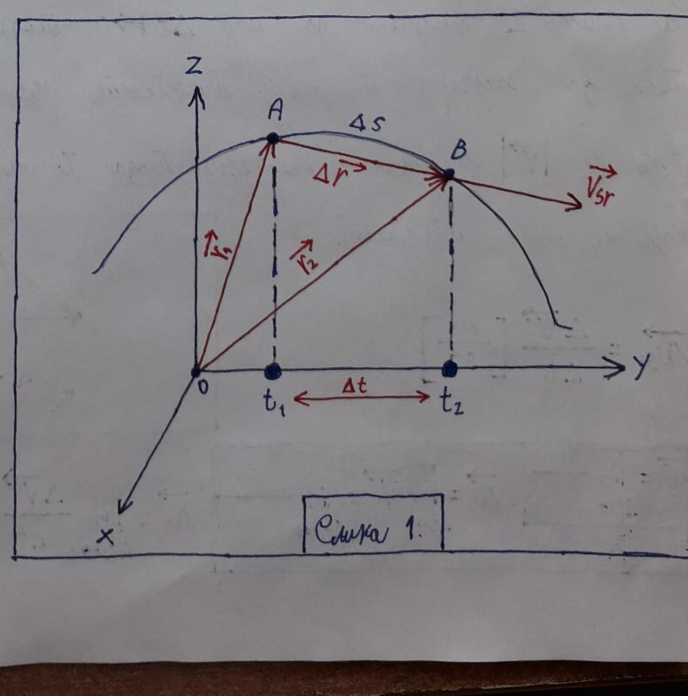
1. Брзина и убрзање

Трожић Андреј 1259/14

Анализирајмо кретање материјалне тачке у Декартовом тродимензионалном координатном систему (наш усвојени систем референције). Материјална тачка се креће у односу на тачку координатног почетка (референтно тијело). Нека се у неком временском тренутку t_1 материјална тачка налази у тачки A. Положај материјалне тачке у односу на координатни почетак одређен је радијус вектором $\vec{r_1}$. У неком другом временском тренутку t_2 материјална тачка се налази у тачки B, а положај материјалне тачке у односу на координатни почетак одређен је радијус вектором $\vec{r_2}$. Значи за временски интервал $\Delta t = t_2 - t_1$ материјална тачка пређе лук ΔS и направи померање које је једнако вектору:

$\Delta \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$.



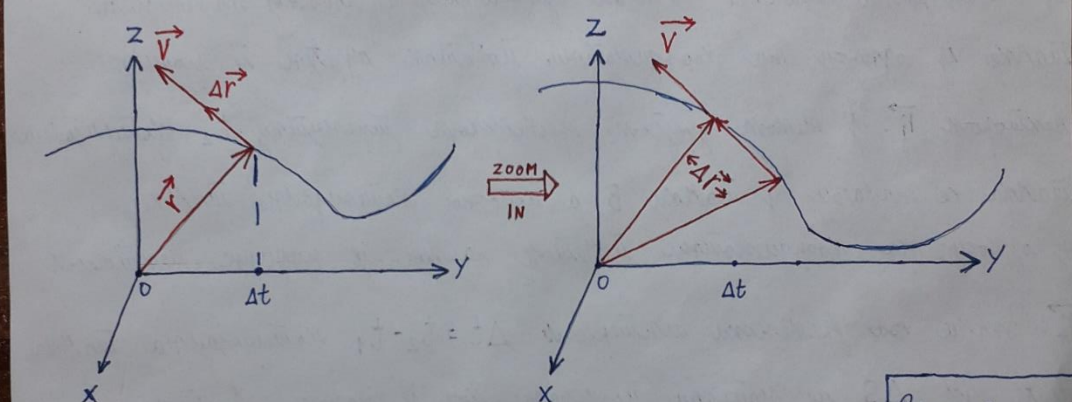
Слика 1.

Како је вектор Померања [redacted] функција по времену $\vec{r} = \vec{r}(t)$ средња брзина материјалне тачке се дефинише као:

$$\vec{V_{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Правац и смјер вектора $\overrightarrow{V_{sr}}$ се поклапа са правцем и смјером вектора помјерања $\Delta\vec{r}$. Тренутна брзина $\vec{V}$ се дефинише као гранична вриједност $\overrightarrow{V_{sr}}$ када $\Delta t \mapsto 0$. Математички:

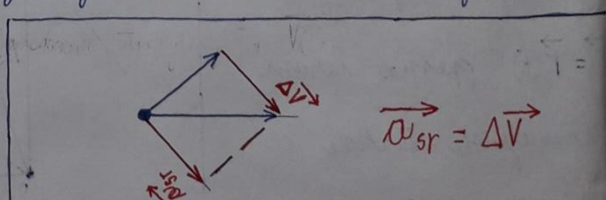
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \overrightarrow{V_{sr}} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left[\frac{m}{s}\right]$$



Слика 2

Са слике 2 видимо да ако $\Delta t \mapsto 0$ тада вектори $\Delta\vec{r}$ и $\vec{V}$ теже да заузму положај тангенте на путању.

Ако се $|\vec{V}|$ мијења у времену тада говоримо о физичкој величини која се зове убрзање.



$$\overrightarrow{a_{sr}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{\Delta t}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U izrazu za $\vec{a}$ na prethodnoj stranici postoji greška, ispravno bi bilo:

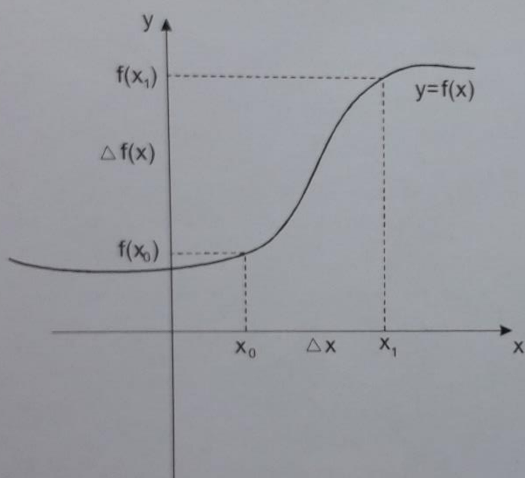
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \, [\frac{m}{s^2}]$$

IZVOD FUNKCIJE

Predpostavimo da je funkcija f(x) definisana u nekom intervalu (a,b) i da je tačka x_0 iz intervala (a,b) fiksirana. Uočimo neku proizvoljnu tačku x_1 iz tog intervala (a,b). Ova tačka x_1 može da se pomera levo desno, pa ćemo je zvati promenljiva tačka intervala (a,b). Razlika $\mathbf{x_1 - x_0}$ pokazuje promenu ili priraštaj vrednosti nezavisno promenljive x i najčešće se obeležava sa $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x_1 - x_0}$

Razlika $f(x_1) - f(x_0)$ predstavlja odgovarajuću promenu ili priraštaj funkcije f(x) i obično se obeležava sa Δ **f(x)= f(x_1)- f(x_0)** ili ako je funkcija označena sa y=f(x) može se zapisati: Δ **y= f(x_1)- f(x_0).**

Evo kako bi to izgledalo na slici:



Količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ naziva se srednjom ili prosečnom brzinom promene funkcije u intervalu $[x_0, x_1]$

Razmišljamo šta će se dešavati kada se tačka x_1 približava tački x_0?(то jest kad x_1 teži x_0)

Ako ta granična vrednost postoji normalno je da nju uzmemo za brzinu promene funkcije u tački x_0.

Brzina promene funkcije f(x) u tački x_0 u matematici se naziva **IZVOD** funkcije i obeležava se sa :

$f'(x_0)$ ili sa y' . Dakle **definicija izvoda je :**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2.

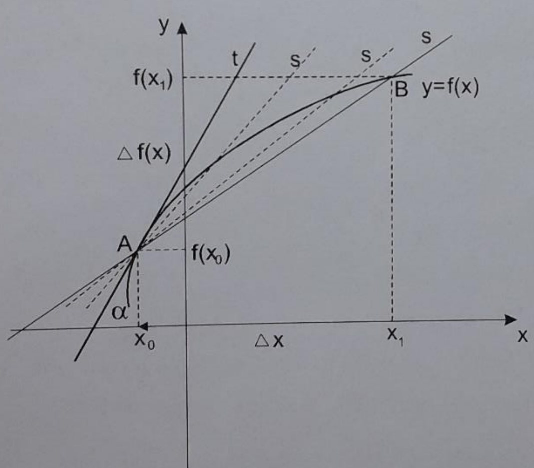
Često se umesto tačke x_0 jednostavno stavlja x pa izvod onda glasi:

$$\boxed{f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Rečima ova **definicija** bi glasila:

Izvod funkcije jednak je graničnoj vrednosti količnika priraštaja funkcíje i priraštaja nezavisno promenljive, kad priraštaj nezavisno promenljive teži nuli.

Geometrijska interpretacija izvoda



Posmatrajmo sečicu S koja prolazi kroz tačke $A(x_0,f(x_0))$ i $B(x_1,f(x_1))$. U situaciji kada se Δx smanjuje, odnosno x_1 se sve više približava tački x_0, ona sve manje i manje seče datu krivu y=f(x) dok u jednom graničnom trenutku ne **postane tangenta t te krive**!

Tada količnik priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ predstavlja koeficijent pravca k, to jest tangens ugla koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x ose.

Dakle: **VREDNOST PRVOG IZVODA U TOJ TAČKI JE : y` = tgα =k**

TABLICA IZVODA

1. $C` = 0$
2. $x` = 1$
3. $(x^2)` = 2x$
4. $(x^n)` = nx^{n-1}$

---

5. $(a^x)` = a^x \ln a$
6. $(e^x)` = e^x$
7. $(\log_a x)` = \frac{1}{x \ln a}$
8. $(\ln x)` = \frac{1}{x}$
9. $(\sqrt{x})` = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $\left(\frac{1}{x}\right)` = -\frac{1}{x^2}$

---

11. $(\sin x)` = \cos x$
12. $(\cos x)` = - \sin x$
13. $(tgx)` = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)` = -\frac{1}{\sin^2 x}$

---

15. $(\arcsin x)` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arccos x)` = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(arctgx)` = \frac{1}{1+x^2}$
18. $(arcctgx)` = - \frac{1}{1+x^2}$

PRAVILA ZA IZVODE

1. $[cf(x)]` = cf\,`(x)$
2. $[f(x) \pm g(x)]` = f\,`(x) \pm g`(x)$
3. $(u \circ v)` = u`v + v`u$ **izvod proizvoda**
4. $\left(\frac{u}{v}\right)` = \frac{u`v - v`u}{v^2}$ **izvod količnika**
5. $f[g(x)]` = f\,`[g(x)] \circ g`(x)$ **izvod složene funkcije**

$$\boxed{f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$ **<u>izvod po definiciji</u>**

Ako je f(x) neprekidna funkcija i **F `(x) = f(x)** onda je $\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$, gde je C proizvoljna konstanta.

TABLICA INTEGRALA

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3. $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$ najčešće se koristi...
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ili da vas ne zbuni $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{matrix} arctgx + C & \text{ili} \\ -arcctgx + C & \end{matrix}$ to jest $\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C}$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{matrix} \arcsin x + C & \text{ili} \\ -arccocx + C & \end{matrix}$ to jest $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C}$

Ovo su osnovni tablični integrali. Neki profesori dozvoljavaju da se kao tablični koriste i :

13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ odnosno $\boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C}$ to jest $\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$ odnosno $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C}$

2. Праволинијско кретање

Код праволинијског кретања путања је права линија. Узмимо произвољно да је x-оса Декартовог координатног система наш систем референције, а тачка $x=0$ референтно тијело. У општем случају пут, брзина и убрзање су функције по времену:

$x = f(t)$ функција пута

$v = h(t)$ функција брзине

$a = g(t)$ функција убрзања

Функција $x = f(t)$ представља једначину кретања материјалне тачке. У овом случају, интензитет брзине је једнак $v = \frac{dx}{dt}$ па слиједи:

$dx = v\,dt \ldots \int \ldots$ Диференцијална једначина која раздваја промјенљиве.

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

[redacted]

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$ Једначина кретања.

$$s = x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$ Пређени пут.

Сличан прорачун као за пређени пут изводи се и за брзину.

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$dV = a\,dt$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$ Једначина брзине.

Код праволинијског кретања мења се само интензитет брзине.

Равномјерно праволинијско кретање је специјалан случај праволинијског кретања код кога је интензитет брзине константан ($V = const \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow a = 0$). Једначина кретања у овом случају има облик:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} V\,dt \,, \quad V = const$$ па се може извући испред интеграла.

$$x = x_0 + V(t - t_0)$$

$$s = x - x_0 = V(t - t_0)$$

$$\boxed{s = x = Vt}$$ Специјално за $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$.

Једнакоубрзано праволинијско кретање је специјалан случај праволинијског кретања код кога је убрзање константно ($a = const$).

Из израза за брзину слиједи:

$$V = V_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = \boxed{V_0 + a(t - t_0)}$$

, $a = const$ па се може извући испред интеграла. Ако добијени израз уврстимо у једначину пута добићемо:

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} V\,dt = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[V_0 + a(t - t_0)\right] dt =$$

$\int y\,dy$

$$X_0 + \int_{t_0}^{t} V_0\,dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt = X_0 + V_0(t - t_0) + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt = \boxed{\begin{matrix} t - t_0 = y \\ dt = dy \end{matrix}} =$$

$$X_0 + V_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$ па је

$$S = X - X_0 = V_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

$$\boxed{S = V_0 t + \frac{a t^2}{2}}$$

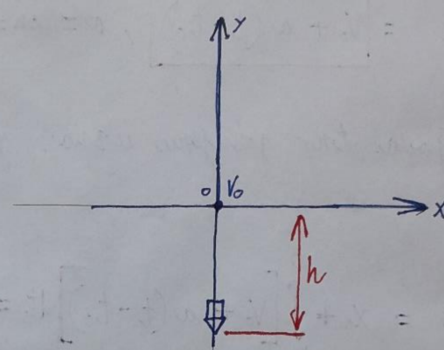
$$\boxed{V^2 = V_0^2 + 2aS}$$

Специјално за $t_0 = 0$ и $X_0 = 0$ што се често користи у задацима.

Убрзање може бити и негативно тада говоримо о успорењу.

Примјери једнакоубрзаног праволинијског кретања:

a Слободни пад $\left(a = g = 9,81\,[m/s^2],\ V_0 = 0\right)$;

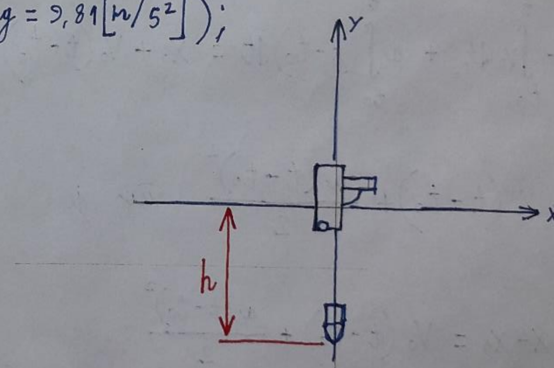


$$V = g t$$

$$y - y_0 = h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$V^2 = 2 g h$$

b Хитац наниже $\left(a = g = 9,81\,[m/s^2]\right)$;

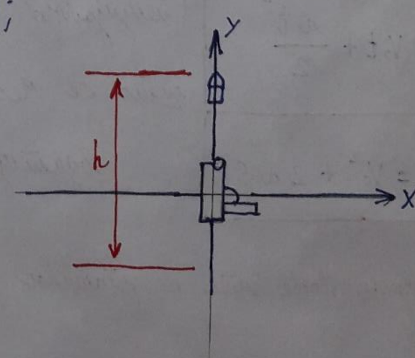


$$V = V_0 + g t$$

$$y - y_0 = h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2 g h$$

c Хитац увис $\left(a = g = 9.81\,[m/s^2]\right)$;



$$V = V_0 - g t$$

$$y - y_0 = h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$V^2 = V_0^2 - 2 g h$$

Задатак 1. Током прве половине времена кретања аутомобил има брзину $V_1 = 54\,[Km/h]$, а током друге половине времена брзину $V_2 = 36\,[Km/h]$. Колика је средња брзина кретања аутомобила?

Рјешење: Аутомобил апроксимирамо са материјалном тачком.

$V_1 = 54\,[Km/h]$
$V_2 = 36\,[Km/h]$
$V_{sr} = ?$

За $t/2$ времена брзином V_1 аутомобил пређе пут S_1.

$$\frac{t}{2} V_1 = S_1$$

За $t/2$ времена брзином V_2 аутомобил пређе пут S_2.

$$\frac{t}{2} V_2 = S_2$$

$$V_{sr} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{t}{2} + \frac{t}{2}} = \frac{\frac{t}{2}(V_1 + V_2)}{\frac{2t}{2}} = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{54\,[Km/h] + 36\,[Km/h]}{2} =$$

$$45\left[\frac{Km}{h}\right]$$

Задатак 2. Брзина аутомобила на првој половини пута је $V_1 = 36 \left[Km/h \right]$, а на другој $V_2 = 54 \left[Km/h \right]$. Колика је средња брзина аутомобила на путу?

Рјешење: За неко вријеме t_1 аутомобил (материјална тачка)

$V_1 = 36 \left[Km/h \right]$

$V_2 = 54 \left[Km/h \right]$

$V_{sr} = ?$

брзином V_1 пређе пут $\frac{s}{2}$. $\boxed{V_1 \cdot t_1 = \frac{s}{2}}$

$t_1 = \frac{s}{2V_1}$

За неко вријеме t_2 аутомобил (материјална тачка) брзином V_2 пређе пут $\frac{s}{2}$. $\boxed{V_2 t_2 = \frac{s}{2}}$

$t_2 = \frac{s}{2V_2}$

$$V_{sr} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{2s}{2}}{\frac{s}{2V_1} + \frac{s}{2V_2}} = \frac{s}{\frac{s}{2}\left(\frac{V_2 + V_1}{V_1 V_2}\right)} = \frac{2 V_1 V_2}{V_1 + V_2} =$$

$$\frac{2 \cdot 36 \cdot 54 \left[Km/h \right]^2}{90 \left[Km/h \right]} = 43,2 \left[\frac{Km}{h} \right]$$

Задатак 5. На првој трећини пута аутомобил се креће брзином V_1, а на осталом делу пута брзином $V_2 = 54\,[Km/h]$. Средња брзина аутомобила на цијелом путу је $\langle V\rangle = 36\,[Km/h]$. Колика је брзина V_1 ?

$V_1 = ?$

$V_2 = 54\,[Km/h]$

$\langle V\rangle = 36\,[Km/h]$

Рјешење: Прву трећину пута $(S/3)$ аутомобил пређе брзином V_1 за неко вријеме t_1.

$$\frac{S}{3} = V_1 t_1 \longrightarrow t_1 = \frac{S}{3V_1}$$

Остатак пута $\left(S - \frac{S}{3}\right)$ аутомобил пређе брзином V_2 за неко вријеме t_2.

$$S - \frac{S}{3} = V_2 t_2$$

$$\frac{2S}{3} = V_2 t_2 \longrightarrow t_2 = \frac{2S}{3V_2}$$

Позната је средња брзина кретања аутомобила и дужина пута S.

$$\langle V\rangle = \frac{\frac{S}{3} + \left(S - \frac{S}{3}\right)}{\frac{S}{3V_1} + \frac{2S}{3V_2}} = \frac{\cancel{S}}{\frac{\cancel{S}}{3}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{2}{V_2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{V_2 + 2V_1}{V_1 V_2}\right)} = \frac{3V_1 V_2}{V_2 + 2V_1}$$

$$\langle V\rangle = \frac{3V_1 V_2}{V_2 + 2V_1}$$ Сада одавде изразимо непознато V_1.

$$3V_1 V_2 = \langle V\rangle V_2 + 2\langle V\rangle V_1$$

$$3V_1 V_2 - 2\langle V\rangle V_1 = \langle V\rangle V_2$$

$$V_1\left(3V_2 - 2\langle V\rangle\right) = \langle V\rangle V_2$$

$$V_1 = \frac{\langle V\rangle V_2}{3V_2 - 2\langle V\rangle} = \frac{36\left[Km/h\right]\cdot 54\left[Km/h\right]}{3\cdot 54\left[Km/h\right] - 2\cdot 36\left[Km/h\right]} = \frac{1944\left[Km/h\right]^2}{90\left[Km/h\right]} =$$

$$21{,}6\left[\frac{Km}{h}\right]$$

Automobil = (materijalna tačka).

Задатак 7. Локомотива се креће брзином $V_1 = 54 [Km/h]$. Насупрот њој наиђе воз, дужине $L = 150 [m]$, који се креће брзином $V_2 = 36 [Km/h]$. Колико ће времена композиција воза пролазити поред машиновође локомотиве?

Рјешење: Локомотива се може апроксимирати једном материјалном тачком, а композиција воза се може апроксимирати низом материјалних тачака. Композиција воза представљена низом материјалних тачака представља пут дужине L који локомотива треба прећи брзином $V = V_1 + V_2$ за вријеме t.

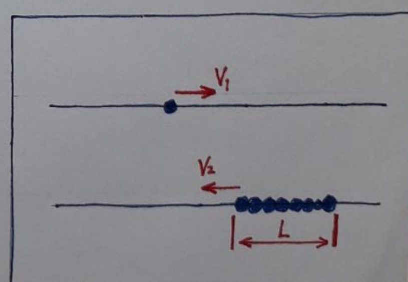
$$V_1 = 54 [Km/h] = \frac{54 \cdot 10^3}{1 \cdot 60 \cdot 60} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$L = 150 [m]$$

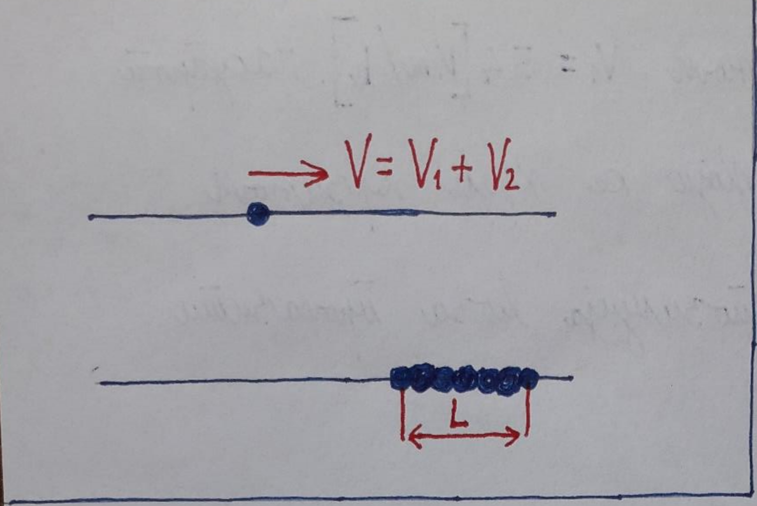
$$V_2 = 36 [Km/h] = \frac{36 \cdot 10^3}{1 \cdot 60 \cdot 60} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$t = ?$$

$$t = \frac{L}{V_1 + V_2} = \frac{150 [m]}{15 [m/s] + 10 [m/s]} = 6 [s]$$



На слици се јасно види да вектор V_2 вуче низ материјалних тачака насупрот вектору V_1 који вуче материјалну тачку па се брзина којом материјална тачка креће по овом путу може изразити као $V = V_1 + V_2$. Еквивалентна слика датог проблема!


V = V1 + V2
L

Задатак 11. Између два града који леже на истој реци саобраћа пароброд. Путовање између градова узводно траје $t_1 = 9[h]$, а низводно $t_2 = 4[h]$. Колика је средња брзина реке у односу на обалу, а колика брзина пароброда у односу на воду? Растојање између градова је $d = 72[km/h]$.

Рјешење:

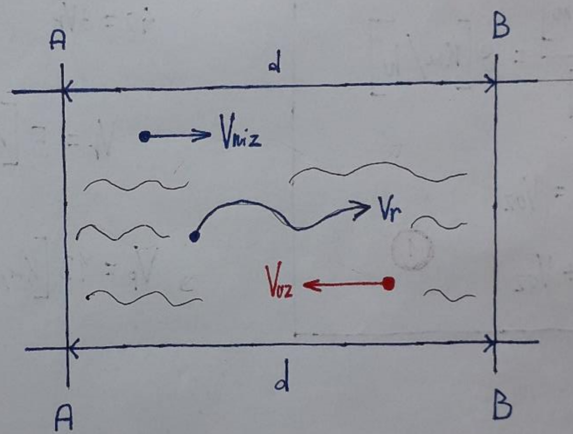
$t_1 = 9[h]$

$t_2 = 4[h]$

$d = 72[km/h]$

$V_r = ?$ $V_{ријеке}$

$V_p = ?$ $V_{пароброда}$



Када пароброд иде узводно његовом кретању пружа отпор брзина реке па је $V_{uz} = V_p - V_r$. Када пароброд иде низводно његово кретање је по смјеру сагласно са кретањем реке па је $V_{niz} = V_p + V_r$. Дакле пароброд пређе пут дужине '2d'.

$$2d = V_{uz} t_1 + V_{niz} t_2$$

$$2d = (V_p - V_r) t_1 + (V_p + V_r) t_2$$

$$2d = V_p (t_1 + t_2) + V_r (t_2 - t_1)$$

$$2d = V_p t_1 + V_p t_2 + V_r t_2 - V_r t_1$$

$$2d = 13 V_p - 5 V_r$$

Zadatak 11.

Greška u tekstu zadatka d = 72[km], a ne $[\frac{km}{h}]$.

Pošto nam je poznato $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$ to znači da je naš brod(materijalna tačka) već prešao relaciju vremenske dužine $\mathbf{t = t_1 + t_2}$,a iz teksta zadatka poznato je da za to vrijeme parobrod pređe put dužine **2d** .

$2d = 13V_p - 5V_r$ Потребна нам је функционална зависност између непознатих (изразимо једну непознату преко друге). 1

$$t_1 = \frac{d}{V_{uz}}$$

$$V_{uz} = \frac{d}{t_1} =$$ [redacted]

$$\frac{72\,[Km]}{9\,[h]} = 8\,[Km/h]$$

$$V_p - V_r = V_{uz}$$

$$V_p = V_r + V_{uz}$$

1

$$2d = 13(V_r + 8) - 5V_r$$

$$144 = 13V_r + 104 - 5V_r$$

$$144 - 104 = 8V_r$$

$$40 = 8V_r$$

$$V_r = 5\,[Km/h]$$ ✓

$$V_p = 13\,[Km/h]$$ ✓

· Пароброд и реку наравно апроксимирамо са материјалном тачком које се крећу брзинама V_p и V_r редом. Када пароброд иде уз реку то је као да се материјална тачка креће брзином $V = V_p - V_r$. Када пароброд иде низ реку то замишљамо као да се материјална тачка креће праволинијски брзином $V = V_p + V_r$.

Задатак 12. Човјек, висине $h = 1{,}8\,[m]$, пређе сталном брзином $v = 0{,}75\,[m/s]$ испод уличне свјетиљке која је на висини $H = 4\,[m]$. Колика је брзина врха човјекове сјенке по земљи?

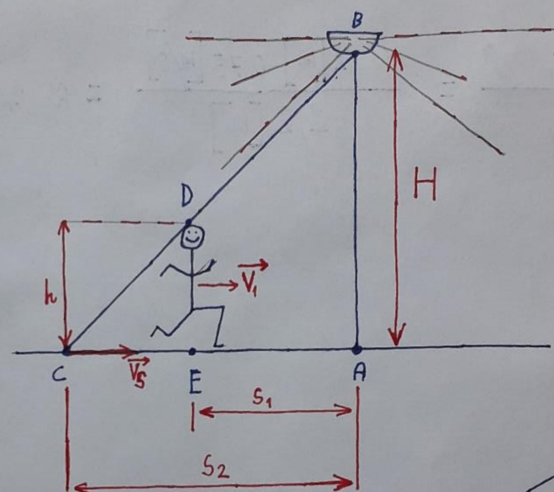
Рјешење:

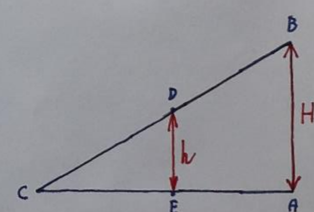
$h = 1{,}8\,[m]$

$V_1 = 0{,}75\,[m/s]$

$H = 4\,[m]$

$V_S = ?$





Човјек брзином v_1 за вријеме t_1 пређе пут дужине s_1. Брзином V_s за то вријеме t_1 врх човјекове сјенке пређе пут s_2. $\Delta CED \cong \Delta CAB$

$$\frac{H}{h} = \frac{s_2}{s_2 - s_1}$$

$$H(s_2 - s_1) = h\,s_2$$

$$H(V_s t_1 - V_1 t_1) = h V_s t_1$$

$$H(V_5 - V_1) = hV_5$$

$$V_5(H-h) = HV_1$$

$$V_5 = \frac{HV_1}{H-h} = \frac{4[m]\ 0{,}75[m/s]}{2{,}2[m]} = \approx 1{,}36\left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

Задатак 14. Два авиона лете један за другим по истој путањи на растојању $d = 1080\,[m]$, једнаким брзинама $V_1 = 1200\,[Km/h]$ у односу на земљу. Из задњег авиона се испали граната на први авион. Брзина гранате је $V_2 = 300\,[m/s]$ у односу на авион. После ког времена ће граната да удари у први авион? Колики пут ће да пређе авион за то време?

Рјешење: Равномјерно праволинијско кретање

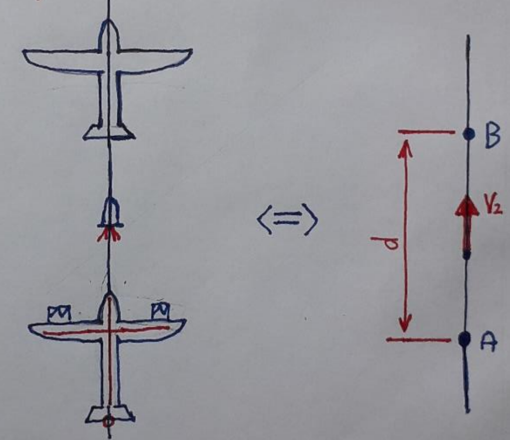
$d = 1080\,[m]$

$V_1 = 1200\,[Km/h]$

$V_2 = 300\,[m/s]$

$t_1 = ?$

$s_1 = ?$



Јер се авион А и авион В крећу брзином V_1.

$$t_1 = \frac{d}{V_2} = \frac{1080\,[m]}{300\,[m/s]} = 3,6\,[s]$$

За то вријеме први авион (А) ће прећи пут:

$$s_1 = V_1 t_1 = \frac{1200 \cdot 10^3\,[m] \cdot 3,6\,[s]}{1 \cdot 60 \cdot 60\,[s]} = 1200\,[m]$$

Задатак 18. Два града се налазе поред реке на растојању $d = 1[Km]$. Брзина брода који саобраћа на овој релацији, у односу на воду износи $V_1 = 8[Km/h]$. Отварањем и затварањем бране на реци вода је у једном случају покретна и тече брзином $V_2 = 2[Km/h]$ а у другом случају је мирна. Наћи однос времена која су потребна броду да би прешао ову релацију узводно и низводно у оба случаја.

Рјешење:

$d = 1[Km]$

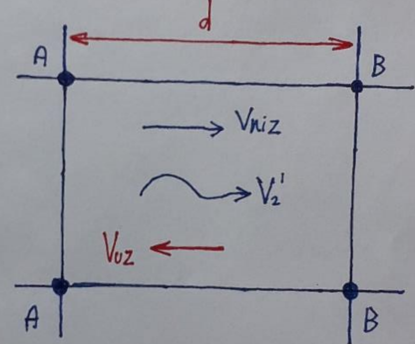
$V_1 = 8[Km/h]$

$V_2' = 2[Km/h]$

$V_2'' = 0$

$t_1 = ?$

$t_2 = ?$



1° Брана је отворена па је брзина ријеке једнака V_2'.

$$t_1 = \frac{d}{V_1 + V_2} + \frac{d}{V_1 - V_2} \cong 0,1 + 0,17 \cong 0,27[h]$$

При чему је $\frac{d}{V_1+V_2}$ вријеме потребно пороброду да ову релацију пређе низводно, а $\frac{d}{V_1 - V_2}$ вријеме потребно пороброду да ову релацију пређе узводно.

2.° Брана је затворена, вода је мирна, брзина воде једнака је нули.

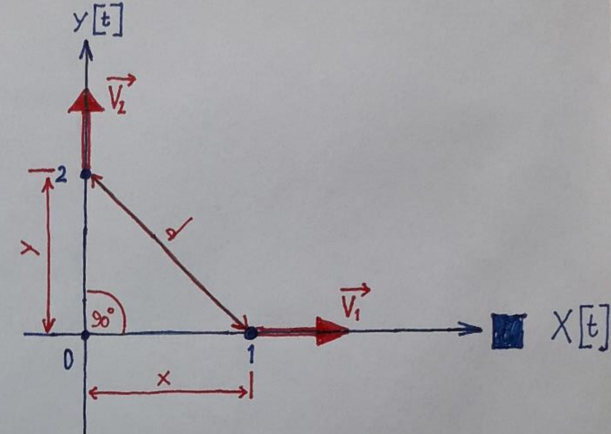
$$t_2 = \frac{2d}{V_1} = 0,25\,[h]$$

Тражени однос времена t_1 и t_2 је:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{0,27\,[h]}{0,25\,[h]} = 1,08$$

Задатак 22.

Два тела (1 и 2) крећу истовремено из исте тачке у међусобно нормалним правцима, брзинама $V_1 = 30\,[Km/h]$ и $V_2 = 40\,[Km/h]$. Како се мења растојање између тела у времену? Колико је ово растојање у тренутку када прво тело пређе пут $s_1 = 90\,[Km]$?



Рјешење:

$V_1 = 30\,[Km/h]$

$V_2 = 40\,[Km/h]$

$s_1 = 90\,[Km]$

$d(t) = ?$

Путеви x и y су функције по времену $x = x(t)$, $y = y(t)$.

У неком временском тренутку t тијело 1 прешло је пут $x = V_1 t$, а тијело 2 прешло је пут $y = V_2 t$. Како се тијела крећу у међусобно нормалним правцима, растојање d између њих се може одредити примјеном "Питагорине теореме".

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$d = \sqrt{(V_1 t)^2 + (V_2 t)^2} = \sqrt{t^2 (V_1^2 + V_2^2)} = t\sqrt{900 + 1600} = t\sqrt{2500}$$

[redacted]

$$d(t) = 50\left[\frac{Km}{h}\right] t\,[h]$$

Kako se tela kreću po vremenu rastojanje **d** između njih se menja po vremenu što znači da je **d** funkcija po vremenu.

$$S_1 = 90\,[Km] = X$$

$$S_1 = V_1 t_1 \longrightarrow t_1 = \frac{S_1}{V_1} = \frac{90\,[Km]}{30\,[Km/h]} = 3\,[h]$$

$$d(t_1) = 150\,[Km]$$ ✓

Задатак 22.

Тело 1 се креће у правцу и смеру позитивног дела x-осе Декартовог тродимензионалног координат-ног система. Тело 2 се креће у правцу и смеру позитивног дела y-осе Декартовог тродимензионалног координатног система. У временском тренутку t крећући се равномјерно и праволинијски тело 1 је прешло пут $s_1 = V_1 t$, а тело 2 је прешло пут $s_2 = V_2 t$.

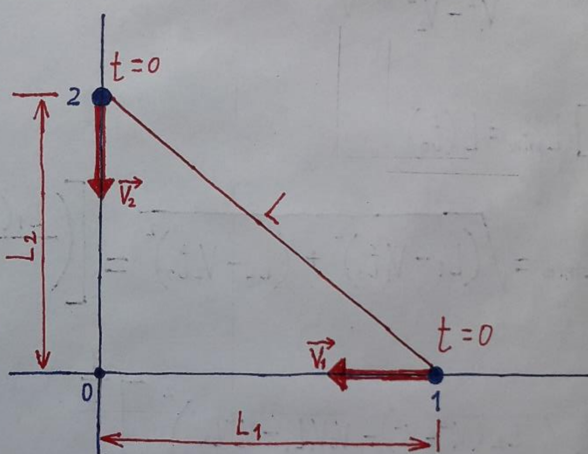
Задатак 23. Равномјерно праволинијско кретање

У временском тренутку $t = 0\,[s]$ честица ① налазила се у тачки L_1, а честица ② у тачки L_2. У временском тренутку $(t > 0)$ честица ① се налази у тачки $(L_1 - V_1 t)$, а честица ② у тачки $(L_2 - V_2 t)$.

Задатак 23. Две честице (1 и 2) крећу се сталним брзинама V_1 и V_2 по двема узајамно нормалним праволинијским путањама, и то према тачки њиховог пресека. У тренутку $t=0$ честице су се налазиле на растојањима L_1 и L_2 од тачке пресека њихових путања.

a) После ког времена ће растојање између честица да буде најмање?

b) Колико је ово растојање?



Рјешење:

a) У временском тренутку $t=0$ је: Питагорина теорема

$$L^2 = (L_1 - V_1 t)^2 + (L_2 - V_2 t)^2$$

$$L = \sqrt{(L_1 - V_1 t)^2 + (L_2 - V_2 t)^2}$$

Ово растојање ће бити најмање (minimum функције $L = L(t)$) у неком временском тренутку t_0. t_0 ћемо одредити тако што ћемо први извод функције $L = L(t = t_0)$ изједначити са 0.

$$\frac{dL(t_0)}{dt} = 0 \rightarrow \left(\sqrt{(L_1 - V_1 t_0)^2 + (L_2 - V_2 t_0)^2}\right)' = 0$$

$$(L_2)' - [V_2' t_0 + V_2 t_0'] = 0 - (0 t_0 + V_2) = -V_2$$

$$\frac{2(L_1 - V_1 t_0)(L_1 - V_1 t_0)' + 2(L_2 - V_2 t_0)(L_2 - V_2 t_0)'}{2\sqrt{(L_1 - V_1 t_0)^2 + (L_2 - V_2 t_0)^2}} = 0$$

$$\frac{-V_1(L_1 - V_1t_0) - V_2(L_2 - V_2t_0)}{\sqrt{(L_1 - V_1t_0)^2 + (L_2 - V_2t_0)^2}} = 0$$

$$-V_1L_1 + V_1^2t_0 - V_2L_2 + V_2^2t_0 = 0$$

$$t_0(V_1^2 + V_2^2) = V_1L_1 + V_2L_2$$

$$t_0 = \frac{V_1L_1 + V_2L_2}{V_1^2 + V_2^2} \quad \checkmark$$

$\boxed{b}$ $L_{min} = L(t_0)$

$$L_{min} = \sqrt{(L_1 - V_1t_0)^2 + (L_2 - V_2t_0)^2} = \left[\left(\frac{\overbrace{L_1(V_1^2}^{V_1^2L_1} + V_2^2) - \overbrace{V_1(V_1L_1}^{V_1^2L_1} + V_2L_2)}{V_1^2 + V_2^2}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{L_2(V_1^2 + V_2^2) - V_2V_1L_1 - V_2^2L_2}{V_1^2 + V_2^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[\left(\frac{\cancel{L_1V_1^2} + \overbrace{L_1V_2^2 - \cancel{L_1V_1^2} - V_1V_2L_2}^{V_2(L_1V_2 - V_1L_2)}}{V_1^2 + V_2^2}\right)^2 + \left(\frac{L_2V_1^2 + \cancel{L_2V_2^2} - V_2V_1L_1 - \cancel{L_2V_2^2}}{V_1^2 + V_2^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

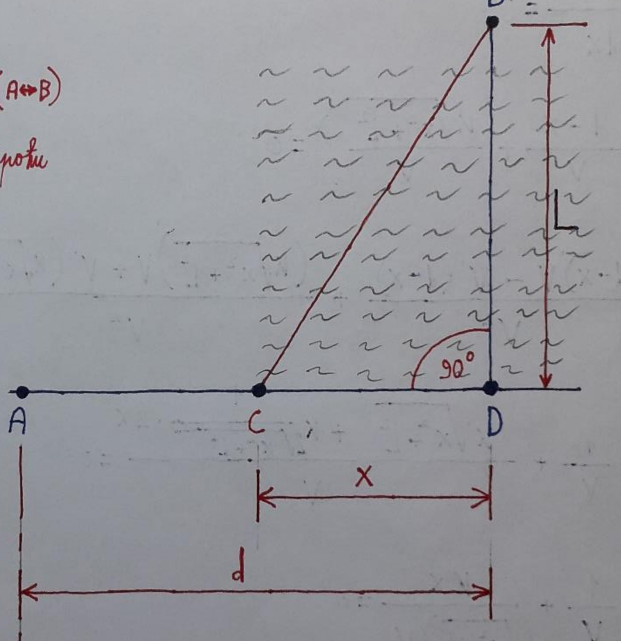
$$\left[\frac{V_2^2(L_1V_2 - V_1L_2)^2}{(V_1^2 + V_2^2)^2} + \frac{V_1^2(L_2V_1 - V_2L_1)^2}{(V_1^2 + V_2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Задатак 26.

Из тачке А која се налази на асфалтном путу, бициклиста треба да стигне у тачку В за најкраће време. Тачка В се налази на травнатом терену и растојању L од пута. Брзина бициклиста је К пута мања на травнатом терену него на асфалтном путу. На ком растојању X од тачке D бициклиста треба да сиђе са асфалтног пута и да се упути по правој путањи ка тачки В?

Рјешење: X = ?

Да би бициклиста прешао пут (A↔B) за најкраће вријеме он мора проћи одговарајуће деонице пута.



Крећући се неком брзином 'V' бициклиста пређе асфалтирани дио пута (A↔C) дужине 'd − x' за неко вријеме $t_1 = \frac{d-x}{V}$.

Бициклиста затим наставља да се креће по травнатом путу (C↔B) брзином једнаком $\frac{V}{K}$. Дужина пута (дијагонала C↔B) се може одредити примјеном Питагорине теореме: $(C\leftrightarrow B)^2 = x^2 + L^2$

$$C\leftrightarrow B = \sqrt{x^2+L^2}$$

Пут (C↔B) бициклиста брзином (V/K) пређе за неко вријеме

$$t_2 = \left(\sqrt{x^2+L^2}\right)/(V/K)$$

$$t(x) = t_1(x) + t_2(x)$$

$$t(x) = \frac{d-x}{V} + \frac{\sqrt{x^2+L^2}}{(V/K)} = \frac{d-x}{V} + \frac{K\sqrt{x^2+L^2}}{V}$$

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0.$$

$$\left(\frac{d-x}{V} + \frac{K\sqrt{x^2+L^2}}{V}\right)' = 0$$

$$\frac{\overbrace{(d-x)'V}^{=(-1)V} - \overbrace{V'(d-x)'}^{=0}}{V^2} + \frac{(K\sqrt{x^2+L^2})'\cancel{V} + \overbrace{V'(K\sqrt{x^2+L^2})}^{=0}}{V^{\cancel{2}}} = 0$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{\overbrace{K'\sqrt{x^2+L^2}}^{=0} + K\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+L^2}}\cdot\cancel{2}x}{V} = 0$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{Kx}{(\sqrt{x^2+L^2})V} = 0$$

$$Kx - \sqrt{x^2+L^2} = 0$$

[redacted]

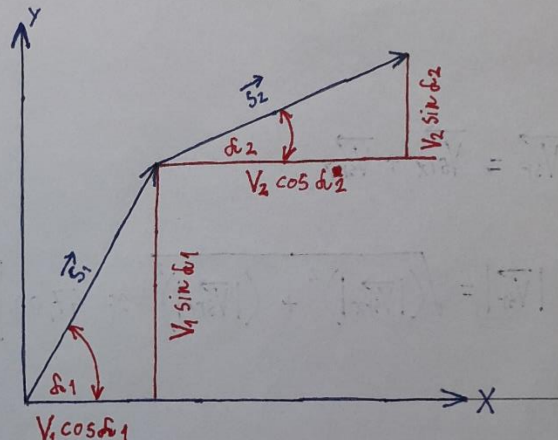
$$K^2x^2 - x^2 - L^2 = 0$$

$$x^2(K^2-1) = L^2$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{K^2-1}} \checkmark$$

Испитни задатак

Задатак 30. На првој половини праволинијског пута, који заклапа угао $\alpha_1 = 60^\circ$ према референтном правцу, аутомобил се креће брзином $V_1 = 72\,[Km/h]$. Међутим, на другој половини праволинијског пута, који заклапа угао $\alpha_2 = 30^\circ$ према истом референтном правцу аутомобил се креће брзином $V_2 = 36\,[Km/h]$. Колика је средња брзина аутомобила?



Рјешење:

$\alpha_1 = 60^\circ$

$V_1 = 72\left[\frac{Km}{h}\right]$

$\alpha_2 = 30^\circ$

$V_2 = 36\left[\frac{Km}{h}\right]$

$V_{sr} = ?$

$$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$$

$$|\vec{S_1}| = |\vec{S_2}| = |\vec{S}|/2$$

$$|\vec{S_1}| = t_1 V_1$$

$$|\vec{S_2}| = t_2 V_2$$

$$|\vec{S_1}|^2 = (V_1 \cos\alpha_1)^2 + (V_1 \sin\alpha_1)^2$$

$$|\vec{S_2}|^2 = (V_2 \cos\alpha_2)^2 + (V_2 \sin\alpha_2)^2$$

Идеја по којој је настала слика

$$\vec{V_{sr}} = \frac{\vec{V_1} t_1 + \vec{V_2} t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\vec{V_1}\frac{|\vec{S_1}|}{V_1} + \vec{V_2}\frac{|\vec{S_2}|}{V_2}}{\frac{|\vec{S_1}|}{V_1} + \frac{|\vec{S_2}|}{V_2}} \begin{matrix} :|\vec{S_1}| \\ :|\vec{S_2}| \end{matrix} =$$

$$\frac{\vec{V_1}\left(\frac{1}{V_1}\right) + \vec{V_2}\left(\frac{1}{V_2}\right)}{\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}}$$

$$\vec{V_1} = V_1 \cos(\alpha_1)\vec{i} + V_1 \sin(\alpha_1)\vec{j}$$

$$\vec{V_2} = V_2 \cos(\alpha_2)\vec{i} + V_2 \sin(\alpha_2)\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{V_{srx}}| = \frac{\frac{1}{\cancel{V_1}} V_1 \cos\alpha_1 + \frac{1}{V_2} V_2 \cos\alpha_2}{\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} = 0{,}04} \approx 33{,}3 \left[\frac{km}{h}\right]$$

$$|\overrightarrow{V_{sry}}| = \frac{\frac{1}{\cancel{V_1}} V_1 \sin\alpha_1 + \frac{1}{V_2} V_2 \cos\alpha_2}{\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}} \approx 33{,}3 \left[\frac{km}{h}\right]$$

$$\overrightarrow{V_{sr}} = \overrightarrow{V_{srx}} + \overrightarrow{V_{sry}}$$

$$|\overrightarrow{V_{sr}}| = \sqrt{\left(|\overrightarrow{V_{srx}}|\right)^2 + \left(|\overrightarrow{V_{sry}}|\right)^2} \approx 47{,}09 \left[\frac{km}{h}\right]$$

Испитни задатак

Растојање између двије станице од $S = 3[Km]$ воз метроа пређе средњом брзином од $54[Km/h]$, при томе за убрзавање он утроши вријеме од $t_1 = 20[s]$. Затим се креће равномјерно неко вријеме t_2 и за кочење до потпуног заустављања утроши $t_3 = 10[s]$. Нацртати графики кретања воза, одредити вријеме t_2 равномјерног кретања воза и израз за највећу брзину V_{max} воза.

