordinata, itd

3. Energija i snaga signala

Da bismo izmjerili i ocijenili signal potrebno je znati i vrijednost i trajanje signala
Jedno rješenje je preko "površine" signala

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{Nije dobro rješenje jer signal može da ima i pozitivne i negativne vrijednosti}$$

Možda posmatrati "površinu" od $|x(t)|$ ili još bolje $x^2(t)$

1. Nenegativne su obje
2. Ima fizički smisao (kvadratna) – energija signala
3. Kvadratna funkcija diferencijabilna

$$\text{Energija signala } E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Da bismo mogli 2 signala energije porediti mora biti $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < +\infty$

Odnosno signal mora da teži nuli kako $t \rightarrow \infty$. Međutim, ovaj uslov ne zadovoljava široka klasa signala pod nazivom periodični signali.

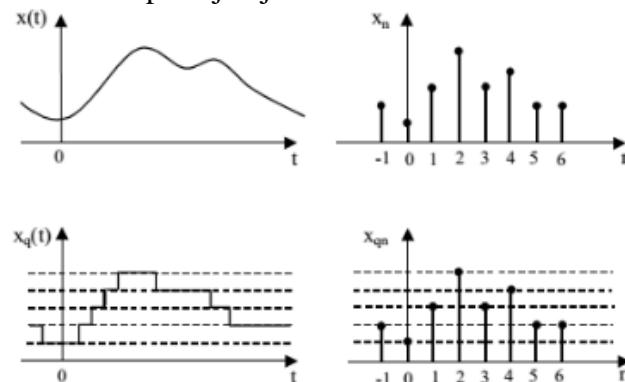
Za njih se definiše snaga signala kao:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad \text{T osnovni period signala – najmanji vremenski interval poslije kojeg se oblik i vrijednosti signala ponavljaju}$$

4. Podjela signala

U zavisnosti od osobina zavisne i nezavisne promjenljive:

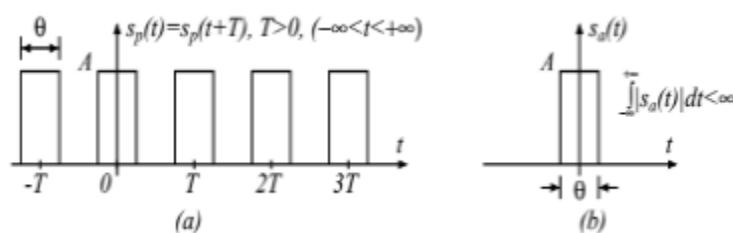
		Nezavisna promenljiva	
		Kontinualna	Diskretna
Zavisna promenljiva	Kontinualna	analogni $x(t)$	diskretni $x_n, x(n)$
	Diskretna	Kvantizovani $x_q(t)$	Digitalni x_{qn}



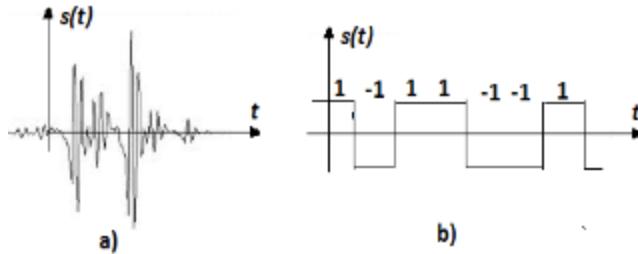
U zavisnosti od stepena neodređenosti:

-deterministički; -slučajni

Deterministički signali su potpuno definisani u beskonačnom vremenskom intervalu $-\infty < t < \infty$ i dijele se na periodične i neperiodične. Zadaju u vidu neke definisane vremenske funkcije, na osnovu koje se mogu izračunati vrijednosti signala u bilo kom trenutku vremena.



Slučajne ili stohastičke signale ne možemo opisati definisanom vremenskom funkcijom a time ni precizno odrediti vrijednost signala unaprijed. Signali koji se prenose telekomunikacionim sistemom su slučajni signali, jer oni predstavljaju stvarne nosioce informacija



Slika: slučajni signali a) analogni, b) digitalni

5. Veličine i jedinice prenosa. Apsolutni i relativni nivoi. Zašto koristimo logaritamsku skalu?

Raspon snage signala koju čovjek čuje je od približno 10-12 do 1 W/m² (12 redova veličine) Iz tog razloga je pogodnije koristiti logaritamsku skalu. Kod absolutnih nivoa imamo referentnu vrijednost.

$$\text{Apsolutni nivo napona: } n_u = 20 \log \frac{U}{U_0} [\text{dB}_V]; U_0 = 0,775 \text{ V}$$

$$\text{Apsolutni nivo struje: } n_i = 20 \log \frac{I}{I_0}; I_0 = 1,29 \text{ mA}$$

$$\text{Apsolutni nivo snage (najčešće u telekomunikacijama): } n_p = 10 \log \frac{P}{P_0} [\text{dB}_m]; P_0 = 1 \text{ mW}$$

$$\text{Nekada se koristio i neper (N)} \\ n_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} [N]$$

Veza između decibela i nepera 1 N = 8,686 dB.

Razlog što koristimo relativne nivoe definisane logaritamskom skalom je i što se naša čula ponašaju logaritamski – tzv. Weber – Fechnerov zakon. Osjećaj proporcionalan logaritmu nadražaja.

Takođe, množenje i dijeljenje (kod analize sistema česte operacije) se primjenom log skale svode na sabiranje i oduzimanje što pojednostavljuje analizu.

6. Fourierov red u trigonometrijskom obliku. Izvođenje

Za signal s(t) kažemo da je periodičan ako je zadovoljen uslov:

$$s(t) = s(t + T), \quad T > 0, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.7)$$

gdje $T = 2\pi/\omega_0$ predstavlja period signala, a $f_0 = \frac{1}{T}$ osnovnu frekvenciju signala. Ako s(t) zadovoljava uslov apsolutne integrabilnosti (Dirichlet-ov uslov):

$$\int_{-\bar{T}/2}^{T/2} |s(t)| dt < \infty \quad (3.8)$$

tada se funkcija s(t) može predstaviti u obliku Fourier-ovog reda

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (3.9)$$

Iraz (3.9) predstavlja trigonometrijski oblik Fourierovog reda signala $s(t)$. Fourier-ovi koeficijenti a_n i b_n definisani su na sljedeći način:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_0 t \, dt ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_0 t \, dt ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Množenjem izraza 3.9 sa $\cos m\omega_0 t$ (za $m \neq o$) i integracijom na osnovnom periodu, dobijamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos m\omega_0 t \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt + \right. \\ &\quad \left. b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Prvi integral je nula za $m \neq o$ kao i treći integral. Drugi integral je različit od nule za $n=m$ i tada iznosi $T/2$. Odatle se dobija izraz 3.10.

Analogno (množenjem sa $\sin m\omega_0 t$) se dobiju izrazi za koeficijente b_n .

7. Furijeov red u fizičkom obliku.

Prvi je tzv. fizički oblik

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3.13)$$

Pri tom su amplitude c_n i faze φ_n date izrazima 3.14 i 3.15

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.14)$$

$$\varphi_n = \arctg \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3.15)$$

Ovaj oblik se u telekomunikacijama i obradi signala rijetko koristi (u fizici se više koristi).

8. Furijeov red u kompleksnom obliku. Veza sa Furijeovim redom u trigonometrijskom obliku.

- Treći oblik Fourier-ovog je kompleksni (eksponencijalni) oblik. Predstavljajući sinus i kosinus pomoću Ojlerovog obrasca

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (3.18)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (3.19)$$

U Fourier-ov red 3.9:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}) \quad (3.19)$$

- Ako uvedemo i negativne vrijednosti indeksa n , tada na osnovu izraza 3.10 i 3.11 vrijedi $a_{-n} = a_n$ i $b_{-n} = -b_n$ (cos parna a sin neparna funkcija)

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}) + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} ((a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}) \quad (3.21)$$

Na taj način dolazimo do Fourier-ovog reda u kompleksnom obliku

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.22)$$

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.24)$$

- Veličina F_n predstavlja Fourier-ov red periodične funkcije $s(t)$ odnosno, analizu vremenske funkcije $s(t)$ u vremenskom domenu sa ciljem da se definiše u domenu učestanosti.
- Izrazi (3.22) i (3.24) predstavljaju Fourier-ov transformacioni par za periodične signale. F_n je kompleksna veličina pa se može izraziti u sljedećem obliku:

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} \quad (3.25)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.26)$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3.27)$$

Na taj način se $s(t)$ može konačno napisati u sljedećem obliku

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} \quad (3.28)$$

Koeficijent Fourier-ovog reda F_n naziva se još i kompleksnim spektrom funkcije $s(t)$, pri čemu je:

$|F_n|$ - amplitudski spektar funkcije $s(t)$

φ_n - fazni spektar funkcije $s(t)$

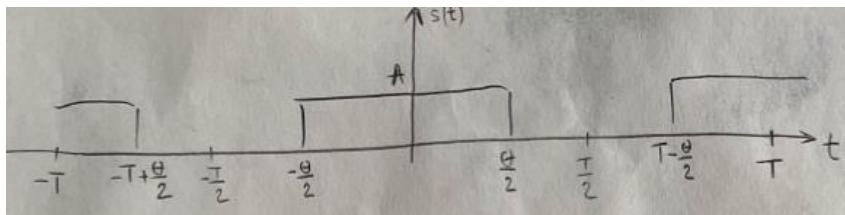
Treba primjetiti da je amplitudski spektar $|F_n|$ uvijek parna funkcija učestanosti a fazni spektar φ_n neparna funkcija učestanosti.

9. Parsevalova teoriema za periodične signale

Kvadrat efektivne vrijednosti (Parsevalova teorema za periodične sig.)

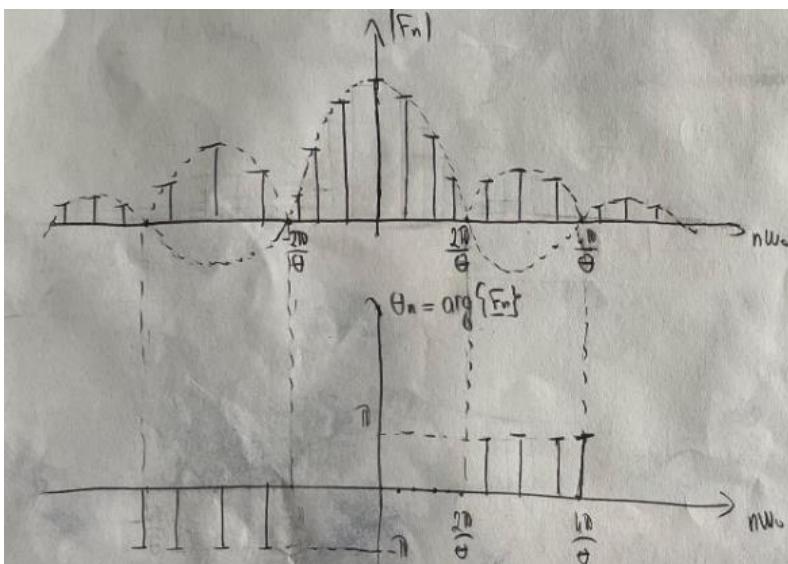
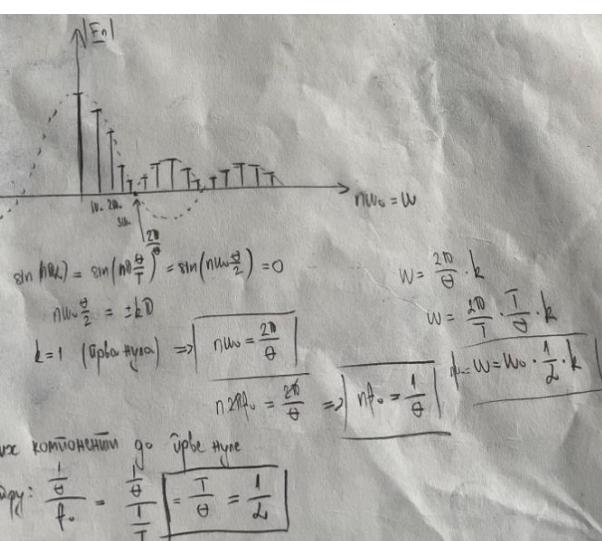
$$\begin{aligned}
 [s(t)]_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

10. Furijeov red pravougaonog signala



$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\Theta}{2} \\ 0, & \frac{\Theta}{2} < |t| < T - \frac{\Theta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\Theta}{2}}^{\frac{\Theta}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \cdot \frac{-1}{jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\Theta}{2}}^{\frac{\Theta}{2}} = \\
 &= \frac{-A}{jn\omega_0 T} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{\Theta}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\Theta}{2}} \right) = \frac{A}{jn \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} \left(e^{jn\omega_0 \frac{\Theta}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\Theta}{2}} \right) = \boxed{\frac{e^{j\frac{\Theta}{2}} - e^{-j\frac{\Theta}{2}}}{2j} = \sin(\frac{\Theta}{2})} \\
 &= \frac{A}{n\pi} \cdot \sin(n\omega_0 \frac{\Theta}{2}) = \frac{A}{n\pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Theta}{2}\right) = \frac{A}{n\pi} \cdot \sin(n\omega_0 \lambda) \Big| \cdot \frac{\lambda}{\omega_0} = \\
 &= A\lambda \cdot \frac{\sin(n\omega_0 \lambda)}{n\pi\omega_0} \quad \boxed{= A\lambda \cdot \operatorname{sinc}(n\lambda)} \quad \boxed{\operatorname{sinc}(0) = 1}
 \end{aligned}$$



11. Korelacija periodičnih signala

Korelacija dva signala je mjera njihove sličnosti u funkciji njihovog međusobnog pomjeraja τ .

Ako dva periodična signala $s_1(t)$ i $s_2(t)$ imaju istu periodu T onda se međukorelacija definiše:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t)s_2(t + \tau) dt \quad (3.32)$$

$$R_{21}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t)s_1(t + \tau) dt \quad (3.33)$$

Dakle, u postupku korelacije obavljamo tri suksesivne operacije:

-pomjeranje jednog od dva signala duž vremenske ose za τ sekundi

-množenje pomjerenog signala sa drugim signalom iste periode i

-usrednjavanje (integraciju) dobijenog proizvoda u okviru jedne periode

Ako naznačene operacije ponavljamo za svaku vrijednost τ u intervalu $(-\infty, \infty)$ dobija se međukoreaciona funkcija.

32), izraz za postaje

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} s_2(u)s_1(u - \tau) du = R_{21}(-\tau)$$

Dakle, unakrsna koreaciona funkcija $R_{12}(\tau)$ i spektar unakrsne snage $S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$, obrazuju Fourier-ov transformacioni par koji izražava tzv. **"koreacionu teoremu"** za periodične signale.

12. Autokorelacija

Ako pretpostavimo da je $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, dobijamo specijalan slučaj korelacije koji nazivamo autokorelacija, u ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 e^{jn\omega_0\tau} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Vrijednost autokorelacijske funkcije za $\tau = 0$ iznosi:

$$R_{11}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (3.40)$$

Prethodni izraz predstavlja analitičku formulaciju **Parsevalove teoreme za periodične signale**.

Dakle, autokorelaciona funkcija i spektar snage funkcije čine Fourierov transformacioni par, što čini "**autokorelacionu teoremu**" za periodične signale.

Slično kao kod kroskorelacija, uvodeći smjenu $t + \tau = u$ u izraz 3.39, izraz za $R_{11}(\tau)$ postaje

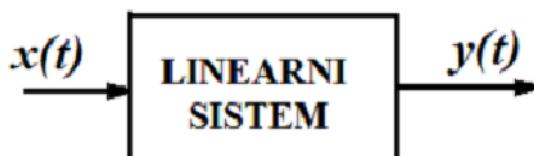
$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} s(u-\tau)s(u) du = R_{11}(-\tau) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Znači, autokorelaciona funkcija je parna funkcija.

13. Impulsni odziv sistema. Konvolucioni integral.

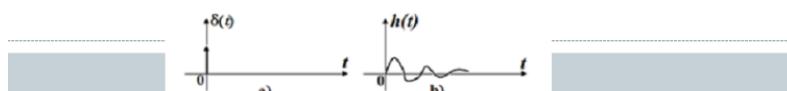
Posmatrajmo stvarni (realni) linearni prenosni sistem. Kao što znamo za linearne sisteme važi zakon superpozicije.

$$\begin{array}{c} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \\ y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t). \end{cases}$$

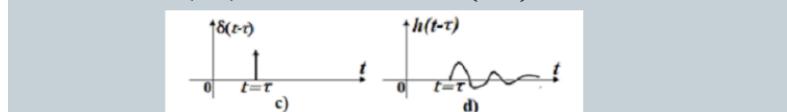


Za fizički ostvarive (kauzalne) sisteme važi da nema odziva prije dolaska pobude.

Ako ovakav sistem pobudimo delta funkcijom $x(t) = \delta(t)$ na izlazu sistema dobijamo impulsni odziv $h(t)$ (b)



Uz pretpostavku da je sistem linearan sa konstantnim parametrima onda pobudi $\delta(t-\tau)$ odgovarati odziv $h(t-\tau)$ (c i d, redom)



Pod logičnom pretpostavkom (za linearne sisteme) da je odziv sistema impulsu elementarne površine proporcionalan njegovoj površini, vrijedi:

$$dy(t) = h(t-\tau)s(\tau)d\tau$$

što predstavlja odziv sistema na označeni elementarni impuls

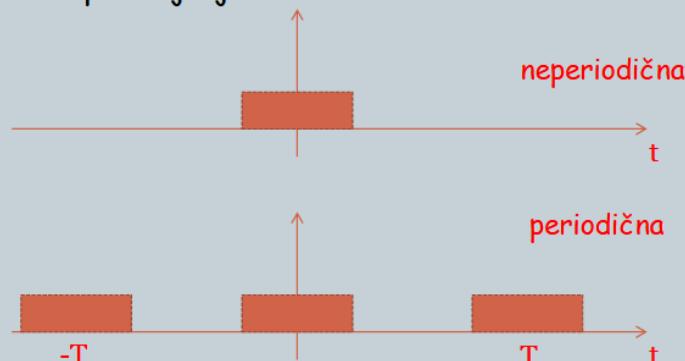
Pošto nas zanima odziv sistema $y(t)$ na pobudu $s(t)$ u nekom trenutku t , izvršićemo integraciju elementarnih odziva $dy(t)$

$$y(t) = \int_{-t_0}^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

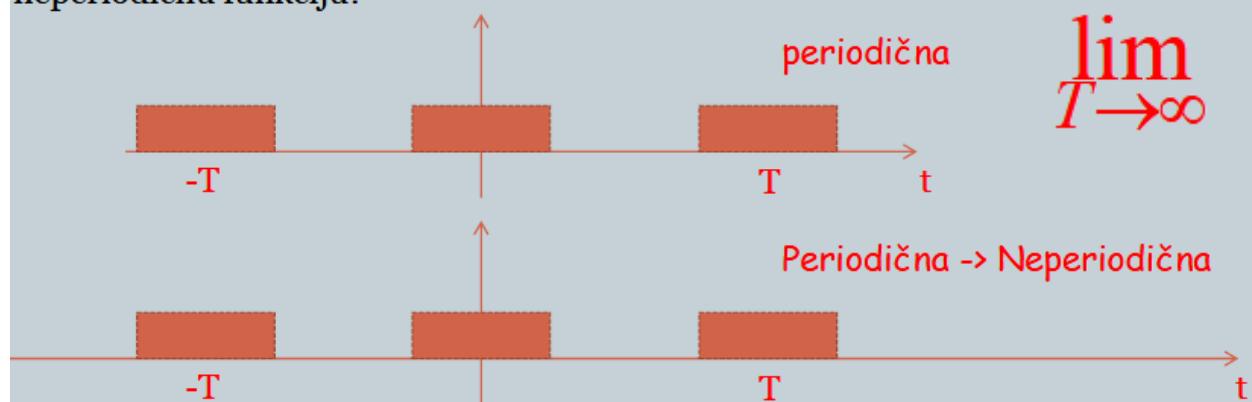
Integracija u izведенom izrazu se obavlja u granicama od $-t_0$ do t , kako bi se dobio kumulativni efekat svih elementarnih impulsa sa slike, koji su postojali i pobudili sistem prije trenutka t . Zbog toga je ovaj integral i dobio naziv *superpozicioni integral*.