Рјешење:

$S = 3[Km]$

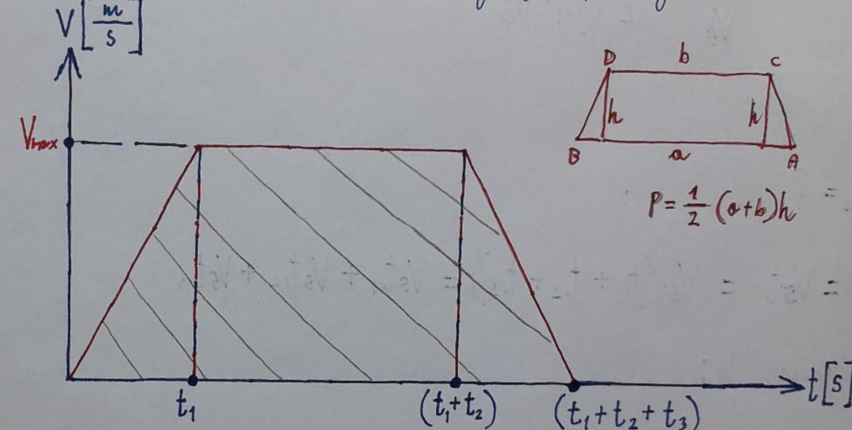
$V_S = 54\left[\frac{Km}{h}\right]$

$t_1 = 20[s]$

$t_2 = ?$

$t_3 = 10[s]$

$V_{max} = ?$



$V_{max} = ?$

Воз за убрзавање утроши t_1 времена и пређе пут $S_1 = \frac{1}{2} V_{max} t_1$. Воз затим наставља да се креће брзином V_{max} равномјерно и праволинијски неко вријеме t_2. За t_2 времена воз пређе пут $S_2 = V_{max} t_2$ и почиње да се зауставља. Процес заустављања воза траје t_3 времена и за то вријеме воз пређе пут [redacted] $S_3 = \frac{1}{2} V_{max} t_3$. Укупан пређени пут једнак је површини трапеза.

$S = S_1 + S_2 + S_3$

$S = \frac{1}{2} V_{max} t_1 + V_{max} t_2 + \frac{1}{2} V_{max} t_3$

Трошић Андреј

$$S=\frac{1}{2}V_{max}t_1+\left(\frac{S}{V_S}-(t_1+t_3)\right)V_{max}+\frac{1}{2}V_{max}t_3=$$

$$\frac{1}{2}V_{max}t_1+\frac{V_{max}S}{V_S}-V_{max}t_1-V_{max}t_3+\frac{1}{2}V_{max}t_3=-\frac{1}{2}V_{max}t_1-\frac{1}{2}V_{max}t_3$$

$$+\frac{V_{max}S}{V_S}=-\frac{1}{2}V_{max}(t_1+t_3)+\frac{V_{max}S}{V_S}=V_{max}\left(\frac{S}{V_S}-\frac{1}{2}(t_1+t_3)\right)$$

$$V_{max}=\frac{S}{\frac{S}{V_S}-\frac{1}{2}(t_1+t_3)}\left[\frac{m}{s}\right]\checkmark$$

$t_2=?$

$$S=V_S t=V_S\cdot(t_1+t_2+t_3)=V_S t_1+V_S t_2+V_S t_3$$

Odatle je:

$$V_S t_2=S-V_S(t_1+t_3)$$

$$t_2=\frac{S-V_S(30[s])}{V_S}=170[s]\checkmark$$

Испитни задатак

За вријеме t тијело је прешло пут d при чему му се брзина повећала K пута. Ако је кретање било једнакоубрзано и праволинијско одредити убрзање тијела.

Рјешење:

Неком брзином V_1 за вријеме t тијело је равномјерно и праволинијски прешло пут d. Затим тијело наставља да се креће равномјерно и праволинијски брзином V_2 која је K пута од брзине V_1. Слика:

$$V_2 = KV_1 = V_1 + at$$

$$KV_1 = V_1 + at$$

$$V_1(K-1) = at$$

$$\boxed{V_1 = \frac{at}{K-1}} \quad (1.)$$

$a = ?$

$$d = V_1 t + \frac{at^2}{2} \quad \dots \Big/ \; s = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$2d = 2V_1 t + at^2 = \frac{2at^2}{K-1} + at^2 \quad (1.)$$

$$2d = at^2\overbrace{\left(\frac{2}{K-1} + 1\right)}^{2+K-1}$$

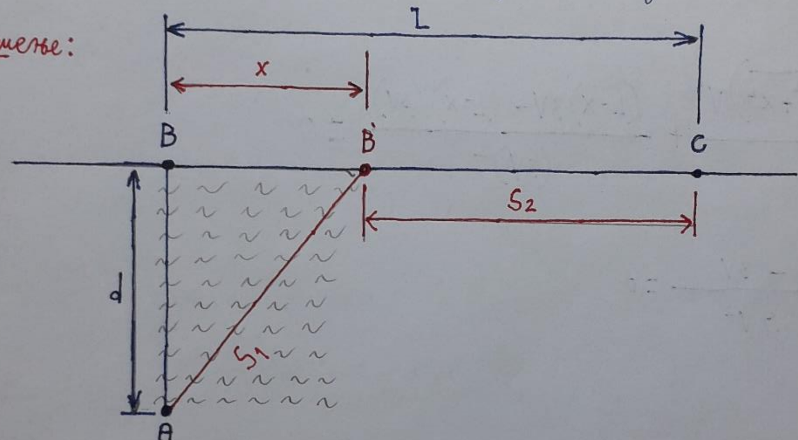
$$2d = at^2\left(\frac{K+1}{K-1}\right)$$

$$a = \frac{2d(K-1)}{t^2(K+1)}$$

(1.) Ако је неки параметар формуле непознат он се мора функционално изразити преко текста задатка или преко познатих параметара.

Аутомобил треба из положаја А који се налази на пољу на растојању d од асфалтног пута да стигне у положај C на растојању L од тачке B која се налази на асфалтном путу најближе положају А. Аутомобил се асфалтним путем креће три пута брже него пољем. Куда треба да иде аутомобил да би стигао за најкраће вријеме?

Рјешење:



Да би аутомобил за најкраће вријеме (најкраћи пут) стигао из тачке А у тачку C он треба прећи пут $s = s_1 + s_2$. По пољу, брзином v аутомобил прелази пут s_1 за неко вријеме t_1.

$$t_1 = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v}$$ → За s_1, Питагорина теорема

Затим брзином $3v$, асфалтним путем s_2 аутомобил се креће неко вријеме t_2.

$$t_2 = \frac{L - x}{3v}$$

$$t(x) = t_1(x) + t_2(x)$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{V} + \frac{L-x}{3V}$$

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)' V - \overbrace{\left(\sqrt{d^2+x^2}\right) V'}^{0}}{V^2} + \frac{\overbrace{(L-x)'}^{-1} 3V - \overbrace{(L-x)(3V)'}^{0}}{(3V)^2} = 0$$

$$\frac{\frac{\cancel{V}(d^2+x^2)'}{2\sqrt{d^2+x^2}}}{V^2} + \frac{-3V}{9V^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{2}xV}{\cancel{2}\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{3V} = 0$$

$$\frac{xV}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{1}{3V}$$

$$xV^2 = \sqrt{d^2+x^2}$$

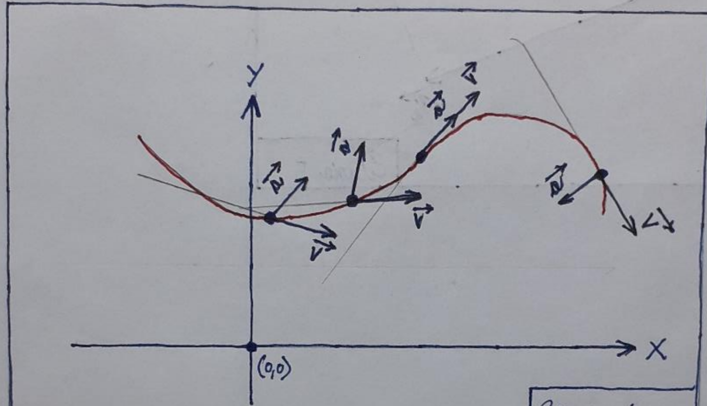
$$x^2V^4 = d^2 + x^2$$

$$x^2(V^4-1) = d^2 \longrightarrow x^2 = \frac{d^2}{(V^4-1)} \longrightarrow x = \frac{d}{\sqrt{V^4-1}}$$

3. Криволинијско кретање

Код криволинијског кретања путања је крива линија. Анализирајмо кретање материјалне тачке по некој кривој линији која живи у xy-равни декартовог координатног система.

Као референтно тијело можемо можемо узети тачку $O(0,0)$.



Слика 4

Важе познате релације:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

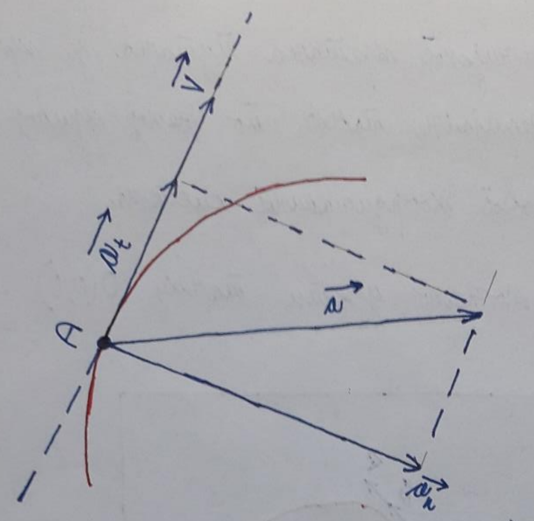
$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \vec{V}_{sr} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Пратећи савијање криве вектор $\vec{V}$ мијења правац, смјер и интензитет по времену. Вектор убрзања је увијек усмјерен ка удубљености криве. Вектор убрзања ($\vec{a}$) се може разложити на двије компоненте:

$\vec{a_t}$ тангенцијално убрзање, одређује промјену брзине по интензитету.

$\vec{a_n}$ нормално убрзање, одређује промјену брзине по правцу.



Слика 5

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$

$$|\vec{a_t}| = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$|a_n| = \frac{V^2}{R}$$

R = Растојање између референтног тијела и положаја материјалне тачке која се креће по кривој линији.

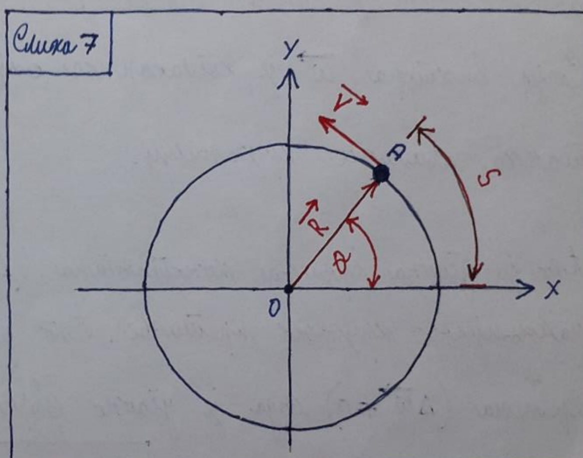
$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

5. Кружно кретање

Код кружног кретања путања је кружница. Кружница је скуп тачака у равни чија су растојања од једне сталне тачке (центар) једнака датој величини (полупречнику).

За кинематику најједноставнији примјер кружног кретања је кружница која лежи у xy-равни Декартовог 3D координатног система са центром у координатном почетку.

Слика 7: Положај материјалне тачке (тачка A) у односу на координатни почетак (референтно тијело) у било ком временском тренутку t одређен је вектором $\vec{R}$ (растојање од референтног тијела) и углом θ који вектор $\vec{R}$ заклапа са x-осом.



Крећући се по луку кружнице, материјална тачка пређе пут $s = |\vec{R}|\Delta\theta$ гдје је $|\vec{R}|$ полупречник закривљености кружнице, а $\Delta\theta$ угао изражен у радијанима који пребрише радијус вектор $\vec{R}$.

Период $(T[s])$ = вријеме за које материјална тачка обиђе пуни круг.

Фреквенција $(f[Hz])$ = број обртаја у јединици времена.

Kod kružnog kretanja S = (ukupan pređeni put) = (obim kružnice) = (2 * R *π) pa u izrazu za pređeni put umjesto S treba staviti ΔS = $|\vec{R}|$ΔΘ što proizilazi iz formule za dužinu kružnog luka (ΔS je taj kružni luk u našem primjeru).

$\vec{V}$ = Вектор линеарне (периферијске) брзине.

$$V=|\vec{V}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S=|\vec{R}|\Delta\theta}{\Delta t}=|\vec{R}|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=|\vec{R}|\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}=|\vec{R}|\omega \qquad V=R\omega$$

ω (омега) физичка величина коју зовемо "Угаона брзина".

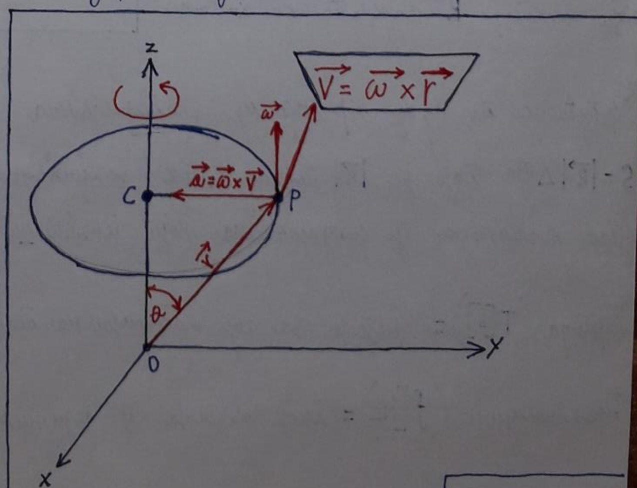
Угаона брзина је векторска величина:

$|\vec{\omega}|=\omega\left[\frac{rad}{s}\right]$ представља брзину којом материјална тачка мијења угаони положај у функцији времена.

Смјер вектора $\vec{\omega}$ је сагласан са смјером којим материјална тачка обилази кружницу.

Ако је угаона брзина константна ($\Delta\vec{\omega}=0$) такво кретање зовемо равномјерно кружно кретање. Ако је угаона промјењива у функцији времена ($\Delta\vec{\omega}\neq 0$) онда је угаоно убрзање дефинисано са:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$



Слика 8

Слика 8: Однос угаоне брзине ($\vec{\omega}$), линеарне брзине ($\vec{V}$) и линеарног убрзања ($\vec{a}$).

$v = \omega r$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r} \longrightarrow |\vec{a}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\angle(\vec{\omega},\vec{r})$$

Вектор линеарног убрзања $\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ је усмјерен ка центру кружнице.

Слика 9:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

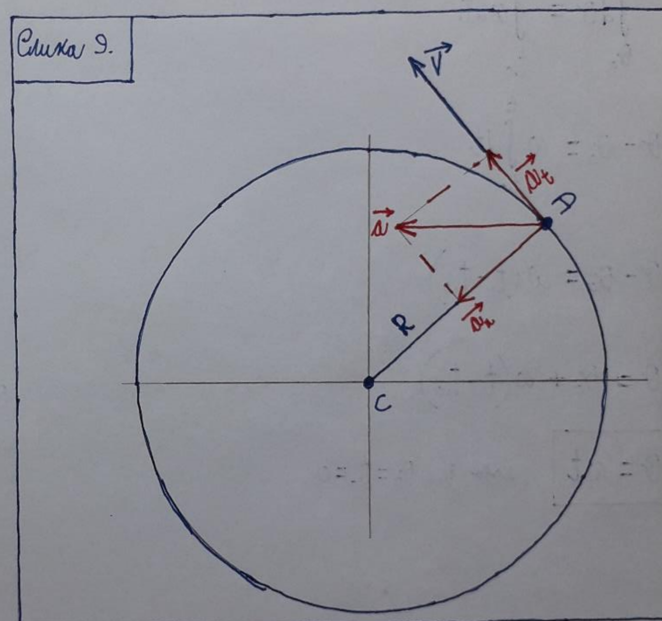
[redacted]

$a_t = 0$ равномјерно кружно кретање

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon}$$

$$\boxed{a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}}$$

Запамти



Napravio sam grešku u izrazu za linearno ubrzanje materijalne tačke. Ispravka:

$\vec{a} = \vec{\omega}\ x\ \vec{v} = \vec{\omega}$ x $\frac{d\vec{r}}{t}$
pa skalarne često korištene formule:

a) linearno ubrzanje: $a = \omega v$,

b) tangencijalna komponenta linearnog ubrzanja: $a_t = \alpha R$,

c) normalna komponenta linearnog ubrzanja: $a_n = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}$.

• Равномјерно кружно кретање • Једнакоубрзано кружно кретање

$\omega = const$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$d\theta = \omega dt$

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$

$\theta - \theta_0 = \omega \int_{t_0}^{t} dt$

$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$

$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$

$\boxed{\theta = \omega t}$, када је $\theta_0 = t_0 = 0$

$\alpha = const$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$d\omega = \alpha dt$

$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$

$\omega - \omega_0 = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$

$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)}$

$\boxed{\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$

- Код транслаторног кретања, положај материјалне тачке у односу на референтно тијело, у било ком временском тренутку t одређен је вектором помјерања:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

- Код ротационог кретања, угаони положај материјалне тачке у односу на референтно тијело, у било ком временском тренутку t одређен је вектором угаоног положаја:

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}(t)$$

- Код транслаторног кретања, ако је позната једначина вектора помјерања $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тренутна брзина којом се материјална тачка креће у било ком временском тренутку t одређена је изразом:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

- Код ротационог кретања, ако је позната једначина вектора угаоног положаја $\vec{\theta} = \vec{\theta}(t)$ тада је брзина којом материјална тачка мења угаони положај у функцији времена (рецимо у неком временском тренутку t) одређена изразом:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}$$

· Код транслаторног кретања: $V = at$ значи да је за неко вријеме t крећући се убрзањем 'a' материјална тачка постигла брзину V.

· Код ротационог кретања: $\omega = \alpha t$ значи да је за неко вријеме t крећући се угаоном брзином 'α' материјална тачка постигла угаону брзину ω.

· Код транслаторног кретања: $V = V_0 + at$ значи да ако је материјална тачка започела кретање брзином V_0, затим наставила да се креће брзином $V (\gtrless V_0)$ материјална тачка је убрзала (успорила) кретање убрзањем 'a' за вријеме t.

· Код ротационог кретања: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ значи да ако је материјална тачка мењала угаони положај у функцији времена брзином ω_0, затим је наставила да мијења угаони положај у функцији времена угаоном брзином $\omega (\gtrless \omega_0)$ материјална тачка је убрзала (успорила) промјену угаоног положаја у времену за угаоно убрзање α за вријеме t.

· Код једнакоубрзаног праволинијског кретања:

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2aS$$

· Код једнакоубрзаног ротационог кретања:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

Задатак 63.

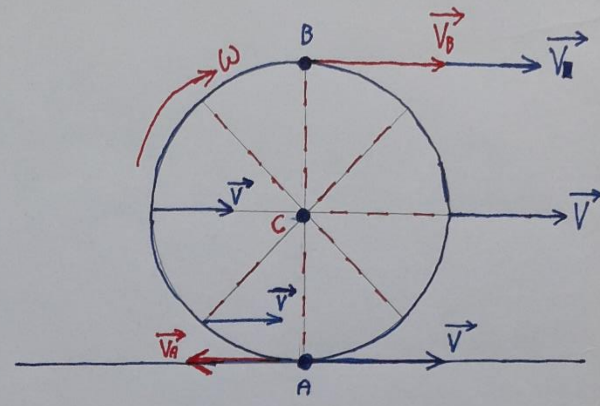
Колике су брзине тачака A и B на точку бицикла који се креће брзином $V = 40\,[km/h]$?

Рјешење:

$V_A = ?$

$V_B = ?$

$V = 40\,[Km/h]$



Све тачке на точку па самим тим и A и B крећу се транслаторно (прелазе једнаке дионице пута, једнаким брзинама за једнако вријеме) што је посљедица ротационог кретања носача точка неком угаоном брзином [redacted] ω у односу на центар точка. Точак се по путањи креће транслаторно па је свакој тачки на точку придружен вектор $\vec{V}$. Ако цио точак посматрамо са неке велике удаљености тада је кретање точка по правој линији аналогно кретању материјалне тачке по правој линији па се вектори $\vec{V_A}$ и $\vec{V_B}$ при чему је $|\vec{V_A}| = |\vec{V_B}| = |\vec{V}|$ виде као на слици:

$$V_A = |\vec{V_A}| - |\vec{V}| = |\vec{V}| - |\vec{V}| = 0\,[Km/h]$$

$$V_B = |\vec{V_B}| + |\vec{V}| = 2|\vec{V}| = 80\,[Km/h]$$

Задатак 64. Брзина тачке A на замајцу је $V_A = 50[m/s]$, а тачке B је $V_B = 10[m/s]$. Ако је радијално растојање $AB = 20[cm]$, колика је угаона брзина замајца, а колики је његов полупречник?

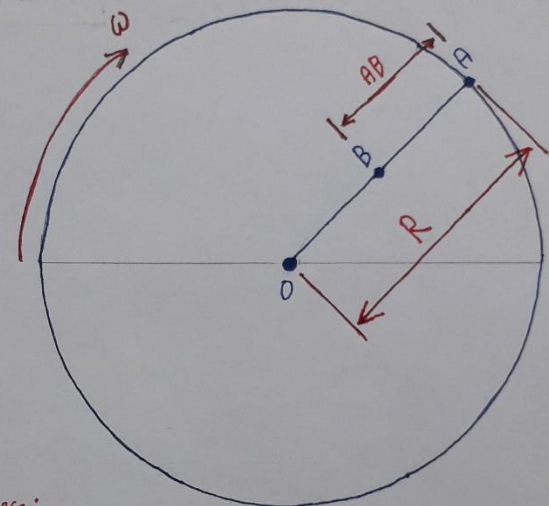
Рјешење:

$V_A = 50\left[\frac{m}{s}\right]$

$V_B = 10\left[\frac{m}{s}\right]$

$AB = 20[cm]$

$\omega = ?$ | $R = ?$



Равномјерно кружно кретање:

$$V_A = \boxed{R\omega} \rightarrow R = \frac{V_A}{\omega} \quad (1.)$$

$$V_B = \boxed{(R - AB)\omega} \rightarrow \boxed{R\omega = V_B + \omega AB} \rightarrow R = \frac{V_B + \omega AB}{\omega} \quad (2.)$$

$$R = R \iff (1.) = (2.)$$

$$\frac{V_A}{\omega} = \frac{V_B + \omega AB}{\omega} \quad \ldots / \cdot \omega$$

$$V_A = V_B + \omega AB$$

$$\omega = \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{40\left[\frac{m}{s}\right]}{20 \cdot 10^{-2}[m]} = \frac{\cancel{40}^{2} \cdot 100}{\cancel{20}} = \boxed{200\left[\frac{rad}{s}\right]} \checkmark \rightarrow (1.)\ \boxed{R = 0{,}25[m]} \checkmark$$

Zadatak 64.

Zamislimo u tački A materijalnu tačku koja se kreće linearnom brzinom V_A po kružnici poluprečnika R sa centrum u tački O. Ugaona brzina te materijalne tačke je ω koje je nacrtano na slici.
Dakle materijalna obilazi posmatranu kružnici u smjeru saglasnom sa smjerom kretanja kazaljke na analognom časovniku.

$V_A = \omega R$ (1)

Zamislimo sada unutar posmatrane kružnice još jednu kružnicu poluprečnika
$(R - \overleftrightarrow{AB})$ sa centrom u tački O. Na toj kružnici u tački B zamislimo sada materijalnu tačku koja se kreće po kružnici linearnom brzinom V_B u smjeru kretanja kazaljke na analognom časovniku što je opisano ugaonom brzinom ω kao na prethodnoj kružnici.

$V_B = \omega(R - \overleftrightarrow{AB})$ (2)

За транслаторно и ротационо кретање материјалне тачке:

1. Препознати начин кретања (равномјерно, једнакоубрзано...).

2. Скица, раздвојање познати и непознатих величина.

3. Примјенити неку од ситуација са $\boxed{\text{str. 24.}}$.

Задатак 65.

У шупљем цилиндру, полупречника $R = 18\,[cm]$, налази се мањи цилиндор. Угаона брзина већег цилиндра је $\omega_1 = 10.5\,[rad/s]$, а мањег $\omega_2 = 31,4\,[rad/s]$. Ако између цилиндора нема клизања, израчунати полупречник мањег цилиндра.

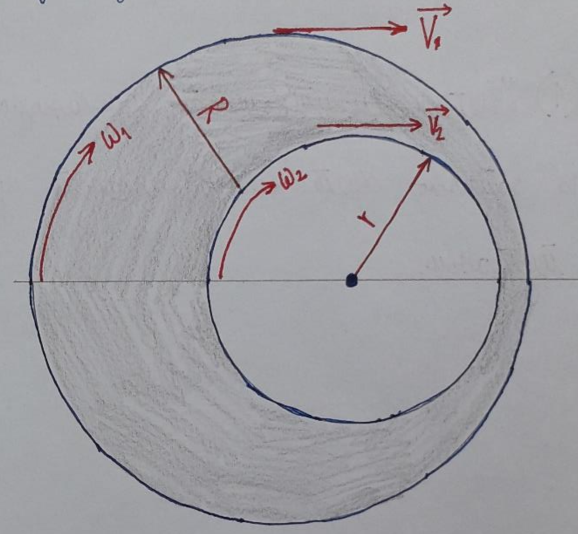
Рјешење:

$R = 18\,[cm]$

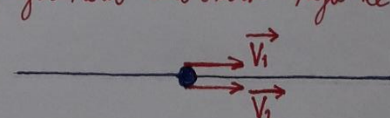
$\omega_1 = 10,5\,[rad/s]$

$\omega_2 = 31,4\,[rad/s]$

$r = ?$



[redacted] Равномјерно кружно кретање цилиндра полупречника R обавља се угаоном брзином ω_1. Ротација већег цилиндра повлачи ротацију мањег цилиндра који се ротира (врти) унутар већег цилиндра. Равномјерно кружно кретање цилиндра полупречника r обавља се угаоном брзином ω_2. Ако би приказану слику посматрали са веома велике удаљености (идеја из претходног задатка) цио велики цилиндор би био апроксимиран материјалном тачком која се креће равномјерно и праволинијски:



$$|\vec{V_1}| = |\vec{V_2}| \quad (1)$$

$$\omega_1 R = \omega_2 \cdot r$$

$$r = \frac{\omega_1 R}{\omega_2} = \frac{10{,}5 \cdot 18 \cdot 10^{-2}}{31{,}4} \approx 0{,}06\,[m]$$

(1) Кретање унутрашњег цилиндра по транслаторној путањи је заправо кретање спољашњег цилиндра по тој истој путањи.

Zadatak 65.

Sa neke udaljenosti mnogo veće od dimenzija velikog cilindra , posmatrajmo kretanje tog cilindra po nekoj recimo pravoj liniji. Sa našeg aspekta gledanja taj cilindar se vidi kao materijalna tačka koja se po pravoj liniji kreće brzinom $\vec{V}$. Svakoj tački na kružnici velikog cilindra pridružen je vektor $\vec{V}$ pa samim tim taj vektor linearne brzine pridružen je i materijalnoj tački koja leži na kružnici velikog cilindra. Materijalna tačka obilazi tu kružnicu (u smjeru saglasnom sa smjerom kretanja kazaljke na analognom časovniku) ugaonom brzinom ω_1 koja se u funkciji vremena ne mijenja (<u>ravnomjerno kružno kretanje</u>). Kako je poluprečnik velikog cilindra jednak R relacija koja povezuje gore pomenute veličine glasi:

V = $|\vec{V}|$ = ω_1R

Ako bi u prethodnom tekstu termin “veliki cilindar” zamjenil sa terminom “manji cilindar” relacija koja povezuje pomenute veličine glasi:

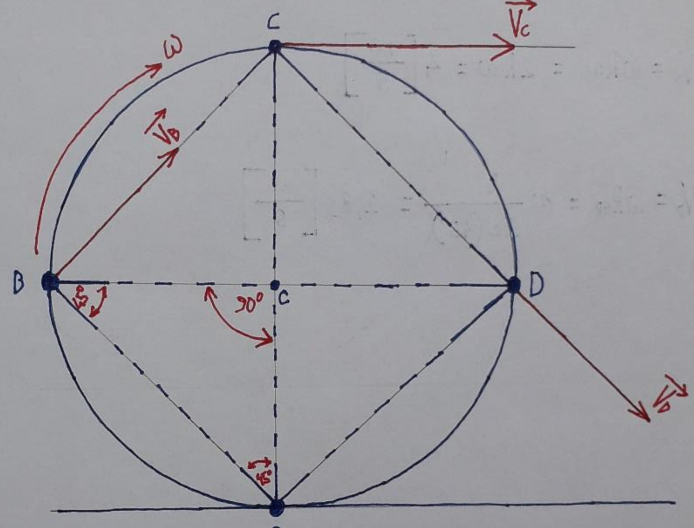
V = $|\vec{V}|$ = ω_2r

V = V i izrazimo r.

Задатак 68. По хоризонталном глатком путу котрља се точак полупречника $R=0{,}5[m]$ без клизања. Брзина точка је $V=2[m/s]$. Израчунати линијске брзине тачака на ободу точка које су померене за угао $(\pi/2)[rad]$ у односу на тачку додира точка са земљом.

Рјешење:

$R=0{,}5[m]$
$V=2[m/s]$
$V_A=?$
$V_B=?$
$V_C=?$
$V_D=?$



Код равномјерног ротационог (кружног) кретања је $\omega=const$ и важи релација $V=\omega R$ гдје је R удаљеност материјалне тачке у односу на референтно тијело. У нашем случају референтно тијело је тачка A.

$V=\omega R$

$$\omega=\frac{V}{R}=\frac{2}{0{,}5}=4\left[\frac{rad}{s}\right]$$

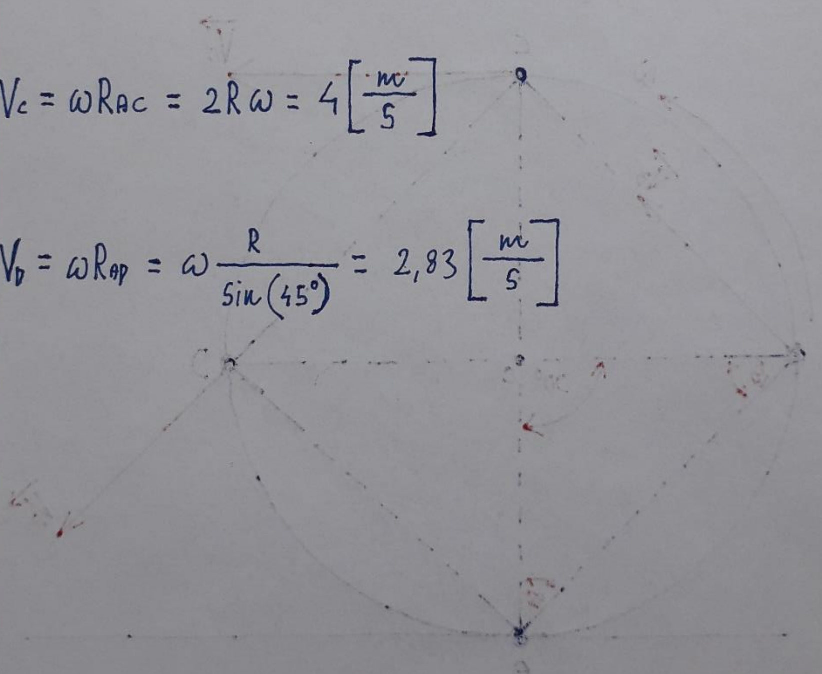
A = Референтно тијело. R = R·(положај неке тачке у односу на тачку A).

$$V_A = \omega R_{AA} = \omega 0 = 0 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_B = \omega R_{AB} = \frac{\omega R}{\cos(45^\circ)} = 2,83 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_C = \omega R_{AC} = 2R\omega = 4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_D = \omega R_{AD} = \omega \frac{R}{\sin(45^\circ)} = 2,83 \left[\frac{m}{s}\right]$$



Zadatak 68.

R = poluprečnik kružnice (ne mješati sa R u tekstu sa slike 7). Ugaona brzina tačke na kružnici se ne mijenja po intenzitetu u funkciji vremena. Dakle proizvoljna materijalna tačka ugaonom brzinom ω rotira po kružnici poluprečnika R, a čitav sistem se kreće translatorno stalnom brzinom V pa je :

$V = \omega R \rightarrow \omega = \frac{V}{R}$

Ono šta mi treba u zadatku da odredimo je linearna(periferijska) brzina tačaka na obodu točka koje su za ugao od 90° pomjerene od tačke A koja predstavlja tačku dodira točka sa zemljom. Dakle tačka A je referentno tijelo. Tačke B, C , D crtamo tako da ugao između duži koja panaosob tačku(B,C ili D) spaja sa tačkom O i duži koja tačku A spaja sa tačkom O bude jednak 90°.

a) Linearna(periferijska) brzina tačke A u odnosu na tačku A:

$V_A = \omega$ * (rastojanje između tačke A i tačke A) $= \omega * 0 = 0$

b) Linearna(periferijska) brzina tačke B u odnosu na tačku A:

$V_B = \omega$ * (rastojanje između tačke B i tačke A) $= \omega * \frac{R}{\cos(45°)}$

jer $\overleftrightarrow{AB}$ je hipotenuza jednakokrakog trougla, a dužina kateta je jednaka R pa je $\cos(45°) = \frac{R}{\overleftrightarrow{AB}}$

c) Linearna(periferijska) brzina tače C u odnosu na tačku A:

$V_C = \omega$ * (rastojanje između tačke C i tačke A) $= \omega 2R$

d) Linearna(periferijska) brzina tačke D u odnosu na tačku A:

Sve isto kao u slučaju pod B) jer cos(45°) = sin(45°) a radi se o jednom te istom trouglu.

Задатак 71. Аутомобил се креће по хоризонталној кружној путањи полупречника $R = 43\,[m]$, убрзањем $a = 2\,[m/s^2]$. Почетна брзина аутомобила је $V_0 = 36\,[km/h]$. За које време ће аутомобил прећи први круг?

Рјешење: Кретање аутомобила по хоризонталној кружној путањи је заправо "Једнакоубрзано кружно кретање материјалне тачке" у односу на центар кружнице полупречника R. За које вријеме 't' ће аутомобил прећи пуни круг ($\theta = 2\pi\,[rad]$)? Постављамо једначину:

$R = 43\,[m]$

$a = 2\,[m/s^2]$

$V_0 = 36\,[km/h]$

$t = ?$

$\theta = 2\pi\,[rad]$

$\omega_0 = \frac{V_0}{R}$ из релације $V = \omega R$ равномјерног кружног кретања материјалне тачке.

$\alpha = \frac{a}{R}$ (1)

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (1)$$

$$2\pi = \frac{V_0 t}{R} + \frac{a t^2}{2R}$$

$$2V_0 t + a t^2 = 4R\pi$$

$a t^2 + 2V_0 t - 4R\pi = 0$ Квадратна једначина по t.

[redacted]

[redacted]

$$t_{1,2} = \frac{-2V_0 \pm \sqrt{(2V_0)^2 + 16aR\pi}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{(2V_0)^2 + 16aR\pi} - 2V_0}{2a} =$$

$$\frac{-72\left[km/h\right] + \sqrt{5184\left[km/h\right]^2 + 16\cdot 2\left[m/s^2\right]\pi \cdot 43\left[m\right]}}{4\left[m/s^2\right]} =$$

Мјерне јединице морају бити у складу са SI системом $(t[s])$! ↯

$$\frac{-72\left[km/h\right] + \sqrt{5184\left[\frac{km}{h}\right]^2 + 4329\left[\frac{m}{s}\right]^2}}{4\left[\frac{m}{s^2}\right]} =$$

$$\frac{\overbrace{\frac{-72\cdot 1000}{60\cdot 60}\left[\frac{m}{s}\right]}^{=20\left[\frac{m}{s}\right](-1)} + \overbrace{\sqrt{\frac{5184\cdot 1000\cdot 1000}{60\cdot 60\cdot 60\cdot 60}\left[\frac{m^2}{s^2}\right] + 4329\left[\frac{m^2}{s^2}\right]}}^{=\approx 69\left[\frac{m}{s}\right]}}{4\left[\frac{m}{s^2}\right]} =$$

$$\frac{49\left[m/s\right]}{4\left[\frac{m}{s^2}\right]} \approx 12,25\left[s\right]$$

$t_2 < 0$ Није могуће измјерити негативно вријеме!

t_2 рјешење отпада!

Važno je uočiti da je *a* zapravo tangencijalno ubrzanje.

Задатак 73. Осовина неког мотора обрће се сталном угаоном брзином $\omega_1 = 6000\,[ob/min]$. Кочењем се угаона брзина осовине смањи на $\omega_2 = 4800\,[ob/min]$ за време $t = 4\,[s]$. Колико је угаоно убрзање осовине и број учињених обртаја за време кочења?

Рјешење: $[ob/min]$ се чита као обртај по минути, представља мјерну јединицу за физичку величину broj učinjenih obrtaja у ознаци као 'n'.

$\omega_1 = 6000\,[ob/min]$

$\omega_2 = 4800\,[ob/min]$

$t = 4\,[s]$

$\alpha = ?$

$N = ?$

$$1\left[\frac{ob}{min}\right] = \frac{1}{60}\,[Hz]$$

$$1\left[\frac{rad}{s}\right] = \frac{1}{2\pi}\,[Hz]$$

$$1\,[Hz] = 60\left[\frac{ob}{min}\right] \quad (1.)$$

$$1\,[Hz] = 2\pi\left[\frac{rad}{s}\right] \quad (2.)$$

$$(1.) = (2.) \iff [Hz] = [Hz]$$

$$60\left[\frac{ob}{min}\right] = 2\pi\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$1\left[\frac{rad}{s}\right] = \frac{30}{\pi}\left[\frac{ob}{min}\right] \approx 9{,}54\left[\frac{ob}{min}\right] \rightarrow \boxed{1\,\frac{ob}{min} = 0{,}1\left[\frac{rad}{s}\right]}$$

$$\omega_1 = 6000 \cdot 0{,}1 = 600\,[rad/s]$$

$$\omega_2 = 4800 \cdot 0{,}1 = 480\,[rad/s]$$

У складу са SI системом мјерних јединица.

Осовина посматраног мотора ротира угаоном брзином ω_1 неко вријеме t_1. Затим ротира угаоном брзином ω_2 неко вријеме t_2. Из текста задатка знамо да је $\Delta t = t_2 - t_1 = 4\,[s]$.

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{-120\,[rad/s]}{4\,[s]} = -30\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Тражено угаоно убрзање осовине, како је $\alpha < 0$ то значи да је осовина почела да кочи. За вријеме кочења описани угао ће бити:

$$\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{\alpha \Delta t^2}{2} = \omega_1 \Delta t - \frac{\alpha \Delta t^2}{2} = 600\left[\frac{rad}{s}\right] 4\,[s] - \frac{30}{2}\left[\frac{rad}{s^2}\right] 16\,[s^2] = 2160\,[rad]$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{2160\,[rad]}{2\pi\,[rad]} = 343$$

Kao što postoji srednje linearno ubrzanje, tako postoji i srednje ugaono ubrzanje $\alpha_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Задатак 74. Угаона брзина неког точка смањи се равномјерно од $\omega_1 = 1200\,[ob/min]$ до $\omega_2 = 600\,[ob/min]$ у времену $\Delta t = 10\,[s]$.

a) За које време ће се точак зауставити?

b) Колико је време трајања последњег обртаја?

Рјешење:

a) До истека неког временског интервала t_1 угаона брзина неког точка је све вријеме t_1 било једнака ω_1. Затим након Δt времена угаона брзина посматраног точка је једнака ω_2. Сада када нам је познато $\Delta\omega$ (промјена угаоне брзине посматраног точка) и Δt можемо одредити угаоно убрзање точка:

$\omega_1 = 1200\,[ob/min] = 120\,[rad/s]$

$\omega_2 = 600\,[ob/min] = 60\,[rad/s]$

$t = ?\ ,\ \Delta t = 10\,[s]$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{60\,[rad/s] - 120\,[rad/s]}{10\,[s]} = -6\,[rad/s^2]$$

Како је угаоно убрзање негативно, точак се успореном зауставља.
Након $t_1 + \Delta t$ точак угаоном брзином ω_2 се ротира неко непознато вријеме t односно потребно му је вријеме t да би се зауставио.

$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$ / str. 24 4.

$\omega_2 = 0$ Услов заустављања точка. $\omega = 0 \Leftrightarrow$ точак је у стању мировања.

$$\omega_1 + \alpha t = 0 \rightarrow t = \frac{-\omega_1}{\alpha} = \frac{-120\,[rad/s]}{-6\,[rad/s^2]} = 20\,[s]$$

За t времена точак ће описати угао θ:

$\boxed{\theta = ?}$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$ Формула

$$\Updownarrow$$

$$\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 120\left[rad/s\right] 20\left[s\right] + \frac{-6\left[rad/s^2\right]}{2}\left(20\left[s\right]\right)^2 =$$

$$\left(2400 - 1200\right)\left[rad\right] = 1200\left[rad\right]$$

б Погледати у збирци "Гојко Л. Димић, физика виши курс" слику на страни 228.

$\boxed{T = ?}$

$$\theta - 2\pi$$

Задатак 80. Точак, полупречника $R=20[cm]$, почне да се обрће сталним угаоним убрзањем $\alpha = 6,28[rad/s^2]$. Колика је брзина и убрзање тачке на ободу точка после времена $t = 5[s]$ од почетка кретања?

Рјешење: Тачка на ободу точка. <=> Тачка A која се налази на кружници (Материјална тачка) која ротира по кружници у односу на тачку центра кружнице.

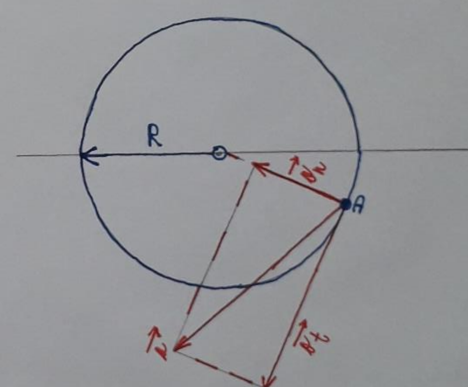
$R = 20[cm]$

$\alpha = 6,28[rad/s^2]$

$t = 5[s]$

$V_A = ?$

$a_A = ?$



$$\omega = \alpha t = 31,4\,[rad/s]$$

$$V_A = \omega R = 31,4 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 6,28\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$|\vec{a_t}| = R\alpha = 1,256$$

$$|\vec{a_n}| = R\omega^2 = \frac{V^2}{R} = 197,1$$

$$\rightarrow \quad |\vec{a}| = 1,98,448\,[m/s^2]$$

Задатак 85. Тело се креће по кружној путањи угаоном брзином ω чији интензитет зависи од угаоног померaја θ по закону

$$\omega(\theta) = \omega_0 - K\theta$$

где је ω_0 - почетна угаона брзина, а $K = 2\,[1/s]$, при чему је угаони отклон $\theta = 0$ у тренутку $t = 0$. Установити зависности:

a) $\theta(t)$,

b) $\omega(t)$,

c) После ког времена ће угаона брзина тела да опадне на $\omega_0/2$?

Рјешење:

a) Равномјерно кружно кретање. Позната нам је функција угаоне брзине тела. Непозната нам је функција којом тело мења угаони положај у функцији времена. При равномјерном кружном кретању је $\omega = (d\theta/dt)$:

$\boxed{\theta(t) = ?}$

$$\omega(\theta) = \omega_0 - K\theta = \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ Тражимо зависност θ од t

$$\frac{d\theta}{\omega} = dt$$

$$\frac{d\theta}{\omega_0 - K\theta} = dt \ldots \int$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\omega_0 - k\vartheta} = \int_0^{t} dt \qquad (1)$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\omega_0 - k\vartheta} = \boxed{\begin{array}{l} \omega_0 - k\vartheta = x \,/\,' \\ \left((\omega_0)' - \left[k'\vartheta + k\vartheta'\right]\right) d\vartheta = dx \\ \quad - k\, d\vartheta = dx \rightarrow d\vartheta = \frac{-dx}{k} \end{array}} = \int_0^{\vartheta} \frac{\frac{-dx}{k}}{x} = \int_0^{\vartheta} \frac{-dx}{kx} =$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^{\vartheta} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{k}\ln|x|\Big|_0^{\vartheta} = -\frac{1}{k}\ln(\omega_0 - k\vartheta)\Big|_0^{\vartheta} = -\frac{1}{k}\left[\ln(\omega_0 - k\vartheta) - \ln(\omega_0)\right]$$

$$-\frac{1}{k}\left[\ln(\omega_0 - k\vartheta) - \ln(\omega)\right] = t \iff (1)$$

$$\ln\left(\frac{\omega_0 - k\vartheta}{\omega_0}\right) = -kt$$

$$\frac{\omega_0 - k\vartheta}{\omega_0} = e^{-kt} \rightarrow \frac{\omega_0 - k\vartheta}{\omega_0} = \frac{1}{e^{kt}}$$

$$e^{kt}\omega_0 - e^{kt}k\vartheta = \omega_0$$

$$\vartheta = \frac{\omega_0 - \omega_0 e^{kt}}{-ke^{kt}} = \frac{-(\omega_0 e^{kt} - \omega_0)}{-ke^{kt}} = \left(\frac{\omega_0 e^{kt}}{ke^{kt}} - \frac{\omega_0}{ke^{kt}}\right) =$$

$$\boxed{\frac{\omega_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \vartheta(t)}$$ Тражена функција

b

$$\boxed{\omega(t) = ?}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \left[\frac{\omega_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)\right]' = \left[\frac{\omega_0}{\kappa}\left(\frac{e^{\kappa t} - 1}{e^{\kappa t}}\right)\right]' =$$

$$\left(\frac{\omega_0}{\kappa}\right)'\left(\frac{e^{\kappa t} - 1}{e^{\kappa t}}\right) + \frac{\omega_0}{\kappa}\left(\frac{e^{\kappa t} - 1}{e^{\kappa t}}\right)' = \frac{\omega_0}{\kappa} \cdot \frac{\left(e^{\kappa t} - 1\right)' e^{\kappa t} - \left(e^{\kappa t} - 1\right)\left(e^{\kappa t}\right)'}{e^{2\kappa t}} =$$

$$\frac{\omega_0}{\kappa} \cdot \frac{\left(e^{\kappa t}\left(\kappa' t + \kappa t'\right)\right) e^{\kappa t} - \left(e^{\kappa t} - 1\right) e^{\kappa t}\left(\kappa' t + \kappa t'\right)}{e^{2\kappa t}} =$$

$$\frac{\omega_0}{\kappa e^{2\kappa t}}\left[\kappa e^{2\kappa t} - \kappa e^{\kappa t}\left(e^{\kappa t} - 1\right)\right] = \frac{\omega_0}{\kappa e^{2\kappa t}}\left(\kappa e^{2\kappa t} - \kappa e^{2\kappa t} + \kappa e^{\kappa t}\right) =$$

$$\frac{\omega_0}{\kappa e^{2\kappa t}} \cdot \kappa e^{\kappa t} = \boxed{\frac{\omega_0}{e^{\kappa t}} = \omega(t)}$$

c

$\boxed{t = ?}$ Питамо се када ће угаона брзина бити једнака $(\omega_0/2)$?

$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{e^{\kappa t}}$$

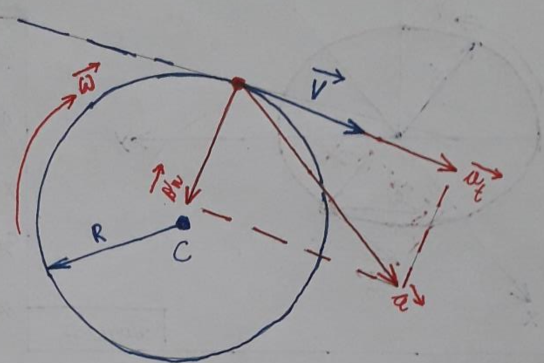
$$\frac{1}{2} = e^{-\kappa t} \; \ldots \ln \qquad -\ln 2 = -\kappa t$$

$$\ln 2^{-1} = -\kappa t \rightarrow \qquad t = \frac{\ln 2}{\kappa} = 0{,}35\,[s]$$

Задатак 86. Материјална тачка се креће по кругу, брзином $V(t)=bt$, гдје је $b=1\left[m/s^2\right]$. Колико је укупно убрзање тачке у тренутку када она учини угаони помјерај од $\theta=0{,}6\pi\,[rad]$?

Рјешење: круг ≠ кружница

$V(t)=bt$
$b=1\left[m/s^2\right]$
$\theta=0{,}6\pi\,[rad]$
$a=?$ линеарно убрзање



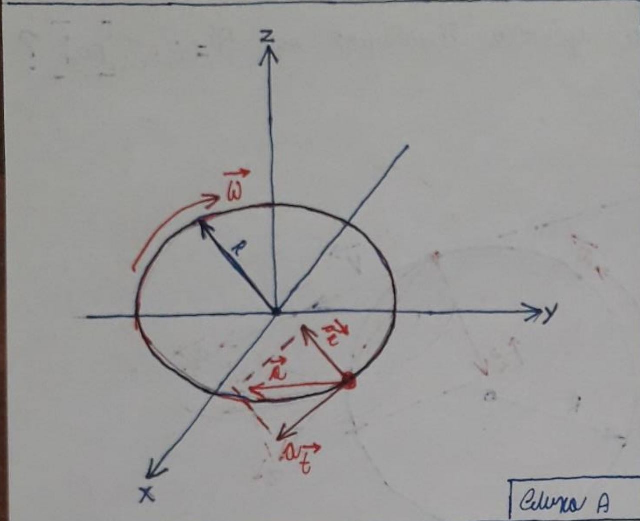
На слици је приказано кретање материјалне тачке по кружници полупречника R по кружници. Тачке кружнице су подскуп тачака круга. Код кружног кретања које је специјалан случај криволинијског кретања вектор $\vec{a}$ је увијек усмјерен ка конкавности (удубље-ности криве). Вектор $\vec{a}$ у случају криволинијског (кружног) кретања може разложити на двије компоненте $(\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n)$.

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n \rightarrow a=|\vec{a}|=\sqrt{(|\vec{a}_t|)^2+(|\vec{a}_n|)^2}$$

$$|\vec{a}_t|=\frac{dV(t)}{dt}=(bt)'=b't+bt'=b$$ јер $\vec{a}_t$ одређује промјену $|\vec{V}|$ по времену.

Сада нам требају t и R...

$$|\vec{a_n}| = R\omega^2 = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{b^2t^2}{R}$$



Слика А

[redacted]

На слици (Слика А) је приложен доказ да $\omega = const$ то је кретање материјалне тачке заправо равномјерно кружно= кретање.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt = \frac{V}{R} dt \ldots \int$$

$$\int_0^{\theta} d\theta = \frac{1}{R}\int_0^t V(t)dt$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{R}\int_0^t bt\,dt = \frac{bt^2}{2R}} \rightarrow$$

$$0{,}6\pi = \frac{bt^2}{2R}$$

$$bt^2 = (1{,}2)R\pi$$

$$t = \frac{\sqrt{(1{,}2)R\pi}}{\sqrt{b}}$$

$$|\vec{a_n}| = \frac{b^2\left(\frac{\sqrt{1{,}2\pi R}}{\sqrt{b}}\right)^2}{R} = \frac{\frac{b^2(1{,}2)\pi R}{b}}{R} = \frac{b^2(1{,}2)\pi R}{Rb} = b\pi(1{,}2)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a_t}| + |\vec{a_n}|} = \sqrt{b^2 + b^2(1{,}2)^2\pi^2} = b\sqrt{1+((1{,}2)\pi)^2} = 3{,}9\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Задатак 88. Нормално убрзање тела које се креће по кругу, полупречника R, мења се са временом по закону:

$$a_n(t) = At + Bt^2$$

где су A и B константе.

a) Колика је угаона брзина тела?

b) Колико је тангенцијално, а колико је укупно убрзање тела?

Рјешење:

a) $\omega = ?$

$a_n = R\omega^2$ Позната формула

$$\boxed{\omega^2 = \frac{a_n}{R}} \rightarrow \omega^2 = \frac{At + Bt^2}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega^2} = \frac{\sqrt{At + Bt^2}}{\sqrt{R}}$$

b) $a_t = ?\ ;\ a = ?$ $\quad a_t = \frac{dV(t)}{dt}$ Упамти то!

Позната формула

$$a_n = R\omega^2 = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$V = \sqrt{a_n R} = \sqrt{R a_n} = \sqrt{R}\sqrt{At + Bt^2}$$

$$a_t = \frac{dV(t)}{dt} = \left(\sqrt{R}\sqrt{At + Bt^2}\right)'$$

$$a_t = \left(\sqrt{R}\right)'\sqrt{At+Bt^2} + \sqrt{R}\left(\sqrt{At+Bt^2}\right)' = 0 + \frac{\sqrt{R}\left(At+Bt^2\right)'}{2\sqrt{At+Bt^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{R}\left(A't+At'+B't^2+B\left(t^2\right)'\right)}{2\sqrt{At+Bt^2}} = \frac{\sqrt{R}\left(A+2Bt\right)}{2\sqrt{t\left(A+Bt\right)}}$$

[redacted]

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \left[\left(\frac{\sqrt{R}\left(A+2Bt\right)}{2\sqrt{t\left(A+Bt\right)}}\right)^2 + \left(At+Bt^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[\frac{R\left(A+2Bt\right)^2 + \left(At+Bt^2\right)\left(4t\left(A+Bt\right)\right)}{4t\left(A+Bt\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Задатак 90. Вектор положаја материјалне тачке одређен је релацијом

$$\vec{r}(t) = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j}$$

где су A, B, C - константе, $\vec{i}$, $\vec{j}$ - јединични вектори X и Y-оса.

Одредити:

a) једначину путање материјалне тачке,

b) вектор брзине и убрзања материјалне тачке, као и њихове интензитете,

c) интензитет нормалног и тангенцијалног убрзања материјалне тачке.

Решење:

a) $\vec{r}(t) = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$x = x(t) = A + Bt^2$

$y = y(t) = Ct$

Из једначине кретања материјалне тачке $\vec{r} = \vec{r}(t)$, записане у скаларном облику као $x = x(t)$ и $y = y(t)$ се јасно види да једначина путање лежи у xy - равни Декартовог тродимензионалног координатног система.

Као што видимо из једначине вектора померања (вектора кретања) $\vec{r} = \vec{r}(t)$ аргумент функције y је 't'.

$Bt^2 = x - A$

$t = \frac{\sqrt{x-A}}{\sqrt{B}}$

$y(t) = Ct = \frac{C\sqrt{x-A}}{\sqrt{B}}$ и добили смо функцију по којој се материјална точка креће једначином датом као $\vec{r}(t)$.

Другим ријечима по кривој [redacted] $y(t) = \frac{C\sqrt{x(t)-A}}{\sqrt{B}}$

материјална точка се у односу на референтно тијело креће функцијом $\vec{r} = \vec{r}(t) = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j}$.

$\boxed{b}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (A + Bt^2)'\vec{i} + (Ct)'\vec{j} = \left[A' + B't^2 + B(t^2)'\right]\vec{i} + \left[C't + Ct'\right]\vec{j} =$$

$$2Bt\vec{i} + C\vec{j} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{4B^2t^2 + C^2}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = (2Bt)'\vec{i} + C'\vec{j} = 2B\vec{i} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = 2B}$$

$\boxed{c}$

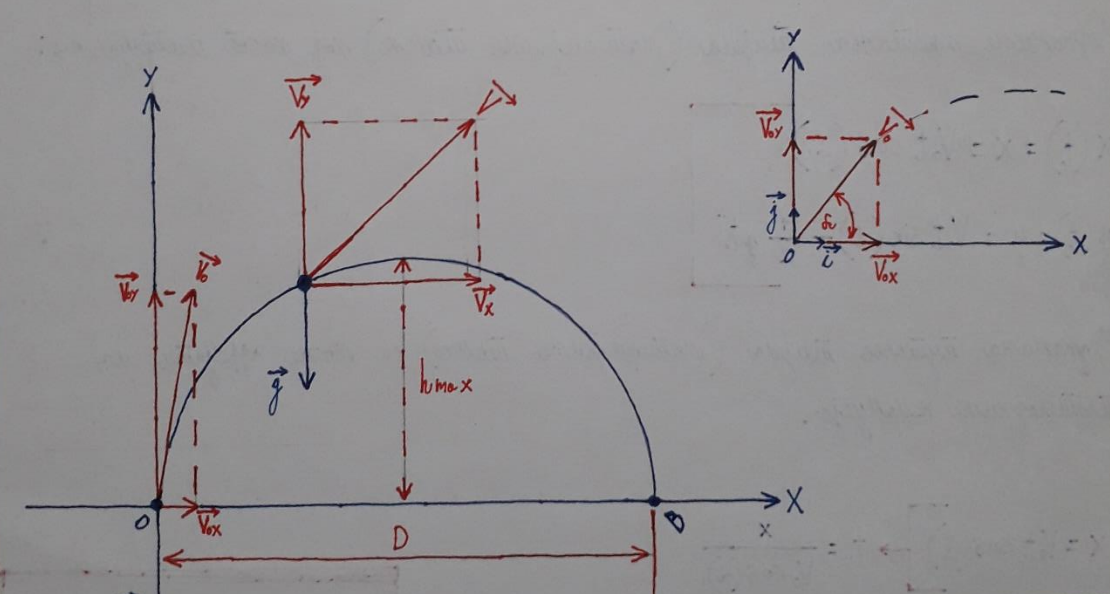
$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{2B^2t}{\sqrt{4B^2t^2 + C^2}}$$

$a = a_t + a_n$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 2B\left[1 - \frac{4B^4t^2}{4B^2t^2 + C^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$ јер је $a_n = a - a_t$

4. Коси хитац

Коси хитац је примјер криволинијског кретања код кога се тијело (материјална тачка) избаци почетном брзином V_0 у пољу силе Земљине теже под неким углом 'α' у односу на хоризонталу. Код косог хитца путања материјалне тачке је нека парабола. За анализу, најпогодније би било параболу смјестити на xy-раван Декартовог тродимензионалног координатног система тако да референтно тијело буде тачка O(0,0).



Слика 10

Компоненте почетне брзине тијела (материјалне тачке) код косог хитца су:

$$\left.\begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos(\alpha) \\ V_{0y} = V_0 \sin(\alpha) \end{array}\right] \rightarrow \vec{V_0} = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j}$$

Компоненте брзине тијела (материјалне тачке) код косог хитца су:

$$V_x(t) = V_x = V_0 \cos(\alpha) \quad \forall t \in (R^+ \cup \{0\}) \rightarrow \text{Равномјерно кретање.}$$

$$V_y(t) = V_y = V_0 \sin(\alpha) - gt$$

$$\rightarrow \vec{V}(t) = V_x\vec{i} + V_y(t)\vec{j}$$

Једначине кретања тијела (материјалне тачке) код косог хитца су:

$$x(t) = x = V_0 t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = y = V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

Једначина путање тијела (материјалне тачке) се може одредити из претходних релација.

$$\left. x = V_0 t \cos(\alpha) \right] \rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}$$

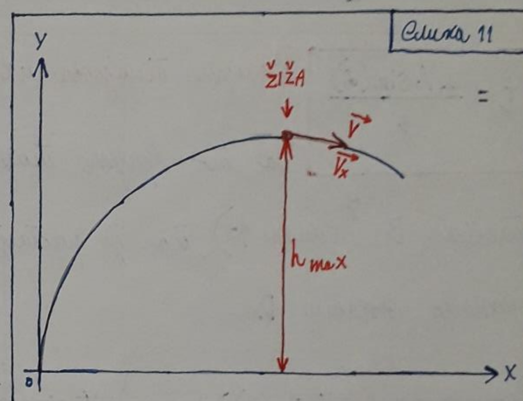
$$y\left(t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}\right) = V_0 \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)} \sin(\alpha) - \frac{x g^2}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} = \boxed{x\, tg(\alpha) - \frac{x g^2}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} = y}$$

Код косог хитца положај највеће висине је у тачки коју зовемо ŽIŽA параболе. Ако се тијело (материјална тачка) налази у тачки жиже параболе код косог хитца тада је растојање између материјалне тачке и хоризонтале једнако h_{max} то је вертикална компонента вектора брзине једнака нули. Из услова $V_y(t)=0$ налази се да је вријеме кретања тијела до тачке ŽIŽA параболе једнако:

$$V_y(t)=0$$

$$V_0 \sin(\alpha) - g t = 0$$

$$\boxed{t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}}$$



$$h_{max} = y\left(t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) =$$

[redacted] $$V_0 \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g} \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 =$$

$$\frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \boxed{\frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}}$$

Код косог хитца трајање лета тијела (материјалне тачке) завршава у оном временском тренутку 't' када је $y(t) = 0$:

$$y(t) = 0$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) = \frac{gt}{2}$$

$$\boxed{t = \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g}}$$

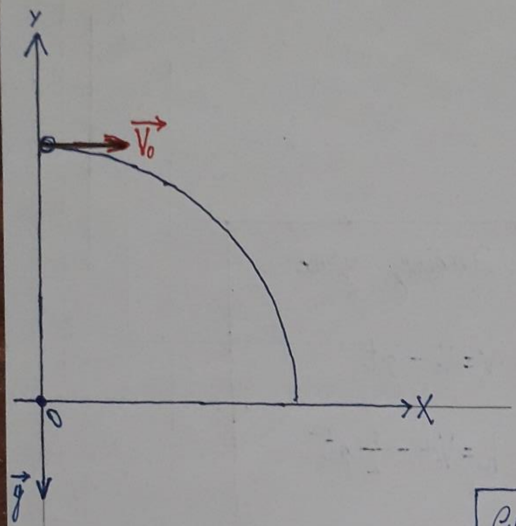
Вријеме трајања укупног лета.

За то вријеме тијело (материјална тачка) доспије у тачку B (Слика 10) па је растојање између тачке B и тачке O једнако домету D.

$$D = x\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = V_0 \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g} \cos(\alpha) = \frac{V_0^2 \, 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} =$$

$$= \boxed{\frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

Хоризонтални хитац



Слика 11

Компоненте брзине тијела (материјалне тачке) код хоризонталног хитца:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_0 \\ V_y &= -gt \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Јер је } \alpha = 0\,[\text{rad}]$$

Једначине кретања тијела (материјалне тачке) код хоризонталног хитца:

$$x(t) = x = V_0 t$$

[redacted] $y(t) = y = -\frac{1}{2} g t^2$

Слободан пад:	Хитац наниже:	Хитац увис
$v = gt$	$v = v_0 + gt$	$v = v_0 - gt$
$h = \frac{1}{2} g t^2$	$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$	$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
$v^2 = 2gh$	$v^2 = v_0^2 + 2gh$	$v^2 = v_0^2 - 2gh$

- У свим једначинама занемарујемо отпор ваздуха.
- У случају да узимамо у обзир отпор ваздуха путања није парабола већ БАЛИСТИЧКА КРИВА.

Задатак 93. Два тела (А и В) слободно падају. Тело В пада са висине $h_B = 150\,[m]$ и падне раније за време $\Delta t = 3,5\,[s]$ од тела А. Са које висине је пуштено тело А?

Рјешење:

$h_B = 150\,[m]$

$\Delta t = 3,5\,[s]$

$h_A = ?$

$$h_B = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$h_B = \frac{g t_1^2}{2}$$

$$2 h_B = g t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 h_B}{g}} \approx 5,5\,[s]$$

Када за t_1 додамо Δt добићемо време падања тела А.

$$h_A = \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$h_A = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2$$

$$h_A = \frac{g (t_1 + \Delta t)^2}{2}$$

$$2 h_A = g (t_1 + \Delta t)^2$$

$$h_A = \frac{g (t_1 + \Delta t)^2}{2} = \frac{9,81 \cdot (9)^2}{2} = 397,3\,[m]$$

Задатак 94. На висини $H = 980[m]$ „стоји" хеликоптер из кога се испусти бомба која слободно пада. После ког времена ће пилот хеликоптера да чује [redacted] експлозију бомбе? Узети да је брзина звука $c = 340[m/s]$.

Рјешење:

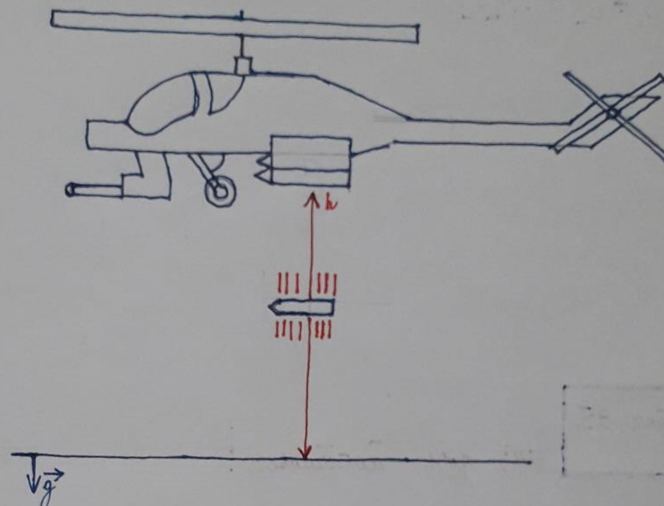
$H = 980[m]$

$t_1 = ?$

$t_2 = ?$

$t_3 = ?$

$c = 340[m/s]$



t_1 = Вријеме које је потребно бомби (материјалној тачки) да падне на тло:

$$H = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$2H = g t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \approx 14,1[s]$$

t_2 = Вријеме које је потребно звуку да брзином 'c' пређе пут дужине H: $t_2 = \frac{H}{c} = \frac{980[m]}{340[m/s]} = \approx 2,9[s]$

Дакле и звук се може кинематички моделовати као материјална тачка.

t_3 = До експлозије ће доћи када бомба и звучно поље (звук) достигну тло:

$$t_3 = t_1 + t_2 = 17\,[s]$$

Задатак 95.

Није добро постављен!

Zadatak 94.

Sa visine H iz helikoptera puštena je bomba da slobodno pada. Pitamo se poslije kog vremena će pilot čuti zvuk ekspozije ove bombe. Da bi zvuk eksplozije ove bombe došao do uha pilota bomba mora prvo pasti na zemlju. Da bi bomba pala na zemlju potrebno joj je neko vrijeme t_1 koje smo izračunali u zadatku. Nakon pada bombe na zemlju, zvuk eksplozije počinje da se širi brzinom *c* što znači da će put dužine *H* zvuk preći za vrijeme $t_2 = \frac{H}{c}$. Dakle da bi zvuk eksplozije ove bombe ušao u sluh pilota potreban je vremenski interval jednak $t_3 = t_1 + t_2$.

Задатак 96. Челична куглица се пусти са висине $h = 1[m]$ на челичну плочу од које се одбије при чему смањи своју брзину за 10%. Исто се дешава и при следећем одбијању куглице од плоче. Колико ће да буде треће време падања куглице ?

Рјешење: Слободан пад, хитац увис.

$h_1 = h = 1[m]$

$t_3 = ?$

Челична куглица слободно пада са висине h_1 на челичну плочу.

$$\boxed{V_1 = \sqrt{2gh} \cong 4,429\left[\frac{m}{s}\right]}$$ → Брзина слободног падања куглице са висине h_1.

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cong 0,45[s]}$$ → Вријеме трајања слободног пада куглице са висине h_1 брзином v_1 на челичну плочу.

Када куглица падне на плочу она ће одскочити од плоче до неке висине h_2 брзином $V_1' = V_1 - V_1\frac{10}{100} = 3,986\left[\frac{m}{s}\right]$ па се висина h_2 може израчунати примјеном једначине $h = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (хитац увис).

$h_2 = V_1' t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 =$ [redacted] $=$

$$(3,986)\cdot 0,45 - 0,5\cdot 9,81\cdot(0,45)^2 = 0,8[m]$$

Куглица затим са висине h_2 почиње поново да пада на металну плочу.

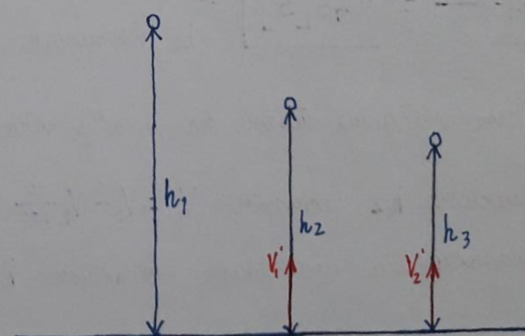
$$\boxed{V_2 = \sqrt{2gh_2} = 3,96\,[m/s]}$$ → Брзина којом куглица пада на металну плочу са висине h_2.

$$\boxed{t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0,403\,[s]}$$ → Вријеме трајања слободног пада куглице брзином V_2 са висине h_2 на металну плочу.

$$\boxed{V_2' = V_2 - V_2\frac{10}{100} = 3,564\left[\frac{m}{s}\right]}$$ → Брзина којом се куглица пење до нове висине h_3 након одбијања од плочу.

$$h_3 = V_2' t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = (3,564)\,0,403 - 0,5(9,81)(0,403)^2 = 0,639\,[m]$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 0,361\,[s] \checkmark$$



Задатак 97. Тело слободно пада са висине h. У тачки А има брзину $V_A = 29,43\left[\frac{m}{s}\right]$, а у тачки B брзину $V_B = 49,05\left[\frac{m}{s}\right]$. Колика је висинска разлика тачака А и B? За које ће време тело прећи пут AB?

Рјешење: Слободан пад + хитац наниже.

h

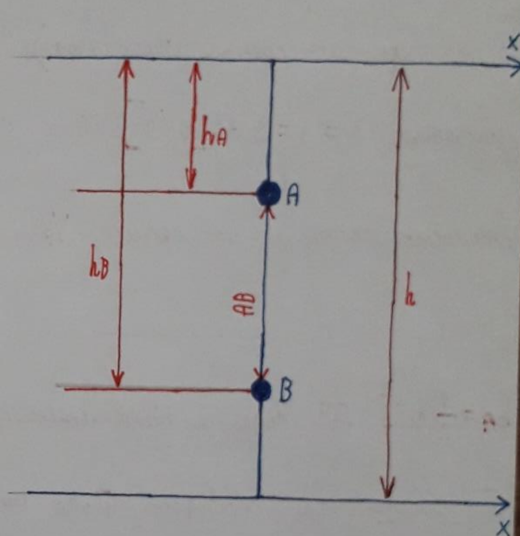
[redacted]

$V_A = 29,43\left[\frac{m}{s}\right]$

$V_B = 49,05\left[\frac{m}{s}\right]$

[redacted] $h_B - h_A = ?$

$t_{AB} = ?$



$V_A = \overset{0}{V_0} + g t_A$ $\qquad$ $V_B = \overset{0}{V_0} + g t_B$

$t_A = \frac{V_A}{g} = 3[s]$ $\qquad$ $t_B = \frac{V_B}{g} = 5[s]$

$h_A = \frac{1}{2} g t_A^2 = 44,145[m]$ $\qquad$ $h_B = \frac{1}{2} g t_B^2 = 122,625[m]$

Сада је: [redacted] $h_B - h_A = 78,48[m]$

$t_{AB} = t_B - t_A = 2[s]$

$V_0 = 0$ јер тело слободно пада.

Изрази $V_A = V_0 + g t_A$ и $V_B = V_0 + g t_B$ произилази из формула

да је $V = V_0 + at$ $\boxed{\text{str. 24.}}$

За V_A: Тело има неку почетну брзину једнаку V_0 (код нас је $V_0 = 0$ јер тело пада из стања мировања). Након времена t (t_A) крећући се убрзањем $a = g = 9,81\,[m/s^2]$ тело има брзину једнаку V_A.

Аналогно важи и за брзину V_B.

$h_A = \frac{1}{2} g t_A^2$ Када је тело пало на висину тачке A замисли замисли замисли да га пуштам да слободно пада на хоризонталу X'.

$h_B = \frac{1}{2} g t_B^2$ Када је тело пало на висину тачке B замисли да га пуштам да слободно пада на хоризонталу X'.

Задатак 98. Два тела падају са висине $H = 7900\,[m]$. Једно тело је почело да пада без почетне брзине док је другом саопштена почетна брзина $V_0 = 200\left[\frac{m}{s}\right]$ са смером наниже. Како се мења растојање између тела ако су почела да падају истовремено и из исте тачке? Колико је ово растојање када друго тело падне на земљу?

Рјешење: Слободан пад, хитац наниже.

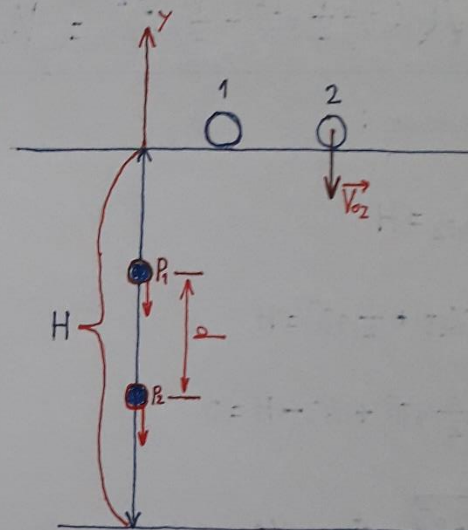
$H = 7900\,[m]$

$V_{01} = 0\left[\frac{m}{s}\right]$

$V_{02} = V_0 = 200\left[\frac{m}{s}\right]$

$d(t) = ?$

$h_i = H$



У неком произвољном временском тренутку 't' након испуштања куглица тијело 1 налази се у точки P_1, а тијело 2 се налази у точки P_2.

$$\boxed{h_{P1} = \frac{1}{2}gt^2} \rightarrow \text{Слободан пад.}$$

$$\boxed{h_{P2} = V_{02}t + \frac{1}{2}gt^2} \rightarrow \text{Хитац наниже.}$$

Растојање између тијела се мења по времену па је $d = d(t)$.
Да би одредили растојање између тачака ① и ② у било ком временском тренутку t пројектујемо тачке на рецимо y-осу.

$$d(t) = h_{P2} - h_{P1} = \sqrt{\left(\left(V_{02}t + \frac{1}{2}gt^2\right) - \frac{1}{2}gt^2\right)^2} = V_{02}t$$

Када друго тијело падне на земљу имамо :

$$h_{P2} = H$$

$$V_{02}t + \frac{1}{2}gt^2 = H$$

$$\frac{1}{2}gt^2 + V_0t - H = 0$$

$$gt^2 + 2V_0t - 2H = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2V_0 \pm \sqrt{(2V_0)^2 - 4(g)(-2H)}}{2g} = \frac{-400 \pm \sqrt{(400)^2 + 8gH}}{2(9,81)} = \frac{-400 \pm 883,71}{19,62}$$

$$t_1 \approx 24,62\,[s]$$

$t_2 < 0$ Неприхватљиво рјешење са физичког аспекта гледања.

$$d(t = t_1) = V_{02}\,(24,62) = 4924\,[m]$$

Zadatak 98.

U nekom vremenskom trenutku ($t = 0$) sa visine H tijelo (1) je pušteno da slobodno pada , a tijelo (2) je bačeno na niže početnom brzinom V_0 .
U nekom vremenskom trenutku ($t > 0$):
*položaj(visina h_1) tijela (1) određen je jednačinom **slobodnan pad**: $h_1 = \frac{1}{2}gt^2$
*položaj(visina h_2) tijela(2) određen je jednačinom **hitac naniže:** $h_2 = V_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

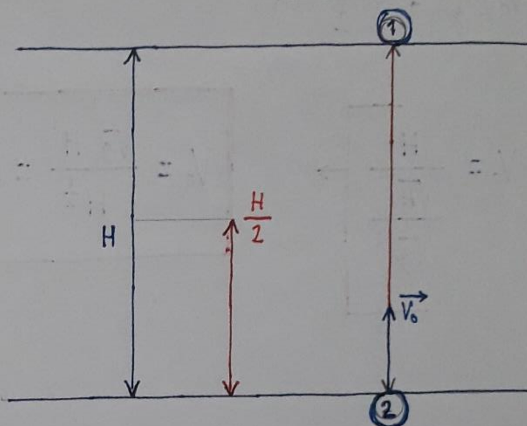
Projektujmo tačke h_1 i h_2 na Y-osu Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema (to se radi tako što kroz pomenute tačke povučemo Y-osu Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema).
Traženo rastojanje **d** između ove dvije tačke ćemo odrediti primjenom formule za rastojanje između tačaka u Dekartovom koordinatnom sistemu kao što je i urađeno u zadatku. Kako je t nezavisna promjenjiva ,a u izrazu za **d** figuriše i t to znači da je **d** funkcija po t(vremenu).

Задатак 99. Једно тело је пуштено слободно са висине $H=8000[m]$, док је истовремено са земље избачено друго тело вертикално навише, почетном брзином V_0, по истој путањи по којој пада прво тело. Колика треба да буде брзина V_0 па да се тела сретну на половини пута?

Рјешење: Слободан пад, хитац увис

$H=8000[m]$

$V_0=?$



Тело ① слободно пада до висине (тачке) $H/2$:

$$\frac{H}{2}=\frac{1}{2}gt^2$$

$$H=gt^2$$

$$\boxed{t=\sqrt{\frac{H}{g}}}$$ → Временски тренутак када се тијело ① налази у тачки $H/2$. У том временском тренутку да би се тијело ① и тијело ② нашли на [redacted] висини $\frac{H}{2}$ (у тачки $H/2$) почетна брзина тијела ② V_0 мора бити једнака:

$$\frac{H}{2} = V_0\sqrt{\frac{H}{g}} - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{H}{g}}\right)^2$$

$$V_0\sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{H}{2} + \frac{H\cancel{g}}{2g}$$

$$V_0\sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{2H}{2}$$

$$V_0 = \frac{H}{\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{g}}} \rightarrow$$

Rješenje!

$$\boxed{V_0 = \frac{\sqrt{g}\,H^1}{H^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{Hg} = 280,142\left[\frac{m}{s}\right]}$$

ZADATAK 102. Telo se baci početnom brzinom V0 = 10[m/s] vertikalno naviše.

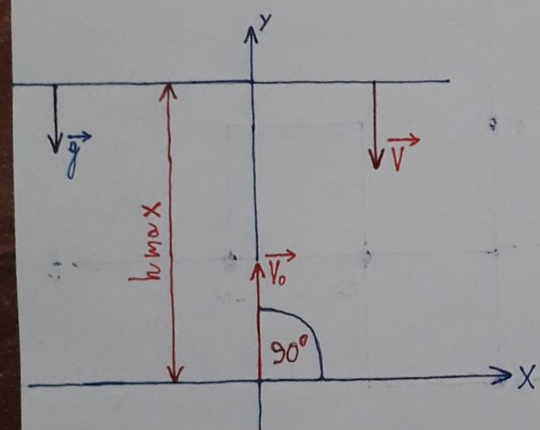
a) Koliku će visinu dostići telo ?
b) Posle kod vremena će telo pasti na zemlju ?
c) Kolika će biti brzina tela pri padu ?
d) Nacrtati dijagram brzine i ubrzanja tela u toku kretanja.

Рјешење: Коси хитац (a, b), тијело (материјална точка) се избаци почетном брзином V_0 у пољу силе Земљине теже под углом $\alpha = 90°$ (у нашем примјеру) у односу на хоризонталу. Слободан пад (c).

$\boxed{a}$ $h_{max} = ?$

$$h_{max} = y_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{(10)^2 \cdot 1}{2 \cdot 9,81}$$

$$= \approx 5,0968\,[m]$$



$\boxed{b}$ Код косог хитца лет тијела (материјалне точке) траје све док је

$y(t) \neq 0 \ : \ y(t) = 0$

$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \ : t$

$V_0 \sin(\alpha) = \frac{g t}{2}$

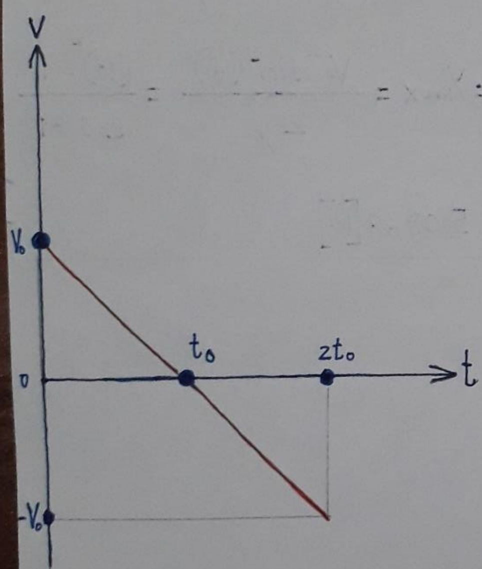
$$t = \frac{2 V_0 \sin(90°)}{g} = \frac{20}{9,81} \approx 2,0387\,[s]$$

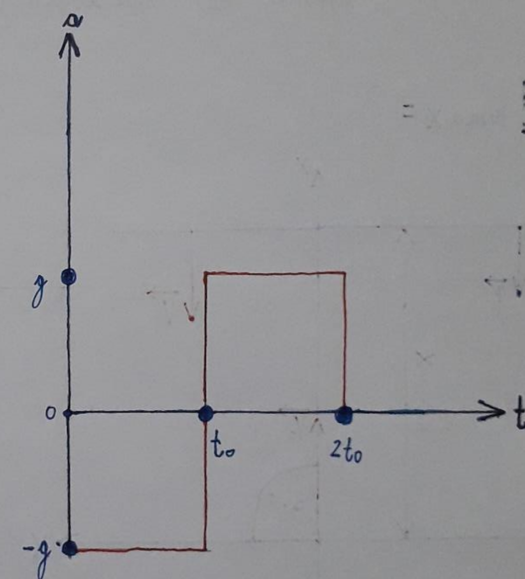
$\boxed{c}$ Када тијело достигне висину h_{max} оно почиње слободно до пода.

$$V=\sqrt{2g h_{max}} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 5{,}0968} \cong 9{,}99 \approx 10 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Вектори V и V_0 имају исти правац и интензитет али супротан смјер па је $\vec{V} = -\vec{V_0}$.

$\boxed{d}$ $V=V(t)$; $a=a(t)$;





У временском тренутку t_0 тело је избачено у правцу позитивног дијела Y-осе почетном брзином V_0. Вектори $\vec{V_0}$ и $\vec{g}$ су колинеарни али супротног су смјера па у временском тренутку t_0 стојамо тачке V_0, t_0 и $-g, t_0$. Када тијело достигне висину h_{max} оно почиње слободно до пода, убрзање му је једнако гравитационом, како вријеме тече за t_0 времена тијело развија брзину V, пада на земљу а штоперица је измјерила $2t_0\,[s]$ па стојамо тачке $(-V_0, 2t_0)$ и $(g, 2t_0)$.

ZADATAK 103. Telo je bačeno vertikalno naviše, početnom brzinom v0 = 10[m/s], sa tornja visokog H = 25[m]. Koliko je vreme padanja tela,a kolika njegova brzina pri padu na zemlju ?

Рјешење:

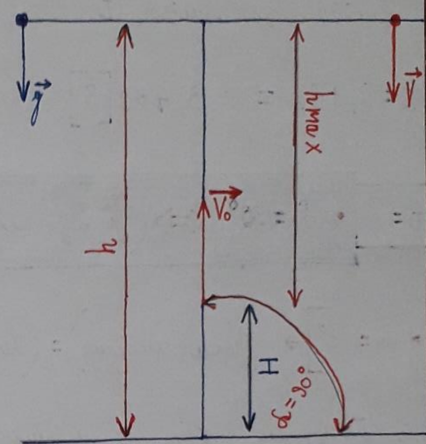
Слободан пад, хитац увис, коси хитац

$V_0 = 10\left[\frac{m}{s}\right]$

$H = 25[m]$

$t = ?$

$V = ?$



$h = H + h_{max} = H + \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = 25 + 5{,}09 \approx 30{,}01[m]$ Је висина са које ће тијело почети слободно да пада.

$V = \sqrt{2gh} \approx 24{,}265\left[\frac{m}{s}\right]$ Је брзина којом тело (материјална тачка) слободно пада са висине h на земљу.

Под углом $\alpha = 90°$ у односу на хоризонталу, са торња висине H тијело је бачено увис у пољу силе Земљине теже. Тијело достиже за вријеме t_1 висину h_{max} у односу на врх торња, а затим неко време t_2 тело слободно пада са висине h на земљу. Тијело ће на земљу пасти за вријеме t.

$$t = t_1 + t_2 = \approx 3,489 [s]$$

$t = ?$ [redacted]

• $\alpha = 90°$ $\rightarrow$ (Коси хитац) = (Хитац увис) вектор V има само вертикалну компоненту која је у тачки h_{max} (ŽIŽA параболе) једнака нули.

$$V = V_y = V_0 - g t_1 = 0$$

$$V_0 = g t_1$$

$$t_1 = \frac{V_0}{g} \approx 1,019 [s]$$

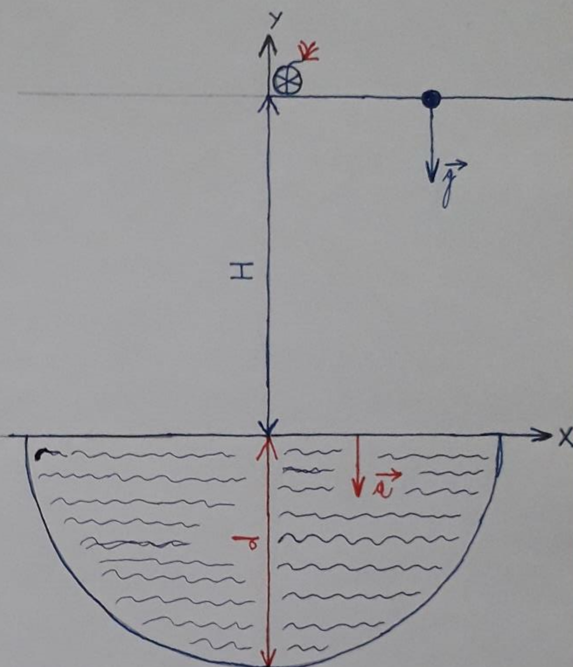
$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2,47 [s]$$

[redacted]

Задатак 104. Текст задатка се не поклапа са поступком рјешавања задатка.

ZADATAK 105. Na visini H = 400[m] iznad jezera ,,stoji" helikopter iz koga se ispusti bomba.
Bomba se kroz vazduh kreće bez trenja,a kroz vodu ubrzanjem @ = 4,5[m/s^2].
Bomba će eksplodirati pri udaru o dno jezera posle vremena t2 = 22[s] od trenutka opuštanja.

a) Kolika je dubina jezera ?
b) Nacrtati dijagram brzine bombe.



Рјешење: Слободан пад, хитац наниже.

$$\boxed{\begin{aligned} H &= 400\,[m] \\ a &= 4{,}5\left[\frac{m}{s^2}\right] \\ t &= 22\,[s] \end{aligned}}$$

$\boxed{a}$ $d = ?$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cong 9{,}03\,[s]$$

$$V = \sqrt{2gH} \cong 88{,}6\left[\frac{m}{s}\right]$$

Дакле бомба ће за вријеме t_1, брзином V слободно пасти са висине H на површ језера. Када бомба падне на површ језера имамо ситуацију "слободан пад".

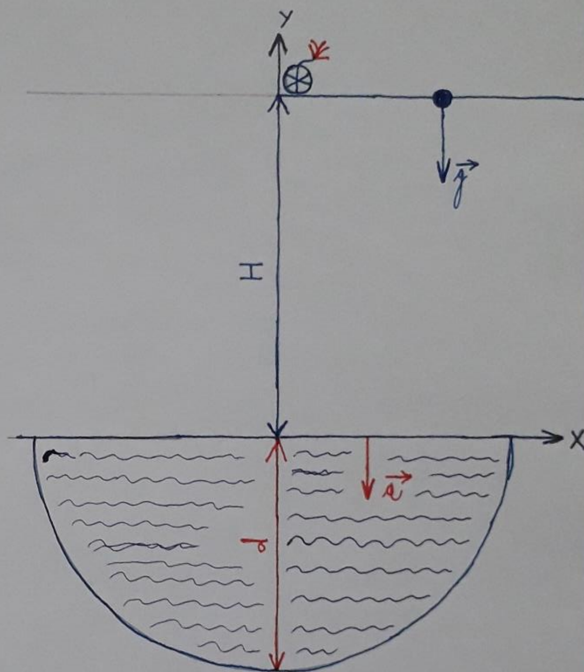
$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$d = V(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 = 88{,}6(22 - 9{,}03) + 0{,}5 \cdot 4{,}5 (22 - 9{,}03)^2 =$$

$$\approx 1527{,}7\,[m]$$

ZADATAK 105. Na visini H = 400[m] iznad jezera ,,stoji" helikopter iz koga se ispusti bomba.
Bomba se kroz vazduh kreće bez trenja,a kroz vodu ubrzanjem @ = 4,5[m/s^2].
Bomba će eksplodirati pri udaru o dno jezera posle vremena t2 = 22[s] od trenutka opuštanja.

a) Kolika je dubina jezera ?
b) Nacrtati dijagram brzine bombe.



Рјешење: Слободан пад, хитац наниже.

$$\boxed{\begin{aligned} H &= 400\,[m] \\ a &= 4{,}5\left[\frac{m}{s^2}\right] \\ t &= 22\,[s] \end{aligned}}$$

$\boxed{a}$ $d = ?$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cong 9{,}03\,[s]$$

$$V = \sqrt{2gH} \cong 88{,}6\left[\frac{m}{s}\right]$$

Дакле бомба ће за вријеме t_1, брзином V слободно пасти са висине H на површ језера. Када бомба падне на површ језера имамо ситуацију "слободан пад".

$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$d = V(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 = 88{,}6(22 - 9{,}03) + 0{,}5 \cdot 4{,}5 (22 - 9{,}03)^2 =$$

$$\simeq 1527{,}7\,[m]$$

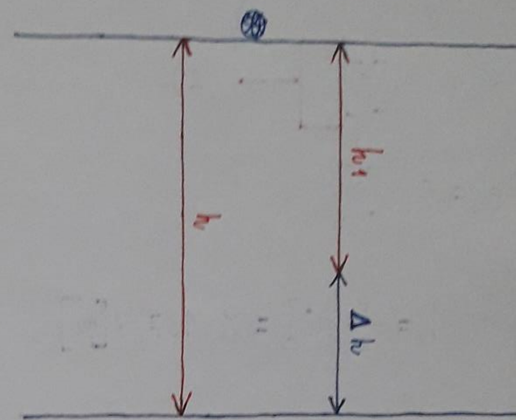
ZADATAK 106. Sa koje visine je pušteno telo da slobodno pada ako deonicu puta iznad zemlje duzine Δh = 30[m] pređe za vreme Δt = 0.6[s] ?

Рјешење: Слободан пад.