14. Spektralna analiza aperiodičnih signala. Furijeova transformacija.

Od neperiodične funkcije možemo dobiti periodičnu funkciju periodičnim ponavljanjem



Kako se može postići obrnut slučaj: od periodične funkcije dobiti neperiodičnu funkciju?



- Pretpostavimo da imamo periodičan signal $s(t)$, čija je perioda $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Uvrštavajući u izraz za Fourier-ov red dobijamo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\mu) e^{-jn\omega_0 \mu} d\mu$$

Zamjenom T sa $\frac{2\pi}{\omega_0}$ dobijamo:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} s(\mu) e^{-jn\omega_0 \mu} d\mu$$

Sada pustimo da period neograničeno raste. $T \rightarrow \infty$

Tada ω_0 postaje infinitezimalno

malo, $n\omega_0 \rightarrow \omega$, a sumacija (red) prelazi u integral $\int_{-\infty}^{\infty}$

Nakon toga $s(t)$ postaje aperiodičan signal

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu$$

Prethodni izraz se može napisati u formi Fourier-ovog transformacionog para

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{-inverzna Fourierova transformacija}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{-Fourierova transformacija}$$

U opštem slučaju, $F(\omega)$ je kompleksna funkcija koja predstavlja kontinualni kompleksni spektar aperiodičnog signala, pa isti možemo napisati u obliku: $F(\omega) = |F(\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$

Pri tom je $|F(\omega)|$ spektralna gustina amplituda, a $\theta(\omega)$ spektralna gustina faza

15. Parsevalova teorema za aperiodične signale

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\ E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df \end{aligned}$$

Izvedeni izraz predstavlja Parsevalovu teoremu za aperiodične signale.

Koju dimenziju odnosno jedinicu ima $|F(f)|^2$?

Jedinica je Ws/Hz odnosno J/Hz (džul po hercu), stoga $|F(f)|^2$ po prirodi veličine predstavlja spektralnu gustinu energije.

16. Osobine Furijeove transformacije

1° Linearnost

Linearnoj kombinaciji signala u vremenskom domenu odgovara linearna kombinacija spektara u frekvencijskom domenu, što pišemo na sledeći način:

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

2° Pomjeraj u vremenskom domenu

$$s(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

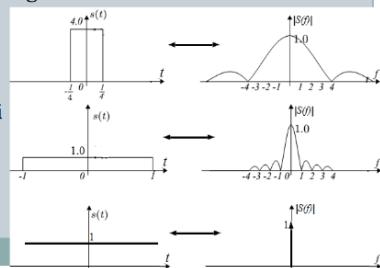
Dakle, ako signal $s(t)$ kasni u vremenu za t_0 sekundi $s(t-t_0)$, spektar novog signala biće modifikovan u odnosu na spektar starog signala $s(t)$ za linearni fazni pomjeraj sa nagibom $-j\omega t_0$. Ovo fizički znači da svaka spektralna komponenta kasni za t_0 sekundi, pri čemu se amplitudski spektar ne mijenja.

3° Skaliranje

$$s(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R},$$

To znači da kompresija signala u vremenu ($a>1$) povlači ekspanziju spektra, a ekspanzija signala u vremenu ($a<1$) povlači kompresiju spektra, ili jednostavno, proširivanje ili sužavanje u jednom domenu povlači sužavanje ili proširivanje u drugom domenu.

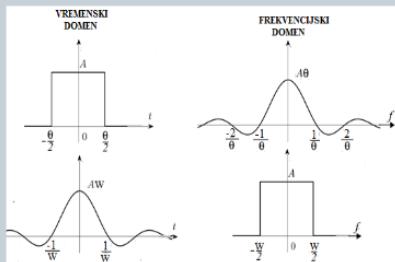
Primjer: Na slici je prikazano skaliranje (proširivanje) pravougaonog impulsa u vremenskom domenu i njima odgovarajući spektri.



4° Simetrija ili dualnost

Ako egzistira transformacioni par $s(t) \leftrightarrow F(\omega)$, tada važi:

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi s(-\omega) \text{ ili } F(t) \leftrightarrow s(-f),$$



6° Teorema o konvoluciji

- Već smo dokazali da konvoluciju signala u vremenskom domenu odgovara množenje u frekvencijskom domenu.

$$s_1(t) * s_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

- Da bismo našli odziv sistema na pobudu u vremenskom domenu, neophodno je rješavati konvolucioni integral između ulaznog signala i impulsnog odziva sistema $h(t)$.
- Rješavanje ovog integrala je u većini slučajeva veoma složeno, a kada je ulazni signal $s(t)$ slučajni signal koji se ne može matematički izraziti u funkciji vremena, računanje konvolucije u vremenskom domenu je neizvodljivo.

8° Teorema o integraciji

- Integracija u vremenskom domenu odgovara dijeljenju u frekvencijskom domenu sa $j\omega$.

$$\int_{-\infty}^t s(t)dt \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(t)$$

17. Teorema odmjeravanja. Formulacija i dokaz.

Nadalje ćemo za postupak diskretizacije u vremenskom domenu koristiti termin "odmjeravanje"

U literaturi su prisutni i drugi termini: "odabiranje", "uzorkovanje" itd.

Teorema o odmjeravanju u vremenskom domenu glasi: **"Ako se kontinualni signal trenutno odmjerava u ekvidistantnim vremenskim intervalima brzinom koja je jednaka ili veća od dvostruke najviše frekvencije u spektru datog kontinualnog signala, onda odmjerici sadrže cijelokupnu informaciju o odmjeravanom kontinualnom signalu".**

Teorema nosi naziv Teorema Shannon-Koteljnikov

5° Translacija spektra - modulaciona teorema

Ako signal u vremenu pomnožimo sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom, imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega_0 t} e^{j\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

odakle slijedi

$$s(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Dakle, množenjem signala sa kompleksnom funkcijom $e^{j\omega_0 t}$ dovodi do translacije spektra signala duž f -ose za $+$ (kompleksna modulacija). Pošto funkcija $e^{j\omega_0 t}$ nije realna funkcija vremena, ne može da predstavlja signal poruke.

7° Diferenciranje u vremenskom domenu

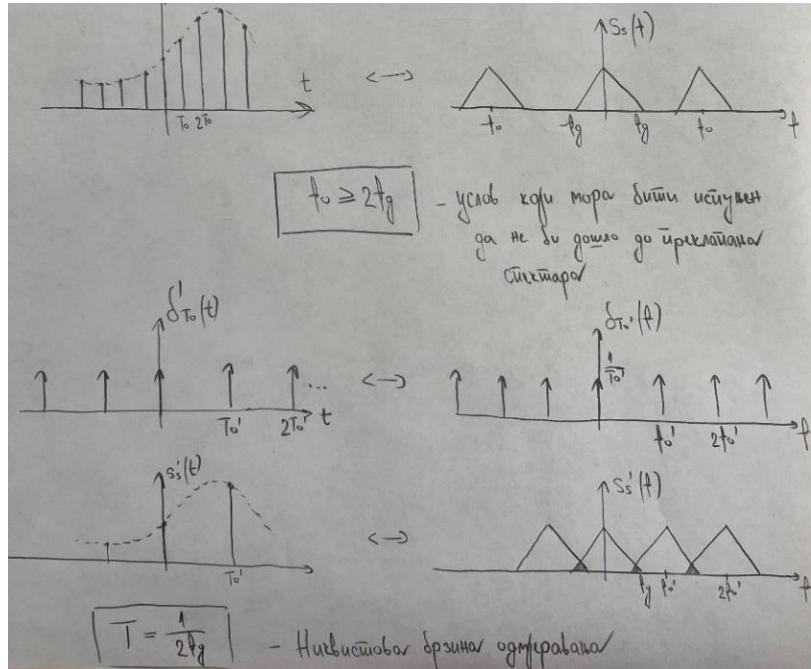
Ako signal $s(t)$ ima Fourierovu transformaciju $F(\omega)$, tada važi:

$$\frac{ds(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Slično, za n -ti izvod funkcije $s(t)$

$$\frac{d^n s(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

Teorema odmjeravanja. Formulacija i dokaz.



18. Prirodno odmjeravanje.

Postupci odmjeravanja

14

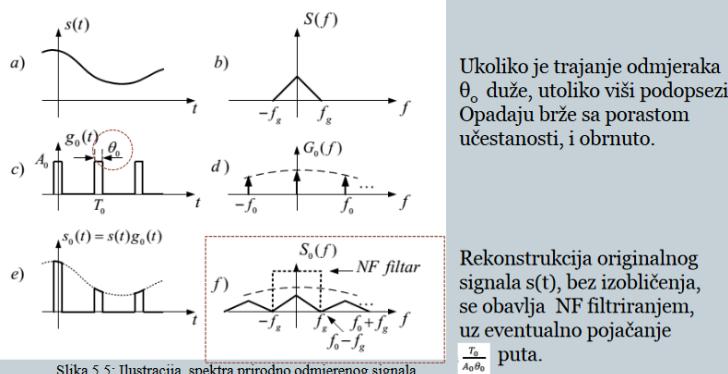
Odmjeravanjem kontinualnog signala mjerimo njegove trenutne vrijednosti u tačno definisanim vremenskim intervalima. Ako je "interval odmjeravanja" (T_o) konstantan, riječ je o uniformnom odmjeravanju, koje se danas uglavnom koristi, mada se može očekivati i sve veća primjena neuniformnog odmjeravanja. U prethodnoj analizi, prečutno smo pretpostavili da je trajanje jednog odmjeraka infinitezimalno. Međutim, u procesu praktičnog odmjeravanja, trajanje odmjeraka (θ_o) je konačno.

Postupak odmjeravanja je zapravo množenje u vremenskom domenu signala $s(t)$ i funkcije odmjeravanja $g_o(t)$ (ili prekidačke funkcije). Funkcija odmjeravanja $g_o(t)$ je povorka pravougaonih impulsa čija je učestanost ponavljanja jednaka učestanosti odmjeravanja $f_o = 1/T_o = 2f_g$ kontinualnog signala $s(t)$. Sada, odmjereni kontinualni signal možemo izraziti kao:

$$s_o(t) = s(t)g_o(t) \quad (2.15)$$

Prirodno odmjeravanje

16



Prirodno odmjeravanje

15

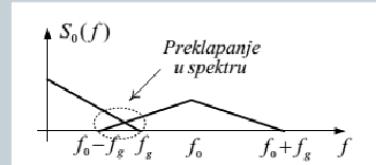
Periodičnu funkciju odmjeravanja $g_o(t)$ možemo predstaviti Fourier-ovim redom

$$g_o(t) = \frac{A_0\theta_0}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\theta_0/T_o)}{n\pi(\theta_0/T_o)} \cos n2\pi f_0 t \quad (2.16)$$

Dakle, funkciju odmjeravanja možemo predstaviti kao sumu kosinusnih funkcija čije su frekvencije $n f_o$ a amplitude opadaju po zakonu $\sin x/x$, što je prikazano na slici 5.5d. Da bismo došli do spektra odmjerenoog signala možemo iskoristiti pravilo modulacije ili teoremu konvolucije.

Prethodna analiza ukazuje da iz odmjerenoog signala $s_o(t)$ gdje je $f_o \geq 2f_g$ možemo izvršiti potpuno korektnu rekonstrukciju kontinualnog signala $s(t)$. Dakle, može se zaključiti da je postupak odmjeravanja u vremenskom domenu, **reverzibilan proces**.

Ukoliko je učestanost odmjeravanja $f_o < 2f_g$, onda dolazi do preklapanja najviših komponenata u spektru kontinualnog signala i komponenata najnižeg donjeg bočnog opsega (slika 5.7).



Slika 5.7: Ilustracija odmjeravanja za $f_o < 2f_g$

U ovom slučaju, kroz idealni NF filter granične frekvencije, pored originalnog spektra proći će i dio spektralnih komponenti donjeg bočnog opsega nastalog oko frekvencije odmjeravanja, što uzrokuje nastanak izobličenja u rekonstruisanom signalu.

19. Teorijsko odmjeravanje.

Teorijsko odmjeravanje

19

Teorijsko odmjeravanje podrazumjeva infinitezimalno malo trajanje impulsa θ_0

U graničnom slučaju $\theta_0 \rightarrow 0$, $A_0 \rightarrow \infty$, $A_0\theta_0 \rightarrow 1$, funkcija odmjeravanja $g_0(t)$ dobija oblik $g_0^T(t)$

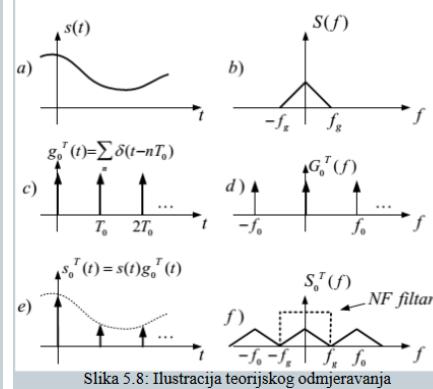
$$g_0(t) = \frac{A_0\theta_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi \left(\theta_0/T_0\right)}{n\pi \left(\theta_0/T_0\right)} \cos n2\pi f_0 t \rightarrow g_0^T(t)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n2\pi f_0 t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad (5.17)$$

U ovom slučaju teorijski odmjereni signal je

$$s_0^T(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) \delta(t - nT_0) \quad (5.18)$$

• Sličnom analizom kao kod prirodnog odmjeravanja dolazimo do vremenskih dijagrama i spektra



• Nema opadanja amplitudskog spektra U višim frekvencijskim podopsezima

• Originalni signal se opet može rekonstruisati idealnim NF filtrom granične učestanosti f_g

• Da bi obnovili amplitude originalnog signala, potrebno je izlazni signal NF filtra pomnožiti konstantom odnosno pojačati $f_0 = 1/T_0$ puta.

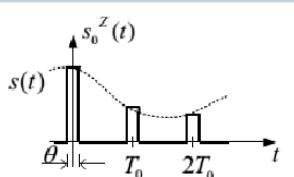
Slika 5.8: Ilustracija teorijskog odmjeravanja

20. Odmjeravanje sa zaravnjenim odmjercima.

Odmjeravanje sa zaravnjenim odmjercima

21

Treći i najčešći oblik odmjeravanja je odmjeravanje sa zaravnjenim odmjercima (eng. *Sample and Hold*) koji su ilustrovani na Slici 5.9



Slika 5.9: Grafička ilustracija zaravnjenih odmjeraka u vremenskom domenu

Signal se može predstaviti u obliku:

$$s_0^Z(t) = \int_{-\infty}^t [s_0^T(t + \frac{\theta}{2}) - s_0^T(t - \frac{\theta}{2})] dt \quad (5.19)$$

Prema teoremi o integraciji imamo

$$S_0^Z(f) = \frac{1}{j2\pi f} S_0^T(f) e^{j2\pi f \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{j2\pi f} S_0^T(f) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{2}} = \theta \frac{\sin(\pi f \theta)}{(\pi f \theta)} S_0^T(f).$$

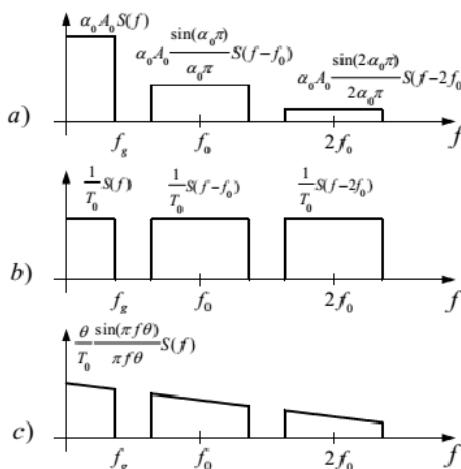
Koristeći izraz za spektor teorijski odmjerene signala imamo:

$$S_0^Z(f) = \frac{\theta}{T_0} \frac{\sin(\pi f \theta)}{(\pi f \theta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_0),$$

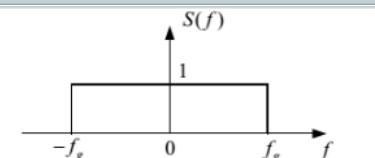
Prethodni izraz možemo napisati u razvijenom obliku:

$$S_0^Z(f) = \frac{\theta \sin(\pi f \theta)}{T_0 (\pi f \theta)} S(f) + \frac{\theta \sin(\pi f \theta)}{T_0 (\pi f \theta)} \sum_{n=0}^{\infty} S(f - nf_0).$$

Iz prethodnog izraza se može uočiti da je signal u osnovnom opsegu (slika 5.11c), koji je za nas od interesa u postupku rekonstrukcije kontinualnog signala "doživio" linearna amplitudska izobličenja koja je u postupku rekonstrukcije kontinualnog signala neophodno kompenzovati.



Slika 5.11: Amplitudski spektar (a) prirodno odmjerene signala; (b) teorijski odmjerene signala; (c) niza zaravnjenih odmjeraka



Slika 5.10: Spektar jednog hipotetskog signala

Na kraju, treba napomenuti da je za odnos $\theta/T_0 < 0.1$ amplitudno izobličenje manje od 0,5%. U ovom slučaju, u praktičnim primjenama kompenzovanje najčešće nije neophodno.

21. Kvantovanje signala.

Diskretizacija signala u amplitudskom domenu - kvantovanje signala

24

U svim realnim telekomunikacionim sistemima postoje smetnje. Prisustvo smetnji može da maskira signale koji nose informaciju. S druge strane, korisnik poruke raspolaže sa konačnom osjetljivošću prijema, odnosno, sa konačnom rezolucijom.

Na primjer, čovječe uho ne može da razlikuje po jačini signale iste frekvencije ako je razlika nivoa tih signala manja od 0,1 dB (na određenim frekvencijama i do 1 dB)

Zbog navedenog, signale koji se vrlo malo razlikuju među sobom, korisnik subjektivno doživljava skoro identično

Da li je neophodno vršiti prenos svih amplitudskih stanja informacionog signala, ili je dovoljno prenositi konačan skup tih stanja?



Po definiciji, kvantovanje amplitude je proces transformacije amplitude uzorka informacionog signala $s(nT_o)$ u trenutku $t=nT_o$ u diskretnu amplitudu $s_q(nT_o)$ uzetih iz konačnog skupa mogućih amplituda.

Jasno, ako je konačan skup amplituda izabran tako da je razmak između dva susjedna amplitudska nivoa dovoljno mali, tada aproksimirani (ili kvantovani) signal $s_q(nT_o)$ može praktično da se ne razlikuje od kontinualnog odmjerjenog signala $s(nT_o)$.

Ipak, za razliku od procesa **odmjeravanja** koji je **reverzibilan**, uвijek postoji gubitak informacija vezanih za proces kvantovanja.

Dakle, **kvantovanje nije reverzibilan** proces, jer nije moguće potpuno rekonstruisati odmjereni signal iz kvantovanog signala.

Konačna rezolucija svih krajnijih korisnika informacija

Ako je usvojena vrijednost amplitudskog kvanta manja od percepcije korisnika informacija, onda je kvantovani signal **u informacionom smislu** jednak prirodnom, kontinualnom signalu.

Postupak svođenja neprebrojivog skupa amplitudskih stanja na konačan skup nazivamo diskretizacija signala u amplitudskom domenu ili **kvantovanje signala**.

U svim ranije opisanim postupcima odmjeravanja, odmjereni signali su diskretni u vremenu, ali i dalje kontinualni po amplitudi. Da bismo dobili potpuno digitalno predstavljanje kontinualnog signala, potrebno je obaviti još dvije operacije: kvantovanje amplitude odmjerjenog signala i kodovanje kvantovanih vrijednosti, kao što je prikazano na Slici 5.12



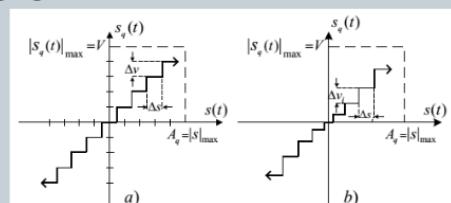
Slika 5.12: Proces digitalizacije kontinualnih signala.

Nadalje, u procesu digitalizacije redoslijed operacija odmjeravanja i kvantovanja je irelevantan

Zavisno od koraka kvantizacije razlikujemo uniformno i neuniformno kvantovanje.

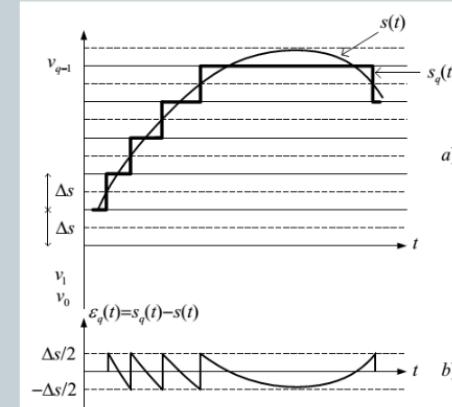
Sistem sa ravnopravnjom kvantizacijom koristi uniformni kvantizer kod kojeg je vrijednost amplitudskih kvanta kvantizera ista.

Interval kvantovanja Δs ; amplitudski opseg $2A_q$; amplitudski opseg kvantovanog signala $2V$



Slika 5.13: Prenosna karakteristika simetričnog kvantizatora: a) uniformnog i b) neuniformnog.

Na slici 5.14 ilustrovani je postupak uniformnog kvantovanja jednog kontinualnog signala.



Greška kvantovanja (šum kvantovanja)

$$\varepsilon_q(t) = s_q(t) - s(t)$$

$$|\varepsilon_q|_{\max} < \frac{1}{2}\Delta s$$

Slika 5.14 – a) Ilustracija uniformnog kvantovanja kontinualnog signala
b) prikaz odgovarajuće greške kvantovanja u vremenskom domenu.

22. Srednja snaga greške kvantovanja

Srednja snaga greške kvantovanja

29

Da bi u pogledu kvaliteta prenesenog kontinualnog signala (govora ili slike), digitalni prenos bio jednak ili bolji od analognog, mora se nivo šuma kvantovanja učiniti manjim od praga percepcije u centralnom nervnom sistemu korisnika informacije.

S tim u vezi potrebno je analizirati kako veličine i raspodjele amplitudskih kvanta utiču na srednju snagu šuma kvantovanja, i spektar šuma kvantovanja.

Pretpostavimo da je amplitudski opseg kvantizera uniformno podijeljen na kvante konstantne veličine, i da imamo relativno velik broj kvantnih nivoa (q), odnosno, relativno male amplitudske kvante $\Delta s \ll |s|_{\max}$, što znači da se radi o "finom kvantovanju".

U ovom slučaju signal greške (slika 5.14b) u većem dijelu posmatranog intervala liči na niz pravih linija sa promjenljivim nagibom α u opsegu $(-\Delta s/2, \Delta s/2)$

$$\widehat{e_Q}(t) = t \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad t_1 = -\frac{\Delta s}{2 \operatorname{tg} \alpha} < t < \frac{\Delta s}{2 \operatorname{tg} \alpha} = t_2 \quad (5.25)$$

Srednja snaga greške kvantovanja iznosi

$$\overline{e_Q^2(t)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\Delta s} \int_{t_1}^{t_2} (t \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 dt = \frac{\Delta s^2}{12} \quad (5.26)$$

23. Neuniformno kvantovanje.

Neuniformno kvantovanje

32

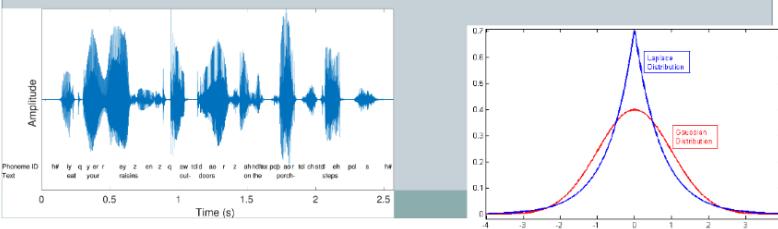
Izbor kvantizera zavisi od funkcije raspodjele trenutnih amplituda informacionog signala.

Ako bi trenutne vrijednosti pobudnog signala bile podjednako vjerovatne, tada bi uniformni kvantizer predstavlja optimalno rješenje

Međutim, većina realnih signala koji nose informaciju ima neuniformnu raspodjelu trenutnih amplituda, pri čemu se male vrijednosti amplitude češće pojavljuju

Ako bismo ovakav signal doveli na ulaz uniformnog kvantizera, male, češće amplitude bi bile "grubo" kvantovane što dovodi do povećanja snage šuma kvantovanja.

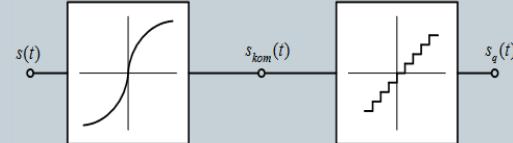
- Ipak, u statističkom smislu nije značajna greška, jer se rijetko dešava pa je njen doprinos srednjoj snazi šuma kvantovanja mali.
- Nasuprot tome, smanjenje šuma kvantovanja kod malih trenutnih vrijednosti signala je statistički značajno jer se male amplitude dešavaju često i daju glavni doprinos ukupnoj snazi šuma kvantovanja. (primjer govorni signal)



Zbog navedenog, logično se nameće ideja da veličina amplitudskih kvanta treba da se mijenja unutar fiksnog amplitudskog opsega kvantizera tako da se manje, vjerovatnije amplitude kvantuju "finije" (sa manjim korakom kvantizacije) a veće, manje vjerovatne amplitude kvantuju "grublje" sa većim korakom kvantizacije.

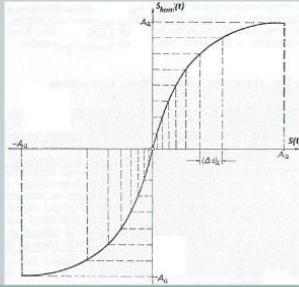
Da bi ukupni broj nivoa ostao jednak kao kod uniformnog kvantizera istog opsega, pri neuniformnoj podjeli amplitudski kvanti na kraju opsega treba da budu relativno veliki, odnosno, greška kvantovanja za velike vrijednosti amplitude biće velika

Na bazi prethodno rečenog, možemo zaključiti da je neuniformno kvantovanje ekvivalentno uniformnom kvantovanju prethodno komprimovanih trenutnih vrijednosti pobudnog signala, kao što je prikazano na slici 5.15.



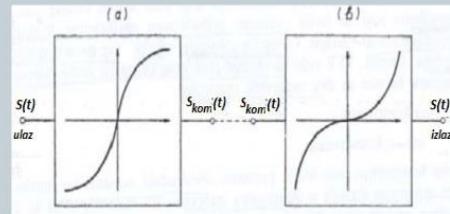
Slika 5.15 - Blok šema kompresije i kvantovanja

Kompresija trenutnih vrijednosti u suštini predstavlja nelinearni pojačavač koji više pojačava male nego velike vrijednosti amplituda, u cilju postizanja uniformne raspodjele trenutnih vrijednosti amplituda ulaznog signala kvantizera (slika 5.16)



Slika 5.16 - Karakteristika kompresije

Na prijemnoj strani prenosnog sistema potrebno je obnoviti prirodan odnos trenutnih vrijednosti signala, pa se koristi "trenutni ekspandor" čija je karakteristika inverzna karakteristici kompresije (slika 5.17b).



Slika 5.17 - a) karakteristika kompresije; b) karakteristika ekspanzije

24. Impulsno kodna modulacija.

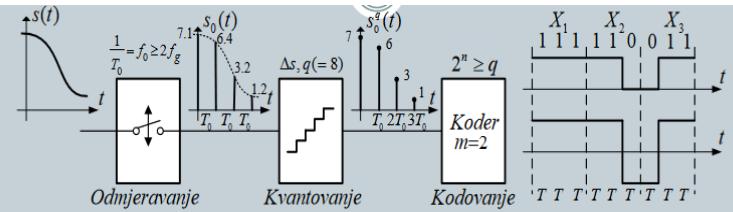
Impulsna kodna modulacija (IKM)

40

Impulsna kodna modulacija (eng. *Pulse Code Modulation-PCM*) spada u grupu impulsnih modulacija jer modulisani signal ima diskretan talasni oblik. Prvu ideju o prenosu signala postupkom *IKM (PCM)*, predložio je *A.H. Reeves* 1937. godine. *PCM* obuhvata kvantizaciju i digitalizaciju analognog signala.

Ukupni opseg mogućih vrijednosti signala (tzv. kvantizacijski opseg) podijeli se na q segmenata i svakom segmentu se dodijeli jedna kodna riječ (dužine n bita).

Kod konvencionalnog *PCM* kodera obično je izlazna vrijednost predstavljena binarnim kodom (osnove 2), pa odgovarajući analogno/digitalni (*A/D*) konvertor ima blok šemu prikazanu na slici 5.20.



Slika 5.20 – Blok šema *A/D PCM* konvertora.

Na istoj slici je ilustrovан postupak *PCM-A/D* konverzije za konkretnu vrijednost $q = 8$, odakle dobijamo dužinu kodnih riječi $n = 3$ kao najmanji prirodan broj koji zadovoljava nejednakost $2^n \geq q$.

Izlazni *PCM* signal je prikazan kao binarni unipolarni i bipolarni digitalni signali. Jasno je da u tom pogledu imamo širok izbor i drugih formata signala.

Koliko iznosi bitski interval izlaznog *PCM* signala?

Bitski interval kod izlaznog *PCM* signala iznosi:

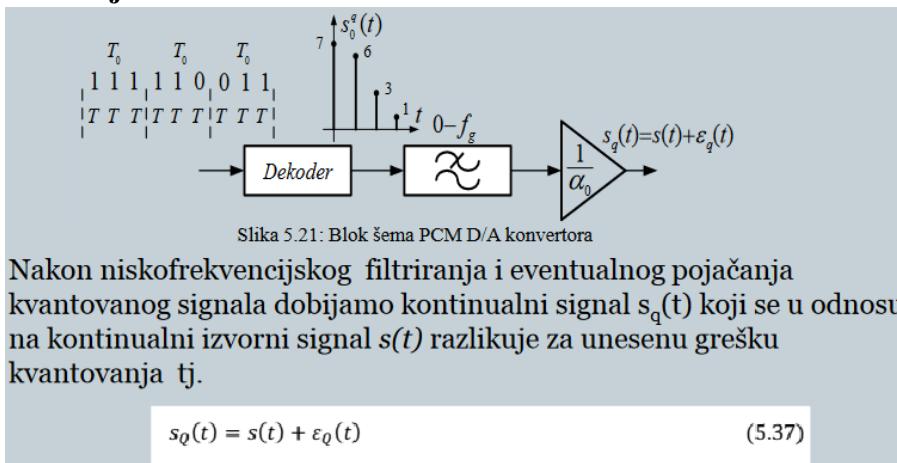
$$T = \frac{T_0}{n} = \frac{1}{2f_g n} \quad (5.35)$$

Pri tom je T_0 period odmjeravanja analognog signala dok odgovarajuća bitska brzina iznosi:

$$v_b = \frac{1}{T} = 2f_g n \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right] \quad (5.36)$$

Blok šema odgovarajućeg digitalno/analognog (*D/A*) *PCM* konvertora prikazana je na slici 5.21. Prepostavljajući uspostavljenu bitsku i kanalsku sinhronizaciju dekoder svakoj kodnoj riječi pridružuje određeni amplitudski kvantni nivo.

25. PCM dekodovanje.



Nakon niskofrekvencijskog filtriranja i eventualnog pojačanja kvantovanog signala dobijamo kontinualni signal $s_q(t)$ koji se u odnosu na kontinualni izvorni signal $s(t)$ razlikuje za unesenu grešku kvantovanja tj.

26. Odnos signal-šum kvantovanja.

Odnos signal-šum kvantovanja (SNR_q)

44

Kvalitet reprodukcije kontinualnog signala "objektivno" mjerimo pomoću odnosa signal-šum kvantovanja ili kraće SNR_q (eng. *Signal to Noise Ratio-SNR*) u obliku:

$$SNR_q[dB] = 10 \log \frac{P_s}{P_q} \quad (5.38)$$

U cilju utvrđivanja zavisnosti odnosa signal-šum kvantovanja od parametara A/D konvertora posmatrajmo konkretan primjer digitalizacije signala. Posmatraćemo signal nulte srednje vrijednosti, koji pripada stacionarnom Gauss-ovom procesu čija prosta funkcija gustine vjerovalnoće ima oblik:

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}} \quad (5.39)$$

gdje je varijansa $\sigma_s^2 = P_s$ i u datim uslovima je jednaka srednjoj snazi datog signala. Lako je utvrditi da aproksimativno vrijedi (pravilo 3 sigme):

$$\begin{aligned} p(|s| < \sigma_s) &= 0.68 \\ p(|s| < 2\sigma_s) &= 0.954 \\ p(|s| < 3\sigma_s) &= 0.997 \end{aligned} \quad (5.40)$$

što znači da praktično amplitudski opseg kvantizera možemo definisati kao amplitudski interval $(-4\sigma_s, 4\sigma_s)$. To znači da amplitudski kvant Δs iznosi

$$\Delta s = \frac{8\sigma_s}{q} = \frac{8\sigma_s}{2^n} \quad (5.41)$$

gdje je q broj kvantnih nivoa kvantizera, a n dužina kodnih riječi. Sada izraz 5.38 postaje

$$SNR_q[dB] = 10 \log \frac{P_s}{\Delta s^2 / 12} = 10 \log \frac{12\sigma_s^2}{\left(\frac{8\sigma_s}{2^n}\right)^2} = 6n - 7.2 \quad (5.42)$$

Na sličan način se može pokazati da za uniformno kvantovanu sinusoidu $SNR_q[dB] = 6n + 1.76$, Sada je opšti izraz za decibelski odnos signal-šum kvantovanja:

$$SNR_q[dB] = 6n + c$$

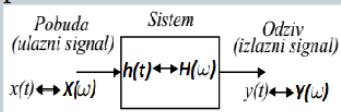
gdje je **n** dužina kodnih riječi u PCM koderu, a **konstanta c** zavisi od prirode posmatranog signala koji digitalizujemo. Dakle, decibelski odnos signal-šum kvantovanja raste linearno sa brojem bita po odmjerku, n . Svaki dopunski bit povećava taj odnos za 6dB. Izvedena relacija ne važi za $n < 5$, jer tada spektar šuma kvantovanja nije uniforman.

27. Funkcija prenosa.

Funkcija prenosa (transfer funkcija) sistema

5

- Ovdje ćemo se ograničiti na linearne sisteme sa jednim ulaznim signalom $x(t)$ i jednim izlaznim signalom $y(t)$ koristeći simbolički model sistema prikazan na slici 6.1.



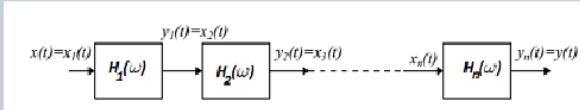
Slika 6.1 - Četvoropol: $x(t)$ -pobudni signal; $h(t)$ -impulsni odziv; $y(t)$ -odziv sistema.

- S obzirom da konvolucija funkcija u vremenskom domenu odgovara množenju u frekvencijskom domenu, onda je Fourier-ova transformacija izlaznog signala

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (6.1)$$

- Kako je funkcija prenosa kompleksna veličina, možemo je napisati u sljedećem obliku

Posmatrajmo sada kaskadnu vezu više sklopova koji čine neki sistem prenosa (slika 6.2). Neka svaki od sklopova ima odgovarajuću funkciju prenosa $H_i(\omega)$.



Slika 6.2: Kaskadna veza sklopova

U ovom slučaju ekvivalentni impulsni odziv $h(t)$ predstavlja konvoluciju impulsnih odziva pojedinih sklopova

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_n(t) \quad (6.7)$$

dok ekvivalentna funkcija prenosa sklopa koji je ekvivalentan cijelom sistemu iznosi:

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot \dots \cdot H_n(\omega) = \prod_{i=1}^n H_i(\omega) \quad (6.8)$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.2)$$

- gdje je $A(\omega)$ amplitudska karakteristika sistema (moduo transfer funkcije), a $\varphi(\omega)$ fazna karakteristika sistema.
- Ako $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ predstavimo na sljedeći način

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi_x(\omega)} \quad (6.3)$$

$$Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\varphi_y(\omega)} \quad (6.4)$$

dobijamo da je:

$$|Y(\omega)| = A(\omega)|X(\omega)| \quad (6.5)$$

$$\varphi_y(\omega) = \varphi_x(\omega) + \varphi(\omega) \quad (6.6)$$

Na osnovu prethodnih relacija možemo zaključiti da svojim modulom, funkcija prenosa modificuje spektralnu gustinu amplituda prenošenog signala, a svojim argumentom, modificuje fazne stavove pojedinih komponenata ulaznog signala.

Ako svaku od funkcija prenosa napišemo u obliku

$$H_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} \quad (6.9)$$

sada na osnovu izraza za amplitudsku funkciju sistema imamo

$$A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_n(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \quad (6.10)$$

a faznu

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \quad (6.11)$$

Dakle, amplitudska karakteristika cijelog sistema predstavlja proizvod amplitudskih karakteristika pojedinih sklopova sistema, a fazna karakteristika zbir faznih karakteristika pojedinih sklopova.

Jednačinu 6.5 često pišemo u logaritamskom obliku

$$\log |Y(\omega)| = \log A(\omega) + \log |X(\omega)| \quad (6.12)$$

Sada se veličina

$$-\log A(\omega) = a(\omega) \quad (6.13)$$

naziva slabljenje i izražava se u [dB]. Na osnovu izraza 6.10 ukupno slabljenje iznosi :

$$a(\omega) = a_1(\omega) + a_2(\omega) + \dots + a_n(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i(\omega) \quad (6.14)$$

28. Idealan prenos.

Postavlja se pitanje, kakva bi trebala da bude funkcija prenosa nekog sistema pa da prenos signala smatramo idealnim. U tom slučaju izlazni signal $y(t)$ je jednak ulaznom signalu $x(t)$, pa možemo zaključiti da je

$$y(t) = x(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = 1$$

odnosno, $A(\omega) = 1$ i $\varphi(\omega) = 0$. U uslovima fizičkog prenosa, $A(\omega)$ se može dosta dobro održavati u određenom frekvencijskom opsegu od interesa zahvaljujući ubacivanju korektora, koje u savremenim digitalnim sistemima nazivamo ekvalizatorima.

Uslov $\varphi(\omega) = 0$ je fizički neostvarljiv zbog toga što realni sistemi unose kašnjenje u prenosu signala.

Sada potražimo Fourier-ovu transformaciju izlaznog signala $y(t)$:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (6.16)$$

Uvodeći smjenu $(t - t_0) = \tau$, dobijamo

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = Ae^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = Ae^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (6.17)$$

poredjeći prethodni izraz sa 6.1 možemo pisati

$$H(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = Ae^{-j\omega t_0} \quad (6.18)$$

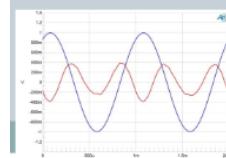
Prema izrazu (6.20), vidimo da ovakav sistem unosi fazni pomjeraj $-\omega t_0$, odnosno fazno kašnjenje ωt_0 , pa se u opštem slučaju umjesto o faznoj karakteristici, govori o faznom kašnjenju $\theta(\omega) = -\varphi(\omega)$.

Kod traženja uslova za idealan prenos, nisu postavljena nikakva ograničenja po pitanju širine spektra prenošenog signala $x(t)$. U tom slučaju uslovi za amplitudsku karakteristiku $A(\omega)$ i faznu karakteristiku $\varphi(\omega)$ moraju biti zadovoljeni za sve vrijednosti učestanosti $-\infty < f < \infty$. Međutim, realni informacioni signali imaju spektar koji je ograničen u konačnom frekvencijskom opsegu od ω_d do ω_g , pri čemu je vrlo često donja granica ω_d blizu nule.