$\Delta h = 30[m]$

$\Delta t = 0{,}6[s]$

$h = ?$



За неко вријеме t_1 тијело (материјална тачка) ће прећи пут h_1 слободним падом. $h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$

Затим за неко вријеме t_2 $(t_2 > t_1)$ тијело ће слободним падом прећи пут $h = (h_1 + \Delta h) = \frac{1}{2} g t_2^2$ и пасти на земљу. Морамо одредити t_2 да би нашли h.

$$\Delta h = h - h_1 = \frac{1}{2} g t_2^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t \quad (2)$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \ldots / \cdot 2$$

$$2\Delta h = g\left(t_1^2 + 2 t_1 \Delta t + (\Delta t)^2\right) - g t_1^2$$

$$2\Delta h = \cancel{g t_1^2} + 2 g t_1 \Delta t + g(\Delta t)^2 - \cancel{g t_1^2}$$

$$60 = 11{,}772 t_1 + 3{,}5316$$

$$\boxed{t_1 \approx 4{,}8 [s]} \longrightarrow (2)$$

$$t_2 = 5{,}3 [s]$$

$$h = \frac{1}{2} g t_2^2 = \approx 137{,}8 [m]$$

ZADATAK 109. Dva tela bačena su istovremeno iz jedne tačke na zemlji, i to jedno-vertikalno naviše, drugo - pod uglom ϑ = 45° prema horizontu. Njihove početne brzine su jednake i iznose V0= 30[m/s]. Koliko je rastojanje između tela posle vremena t = 2[s] od trenutka kada su bačena?

Рјешење: Коси хитац.

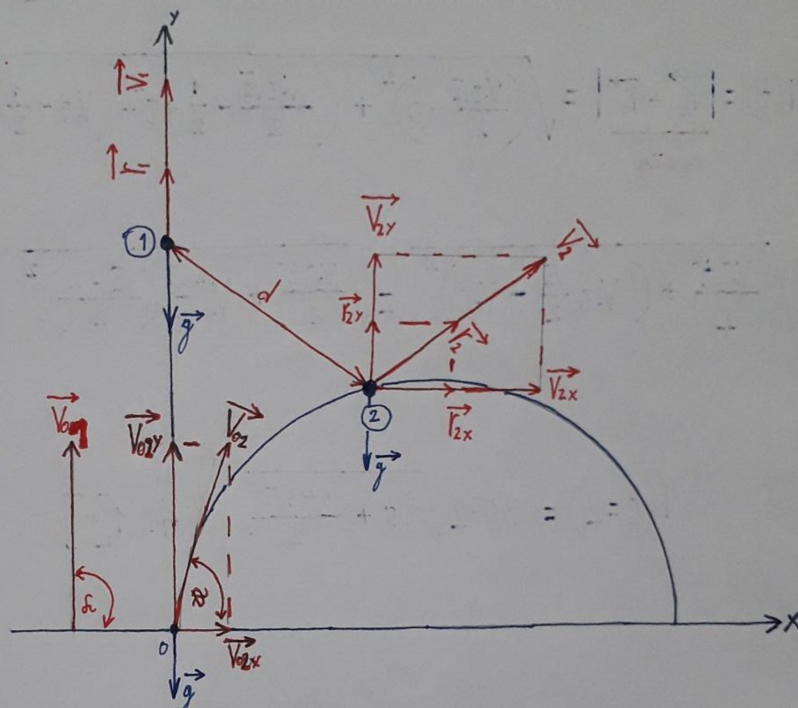
$\alpha = 90^\circ$

$\vartheta = 45^\circ$

$V_{01} = V_{02} = V_0 = 30\left[\frac{m}{s}\right]$

$t = 2[s]$

$d(t)$



$\vec{r_1} = \vec{r_1}(t)$ → Вектор померања тела ① по времену у односу на тачку 0.

$\vec{r_2} = \vec{r_2}(t)$ → Вектор померања тела ② по времену у односу на тачку 0.

Кретање тела (материјалне тачке) код косог хитца описано је једначинама:

$$x = x(t) = V_0 t \cos(\alpha)$$

$$y = y(t) = V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\vec{r_1} = 0\vec{i} + \left(V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j} = \left(V_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{r_2} = V_0 t \cos(\theta)\vec{i} + \left(V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j} = \frac{V_0 t\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(\frac{V_0 t\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j}$$

$$d(t) = \underbrace{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}_{\text{вектор}} = \sqrt{\left(\frac{V_0 t\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{V_0 t\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} g t^2 - \left(V_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{V_0^2 t^2}{2} + \left(V_0 t \frac{\sqrt{2}}{2} - V_0 t\right)^2} = \sqrt{\frac{V_0^2 t^2}{2} + V_0^2 t^2 \left(\frac{\sqrt{2} - 2}{2}\right)^2} = V_0 t \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2 - 4\sqrt{2} + 4}{2}}$$

$$d(t=2) = 30 \cdot 2 \sqrt{0,5 + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}} \approx 49,1\,[m]$$

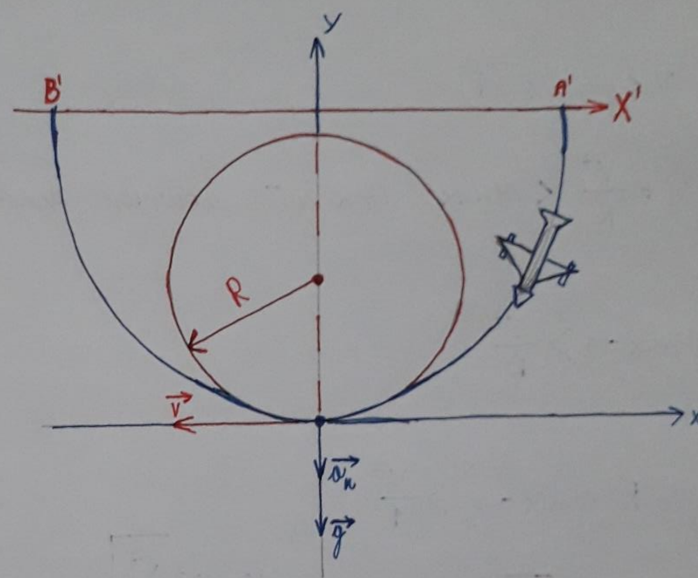
ZADATAK 110. Ako organizam pilota može da izdrži najveće ubrzanje α_max = 4.6g, izračunati najmanji poluprečnik krivine i putanje aviona pri obrušavanju ako on leti stalnom brzinom V = 200[km/h] .

Рјешење: Коси хитац.

$a_{max} = 4,6g$

$R = ?$

$V = 200\left[\frac{km}{h}\right]$



Ако би X-осу подигли за неколико тачака у позитивном смјеру Y-осе она би постала права X'. Ако из тачке A' посматрамо путању авиона (MATERIJALNE TAČKE) од тачке A' до тачке B' видимо да је та путања парабола (коси хитац). Када материјална тачка [redacted] прелазити путању -(кружни лук који се наслања на параболу) имамо ситуацију звану "Равномјерно кружно кретање", [redacted] дакле: $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = 0 + \vec{a_n}$. Гравитационо убрзање се јавља у пољу силе [redacted] Земљине теже то на материјалну тачку дјелује вектор $\vec{g}$. Вектори $\vec{a_n}$ и $\vec{g}$ су истог смјера и провјера то је: $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a_n}$

$$|\vec{a}| = |\vec{g}| + |\vec{a_n}|$$

$$a = g + \frac{V^2}{R}$$

$$a < a_{max} \quad 1$$

$g + \frac{V^2}{R} < a_{max}$ Мора бити испуњен услов 1.

$$a_{max} - g > \frac{V^2}{R}$$

$$R(a_{max} - g) > \frac{V^2}{1}$$

$$R > \frac{V^2}{a_{max} - g} \rightarrow R > \frac{\left(\frac{200 \cdot 10^3}{1 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2}{g(4{,}6 - 1)} \rightarrow R > 88\,[m]$$

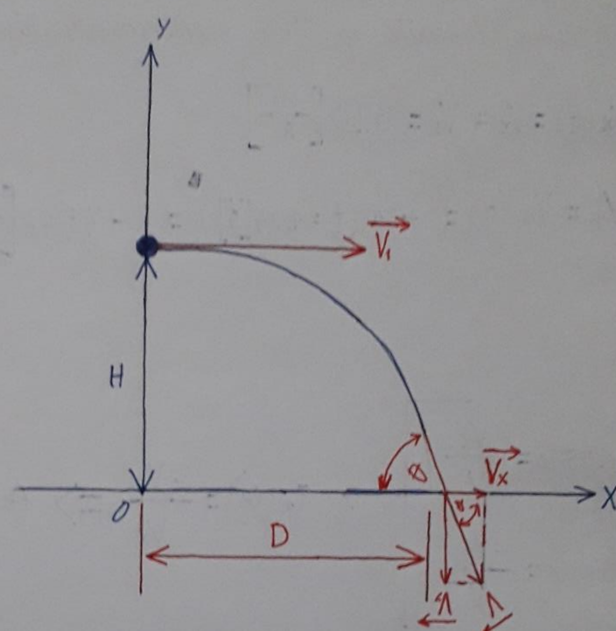
ZADATAK 112. Na bregu visine H = 120[m], iznad jezera nalazi se top iz koga se puca u horizontalnom pravcu prema jezeru. Početna brzina granate je V1 = 320[m/s]. Izračunati mesto pada granate u vodu ,njenu brzinu pri padu i ugao pod kojim granata padne na površinu vode.

Решење: Хоризонтални хитац.

$D = ?$

$V = ?$

$\theta = ?$



Код хоризонталног хитца тело (материјална тачка) пало је на хоризонталу у временском тренутку t када је:

$\boxed{y = -h}$ Запамти формулу.

$$-\frac{1}{2} g t^2 = -H$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 4{,}94[s]$$

У том временском тренутку растојање између материјалне тачке и вертикале једнако је D.

$$D = x\left(t = 4{,}94[s]\right) = V_1 \cdot 4{,}94 = \approx 1583[m]$$

$$x(t) = V_1 t$$

Брзина тачке у том временском тренутку t износи:

$$V_x(t) = V_x = V_1 = 320\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_y = V_y(t) = -g\left(t = 4{,}94[s]\right) = -48{,}46\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{V_x}{V} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{-V_y}{V} \end{array}\right] \longrightarrow tg(\theta) = \frac{-V_y}{V_x} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{48{,}46}{320}\right) = 8^\circ\ 6'$$

ZADATAK 113. Iz aviona koji leti stalnom brzinom V = 250[km/h] u horizontalnoj ravni, ispusti se bomba. Odrediti:

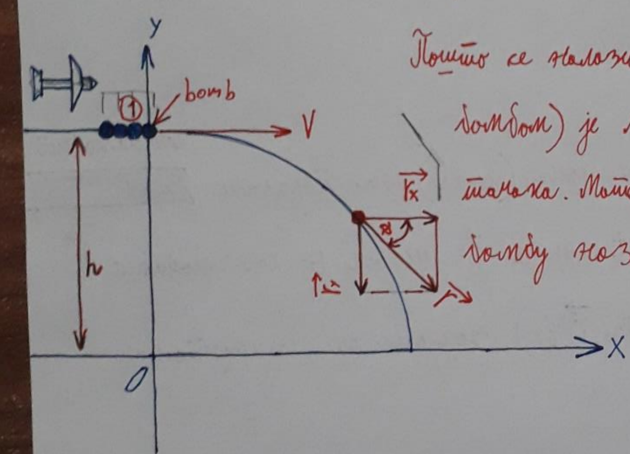
A) položaj bombe posle vremena t = 10[s],

B) brzinu bombe u tom trenutku,

C) pravac kretanja bombe prema horizontu u tom trenutku.

Рјешење: Хоризонтални хитац.

$\boxed{A}$ Код хоризонталног хица, положај тела (материјалне тачке) је одређен једначинама по времену: $x(t) = x = V_0 t$ и $y(t) = y = -\frac{1}{2} g t^2$.



Пошто се налазимо у кинематици, авион (са бомбом) је моделован низом материјалних тачака. Материјална тачка која представља бомбу назначена је на цртежу.

Свакој материјалној тачки придружен је вектор V. Када бомба дође у додир са Y-осом, тачка 1 гура тачку (bomb) брзином V те бомба почиње слободно да пада путањом хоризонталног хица.

Положај бомбе након времена t је:

$$x(t) = x = V_0 \cdot 10[s] = \frac{250 \cdot 10^3}{1 \cdot 60 \cdot 60}\left[\frac{m}{s}\right] \cdot 10[s] = \approx 694,4[m]$$

$(t) = y = -\frac{1}{2} g t^2 = \approx -490,5 [m]$

B

$V_x = V_0 = \frac{250 \cdot 10^3}{1 \cdot 60 \cdot 60} \approx 69,4 \left[\frac{m}{s}\right]$

$V_y = -gt = -98,1 \left[\frac{m}{s}\right]$

$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$

$V = |\vec{V}| \approx 120,16 \left[\frac{m}{s}\right]$

C

Правац кретања материјалне тачке (бомбе) на параболи хоризонталног хитца у временском тренутку t одређен је углом θ који родијус вектор померања тела (вектор $\vec{r}(t)$) заклапа са хоризонталом.

$\theta = \mathrm{arctg} \frac{-V_y}{V_x} \approx 54° 72'$

ZADATAK 114. Iz tri tačke na vertikalnoj obali istovremeno su izbačene tri jednake kuglice u horizontalnom pravcu, početnim brzinama V01 = 50[m/s], V02 = 75[m/s] i V03 = 100[m/s]. Prva kuglica padne na površinu vode na horizontalnom rastojanju od obale D1 = 100[m]. Ako sve tri kuglice istovremeno padnu na vodu, izračunati:

A) vreme padanja svake kuglice,

B) visine h1, h2, h3 sa kojih su kuglice izbačene,

C) brzine kuglice V1,V2,V3 u trenutku pada u vodu.

Рјешење: $\boxed{A}$ $t_1 = t_2 = t_3 = t = 2[s]$

$t = ?$

$$t = \frac{D}{V_0 1} = 2[s]$$

$\boxed{B}$ Хоризонтални хитац.

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = -0,5 \cdot 9,81 \cdot 2^2 = |-19,62| = 19,62 [m]$$

[redacted] $\boxed{C}$ $\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{a}t$

$$|\vec{V}| = \left[|\vec{V_0}|^2 + |\vec{a}t|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V_1 = \sqrt{V_{01}^2 + (gt_1)^2} = 53,7 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_2 = \sqrt{V_{02}^2 + (gt_2)^2} = 77,4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_3 = \sqrt{V_{03}^2 + (gt_3)^2} = 102 \left[\frac{m}{s}\right]$$

ZADATAK 115. Avion leti na visini H = 2000[m] po horizontalnom pravcu stalnom brzinom V0 = 300[m/s]. Iznad tačke A avion ispusti bombu koja slobodno pada. Koliko je:

A) vreme padanja bombe,

B) rastojanje AB ?

Рјешење: Хоризонтални хитац.

$H = 2000[m]$

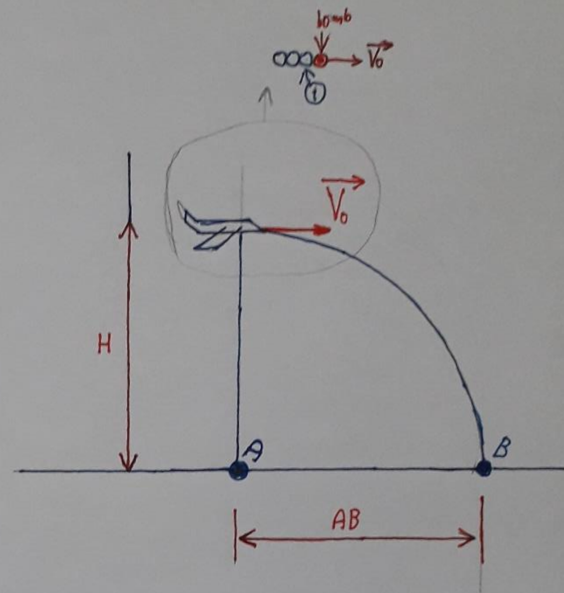
$V_0 = 300\left[\frac{m}{s}\right]$

$\alpha = 0[rad]$ код

хоризонталног хитца

угао $\alpha = \sphericalangle(\vec{V_0}$, хоризонтала$)$

$= 0[rad]$



$\boxed{A}$ $t = ?$

$$y = -h$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 = -H$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 20,192[s]$$

$\boxed{B}$ За то време 't' бомба (материјална тачка) ће прећи пут:

$$AB = x\left(t = 20{,}192[s]\right) = V_0 t \approx 6058[m]$$

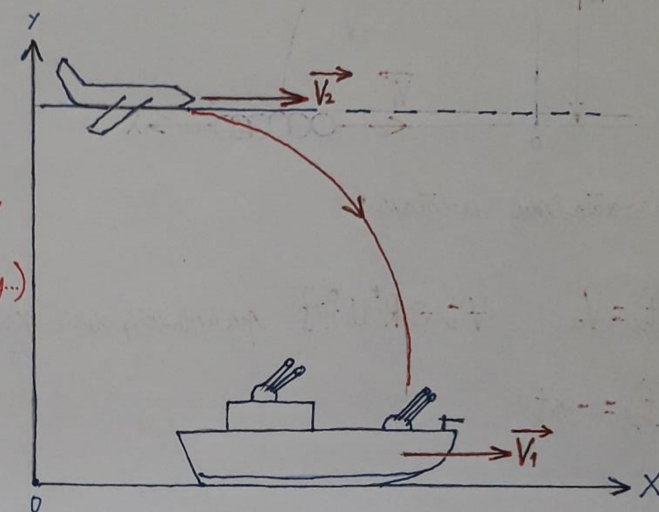
ZADATAK 116. Avion i brod se kreću u istoj vertikalnoj ravni, po paralelnim pravolinijskim putanjama, brod brzinom V1, a avion brzinom V2.

Visina putanje aviona je h.

Odrediti horizontalni razmak između broda i aviona pri kome je potrebno iz aviona ispustiti bombu da bi ona pala na brod, i to ako je smer kretanja broda i aviona:

A) isti,

B) supotan .



Рјешење: Хоризонтални хитац.

Бомба (материјална точка) ће пасти на земљу (брод, воду...) након времена t:

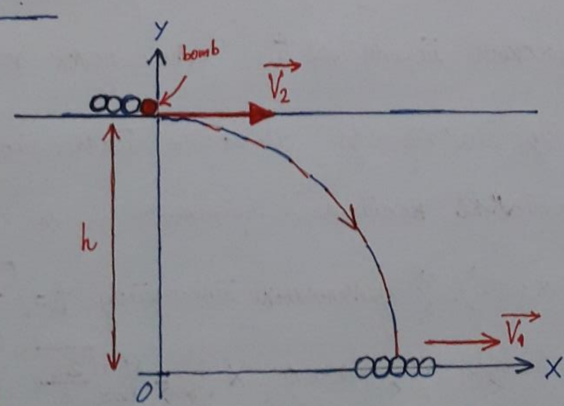
$$y = -h$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 = -h$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

[redacted]

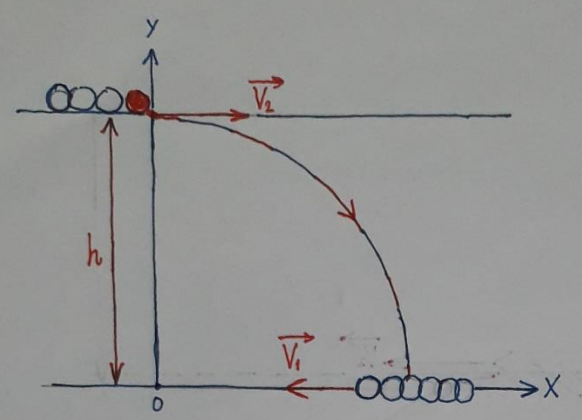
$\boxed{A}$ $d_1 = ?$



$$d_1 = \left(|\vec{V_1}| - |\vec{V_2}|\right) \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

B | $d_2 = ?$

$$d_2 = \left(|\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Хоризонтални хитац:

$V_x(t) = V_0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ равномјерно кретање.

$V_y(t) = -gt$

$x(t) = V_0 t = D$

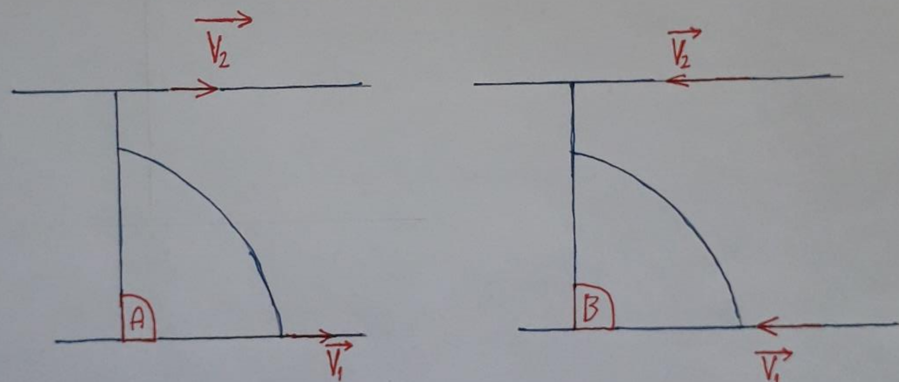
$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$

Вријеме потребно бомби (материјалној тачки) да падне на хоризонталу је $t = \sqrt{2h/g}$. Брзина којом бомба пада по хоризонталној компоненти једнака је V_2 у сваком временском тренутку t (Замислимо да су тачке одмах гурнуле једну тачку да слободно пада, та тачка слободно пада, остале тачке настављају брзином V_2 да се крећу по хоризонтали изнад x-осе). У временском тренутку $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ растојање између тачке O и бомбе је једнако $x(t) = V_2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

A

Када су вектори $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ истог смјера, брод бјежи од бомбе па ће за вријеме $t=\sqrt{2h/g}$ брод бити мало испред (врх брода) бомбе.

B Када су вектори $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ супротног смјера брод иде према бомби и прије ће бомба пасти на брод.



Са слике се јасно види да ће до судара прије доћи у случају под B.

Тле значи земљиште, терен.

ZADATAK 117. Telo se baci u horizontalnom pravcu sa visine h = 6[m] u odnosu na horizontalno tle.

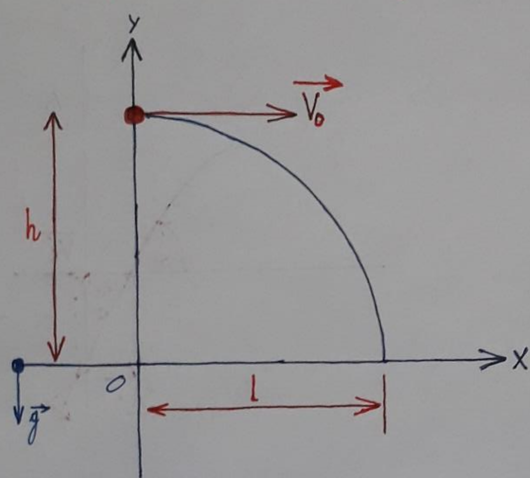
Telo padne na tle na udaljenosti l = 10[m] od mesta bacanja.

A) Kolika je početna brzina tela ?

B) Pod kojim uglom će telo pasti na tle ?

C) Ustanoviti jednačinu putanje tela.

Рјешење: Хоризонтални хитац, $\alpha = 0[rad]$.



$\boxed{A}$ $V_0 = ?$

Тело ће пасти на тле након времена t:

$$y = -h$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 = -h$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6[m]}{9{,}81[m/s^2]}} =\approx 1{,}1\left[\frac{m}{s}\right]$$

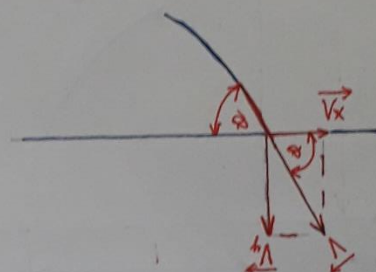
У том временском тренутку растојање између тела (материјалне тачке) и тачке O једнако је l. По једначини кретања по хоризонтали код хоризонталног хитца је: $x(t)=V_0 t$ па је:

$$l = V_0 t$$

$$10 = V_0 \cdot 1{,}1$$

$$V_0 \approx 9\left[\frac{m}{s}\right]$$

$\boxed{B}$ $\theta = ?$



$$tg\,\theta = \frac{-V_y}{V_x} = \frac{-(-gt)}{V_0} = \frac{9{,}81 \cdot 1{,}1}{5{,}45} = 1{,}98$$

$$\theta = arctg(1{,}98) \approx 63^\circ\, 2'$$

$\boxed{C}$ $x(t) = V_0 t \rightarrow t = \frac{x}{V_0}$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$y\left(t = \frac{x}{V_0}\right) = -0{,}5\,\frac{g x^2}{V_0^2} = \frac{-g x^2}{2 V_0^2}$$

ZADATAK 118. Telo se baci pod uglom α = 30 prema horizontu. Ako je brzina tela v = 400[m/s] posle vremena t = 2[s] od trenutka izbacivanja, izračunati njegovu početnu brzinu V0.

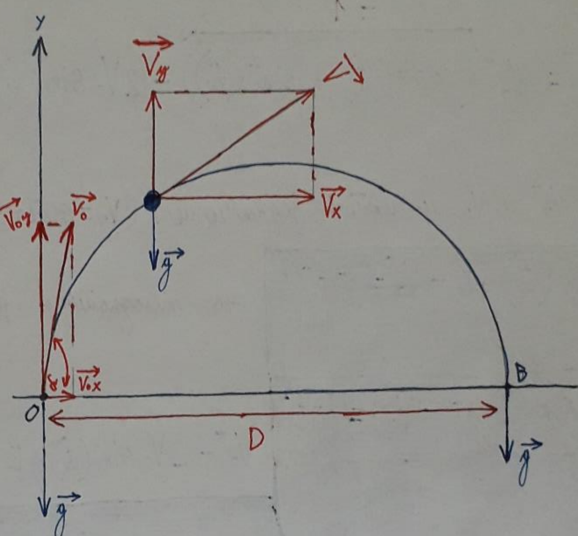
Рјешење: Коси хитац.

$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}\,[rad]$

$V = 400\left[\frac{m}{s}\right]$

$t = 2\,[s]$

$V_0 = ?$



$$\vec{V} = |\vec{V_x}|\,\vec{i} + |\vec{V_y}|\,\vec{j} = \vec{V}(t)$$

$$|\vec{V_x}| = V_0\cos(\alpha)$$

$$|\vec{V_y}| = |\vec{V_y}(t)| = V_0\sin(\alpha) - gt$$

$$\left|\vec{V}\left(t = 2[s]\right)\right| = 400\left[\frac{m}{s}\right] = \sqrt{V_0^2\cos^2(\alpha) + \left(V_0\sin(\alpha) - gt\right)^2} \Rightarrow$$

[redacted]

$$(400)^2 = V_0^2\cos^2(\alpha) + (V_0\sin(\alpha) - gt)^2$$

$$(400)^2 = V_0^2\cos^2(\alpha) + V_0^2\sin^2(\alpha) - 2V_0\sin(\alpha)gt + g^2t^2$$

$$(400)^2 = V_0^2\overbrace{(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))}^{=1} - 2V_0\sin(\alpha)gt + g^2t^2$$

V_0^2 и V_0 у истој једначини. (V_0 = непознато) одмо помислим на квадратну једначину.

$$V_0^2 - 2V_0\sin(\alpha)gt + g^2t^2 - (400)^2 = 0$$

$$V_{012} = \frac{-(-2\sin(\alpha)gt) \pm \sqrt{(2\sin(\alpha)gt)^2 - 4\cdot 1\cdot(g^2t^2 - 4^2\cdot 10^4)}}{2}$$

$$V_{01} = \frac{2\sin(\alpha)gt - \sqrt{4\sin^2(\alpha)g^2t^2 - 4(96{,}2\cdot 4 - 160\,000)}}{2} < 0$$

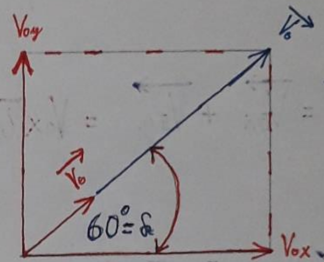
→ Рјешење које отпада

$$V_{02} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot 2 + \sqrt{4\cdot\frac{1}{4}(9{,}81)^2\cdot 4 + 638460{,}2224}}{2} \approx 409{,}4\left[\frac{m}{s}\right]$$

ZADATAK 119. Telo se baci početnom brzinom V0 = 200[m/s] pod uglom α = 60° prema horizontu. Izračunati komponente brzine tela Vx i Vy u početku kretanja, u trenutku kada se telo nalazi na najvećoj visini i u trenutku pada tela na horizontalnu ravan.

Рјешење: Коси хитац. Слика 10.

$\overrightarrow{V_0} = ?$



$$\overrightarrow{V_0} = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j} = 200\left[\frac{m}{s}\right]\vec{r_0}$$

$$V_{0x} = |\overrightarrow{V_0}|\cos(\alpha) = 200 \cdot 0{,}5 = 100\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_{0y} = |\overrightarrow{V_0}|\sin(\alpha) = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 173{,}2\left[\frac{m}{s}\right]$$

$\overrightarrow{V_{hmax}} = ?$

$$\overrightarrow{V_{hmax}} = V_x\vec{i} + 0\vec{j} = 100\left[\frac{m}{s}\right]\vec{i}$$

$$V_x = V_{0x} = 100\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_y = 0\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{V_B} = \vec{V_{Bx}} + \vec{V_{By}} = V_{ox}\,\vec{i} - V_{oy}\,\vec{j}$$

$$\vec{V_{Bx}} = 100\left[\frac{m}{s}\right]\vec{i}$$

$$\vec{V_{By}} = -173{,}2\left[\frac{m}{s}\right]\vec{j}$$

ZADATAK 120. Topovsko zrno izleti iz cevi brzinom V0 = 400[m/s] pod uglom α = 30° prema horizontu. Izračunati udaljenost mesta pada zrna na horizontalnu ravan, kao i vreme kretanja zrna do mesta pada.

Рјешење: Коси хитац. $\boxed{\text{Слика 10}}$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= ? \\ t &= ? \end{aligned}}$$

Код косог хитца лет тијела се завршава у временском тренутку t када је испуњен услов:

$$y(t) = 0$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) = \frac{g t}{2}$$

$$t = \frac{V_0 \sin(\alpha) 2}{g} = \frac{400[m/s] \frac{1}{2} 2}{9{,}81[m/s^2]} \approx 40{,}77[s]$$

$$D = x(t = 40{,}77[s]) = V_0 t \cos(\alpha) \approx 14123{,}1[m]$$

ZADATAK 121. Iz topa se ispale dve rakete: jedna pod uglom $\alpha 1 = 45°$, a druga pod uglom $\alpha 2 = 30°$ prema horizontu. Koliki je odnos:

A) maksimalnih visina koje dostižu ove granate,

B) dometa granata,

C) vremena kretanja granata ?

Рјешење: Коси хитац. $\boxed{\text{Слика 10}}$ + формуле

$$V_{01x} = V_0 \cos(\alpha_1)$$

$$V_{01y} = V_0 \sin(\alpha_1)$$

$$V_{02x} = V_0 \cos(\alpha_2)$$

$$V_{02y} = V_0 \sin(\alpha_2)$$

Ракете 1 и 2 су испаљене из истог топа. Ка су ракете 1 и 2 апроксимиране са материјалним тачкама то је:

$$V_{01} = V_{02} = V_0$$

$\boxed{A}$ $h_1/h_2 = ?$

$$V_y(t) = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) - gt = 0$$

$$t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_1 = \frac{V_0 \sin(\alpha_1)}{g}$$

$$t_2 = \frac{V_0 \sin(\alpha_2)}{g}$$

$$y(t) = V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y\left(t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{g\left(\frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2}{2} = h_{max}$$

$$h_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}$$

$$h_1 = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha_1)}{g}$$

$$h_2 = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha_2)}{g}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin^2(45°)}{\sin^2(30°)} = \frac{\frac{(\sqrt{2})^2}{2^2}}{\frac{1}{2^2}} = 2$$

B $D_1/D_2 = ?$

$$y(t)=0$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) = \frac{g t}{2}$$

$$t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_1 = \frac{2V_0 \sin(\alpha_1)}{g}$$

$$t_2 = \frac{2V_0 \sin(\alpha_2)}{g}$$

$$D_1 = X\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha_1)}{g}\right) = V_0 \frac{2V_0 \sin(\alpha_1)}{g} \cos(\alpha_1) = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha_1)}{g}$$

$$D_2 = X\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha_2)}{g}\right) = V_0 \frac{2V_0 \sin(\alpha_2)}{g} \cos(\alpha_1) = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha_2)}{g}$$

$$D_1/D_2 = \frac{\sin(2\alpha_1)}{\sin(2\alpha_2)} = \frac{2\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)}{2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

C $t_1/t_2 = ?$

$$\frac{\frac{2V_0 \sin(\alpha_1)}{g}}{\frac{2V_0 \sin(\alpha_2)}{g}} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

ZADATAK 122. Raketa se izbaci pod uglom α = 70° prema horizontu. Za vreme tm = 80[s] ona dostigne najveću visinu. Izračunati početnu brzinu rakete i položaj mesta pada na horizontalnu ravan.

Решење: Коси хитац. Слика 10 + Формуле

$V_0 = ?$

$D = ?$

Код косог хица у највишој тачки параболе (жижа параболе) вектор тренутне брзине тела (материјална тачка, ракета...) има само хоризонталну компоненту док је вертикална компонента једнака нули.

$$V_y(t) = V_0 \sin(\alpha) - gt = 0$$

[redacted]

$$V_0 \sin(70^\circ) = g t_m$$

$$V_0 = \frac{9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] 80[s]}{\sin(70^\circ)} \approx 835{,}1\left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

$y(t) = 0$ ... / Крај лета тела код косог хитца је у временском тренутку t

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) = \frac{g t}{2}$$

$$t = \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$D = x\left(t = \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = V_0 \frac{2 V_0 \sin(70^\circ)}{g} \cos(70^\circ) = \frac{V_0^2 \sin(2 \cdot 70^\circ)}{g}$$

$$\approx 456958 \,[m]$$

ZADATAK 123. Telo se izbaci početnom brzinom V0 pod uglom α prema horizontu. Izračunati ugao pod kojim će telo da padne na horizontalnu ravan na rastojanju x od mesta izbacivanja.

Рјешење: Коси хитац.

$$t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g} \quad (1)$$

$$\boxed{\alpha = ?}$$

$$x\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = V_0 \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g} \cos(\alpha) = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = x$$

Када је испуњен услов (1) t се више не мења па x постаје скалар.

$$V_0^2 \sin(2\alpha) = \frac{x}{g}$$

[redacted]

$$\sin(2\alpha) = \frac{x}{g V_0^2}$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{x}{g V_0^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{g V_0^2}\right)$$

ZADATAK 124. Pod kojim uglom je potrebno baciti telo da bi:

A) njegova najveća visina bila jednaka daljini mesta pada na horizontalnu ravan,
B) daljina mesta pada na horizontalnu ravan bila jednaka visini koju telo dostigne pri izbacivanja vertikalno uvis, istom početnom brzinom ?

Рјешење: Коси хитац. $\boxed{\text{Слика 10}}$ + формуле

$\boxed{A}$

$\boxed{\alpha = ? \quad h_{max} = D}$

$$h_{max} = D$$

$$\frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$\sin^2(\alpha) = 2\sin(2\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = 2 \cdot 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 4\cos(\alpha)$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 4$$

$$tg(\alpha) = 4$$

[redacted] $\alpha = arctg(4) \approx 76°$

В | h_{max} се сада односи на удаљеност тачке највише висине код "хитца увис" у односу на хоризонталу. Да би тело избацили у вис (у позитивном смјеру y-осе) $\sphericalangle(\vec{V_0}, x\text{-осе}) = 90°$.

$$h_{max} = D$$

$$\frac{V_0^2 \sin^2(90°)}{2g} = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$\frac{1}{2} = \sin(2\alpha)$$

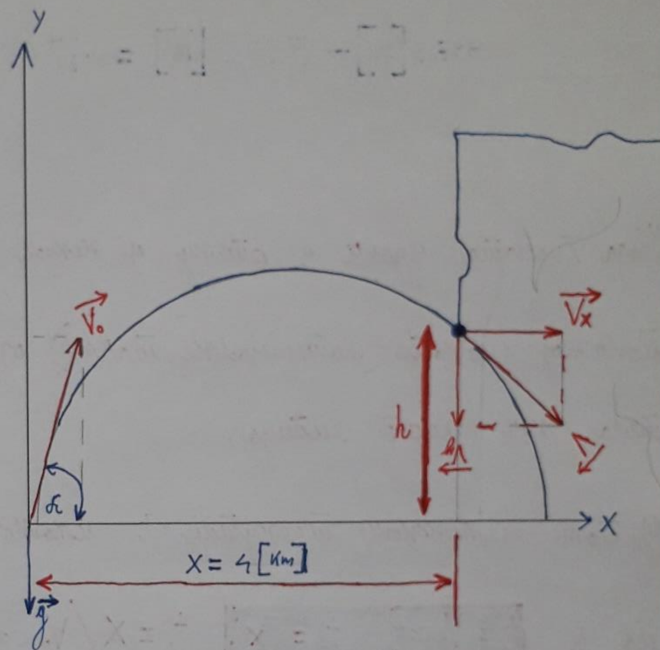
$$2\alpha = 30°$$

$$\alpha = 15°$$

ZADATAK 125. Na kojoj će visini granata da udari u vertikalnu stenu koja se nalazi na udaljenosti x = 4[km] od topa ? Granata se izbaci početnom brzinom V0 = 400[m/s] pod uglom α = 14° prema horizontu.

Рјешење: Коси хитац.

$\boxed{h = ?}$



$$x(t) = V_0 t \cos(\alpha) = x$$

$$t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}$$

$$y\left(t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}\right) = V_0 \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)} \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{V_0^2 \cos^2(\alpha)} = h \quad (1)$$

(1) Морамо [redacted] реализовати ову једнакост.

$$h = x\,tg(\alpha) - \frac{g\,x^2}{2V_0^2\cos^2(\alpha)} = 4\cdot 10^3[m]\,tg(14^\circ) - \frac{9{,}81[m/s^2]\left(4\cdot 10^3[m]\right)^2}{2\cdot\left(400[m/s]\right)^2\cos^2(14^\circ)} =$$

$$997{,}3[m] - 520{,}9[m] = 476{,}3[m]\ \checkmark$$

Када граната удари у стену у неком временском тренутку t положај гранате (материјалне тачке) одређен је једначинама кретања тела код косог хитца.

У том временском тренутку t имамо да је $x = V_0 t\cos(\alpha)$

па је [redacted] $t = x/V_0\cos(\alpha)$, а време t је аргумент функције која представља једначину кретања тела код косог хитца по вертикали $y = y(t)$.

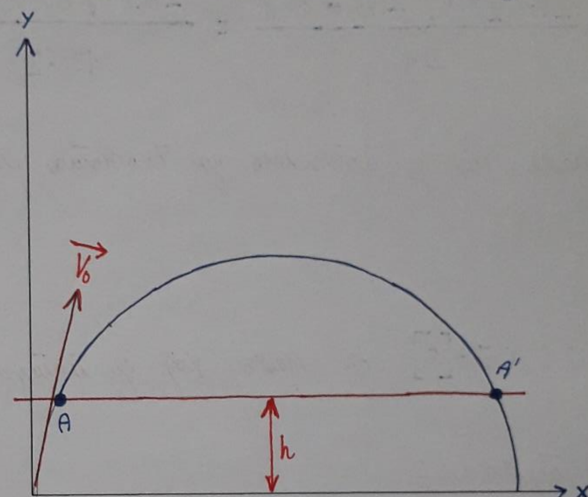
Када је $t = x/V_0\cos(\alpha)$ тада је $y(t)$ тражено h.

ZADATAK 126. Granata se izbaci početnom brzinom V0 = 200[m/s] pod uglom α = 45° prema horizontu.

Koliko je potrebno da bude vreme ,,tempiranja" granate da bi ona eksplodirala na visini h = 10[m] pre pada na zemlju ?

Рјешење: Коси хитац.

$t = ?$



$$y(t) = h$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

$$\frac{g t^2}{2} - V_0 t \sin(\alpha) + h = 0$$

$$g t^2 - 2V_0 \sin(\alpha) t + 2h = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-2V_0 \sin(\alpha)) \pm \sqrt{(2V_0 \sin(\alpha))^2 - 4 \cdot g \cdot 2h}}{2g}$$

$$t_{1,2} = \frac{2V_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{4V_0^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8hg}}{2g}$$

$$t_1 = \frac{2V_0\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2V_0^2 - 80g}}{2g} = \frac{283 + \sqrt{80000 - 785}}{19,62} \approx 28,769\,[s]$$

је време које је потребно до тренутка експлодира у точки A'.

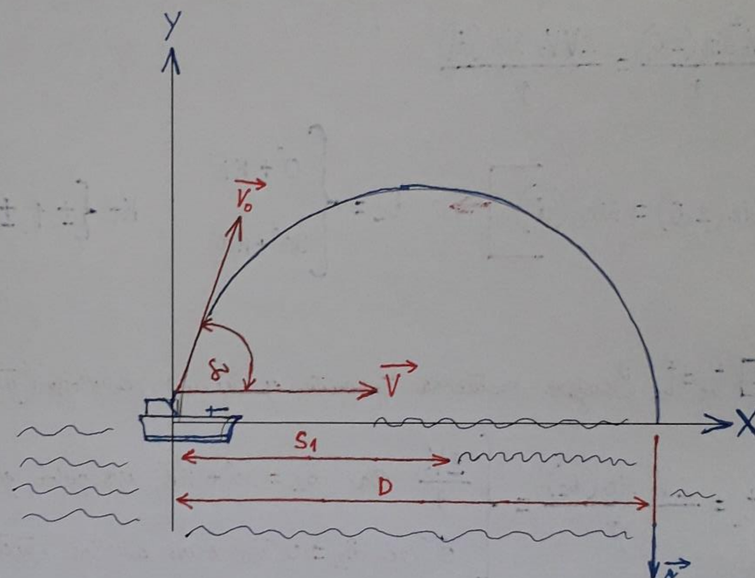
$t_2 \approx 0,078\,[s]$ је време које је потребно до тренутка експлодира у точки A.

↯ Код косог хитца у xy - равни декартовог тродимензионалног координатног система [redacted] тело (материјална точка) може до лети у позитивном или у негативном смјеру x - осе (хоризонтале).

ZADATAK 128. Sa broda koji se kreće pravolinijski stalnom brzinom V izbaci se granata početnom brzinom V0 u smeru kretanja broda, pod uglom α prema horizontu.

A) Kolika je udaljenost broda od mesta eksplozije granate pri padu na vodu ?
B) Pod kojim je uglom α2 potrebno izbaciti granatu da bi ona pala na brod ? Napisati jednačinu putanje granate za ovaj slučaj.
C) Koliko je vreme kretanja granate do pada na vodu (brod) u oba slučaja ?
D) Kolika bi trebalo da bude brzina broda u drugom slučaju da bi maksimalna visina granate bila jednaka putu koji pređe brod do trenutka kada granata padne na njega ? Dimenzije broda zanemariti.

Рјешење: Коси хитац.



A $\boxed{D - S_1 = ?}$

Граната ће пасти на воду за неко време t_1 које добијамо из релације:

$$y(t) = 0$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t_1 = t = \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

За време t_1 домета гранате добијамо из једначине $x(t) = V_0 t \cos(\alpha)$, а пређени пут брода из релације $s = Vt$.

$$D = x(t_1) = V_0 \frac{2 V_0 \sin(\alpha)}{g} \cos(\alpha) = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$S_1 = Vt = \frac{2 V V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$D - S_1 =$

$$\frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g} - \frac{2VV_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{V_0}{g}\left[V_0 \sin(2\alpha) - 2V\sin(\alpha)\right] \checkmark$$

$\boxed{B}$ Тражимо угао α_2 за који ће бити испуњен услов:

$D = S_1$

$$\frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{2VV_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$\vdots$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha) \rightarrow \alpha_2 = \begin{cases} 0^\circ + k\pi \\ 90^\circ + k\pi \end{cases} ; \quad k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\} \cup \{0\}$$

$\boxed{C}$ $t_1 = t_1$ Вријеме кретања гранате у првом случају (пад на воду).

$$t_2 = \frac{2V_0 \sin(\alpha_2)}{g} = \begin{cases} \dfrac{2V_0}{g} & \text{за } \alpha_2 = 90^\circ + k\pi \text{ уз услов да је } k>0, \text{ јер } \underline{t>0}! \\ 0 & \text{за } \alpha_2 = 0 \text{ па овај случај отпада.} \end{cases}$$

$\boxed{D}$ Хитац увис. Консултације.

$$h = Vt - \frac{1}{2}gt^2$$

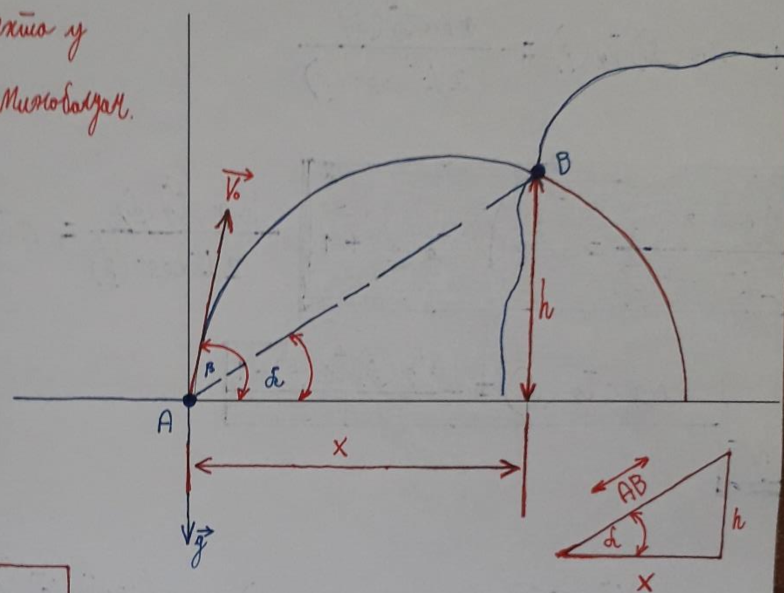
ZADATAK 129. Iz minobacača se gadja objekat B. Izračunati položaj ovog objekta ako je početna brzina mine V0 = 150[m/s], a uglovi α = 30° i β = 60°.

Рјешење: Коси хитац.

$h = ?$

$\overleftrightarrow{AB} = ?$

→ Положај објекта у односу на минобацач.



$$x = x(t) = V_0 t \cos(\beta)$$

$$y(t) = V_0 t \sin(\beta) - \frac{1}{2} g t^2$$

→ Једначине кретања мине (материјалне тачке) код косог хитца.

$$h = y\left(\frac{x}{V_0 \cos(\beta)}\right)$$

$$h = V_0 \frac{x}{V_0 \cos(\beta)} \sin(\beta) - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2(\beta)}$$

$$① \quad h = x\, tg(\beta) - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2(\beta)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{\overleftrightarrow{AB}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\overleftrightarrow{AB}}$$

$$tg(\alpha) = \frac{h}{x}$$

$$x = h\, ctg(\alpha)$$

$$h = h\,ctg(\alpha)\,tg(\beta) - \frac{g\,h^2\,ctg^2(\alpha)}{2V_0^2\cos^2(\beta)} \quad \dots /:h$$

$$1 = ctg(\alpha)\,tg(\beta) - \frac{g\,h\,ctg^2(\alpha)}{2V_0^2\cos^2(\beta)}$$

$$1 - ctg(\alpha)\,tg(\beta) = -\frac{g\,h\,ctg^2(\alpha)}{2V_0^2\cos^2(\beta)}$$

[redacted]

$$\frac{h\,g\,ctg^2(\alpha)}{2V_0^2\cos^2(\beta)} = ctg(\alpha)\,tg(\beta) - 1$$

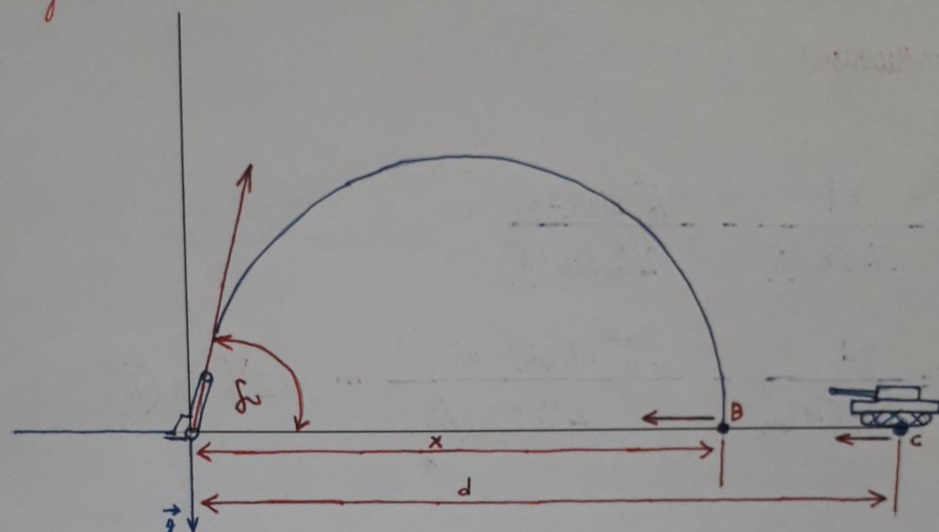
$$h = \frac{2V_0^2\cos^2(\beta)}{g\,ctg^2(\alpha)}\left(ctg(\alpha)\,tg(\beta) - 1\right) = \frac{2\left(150\left[m/s\right]\right)^2\left(\cos(60^\circ)\right)^2}{9{,}81\left[m/s^2\right]\left(ctg(30^\circ)\right)^2}\left(3 - 1\right) =$$

$$\frac{2 \cdot 22500\left[m^2/s^2\right]\left(\frac{1}{4}\right)2}{9{,}81\left[m/s^2\right]\left(\sqrt{3}\right)^2} \approx 764{,}525\left[m\right]$$

ZADATAK 130. Tenk se kreće po pravoj putanji prema topu, stalnom brzinom v = 3,6[km/h].

Izračunati početnu brzinu granate ispaljene iz topa pod uglom α = 30°, pod uslovom da pogodi tenk koji se nalazio na rastojanju d = 8[km] u trenutku ispaljivanja granate.

Рјешење: Коси хитац.



Граната (материјална тачка) ће пасти на земљу (хоризонталу) после времена: $y(t)=0$

$$t_1=\frac{2V_0\sin(\alpha)}{g}$$

и за ово време она ће прећи пут чија је хоризонтална пројекција:

$$x=x(t=t_1)=\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{g}.$$

Да би граната погодила тенк, тенк мора у временском тренутку t_1 да буде у тачки B, односно за време t_1, брзином V тенк мора да пређе пут d−x па је:

$$V = \frac{d - x}{t_1} = \frac{d - \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}{\frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}} = \frac{gd - V_0^2 \sin(2\alpha)}{2V_0 \sin(\alpha)}$$

$\Rightarrow$ Непозната V_0 се јавља као V_0 и V_0^2 па морамо формирати квадратну једначину.

$$V = \frac{gd}{2V_0 \sin(\alpha)} - \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{2V_0 \sin(\alpha)}$$

$$V = \frac{gd}{2V_0 \sin(\alpha)} - \frac{2V_0^{\cancel{2}} \cancel{\sin(\alpha)} \cos(\alpha)}{\cancel{2V_0 \sin(\alpha)}} \quad \ldots / \cdot 2V_0 \sin(\alpha)$$

$$V\, 2V_0 \sin(\alpha) - gd + V_0^2 \sin(2\alpha) = 0$$

$$\sin(2\alpha) V_0^2 + 2V \sin(\alpha) V_0 - gd = 0$$

$$V_{0\,1,2} = \frac{-2V\sin(\alpha) \pm \sqrt{4V^2 \sin^2(\alpha) + 4\sin(2\alpha) g d}}{2\sin(2\alpha)} =$$

$$-2V\sin(\alpha) = -2\,\frac{3{,}6\cdot 10^3}{1\cdot 60\cdot 60}\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$4V^2 \sin^2(\alpha) = 4\left[\frac{3{,}6\cdot 10^3}{1\cdot 60\cdot 60}\right]^2 \frac{1}{4} = 1$$

$$4\sin(2\alpha) g d = 4\,\frac{\sqrt{3}}{2}\, 9{,}81\cdot 8000 = \approx 271863$$

$$V_{0-1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 271863}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 300{,}456 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$V_{0-2} < 0$ Ово решење отпада.

Тело ⟺ Материјална тачка

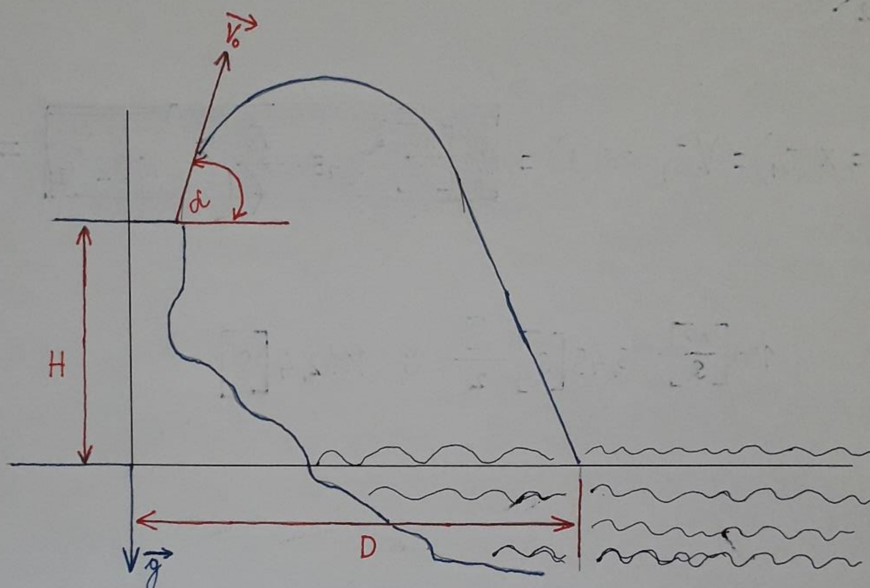
ZADATAK 131. Sa morske obale, visine H = 80[m], izbaci se telo početnom brzinom V0 = 100[m/s] pod uglom α = 45° prema horizontu. Izračunati mesto pada tela na vodu, kao i vreme kretanja tela do trenutka pada na vodu.

Рјешење:

Коси хитац

\+

Хоризонтални хитац



[redacted]

$$x(t) = V_0 t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

Када тијело падне на воду тада је:

$$y(t) = -H$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = -H$$

$$-g t^2 + 2V_0 \sin(\alpha) t + 2H = 0$$

$$g t^2 - 2V_0 \sin(\alpha) t - 2H = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2V_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{4V_0^2 \sin^2(\alpha) + 8Hg}}{2g}$$

$$2V_0 \sin(\alpha) = 2 \cdot 100 \cdot \sqrt{2}/2 \cong 141{,}1$$

$$4V_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 \cdot 10000 \cdot \frac{2}{4} = 20000$$

$$8Hg = 6278{,}4$$

$$2g = 19{,}62$$

$$t_1 = \frac{141,1 + \sqrt{20000 + 6278,4}}{19,62} \approx 15,45\,[s]$$ Вријеме полета тела.

$$t_2 < 0$$

$$D = x(t_1) = V_0 t_1 \cos(\alpha) =$$ [redacted] $=$

$$100\left[\frac{m}{s}\right] \cdot 15,45\,[s]\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1092,4\,[s]$$

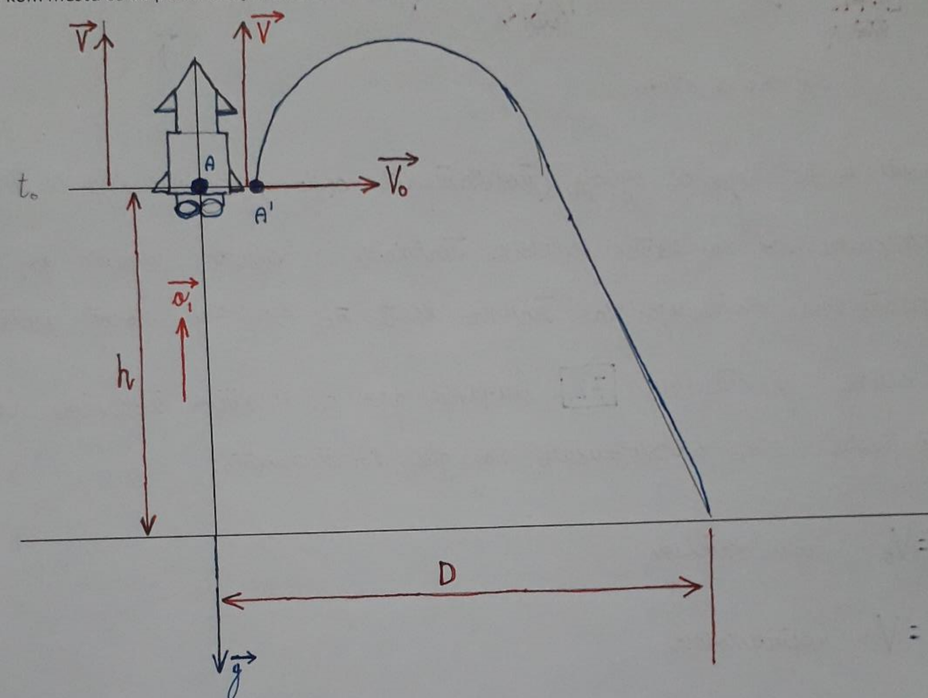
Решење: Коси хитац + хоризонтални хитац + слободан пад

ZADATAK 133. Raketa počne da se kreće vertikalno uvis stalnim ubrzanjem $\alpha_1 = 4g$.

Posle vremena $t_0 = 8[s]$ od rakete se odvoji jedan njen deo koji se izbaci u stranu brzinom $V0 = 80[m/s]$.

Na kom mestu će da padne ovaj deo rakete na zemlju ? Trenje zanemariti.

$\boxed{D = ?}$



Крећући се сталним убрзањем a_1 у пољу силе Земљине теже, смјера супротног од вектора $\vec{g}$ у временском тренутку t_0 брзина ракете је

$$V = |\vec{V}| = (a_1 - g)t_0 = 3g t_0 = 235,44 [m/s]$$

Ако би из тачке A у временском тренутку t_0 пустили неку пробну материјалну тачку да слободно пада на хоризонталу под утицајем вектора $\vec{a_1}$ и $\vec{g}$ израчунали би да је у временском тренутку t_0 растојање између ракете (материјалне тачке смјештене у тачки A) и хоризонтале једнако:

$$h = \frac{1}{2}(a_1 - g)t_0^2 = 3g\frac{t_0^2}{2} = 941{,}76\,[m]$$

Део који се одвоја

Ракету и део који се одвоја (посматрамо само један део који се одвоја) апроксимирамо са материјалном тачком. Са слике видимо да се посматрана материјална тачка креће по закону косог хица.

Са слике на страни $\boxed{72.}$ видимо да се вектор почетне брзине овог тела може разложити на две компоненте:

$V_{ox} = V_0$ хоризонтална

$V_{oy} = V$ вертикална

Једначине кретања одвојеног дела ракете су:

$$x(t) = V_0 t$$

$$y(t) = \underline{Vt} - \frac{1}{2}gt^2$$

$V_0 t \sin(\alpha)$ је почетни услов

Код нас (у овом задатку)

$\boxed{73.}$ $V_0 t \sin(\alpha) = Vt$

Део ракете ће да падне на хоризонталу када је

$$y(t) = -h$$

$$Vt - \frac{1}{2}gt^2 = -h$$

$$gt^2 - 2Vt - 2h = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2V \pm \sqrt{4V^2 + 8gh}}{2g} = \frac{2 \cdot 235{,}44 \pm \sqrt{4(235{,}44)^2 + 8 \cdot 9{,}81 \cdot 941{,}76}}{19{,}62}$$

$$t_1 = \frac{470{,}88 + \sqrt{295\,637{,}2992}}{19{,}62} \approx 51{,}712\,[s]$$ ✓

$t_2 < 0$ Са физичког аспекта представља неприхватљиво решење.

Место пада дела ракете:

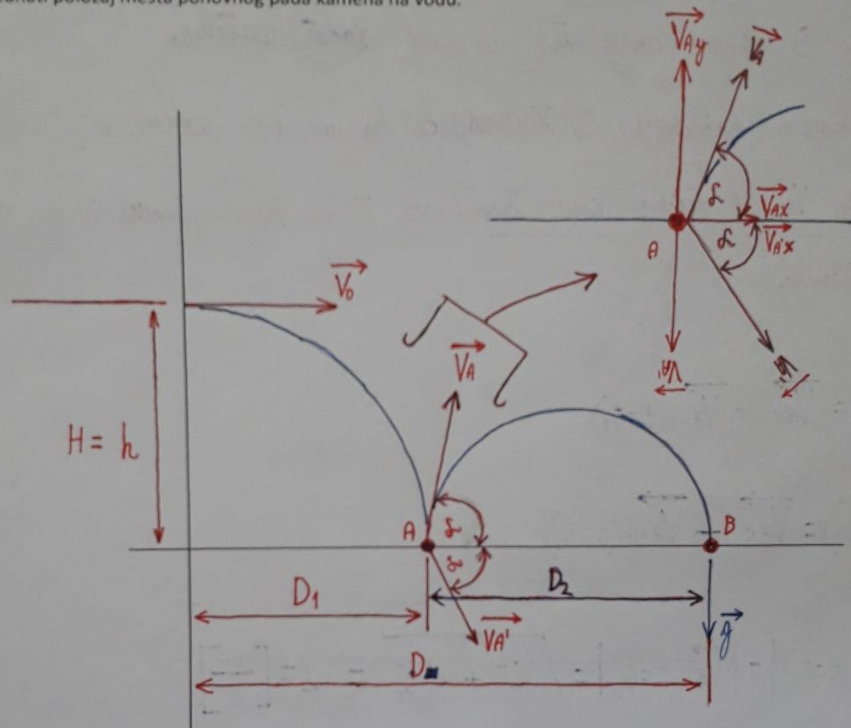
$$D = x(t_1) = V_0 t_1 = 4136{,}96\,[m]$$ ✓

Хоризонтални хитац + Коси хитац

ZADATAK 135. Sa obale, visine H = 5[m], baci se kamen u horizontalnom pravcu početnom brzinom V_0 = 25[m/s]. Kamen se pri padu na vodu odbije od nje pod istim uglom pod kojim je pao na nju. Izračunati položaj mesta ponovnog pada kamena na vodu.

Рјешење:

$\boxed{D = ?}$



До првог пада на воду (хоризонталу) камен (материјална тачка) се креће по закону хоризонталног хитца. Место првог пада камена на воду је означено са тачком A.

$$V_x = V_0 \,;\; v_y(t) = -gt$$

[redacted]

$$x(t) = V_0 t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$y(t) = -h$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 = -h$$

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1[s]$$

(Камен ће први пут пасти на воду у временском тренутку t_1).

$D_1 = x(t=t_1) = V_0 t_1 = 25[m]$ ✓

Након првог пада на воду, камен наставља да се креће од тачке A до тачке B али сада по закону косог хитца.

Дакле, камен (материјална тачка) се баци из тачке A, почетном брзином V_A у пољу силе Земљине теже под углом α у односу на хоризонталу.

$$\overrightarrow{V_{A'}}(t=t_1) = \overrightarrow{V_{A'x}} + \overrightarrow{V_{A'y}}(t=t_1)$$

$$\overrightarrow{V_A}(t=t_1) = \overrightarrow{V_{A'x}} - \overrightarrow{V_{A'y}}(t=t_1)$$

$$V_A = |\overrightarrow{V_A}(t=t_1)| = |\overrightarrow{V_{A'}}(t=t_1)| = \sqrt{V_0^2 + g^2 t_1^2} \approx 27\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$tg(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{V_{Ay}}(t=t_1)|}{|\overrightarrow{V_{Ax}}|} = \frac{g \cdot t_1}{V_0} \approx 0{,}40$$

$$\alpha = arctg(0{,}40) \approx 22^\circ$$

$y(t)=0$

$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$

$$t_2 = t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{2 \cdot 27\left[\frac{m}{s}\right] \sin(22^\circ)}{9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]} = \approx 2[s]$$

$D_2 = (x(t=t_2)) = V_A \cdot 2 \cdot \cos(22^\circ) \cong 46{,}3[m]$ је пут односно дужина параболе $(A-B)$ коју камен прелети за време t_2

$$D = D_1 + D_2 \cong 71{,}3[m]$$

Коси хитац, $\boxed{\text{Слика 10}}$ + формуле.

ZADATAK 137. Kolikom najmanjom brzinom je potrebno baciti telo da bi palo na rastojanju D = 64[m] ?

Zanemariti otpor vazduha i pretpostaviti da se mesto bacanja tela i mesto pada nalaze u istoj horizontalnoj ravni.

Рјешење:

$\boxed{V_{0min} = ?}$ $$D = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$V_0^2 \sin(2\alpha) = Dg$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}} \qquad (1)$$

$(1) \iff V_0(\alpha) = \sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}}$ јер интензитет вектора почетне брзине по закону косог хитца зависи од угаоног положаја тела (материјалне тачке).

$$\frac{dV_0(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}}\right)' = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}}}\left(\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}\right)' = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\alpha)}}} \cdot \frac{\overbrace{(Dg)'\sin(2\alpha)}^{=0} - \overbrace{Dg\cos(2\alpha)(2\alpha)'}^{=2Dg\cos(2\alpha)}}{\sin^2(2\alpha)} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{Dg}}}{\sqrt{\sin(2\alpha)}} \cdot \frac{-2Dg\cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = 0$$

$$\frac{\sqrt{\sin(2\alpha)}}{\cancel{2}\sqrt{Dg}} \cdot \frac{-\cancel{2}Dg\cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = 0$$

$$\frac{\sqrt{\sin(2\alpha)}\; Dg\cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)\sqrt{Dg}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{Dg}\cdot\cos(2\alpha)}{(\sin(2\alpha))^{\frac{3}{2}}} = 0$$ Само бројилац се може (смије) изједначити са нулом!

$$\underbrace{\sqrt{Dg} = 0}_{\text{Немогуће}} \quad \vee \quad \cos(2\alpha) = 0$$

$$\cos(2\alpha) = 0$$

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0$$

$$\cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$$

$$V_{0min} = V_0\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) =$$

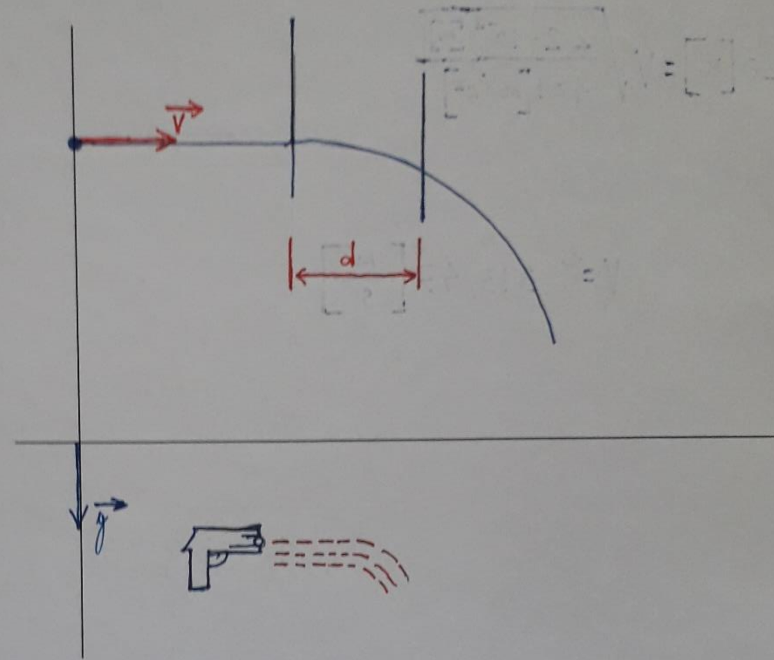
$$\sqrt{Dg/\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)} \approx$$

$$= 25\left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

ZADATAK 139. Metak iz puške probije dva vertikalno postavljena lista hartije koji se nalaze na medjusobnom rastojanju d = 20[m]. Mesto proboja na drugom listu hartije je h = 2[cm] niže od mesta proboja na prvom listu hartije. Pod pretpostavkom da se metak kretao horizontalno pri proboju prvog lista, odrediti brzinu metka.

Рјешење:

$\boxed{V = ?}$



Метак испаљен из ватреног оружја се креће хоризонтално али због утицаја силе Земљине теже он уједно и слободно пада.

$d = Vt \quad (1)$

За вријеме t брзином V метак пређе пут дужине d.

За вријеме t метак ће [redacted] слободно пасти за висину h.

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ Сада идемо у (1).

$d = Vt$

$$d = V\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

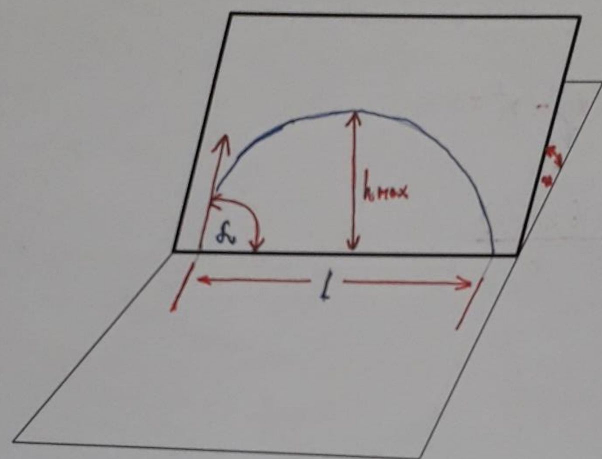
$$20[m] = V\sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}[m]}{9{,}81[m/s^2]}}$$

$$V \cong 313{,}47\left[\frac{m}{s}\right]$$

ZADATAK 140. Iz tačke A na početku strme ravni, nagibnog ugla $\Theta = 30°$, izbaci se telo početnom brzinom $V_0 = 5[m/s]$ pod uglom $\alpha = 45°$.

a) Na kojoj će udaljenosti *l* od tačke A telo ponovo doći na horizontalnu ravan ?
b) Do koje će maksimalne visine u odnosu na horizontalnu ravan dospeti telo ?

Рјешење: Коси хитац, $\boxed{\text{Слика 10}}$ + формуле.

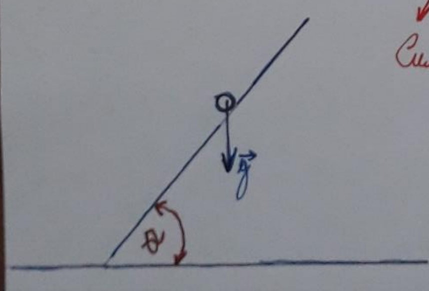


θ	L = ?
[redacted]	

$$L = D = x\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g \sin(\theta)} = 5,1\,[m]$$

$\sin(\theta)$ → Утицај нагиба стрме равни.

g → Сила Земљине теже.



b | $h_{max} = ?$

$$h_{max} = y\left(t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2\, g \sin(\theta)} = 2{,}55\,[m]$$

$V_y(t) = 0$

$V_0 \sin(\alpha) - g t = 0$

$$t = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Dinamika translatornog kretanja (formule)

$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{kg}{m^3}\right]$ je gustina supstancije od koje je načinjeno tijelo mase m i zapremine V.

$V_S = \frac{V}{m} [\frac{m^3}{kg}]$ je specifična zapremina tijela mase m i zapremine V.

$\vec{p} = m \cdot \vec{V}$ [kg$\cdot\frac{m}{s}$] je impuls tijela mase m, prilikom kretanja tijela brzinom $\vec{V}$.

$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ je rezultantna sila koja djeluje na posmatrano tijelo.

$\vec{F}_R = 0$ sile koje djeluju na posmatrano tijelu su u ravnoteži.

$(\vec{V} = \text{const}) \Rightarrow (\vec{p} = \text{const})$ I Njutnov zakon.

$\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ II Njutnov zakon.

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ II Njutnov zakon.

$\vec{P} = \vec{G} = m \cdot \vec{g}$ je sila Zemljine teže.

$\overrightarrow{Q}$ je sila težine tijela,sila kojom tijelo pritišće podlogu ili zateže konac o kojem visi.

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ III Njutnov zakon.

$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{\alpha}_n$ je centripetalna sila koja djeluje u inercijalnom sistemu na tijelo mase m koje se kreće po krivolinijskoj putanji i u jednom trenutku ima normalno ubrzanje $\vec{\alpha}_n$.

$|\vec{F}_{cp}| = m \cdot \frac{|\vec{V}|^2}{r}$ je intenzitet centripetalne sile ako u datom trenutku tijelo ima masu m, linearnu brzinu $|\vec{V}|$,a poluprečnik putanje je jednak r.

$|\vec{F}_{cp}| = m \cdot |\vec{V}| \cdot \omega = m \cdot r \cdot \omega^2$ je intenzitet centripetalne sile ako u datom trenutku tijelo ima masu m,linearnu brzinu $|\vec{V}|$ i ugaonu brzinu ω.

$\vec{F}_c = 2 \cdot m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$ je Koriolisova sila.

$\vec{F}_{eL} = -k \cdot \vec{X}$ je elastična sila.

$\vec{F}_{tr} = \mu \vec{N}$ je sila trenja.

$di\vec{F} = \vec{F} dt$ impuls sile.

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ impuls sistema od 'n' tela.

$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$ na putu dS sila $\vec{F}$ izvrši rad dS.

$A = \int_{s1}^{s2} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{S}$ je ukupan rad koji sila $\vec{F}$ izvrši na putu od s1 do s2.

$E_k = \frac{mV^2}{2}$ je kinetička energija tijela mase m, pri kretanju brzinom V.

$E_p = \frac{kX^2}{2}$ je elastična potencijalna energija tijela, čiji je koeficjent krutosti k pri elastičnoj deformaciji za X.

$E_p = m \cdot g \cdot h$ je gravitaciona potencijalna energija tijela mase m,koje pada sa visine h.

$P = \frac{dA}{dt}$ je snaga mašine koja rad dA izvrši za vrijeme dt.

$P = \frac{d(\vec{F}\vec{s})}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{V}$ ako je $\vec{F}$ = const.

$\eta = \frac{Ak}{Aul}$ stepen korisnog dejstva.

Zadatak 146. Telo u obliku kocke ivica $\alpha = 10[cm]$, načinjeno je od metala gustine $\rho = 8600[\frac{kg}{m^3}]$.

Kolika je:

a) masa ove kocke na Zemlji a kolika na Mesecu,
b) težina ove kocke na Zemljinom a kolika na Mesečevom tlu ? Ubrzanje slobodnog padanja na površini Zemlje iznosi $g_z = 9.81[\frac{m}{s^2}]$, a na površini Meseca $g_M = 1,62[\frac{m}{s^2}]$.

Рјешење:

a] $m = ?$

Маса тела је константна величина, независна од избора референтног система.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

[redacted] $m = \rho V = 8600[kg/m^3] \cdot (10 \cdot 10^{-2}[m])^3 = 8,6[kg]$ ✓

b.

$Q_Z = ?$

$Q_M = ?$

У инерцијалним системима сила тежине тијела и гравитациона сила имају једнак интензитет.

На површини Земље:

$Q_Z = m g_z = 8,6[kg] \cdot 9,81[m/s^2] =$ [redacted] $84,366[N]$ ✓

На површини Мјесеца:

$Q_M = m g_M = 8,6[kg] \cdot 1,62[m/s^2] = 13,932[N]$ ✓

• Тежина тијела је сила којом тијело притиска подлогу или затеже уже о којем виси. [redacted]

• Инерцијални систем је систем који мирује или се креће равномјерно праволинијски. Земља ротира око своје осе и тако се креће око Сунца по елиптичној путањи. Произвољна тачка која мирује на екватору се, у ствари због ротације Земље око своје осе креће убрзањем [redacted] $\boxed{a \approx 0{,}034\left[\frac{m}{s^2}\right]}$ али се она апроксимативно може узети као инерцијални систем.

Zadatak 148. Dve lopte jednakih masa, $m_1 = m_2 = 2[g]$, kreću se jednakim brzinama $V_1 = V_2 = 20[\frac{cm}{s}]$, po putanjama koje se međusobno normalne. Koliki je impuls obe lopte ?

Rješenje:

$\boxed{\vec{P} = ?}$ Импулс тела масе m, приликом кретања брзином $\vec{V}$ дефинише се као:

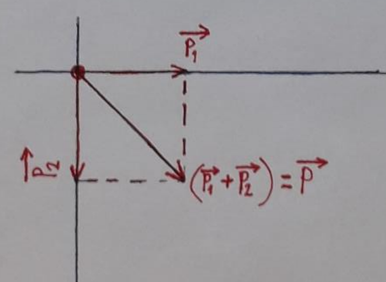
$$\vec{P} = m\vec{V}$$

Импулс тела је векторска величина, зависна од избора референтног система. Другим речима ми импулсом тела кажемо да се тело масе m креће по некој путањи у одговарајућем смјеру.

$$\vec{P_1} = m_1\vec{V_1}$$

$$\vec{P_2} = m_2\vec{V_2}$$

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$$



Импулс система од n тела једнак је збиру импулса појединих тела (у векторски збир). На слици су нацртани референтни смјерови вектора $\vec{P_1}$ и $\vec{P_2}$ у складу са текстом задатка.

$$(|\vec{p}|)^2 = (|\vec{p_1}|)^2 + (|\vec{p_2}|)^2 \dots /\sqrt{}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{2\left(2\cdot 10^{-3}[kg]\cdot 20\cdot 10^{-2}[m]\right)^2} = 0{,}000565685\left[kg\,\frac{m}{s}\right]$$

Смјер вектора p нацртан је на слици.

Zadatak 148. Pazi impuls obe lopte, a ne impuls lopte mase m_1 ili impuls lopte mase m_2. Koristimo formulu za impuls sistema od ‘n’ tela.

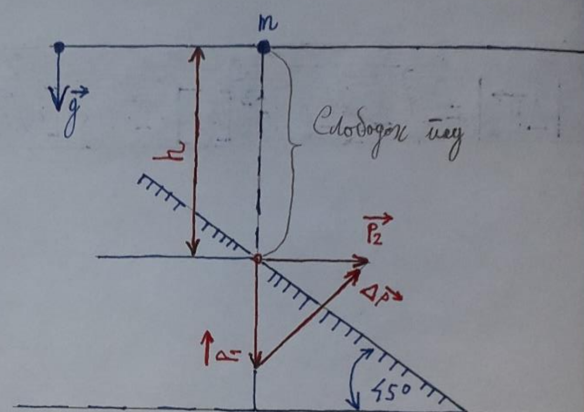
Zadatak 149. Padajući sa visine h = 2[m] loptica, mase m = 20[g], udari u strum ravan, nagibnog ugla α = 45°, od koje se odbije u horizontalnom pravcu ne promenivši intenzitet brzine. Kolika je promena impulsa loptice pri odbijanju ?

стрму

Рјешење:

$\boxed{\Delta\vec{P} = ?}$

$$\Delta\vec{P} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$$



$\vec{P_1} = m\vec{V_1}$

$|\vec{P_1}| = m\sqrt{2gh}$ јер лоптица слободно пада са висине h на стрму раван.

$\vec{P_2} = m\vec{V_2}$

$|\vec{P_2}| = m\sqrt{2gh}$ из текста задатка, након пада на стрму раван лоптица мења правац и смер брзине али не и интензитет.

[redacted]

$$\left(|\Delta\vec{P}|\right)^2 = \left(|\vec{P_1}|\right)^2 + \left(|\vec{P_2}|\right)^2 =$$

[redacted]

$$\sqrt{\left(m\sqrt{2gh}\right)^2 + \left(m\sqrt{2gh}\right)^2} = \sqrt{2\cdot m^2\cdot 2\cdot g\cdot h} =$$ [redacted]

$$\sqrt{4\left(20\cdot 10^{-3}[kg]\right)^2\cdot 9{,}81[m/s^2]\cdot 2[m]} = 0{,}000177177\left[kg\,\frac{m}{s}\right]$$

Zadatak 149. Da pojasnim:

$\overrightarrow{p_1}$ = m * (V = $\sqrt{2gh}$) * ($\overrightarrow{-j}$) , pri čemu je $\vec{j}$ jedinični vektor Y-ose Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema.

$\overrightarrow{p_2}$ = m * (V = $\sqrt{2gh}$) * ($\vec{i}$), pri čemu je $\vec{i}$ jedinični vektor X-ose Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema.

Po definiciji:

$\Delta\vec{p}$ = $\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$ = m$V\vec{i}$ – (-m$V\vec{j}$) = $mV\vec{i} + mV\vec{j}$ kao što je i nacrtano na slici.

Zadatak 150. Na telo, mase m = 200[g], deluje sila intenziteta F = 20[N] u vremenskom intervalu

Δt = 0,03[s].Koliki je impuls sile i brzina tela posle prestanka dejstva sile ako je telo prethodno mirovalo?

Рјешење:

$i_F = ?$

$V = ?$

$d\vec{i_F} = \vec{F}dt$ импулс силе у векторском облику.

$di_F = Fdt \iff \left(d|\vec{i_F}| = |\vec{F}|dt\right)$ импулс силе у скаларном облику.

$$di_F = Fdt$$

$$i_F = \int_{t_1}^{t_2} Fdt = F\int_{t_1}^{t_2} dt = F(t_2 - t_1) = F\Delta t = 20[N]\cdot 0{,}03[s] = 0{,}6\,[N\cdot s]\ \checkmark$$

Импулс силе која делује на тело једнак је промени импулса тела.

[redacted]

$\vec{i_F} = \Delta\vec{P}$ што би у скаларном облику било

[redacted] $i_F = P_2 - P_1 = mV - m0 = mV$

$$V = \frac{i_F}{m} = \frac{0{,}6}{200\cdot 10^{-3}} = 3\left[\frac{m}{s}\right]\ \checkmark$$

$\vec{P_1} = m\cdot 0$ јер прије деловања силе тело се налази у стању мировања.

$\vec{P_2} = m\vec{V}$ јер након деловања силе тело се креће брзином коју му је саопштила сила.

Zadatak 151. Na telo deluje sila intenziteta F = 4[N] u toku vremena Δt = 4[s]. Kolika je masa tela ako se tokom dejstva sila njegova brzina promenila za $\Delta v = 2[\frac{m}{s}]$?

Рјешење:

$$\boxed{m = ?}$$

$$di_F = F\,dt$$

$$i_F = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = F\int_{t_1}^{t_2} dt = F(t_2 - t_1) = F\Delta t = 16\,[N\cdot s]$$

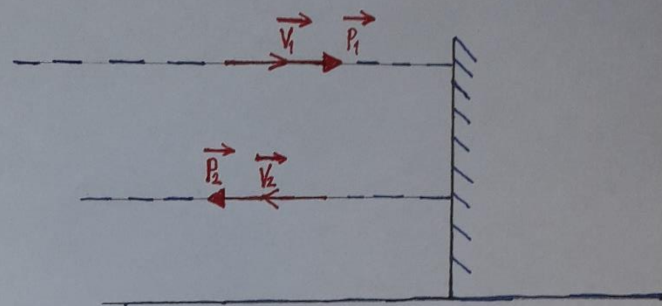
Импулс силе која делује на тело једнак је промени импулса тела.

$$i_F = P_2 - P_1 = mV_2 - mV_1 = m(V_2 - V_1) = m\Delta V$$

$$m = \frac{i_F}{\Delta V} = 8\,[кг] \checkmark$$

Zadatak 152. Lopta, mase m = 20[g], udari brzinom v = $10[\frac{cm}{s}]$ u stenu pod pravim uglom, od koje se odbije u istom pravcu. Ako je udar trajao Δt = 0,1[s] izračunati impuls sile koji je stena saopštila lopti, kao i veličinu srednje sile kojom lopta deluje na stenu.

Решење:



$I_F = ?$

$F_S = ?$

Импулс силе која делује на тело једнак је промени импулса тела.

$$\vec{I}_F = \underbrace{\vec{P_2} - \vec{P_1}}_{} = m\vec{V_2} - (-m\vec{V_2}) = 2m\vec{V_2}$$

$\vec{P_2} = -\vec{P_1}$ по III Њутновом закону.

$$|\vec{I}_F| = 2m|\vec{V_2}| = 2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}[kg] \cdot 10 \cdot 10^{-2}\left[\frac{m}{s}\right] = 0{,}004\left[kg\,\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

Запамти

$$\boxed{F_S = \frac{|\vec{I}_F|}{\Delta t}}$$ = [redacted] = 0,04 [N] ✓

формулу

Zadatak 152.

Zamislimo da je prava na kojoj stoji stijena, X-osa Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema. Kretanje tijela (mase jednake m i brzine opisane nekim $\vec{v}$) u dinamici opisuje vektor koji zovemo *impuls kretanja tijela*.

*Kada se posmatrana lopta kreće ka stijeni: $\overrightarrow{p_1}$ = $mV\vec{\imath}$
*Kada se posmatrana lopta odbije od stijenu: $\overrightarrow{p_2}$ = $mV(-\vec{\imath})$

Impuls sile koja djeluje na tijelo, jednak je promjeni impulsa tijela:

$$\Delta i_{\vec{F}} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1} = -2mV\vec{\imath} \longrightarrow |\Delta i_{\vec{F}}| = 2mV$$

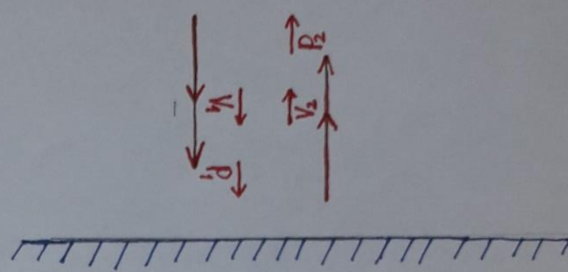
Sada kada nam je poznat intenzitet vektora impulsa sile koja djeluje na tijelo odredimo intenzitet srednje sile koja djeluje na tijelo u vremenskom intervalu Δt kao što je i urađeno u zadatku.

Napomena: $\vec{\imath}$ je jedinični vektor X-ose Dekartovog trodimenzionalnog koordinatnog sistema.

Zadatak 153. Metalna kuglica, mase m = 10[g], slobodno pada sa visine H = 30[m]. Kuglica padne na glatku metalnu ploču, od koje se odbije ne promenivši intenzitet brzine. Ako je dodir kuglice sa pločom trajao Δt = 1[ms], izračunati intenzitet impulsa sile, kao i srednji intenzitet sile kojom kuglica deluje na ploču.

Рјешење:

$$\boxed{\begin{array}{l} i_F = ? \\ F_{sr} = ? \end{array}}$$



$$\left|\vec{V_1}\right| = \left|\vec{V_2}\right| = \underbrace{V = \sqrt{2gH}}_{\text{Слободан пад}} \approx 24,26\left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

Импулс силе која делује на тело једнак је промени импулса тела.

$$\vec{i_F} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = m\vec{V_2} - m\vec{V_1} = \underbrace{m\left[\vec{V_2} - \left(-\vec{V_2}\right)\right]}_{\text{III Њутнов закон}} = 2m\vec{V_2}$$

$$i_F = \left|\vec{i_F}\right| = 2mV = 0,4852\left[kg\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

$$F_{sr} = \frac{i_F}{\Delta t} = \frac{0,4852\left[\frac{kg\,m}{s}\right]}{1\cdot 10^{-3}\,[s]} = 485,2\,[N] \checkmark$$

Zadatak 154. Dva čamca se nalaze na jezeru. Masa prvog čamca je $m_1 = 200[kg]$, a drugog $m_2 = 450[kg]$. Između čamaca se nalazi razapeto uže. Čovek iz prvog čamca vuče uže silom intenziteta $F = 200[N]$. Izračunati brzinu prvog čamca u odnosu na obalu i u odnosu na drugi čamac, posle vremena $t = 2[s]$ od početka vučenja. Pretpostaviti da su čamci prethodno mirovali.

Решење:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = ? \\ V_2 = ? \end{array}}$$

Воде које не теку, већ само испуњавају удубљења у земљишту називају се стајаће воде. Језеро је један од примера стајаћих вода, што значи да је брзина воде језера једнака нули. Пре повлачења ужета [redacted] оба чамца се налазе у стању мировања.

Када човек из првог чамца почне да повлачи уже, оба чамца ће почети да се крећу под дејством силе F што по II Њутновом закону значи да је:

[redacted]

$$F = m_1 a_1$$

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{200[N]}{200[kg]} = 1\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$V_1 = a_1 t = 2[S]$ је брзина првог чамца у односу на воду.

$$F = m_2 a_2$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{200[N]}{450[kg]} = 0,44\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$V_2 = a_2 t = 0,88\left[\frac{m}{s}\right]$ је брзина другог чамца у односу на воду.

Задатак 7.

$V = V_1 + V_2 = 2,88\left[\frac{m}{s}\right]$ је брзина првог чамца у односу на други односно другог чамца у односу на први.

Напомена:

Брзина обале је једнака нули што је једнако брзини воде у језеру.

Zadatak 154.

Ono što mi trebamo odrediti jeste, brzina prvog čamca u odnosu na vodu(ili obalu) a to je brzina V_1, brzinu drugog čamca u odnosu na vodu(ili obalu) a to je brzina V_2 i brzinu kojom se ova dva čamca kreću ka nekoj zajedničkoj tački.

Masa prvog čamca (zajedno sa čovjekom u njemu) jednaka je m_1. Kada čovjek silom F počne da djeluje na uže koje spaja ova dva čamca, prvi čamac u odnosu na vodu će početi da se kreće brzinom V_1, dakle: sila F djeluje na tijelo mase m_1 , pod dejstvom te sile čamac ubrzava svoje kretanje što po II Njutnovom zakonu znači da je: $F = m_1a_1$ pa odavde odredimo ubrzanje a_1 koje je čamac dobio u odnosu na vodu. Krećući se ubrzanjem a_1 za vrijeme t čamac 1 se u odnosu na vodu kreće brzinom $V_1 = a_1t$.

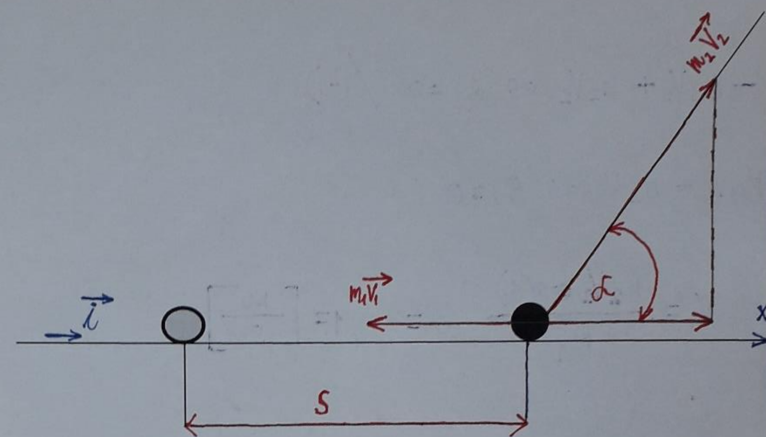
Na analogan način smo izračunali brzinu drugog čamca u odnosu na vodu, to jest izračunali smo V_2.

Kako se i prvi i drugi čamac kreću ka zajedničkoj tački (jedan ka drugom) brzina V_1 pomaže brzini V_2 da zajedno stignu do cilja pa brzina kojom se ova dva čamca kreću da zajedničkoj tački jednaka je $V_1 + V_2$.

Zadatak 155. Iz topa, mase $m_1 = 1{,}8[t]$, ispali se granata mase $m_2 = 1[kg]$, pod uglom $\alpha = 30°$ prema horizontu početnom brzinom $V_0 = V_2 = 360[\frac{m}{s}]$. Kolika je:

a) Brzina trzaja topa,
b) Srednje usporenje topa ako on posle trzaja pređe put $s = 2[m]$?