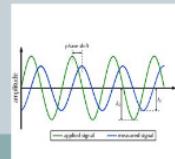
Međutim, idealnim prenosom možemo smatrati i slučaj kada je izlazni signal po talasnom obliku vijeran ulaznom signalu, što možemo napisati u sljedećem obliku:

$$y(t) = Ax(t - t_0) \quad (6.15)$$

gdje su A i t_0 konstante. Drugim riječima, svaka trenutna vrijednost ulaznog signala je zakašnjenja u vremenu za t_0 i pojačana za A . Očigledno je da u ovom slučaju preneseni signal nije pretrpio nikakva izobličenja, već je kompletan zakašnjen i promijenjena mu je amplitudska razmjera.



Koji izlazni signal izgleda izobličen?



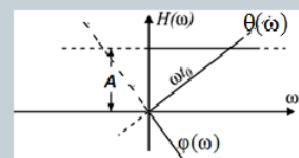
Na osnovu prethodnog izraza možemo zaključiti da će prenos biti idealan kroz linearne sisteme čija amplitudska karakteristika ne zavisi od učestanosti

$$A(\omega) = A = \text{const.} \quad (6.19)$$

odnosno, fazna karakteristika

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 \quad (6.20)$$

je direktno srazmerna učestanosti, što je prikazano na slici 6.3.



Slika 6.3 Funkcija prenosa idealnog sistema

Iz navedenog slijedi da se sistemi za prenos projektuju da propuštaju ograničen spektar signala, u okviru kojeg je poželjno da budu ispunjeni uslovi idealnog prenosa. Dakle, idealan sistem prenosa u suštini predstavlja idealan filter koji u propusnom opsegu ispunjava uslove idealnog prenosa, a van propusnog opsega sve komponente slabi beskonечно.

U suštini, imamo dvije vrste prenosa. Prenos signala u svom prirodnom (osnovnom ili baznom) opsegu učestanosti, i prenos u transponovanom opsegu, tako da je njegov spektar pomjeren u drugo područje na frekvencijskoj osi.

Slično, sisteme za prenos možemo podijeliti u tri grupe: Propusnike niskih učestanosti (od nula do ω_g), propusnike visokih učestanosti (od ω_g do $+\infty$) i propusnike opsega učestanosti (od ω_d do ω_g).

29. Amplitudska i fazna izobličenja.

U idealizovanom prenosnom sistemu ne postoji izobličenje signala. Međutim, većina fizičkih prenosnih sistema stvara manja ili veća izobličenja signala. Generalno, izobličenja dijelimo na **linearna i nelinearna**.

Linearna izobličenja nastaju kada amplitudska karakteristika $A(\omega)$ zavisi od učestanosti a fazna karakteristika $\phi(\omega)$ nije linearna funkcija učestanosti

Dakle, ako nisu ispunjeni uslovi dati sa (6.19) i (6.20), izlazni signal nije vjerna replika ulaznom signalu.

Fazna izobličenja predstavljaju slučaj kada je karakteristika faznog kašnjenja

$$\theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi \quad (6.23)$$

dok amplitudska karakteristika zadovoljava uslov

$$H(\omega) = |H(\omega)| = A(\omega) = A = \text{const.} \quad (6.24)$$

U praktičnim slučajevima, najčešće se istovremeno pojavljuju i amplitudska i fazna izobličenja.

30. Nelinearna izobličenja.

Ova izobličenja su posljedica prolaska signala kroz sklopove sa nelinearnom karakteristikom npr. elektronske komponente kao što su bipolarni i MOS tranzistori, diode itd, a koje imaju nelinearne karakteristike ulaz-izlaz.

Kada su na ulazu prisutni signali malih nivoa, u praksi ih najčešće posmatramo kao linearne komponente (sklopove). Dakle, nelinearna izobličenja su posljedica zavisnosti transfer funkcije od amplitude ulaznog signala.

Amplitudska izobličenja nastaju kada amplitudska karakteristika zavisi od učestanosti

$$H(\omega) = |H(\omega)| = A(\omega) \neq A = \text{const}, \quad (6.21)$$

dok je karakteristika faznog kašnjenja linearna funkcija učestanosti

$$\theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi \quad (6.22)$$

Fazna izobličenja predstavljaju slučaj kada je karakteristika faznog kašnjenja

$$\theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi \quad (6.23)$$

dok amplitudska karakteristika zadovoljava uslov

$$H(\omega) = |H(\omega)| = A(\omega) = A = \text{const.} \quad (6.24)$$

U praktičnim slučajevima, najčešće se istovremeno pojavljuju i amplitudska i fazna izobličenja.

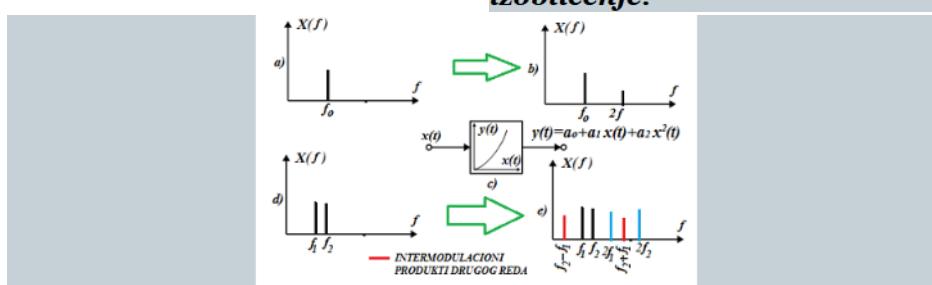
Sada razmotrimo jedan nelinearni sistem čija se karakteristika "ulaz-izlaz" može aproksimirati polinomom drugog reda

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) \quad (6.25)$$

Ako ovaj sistem pobudimo sa prostoperiodičnim signalom

$x(t) = A_m \cos 2\pi f_0 t$, na izlazu sistema će se pojaviti spekralne komponente na frekvencijama $0, f_0$ i $2f_0$. Ukoliko bi prenosna karakteristika bila polinom n -tog stepena, tada bi na izlazu sistema pored osnovne učestanosti pojavili i njeni harmonici $if_0, i=1,2,\dots,n$.

Ovo izobličenje se naziva nelinearno **harmonijsko izobličenje**.



Slika 6.5: Izobličenja kod nelinearnog sistema

Sada pretpostavimo da su na ulazu prisutna dva sinusna signala učestanosti f_1 i f_2 (slika 6.5d), na izlazu sistema će se pojaviti spekralne komponente na frekvencijama $0, f_1, f_2, f_1 - f_2, 2f_1, 2f_2$ i $f_2 + f_1$. Sa slike 6.5e se uočava da se u spektru izlaznog signala pored osnovnih i harmoničnih komponenti, pojavljuju spekralne komponente koje nastaju kao zbir ($f_2 + f_1$) i razlika ($f_2 - f_1$) osnovnih učestanosti.

U opštem slučaju, spektralne komponente koje su nastale u nelinearnom sistemu, a čija je učestanost jednak zbiru ili razlici, bilo učestanosti sinusoidalnih komponenata pobudnog signala, bilo ovih i učestanosti njihovih harmonika, bilo učestanosti raznih harmonika, nazivamo **intermodulacionim produktima**.

Često, novonastale komponente u spektru izlaznog signala nazivamo parazitne ili neželjene.

“Čišćenje” izlaznog signala od ovih komponenti je mukotrpan posao, dok je nemoguće u slučaju kada intermodulacioni produkti upadnu u frekvencijski opseg osnovnog signala.

Prethodno razmatranje odnosi se na sisteme gdje je pojava nelinearnosti sistema štetna za njegovog krajnjeg korisnika. Takav slučaj imamo kod projektovanja pojačavača gdje se vrši selekcija komponenata kod kojih je linearni član polinoma dominantan. Međutim, kod realizacije modulatora, mješača, kompandora, umnoživača frekvencije itd, nelinearnost prenosne karakteristike upotrebljenih komponenata je poželjna pa u tom slučaju kažemo da se radi o "namjernom izobličenju".

31. Šta je modulacija i koja je uloga modulacije?

- Kao što znamo, većina nama najbitnijih poruka (govor, muzika, slika itd.) nakon konverzije u električni signal ima spektar lociran u svom osnovnom odnosno prirodnom ili niskofrekvenčijskom (NF) opsegu. Ove signale je moguće prenositi u njihovom izvornom obliku, to jest u obliku u kojem se pojavljuju na izlazu konvertora poruka-signal, preko električnih provodnika.
- Mada je takav prenos najjednostavniji, koristi se relativno rijetko.
- Ovakav vid prenosa nije ekonomičan, pa često pribjegavamo posebnoj obradi signala, kao fizičkih nosilaca informacija, tzv. modulaciji.

- Razlozi za to su:

1. potreba za usklađivanjem osobina signala sa karakteristikama prenosnog medijuma
2. povećanje otpornosti signala prema smetnjama izborom povoljnog modulacionog postupka
3. mogućnost višestrukog korišćenja prenosnih sistema na bazi frekvencijskih raspoređenih kanala

- U postupku modulacije, originalni informacioni signal “utiskujemo” u takozvani noseći talas koji ima sinusoidalan oblik.
- U ovom postupku, sinusoidalni signal predstavlja noseći talas, informacioni signal nazivamo modulišući signal, da bi nakon obavljene modulacije dobili modulisani signal

- Postoji više načina utiskivanja informacionog signala u noseći talas. Zavisno od načina, može se izvršiti klasifikacija modulacionih postupaka. Osnovna podjela se svodi na **analogne** i **digitalne** modulacione postupke.
- Kod analognih postupaka postoji neposredna korespondencija u vremenskom domenu između modulišućeg, $s_m(t)$, i odgovarajućeg parametra modulisanih signala.
- Kod analognih postupaka možemo da koristimo kontinualni i impulsni noseći talas.

- Modulacione analogne kontinualne postupke možemo takođe podijeliti u dvije grupe: **linearne** i **nelinearne** (obično eksponencijalne), postupke modulacije. Ova podjela se zasniva prvenstveno na karakteru translacije spektra informacionog signala.
- Kod linearnih postupaka (AM) radi se o jednostavnoj translaciji spektra modulišućeg signala iz NF u VF područje, bez unošenja novih spektralnih komponenata u modulisani signal.
- Nasuprot tome, kod nelinearnih eksponencijalnih postupaka (FM i PM) pored translacije spektra informacionog signala dolazi do “obogaćivanja” spektra i pojava novih spektralnih komponenata koje nisu tipične za lineарне modulacione postupke.

32. Konvencionalni AM signal. Spektar, energetska efikasnost

- KAM signal je najstarija vrsta amplitudski modulisanog signala kojim je obavljen prvi prenos poruka.
- Prepostavimo da je napon signala nosioca dat izrazom $s_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$ i neka je modulišući (informacioni) signal $s_m(t)$. Tada je KAM signal

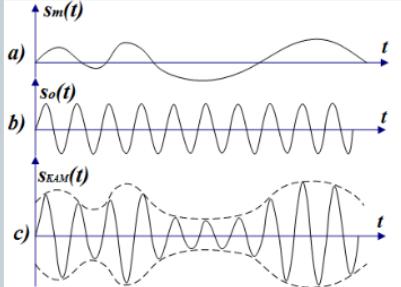
$$s_{KAM}(t) = A_0 (1 + k_{AM} s_m(t)) \cos(\omega_0 t) \quad (6.1)$$

gdje je k_{AM} konstanta koja predstavlja osjetljivost modulatora. Izraz u uglastoj zagradi predstavlja amplitude talasa nosioca, i sastoji se od konstante i člana koji je direktno srazmjeran modulišućem signalu.

- Pri tom mora biti zadovoljeno:
 - $f_o > f_g$ (modulišući signal sporopromjenljiv), i
 - anvelopa nenegativna f-ja, tj.

$$1 + k_{AM} s_m(t) \geq 0$$

- Pri tom $m = A_m/A_0$ izražava maksimalnu relativnu promjenu amplitude modulisanog signala i naziva se **stepen modulacije**. U praksi stepen modulacije je u granicama od 0 do 1, a često se izražava i u procentima ($0 \leq m \leq 100\%$). Na slici 6.2 su prikazani talasni oblici KAM signala.



Slika 6.2: Talasni oblici: a) modulišući signal; b) nosilac; c) amplitudski modulisan signal KAM tipa.

- U analizi umjesto izraza 6.1 se često koristi podesniji analitički oblik za KAM signal, do kojeg dolazimo na sljedeći način:

- Modulišući signal $s_m(t)$ uvijek može da se napiše u obliku:

$$s_m(t) = A_m s(t) \quad (6.2)$$

$$A_m = |s_m(t)|_{\max} \quad (6.3)$$

- Dakle, funkcija $s(t)$ predstavlja normalizovan modulišući signal. Ako se unese 6.2 u 6.1, dobija se:

$$s_{KAM}(t) = A_0 \left[1 + \frac{k_{AM} A_m}{A_0} s(t) \right] \cos \omega_0 t \quad (6.4)$$

- Uz pretpostavku da je $k_{AM}=1$, dobijamo:

$$s_{KAM}(t) = A_0 [1 + m s(t)] \cos \omega_0 t \quad (6.5)$$

Spektar konvencionalnog AM signala

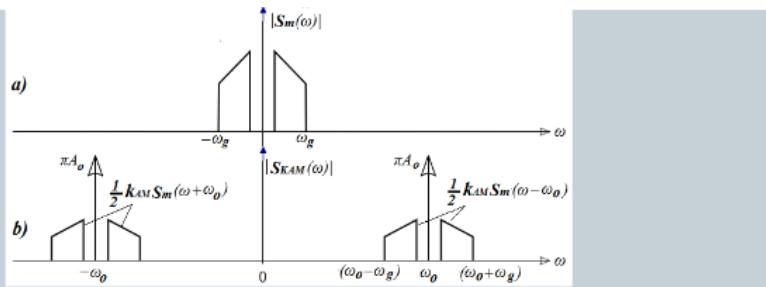
13

- Do spektra konvencionalnog AM signala možemo doći direktnom primjenom Fourierove transformacije na izraz 6.1.

$$\begin{aligned} F\{s_{KAM}(t)\} &= F\{[A_0 + k_{AM} s_m(t)] \cos \omega_0 t\} = F\{A_0 \cos \omega_0 t\} + F\{k_{AM} s_m(t) \cos \omega_0 t\} \\ &= \pi A_0 \delta(\omega - \omega_0) + \pi A_0 \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} k_{AM} S_m[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} k_{AM} S_m[j(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

- Pri tom je $S_m(j\omega) = F[s_m(t)]$, spektar modulišućeg signala.

- Prethodna analiza ukazuje da standardni (konvencionalni) AM signal sadrži diskretnu komponentu na učestanosti nosećeg talasa, zatim gornji bočni opseg sa prirodnim poređajem originalnih spektralnih komponenata i njemu simetričan u odnosu na noseću učestanost donji bočni opseg sa invertovanim poređajem originalnih spektralnih komponenata.



Slika 6.3: a) spektar modulišućeg signala; b) spektar KAM signala.

- Sa slike 6.3 je očigledno da je potreban propusni opseg za prenos KAM signala jednak dvostrukoj graničnoj frekvenciji modulišućeg signala.

$$B = 2f_g$$

6.8

- Nadalje, može se postaviti opravdano pitanje: da li ima smisla koristiti ovu vrstu modulisanog signala za prenos informacija, kada se prenosom nosioca ne prenosi nikakva informacija. Kao što ćemo vidjeti kasnije, demodulacija KAM signala je vrlo prosta, odnosno odgovarajući prijemnik je jednostavan.

Energetska efikasnost

15

- Da bismo bliže sagledali cijenu koju plaćamo za prostu realizaciju prijemnika, sagledajmo energetski bilans KAM signala. Pretpostavimo da je modulišući signal prostoperiodična komponenta učestanosti ω_m :

$$s_m(t) = A_m \cos \omega_m t \quad 10.9$$

- Sada, prema izrazu 6.5 modulisani signal možemo izraziti kao:

$$s_{KAM}(t) = A_0[1 + m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t \quad 6.10$$

- Izraz 6.10 možemo napisati u sljedećem obliku:

$$s_{KAM}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}mA_0 \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{2}mA_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t \quad 6.11$$

- Srednja snaga na jediničnom otporniku iznosi:

$$P = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2 m^2}{2 \cdot 4} + \frac{A_0^2 m^2}{2 \cdot 4} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \quad 6.12$$

- gdje P_0 predstavlja snagu nosioca, dok snaga obo bočna opsega iznosi:

$$P_{2Bo} = P_0 \frac{m^2}{2} \quad 6.13$$

- Uvedimo pojam iskorišćenja standardnog (KAM) signala po snazi u obliku:

$$\eta_{KAM} = \frac{P_{2Bo}}{P} = \frac{m^2}{2 + m^2} \quad 6.14$$

- Uz praktično ograničenje ($m \leq 1$), lako je uočiti da je većina snage AM signala koncentrisana na učestanosti nosećeg talasa i da je stepen iskorišćenja standardnog AM sistema po snazi jako nepovoljan – maksimalo 33,3%

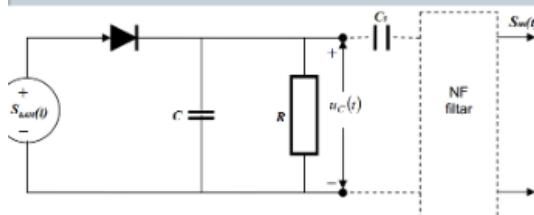
33. Određivanje indeksa (dubine) modulacije konvencionalnog AM signala. (nisam našao)

34. Detektor anvelope.

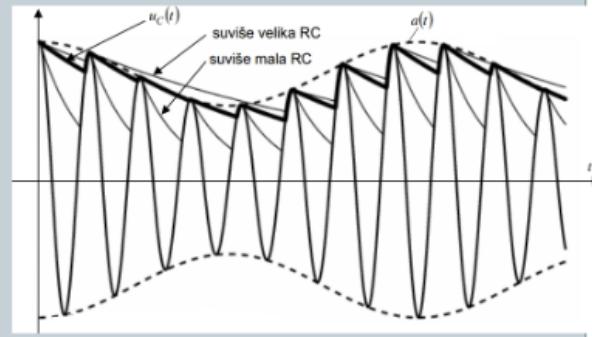
Detektor anvelope

20

- Za ilustraciju rada detektora anvelope, kao ulazni signal u detektor koristićemo KAM signal u obliku $s_{KAM}(t) = A_0[1 + m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t$.
- Električna šema detektora anvelope je prikazana na slici 6.7.



Slika 6.7: Detektor anvelope.



Slika 6.8: Vremenski oblik izlaznog napona detektora anvelope.

- Vremenski oblik napona na RC kolu je prikazan na slici 6.8.

Da bi izlazni napon vjerno pratio vremenske varijacije anvelope AM signala, potrebno je posebnu pažnju posvetiti izboru vremenske RC konstante.

Suviše mala vremenska RC konstanta obezbjeđuje vremenski brzo promjenljiv signal koji prati varijacije signala nosioca. Sa druge strane, suviše velika vremenska konstanta neće obezbijediti praćenje trenutnih vremenskih varijacija anvelope, što dovodi do izobličenja. Praktično "bezbolno" određivanje vremenske RC konstante bilo bi u slučaju ispunjavanja uslova:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \ll RC \ll T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} \quad 6.17$$

35. Ugaona modulacija. Spektar.

- Kao što smo vidjeli, kod *AM* postupaka amplitudu signala nosioca modulišemo neposredno sa modulišućim (informacionim, sporopromjenljivim) signalom.
- Dakle, izvorna informacija je "utisnuta" u anvelopu nosioca, odnosno informacija je sadržana u varijacijama envelope modulisanog (*VF*) signala
- Kako je nosilac sinusni signal, definisan amplitudom i uglom, postoji mogućnost utiskivanja informacionog signala i u ugao nosećeg signala.
 - U postupku amplitudne modulacije, amplituda signala se modifikuje informacionim (modulišućim) signalom, dok ugao signala nosioca ostaje nepromijenjen.**
 - U slučaju ugaone modulacije, modulišući signal modifikuje ugao nosioca, dok amplituda nosioca ostaje nepromijenjena**

Trenutna kružna učestanost nosioca $\omega(t)$ je izvod trenutne faze $\varphi(t)$ definiše se kao:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \delta\omega = \omega_0 + 2\pi\delta f \quad 6.54$$

gdje je $\delta\omega$ trenutna devijacija kružne učestanosti, odnosno, δf je trenutna devijacija frekvencije nosioca.

Slično kao kod analize *AM* postupaka, prepostavimo da je modulišući signal oblika $s_m(t) = A_m m(t)$, gdje $m(t)$ predstavlja normalizovani modulišući signal ($|m(t)| \leq 1$), i neka je maksimalna učestanost u spektru modulišućeg signala ω_g .

Sada se vratimo analizi opšteg izraza za ugaono modulisan signal dat relacijom (6.56). Naime, u zavisnosti od analitičkog oblika funkcije $\varphi(t) = \mu[s_m(t)]$, razlikovaće se dvije vrste ugaone modulacije, to su fazna modulacija (*PM*) i frekvencijska modulacija (*FM*).

Ako je trenutna devijacija faze $\delta\phi$ direktno srazmjerna informacionom (modulišućem) signalu $s_m(t)$, kažemo da je u pitanju **fazna modulacija (PM)**.

Ako je trenutna devijacija frekvencije δf direktno srazmjerna informacionom (modulišućem) signalu $s_m(t)$, kažemo da je u pitanju **frekvencijska modulacija (FM)**.

Promjena ugla nosioca može da se ostvari promjenom njegove trenutne učestanosti, ili promjenom njegove trenutne faze. Otuda se ugaone modulacije dijele na frekvencijsku (*Frequency modulation- FM*) i faznu (*Phase Modulation-PM*).

Prepostavimo da signal nosioca ima talasni oblik dat izrazom:

$$s_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A_0 \cos \phi(t) \quad 6.52$$

gdje je A_0 amplituda nosioca, $\Phi(t)$ ugao, argument ili trenutna faza sinusoidalnog nosioca .

$$\phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \delta\phi \quad 6.53$$

U prethodnom izrazu ω_0 je kružna učestanost nosioca, a $\delta\phi$ trenutna devijacija faze nosioca.

Kao što je rečeno kod ugaonih modulacija, ugao $\Phi(t)$ je zavisан od modulišućeg signala tako što se modifikuje fazni stav $\varphi(t)$ koji postaje funkcija modulišućeg signala:

$$\varphi(t) = \mu[s_m(t)] \quad 6.55$$

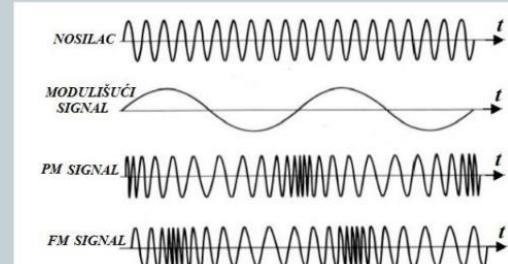
Sada opšti izraz za ugaono modulisan signal dobija formu:

$$s_{UM}(t) = A_0 \cos \phi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A_0 \cos[\omega_0 t + \mu[s_m(t)]] \quad 6.56$$

Na osnovu izraza (6.56) može se zaključiti da je ugaona modulacija nelinearan proces

Mada se parametri (faza ili frekvencija) mijenjaju linearno sa informacionim (modulišućim) signalom $s_m(t)$, ugaona modulacija za razliku od *AM* nije linearna modulacija, jer u ovom slučaju ne važi zakon superpozicije tj. riječ je o nelinearnom procesu

Na bazi prethodnih analitičkih izraza možemo lako dobiti uporedno vremenske dijagrame za *PM* i *FM* (slika 6.9).



Slika 6.9: Grafička ilustracija vremenskih oblika *PM* i *FM* signala za slučaj tonskog modulišućeg signala.

Spektar ugaono modulisanog signala

29

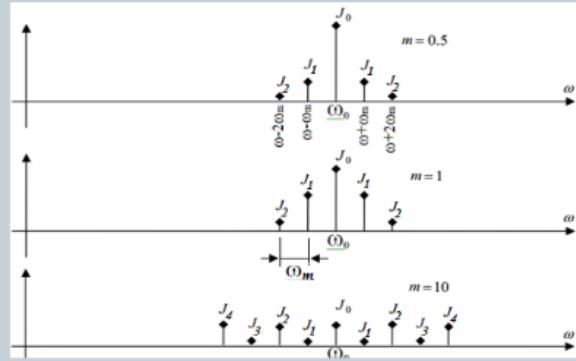
Kao što znamo, spektar amplitudski modulisanog signala nastaje translacijom spektra modulišućeg signala, odnosno, **svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala, u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac**. **Ovaj proces je linearan jer važi zakon superpozicije**, to jest translacija jedne komponente iz spektra modulišućeg signala ne utiče na translaciju drugih komponenti.

U ovim uslovima, **bitna osobina *AM* signala je njegova spektralna ograničenost, ukoliko je spektar modulišućeg signala ograničen**.

U slučaju ugaone modulacije, parametri (faza ili frekvencija) se mijenjaju linearno sa modulišućim signalom, ova modulacija nije linearna modulacija, jer ne važi zakon superpozicije.

U ovom slučaju **veza između spektralnih komponenti ugaono modulisanog signala i komponenti modulišućeg signala je veoma kompleksna**. Zbog nelinearnosti samog procesa, analiza spektra ugaono modulisanih signala je složen posao.

Spektar je smješten simetrično oko frekvencije nosioca, i teorijski je **neograničen**.

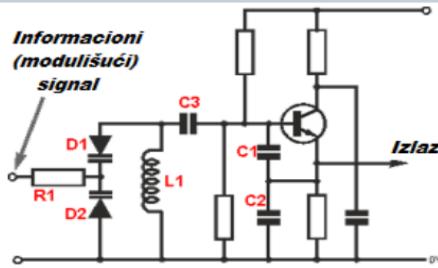


Širina spektra FM signala je po Karsonovom obrascu (m indeks ugaone modulacije)

$$B=2f_m(m+1)$$

36. Generisanje i detekcija FM signala.

Kod **direktne metode** modulišući signal vrši (direktnu) neposrednu kontrolu noseće učestanosti. U ovom slučaju se direktno može postići dovoljno velika devijacija učestanosti, pa su potrebna znatno manja frekvencijska umnožavanja u odnosu na indirektnu metodu. Kod direktne metode noseći signal generišemo pomoću oscilatora čiju frekvenciju određuje visokokvalitetno rezonantno kolo ili kristal. Varijacije induktivnosti ili kapacitivnosti rezonantnog kola u oscilatoru, izazvane uticajem modulišućeg signala, povlače odgovarajuće promjene rezonantne frekvencije).



- Pošto između fazne i frekvencijske modulacije, postoji opšta veza, ovdje ćemo razmatrati samo detekciju (demodulaciju) frekvencijski modulisanih signala.
- Demodulacija signala u prijemniku predstavlja inverznu operaciju modulacije na predajnoj strani prenosnog sistema.
- Detekcija je u suštini izdvajanje informacionog signala iz modulisanog nosioca.
- Detekciju *FM* signala, možemo izvesti na različite načine. Svi ti postupci moraju da obezbijede izlazni napon (ili struju) čija je trenutna amplituda srazmjerna trenutnoj devijaciji frekvencije ulaznog *FM* signala.
- Zapravo često se koristi termin diskriminator što odgovara sklopu koji obezbjeđuje frekvencijsko-amplitudsku konverziju.
- Pomenućemo dva tipa frekvencijskih diskriminatora:
 - (a) balansni diskriminator koji uključuje korišćenje oscilatornog kola (single tuned circuit).
 - (b) detektor presjeka sa vremenskom osom
- Suštinski, u svakom sklopu za demodulaciju *FM* signala obavljaju se dvije operacije.
- Prva operacija je konverzija frekvencijski modulisanog signala u amplitudski modulisan signal. Ova konverzija treba da obezbijedi da je dobijeni *AM* signal modulisan istim modulišućim signalom kao i *FM* signal.
- Druga operacija je detekcija *AM* signala, najčešće detektorom anvelope.
- Sada detaljnije objasnimo navedeni postupak demodulacije. U tom cilju posmatrajmo *FM* signal:

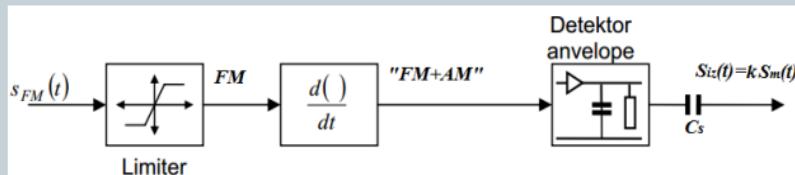
$$s_{FM}(t) = A_0 \cos \left[\omega_0 t + k_\omega \int s_m(t) dt \right]$$

- Ako pretpostavimo da je amplituda ulaznog *FM* signala konstantna, derivacijom ulaznog signala dobijamo:

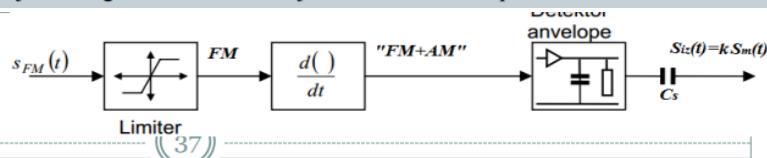
$$\frac{ds_{FM}(t)}{dt} = A_0 [\omega_0 + k_\omega s_m(t)] \cos \left[\omega_0 t + k_\omega \int s_m(t) dt + \frac{\pi}{2} \right]$$

- Kako je praktično uvijek zadovoljen uslov $k_\omega s_m(t) \ll \omega_0$, onda će sporopromjenljiva anvelopa $\omega_0 + k_\omega s_m(t)$ biti uvijek pozitivna.

- Anvelopa VF signala nakon provedene derivacije variraće relativno sporo oko srednje vrijednosti $A_o\omega_o$.
- Kao što pokazuje prethodni izraz, nakon derivacije FM signala dobili smo signal koji je modulisan istim modulišućim signalom i po amplitudi i po frekvenciji. Kao što znamo, detektor anvelope je neosjetljiv na promjene trenutne učestanosti nosioca, što znači da anvelopu signala u kojoj je sadržan modulišući (informacioni) signal možemo izdvojiti detektorom anvelope (slika 6.10)



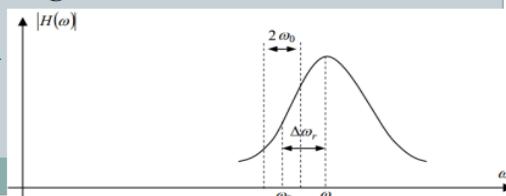
Slika 6.10: Konverzija FM signala u AM i detekcija detektorom anvelope.



- S obzirom da je većina diskriminatora osjetljiva na promjene amplitude FM signala, i kako su te promjene praktično neizbjegljive, uloga limitera je uklanjanje parazitne amplitudne modulacije iz FM signala.
- Da bi izdvojili osnovni harmonik iz limitovanog signala, limitovani signal propuštamo kroz propusnik opsega podešen na centralnu učestanost.
- Postupak diferenciranja signala u principu postižemo ako koristimo linearni sistem čija je amplitudska karakteristika u području FM spektra $(\omega_0 - \frac{B_{FM}}{2}, \omega_0 + \frac{B_{FM}}{2})$ linearna funkcija učestanosti. Praktično rješenje se postiže korišćenjem "razdešenog" oscilatornog kola.

Naime, analiza amplitudske karakteristike paralelnog LRC

kola ukazuje da u području "bokova" možemo obezbijediti diferenciranje signala sa određenom dinamikom trenutne frekvencije.



37. Digitalne binarne modulacija (BASK, BPSK i BFSK). Poređenje po pitanju vjerovatnoće greške.

- Binarna amplitudska modulacija (*BASK-binary amplitude shift keying*) predstavlja najjednostavniji postupak za translaciju spektra digitalnog signala iz fizičkog (osnovnog) u viši frekvencijski opseg, kod koje je amplituda nosećeg kontinualnog talasa srazmjerna modulišućem signalu
- Ovu modulaciju matematički možemo predstaviti na sljedeći način:

$$s(t) = m(t)c(t), \quad (7.1)$$

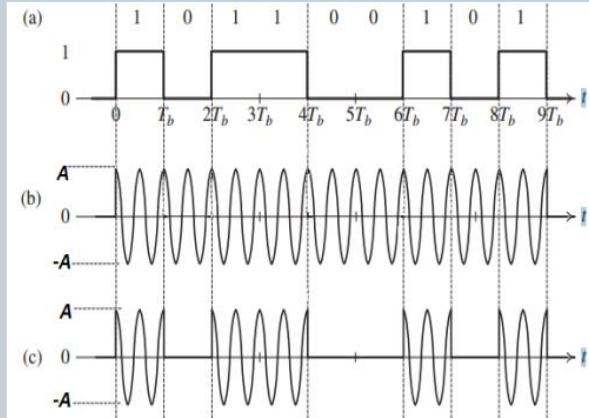
gdje je $m(t)$ modulišući digitalni signal (*NRZ* signal u baznom opsegu) a $c(t)$ sinusoidalni nosilac.

➢ Dakle, praktična realizacija modulatora *BASK* signala je prilično jednostavna i svodi se na množenje modulacionog (informacionog) signala sa signalom talasa nosioca.

- Za *NRZ* (unipolarni signal bez povratka na nulu – *Non Return to Zero*) signal važi $m(t)=1$, u slučaju logičke “1”, odnosno, $m(t)=0$ u slučaju logičke “0”.
- Ovaj tip modulacije predstavlja specijalan slučaj *ASK* signala, i u literaturi je poznat i pod nazivom *OOK (On-Off Keying)*. Trajanje jednog bita iznosi T_b sekundi, i nazivamo ga bitski interval. Binarni *ASK* signal možemo izraziti na sljedeći način:

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_0 t, & \text{za } m(t) = 1 \\ s_2(t) = 0, & \text{za } m(t) = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

- Dakle, ukoliko prenosimo binarnu nulu ne emitujemo noseći talas, a pri prenosu binarne jedinice emitujemo sinusoidalni talas $A \cos(\omega_0 t)$

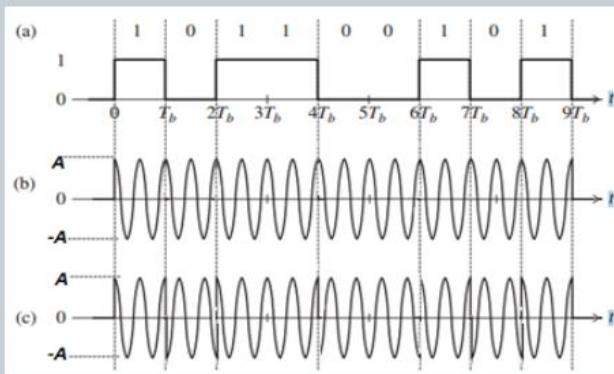


Slika 7.2-Talasni oblici ASK signala; (a)-modulišući signal (b)-signal nosioca (c)-modulisani signal

- *BPSK* (*Binary phase-shift keying*) modulacija se generiše amplitudskom modulacijom sinusnog nosioca sa bipolarnim NRZ signalom ($m(t)=\pm 1$).
- Za bipolarni NRZ signal, $m(t)=1$ u slučaju logičke “1”, odnosno, $m(t)=-1$ u slučaju logičke “0”, ili obrnuto.
- Predajni signal $s(t) = m(t)c(t) = \pm A \cos \omega_0 t$, uzima fazu “0” ili “ π ” zavisno da li se prenosi logička jedinica ili nula.

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_0 t, & \text{za } m(t) = 1 \\ s_2(t) = -A \cos \omega_0 t, & \text{za } m(t) = -1 \end{cases} \quad 0 < t \leq T_b \quad (7.3)$$

- Dakle, ukoliko prenosimo binarnu nulu emitujemo noseći talas čija je početna faza π ($A \cos(\omega_0 t + \pi) = -A \cos \omega_0 t$), a pri prenosu binarne jedinice emitujemo sinusoidalni talas nulte početne faze ($A \cos \omega_0 t$).
- Na slici 7.3 su prikazani talasni oblici: modulišućeg signala (sl. 7.3a), signala nosioca (sl. 7.3b) i modulisanih signala (sl. 7.3c).

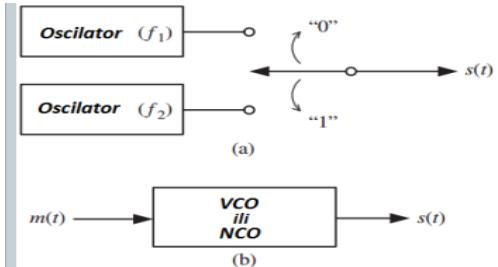


Slika 7.3-Talasni oblici PSK signala; (a)-modulišući signal (b)-signal nosioca (c)-modulisani signal.

- Frekvencija signala nosioca se bira tako da bude cijelobrojan broj perioda u toku trajanja jednogbita, odnosno, $f_0 = n/T_b$, n cijelobrojan. Naravno, i ovdje je zadovoljeno da je $f_0 \gg 1/T_b$.

- BFSK signal se može generisati na dva različita načina. Jedan način je tastovanje predajnog signala između dva različita oscilatora, kao što je prikazano na slici 7.4. U ovom slučaju imamo skokovit prelaz sa jedne na drugu frekvenciju, odnosno, skokovitu promjenu faze predajnog signala. Ovaj tip FSK signala možemo izraziti na sljedeći način:

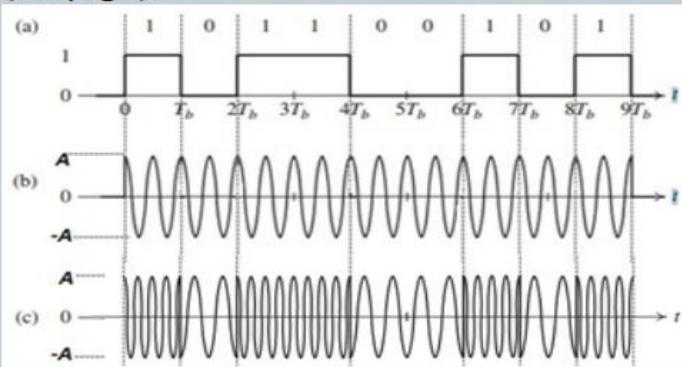
$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi), & \text{za binarnu "0"} \\ s_2(t) = A \cos(\omega_2 t), & \text{za binarnu "1"} \end{cases} \quad 0 < t \leq T_b \quad (7.4)$$



Slika 7.4-Generisanje BFSK signala a) sa dva oscilatora;

Dakle, kada prenosimo binarnu nulu emitujemo signal frekvencije f_1 , a za binarnu jedinicu emitujemo signal frekvencije f_2 . Drugi, češći način generisanja FSK signala je korišćenje naponski kontrolisanog oscilatora (*Voltage Controlled Oscillator- VCO*) ili numerički kontrolisanog oscilatora (*Numerically Controlled Oscillator-NCO*).

- Na slici 7.5 su prikazani talasni oblici: modulišućeg signala $m(t)$ (sl. 7.5a), signala nosioca $c(t)$ (sl. 7.5b) i modulisanih signala $s(t)$ (sl. 7.5c).



Dvije frekvencije signala nosilaca biramo tako da budu cjelobrojni umnošci $1/T_b$, a frekvencije f_1 i f_2 Treba da budu ortogonalne.

Slika 7.5-Talasni oblici (a)-modulišući signal (b)-signal nosioca (c)-modulisani signal

38. Šta je informacija? Šta je signal?

U okviru TI se ne analizira semantički aspekt informacije (tj. značenje informacije), već način na koji se informacija može kvantitativno predstaviti.

➤ **Kako se definiše informacija?**

➤ **Na koji način se informacija može matematički opisati i vrednovati?**

Teorija **informacija** razmatra mogućnosti i ograničenja telekomunikacionih sistema.