Рјешење:



$\boxed{a}$ $V_1 = ?$

Према закону одржања импулса за систем топ – граната у векторском облику је: $(m_1\vec{V_1} - m_2\vec{V_2} = 0)$. Да би ову једначину написали у скаларном облику векторе $m_1\vec{V_1}$ и $m_2\vec{V_2}$ морамо пројектовати на исту праву. Пројекција вектора $(\vec{V_1}, \vec{V_2} ...)$ на неку осу (x) једнака је скаларном производу вектора $(\vec{V_1}, \vec{V_2} ...)$ и јединичног вектора те осе $(\vec{i})$.

$$m_1\vec{V_1} = m_1 V_1 (-\vec{i})$$

$$m_1\vec{V_1} \cdot \vec{i} = m_1 V_1 \cdot \cos \overbrace{\angle(-\vec{i}, \vec{i})}^{180°} = -m_1 V_1$$

[redacted]

$$m_2 \vec{V_2} \cdot \vec{i} = m_2 V_2 \cos(\alpha)$$

Сада је

$$-m_1 V_1 + m_2 V_2 \cos(\alpha) = 0 \quad /(-1)$$

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 \cos(\alpha) = 0$$

$$V_1 = \frac{m_2 V_2 \cos(\alpha)}{m_1} \approx 0,17 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$\boxed{b}$ $a = ?$

[redacted] На крају пута $V=0$ јер тело ће се зауставити.

$$V^2 = V_0^2 + 2as$$

$$0 = V_1^2 + 2as$$

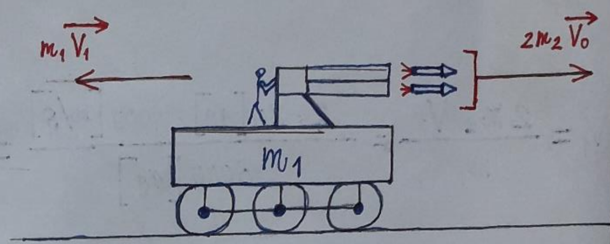
$$-2as = V_1^2$$

$$a = \frac{-V_1^2}{2s} = -0,00725 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Zadatak 156. Na zaustavljenom železničkom vagonu, mase $m_1 = 8[t]$, nalazi se raketna rampa sa koje rakete poleću brzinom $V_0 = 1000[\frac{m}{s}]$. Istovremeno se lansiraju dve rakete, svaka mase $m_2 = 80[kg]$, u horizontalnom pravcu koji se poklapa sa pravcem šina. Za koliko se pomeri vagon pri ovome ako je ukupni-koeficjent trenja pri kretanju vagona $\mu = 0{,}06$?

Рјешење:

$\boxed{s = ?}$



$2m_2\vec{V_0}$ је импулс тела (2 ракете, свака масе m_2) приликом кретања брзином $\vec{V_0}$.

$m_1\vec{V_1}$ је импулс тела (вагон масе m_1) приликом кретања брзином $\vec{V_1}$. Почетна брзина вагона прије лансирања ракета једнака је нули.

Према закону одржања импулса за систем вагон – ракете (након лансирања ракета) имамо да је:

[redacted] $$m_1\vec{V_1} - 2m_2\vec{V_0} = 0$$

$$m_1\vec{V_1} = 2m_2\vec{V_0}$$

Како су правац и смер вектора $\vec{V_1}$ већ познати да би се одредио $|\vec{V_1}|$ дата једначина се може записати у скаларном облику.

$$m_1 V_1 = 2 m_2 V_0$$

$$V_1 = \frac{2 m_2 V_0}{m_1} = \frac{2 \cdot 80[kg] \cdot 1000[m/s]}{8000[kg]} = 20\left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

(1)

$$F_{tr} = m_1 a$$

[redacted]

$$\mu N = m_1 a$$

$$\mu m_1 g = m_1 a$$

$$a = \mu g$$

(1) По II Њутновом закону F_{tr} као и свака друга сила у инерцијалном систему једнака је производу масе тела (вагон) и убрзања. $F_{tr} = \mu N$ по дефиницији N је сила између подлоге (шине) и тела (вагона) па је $N = m_1 g$ односно сила тежине тела.

$F_{tr} = F_{tr} \iff \mu m_1 g = a m_1$ па изразимо a. Након тога имамо све за примену (2)

(2)

$$\boxed{V^2 = V_0^2 + 2aS}$$

$$V_1^2 = 0^2 + 2\mu g S$$

$$S = \frac{V_1^2}{2\mu g} \approx 340\,[m] \checkmark$$

Zadatak 157. Granata leti u horizontalnom pravcu brzinom $V_0 = 15[\frac{m}{s}]$. Ona se pri eksploziji raspadne na dva dela čije su mase $m_1 = 0,5[kg]$ a $m2 = 1[kg]$. Brzina većeg dela granate je $V_2 = 30\ [\frac{m}{s}]$. Pravci kretanja delova granate se poklapaju sa prvobitnim pravcem kretanja granate. Kolika je brzina manjeg dela granate ?

Рјешење:

$$\boxed{\vec{V_1} = ?}$$

$P_0 = (m_1 + m_2)V_0$ је импулс гранате пре распадања записан у скаларном облику.

$P_1 = m_1 V_1$

$P_2 = m_2 V_2$

је импулс мањег (већег) дела гранате записан у у скаларном облику.

$$P_0 = P_1 + P_2$$

$$P_1 = P_0 - P_2 = (m_1 + m_2)V_0 - m_2 V_2 = (1,5[kg])\,15\left[\frac{m}{s}\right] - 1[kg]\,30\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow$$

$$P_1 = -7,5\left[kg\,\frac{m}{s}\right]$$

$$m_1 V_1 = -7,5\left[kg\,\frac{m}{s}\right]$$

$V_1 = -15\left[\frac{m}{s}\right]$ ✓ Смер вектора $\vec{V_1}$ је супротан од смера $\vec{V_0}$ вектора.

Zadatak 157. Granata leti u horizontalnom pravcu brzinom $V_0 = 15[\frac{m}{s}]$. Ona se pri eksploziji raspadne na dva dela čije su mase $m_1 = 0,5[kg]$ a $m2 = 1[kg]$. Brzina većeg dela granate je $V_2 = 30\ [\frac{m}{s}]$. Pravci kretanja delova granate se poklapaju sa prvobitnim pravcem kretanja granate. Kolika je brzina manjeg dela granate ?

Рјешење:

$$\boxed{\vec{V_1} = ?}$$

$P_0 = (m_1 + m_2)V_0$ је импулс гранате пре распадања записан у скаларном облику.

$P_1 = m_1 V_1$

$P_2 = m_2 V_2$

→ је импулс мањег (већег) дела гранате записан у у скаларном облику.

$$P_0 = P_1 + P_2$$

$$P_1 = P_0 - P_2 = (m_1 + m_2)V_0 - m_2 V_2 = (1,5[kg])\,15\left[\frac{m}{s}\right] - 1[kg]\,30\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow$$

$$P_1 = -7,5\left[kg\frac{m}{s}\right]$$

$$m_1 V_1 = -7,5\left[kg\frac{m}{s}\right]$$

$V_1 = -15\left[\frac{m}{s}\right]$ ✓ Смер вектора $\vec{V_1}$ је супротан од смера $\vec{V_0}$ вектора.

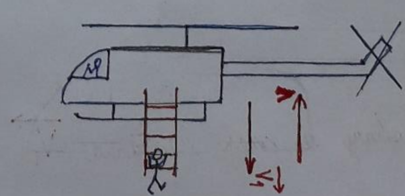
Zadatak 158. Na helikopteru, mase $m_1 = 2,5[t]$ koji ,,stoji'' u vazduhu, vise lestvice na kojima se nalazi čovek, mase $m_2 = 80[kg]$. Izračunati brzinu i smer kretanja helikoptera ako se čovek penje uz lestvice stalnom brzinom $V = 0,5\ [\frac{m}{s}]$ u odnosu na njih.

Рјешење:

$\boxed{\vec{V_1} = ?}$

Ако се човек креће нагоре брзином V, хеликоптер треба да се креће надоле брзином V_1. Импулс кретања хеликоптера у односу на земљу се може записати у скаларном облику као m_1V_1.

Човек се у односу на лествице креће брзином V али пошто се човек заједно са хеликоптером креће у односу на земљу брзина човека у односу на земљу је $(V - V_1)$ па се импулс кретања човека у односу на земљу може записати у скаларном облику као $m_2(V - V_1)$.



референтно тело = земља

Према закону одржања импулса:

$$m_1 V_1 - m_2 (V - V_1) = 0$$

$$m_1 V_1 = m_2 (V - V_1)$$

$$m_1 V_1 = m_2 V - m_2 V_1$$

$$V_1 (m_1 + m_2) = m_2 V$$

$$V_1 = \frac{m_2 V}{m_1 + m_2} = \frac{80\,[kg] \cdot 0{,}5\,\left[\frac{m}{s}\right]}{2500\,[kg] + 80\,[kg]} \approx 0{,}0155\,\left[\frac{m}{s}\right]$$

Правац и смер вектора $\overrightarrow{V_1}$ нацртани су на слици.

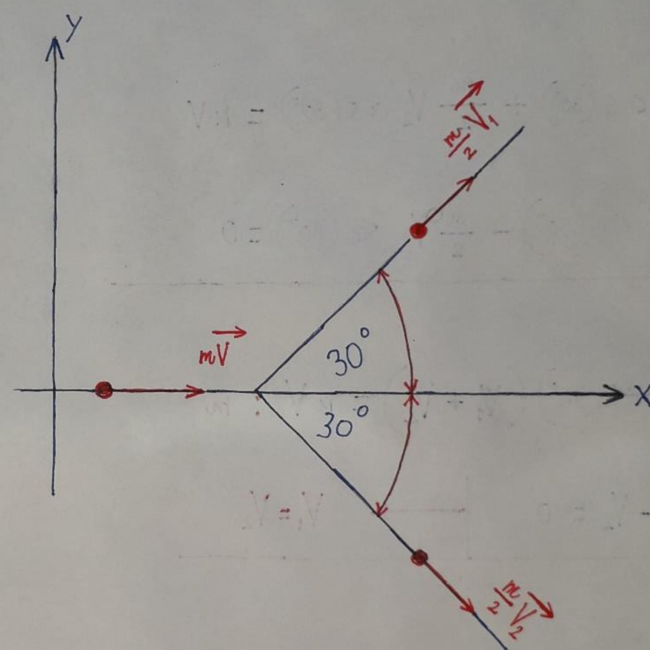
Zadatak 161. Krećući se brzinom $V = 400 \, [\frac{m}{s}]$ granata se u jednom trenutku raspadne na dva jednaka dela, pri čemu svaki od njih krene po pravcu koji zaklapa ugao $\alpha = 30°$ prema prvobitnom pravcu. Kolike su brzine kretanja delova granate ?

Рјешење:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = ? \\ V_2 = ? \end{array}}$$

$$V_1 = |\vec{V_1}|$$

$$V_2 = |\vec{V_2}|$$



[redacted]

mV је пројекција вектора $m\vec{V}$ на x-осу.

Вектори $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ имају своје пројекције на x и y - оси Декартовог 3D координатног система.

$$\frac{m}{2} V_1 \cos(30^\circ) + \frac{m}{2} V_1 \sin(30^\circ)$$

$$\frac{m}{2} V_2 \cos(30^\circ) - \frac{m}{2} V_2 \sin(30^\circ)$$

Према закону одржања импулса:

$$\frac{m}{2} V_1 \cos(30^\circ) + \frac{m}{2} V_2 \cos(30^\circ) = mV$$

$$\frac{m}{2} V_1 \sin(30^\circ) - \frac{m}{2} V_2 \sin(30^\circ) = 0$$

$$\frac{m}{2} \cos(30^\circ)\left(V_1 + V_2\right) = mV \quad : m$$

$$V_1 - V_2 = 0 \longrightarrow V_1 = V_2$$

$$\frac{m \cos(30^\circ)\, \cancel{2} V_1}{\cancel{2}} = V$$

$$V_1 = V_2 = \frac{V}{m \cos(30^\circ)} = 461{,}8 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zadatak 162. Pri lansiranju rakete mase m = 200[kg], trenutno sagori $^1/_4$ njene sadržine i izbaci se u suprotnom smeru (od smera kretanja rakete) u vidu produkta sagorevanja. Ako je brzina produkata sagorevanja u odnosu na raketu $V_1 = 1800[\frac{m}{s}]$, kolika je početna brzina rakete ? Na kojoj udaljenosti od mesta lansiranja će pasti raketa ako je lansirana pod uglom α = 30° prema horizontu ?

Рјешење: Коси хитац.

$V_0 = ?$

$D = ?$

[redacted]

$P_1 = \frac{m}{4} V_1$ је импулс кретања $\frac{1}{4}$ садржине ракете записан у скаларном облику, приликом кретања те садржине брзином V_1.

$P_0 = \frac{3m}{4} V_0$ Након сагоревања $\frac{1}{4}$ садржине ракете у ракети је остало још $\frac{3}{4}$ њене садржине. P_0 је импулс кретања ракете без $\frac{1}{4}$ њене садржине, записан је у скаларном облику, а V_0 је почетна брзина ракете. Према закону о одржању импулса након лансирања ракете имамо да је:

$$\frac{m}{4} V_1 - \frac{3m}{4} V_0 = 0$$

$$V_1 = 3V_0$$

$$V_0 = \frac{V_1}{3} = 600\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$y(t) = 0$$

$$V_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$V_0 \sin(\alpha) = \frac{gt}{2}$$

$t = \dfrac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}$ је време трајања лета.

$$x\left(t = \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g}\right) = V_0 \frac{2V_0 \sin(\alpha)}{g} \cos(\alpha) = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = 31780{,}74[m] =$$

$= D$ је домет наше ракете.

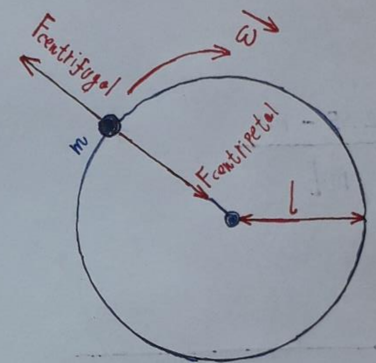
Zadatak 163. Telo, mase m = 200[g], vezano za uže dužine l = 0,5[m], rotira u vertikalnoj ravni. Izračunati najveću ugaonu brzinu sistema pod uslovom da se uže ne prekine. Uže kojim je vezano telo kida se pri sili zatezanja intenziteta F_{max} = 295[N].

Рјешење:

$\boxed{\omega = ?}$

Запамти!

$$\boxed{F_{centrifugal} = \frac{mV^2}{r}}$$



На посматрано тело које ротира делују центрифугална и центрипетална сила које су у равнотежи. Тело својом тежином затеже уже о којем виси. Да не би дошло до пуцања ужета сила тежине тела и центрифугална сила морају интензитета мањег од F_{max}. Математички:

$$F_{max} > F_c + mg$$

$$295 > m\frac{V^2}{l} + mg$$

$$295 > \frac{m\omega^2 l^2}{l} + mg$$

$$295 > m\omega^2 L + mg$$

$$-m\omega^2 L > mg - 295$$

$$\omega^2 < \frac{295 - mg}{mL}$$

$$\omega < \sqrt{\frac{295 - 200 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{200 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5}} \iff \omega < 54{,}1329844 \left[\frac{rad}{s}\right] \checkmark$$

Zadatak 164. Automobil, mase m, kreće se stalnom brzinom V po :

a) horizontalnom putu,
b) ispupčenom mostu, poluprečnika krivine R,
c) po uleglnutom mostu istog poluprečnika krivine.

Kolikom silom deluje automobile na podlogu, tj. kolika je težina automobile u sva tri slučaja ? Odrediti intenzitet ovih sila kada se automobil nalazi na sredini mosta.

Рјешење:

a

Хоризонталан пут је инерцијални систем. У инерцијалним системима, сила тежине тела и гравитациона сила су једнаког интензитета.

$$Q_1 = mg$$

b

$$Q_2 = mg - \frac{mV^2}{R}$$

c

$$Q_3 = mg + \frac{mV^2}{R}$$

Испупчени мост је неинерцијални систем.

Код кружног кретања, тело има (тангенцијално и нормално убрзање):

$a_t = R\alpha$

$a_n = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}$

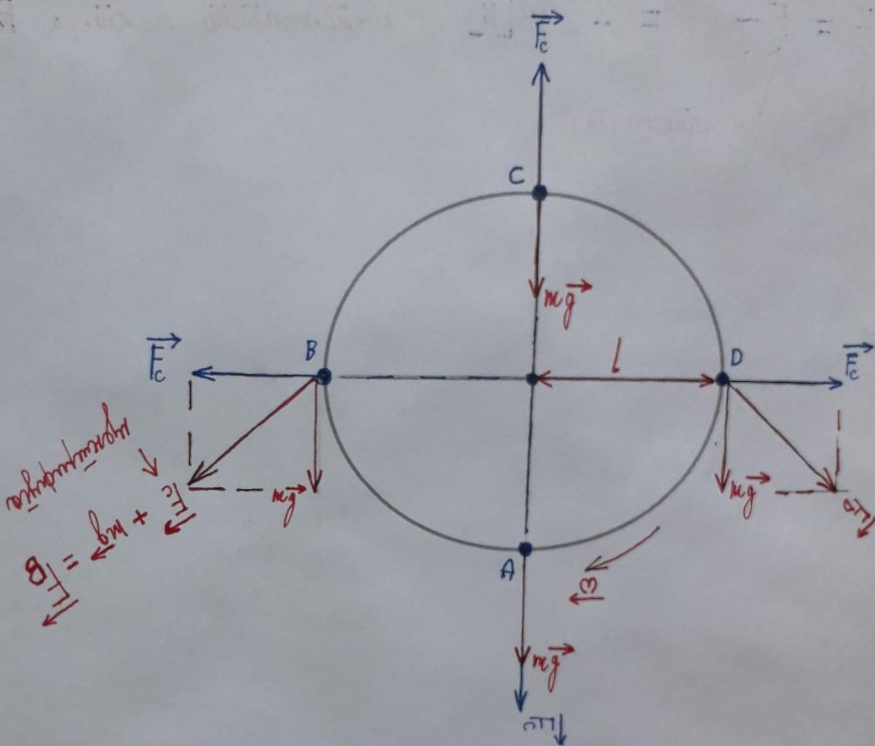
Пошто се аутомобил креће сталном брзином V његово тангенцијално убрзање је једнако нули. По II Њутновом закону нормално убрзање аутомобила је једнако $m \cdot a_n$.

Када аутомобил иде уз испупчење убрзање је негативно (b).

Када аутомобил иде низ удубљење убрзање је позитивно (c).

Zadatak 165. Telo, mase m = 1[kg], vezano je na kraju užeta dužine l = 0,5[m]. Uže sa telom rotira u vertikalnoj ravni stalnom brzinom ω = 10 $[\frac{rad}{s}]$. Kolika je sila zatezanja užeta kada je telo u tačkama A, B, C, D ?

Рјешење:



$$\vec{F} = \vec{F_c} + m\vec{g} \quad (1)$$

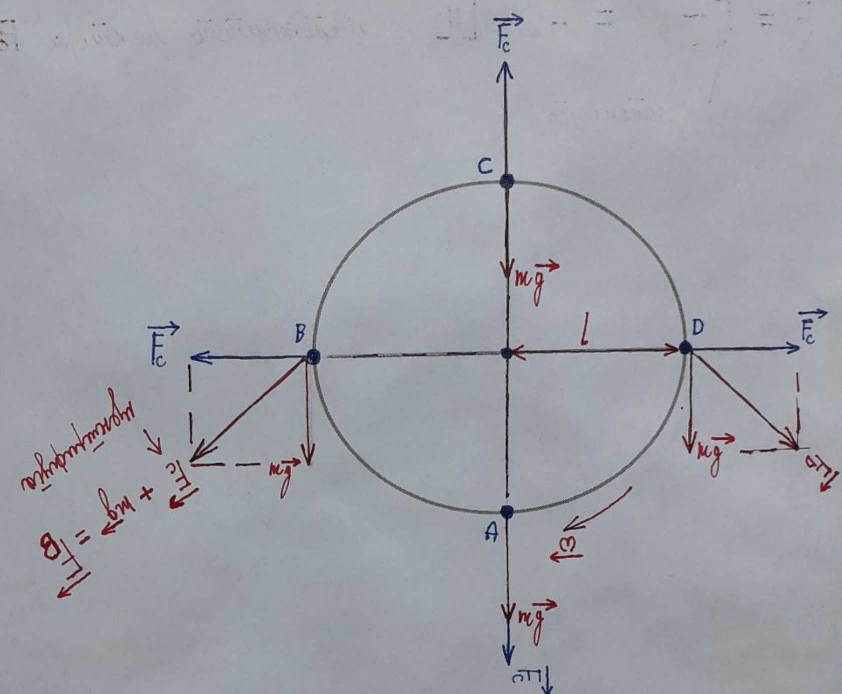
(1) Сила затезања ужета једнака је векторском збиру вектора центрифугалне силе и силе тежине тела.

$$|\vec{F_c}| = F_c = \frac{mV^2}{L} = mL\omega^2 = 50[N]$$

$F_A = F_c + mg = 59{,}81[N]$ је интензитет вектора $\vec{F_A}$.

Zadatak 165. Telo, mase m = 1[kg], vezano je na kraju užeta dužine l = 0,5[m]. Uže sa telom rotira u vertikalnoj ravni stalnom brzinom $\omega = 10\ [\frac{rad}{s}]$. Kolika je sila zatezanja užeta kada je telo u tačkama A, B, C, D ?

Рјешење:



$$\vec{F} = \vec{F_c} + m\vec{g} \quad (1)$$

(1) Сила затезања ужета једнака је векторском збиру вектора [redacted] центрифугалне силе и силе тежине тела.

1. $$|\vec{F_c}| = F_c = \frac{mV^2}{l} = ml\omega^2 = 50[N]$$

$F_A = F_c + mg = 59{,}81[N]$ је интензитет вектора $\vec{F_A}$.

$F_B^2 = F_D^2 = 50^2 + (9,81)^2 \longrightarrow F_B = F_D = 50,95327\,[N]$ је интензитет вектора F_B и F_D.

$F_C = F_c - \mu g = 40,19\,[N]$ је интензитет вектора F_C.

центрифуга

Правац и смер вектора $\vec{F_B}$ и $\vec{F_D}$ су назначени на слици.

$$\vec{F_A} = F_A(-\vec{j})$$

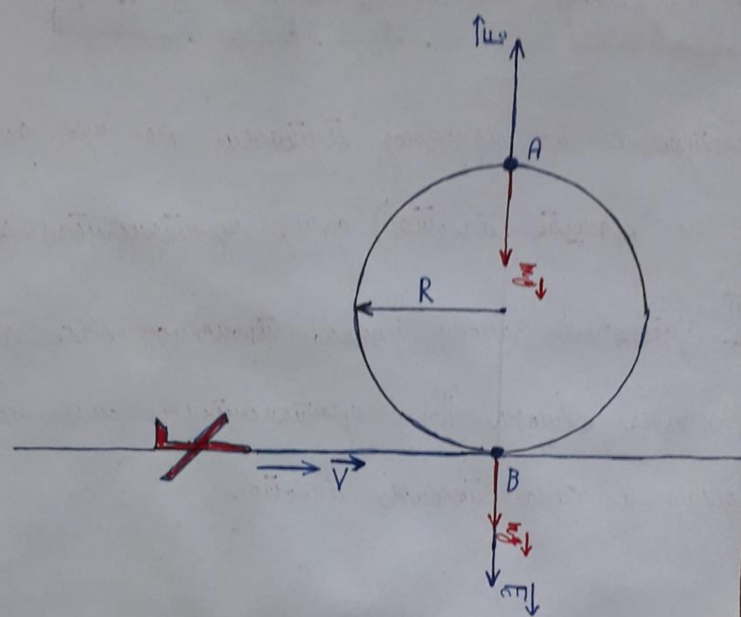
$$\vec{F_C} = F_C\,\vec{j}$$

Zadatak 166. Leteći brzinom V = 600[$\frac{km}{h}$] avion napravi ,,petlju"" u vertikalnoj ravni poluprečnika R = 600[m]. Kolikom silom deluje pilot, mase m = 80[kg], na svoje sedište u trenutku kada se avion nalazi u najvišoj, a kolikom kada se nalazi u najnižoj tački putanje ?

Rješenje:

$\vec{F_A} = ?$

$\vec{F_B} = ?$



$$F_c = |\vec{F_c}| = \frac{mV^2}{R} = \frac{80[kg]\left(\frac{600\cdot 10^3[m]}{1\cdot 60\cdot 60[s]}\right)^2}{600[m]} = 3704[N]$$ ✓

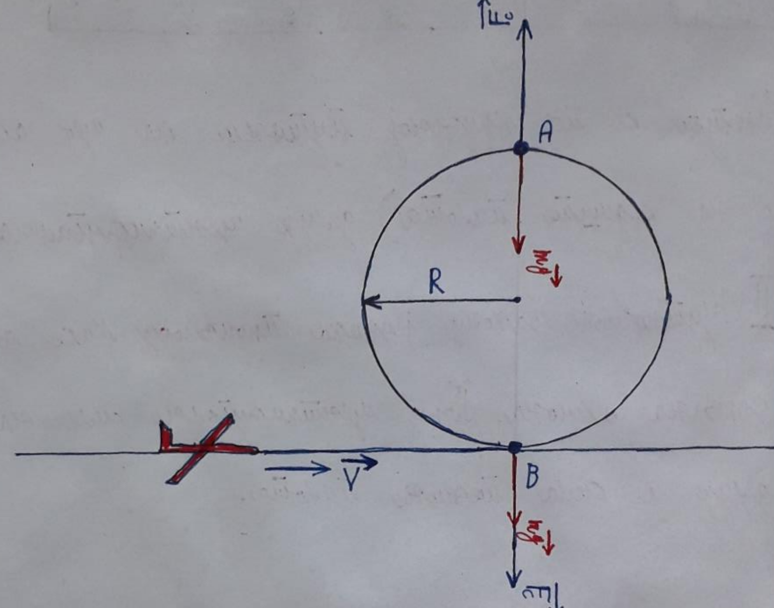
$$mg = 80[kg]\,9,81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 745[N]$$ ✓

Zadatak 166. Leteći brzinom $V = 600[\frac{km}{h}]$ avion napravi ,,petlju"" u vertikalnoj ravni poluprečnika $R = 600[m]$. Kolikom silom deluje pilot, mase $m = 80[kg]$, na svoje sedište u trenutku kada se avion nalazi u najvišoj, a kolikom kada se nalazi u najnižoj tački putanje ?

Rješenje:

$\vec{F_A} = ?$

$\vec{F_B} = ?$



$$F_c = |\vec{F_c}| = \frac{mV^2}{R} = \frac{80[kg]\left(\frac{600\cdot 10^3[m]}{1\cdot 60\cdot 60[s]}\right)^2}{600[m]} = 3704[N] \checkmark$$

$$mg = 80[kg]\, 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 745[N] \checkmark$$

Када авион уђе у кружну путању његово кретање се описује једначинама кружног кретања. Како је $V = const$ тангенцијално убрзање је једнако нули.

[redacted]

Крећући се по кружној путањи на њег авион (па самим тим и на седиште пилота) делује центрифугална сила. Та сила је по II Њутновом закону једнака производу масе авиона и нормалног убрзања авиона. Поред центрифугалне силе на седиште авиона делује и сила тежине пилота.

$$F_A = F_c - mg = 2959\,[N]$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{j}$$

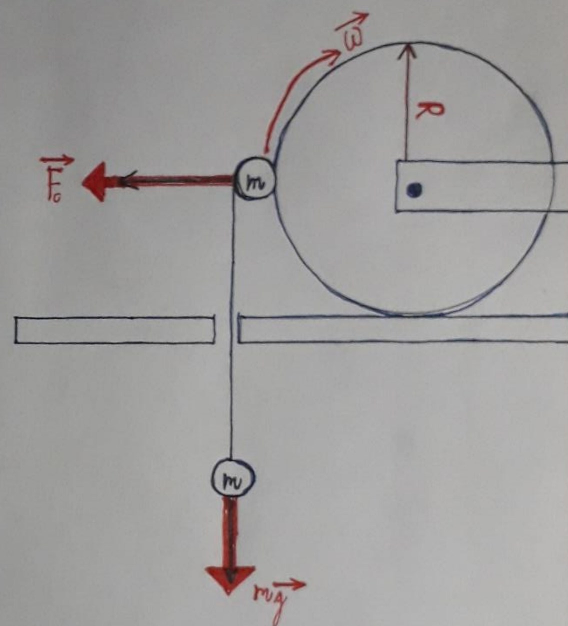
$$F_B = F_c + mg = 4449\,[N]$$

$$\vec{F_B} = F_B(-\vec{j})$$

Zadatak 168. Dva tela, jednakih masa m, povezana su užetom kroz otvor na horizontalnoj podlozi. Jedno telo se nalazi na podlozi i po njoj rotira, dok drugo visi u vazduhu. Koliku ugaonu brzinu treba da ima telo koje rotira da bi telo koje visi ostalo na istom nivou ? Poluprečnik putanje tela na podlozi je R. Sva trenja zanemariti.

Решење:

$\boxed{\omega = ?}$



Да би силе $\vec{F_c}$ и $m\vec{g}$ биле у равнотежи $\vec{F_c}$ и $m\vec{g}$ морају бити једнаког интензитета и супротног смера.

$$m\omega^2 R = mg$$

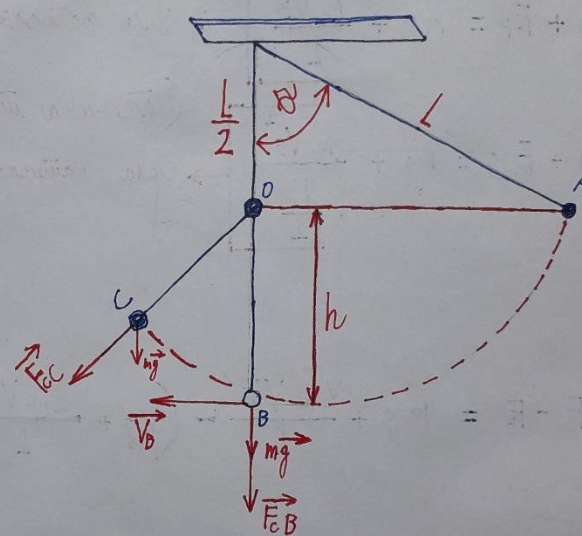
$$\omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \checkmark$$

Zadatak 169. Matematičko klatno, dužine *l*, izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao $\Theta = 60°$ pa je pušteno da slobodno osciluje. Pri prolasku klatna kroz ravnotežni položaj, konac klatna naiđe na osovinu O, koja je na rastojanju $^{l}/_{2}$ od tačke vešanja klatna. Kolika je promena intenziteta sile zatezanja konca pri njegovom udaru o osovinu O ?

Рјешење:

$\boxed{\Delta F_{затезања} = ?}$



Математичко клатно дужине L у почетном положају налази се у тачки B. Математичко клатно се затим изведе из почетног положаја у тачку A одакле се пушта да слободно пада. Математичко клатно слободно пада па је брзина његовог кретања једнака $V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{gL}$ јер је $(h = L/2)$. Пошто се Математичко клатно креће по кружном луку сталном линеарном брзином V_B тангенцијално убрзање клатна је једнако нули, а [redacted] нормално убрзање клатна је описано једначином $\left(a_n = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}\right)$.

$$F_B = mg + F_{cB} = mg + \frac{mV_B^2}{L}$$ → Сила затезања конца у тачки B.

(тежина тела) + (центрифугална сила)

$$F_C = mg + F_{cC} = mg + \frac{mV_B^2}{\frac{L}{2}}$$ → Сила затезања конца у тачки C.

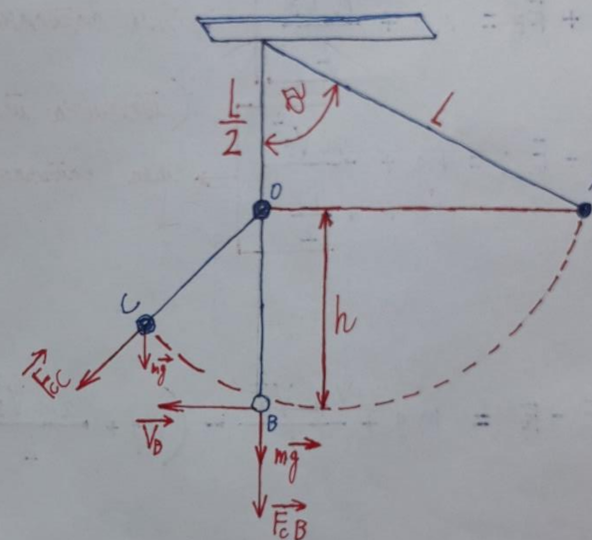
$$\Delta F = F_C - F_B = mg + \frac{mV_B^2}{L} - \left(mg + \frac{2mV_B^2}{L}\right) = \frac{-mV_B^2}{L} = \frac{-mgL}{L} =$$

$$= -mg$$

Zadatak 169. Matematičko klatno, dužine l, izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao $\Theta = 60°$ pa je pušteno da slobodno osciluje. Pri prolasku klatna kroz ravnotežni položaj, konac klatna naiđe na osovinu O, koja je na rastojanju $^{l}/_{2}$ od tačke vešanja klatna. Kolika je promena intenziteta sile zatezanja konca pri njegovom udaru o osovinu O ?

Рјешење:

$\boxed{\Delta F_{затезања} = ?}$



Математичко клатно дужине L у почетном положају налази се у тачки B. Математичко клатно се затим изведе из почетног положаја у тачку A одакле се пушта да слободно пада.

Математичко клатно слободно пада па је брзина његовог кретања једнака $V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{gL}$ јер је $(h = L/2)$. Пошто се математичко клатно креће по кружном луку сталном линеарном брзином V_B тангенцијално убрзање клатна је једнако нули, а [redacted] нормално убрзање клатна је описано једначином

$$\left(a_n = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}\right).$$

$$F_B = mg + F_{cB} = mg + \frac{mV_B^2}{L}$$ → Сила затезања конца у тачки B.

(тежина тела) + (центрифугална сила)

$$F_c = mg + F_cC = mg + \frac{mV_B^2}{\frac{L}{2}}$$ → Сила затезања конца у тачки C.

$$\Delta F = F_c - F_B = mg + \frac{mV_B^2}{L} - \left(mg + \frac{2mV_B^2}{L}\right) = \frac{-mV_B^2}{L} = \frac{-mgL}{L} =$$

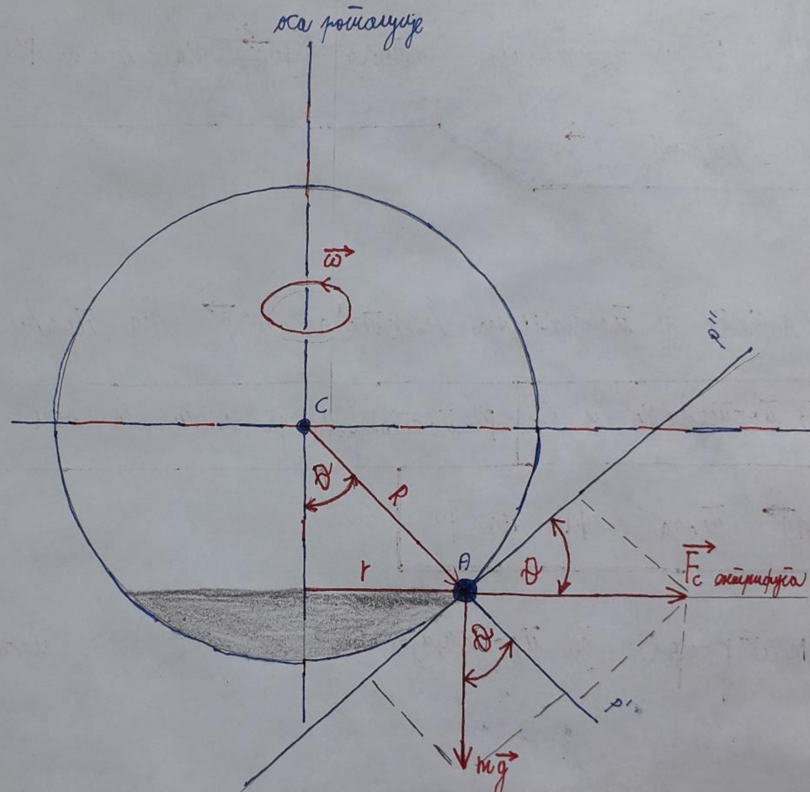
$$= -mg \checkmark$$

Ког год прочиташ положај одма помисли на угао !

Zadatak 170. Na dnu šuplje sfere, unutrašnjeg poluprečnika R, nalazi se mala količina peska. Odrediti gde će se nalaziti pesak u sferi tokom njene rotacije oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω. Trenje peska o zidove sfere zanemariti.

Рјешење:

$$\sin\theta = \frac{r}{R}$$



Ротацијом сфере око осе ротације сталном угаоном брзином ω на песак ће деловати силе (тежина песка) и центрифугална сила. Крајњи положај песка у односу на осу ротације одређен је углом θ. [redacted]

$\vec{R}$ = Показивач на положај тега.

[redacted]

$mg \sin\theta$ је пројекција вектора $(m\vec{g})$ на праву p'.

А поставимо у C. | p'' поставимо да лежи на оси ротације [redacted]

$m\vec{g}$ тада лежи на p'

$m\omega^2 r\cos\theta$ је пројекција вектора $(\vec{E})$ на праву p'.

$$mg\sin\theta = m\omega^2 r\cos\theta$$

$$\cancel{m}g\,\cancel{\sin\theta} = \cancel{m}\omega^2 R\,\cancel{\sin\theta}\cos\theta$$

$$g = \omega^2 R\cos\theta$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right) \checkmark$$

Испитни задатак

Zadatak 171. Da bi se odredio koeficjent trenja između asfaltnog puta i gume, izveden je sledeći ogled. Na put je postavljeno telo, mase m = 100[kg], obloženo gumom. Pod dejstvom vučne sile, intenziteta F = 196[N], telo se po putu kretalo ravnomerno. Koliki je koeficjent trenja između gume i puta ?

Рјешење:

$\boxed{\mu = ?}$

$F_{tr} = F$ Када је $v = const$ $(F_{tr} = F)$.

$\mu N = F$ N је сила између подлоге и тела.

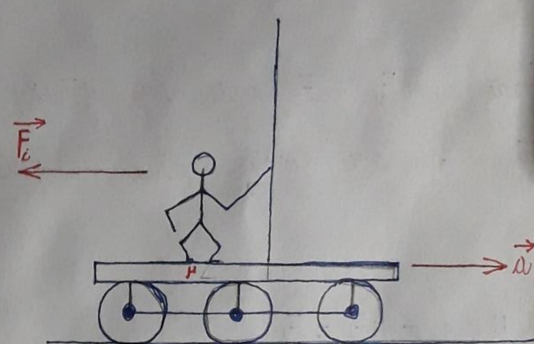
$\mu m g = F$ У овом задатку $(N = mg)$.

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{196[N]}{100[kg]\, 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]} = 0{,}199796126$$

Zadatak 172. Čovek, mase m = 85[kg], stoji na podu tramvaja koji se kreće stalnim ubrzanjem $\alpha = 3[\frac{m}{s^2}]$. Koeficjent trenja između poda tramvaja i čovekovih cipela iznosi $\mu = 0,1$. Izračunati intenzitet:

a) inercijalne sile koja deluje na čoveka,
b) sile koju čovek treba da savlada držeći se za ručicu pored sebe,
c) normalne sile kojom bi čovek trebalo da se odupre u vertikalnom pravcu (sa smerom naniže) da bi sprečio klizanje.

Рјешење:



a

$F_i = ?$

$$|\vec{F_i}| = m|\vec{a}| = 85[kg] \cdot 3\left[\frac{m}{s^2}\right] = 255[N]$$

b

$F_1 = ?$

$$F_1 = F_i - F_{tr} = 255 - \mu m g = 255 - 0,1 \cdot 85 \cdot 9,81 = 171,615[N]$$

Држећи се за ручицу, човек се бори са силама:

F_i = интензитет инерцијалне силе,

F_{tr} = интензитет силе трења између човекових ципела и подлоге трамваја.

c

$F_2 = ?$

Да би се спречило клизање човека сила трења, сила F_2 и инерцијалска сила треба да буду у равнотежи.

Како су F_{tr} и F_2 силе које утичу на клизање човека по подлози трамваја оне морају бити у равнотежи са F_i

$$\mu m g + \mu F_2 = F_i$$

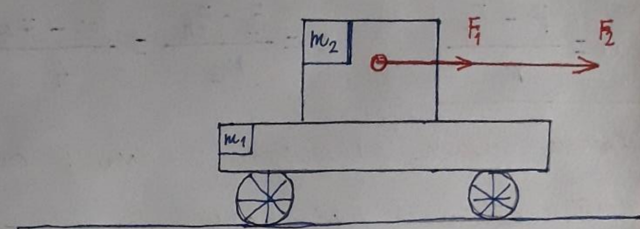
$$F_2 = \frac{ma}{\mu} - mg = 1716\ \boxed{N}$$

173. Na platformi sa točkovima, mase $m_1 = 40[kg]$, nalazi se telo mase $m_2 = 4[kg]$. Koeficjent trenja između tela i platforme je $\mu = 0,2$. Ako se na telo deluje silom intenziteta $F_1 = 2[N]$, telo se po platformi ne pomera, dok pri dejstvu silom intenziteta $F_2 = 100[N]$ dolazi do pomeranja tela. Izračunati intenzitet sile trenja i ubrzanje platforme u oba slučaja.Trenje platforme o podlogu zanemariti.

Рјешење:

$F_{tr} = ?$

$a = ?$



$$F_{tr} = \mu m_2 g = 0,2 \cdot 4[kg] \cdot 9,81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 7,848[N] \checkmark$$

1° На тело дејује сила F_1.

$F_{tr} < F_1$ Тело стоји.

По II Њутновом закону (Сила F_1 даје убрзање платформи са теретом)

па је

$$F_1 = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\left[kg\frac{m}{s^2}\right]}{44[kg]} \approx 0,045\left[\frac{m}{s^2}\right] \checkmark$$

2.° Када на тело делује сила F_2.

$F_{tr} < F_2$ Тело (тело на платформи) се креће равномерно променљиво убрзањем:

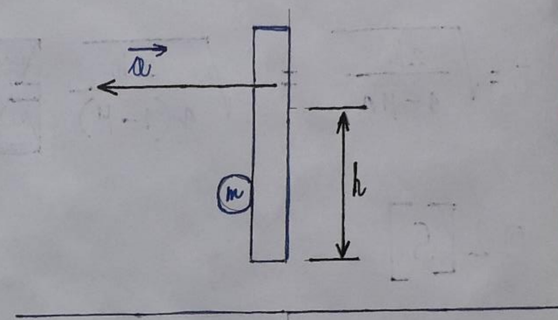
$$\boxed{a = \frac{F - F_{tr}}{m}} \qquad a = \frac{F_2 - F_{tr}}{m_2} = \frac{100 - 7{,}848}{4} = 23{,}038 \left[\frac{m}{s^2}\right] \checkmark$$

Важна формула. Примењујемо је када је сила трења мањег интензитета од вучне силе.

Zadatak 175. Kuglica, mase m = 20[g], nalazi se na vertikalnoj ploči koja se kreće translatorno ubrzanjem $\alpha = 4g$ u horizontalnom pravcu.

a) Kolikom silom kuglica deluje na ploču ?
b) Ako je koeficjent trenja između kuglice i ploče $\mu = 0{,}5$, odrediti ubrzanje ploče α_2 pri kome će kuglica početi da pada.
c) Ako je ubrzanje ploče $\alpha_3 = g$, koliko će vremena kuglica padati sa visine h = 10[cm] ?

Рјешење:



a

$F_K = ?$

По II Њутновом закону сила којом куглица делује на плочу (сила означена као F_K) у скаларном облику је:

$$F_K = ma = m \cdot 4g = 20 \cdot 10^{-3}[kg] \cdot 4 \cdot 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 0{,}78[N] \checkmark$$

b

$a_2 = ?$

(Куглица почети да пада) $\Longleftrightarrow$ (Куглица се по вертикалној плочи креће у правцу и смеру вектора $\vec{g}$).

$F_{tr} > mg$ Услов који мора да буде испуњен да би куглица почела да се креће по вертикалној плочи.

$\mu a_2 m > mg$

$a_2 = \frac{g}{\mu} =$ [redacted] $19{,}62\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$\boxed{C}$

$\boxed{t=?}$ Свободен пад.

$a = g - \mu a_з$

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu a_з}} = \sqrt{\frac{2h}{g(1-\mu)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}\,[m]}{9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] \cdot 0{,}5}} =$$

$$0{,}2\,[s]$$

Zadatak 176. Tegljač, mase m_2, vuče stenu, mase $m_1 = 7[t]$, po horizontalnom zemljištu. Ako je koeficjent trenja između stene i podloge $\mu_1 = 0,4$, a između tegljača i podloge $\mu_2 = 0,2$, izračunati potrebnu masu tegljača da bi vučenje bilo moguće.

Рјешење:

$\boxed{m_2 = ?}$

Сила трења између стене и подлоге. $\leftarrow \left[F_{tr1} = F_{tr2} \right] \rightarrow$ Сила трења између тегљача и подлоге.

$$\mu_1 m_1 g = \mu_2 m_2 g \quad /:g$$

$$m_2 = \frac{\mu_1 m_1}{\mu_2} =$$ [redacted] $$\frac{0,4 \cdot 7[t]}{0,2} = 14[t]$$ ✓

Када је $m_2 = 14[t]$ сила трења између стене и подлога и сила трења између тегљача и подлоге једнаког су интензитета.

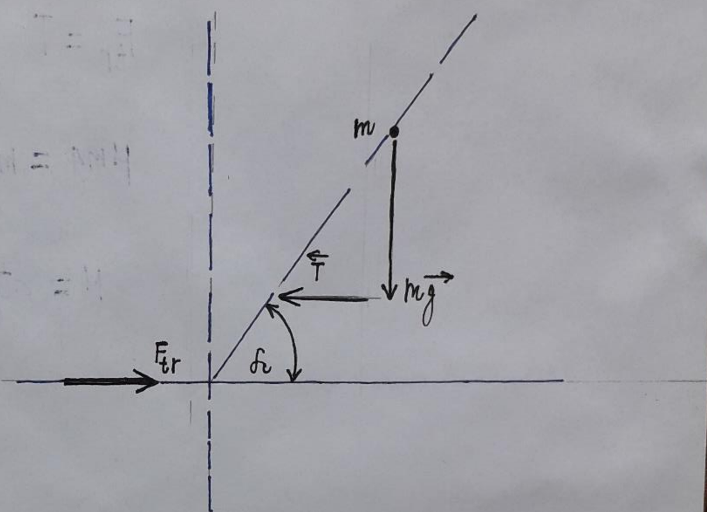
Тада је вучна сила тегљача $F = \nu F_{tr2}$, [redacted] $\nu > 1$

по интензитету сигурно већа од F_{tr2} па тегљач вуче стену.

Zadatak 177. Koliki je najveći nagibni ugao koji može da zauzme biciklista prema putu (ako se kreće po pravoj putanji) bez bojazni da padne ? Koeficjent trenja između bicikla i puta je μ.

Рјешење:

$\boxed{\alpha = ?}$



На слици је заправо приказан бициклиста масе m.
Интересује нас угао α између нагнутог према напред торза бициклисте и хоризонтале. Угао α треба да обезбеди равнотежу између силе трења и силе тежине тела.

$F_{tr} = \mu m g$

$\boxed{T = mg\, ctg(\alpha)}$

$(T = |\vec{T}|)$ Посматрамо угао α. Належна катета је вектор $\vec{T}$. Насупротна катета је вектор $m\vec{g}$. Вектор $\vec{T}$ треба пројектовати на хоризонталу да би га поредили (изједначили са вектором $\overrightarrow{F_{tr}}$) што је могуће преко једначине $ctg(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{T}|}{m|\overrightarrow{g}|}$.

$$F_{tr} = T$$

$$\mu m g = m g \, ctg(\alpha)$$

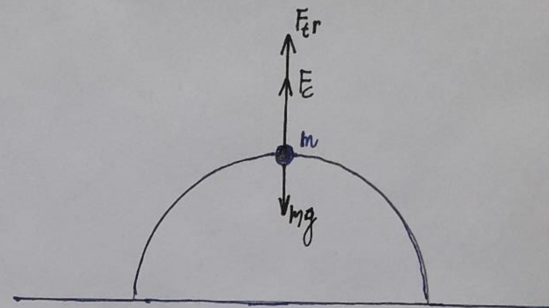
$$\mu = ctg(\alpha)$$

$$\alpha = arcctg(\alpha)$$

Zadatak 178. Motociklista uleti u vertikalni ,,cilindar smrti" , poluprečnika R = 15[m], brzinom V.Ako je koeficjent trenja između podloge i točkova motocikla μ = 0,4, kolika treba da bude brzina *V* pa da motociklista ne padne ?

Рјешење:

$\boxed{V = ?}$



Сила између подлоге и мотора је центрифугална.

$$F_{tr} = \mu F_c = \mu m \frac{V^2}{R}$$

$F_{tr} > mg$ Услов

$$\mu m \frac{V^2}{R} > mg \quad / : m$$

$$\frac{\mu V^2}{R} > g$$

$$V > \sqrt{\frac{gR}{\mu}}$$

$$V > 19,8 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zadatak 179. Kolikom najvećom brzinom može da se kreće automobil po horizontalnoj kružnoj putanji, poluprečnika R = 30[m], pod uslovom da ne klizi ? Koeficjent trenja između podloge i točkova je μ = 0,25.

Рјешење:

$\boxed{V = ?}$

Да клизање аутомобила не би довело до посртања аутомобила сила трења мора бити слабијег интензитета од центрифугалне силе.

$$F_{tr} < F_c$$

$$\mu m g < \frac{m V^2}{R}$$

$$g \mu R < V^2$$

$$V > \sqrt{\mu R g}$$

$$V > 8,57 \left[\frac{m}{s}\right] \checkmark$$

Zadatak 180. Na platformi, koja se obrće stalnom ugaonom brzinom $\omega = 10[\frac{rad}{s}]$, nalazi se telo, mase m= 20[kg], na rastojanju R = 0,5[m] od centra rotacije. Platforma rotira u horizontalnoj ravni. Kolika centrifugalna sila deluje na telo ? Odrediti ugaonu brzinu platforme pri kojoj će telo početi da klizi po njoj ako je koeficjent trenja između tela i podloge $\mu = 0{,}2$.

$$\boxed{\begin{aligned} F_c &= ? \\ \omega' &= ? \end{aligned}}$$

$$F_c = mR\omega^2 = 1000[N]$$

Услов.

$$\boxed{F_{tr} > F_c} \longrightarrow$$

1. Тело стоји на платформи ако су силе које делују на то тело у равнотежи.

$$\mu m g > m(\omega')^2 R$$

2. Ако је $F_c > F_{tr}$ центрифугална сила ће одбацити тело у свом правцу и смеру (избациће га са платформе).

$$\mu g > (\omega')^2 R$$

3. Ако је ω слабо, F_c не може бацити тело, не може га држати, тело онда клизи по плат-форми.

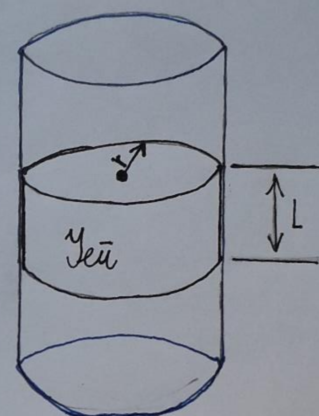
$$\omega' < \sqrt{\frac{\mu g}{R}}$$

$$\omega' < 1{,}98\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Zadatak 182. U dugoj metalnoj cevi, poluprečnika r = 2[cm], nalazi se metalni čep, dužine *l* = 4[cm], koji je postavljen u cev dok je ona imala višu temperature nego čep. Posle hlađenja čep trpi pritisak p = 40[kPa]. Izračunati intenzitet aksijalne sile kojom se čep može izvući. Smatrati da pri ovome ne nastaje trajna deformacija cevi i čepa. Koeficjent trenja između cevi i čepa je μ = 0,3.

Рјешење:

$\boxed{F = ?}$



Аксијално напрезање изазива аксијална сила, која тежи да тело издужи или скрати. Хлађењем металне цеви долази до сабијања њене запремине, самим тим чеп у облику цилиндра трпи притисак P који утиче на његову запремину. Дакле сила F треба да буде интензитета да чеп запремине [redacted] ($r^2\pi L$) која је под притиском P буде извучен. [redacted] Трење између цеви и чепа не смемо занемарити.

$$F > \left(\mu P (r^2\pi L) = 0{,}3\cdot 40\cdot 10^3 \left(2\cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 3{,}1416\cdot 4\cdot 10^{-2}\right)$$

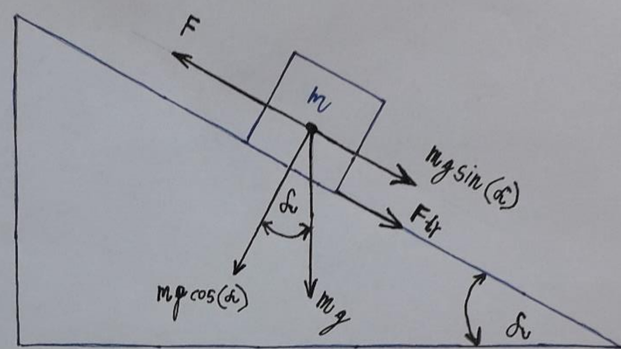
$$F > 0{,}603\,[N]$$

Важно!

Zadatak 184. Da bi se odredio koeficjent trenja između hrastove daske i tela načinjenog od istog materijala, izveden je sledeći ogled. Drvena kocka, mase m = 2[kg], postavi se na dasku čiji se jedan krak diže, pri čemu se obrazuje strma ravan. Tokom dizanja lupka se po dasci čekićem. Kada je ugao strme ravni α = 32°, kocka počne da se kreće ravnomerno niz dasku. Koliki je koeficjent trenja između kocke i daske ?

Рјешење:

$\boxed{\mu = ?}$



(Сила трења уз стрму раван)

$F = ma$

Једначина кретања тела Uz стрму раван је:

$$ma = mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha) \quad /:m$$

$\Delta V = 0 \rightarrow a = 0$ равномерно кретање

$$\mu = \frac{a - g\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)} = \frac{0 - g\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)} = -tg(\alpha)$$ уз стрму раван.

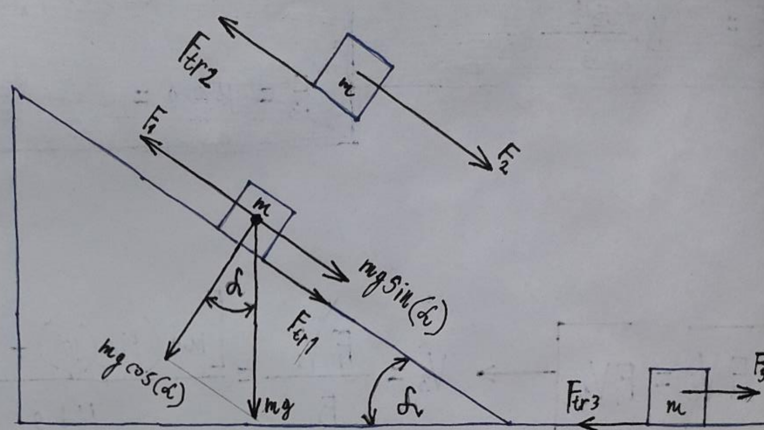
Нама треба NIZ стрму раван па је: $\mu = -\left(-tg(\alpha)\right) = tg(32^\circ) = 0,62$

Zadatak 185. Automobil se kreće uz strmu ravan, nagibnog ugla $\alpha = 10°$, brzinom $V_1 = 6[\frac{m}{s}]$. Pri kretanju niz strmu ravan brzina automobila je $V_2 = 30[\frac{m}{s}]$, uz istu snagu njegovog motora. Kolika će da bude brzina automobila po horizontalnom putu uz iste uslove kretanja ? Pretpostaviti da vučna sila ne zavisi od brzine, kao i da je koeficjent trenja jednak u sva tri slučaja.

(1)

Рјешење:

$\boxed{V_3 = ?}$



• Једначина кретања тела уз стрму раван је:

$$F_1 = mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

• Једначина кретања тела низ стрму раван је:

$$F_2 = mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$$

Запамти. (Колоквијум)

• Када се аутомобил креће равномерно тада је

$$F_3 = \mu mg$$

$$P = F_1 V_1 = F_2 V_2 = F_3 V_3$$

$$\boxed{F_3 V_3 = F_1 V_1} \longrightarrow V_3 = \frac{F_1 V_1}{F_3} = \frac{\left[mg\left(\sin(10^\circ) + \mu \cos(10^\circ)\right)\right] V_1}{\mu m g}$$

$$V_3 = \frac{\left[\sin(10^\circ) + \mu \cos(10^\circ)\right] V_1}{\mu}$$

$$V_3 = 7{,}1 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Због (1) одабрао сам произвољно $(\mu = 1)$ јер задатак по мени није добро постављен.

Zadatak 187. Železnička kompozicija, mase m = 400[t], kreće se po šinama, pri čemu je koeficjent trenja takav da intenzitet sile trenja iznosi 6/1000-ti deo intenziteta sile teže koja deluje na kompoziciju. Koliku će brzinu imati kompozicija ako se na nju deluje silom intenziteta F = 60[kN] tokom vremena Δt = 50[s]. Pretpostaviti da je lokomotiva krenula iz mirovanja.

Rješenje:

$$\boxed{V = ?}$$

$$Q = mg = 400\,000[kg]\;9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 3\,924\,000[N]$$

$$F_{tr} = \mu mg = \frac{6}{1000}Q = 23\,544$$

$$F - F_{tr} = ma$$

[redacted]

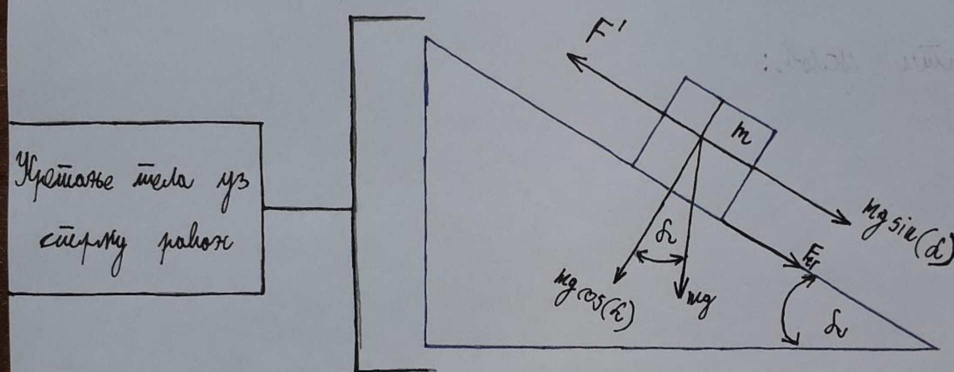
$$a = \frac{F - F_{tr}}{m} = 0{,}09114\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$V = at = 0{,}09114\left[\frac{m}{s^2}\right]50[s] = 4{,}557\left[\frac{m}{s}\right]$$

Zadatak 188. Kameni blok, mase m = 200[kg], nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 15°$. Da bi se blok kretao niz strmu ravan, potrebno je na njega delovati tangencijalnom silom F = 490[N].

a) Koliki je koeficjent trenja između bloka i strme ravni ako je kretanje bloka ravnomerno ?
b) Kolikom silom bi se mogao vući isti blok uz strmu ravan ?

Рјешење:



a) $\boxed{\mu = ?}$ Једначина кретања тела низ стрму раван је:

$$F = mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$$

$$F = mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$$

$$F - mg\sin(\alpha) = -\mu mg\cos(\alpha)$$

$$490 - 200\cdot 9{,}81\cdot \sin(15°) = -\mu mg\cos(\alpha)$$

$$-17{,}8 = -\mu mg\cos(\alpha) \quad / \cdot(-1)$$

$$\mu = \frac{17{,}8}{mg\cos(\alpha)} = \frac{17{,}8}{200\cdot 9{,}81\cdot\cos(15°)}$$

$$= 0{,}009256$$

$$17{,}8\cdot\frac{1}{200\cdot 9{,}81\cdot\cos(15°)} = 17{,}8\cdot\frac{1}{1895}$$

$= 17{,}8\cdot 0{,}00052$ у збирци (мојој верзији збирке Бојко и Димић) има грешка.

$F' = ?$

b Једначина кретања тела уз стрму раван је:

$$F = mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

Да би F' могло вући посматрано тело уз стрму раван потребно је испунити услов:

$$F' > mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

$$F' > mg\left(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\right)$$

$$F' > 200\left[kg\right]\cdot 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]\left(\sin(15^\circ) + 0{,}009526\cos(15^\circ)\right)$$

$$F' > 523\left[N\right]$$

Zadatak 189. Na telo, mase m = 1[kg], deluje stalna vertikalna sila intenziteta F = 10,81[N] sa smerom naviše. Do koje visine će telo dospeti ako na njega deluje ova sila tokom vremena t = 10[s] ?

Рјешење:

$$\boxed{h = ?}$$

$$F = ma$$

$a = \frac{F}{m}$ је убрзање којим се тело креће под дејством силе F.

На тело још поред силе F делује и гравитациона сила, а како се тело креће под дејством сталне силе F гравитациона сила је интензитета једнаког mg. Вектори сила F и g су истог правца, супротног смера па је убрзање система:

$$a_{ук} = a - mg = \frac{F}{m} - mg \approx 1\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$h = \frac{1}{2} a_{ук} t^2 = \frac{1 \cdot 1\left[\frac{m}{s^2}\right] \cdot 100\left[s^2\right]}{2} = 50[m]$$

Zadatak 191. Pod dejstvom sile F telo pređe put s = 30[m] za vreme t = 2[s]. Masa tela je m = 50[g]. Koliki je intenzitet sile ako je telo pošlo iz mirovanja ?

Rješenje:

$\boxed{F = ?}$

$$s = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$30[m] = 0 \cdot 2[s] + \frac{a\,\cancel{4}^{\,2}[s^2]}{\cancel{2}}$$

$$a = 15\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$F = ma = 50 \cdot 10^{-3}[kg] \cdot 15\left[\frac{m}{s^2}\right] = 0{,}75[N] \quad \checkmark$$

Zadatak 192. Lift, mase $m = 600[kg]$, koristi se u rudničkom šahtu, pri čemu je dozvoljeno ubrzanje lifta $a = \pm 1{,}2[\frac{m}{s^2}]$. Kolika je:

a) najveća sila zatezanja užeta,
b) ova sila kada bi bilo $a = g$,
c) sila zatezanja užeta kada lift stoji, a kolika kada se kreće ravnomerno ?

Рјешење: Сила позната као тежина тела.

$\boxed{a}$ $F = ma + mg = m(a+g) = 600[kg] \cdot 11{,}01\left[\frac{m}{s^2}\right] = 6606[N]$

Сила која делује на уже по II Њутновом закону.

$\boxed{b}$ $F = 2mg = 11\,772[N]$

$\boxed{c}$ У оба случаја је:

$F = mg = 5886[N]$

Zadatak 197. Kolikom je silom potrebno delovati na lift mase m = 1000[kg], da bi se on kretao ubrzanjem a = 2[$\frac{m}{s^2}$] ?

Rješenje:

1° Да би се лифт кретао навише потребно је на њега деловати силом F_1, тј:

$$F_1 = mg + ma = m(g+a) = 11\,810\,[N]$$

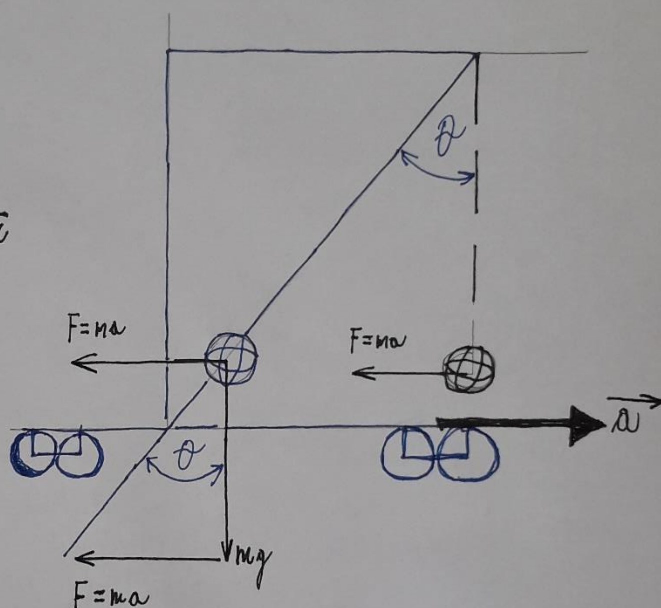
2° Да би се лифт кретао наниже потребно је на њега деловати силом F_2, тј:

$$F_2 = mg - ma = m(g-a) = 7\,810\,[N]$$

Zadatak 198. Matematičko klatno se nalazi u vagonu koji se kreće ubrzanjem α. Kakva je zavisnost ugla otklona klatna Θ (u odnosu na vertikalni pravac) od ubrzanja vagona ?

Рјешење:

$$\boxed{\theta(a) = ?}$$



θ је угао између почетног $\underbrace{\text{положаја}}^{\text{ужета}}$ математичког клатна и положаја тог истог ужета када на математичко клатно делује сила $F=ma$ која је последица кретања вагона убрзањем a.

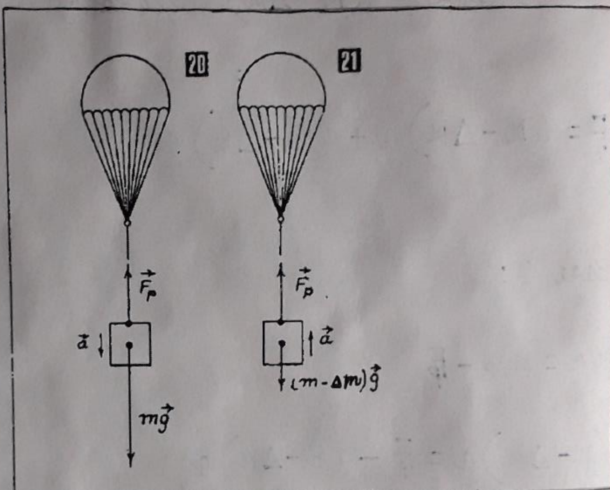
$$\frac{ma}{mg} = tg(\theta)$$

$$\theta = arctg\left(\frac{ma}{mg}\right)$$

Zadatak 199. Vazdušni balon ima na svom donjem delu teret mase $\boldsymbol{m}$. Pod dejstvom potisne sile $\vec{F}_p$ balon sa teretom pada ubrzanjem $\vec{a}$. Izračunati masu tereta Δm koju je potrebno odbaciti iz korpe balona da bi se on kretao nagore ubrzanjem istog intenziteta.

Рјешење: Тежина тела

$\boxed{\Delta m = ?}$



1.° Балон се креће надоле. Инерцијална сила је усмерена супротно од гравитационе. Према томе потисна сила F_p је једнака:

$$F_p = mg - ma$$

$$mg - ma - F_p = 0$$

$$-ma = F_p - mg$$

$$ma = mg - F_p$$

2° Балон се креће нагоре. Инерцијална сила је усмјерена надоле. Гравитациона сила је такође усмерена надоле. Према томе потисна сила (F_p) под чијим дејством се креће балон масе $(m-\Delta m)$ једнака је:

$$F_p = (m-\Delta m)a + (m-\Delta m)g$$

Сада је:

$$ma = mg - F_p$$

$$(m-\Delta m)a = F_p - (m-\Delta m)g$$

$$ma = mg - F_p$$

$$ma - \Delta m a = F_p - mg + \Delta m g$$

$$mg - F_p = F_p - mg + \Delta m(a+g)$$

$$2mg - 2F_p = \Delta m(a+g)$$

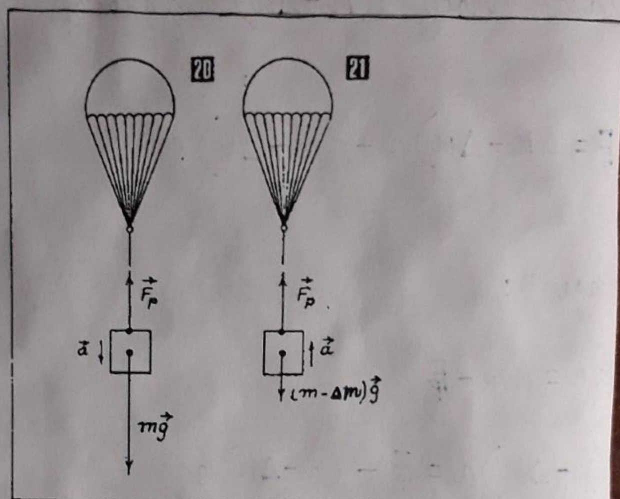
$$\Delta m = \frac{2(mg-F_p)}{a+g} = \frac{2(mg-(mg-ma))}{a+g}$$

$$\Delta m = \frac{2ma}{a+g}$$

Zadatak 199. Vazdušni balon ima na svom donjem delu teret mase m. Pod dejstvom potisne sile $\vec{F}_p$ balon sa teretom pada ubrzanjem $\vec{a}$. Izračunati masu tereta Δm koju je potrebno odbaciti iz korpe balona da bi se on kretao nagore ubrzanjem istog intenziteta.

Рјешење: Тежина тела

$\boxed{\Delta m = ?}$



1° Балон се креће надоле. Инерцијална сила је усмерена супротно од гравитационе. Према томе потисна сила F_p је једнака:

$$F_p = mg - ma$$

$$mg - ma - F_p = 0$$

$$-ma = F_p - mg$$

$$ma = mg - F_p$$

2° Балон се креће нагоре. Инерцијална сила је усмјерена надоле. Гравитациона сила је такође усмерена надоле. Према томе потисна сила (F_p) под чијим дејством се креће балон масе $(m-\Delta m)$ једнака је:

$$F_p = (m-\Delta m)a + (m-\Delta m)g$$

Сада је:

$$ma = mg - F_p$$

$$(m-\Delta m)a = F_p - (m-\Delta m)g$$

$$ma = mg - F_p$$

$$ma - \Delta m a = F_p - mg + \Delta m g$$

$$mg - F_p = F_p - mg + \Delta m(a+g)$$

$$2mg - 2F_p = \Delta m(a+g)$$

$$\Delta m = \frac{2(mg-F_p)}{a+g} = \frac{2(mg-(mg-ma))}{a+g}$$

$$\Delta m = \frac{2ma}{a+g}$$

Zadatak 201. Telo, mase m, bačeno je pod uglom α prema horizontu, početnom brzinom $\vec{V}_0$. Zanemarujući otpor vazduha, odrediti koliki je priraštaj impulsa $\Delta\vec{p}$ telo tokom vremena t od početka kretanja.

Рјешење: Коси хитац (Слика 10). $\boxed{\Delta P = ?}$

Импулс кретања тела масе m, по једначинама косог хитца у скаларном облику је:

$$P(t) = m\left(V_x + V_y(t)\right) = m\left(V_0 \cos(\alpha) + \left(V_0 \sin(\alpha) - gt\right)\right)$$

Сада је:

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{\left(mV_0 \cos(\alpha)\right)'}_{=0} + \underbrace{\left(mV_0 \sin(\alpha)\right)'}_{=0} + \left(-mgt\right)' = -mg$$

Zadatak 201. Telo, mase m, bačeno je pod uglom α prema horizontu, početnom brzinom $\vec{V}_{\circ}$. Zanemarujući otpor vazduha, odrediti koliki je priraštaj impulsa $\Delta\vec{p}$ telo tokom vremena t od početka kretanja.

Рјешење: Коси хитац (Слика 10). $\boxed{\Delta P = ?}$

Импулс кретања тела масе m, по једначинама косог хитца у скаларном облику је:

$$P(t) = m\left(V_x + V_y(t)\right) = m\left(V_0 \cos(\alpha) + \left(V_0 \sin(\alpha) - gt\right)\right)$$

Сада је:

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{\left(m V_0 \cos(\alpha)\right)'}_{=0} + \underbrace{\left(m V_0 \sin(\alpha)\right)'}_{=0} + \left(-mgt\right)' = -mg$$

Zadatak 203. Na telo u mirovanju, mase m, počne da deluje sila intenziteta F = Asin(ωt), gde su A i ω-konstante.

a) Odrediti brzinu tela u funkciji vremena.
b) Koliki put pređe telo za vreme t od početka kretanja ?

Решење:

Приметимо прво да је F функција по времену.

a) $\boxed{V(t) = ?}$

Према II Њутновом закону:

$$F(t) = m\,a(t)$$

$$F(t) = m\frac{dV}{dt}$$

$$m\,dV = A\sin(\omega t)\,dt \;\ldots / \int$$

$$m\int_0^{V(t)} dV = A\int_0^t \sin(\omega t)\,dt$$

$$mV(t) = A\int_0^t \sin(\omega t)\,dt = \boxed{\begin{array}{l} \omega t = y \,/' \\ dt = \frac{dy}{\omega} \end{array}}$$

$$V(t) = \frac{A}{m}\int_0^t \sin(y)\frac{dy}{\omega} =$$

$$\frac{A}{m\omega}\left(-\cos(y)\right)\Big|_0^t =$$

$$\frac{A}{m\omega}\left(-\cos(\omega t)\right)\Big|_0^t =$$

$$\frac{A}{m\omega}\left(1-\cos(\omega t)\right) \quad ✓$$

b

$$\boxed{s = ?}$$

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = V dt \quad \dots / \int$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t V dt$$

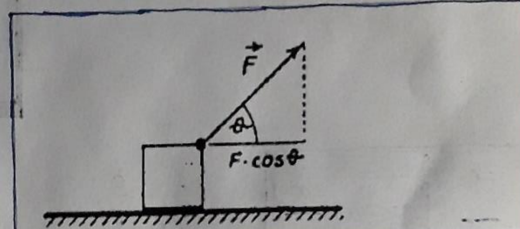
$$s = \int_0^t \frac{A}{m\omega}(1 - \cos(\omega t))\, dt = \frac{A}{m\omega}\left[\int_0^t dt - \int_0^t \cos(\omega t)\, dt\right] =$$

$$\frac{A}{m\omega}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right] = \frac{A(\omega t - \sin(\omega t))}{m\omega^2}$$

Zadatak 204. Na telo, mase m = 1[kg], koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi, deluje sila intenziteta F = $\frac{mg}{2}$. U toku pravolinijskog kretanja tela ugao Θ između pravca dejstva sile i horizontalne podloge menja se po zakonu Θ = $\frac{\pi s}{k}$ gdje je s – pređeni put tela (od početnog položaja), a k = 8[m]. Kolika je brzina tela u trenutku kada je ugao Θ = $\frac{\pi}{2}$[rad] ?

Рјешење:

$\boxed{V = ?}$



$F\cos\theta$ Пројекција вектора $\vec{F}$ на хоризонталу.

Према II Њутновом закону:

$F\cos\theta = ma$ Нама треба релација која садржи непознату V.

$$\frac{mg}{2}\cos\left(\frac{\pi s}{k}\right) = m\frac{dV}{dt}$$

$$2m\,dV = mg\cos\left(\frac{\pi s}{k}\right)dt \quad \dots /:m$$

$$dV = \frac{g}{2}\cos\left(\frac{\pi s}{k}\right)\frac{ds}{V}$$

Идеја. Подешавамо интегралну промењиву.

[redacted] $V\,dV = \frac{g}{2}\cos\left(\frac{\pi s}{k}\right)ds \quad \dots / \int$

$$\int_0^V V\,dV = \frac{g}{2}\int_0^S \cos\left(\frac{\pi s}{x}\right) ds$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{g}{2}\int_0^S \cos\left(\frac{\pi s}{x}\right) ds = \boxed{\begin{array}{c} \frac{\pi}{x} s = y \\ \frac{\pi}{x} ds = dy \\ ds = \frac{x\,dy}{\pi} \end{array}} =$$

[redacted] $$\frac{g}{2}\int_0^S \cos(y)\,\frac{x}{\pi}\,dy = \frac{xg}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{x}\right)\Big|_0^S =$$

$$\frac{gx\sin\left(\frac{\pi s}{x}\right)}{2\pi} = \frac{V^2}{2} \rightarrow V = \sqrt{\frac{gx\sin\left(\frac{\pi S}{x}\right)}{\pi}}$$

[redacted]

Kada je $\theta = \frac{\pi}{2}\,[rad]$ tada je $V = \sqrt{\frac{gx}{\pi}} \approx 5\left[\frac{m}{s}\right]$

[redacted]

Zadatak 205. Na telo u mirovanju, mase m = 1[kg], počne da deluje sila čiji se intenzitet menja sa vremenom po zakonu $F = kt^2$, gdje je $k = 10[\frac{N}{s^2}]$. Sila deluje na telo tokom vremena t = 3[s].

a) Koliki je impuls tela posle prestanka dejstva sile ?
b) Koliki put pređe telo za vreme dejstva sile ?

Рјешење:

а)

$\boxed{P = ?}$ Према II Њутновом закону је:

$$F = ma$$

$$\kappa t^2 = m\frac{dV}{dt}$$

$$m\,dV = \kappa t^2 dt$$

[redacted] $$m\int_0^V dV = \kappa\int_0^t t^2 dt$$

$$mV\Big|_0^V = \kappa\frac{t^3}{3}\Big|_0^t$$

$$mV = P = \frac{\kappa t^3}{3}$$

За $t = 3[s]$ имамо да је $P = \dfrac{10\left[\frac{N}{s^2}\right]\cdot 27\left[s^3\right]}{3} = 90\left[Ns\right]$

b

$s = ?$

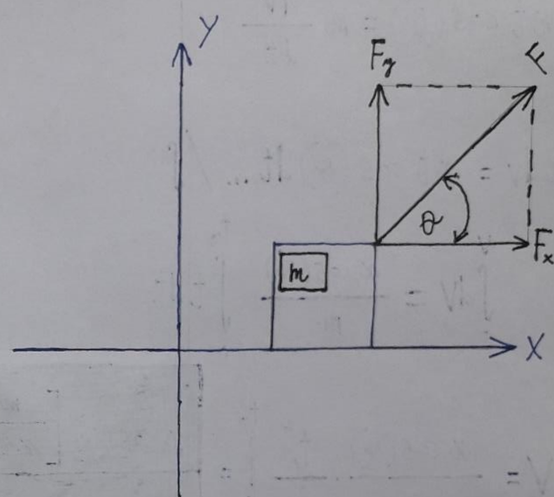
$$s = \int_0^t V dt = \int_0^t \frac{\varkappa t^3}{3m} dt = \frac{\varkappa t^4}{12\, m} = \frac{10\,[N/s^2]\;81\,[s^4]}{12 \cdot 1\,[kg]} = 67{,}5\,[m]$$

Zadatak 206. Na malo telo, mase m, koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi, u trenutku t = 0 počne da deluje sila $\vec{F}$, čiji se intenzitet menja tokom vremena po zakonu F = kt, gde je k-konstanta. Pravac sile $\vec{F}$ je stalan i zaklapa ugao Θ prema horizontalnoj ravni.

a) Kolika je brzina tela u trenutku kada ono napušta podlogu ?
b) Koliki put pređe telo do tog trenutka ?

Решење:

а) $V = ?$



$$F_x = F\cos(\theta) = \varkappa t\cos(\theta)$$

$$F_y = F\sin\theta = \varkappa t\sin(\theta)$$

Тело ће да се одвоји од подлоге после времена t_0, када је

$$F_y = mg$$

$$\boxed{\varkappa t_0 \sin(\theta) = mg} \rightarrow \quad t_0 = \frac{mg}{\varkappa \sin(\theta)}$$

У временском тренутку t_0 математички је испуњен услов $F_y = mg$ али са физичког аспекта гледања у временском тренутку t_0 тело је мало одвојено од подлоге што значи да $\forall t > t_0$

 тело је већ увелико одвојено од подлоге. Нас интересује

Брзина тела у временском тренутку t_0. Према II Њутновом закону је:

$$F_x = ma$$

$$\varkappa t \cos(\theta) = m \frac{dv}{dt}$$

$$m\,dv = \varkappa t \cos(\theta)\, dt \ldots / \int$$

$$\int_0^{v} dv = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \int_0^{t_0} t\, dt$$

$$v = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_0} =$$ [redacted] $$=$$

$$\frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{\left(\frac{-mg}{\varkappa \sin(\theta)}\right)^2}{2} = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{m^2 g^2}{2\varkappa^2 \sin^2(\theta)} =$$ [redacted]

$$= \frac{m g^2 \cos(\theta)}{2 \varkappa \sin^2(\theta)}$$

$\boxed{b}$ $s = ?$

$ds = V dt$

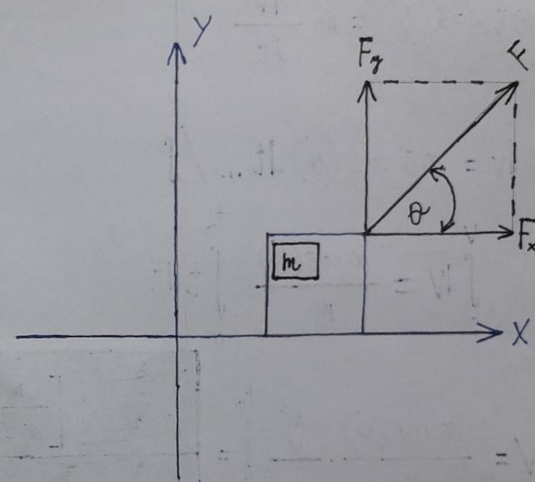
$$\int_0^s ds = \int_0^{t_0} \frac{m g^2 \cos(\vartheta)}{2 \varkappa \sin^2(\vartheta)} dt = \frac{m g^2 \cos(\vartheta)}{2 \varkappa \sin^2(\vartheta)} \cdot \frac{m g}{\varkappa \sin(\vartheta)} = \frac{m^2 g^3 \cos(\vartheta)}{2 \varkappa^2 \sin^3(\vartheta)}$$

Zadatak 206. Na malo telo, mase m, koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi, u trenutku t = 0 počne da deluje sila $\vec{F}$, čiji se intenzitet menja tokom vremena po zakonu F = kt, gde je k-konstanta. Pravac sile $\vec{F}$ je stalan i zaklapa ugao Θ prema horizontalnoj ravni.

a) Kolika je brzina tela u trenutku kada ono napušta podlogu ?
b) Koliki put pređe telo do tog trenutka ?

Решење:

а) $V = ?$



$$F_x = F\cos(\theta) = kt\cos(\theta)$$

$$F_y = F\sin\theta = kt\sin(\theta)$$

Тело ће да се одвоји од подлоге после времена t_0, када је

$$F_y = mg$$

$$\boxed{kt_0 \sin(\theta) = mg} \rightarrow t_0 = \frac{mg}{k\sin(\theta)}$$

У временском тренутку t_0 математички је испуњен услов $F_y = mg$ али са физичког аспекта гледања у временском тренутку t_0 тело је мало одвојено од подлоге што значи да $\forall t > t_0$ тело је већ увелико одвојено од подлоге. Нас интересује

Брзина тела у временском тренутку t_0. Према II Њутновом закону је:

$$F_x = ma$$

$$\varkappa t \cos(\theta) = m \frac{dv}{dt}$$

$$m\,dv = \varkappa t \cos(\theta)\,dt \ldots /\int$$

$$\int_0^v dv = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \int_0^{t_0} t\,dt$$

$$v = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_0} =$$ [redacted] $$=$$

$$\frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{\left(\frac{-mg}{\varkappa \sin(\theta)}\right)^2}{2} = \frac{\varkappa \cos(\theta)}{m} \cdot \frac{m^2 g^2}{2\varkappa^2 \sin^2(\theta)} =$$ [redacted]

$$= \frac{m g^2 \cos(\theta)}{2\varkappa \sin^2(\theta)}$$

b | $s = ?$

$$ds = V dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^{t_0} \frac{m g^2 \cos(\theta)}{2 \varkappa \sin^2(\theta)} dt = \frac{m g^2 \cos(\theta)}{2 \varkappa \sin^2(\theta)} \cdot \frac{m g}{\varkappa \sin(\theta)} = \frac{m^2 g^3 \cos(\theta)}{2 \varkappa^2 \sin^3(\theta)}$$

Zadatak 207. Čamac, mase m, kreče se po jezeru brzinom V_0 i jednog trenutka se isključi njegov motor. Ako je intenzitet otporne sile pri kretanju čamca srazmeran njegovoj brzini, tj. $F_{ot} = -kv$, gde je k-konstanta, odrediti:

a) vreme kretanja čamca, do zaustavljanja,
b) brzinu čamca, u funkciji pređenog puta,
c) pređeni put čamca do zaustavljanja.

$\boxed{a}$ $t = ?$

$$ma = F_{ot}$$

$$m\frac{dV}{dt} = -\varkappa V$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\varkappa}{m}\,dt \quad \ldots \int_{V_0 = \text{почетна speed}}^{0 = \text{стање мировања}}$$

$$\int_{V_0}^{0}\frac{dV}{V} = -\frac{\varkappa}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln|V|\Big|_{V_0}^{0} = \frac{-\varkappa t}{m}$$

$\ln(0) = \text{error}$; Занемаримо га

$$\ln|V_0| = \ln(V_0) = \frac{-\varkappa t}{m}$$

$$t = \frac{m\ln(V_0)}{-\varkappa} \iff \boxed{t = \infty}$$

Док год се планета Земља окреће око своје осе, чамац ће имати неку брзину што значи да брзина чамца никад неће бити $= 0$.

$\boxed{b}$ $V_s = ? = V(s)$

$$m\overbrace{\frac{dV}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=V}}^{=a} = -\varkappa V$$

$$\frac{dV}{ds}V = \frac{-\varkappa}{m}V \quad \ldots /:V$$

$$dV = \frac{-\varkappa}{m}\,ds \quad \ldots /\int$$

$$\int_{V_0}^{V_s} dV = \frac{-\varkappa}{m}\int_0^s ds$$

$$V_s - V_0 = \frac{-\varkappa s}{m}$$

$$V(s) = V_s = V_0 - \frac{\varkappa s}{m}$$

[redacted]

$$\ln(V_0) = \frac{-xt}{m}$$

[redacted] $V_0 = e^{\frac{-xt}{m}}$

$$t = \frac{\frac{-xtm}{m}}{-x} = t$$

$$V = V_0 t = t e^{\frac{-xt}{m}}$$

$\boxed{C}$ $S = ?$

$$S = \int_0^{t=\infty} V(t)\,dt = V_0 \frac{m}{x}$$

Zadatak 208. Prilikom probijanja grede, debljine D = 5[cm], brzina metka se smanji od $V_0 = 350[\frac{m}{s}]$ na $V_1 = 250[\frac{m}{s}]$. Otporna sila pri kretanju metka kroz gredu je $F = -kV^2$, tj. proporcionalna je kvadratu brzine metka, gdje je k-konstanta.

a) Ustanoviti zavisnost brzine metka od pređenog puta u gredi ako je masa metka m.
b) Koliko je vreme kretanja metka kroz gredu ?

Рјешење: (1) Према II Њутновом закону:

a $\boxed{V_s = V_s(t) = ?}$

$F = ma$ (1)

$$-\kappa V^2 = m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} =$$

$$-\kappa V^2 = m\frac{dv}{ds}V \quad .../:V$$

$$-\kappa V = \frac{m\,dV}{ds}$$

$$m\,dV = -\kappa V ds \quad ... /:V$$

[redacted]

[redacted]

$$\frac{dV}{V} = \frac{-\kappa}{m}ds \quad .../\int$$

[redacted]

$$\int_{V_0}^{V_s}\frac{dV}{V} = \frac{-\kappa}{m}\int_0^s ds$$

[redacted]

$$\ln(V_s) - \ln(V_0) = \frac{-\kappa s}{m}$$

$$\ln\left(\frac{V_s}{V_0}\right) = \frac{-\varkappa s}{m}$$

$$\frac{V_s}{V_0} = e^{\frac{-\varkappa s}{m}}$$

$$V(s) = V_0\, e^{\frac{-\varkappa s}{m}} \quad \checkmark$$

$\boxed{b}$ $\boxed{t = ?}$

$$V(s) = \frac{ds}{dt}$$

$$V(s)\,dt = ds$$

$$V_0\, e^{\frac{-\varkappa s}{m}}\, dt = ds \ldots / \cdot\, e^{\frac{\varkappa s}{m}}$$

$$V_0\, dt = e^{\frac{\varkappa s}{m}}\, ds \ldots / \int$$

$$V_0 \int_{t_0=0}^{t} dt = \int_0^D e^{\frac{\varkappa s}{m}}\, ds$$

$$V_0 t = \int_0^D e^{\frac{\varkappa s}{m}}\, ds =$$

$$\frac{\varkappa s}{m} = y \,/'$$

$$\frac{\varkappa}{m}\, ds = dy$$

$$ds = \frac{m\, dy}{\varkappa}$$

$$\int_0^D e^{y}\, \frac{m}{\varkappa}\, dy =$$

$$\frac{m}{\varkappa} \int_0^D e^{y}\, dy$$

$$= \frac{m\, e^{\frac{\varkappa s}{m}}}{\varkappa} \Bigg|_0^D = \frac{m\, e^{\frac{\varkappa D}{m}} - m\, e^{0}}{\varkappa}$$

$$t = \frac{m\left(e^{\frac{\varkappa D}{m}} - 1\right)}{V_0\, \varkappa} \quad \checkmark$$

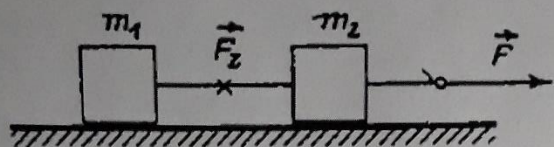
Zadatak 210. Dva tela, mase m_1 = 10[kg] i m_2 = 20[kg] vezana su užetom i postavljena na horizontalnu podlogu. Ako se telo mase m_2 vuče silom intenziteta F = 20 [N], kolika je sila zatezanja užeta,a koliko ubrzanje sistema ?

Рјешење:

$F_z = ?$

$a = ?$

25



210. Prema II Njutnovom zakonu je **25**

$$m_2a = F - F_z$$
$$m_1a = F_z$$

pa je ubrzanje sistema

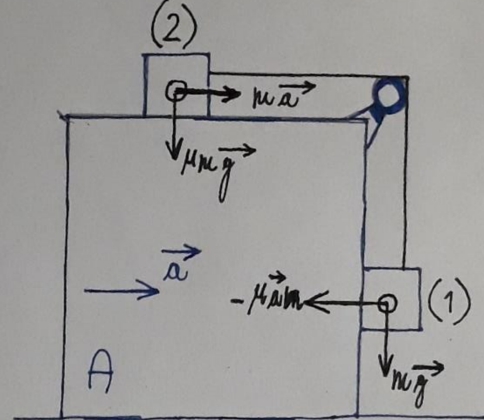
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

a intenzitet sile zatezanja užeta $F_z = 6{,}67$ N.

Zadatak 212. Kojim minimalnim ubrzanjem treba da se kreće u horizontalnom pravcu telo A pod uslovom da se tela (1) i (2) ne kreću u odnosu na njega ? Masa tela (1) i (2) su međusobno jednake a koeficjent trenja između tela (1) i (2) i tela A iznosi μ.

Рјешење:

$\boxed{a = ?}$



Сила којом тело (1) затеже конопу о којем виси.

Према II Њутновом закону.

$$\underbrace{mg - \mu a m}_{} = \underbrace{ma + \mu m g}_{}$$

Сила којом тело (1) притишће подлогу

Сила којом тело (2) притишће подлогу.

$$ma + \mu m a = \mu m g - mg$$

$$ma(1+\mu) = mg(\mu - 1)$$

$$a = \frac{g(\mu - 1)}{\mu + 1}$$

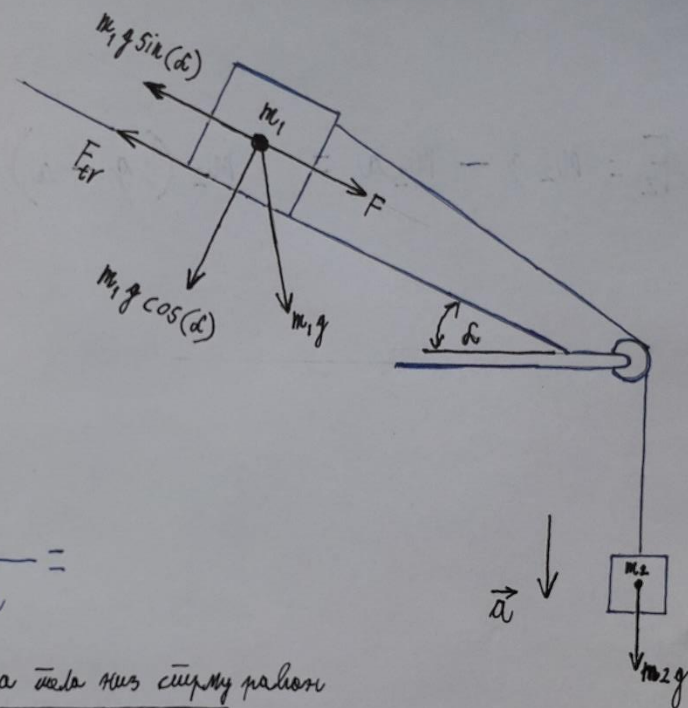
Zadatak 213. U sistemu prikazanom na slici mase tela su $m_1 = 10[kg]$ i $m_2 = 5[kg]$. Koeficjent trenja između tela mase m_1 i podloge iznosi $\mu = 0,2$, dok je naznačeni ugao $\alpha = 30°$.

a) Koliko je ubrzanje sistema ?

b) Kolika je sila zatezanja užeta ?