Pojam informacije – signal i **informacija**

• Informacija je saznanje preneto kroz prostor-vreme.

• Signal je fizički nosilac informacije.

Druge definicije informacije

- Poruka koju je primalac prihvatio i razumeo
- Podatak: činjenica na osnovu koje je moguće doneti zaključak; "statistički podatak"
- Znanje prikupljeno studiranjem, iskustvom ili podučavanjem
- Uvid
- Ideja
- Mogućnost zaključivanja uzroka posmatranjem posljedice (vatra, dim)
- Rezultat procesiranja i organizacije činjenica čime se povećava količina znanja onoga ko ih prima

39. Mjera količine informacija.

Mjera količine informacije

27. januara zagrmilo je nad Banjalukom

28. juna zagrmilo je nad Banjalukom

Manje verovatni događaj nosi veću količinu informacija.

Danas je lijep dan.

Na ETF je zabranjeno pušenje.

Informacija koju pružaju dva nezavisna događaja jednaka je sumi informacija koju pruža svaki od njih pojedinačno.

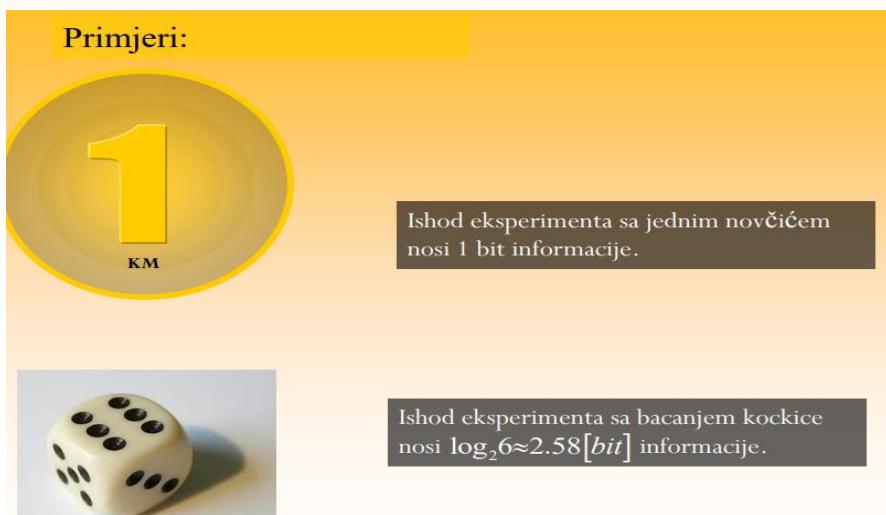
Mjera količine informacije

Aksiome 1 i 2 zadovoljava sljedeća definicija:

$$I(a) = - \log(P[a])$$

Smanjivanjem $P[a]$, $I(a)$ raste.

Verovatnoća dva nezavisna dogadaja je $P[a,b] = P[a] * P[b]$.



40. Izvori informacija.

Izvori informacija

Izvori informacija mogu biti diskretni i kontinualni

- **diskretni generišu simbole koji pripadaju prebrojivom skupu**
- **kontinualni generišu poruke iz neprebrojivog skupa**

Neka je dat diskretni izvor informacija koji generiše simbole X_1, X_2, X_3, \dots iz alfabeta $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Izvor informacija

$\longrightarrow X_1, X_2, X_3, \dots$

//ovo su primjeri diskretnih signala

- **Tekst**

Tekst predstavlja sekvencu simbola, pri čemu svaki simbol uzima vrijednost iz skupa alfabeta $A = (a, \dots, z, A, \dots, Z, 1, 2, \dots, 9, !, ?, \dots)$.

- **Slika (grayscale)**

Digitalizovana, grayscale slika je sekvanca simbola od kojih svaki uzima vrijednost iz skupa alfabeta $A = (0,1)$ ili $A = (0, \dots, 255)$.

Gray Value	Byte Contents
black	0
	[8 bits of 0]
15	
	[8 bits of 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
47	
	[8 bits of 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]
95	
	[8 bits of 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
159	
	[8 bits of 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
207	
	[8 bits of 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
239	
	[8 bits of 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]
white	255
	[8 bits of 1]

//ovo su slučajevi diskretnih signala



- 1) Izvori bez memorije – svaki simbol je nezavisan od prethodno emitovanih simbola

$$P(X_1, X_2, X_3, \dots) = P(X_1)P(X_2)P(X_3)\dots$$

- 2) Izvori sa memorijom – svaki simbol zavisi od prethodno emitovanih simbo

- Najčešće je izvor sa memorijom 1. reda – trenutni simbol zavisi od prethodno emitovanog simbola ----> MARKOVLIJEV IZVOR 1. REDA

$$P(X_1, X_2, X_3, \dots) = P(X_1)P(X_2/X_1)P(X_3/X_2)\dots$$

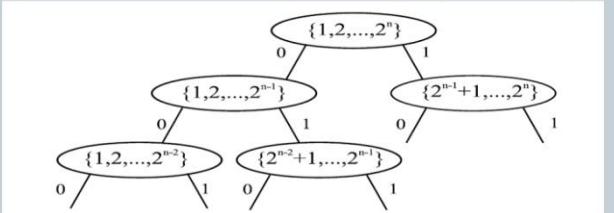


41. Neodređenost i količina neodređenosti.

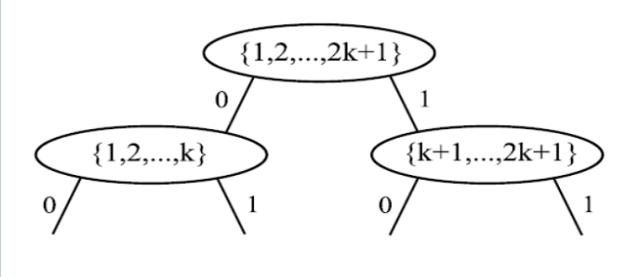
- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">▪ Neku situaciju ćemo označiti kao neodređenost ukoliko postoji više mogućnosti, pri čemu nije poznato koja će od njih biti realizovana ili izabrana.▪ Zapravo realne situacije potpune određenosti u kojima se ishodi mogu predviđati sa sigurnošću su više izuzetak nego pravilo. | <ul style="list-style-type: none">• Uvedimo na formalniji način pojam neodređenih situacija, koji je početni gradivni blok savremene teorije informacija.• Pretpostavimo neku situaciju S u kojoj je moguće m različitih ishoda. Označimo ove mogućnosti sa e_1, e_2, \dots, e_m.• Ovaj skup mogućnosti ćemo označiti sa $S(e_1, e_2, \dots, e_m)$, i nazvati konačnom šemom izbora. |
| <ul style="list-style-type: none">• Po nekom mehanizmu ili na osnovu nekog procesa ili na osnovu nečije volje vrši se izbor jedne od ovih mogućnosti.• Neodređenost asocirana zadatoj šemi izbora S, nastaje uslijed našeg neznanja ili nemogućnosti da znamo koja će od m alternativa biti izabrana.• Na koji način možemo izmjeriti količinu neodređenosti u dатој šеми избора S?• Intuitivno predosjećamo da što je veća kardinalnost S skupa S, odnosno broj elementa ovog skupa, veća je i neodređenost.• Zašto onda ne bismo jednostavno uzeli S kao mjeru neodređenosti?• Iako je to u principu moguće, jedan drugi pristup će se pokazati djelotvornijim. Predstavimo sebi sljedeću igru: zamisli se jedna od mogućnosti iz $S(e_1, e_2, \dots, e_m)$, a zatim se na osnovu pitanja koja su tako formulisana da se na njih odgovara samo sa da/ne, pokušava pogoditi zamišljena vrednost. | |

- Mogućnosti uvijek možemo označiti redom brojevima $1, 2, \dots, m = |S|$, tako da pitanja mogu biti tipično sljedećeg oblika: Da li je zamišljeni broj paran? Da li je zamišljeni broj manji od 20? Da li je zamišljeni broj veći od 12? itd.
- Odmah zapažamo da ukoliko nam je potrebno više pitanja, neodređenost šeme izbora S je veća.
- Stoga je opravданo (osnovano) smatrati da je broj pitanja tipa **da/ne** neophodnih za određivanje nepoznate zamišljene mogućnosti iz skupa S , dobra mjera neodređenosti šeme izbora S .
- Od važnosti je i kakva pitanja postavljamo. Ako su pitanja tipa da li je zamišljeni broj jednak 1, pa ako nije da li je jednak 2, pa ako nije da li je jednak 3, jasno je da nas to vodi (u opštem slučaju) ka postavljanju svih m mogućih pitanja.
- Ovo sigurno nije optimalan* način dobijanja tačnog odgovora u najmanjem broju koraka. Međutim ako je prvo pitanje da li je zamišljeni broj manji od $m/2$, u narednom pitanju sužavamo pretragu na polovinu početnih mogućnosti.
- Ako i u narednim koracima nastavimo da postavljamo pitanja na ovaj način, pokazaće se da je izabrana strategija vrlo efikasna.
- U cilju detaljnijeg upoznavanja sa ovim postupkom, pretpostavimo prvo da je ukupan broj početnih mogućnosti stepen broja 2, odnosno da važi $m = 2^n$.
- Tada možemo podijeliti S postavljanjem prvog pitanja (da li je zamišljeni broj veći od 2^{n-1}) na dva skupa iste veličine: $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ i $2^{n-1} + 1, \dots, 2^n$.

- Svaka od ovih polovina će biti podijeljena na dvije polovine narednim pitanjem.
- Ako je odgovor na prvo pitanje - ne, tada sljedeće pitanje generiše skupove $\{1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$ i $\{2^{n-2}+1, \dots, 2^{n-1}\}$



- Svakom pitanju odgovara jedan čvor, označen skupom mogućnosti identifikovanih do tog momenta.
- Prvi čvor je stoga označen skupom svih mogućnosti S .
- Čvorovi u prvom sloju su označeni sa dva skupa upola manje dimenzije, drugi sloj čvorova je označen sa četiri skupa dimenzija četiri puta manjih od početnog skupa S itd.
- Proces sukcesivnog dijeljenja početnog skupa mogućnosti na polovine, završava se nakon n koraka sa ukazivanjem na tačan odgovor.
- Broj n nije ništa drugo do logaritma od $m=2^n$ za osnovu 2, odnosno $n=\log_2 m$
- Stoga izgleda razumno predstaviti količinu neodređnosti u šemi izbora S pomoću logaritma za osnovu **dva** broja svih mogućnosti $|S|=2^n$ tog sistema.
 - Ako mjeru neodređenosti šeme izbora S označimo sa $h(S)$, tada je izbor $h(S) = \log_2 |S|$, dobar izbor barem kada je S stepena 2.
 - Šta će se desiti u opštem slučaju kada je kardinalnost skupa S proizvoljan prirodan broj?
 - Možemo primeniti istu šemu postavljanja pitanja, s tom razlikom što će neki generisani skupovi imati neparan broj elemenata oblika $2k+1$, pa će njihova podela na dva dijela davati podskupove nešto različite kardinalnosti k i $k+1$.
 - Na slici prikazana je ova situacija.



Slika: Stablo pitanje-odgovor nastalo tokom binarne pretrage za nepoznatom mogućnošću u opštem slučaju

- Ukoliko je broj mogućnosti u šemi izbora S , između dva stepena broja 2, tj. $2^n \leq S < 2^{n+1}$, tada možemo ili izbaciti neke mogućnosti i redukovati njihov broj na 2^n ili dodati neke mogućnosti u cilju dobijanja 2^{n+1} mogućnosti.
- U prvom slučaju nam je potrebno n pitanja, a u drugom $n+1$ da bismo pronašli tačan odgovor. Prema tome količina neodređenosti u S je negdje između ovih vrijednosti, tj. $n \leq \log_2 |S| < n + 1$.
- Stoga mi opet možemo uzeti $h(S) = \log_2 |S|$ kao mjeru neodređenosti u opštem slučaju, pri čemu ova vrijednost nije neophodno cio broj.

//Kolicina neodredjenosti

- Stoga, konačno usvajamo sljedeću definiciju:
- **Definicija:** Količina neodređenosti šeme izbora.

Za šemu izbora S sa $|S|$ mogućnosti, količina neodređenosti $h(S)$ je definisana sa

$$h(S) = \log_2 |S|$$

Baza logaritma 2 - negdje se ne navodi

- Primer 1.1 (Šahovska tabla)

Neka je data prazna šahovska tabla. Postoji ukupno $m = 64 = 2^6$ mogućnosti za postavljanje prve figure. Stoga se odgovarajuća šema izbora može prikazati sa $S = 1, 2, \dots, 64$, gde je značenje svakog broja jedno polje na šahovskoj tabli. Količina neodređenosti u postavljanju jedne figure na praznu šahovsku tablu je $h(S) = \log_2 64 = 6$.

42.Nesingularan kod. Jednoznačno dekodiv kod. Sardinas-Patersonov kriterijum

Definicija 2.1 Nesingularni kodovi

Kôd jednog diskretnog informacionog izvora se naziva nesingularnim, kada se različitim simbolima izvora odgovaraju (korespondiraju) različite kodne reči. Formalno,

$$u_i \neq u_j \Rightarrow z_i \neq z_j$$

pri čemu je z_i kodna reč koja korespondira simbolu izvora u_i . Bavićemo se samo nesingularnim kodovima.

• Primer 2.1 Kodovanje konačnog izvora

- Morzeov kod služi za kodovanje slovnih i brojčanih znakova. Alfabet Morzeovog koda čine samo dva simbola: tačka (·) i crta (-).

A · -	J · - - -	S · · ·
B - · · ·	K - · -	T -
C - - · ·	L · - - -	U · · -
D - - -	M - -	V · · · -
E ·	N - -	W - - -
F · - - -	O - - -	X - - - -
G - - -	P - - - -	Y - - - -
H - - - -	Q - - - -	Z - - - -
I - - - -	R - - -	

- Budući da je cilj kodera kodovanje poruka, a ne pojedinačnih simbola, od interesa su kodovi koji se mogu na jedinstven način dekodovati. Takvi kodovi se zovu nedvosmisleni ili jednoznačno dekodivi kodovi. Kod ovih kodova bilo koja sekvenca kodnih reči korespondira jednoznačno samo jednoj poruci informacionog izvora.

Definicija 2.2 Jednoznačno dekodivi kodovi

Kôd diskretnog izvora informacija se naziva jednoznačno dekodivim, ako i samo ako bilo koja konačna sekvenca kodnih riječi jednoznačno odgovara jednoj poruci izvora.

Primjer 2.2 Nejednoznačan kod

Neka se izvor sastoji od tri simbola a, b i c. Poruka ovog izvora je svaki niz koji se sastoji od ova tri simbola, npr aaabcaacc.

Kôd definisan preslikavanjem je nejednoznačan.

$$a \mapsto 1 \qquad b \mapsto 00 \qquad c \mapsto 11$$

Npr. prilikom kodovanja niza **aaaa**, dobiće se kodna reč **1111**, što je isto kao i da kodujemo niz **cc**. Ne postoji način prilikom dekodovanja koji će biti u stanju da razlikuje šta je kodovana poruka: **aaaa** ili **cc**

- Da li je neki kod jednoznačno dekodiv moguće je utvrditi korišćenjem Sardinas-Patersonovog (Sardinas, Patterson) postupka.
- Kod je jednoznačno dekodiv ukoliko se nijedan element X_a ne nalazi u bilo kom X_i , $i > 0$. Kašnjenje pri dekodovanju je, u najgorem slučaju,

$$\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil l_{\min} < l_d < \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil l_{\max} \quad d = \min \{ i : X_i = \emptyset \}$$

- Pri čemu je l_{\min} minimalna, a l_{\max} maksimalna dužina neke kodne reči (elementa X), a gornje uglaste zagrade označavaju najmanji cijeli broj koji nije manji od x ("prvo veće cijelo").

43.Trenutan kod. Prefiksan kod.

Trenutni kodovi

18

- Među jednoznačnim kodovima od posebnog značaja su tzv. prefiksni kodovi (*Prefix – Free Code*).
- Jedan niz z dužine n ($n \geq 1$) je prefiks nekog drugog niza z' ako i samo ako je prvih n simbola u z' jednakog egzaktno nizu z .
- Npr. abba je prefiks niza abbabc.

• Definicija 2.3 Prefiksni kodovi

Za jedan kod se kaže da je prefiksan ako u njemu ni jedna kodna reč nije prefiks nekoj dugoj kodnoj reči.

- Primer 2.4 Neka je dat izvor sa tri simbola a,b i c. Za ovaj izvor primjer jednog prefiksног koda je,

$a \mapsto 0$	$b \mapsto 10$	$c \mapsto 11$
dok kôd		
$a \mapsto 1$	$b \mapsto 00$	$c \mapsto 10$
nije prefiksan.		

- Odakle potiče naš interes za prefiksним kodovima? Odgovor leži u dve osobine, 2.1 i 2.2.

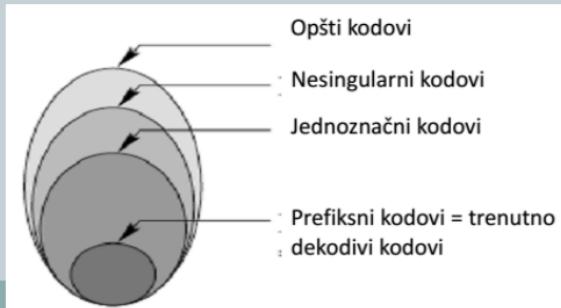
Osobina 2.1 Svaki prefiksni kod je jednoznačno dekodiv.

Važno je napomenuti da postoje jednoznačni kodovi koji nisu prefiksni, kao što nam to pokazuje Primer 2.3.

Definicija 2.4 Kod je trenutno dekodiv ako i samo ako se svaka kodna reč u bilo kom nizu kodnih reči može dekodovati u istom momentu kada je dostignut kraj kodne reči.

Osobina 2.2 Kod je trenutno dekodiv ako i samo ako je prefiksan.

- Trenutno dekodivi (trenutni) kodovi ne zahtjevaju memorisanje prispjelih kodnih riječi ili čekanje dospjeća novih da bi dekodovanje bilo obavljeno. Ovim se štedi i vreme i memorijski prostor dekodera.
- Klase kodova koje smo do sada opisali se međusobno odnose kao na slici

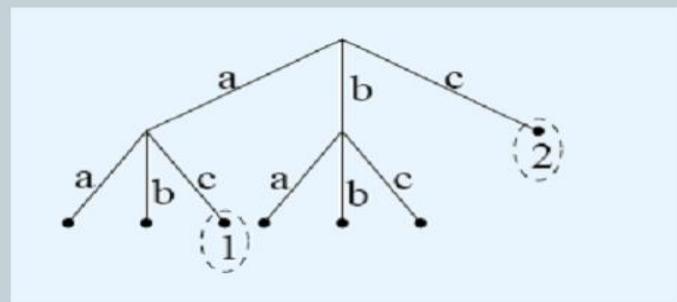


44. Kodno stablo.

Definicija 2.6 Kodno stablo

Kodno stablo je n-arno stablo čije su grane označene slovima datog alfabeta dimenzije n, na takav način da se svako slovo pojavljuje samo jedanput u izlaznim granama čvorova. Kodne riječi odgovaraju sekvencama oznaka grana duž puteva od korijena do listova.

- **Primer 2.6** Kodno stablo



Ternarno kodno stablo: kodna reč predstavljena listom 1 je ac, dok list 2 predstavlja kodnu riječ c.

Definicija 2.7 n-arni kod

Kod čiji alfabet ima n slova se naziva n-arni kod.

Osobina 2.4 Za svaki n-arni prefiksni kod postoji barem jedno n-arno kodno stablo takvo da svaka kodna riječ odgovara sekvenci oznaka na jedinstvenom putu od korijena stabla do lista. I obrnuto, svako kodno stablo definiše jedan prefiksni kod. Kodne riječi ovog prefiksnog koda su određene sekvencom oznaka putanja od korijena do svakog lista kodnog stabla.

Ukratko, kodno stablo i prefiksni kod su ekvivalentni objekti.

45. Kraftova nejednakost.

- Sada su nam potrebni uslovi koji mora da budu ispunjeni da bi jedan prefiksni kod postojao. Ispostavlja se da je Kraftova nejednakost potreban i dovoljan uslov.
- **TEOREMA 2.1** Kraftova nejednakost Za svaki D-arni prefiksni kod od N kodnih reči čije su dužine pozitivni cijeli brojevi l_1, l_2, \dots, l_N , mora važiti

$$\sum_{i=1}^N D^{-l_i} \leq 1 \quad (2.1)$$

i obrnuto, ako su date dužine kodnih reči koje zadovoljavaju ovu nejednakost, postoji prefiksni kod sa kodnim rečima date dužine. Kada u (2.1) važi jednakost, tada je kod kompletan.

- Primjer 2.8

- Za binarni ($D=2$) kompletni prefiksni kod iz primera 2.4 $\{0,10,11\}$ važi

$$\sum_{i=1}^N D^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

- Kraftova nejednakost nam kaže da postoji barem jedan ternarni prefiksni kod čije su dužine kodnih reči 1,2,2,4, zato što važi

$$3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-4} = \frac{46}{81} \simeq 0.57 < 1.$$

- Ovaj kod ne bi bio kompletan

- Klasična pogrešna upotreba Kraftove nejednakosti je odgovaranje na pitanje da li je kod sa zadatim dužinama kodnih reči prefiksan. Ova nejednakost nam samo daje informaciju kada može postojati jedan prefiksni kod.
- Npr. prvi kod iz primera 2.4 $\{1,00,10\}$ nije prefiksni iako je

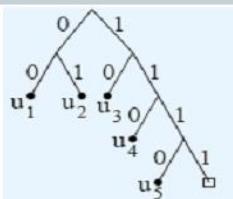
$$\sum D^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = 1.$$

- Teorema 2.1 nam samo kaže da postoji prefiksni kod istih dužina kodnih reči, i zaista on postoji i dat je u istom primeru 2.4, tj kod $\{0,10,11\}$.

- Primjer 2.9 Da li postoji binarni prefiksni kod sa dužinama kodnih reči $l_1 = 2, l_2 = 2, l_3 = 2, l_4 = 3$ i $l_5 = 4$? Odgovor je da, pošto je

$$\sum_{i=1}^5 2^{-l_i} = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16 < 1.$$

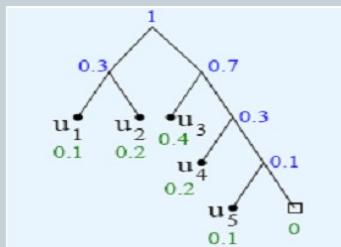
- Primjer jednog takvog koda je



U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Z	00	01	10	110	1110

46. Lema dužine puta.

- Lema 2.1 Lema dužine puta
- U vjerovatnosnom n-arnom stablu, prosječna (očekivana) vrijednost dubine listova jednaka je sumi verovatnoća unutrašnjih čvorova (isključivanjem listova i uključivanjem korijena).
- Primer 2.12 Lema dužine puta



Za primjer ovog vjerovatnosnog binarnog stabla,
očekivana dubina listova je jednaka
 $1+0.3+0.7+0.3+0.1=2.4$
Provjera:
očekivana dužina kodnih riječi je
 $2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2.4$

• Definicija 2.11

Entropija listova n-arnog verovatnosnog stabla

- Neka je N broj listova vjerovatnosnog n-arnog stabla i neka su p_1, p_2, \dots, p_N njihove vjerovatnoće. Pod entropijom listova podrazumevaćemo entropiju definisanu sa

$$H_{leaf} = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

• Osobina 2.5

- Za vjerovatnosno n-arno stablo koje odgovara prefiksnom kodu informacionog izvora U , važi

$$H_{leaf} = H(U)$$

• Teorema 2.3

- Za bilo koja dva prefiksna koda nad istim informacionim izvorom kôd koji ima kraću očekivanu dužinu ima veću entropiju simbola
- Komprimovanje izvora informacija povećava entropiju simbola.

47. Prva Šenonova teorema.

- Koristeći dosadašnje rezultate, u stanju smo da odredimo fundamentalnu donju granicu očekivane vrednosti dužine prefiksnih kodova datog informacionog izvora.

TEOREMA 2.4 Šenonova teorema kodovanja Dio I

Za bilo koji diskretni izvor informacija bez memorije čija je entropija $H(U)$, očekivana dužina D-arnog prefiksnog koda $E[L]$ tog izvora, zadovoljava

$$E[L] \geq \frac{H(U)}{\log_2 D} \quad \text{Znači, za binarno kodovanje } E[L] \geq H(U)$$

- Teorema 2.4 daje jednu donju granicu za očekivanu dužinu koda datog izvora informacija. Kakva je ta granica? Da li ima i drugih granica (npr 1)?
- Jasno je da ovaj rezultat postaje visokovrjednovan samo ako pokažemo da je ta granica najbolja moguća donja granica.
- Da bismo ovo pokazali, potrebno je konstruisati konkretan kod čija se očekivana dužina kodnih reči proizvoljno tačno približava ovoj granici.

48. Šenon-Fanoov prefiksni kod. Primjer.

- Da li ovakav kod uvijek postoji?
- Odgovor je potvrđan na osnovu Kraftove nejednakosti.
- Zaista po definiciji operacije je

$$l_i \geq -\frac{\log_2 p_i}{\log_2 D}$$
$$\sum_i D^{-l_i} \leq \sum_i D^{\frac{\log_2 p_i}{\log_2 D}} = \sum_i D^{\log_D p_i} = \sum_i p_i = 1$$

- Sada ćemo istražiti koliko je ovaj kod dobar u odnosu na očekivanu dužinu koda. Po definiciji važi

$$l_i < -\frac{\log_2 p_i}{\log_2 D} + 1$$

- Prvo ćemo konstruisati efikasan prefiksni kod, koji iako nije optimalan u opštem slučaju se dovoljno dobro približava donjoj granici očekivane vrednosti dužine kodnih reči.
- Ideja se svodi na izbor dužine l_i kodne reči u_i tako da važi

$$l_i = \left\lceil -\frac{\log_2 p_i}{\log_2 D} \right\rceil \text{ za } D=2 \quad l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

gdje $\lceil x \rceil$ označava cijelobrojnu vrednost takvu da je

$$x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1.$$

Ovakav kod se naziva Šenon-Fanoov kod, budući da ga je Šenon implicitno dao u svom radu iz 1948 godine, a Fano ga je eksplicitno konstruisao.

- Ako obje strane pomnožimo sa p_i i sumiramo po i, dobijamo

$$\sum_i p_i l_i < \frac{-\sum_i p_i \log_2 p_i}{\log_2 D} + \sum_i p_i$$

$$E[L] < \frac{H(U)}{\log_2 D} + 1$$

- Vidimo da je očekivana vrednost kodnih reči Šenon-Fanoov koda udaljena najviše jedan simbol od donje granice date Teoremom 2.4. To znači da je ovaj kod prilično dobar i da što je entropija izvora veća on je sve bolji. Međutim za male entropije izvora moguće je pronaći znatno bolji kod.

- **TEOREMA 2.5** Šenonova teorema kodovanja, Dio II

Za bilo koji diskretni izvor informacija bez memorije, čija je entropija $H(U)$, postoji barem jedan D -arni prefiks kod čija je očekivana dužina kodnih reči $E[L]$ data sa

$$E[L] < \frac{H(U)}{\log_2 D} + 1$$

- Primjer: Razmotrimo binarni ($D=2$) Šenon-Fanoov kod za izvor U sa četiri simbola čije su verovatnoće $p_1=0.4$, $p_2=0.3$, $p_3=0.2$ i $p_4=0.1$. Kodne reči su date dužinama

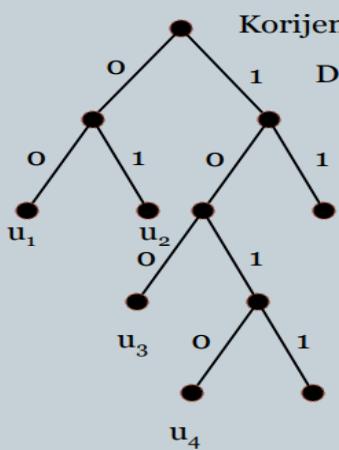
$$l_1 = -\lceil \log_2 0.4 \rceil = 2, \quad l_2 = -\lceil \log_2 0.3 \rceil = 2, \\ l_3 = -\lceil \log_2 0.2 \rceil = 3, \text{ and} \quad l_4 = -\lceil \log_2 0.1 \rceil = 4.$$

• Neka su zadate dužine kodnih reči l_1, l_2, \dots, l_N

$$L = \max_i l_i + \hat{1}$$

Kako se dobija kodno stablo?

1. Startovati sa jednim čvorom (korijen)
2. Za svako k iz $[0, L]$
 - A) Pripisati kodnu riječ čvoru tekuće dubine k, tako je $l_i = k$
 - B) Razviti sve preostale čvorove tekuće dubine k, generišući za svaki D nasljednika (djece)



Dubina 1 – Imamo li kodnih riječi dužine 1 ?

Pošto nemamo, "razmotavamo" stablo dalje

Dubina 2 – Imamo li kodnih riječi dužine 2 ?

Pošto imamo dvije pridružujemo kodne riječi u_1 i u_2

Dubina 2 – Imamo li još kodnih riječi dužine 2 ?

Pošto nemamo, "razmotavamo" stablo dalje ...

Dubina 3 – Imamo li kodnih riječi dužine 3 ?

Pošto imamo, pridružujemo kodnu riječ u_3

Dubina 4 – Imamo li kodnih riječi dužine 4

Pošto imamo, pridružujemo kodnu riječ u_4

- Na osnovu Leme o dužini puta, imamo

$$E[L] = 1 + 0.7 + 0.3 + 0.3 + 0.1 = 2.4,$$

Direktan račun daje

$$H(U) = 0.4 \log 0.4 + 0.3 \log 0.3 + 0.2 \log 0.2 + 0.1 \log 0.1 \simeq 1.8 \text{ bit.}$$

Vidimo da je zadovoljena nejednakost

$$E[L] < \frac{H(U)}{\log D} + 1.$$

Odnosno $2.4 < 1.8 + 1 = 2.8$.

Međutim vidi se da ovaj kod nije optimalan. Kada bismo upotrijebili 4 kodne reči dužine 2, imali bi smo kraću očekivanu dužinu koda $E[L]=2$

49. Hafmenov kod. Primjer.

- Hafmanov algoritam kodovanja izvora informacija bez memorije, pomoću D-arnog prefiksнog koda, daje optimalan kod minimalne moguće očekivane vrednosti kodnih reči.
- Neka izvor U ima n simbola u_1, u_2, \dots, u_n , sa odgovarajućim verovatnoćama p_1, p_2, \dots, p_n
- **HAFMANOV KOD**
- 1. Startujemo sa svih n čvorova, koji će na kraju kodovanja biti listovi. Izračunajmo ostatak r pri dijeljenju $1-n$ sa $D-1$ (Za binarni kod $D=2$ pa je ostatak nula). Učinimo svih n čvorova "aktivnim".
- 2. Formirajmo novi čvor, čija su djeca-čvorovi $D-r$ najmanje vjerovatnih aktivnih čvorova i r neiskorišćenih čvorova (listova)



Označiti $D-r$ aktivnih čvorova kao "neaktivne" novokreirani čvor označiti kao "aktivran"

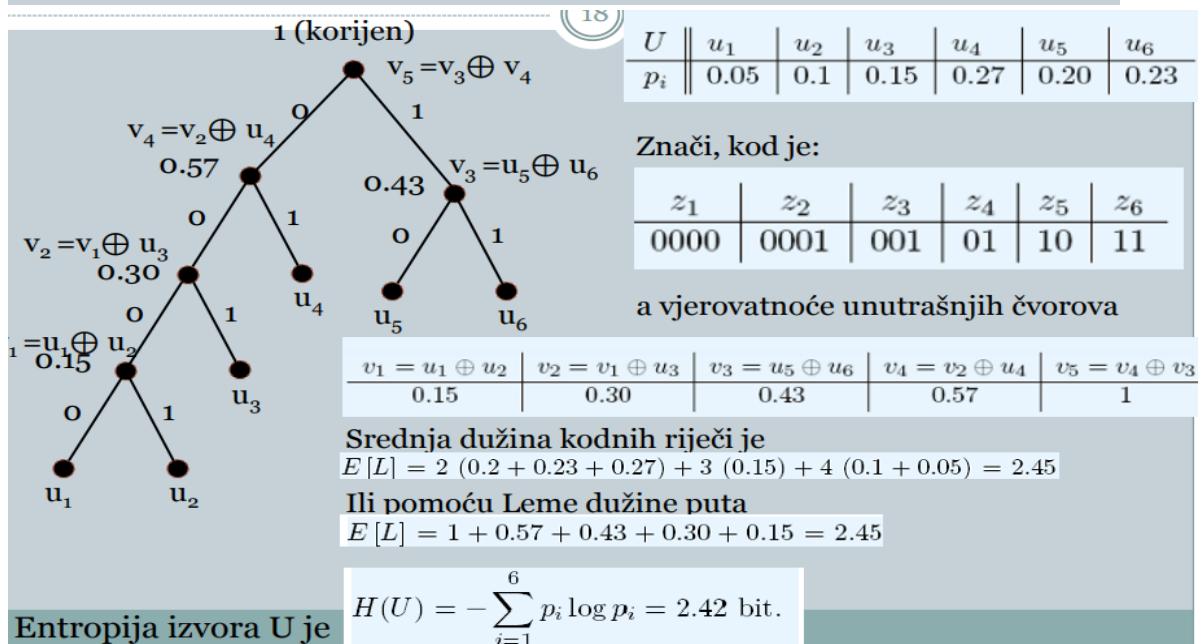
- Dodijeliti novokreiranom čvoru vjerovatnoću jednaku sumi upravo deaktiviranih $D-r$ čvorova.
- 3. Ako postoji samo jedan aktivni čvor tada se procedura
- okončava. Taj čvor je ujedno i korijen konačnog kodnog stabla. U suprotnom, postaviti $r=0$ i ići na korak 2.
- Prefiksni kod koji rezultuje u opisanoj proceduri se naziva Hafmanov kod, budući da je upravo opisani algoritam prvi dao Hafman 50-tih godina XX veka.

- Primjer 2.16 Binarni Hafmanov kod
- Neka je dat izvor U

U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
p_i	0.05	0.1	0.15	0.27	0.20	0.23

- Binarni kod, znači $D=2$. Pošto je $n=6$, ostatak pri dijeljenju $1-n=-5$ sa $D-1=1$ je 0. ($-5 = -5 \times 1 + 0$). Znači $r = 0$.

Grupišemo $D-r=2-0=2$ najmanje vjerovatnih simbola

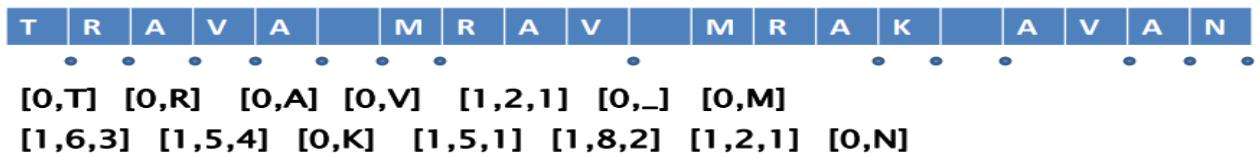


50. LZ 77 kod. Primjer.

LZ 77 primjer: Kodovati sekvencu TRAVA MRAV MRAK AVAN
 LZ 77 algoritmom ako je veličina prozora $W=8$

[0, char] – ako se pojavljuje prvi put

[1, a, b] – ako se ponavlja pri čemu je a broj pozicija unazad (dubina match-a) a b dužina sekvence koja se ponavlja (dužina match-a) $b \leq a$



$$L_N = 20 \times 8 = 160$$

$$L = 8 \times 9 + 6 \times 7 = 114$$

$$\eta = 114 / 160$$

//doslovno samo to ima

51.LZ 78 kod. Primjer.

LZ 78

Umjesto stringa, koristi se rječnik

Kodovanje (0,sym), ako sym nije u rječniku

(adresa prefiksa, posljednji sym), ako segment nije u rječniku

Kodovati sekvencu LZ78 algoritmom



A B B C B C A B A B C A A B C A A B

Adresa	Segment	Izlaz
1	A	(0,A)
2	B	(0,B)
3	BC	(2,C)
4	BCA	(3,A)
5	BA	(2,A)
6	BCAA	(4,A)
7	BCAAB	(6,B)

52. Aritmetičko kodovanje.

Aritmetičko kodovanje

- Aritmetičko kodovanje ne generiše eksplisitno kodnu tabelu već se svakoj poruci pridružuje oznaka (eng. tag) koja predstavlja realni broj iz intervala [0, 1)
- Ovo omogućava da se izvorni simbol koduje necjelobrojnim brojem bita (**u prosjeku**)
- Da bi se odredila oznaka poruke, iz intervala [0, 1) se bira podinterval čija je širina određena vjerovatnoćom prvog simbola poruke
- Ovaj postupak se nastavlja čime se u svakom koraku dobija sve uži interval (dobijeni interval je jedinstven)
- Konačno, kao oznaka se može izabrati proizvoljan broj iz dobijenog intervala (predstavljen nizom bita)

- Za određivanje granica podintervala koji odgovaraju pojedinim izvornim simbolima koristićemo vrijednosti funkcije raspodjele izvornih simbola
- Ako je alfabet $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ a vjerovatnoće simbola su $P(s_i), i=1,2,\dots,n$ možemo definisati slučajnu promjenljivu X tako da je $X(s_i) = i$
- Sada je funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive X

$$F(i) = \sum_{k=1}^i P(X=k) = \sum_{k=1}^i P(s_k); \quad i=1,2,\dots,n$$

- Podinterval koji odgovara simbolu s_i je oblika $[F(i-1); F(i))$, pri čemu ćemo usvojiti da je $F(0)=0$. Znači, podintervali koji odgovaraju različitim simbolima su disjunktni.
- Primjer: $X(A)=1, X(B)=2, \dots, X(\$)=7$

Simbol	Vjerovatnoća	Podinterval
$s_1 = A$	0,1	$[0; 0,1)$
$s_2 = B$	0,05	$[0,1; 0,15)$
$s_3 = C$	0,3	$[0,15; 0,45)$
$s_4 = D$	0,05	$[0,45; 0,5)$
$s_5 = E$	0,2	$[0,5; 0,7)$
$s_6 = F$	0,2	$[0,7; 0,9)$
$s_7 = \$$	0,1	$[0,9; 1,0)$

Aritmetičko kodovanje

- Da bi se poruka kodovana aritmetičkim kodom mogla dekodovati potrebno je da se dekoderu na neki način signalizira kada je dekodovanje završeno. Ovo se može uraditi tako što će se prenositi poruke poznate dužine ili tako što će se koristiti poseban simbol koji predstavlja kraj poruke. Ovaj simbol nazivaćemo terminator. Terminator može, na primjer, pri prenosu slike označavati da se stiglo do kraja linije, odnosno, do kraja slike. U ovakvoj primjeni terminator je značajan i za obnavljanje sinhronizacije u slučaju grešaka u prenosu slike.

- Osnovni postupak za određivanje intervala kojem poruka pripada dat je Algoritmom 8.1.

Algoritam 8.1 Aritmetički koder.

```

1:  $l \leftarrow 0,0; u \leftarrow 1,0$ 
2:  $r \leftarrow u - l$ 
3:  $s \leftarrow$  sljedeći simbol
4:  $i \leftarrow X(s)$ 
5: repeat
6:    $l \leftarrow l + rF(i-1)$ 
7:    $u \leftarrow l + rF(i)$ 
8:    $r \leftarrow u - l$ 
9:    $i \leftarrow X(s)$ 
10: until  $s == \$$ 
11: generisati oznaku iz intervala  $[l; u)$ 
```

53. Prenos preko BSC udvajanjem bita. Vjerovatnoća greške.

- Prepostavimo sada kodovanje u kome je svaki bit prethodnog koda ponavljen (udvojen).

message	000	001	010	011	100	...	111
code	000000	000011	001100	001111	110000	...	111111

- Sada je vjerovatnoća tačnog prijema jedne poruke $(1-p)^6 = 0.531$ odnosno vjerovatnoća greške 0.469, što je veće nego u prethodnom slučaju.

Međutim potrebno je razmotriti još jedan tip grešaka, naime kolika je vjerovatnoća pogrešnog prijema koja se ne može detektovati.

- Ova situacija nastaje kada se promene npr. dva simbola, npr umjesto **oooooo** se primi **110000**.
- U opštem slučaju promene od 2, 4 ili svih 6 simbola dovode do pogrešnog prijema koji se ne može razlikovati od tačnog prijema.
- Vjerovatnoća promjene dva simbola je data sa
$$\binom{3}{1} p^2 (1-p)^4 = 3p^2 (1-p)^4,$$
- Vjerovatnoća promjene 4 simbola je data sa $3p^4 (1-p)^2$, i konačno vjerovatnoća promjene 6 simbola je data sa p^6 .
- Ukupna vjerovatnoća greške koja se ne može detektovati je data zbirom $3p^2 (1-p)^4 + 3p^4 (1-p)^2 + p^6 = 0.020$
- Ova vjerovatnoća je prilično mala. **Zaključak je da se odgovarajućim kodovanjem može poboljšati prenos poruka preko kanala na kome deluju šumovi.**

54. Kanalska matrica. Dijagram binarnog simetričnog kanala i binarnog kanala sa brisanjem.

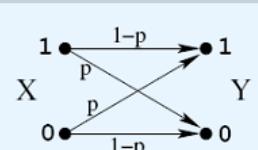
//nisam uspio naci nista za kanalsku matricu, mozda je nesto iz knjige?

- Primjer 4.1 Binarni simetrični kanal (BSC – Binary Symmetric Channel)

Najprostiji DMC je binarni simetrični kanal (BSC) kod koga su $\gamma_X = \gamma_Y = \{0,1\}$ binarni, i

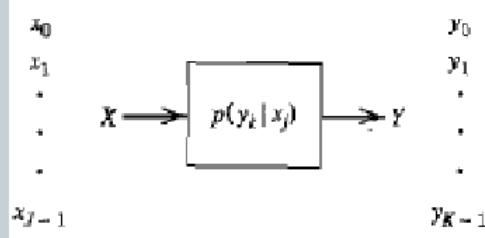
$$p_{Y|X=0}(1) = p_{Y|X=1}(0)$$

Vrijednost $p = p_{Y|X=0}(1) = p_{Y|X=1}(0)$ se naziva vjerovatnoća greške (error rate) i to je ujedno jedini parametar BSC, budući da je $p_{Y|X=0}(0) = p_{Y|X=1}(1) = 1 - p$. BSC se prezentuje sljedećim dijagrameom



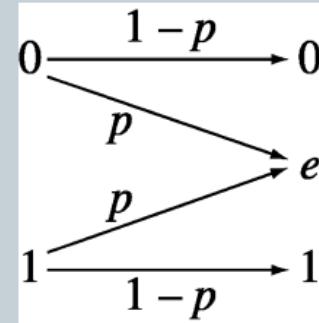
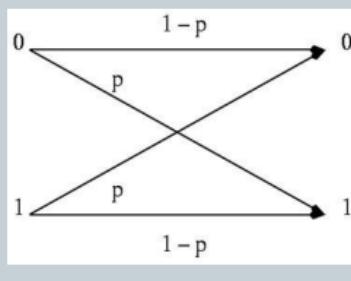
//možda je to ova tranziciona matrica?

- Pogodan način je da se kanal opisuje i pomoću tzv. tranzicione matrice u kojoj se nalaze prelazne vjerovatnoće



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(y_0|x_0) & p(y_1|x_0) & \cdots & p(y_{K-1}|x_0) \\ p(y_0|x_1) & p(y_1|x_1) & \cdots & p(y_{K-1}|x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(y_0|x_{j-1}) & p(y_1|x_{j-1}) & \cdots & p(y_{K-1}|x_{j-1}) \end{bmatrix}$$

- Primjer: Odrediti tranzicione matrice za BSC i kanal sa brisanjem



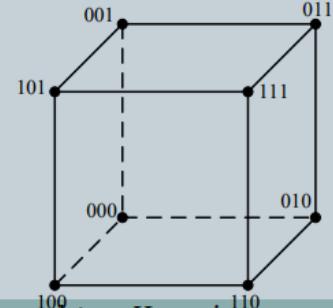
$$P_{BSC} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$P_{BEC} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

- Primjer 4.2 Prenos preko BSC u prisustvu šuma
 - Pretpostavimo da želimo da prenesemo osam poruka: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Pretpostavimo da je na kanalu za prenos prisutan šum, tako da u proseku se svaki 10. simbol promeni u suprotni (0 u 1 ili 1 u 0). Takav kanal je BSC sa parametrom $p=0.1$.
 - Kolika je verovatnoća da prenesemo jednu poruku korektno?
 - Bez obzira koja se poruka šalje ova verovatnoća iznosi
- $$(1 - p)^3 = 0.9^3 = 0.719$$
- Što odgovara vjerovatnoći da tri puta prenesemo jedan bit bez greške. Odgovarajuća verovatnoća greške je $1-0.719=0.281$, dakle prilično visoka.

55. Hemingovo rastojanje i težina kodne riječi. Veza između njih.

- Ovo rastojanje je jednak broju pozicija na kojima se dvije binarne sekvence iste dužine razlikuju. Drugim riječima, to je broj grešaka koje mogu jednu sekvencu prevesti u drugu
- Na primjer, Hamming-ovo rastojanje između sekvence 1011010 i 1001110 je $d=2$, jer se ove sekvence razlikuju u dvije podvučene pozicije (treći i peti bit).
- Do istog rezultata se može doći jednostavnim sabiranjem po modulu 2 ovih sekvenci bez prenosa, a zatim brojanjem jedinica daje vrijednost za Hamming-ovo rastojanje, d .
- U ovom slučaju kombinacije 3 bita se mogu predstaviti kao rogljevi kocke u trodimenzionalnom prostoru, dok za Hamming-ovo rastojanje uzimamo broj ivica koje se moraju preći da bi se došlo iz jedne tačke u drugu.



Slika – Geometrijska predstava Hamming-ovog rastojanja za trobitnu sekvencu.

- Težina binarne kodne **a** riječi predstavlja broj jedinica (“1”) u kodnoj riječi i označava se sa $w(\mathbf{a})$
- Kakva je veza između Hemingovog rastojanja d i težine w ?
- Naravno, d je binarni a w unarni operator.

$$d(a,b)=w(a \oplus b)$$

- Analogno,

$$w(a)=d(a,0)$$

56. Kod sa ponavljanjem. Vjerovatnoća greške koja se ne može detektovati.

- Kratko se osvrnimo na najelementarniji način zaštitnog kodovanja koji se svodi na višestruko ponavljanje jedne poruke (simbola)
- Na primjer, neka se jedan bit ponavlja 3 puta.
Tada je za dvije poslate poruke «111» i «000»,
zbog kanalnih grešaka, moguće na prijemnoj strani
dobiti osam različitih poruka, kao što je prikazano na slici.
- Kako ćemo izvršiti odlučivanje?
- Logično se nameće donošenje odluke na bazi većinske (majoritetne) logike. Na ovaj način smo izvršili detektovanje i korekciju jednostrukih greški, te smanjili ukupnu vjerovatnoću greške.



- Odredimo vjerovatnoću greške koju ne možemo otkriti (greške koje će biti pogrešno ispravljene)

- Pretpostavimo da šaljemo poruku $s = 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$
- Preko BSC sa prelaznom vjerovatnoćom $p=0.1$

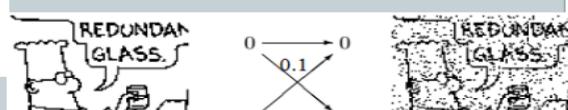
Source sequence	Transmitted sequence
s	t
0	000
1	111

Neka je primljena sekvenca (r) data na slici. Kanal "dodaje" vektor

s	0	0	1	0	1	1	0
t	000	000	111	000	111	111	000
n	000	001	000	000	101	000	000
r	000	001	111	000	010	111	000
\hat{s}	0	0	1	0	0	1	0
corrected errors		*		*		*	
undetected errors							

greške n ?

Kako ćemo dekodovati sekvencu?



- Koje greške nećemo moći ispraviti?
- Naravno, na bazi većinske logike ćemo pogrešno dekodovati dvostruku i trostruku grešku. Vjerovatnoća iste je:

$$P_{\varepsilon} = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3$$

- Za $p \ll 1$ (u ovom slučaju 100 puta) $1-p \approx 1$ $p^3 \ll p^2$

$$P_{\varepsilon} \approx 3p^2$$

- U opštem slučaju za broj ponavljanja $n=2n_0+1$ vjerovatnoća neotkrivene poruke iznosi

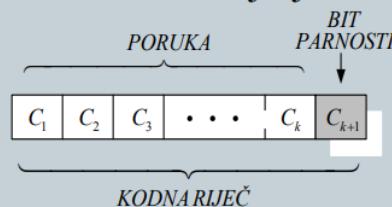
$$P_e = \sum_{k=n_0+1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- U konkretnom slučaju, vjerovatnoća greške je smanjena sa p (kada nema zaštitnog kodovanja) na $3p^2$, znači sa 0.1 na 0.03 (3,3 puta)
- Šta gubimo ako dobijamo na vjerovatnoći greške?

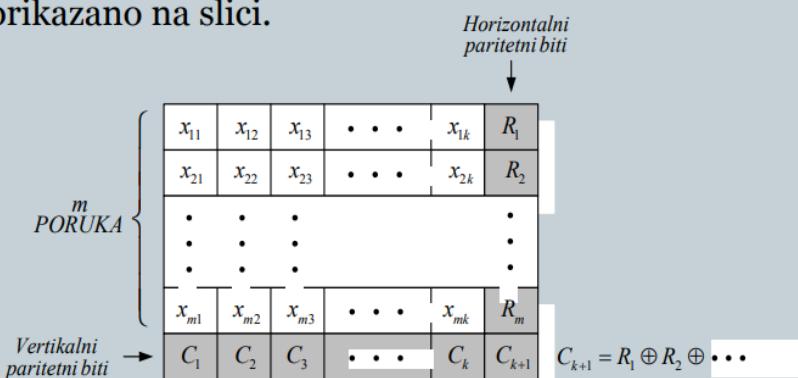
Cijena koja se plaća za smanjenje vjerovatnoće greške je smanjenje brzine prenosa informacija, jer se sada za prenos količine informacija, za kôd sa ponavljenjem (3,1), od 1 šenona umjesto jednog koriste tri bita. Odnosno, pri nepromjenljivom protoku informacija mora se povećati bitska brzina u kanalu. Ovo može da utiče na potreban propusni opseg i povećanje snage šuma na ulazu u prijemnik.

57. Kod sa provjerom na parnost (standardni i 2D).

- Kod ovih vrsta kodova se jednostavno na k informacionih bita doda samo jedan kontrolni bit ($n=k+1$) provjere na parnost, tako da ukupan broj jedinica u kodnoj riječi, n , bude paran



- Ovim kodom se može otkriti neparan broj grešaka nastao tokom prenosa kodne riječi. Međutim, paran broj grešaka u istom bloku nemoguće je otkriti na ovaj način, jer je i nakon toga ukupan broj jedinica u bloku paran.
- Kodni količnik u ovom slučaju iznosi $R = \frac{n-1}{n}$
- Međutim informacioni biti se ne moraju posmatrati "jednodimenzionalno". Informacioni biti se mogu složiti u okviru matrice (dvodimenzionalno), pa se u ovom slučaju provjera na parnost može obaviti i po vrstama i po kolonama, kako je prikazano na slici.



Neka je data sekvenca od 12 bita koje formiraju blok od 3 poruke po 4 bita
– 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1

$\begin{matrix} 3 \\ \text{PORUKE} \\ \text{PO} \\ 4 \text{ BITA} \end{matrix}$	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	0	1	0	1		0	1	0	1		1	1	1	1											
0	1	0	1																							
0	1	0	1																							
1	1	1	1																							

$\begin{matrix} 3 \\ \text{PORUKE} \\ \text{PO} \\ 4 \text{ BITA} \end{matrix}$	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0																	
0	1	0	1	0																	
1	1	1	1	0																	
1	1	1	1	0																	

Dodaju se još vertikalni i horizontalni paritetni biti. U kanal se šalju biti 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 (4 x 5 = 20 bita). Neka se npr. greška dogodila na 9. bitu

0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0

Računanjem paritetnih bita po redovima i kolonama dolazimo do pozicije jednostrukе greške. Invertovanjem bita vršimo korekciju.

$\begin{matrix} 3 \\ \text{PORUKE} \\ \text{PO} \\ 4 \text{ BITA} \end{matrix}$	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0																		
0	1	0	1	1																		
1	1	1	1	1																		
1	1	1	1	0																		

- U primjeru sa slike imamo mk informacionih bita. Uključujući bite provjere na parnost, kodna riječ (blok) će sadržavati ukupno $n=(m+1)(k+1)$ bita od kojih su $m+k+1$ kontrolni. Sada je kodni količnik:

$$R = \frac{mk}{(m+1)(k+1)} .$$

- Pri tom kvadratna matrica ($m=k$) daje najveću vrijednost kodnog količnika koja iznosi:

$$R = \frac{k^2}{(k+1)^2} .$$

58. Hemingov kod (7,4). Vjerovatnoća greške koja se ne može otkriti.

- Razmotrimo primjer Hemingovog koda za zaštitno kodovanje 4 ($k=4$) informaciona bita. Odredimo broj kontrolnih bita:

$$2^{n-k} \geq n+1$$

$$2^{n-4} \geq n+1$$

- Koliko iznosi ukupan broj bita, n ?
- Pošto je $n=7$, riječ je o Hemingovom kodu (7,4)
- Već je rečeno da se kontrolni biti postavljaju na “težinske” pozicije (u ovom slučaju 1, 2 i 4). Na preostale pozicije se postavljaju informacioni biti.

k1	k2	i1	k3	i2	i3	i4
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

- Kontrolni biti, pogledom na tablicu, iznose
 $k_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$
Analogno, drugi i treći kontrolni bit iznose
 $k_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$
 $k_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$

o	o	o	---
o	o	1	k ₁
o	1	o	k ₂
o	1	1	i ₁
1	o	o	k ₃
1	o	1	i ₂
1	1	o	i ₃
1	1	1	i ₄

Npr, neka je data poruka od 4 bita $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$

k ₁	k ₂	1	k ₃	o	o	1

$$k_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Kontrolni biti su: $k_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$$k_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

- Sada je kodna riječ koja se šalje u kanal $\mathbf{x} = 0011001$

o	o	1	1	o	o	1

- Pretpostavimo da se greška dogodila na trećem bitu (odnosno prvom informacionom bitu)*. Znači, vektor greške je $e = 0010000$. Primljena riječ \mathbf{y} je $y = x \oplus e = 0011001 \oplus 0010000 = 0001001$
- Odredimo sada bite sindroma

$$s_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

- * Naravno, ovo dekoder ne zna!!!

s ₃	s ₂	s ₁	---
o	o	1	y ₁
o	1	o	y ₂
o	1	1	y ₃
1	o	o	y ₄
1	o	1	y ₅
1	1	o	y ₆
1	1	1	y ₇

- Znači sindrom, $S = [s_3 s_2 s_1] = [011]_2 = 3_{10}$ pokazuje jednostruku grešku na 3. bitu, čijim invertovanjem dobijamo najvjerojatniju poslatu riječ u kanal $x=0011001$
- Znači, informaciona kodna riječ je 1 0 0 1.
- Koliko iznosi vjerovatnoća greške koja se ne može ispraviti?
- U opštem slučaju, Hemingov dekoder ne može ispraviti sve greške od dvostrukih do sedmostrukih.

$$P_e = \sum_{k=2}^7 \binom{7}{k} p^k (1-p)^{7-k}$$

- Ako pretpostavimo da je $p < 1$, članovi višeg reda od 2 se mogu zanemariti pa je dvostruka greška dominantna (*leading order*). Tada je

$$P_e \approx \binom{7}{2} p^2 (1-p)^{7-2}$$

Što iznosi približno $21p^2$

- Sada pretpostavimo da su se pri prenosu dogodile dvije greške u bloku, npr. na 1. i 7. bitu.

$$y = x \oplus e = 0011001 \oplus 1000001 = 1011000$$

- Odgovarajući sindrom (zadaća) je $S = [s_3 s_2 s_1] = [110]_2 = 6_{10}$
- U ovom slučaju možemo izvesti pogrešan zaključak da se desila greška na 6. bitu, pa bi uvećali broj grešaka (nekada se može i smanjiti)
- Nameće se ideja da se dodavanjem još jednog bita provjere parnosti pored ispravljanja (korekcije) jednostrukih detektuju i dvostrukih greški. Odnosno, na posljednje mjesto (osmo u slučaju koda 7,4) dodaje se opšta provjera na parnost $k_4 = \sum_{i=1}^8 x_i \pmod{2}$
- Na prijemu se računa provjera (nije element sindroma) $s_4 = \sum_{i=1}^8 y_i \pmod{2}$

59. Hemingov kod (8,4) .

//samo ovo ima treba se objasniti vjerovatno gdje ce biti informacioni, gdje kontrolni biti ? i onda ovu razliku navesti?

- U posmatranom slučaju, moguće su 4 kombinacije (neka S predstavlja brojnu vrijednost sindroma \mathbf{S}):
 1. $S=0, s_4=0$ – nije se desila greška ili (mnogo manje vjerovatno) je riječ komplementirana (osmostruka)
 2. $S=0, s_4=1$ – desila se greška na bitu parnosti
 3. $S\neq 0, s_4=1$ – postoji greška upravo na poziciji koju pokazuje sindrom (ili se desilo 3,5 ili 7 grešaka)
 4. $S\neq 0, s_4=0$ – desila se dvostruka greška (ili 4 ili 6)

60. Veza Hemingovog rastojanja i sposobnost koda da otkriva i ispravlja greške.

- Ranije je uveden pojam Hemingovog rastojanja (d) – broj pozicija gdje se 2 vektora razlikuju
- Može se pokazati da Hemingovo rastojanje predstavlja metriku
- Ako je Hemingovo rastojanje dvije kodne riječi $d=1$, očigledno je da se nikakve greške ne mogu otkriti (a pogotovo ispraviti) jer već jednostruka greška jednu riječ prevodi u drugu.
- Za otkrivanje jednostrukih grešaka potrebno je da $d \geq 2$, a da bi se otkrilo (detektovalo) q_d grešaka u kodnoj riječi mora da bude

$$d \geq q_d + 1$$

- Naravno, ako u kodu ima više kodnih riječi, treba posmatrati najgori slučaj, odnosno najmanje moguće Hemingovo rastojanje između kodnih riječi datoga koda.

- Ako greške treba i ispraviti (jer otkrivanje grešaka podrazumjeva postojanje povratnog kanala za retransmisiiju), mora za ispravljanje q_c grešaka u kodnoj riječi da vrijedi:

$$d \geq 2q_c + 1$$

- Analogno ako je potrebno otkriti q_d grešaka i od njih ispraviti q_c grešaka ($q_d \geq q_c$) tada mora da bude:

$$d \geq q_d + q_c + 1$$

- Ovo je ujedno i opšta formula iz koje se dobijaju prethodni izrazi za $q_c=0$ (samo detektovanje) i $q_c=q_d$ (korekcija svih detektovanih grešaka)

- 1) Neka je dat kod sa rijećima 00,01,10 i 11. Ovdje je $d=1$ i nema zaštitnog kodovanja
- 2) Neka je dat kod 000,011,101 i 110. U ovom kodu je $d=2$ pa kod može detektovati jednostrukе greške
- 3) Neka je dat kod 000 i 111 (kod sa ponavljanjem). Rastojanje je $d=3$. To znači da se mogu:
 - Ispravljati (samim tim i otkriti) jednostrukе greške, ili
 - Otkriti jednostrukе i dvostrukе greške