Рјешење:

$\boxed{a}$ $a = ?$



[redacted]

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} =$$

$$\frac{m_2 g + \underbrace{\left[m_1 g \sin(\alpha) - \mu m_1 g \cos(\alpha)\right]}^{\text{Једначина кретања тела низ стрму раван}}}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{5[kg] \cdot 9{,}81[m/s^2] + \left[10[kg]\, 9{,}81[m/s^2] \sin(30°) - (0{,}2)\, 10[kg]\, 9{,}81[m/s^2] \cos(30°)\right]}{15[kg]} =$$

$$5{,}4\left[\frac{m}{s^2}\right] \checkmark$$

b | Тежина тела II

$$F_z = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) = 22,05 \, [N]$$

Zadatak 214. Telo klizi niz strmu ravan nagibnog ugla $\alpha = 30°$ i dužine $l = 30[m]$. Koeficjent trenja između tela i podloge je $\mu = 0,17$.

a) Za koje vreme će telo da pređe put l ?
b) Kolika je brzina tela pri napuštanju strme ravni ?

Рјешење:

$\boxed{a}$ $t = ?$

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)}{m} = g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha) =$$

$$g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) \approx 3,46\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$L = \overbrace{V_0 t}^{0 \cdot t = 0} + \frac{1}{2}at^2$$

... Стрма раван низ коју тело клизи је праволинијска путања.

$$2L = at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \approx 4,2[s]$$

b $V = ?$

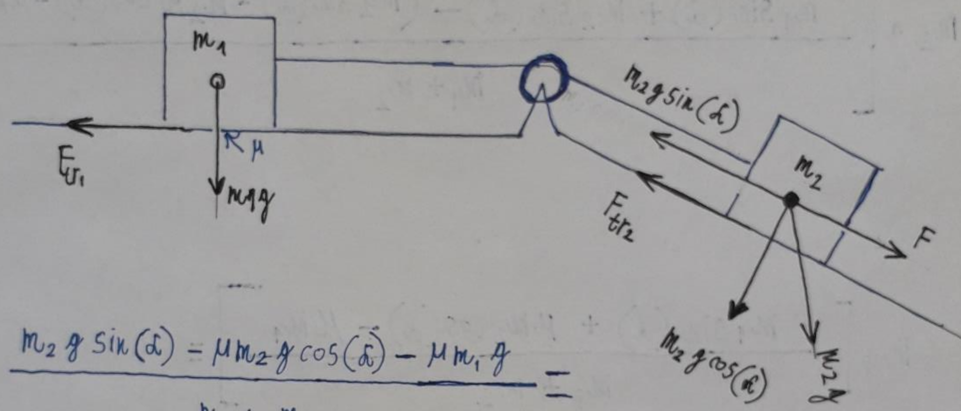
$V = at \cong 14{,}4 \left[\frac{m}{s}\right]$ ✓

Zadatak 215. Dva tela, mase m_1 i m_2, vezana su užetom postavljena na podlogu. Koeficjent trenja između tela i podloge je μ. Kolika je sila zatezanja užeta, a koliko ubrzanje sistema ?

Рјешење:

$a = ?$

$F_z = ?$



$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{m_2 g \sin(\alpha) - \mu m_2 g \cos(\alpha) - \mu m_1 g}{m_1 + m_2} =$$

[redacted]

$$= \frac{g\left[m_2 \sin(\alpha) - \mu m_2 \cos(\alpha) - \mu m_1\right]}{m_1 + m_2}$$

Једначина кретања тело низ стрму раван (за тело m_2) + трење (за тело m_1).

Сила која вуче уже (по II Њутновом закону)

$$F_z = m_2 g \sin(\alpha) - a m_2$$

Сила која вуче уже у супротном смеру од силе $F = a m_2$.

Са слике видимо да на уже делују 2 силе, а то су $F = a m_2$ и $m_2 g \sin(\alpha)$.

$$F_z = m_2 g\left[\sin(\alpha) - \frac{m_2\sin(\alpha) - m_2\mu\cos(\alpha) - \mu m_1}{m_1+m_2}\right] =$$

$$m_2 g\left[\frac{m_1\sin(\alpha)+m_2\sin(\alpha) - (m_2\sin(\alpha) - m_2\mu\cos(\alpha)-\mu m_1)}{m_1+m_2}\right]=$$

$$mg\left[\frac{m_1\sin(\alpha)+\mu m_2\cos(\alpha)+\mu m_1}{m_1+m_2}\right]=$$

[redacted]

$$\frac{mg\left(m_1\left(\sin(\alpha)+\mu\right)+\mu m_2\cos(\alpha)\right)}{m_1+m_2}$$ у односу на m_2.

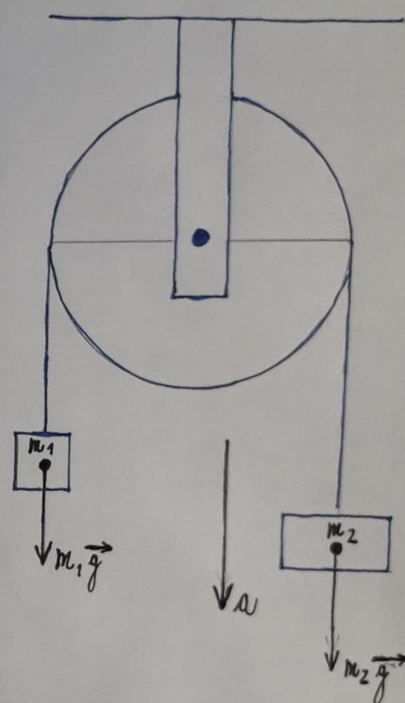
Напомена:

F_z зависи од тога да ли рачунамо у односу на m_1 или на m_2.

Zadatak 216. Na krajeve užeta, prebačenog preko pokretnog kotura, obešena su dva tela, čije su mase m_1 = 200g i m_2 = 300g. Masa kotura se može zanemariti. Koliko je ubrzanje sistema ?

$$\boxed{a = ?}$$

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2} = 1{,}962 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$



Оба тела својом тежином делују на уже. Тело [redacted] масе m_2 вуче уже, а тело масе [redacted] m_1 му отежава посао.

Zadatak 218. Na strmoj ravni, nagibnog ugla $\alpha = 30°$, nalazi se telo mase $m = 500[kg]$. Koeficjent trenja između tela i podloge je $\mu = 0,1$. Telo se gurne niz strmu ravan brzinom $V_0 = 2\ [\frac{m}{s}]$. Kolikom tangencijalnom silom F treba delovati na telo da bi se ono zaustavilo posle vremena $t_0 = 5[s]$?

Рјешење:

$$\boxed{F_t = ?}$$

Да би се тело масе m које се креће низ стрму раван нагибног угла α зауставило после времена t_0 потребно је да све силе које делују на посматрано тело у временском тренутку t_0 буду у равнотежи.

Сила која треба да заустави кретање

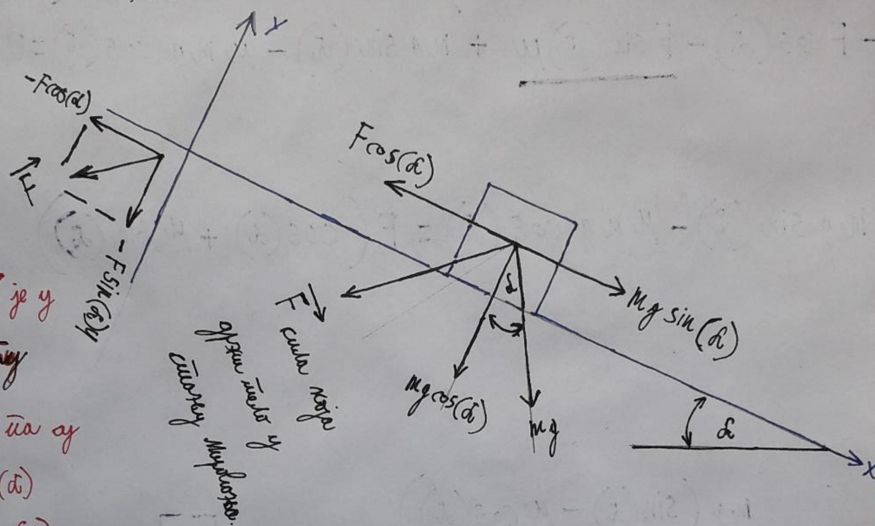
$$mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha) + ma - F_t = 0$$

Једначина кретања тела низ стрму раван + убрзање тела масе m (природно по II Њутновом закону)

$$F_t = mg\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right) + m\frac{V_0}{t_0} \approx 2228\ [N]$$

Zadatak 219. Telo, mase m = 2[kg], nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla α = 30°. Koeficjent trenja između tela i strme ravni je μ = 0,2. Kolikom najmanjom horizontalnom silom treba delovati na telo da bi ono mirovalo na strmoj ravni ?

$\boxed{F = ?}$



Вектор $\vec{F}$ је у III квадранту

xy-равни па су

$F_x = -F\cos(\alpha)$

$F_y = -F\sin(\alpha)$

Ако желимо да тело остане у стању мировања све силе које делују на тело [redacted] морају бити у равнотежи.

[redacted]

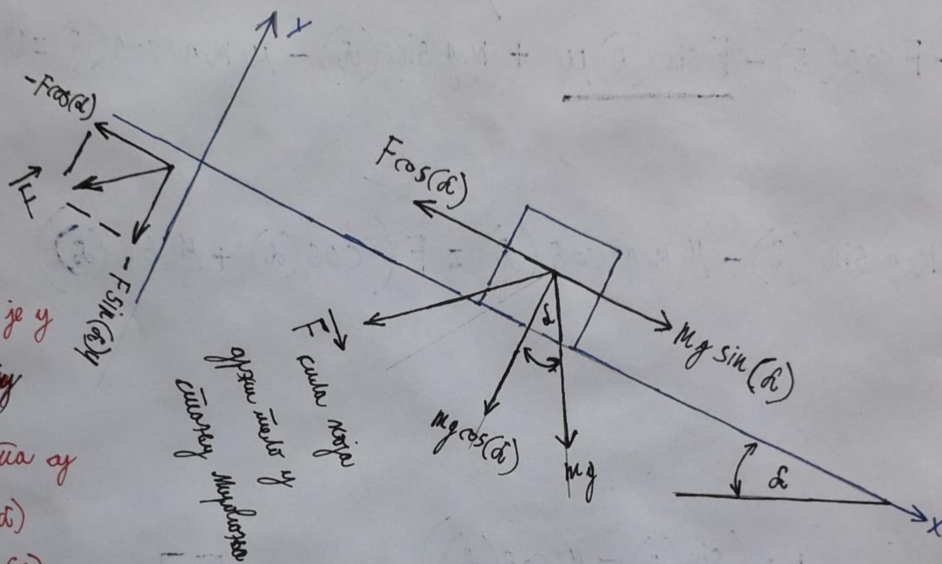
[redacted]

$$-F\cos(\alpha) - \underline{F\sin(\alpha)\mu} + \overbrace{mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)}^{\text{Јед. кретања тела низ стрму равни.}} = 0$$

$$mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha) = F\left(\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)\right)$$

$$F = \frac{mg\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right)}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)} = 6{,}67\,[\mathrm{N}]$$

Zadatak 219. Telo, mase m = 2[kg], nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla α = 30°. Koeficjent trenja između tela i strme ravni je μ = 0,2. Kolikom najmanjom horizontalnom silom treba delovati na telo da bi ono mirovalo na strmoj ravni ?



Решење:

$\boxed{F = ?}$

Вектор $\vec{F}$ је у III квадранту xy-равни па су

$F_x = -F\cos(\alpha)$

$F_y = -F\sin(\alpha)$

Ако желимо да тело остане у стању мировања све силе које делују на тело [redacted] морају бити у равнотежи.

[redacted]

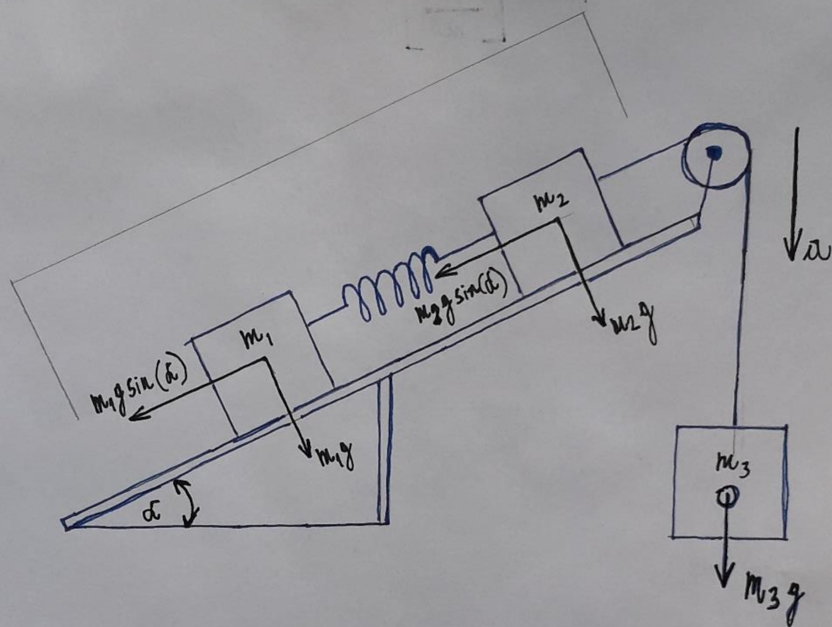
$$-F\cos(\alpha) - \underline{F\sin(\alpha)\mu} + \overbrace{mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)}^{\text{Јед. кретања тела низ стрму раван.}} = 0$$

$$mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha) = F\left(\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)\right)$$

$$F = \frac{mg\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right)}{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)} \doteq 6{,}67\,[\mathrm{N}]$$

Zadatak 220. Tri tela, mase $m_1 = 3[kg]$, $m_2 = 2[kg]$ i $m_3 = 5[kg]$, postavljena su na strmu ravan. Prvo i drugo telo vezani su oprugom koeficjenta krutosti $k = 1\ [\frac{kN}{m}]$,dok su drugo i treće telo vezani užetom koje je prebačeno preko kotura. Ugao strme ravni je $\alpha = 30°$. Koliko je izduženje opruge tokom kretanja ovog sistema ? Trenje zanemariti.

Рјешење:



$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{m_3 g - m_1 g \sin(\alpha) - m_2 g \sin(\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{g\left(m_3 - \sin(\alpha)(m_1 + m_2)\right)}{10} =$$

$2,4525 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ је тражено убрзање система.

$F_z = -m_1 g \sin(\alpha) - m_1 a = -22,07\ [N]$ је сила затезања опруге.

Предзнак (-) јер ако затежемо опругу тело масе m_1 вучемо у смеру супротном од убрзања система.

$$F = -\kappa X$$

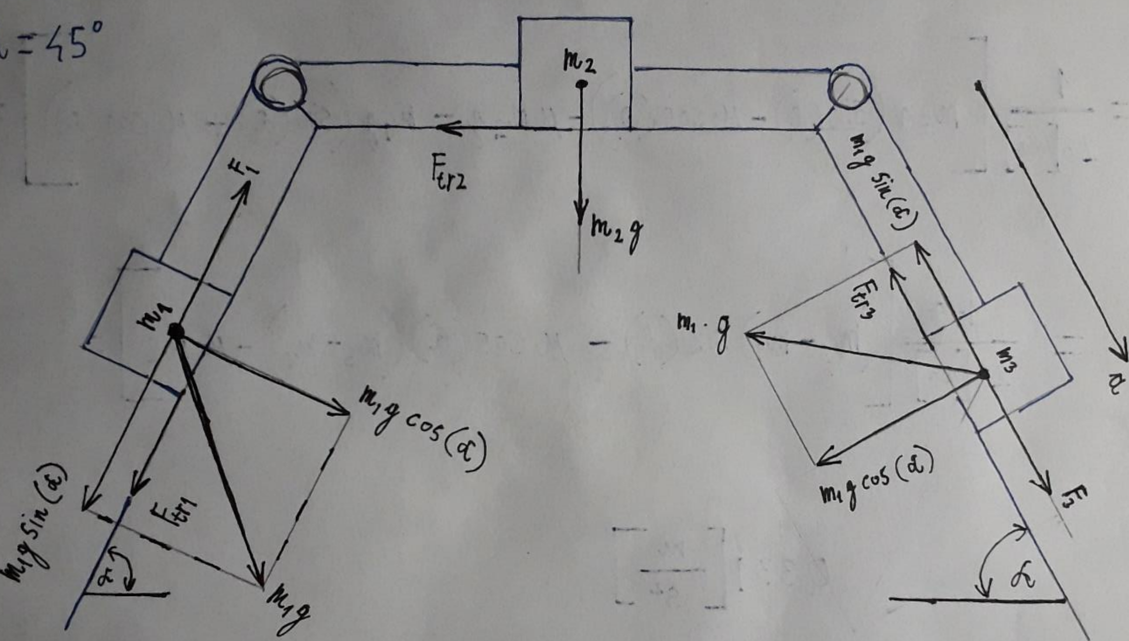
$$X = \frac{-F}{\kappa} = \frac{-(-22{,}07\,[N])}{1000\left[\frac{N}{m}\right]} = 0{,}02207\,[m]$$

Zadatak 221. Tri tela, mase $m_1 = 4[kg]$, $m_2 = 16[kg]$ i $m_3 = 8[kg]$, vezana su užetom i postavljena na podlogu prikazanu na slici. Koeficjent trenja između tela i podloge iznosi μ 0,1. Odrediti smer kretanja sistema i njegovo ubrzanje.

Рјешење:

$\boxed{a = ?}$

$\alpha = 45°$



Тело масе m_3 креће се по закону "Једначина кретања тела низ стрму раван" у смјеру убрзања система.

Тело масе m_2 креће се по закону "Тежина тела", због трења ово тело успорава систем.

Тело масе m_1 креће се по закону "Једначина кретања тела уз стрму раван", због трења ово тело успорава систем.

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{\left[m_3 g \sin(\alpha) - m_3 g \mu \cos(\alpha)\right] - \mu m_2 g - \left[m_1 g \sin(\alpha) + \overset{\mu}{m_1} g \cos(\alpha)\right]}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{1}{28[kg]}\left[m_3 g\left(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)\right) - \mu m_2 g = m_1 g\left(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)\right)\right] =$$

$$= \frac{1 \cdot g}{28[kg]}\left[(m_3 - m_1)\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)(m_3 - m_1) - \mu m_2\right] =$$

$$0,331\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Смер вектора $\vec{a}$ нацртан

је на слици.

Zadatak 222. U sistemu prikazanom na slici, kreće se po strmoj ravni, nagibnog ugla α telo, mase m1. Ako je koeficjent trenja između tela i strme ravni μ odrediti :

a) ubrzanje tela mase m2,
b) silu zatezanja užeta na kome visi telo mase m2,
c) otpor oslonca A.

Рјешење:

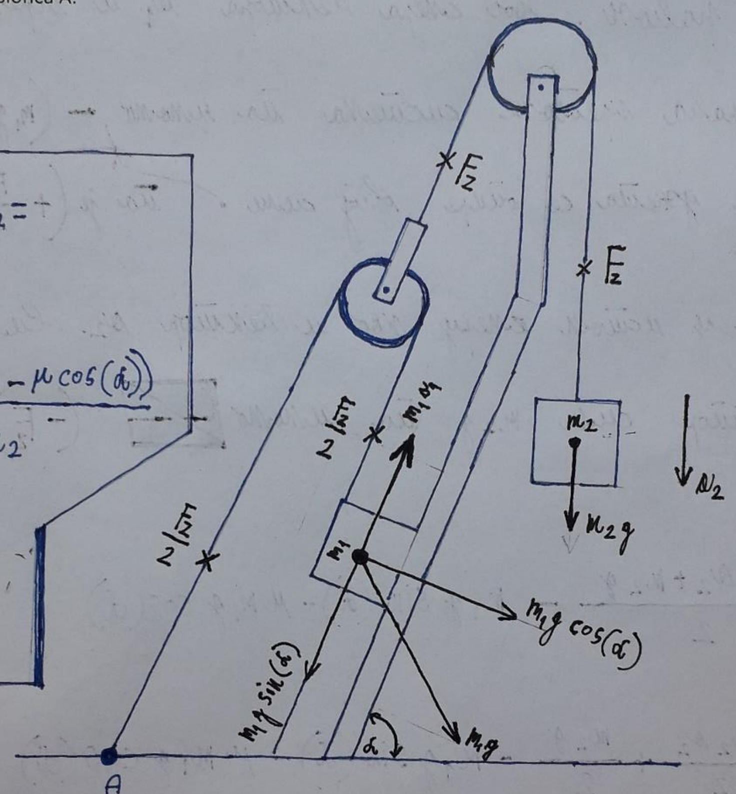
b $F_z = m_2 g - m_2 a_2 =$

$m_2 (g - a_2) =$

$$\frac{g m_1 m_2 (4 - \sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha))}{4m_1 + m_2}$$

c $F_A = F_z / 2$

139.



a $a_2 = ?$

Из II Њутновог закона:

$$m_1 a_1 = \frac{F_z}{2} - \left[m_1 g \sin(\alpha) + m_1 g \cos(\alpha) \mu \right] \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_z \quad (2)$$

138. Знамо да је $(a_1 = 2 a_2)$. $-F_z = m_2 a_2 - m_2 g$ [redacted]

[redacted]

① Тело масе m_1 се креће по закону "Једначина кретања тела уз стрму раван". Због смера вектора a_1 и трења ово тело успорава кретање система по много $-\left(m_1 g \sin(\alpha) + \mu m_1 g \cos(\alpha)\right)$ а затезање ужета се опире овој сили. па је $\left(+\frac{F_z}{2}\right)$.

② $m_2 g$ је у истом смеру као и вектор a_2. Сила затезања пружа отпор сили $m_2 g$ па много [redacted] $(-F_z)$.

$$m_1 a_1 = \frac{-m_2 a_2 + m_2 g}{2} - m_1 g \sin(\alpha) - \mu m_1 g \cos(\alpha)$$

$$m_1 2 a_2 = \frac{-m_2 a_2}{2} + \frac{m_2 g}{2} - m_1 g \sin(\alpha) - \mu m_1 g \cos(\alpha) \quad / \cdot 2$$

$$4 m_1 a_2 = -m_2 a_2 + m_2 g - m_1 g \left(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)\right)$$

[redacted]

$$a_2 (4 m_1 + m_2) = m_2 g - m_1 \left(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)\right) g$$

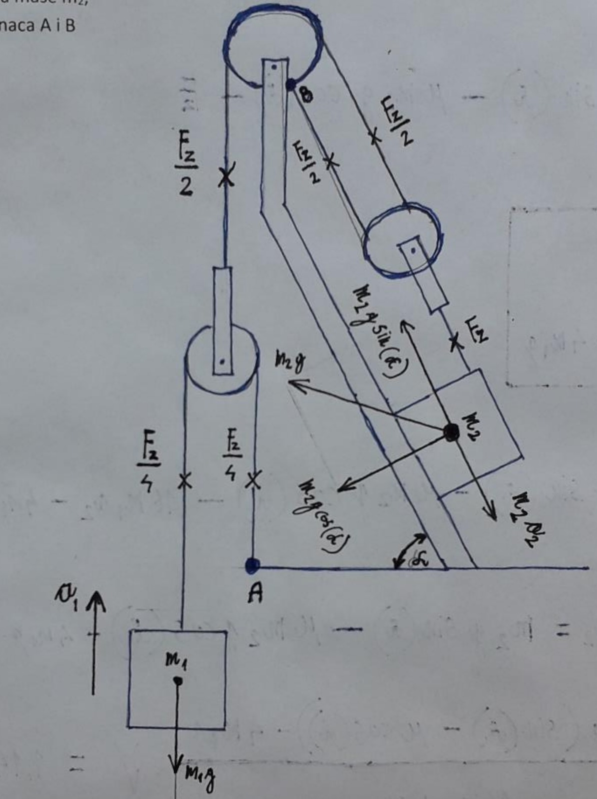
$$a_2 = \frac{g\left[m_2 - m_1 \sin(\alpha) - \mu m_1 \cos(\alpha)\right]}{4 m_1 + m_2} \quad \checkmark$$

Код a_2 уврстимо у ② добијамо решење под $\boxed{b}$

Zadatak 224. Telo, mase $m_1 = 1[kg]$, kreće se naviše jer ga povlači telo, mase $m_2 = 9[kg]$, koje klizi niz strmu ravan nagibno ugla $\alpha = 60°$. Koeficjent trenja između tela mase m_2 i strme ravni je $\mu = 0,2$. Zanemarujući masu koturača i užeta, odrediti:

a) ubrzanje tela mase m_2,
b) otpore oslonaca A i B

Rješenje:



[redacted]

a $a_2 = ?$

Према II Њутновом закону:

$$m_1 a_1 = \frac{F_z}{4} - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin(\alpha) - \mu m_2 g \cos(\alpha) - F_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= 4 a_2 \\ F_z &= 16 m_1 a_2 + 4 m_1 g \end{aligned}}$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin(\alpha) - \mu m_2 g \cos(\alpha) - 16 m_1 a_2 - 4 m_1 g$$

$$m_2 a_2 + 16 m_1 a_2 = m_2 g \sin(\alpha) - \mu m_2 g \cos(\alpha) - 4 m_1 g$$

$$a_2 = \frac{m_2 g \left(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)\right) - 4 m_1 g}{16 m_1 + m_2} \checkmark = 1{,}14 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

b

$$F_A = \frac{F_z}{4} = \frac{16 m_1 a_2 + 4 m_1 g}{4} = 14{,}37 \, [N]$$

$$F_B = \frac{F_z}{2} = 2 F_A = 28{,}74 \, [N]$$

Молекулско - кинетичка теорија. Термодинамика

· Важне (често коришћене) формуле

$\boxed{1.}$ $n = \frac{N}{N_A} [mol]$ [redacted] је формула за рачунање количине супстанце (неки гас, течност...), при чему је:

N = број молекула система (супстанце)

$N_A = 6{,}0247 \cdot 10^{23} [1/mol]$ Авогадрова константа

$\boxed{2.}$ $n = \frac{m N}{m_0 N_A} = \frac{m}{M} [mol]$ је формула за рачунање количине супстанце, при чему је:

m = маса посматране количине супстанце (нпр. маса неког гаса заробљеног у некој посуди...), мјерна јединица за масу $[m] = kg$.

N = број молекула посматраног система (супстанце), $N \in \mathbb{N}$.

m_0 = маса једног молекула посматране супстанце, $[m_0] = kg$

$N_A = 6{,}0247 \cdot 10^{23} [1/mol]$ Авогадрова константа.

M = моларна маса посматране количине супстанце, $[M] = \frac{kg}{mol}$.

$\boxed{3.}$ $V_m = \frac{V}{n} [m^3/mol]$ је формула за моларну запремину количине супстанције n запремине V.

4. Ако у тексту постављеног задатка пише на стандардним условима то се мисли на ово T и P.

$T^{\circ} = 273{,}15\,[K]$
$P^{\circ} = 101\,325\,[Pa]$ — За-пам-ти
$V_m^{\circ} = 0{,}022\,414\,[m^3/mol]$

→ Идеалан гас на стандардним условима

5. $N_m = \frac{N}{n}\,[1/mol]$ је израз за моларни број количине супстанције n од N молекула. За идеалан гас на стандардним условима је $N_m = N_A = 6{,}0247\,[1/mol]$ Авогадров број.

6. $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\,[m/s]$ је формула за средњу квадратну брзину молекула идеалног гаса, при чему је:

$R = 8{,}314\,[J/mol \cdot K]$ универзална моларна гасна константа

$k = R \cdot N_A = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,[J/K]$ Болцманова константа

m_0 = маса једног молекула посматраног гаса, $[m_0] = kg$

M = моларна маса посматраног гаса, $[M] = [kg/mol]$

T = апсолутна температура гаса, $[T] = K, {}^{\circ}C, {}^{\circ}F$

5. Napravio sam grešku u izrazu za Avogardov broj, dakle: $N_A = 6,0247 * 10^{23} [mol^{-1}]$.

$\boxed{7.}$ $V = \frac{\sum V_i}{N} = \sqrt{\frac{8 \cdot K \cdot T}{\pi \cdot m_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} \; [m/s]$ је формула за средњу аритметичку брзину молекула идеалног / посматраног гаса.

$\boxed{8.}$ $V_{ver} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot T}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} \; [m/s]$ је формула за највјероватнију брзину молекула идеалног / посматраног гаса, при чему је и за $\boxed{7.}$ и $\boxed{8.}$: $R = 8,314 \, [J/mol \cdot K]$

$K = R \cdot N_A = 1,381 \cdot 10^{-23} \, [J/K]$

T = апсолутна температура гаса

$\boxed{9.}$ $\langle \lambda \rangle = \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n_0} = \frac{KT}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot p} \; [m]$ је формула за рачунање средње дужина слободног пута молекула (идеалног / посматраног) гаса, при чему је:

$\langle Z \rangle$ = средњи број судара молекула током свког временског интервала од 1 [s].

d = ефективни пречник молекула посматраног гаса

$n_0 = \frac{N - \text{број молекула}}{V - \text{запремина}}$ посматраног гаса, концентрација молекула посматраног гаса, $n_0 = \frac{N}{V} \, [1/m^3]$

P = притисак посматраног гаса, $[P] = Pa$

10. $p = \frac{2}{3} n_0 \langle E_t \rangle = n_0 k T$ [Pa] је формула за притисак гаса, при чему је: $\langle E_t \rangle$ средња кинетичка енергија транслаторног кретања молекула посматраног гаса.

11. $\frac{pV}{T} = N \cdot k = const$ општи закон идеалних гасова

Када поредимо два гасна стања, мијењају се гасови...

12.

1. $(T = const) \rightarrow pV = n \cdot K \cdot t = const$ изотермска
2. $(p = const) \rightarrow \frac{V}{T} = \frac{N \cdot K}{P} = const$ изоборна
3. $(V = const) \rightarrow \frac{P}{T} = \frac{N \cdot K}{V} = const$ изохорна

промјена стања

при чему је:

1. Бојл - Мариотов закон
2. GeJ - Lisakov закон $V = V_0(1 + \gamma t)$, $p = const$
3. Šarbr закон $p = p_0(1 + \gamma t)$, $V = const$

Правило ширења запремина / притиска, са повећањем T.

$\gamma = \frac{1}{273°C}$ коефицијент запреминског ширења за све гасове у природи.

12. Napravio sam grešku kod izotermske promjene stanje: umjesto n treba staviti N: $pV = NkT$

13 $p \cdot V = nRT$ једначина стања идеалног гаса

14 $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$ Далтонов закон о парцијалним притисцима

15 $\boxed{U = \frac{j}{2} n \cdot k \cdot T \, [J]}$ унутрашња енергија количине гаса n, масе m који се налази на температури T, при чему је:

$$\boxed{\Delta U = \frac{j}{2} nR\Delta T \, [J]}$$

$j = j_t + j_r + j_o$

Број степени слободе молекула гаса, t = транслаторно, r = ротационо и o = осцилаторно кретање молекула посматраног гаса.

$j = 3$ за једноатомске и вишеатомске гасове

$j = 5$ за двоатомске гасове

16 $C_{mp} =$ [redacted] $C_p M = \frac{j+2}{2} R$ моларна топлотна капацитивност гаса при сталном притиску, јер је [redacted] $\boxed{c_P = \frac{R(j+2)}{2M}}$

17 $C_{mV} =$ [redacted] $C_V M = \frac{j}{2} R$ Моларна топлотна капацитивност гаса при сталној запремини, јер је [redacted] $\boxed{c_V = \frac{jR}{2M}}$

18.

$$PV^{\varkappa} = const$$
$$TV^{\varkappa-1} = const$$
$$TP^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = const$$

→ Једначине адијабатске промјене стања

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_{mp}}{C_{mV}} = \frac{j+2}{j}$$

19. I Принцип термодинамике

$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{j}{2} n \cdot R \cdot \Delta T + A$$

Рад гаса при: Протознати експанзију, примјенити одговарајућу формулу.

- изобарској експанзији ($\Delta P = 0$) је:

$$A = p \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$$

- изотермској експанзији ($\Delta T = 0$) је:

$$A = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

- адијабатској експанзији ($\Delta Q = 0$, $p\Delta V = -\Delta U$) је:

$$A = -\frac{j}{2} n \cdot R \cdot \Delta T = -n C_{mV} \Delta T = \boxed{\frac{nRT}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right] = A}$$

Зад. 710. Колико се молекула налази у количини азота чија је маса $m = 1[g]$? Моларна маса азота је $M = 0,028[kg/mol]$, а Авогадрова константа $N_A = 6,0247 \cdot 10^{23}\left[\frac{1}{mol}\right]$

Рјешење: AZOT (NITROGEN) S: N Ar: 7

$m = 1[g]$

$M = 0,028[kg/mol]$

$N_A = 6,0247 \cdot 10^{23}[mol^{-1}]$

$N = ?$

1. $n = \frac{N}{N_A}[mol] \mapsto \boxed{N = n \cdot N_A}$

2. $n = \frac{m}{M}[mol]$

Из ове двије формуле можемо изразити тражено N.

$$N = \frac{m[kg]}{M[kg/mol]} \cdot N_A[1/mol] = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0247 \cdot 10^{23}}{0,028} = \frac{6,0247}{0,028} \cdot 10^{20}$$

$$N \approx 215,16 \cdot 10^{20}$$

Зад. 711. У суду се налази количина кисеоника $\nu = 3[mol]$. Колика је маса ове количине кисеоника? Моларна маса кисеоника је $M = 0,032 [kg/mol]$.

Рјешење: KISEONIK (OXYGEN) S: O A_z: 8

$n = 3[mol]$

$M = 0,032 [kg/mol]$

$m = ?$

2. $n = \frac{m}{M} [mol] \rightarrow m = n \cdot M [kg]$

$m = 3 \cdot 0,032 [kg]$

$m = 0,096 [kg]$

Зад. 712. Колика је средња квадратна брзина молекула кисеоника на температури $t = 27°C$?

Рјешење:

$M = 0,032 [kg/mol]$

$t = 27 + 273 = 300 [K]$

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = ?$

6. $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} [m/s]$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \cdot 300}{0,032}} = 483,5 [m/s]$$

$t = [K]$ Келвин, основна мјерна јединица за термодинамичку температуру. У задацима температуру изражену у (C°/F°) морамо претворити у KelVIN.

Зад. 713. У суду запремине $V = 1[cm^3]$, концентрација молекула водоника на притиску $p = 1[bar]$ износи $n_0 = 8 \cdot 10^{24} [1/m^3]$

a) Колика је температура гаса?

b) Колика је средња квадратна брзина молекула гаса?

c) За колико је потребно повисити притисак гаса да би се средња квадратна брзина његових молекула удвостручила?

$V = 1[cm^3] = 10^{-6}[m^3]$

$p = 1[bar] = 100\,000\,[Pa]$

$n_0 = 8 \cdot 10^{24}\,[1/m^3]$

a) $T = ?$

b) $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = ?$

c) $p = ?$

a) $T = ?$

(10.) $p = n_0 k T$

[redacted]

$$T = \frac{p}{n_0 \cdot k}$$

$$T = \frac{100\,000}{8 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23}} = \frac{10^{28}}{8 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{24}}$$

$T = 905\,[K]$

Водоник (Hydrogen) S: H $A_r = 1$

b) $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3RT / M} = 329 \, [m/s]$

одавде је $M = \approx 0,208 \, [Kg/mol]$, Консултације, како изразити M?

c) Консултације

Зад. 715. Колика је средња квадратна брзина аргона (молекула аргона) после адијабатског процеса сабијања на 1/5 првобитне запремине? Почетна температура гаса је $t_1 = 27°C$, моларна маса $M = 0,040 \, [kg/mol]$ а адијабатска константа $\varkappa = 1,66$.

Рјешење: Argon (Argon) S: Ar A_r: 18

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5} \, [m^3]$$

$$t_1 = 27°C$$

$$M = 0,040 \, [kg/mol]$$

$$\varkappa = 1,66, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = ?$$

На почетној температури t_1 запремина (почетна ~~[illegible]~~ запремина) аргона је V_1. Након обављања адијабатског процеса над посматраним аргоном његова првобитна запремина је сабијена на $\frac{1}{5}$ своје вриједности што значи да је $V_1 = V_2 \frac{1}{5}$ → $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$ при чему је V_2 запремина аргона након сабијања. Температура гаса после адијабатског сабијања је:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}$$

18. 2. формула

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T_2}{M}} \left[\frac{m}{s}\right] = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T_1}{M} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}} \, [m/s]$$

Zadatak 715.

Zapremina argona na temperaturi t_1 jednaka je V_1, nakon adijabatskog sabijanja sa temperature t_1 temperatura argona jednaka je t_2 , a zapremina argona jednaka je $V_2 = \frac{V_1}{5}$ .Pošto se radi o *adijabatskom* sabijanju moramo u obzir uzeti i adijabatsku konstantu:

$t_1 V_1^x = (\frac{V_1}{5})^x t_2$ pa odavde je $t_2 = (\frac{V_1}{\frac{V_1}{5}}) t_1$,a ja sam na papiru napravio grešku.

$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ u srednjem izrazu nepoznate veličine su T i m_0 , a u trećem izrazu nepoznata veličina je T pa se opredjeljujemo za taj izraz.

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 \cdot R \cdot T_1 / M} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{2}} \approx 254 \, [m/s]$ $= 735 \, [m/s]$ у збирци

Консултације: Зашто се резултати не поклапају?

Зад. 7.16. Колика је средња дужина слободног пута молекула водоника ако је његов ефективни пречник $d = 0{,}23 \, [nm]$ а концентрација $n_0 = 2 \cdot 10^{25} \, [1/m^3]$?

Рјешење:

$d = 0{,}23 \, [nm]$

$n_0 = 2 \cdot 10^{25} \, [1/m^3]$

$\langle \lambda \rangle = ?$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n_0} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (0{,}23 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 2 \cdot 10^{25}} =$$

$$\frac{10^{18}}{\sqrt{2} \cdot \pi \, (0{,}23)^2 \cdot 2 \cdot 10^{25}} = 0{,}000000213 \, [m/s]$$

Зад. 7.18. Одредити средњу дужину слободног пута молекула кисеоника који се налази на притиску $p = 202 \, [kPa]$ и температури $T = 300 \, [K]$. Ефективни пречник молекула кисеоника износи $d = 0{,}29 \, [nm]$. Рјешење:

$p = 202 \, [kPa]$

$T = 300 \, [K]$, $d = 0{,}29 \, [nm]$

$\langle \lambda \rangle = ?$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \, \pi \, d^2 \, p} = 0{,}11 \, [\mu m]$$

$k = 1{,}381 \cdot 10^{-23} \, [J/K]$ Болцманова константа

Zadatak 716. Napravio sam grešku kod stavljanja mjerne jedinice za λ, mjerna jedinica za λ kao i za svaki drugi pređeni put je metar [m].

Зад. 723. Колики је однос средње квадратне и највјероватније брзине молекула азота на температури $T = 300\,[K]$?

Рјешење: ✤ Однос (Количник) ✤

- средња квадратна брзина молекула посматраног гаса је:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3RT/M}\ [m/s]$$

- највјероватнија (ефективна root mean square rms) брзина молекула посматраног гаса је:

$$v_{w} = \sqrt{2RT/M}\ [m/s]$$

$$\frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{v_{w}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3RT}}{\sqrt{M}}}{\dfrac{\sqrt{2RT}}{\sqrt{M}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \approx 1,224$$

Зад. 734. Суд запремине $V = 10\,[cm^3]$, садржи $N = 5,4 \cdot 10^{20}$ молекула неког гаса на температури $t = 0°C$. Колики је притисак гаса у суду? Рјешење: Из познатих формула.

$V = 10\,[cm^3] = 10 \cdot 10^{-6}\,[m^3]$
$N = 5,4 \cdot 10^{20}$
$t = 0°C = 273,15\,[K]$
$p = ?$

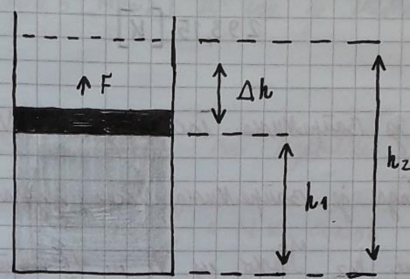
$$p = n_0 kT$$

$$p = \frac{N}{V} kT = 204\,[kPa]$$

Зад. 7.35. Цилиндар, запремине $V_1 = 0,2 [L]$ на температури $t_1 = 20°C$, затворен је клипом површине $S = 5 [cm^2]$.

За колико ће се клип померити ако се гас загреје до температуре $t_2 = 100°C$?

Рјешење:



$V_1 = 0,2 [L]$
$t_1 = 20°C$
$S = 5 [cm^2]$
$t_2 = 100°C$
$\Delta h = ?$

Познато је да гасови мењају своју запремину са промјеном притиска па се термичко ширење гасова посматра само под условом да притисак гаса (у нашем случају идеални гас се посматра јер врста гаса није експлицитно задата) буде сталан. Математички $p = const \mapsto \Delta p = 0$ изобарски процес.

• На температури t_1 запремина гаса је V_1. Загријавањем гаса (температуре гаса) повећава се и запремина гаса па је на температури t_2 $(t_2 > t_1)$ запремина гаса $V_2 (V_2 > V_1)$.

Нама се у задатку тражи да одредимо дужину помјераја Δh.

Према GeJ-Lisak-овом за изобарске процесе, запремина гаса после загријавања је:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,2[L]\cdot 100°C}{20°C} = \cancel{\frac{0,0002[m^3]\cdot 373,15[K]}{293,15[K]}}$$

~~$V_2 = 0{,}0002$ [illegible] $[m^3]$~~

$$V_2 = \frac{0{,}0002\,[m^3] \cdot 373{,}15\,[K]}{293{,}15\,[K]} = 254\,[cm^3]$$

• Када је запремина гаса једнака V_1 клип је на висини h_1. Када је запремина гаса једнака V_2 клип је на висини h_2. Како су V_1 и V_2 запремине (имају висину z-ка, ширину y-ка и дужину x-ка) то је и $V_2 - V_1$ такође нека запремина означимо је са ΔV.
Клип који се помера је тело које има своју ширину и своју дужину које су једнаке ($S = 5\,[cm^2]$).
Са слике видимо да су ширина и дужина клипа уједно ширина и дужина запремина $V_1, V_2, \Delta V$.
Висина запремине ΔV је једнака Δh па имамо једначину за тражено Δh.

$$\Delta V = \Delta h \cdot S$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{(V_2 - V_1)\,[cm^3]}{5\,[cm^2]} = \frac{254 - 200}{5}\,[cm] = 10{,}8\,[cm]$$

Зад. 736. Метеоролошки балон, запремине $V_1 = 5\,[L]$, на стандардним условима, пуштен је у атмосферу. Колику ће запремину имати балон на висини где влада притисак $P_2 = 506{,}5\,[mbar]$ и где је температура $t_2 = -2\,°C$?

to znači

Рјешење: Користићемо општи закон за идеалне гасове:

$V_1 = 5\,[L] \;/=\; V_0$

$T_0 = 273{,}15\,[K]$ → на стандардним условима

$P_0 = 101\,325\,[Pa]$

$V_2 = ?$

$P_2 = 506{,}5\,[mbar]$

$t_2 = -2\,°C$

$$\frac{PV}{T} = N \cdot k = const$$

Ову једначину (релацију) користимо кад год нам се тражи неко поређење гасних стања. Нпр. када долази до смјеше (мјешања) двa или више гасова...

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{t_2} \rightarrow p_0 V_0 t_2 = p_2 V_2 T_0$$

$$V_2 = \frac{p_0 V_0 t_2}{p_2 T_0}$$

$$V_2 = \frac{p_0}{p_2} \cdot \frac{t_2}{T_0} \cdot V_0$$

$$V_2 = \frac{101325\,[Pa]}{50\,650\,[Pa]} \cdot \frac{271{,}15\,[K]}{273{,}15\,[K]} \cdot V_0$$

$$V_2 \approx 10\,[L]$$

Зад 737. На температури $t_1 = 27°C$ отвор стаклене цијеви запремине $V_1 = 5[cm^3]$ прислоњен је на већу кап живе. Колико ће живе ући у цијев приликом снижења температуре на $t_2 = 7°C$?

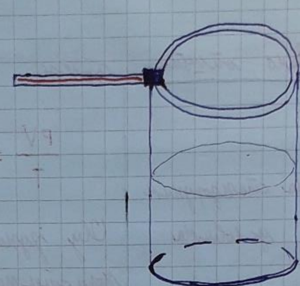
Рјешење:

$t_1 = 27°C$

$V_1 = 5[cm^3]$

$t_2 = 7°C$,

$m = ?$ количина живе која ће ући у цијев.



Познато је да сва тијела (било ког агрегатног стања) мењају своју запремину са променом температуре.
Унутар цијеви је ваздух (смеша гасова...), запремина ваздуха у цијеви на температури t_2 је V_2 $(V_2 < V_1)$.
Стање ваздуха у цијеви се мења под условима сталног притиска ($p = const$, изобарни процес):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$ Gej-Lisakov закон

$V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1$ је запремина ваздуха у цијеви након расхлађивања.

Запремина живе која уђе у цев је:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$m = \rho \Delta V = 4,53\,[g]$$

Pazi:

$T_1 > T_2$ što znači da je $V_1 > V_2$ pa Gej-Lisakov zakon primjenjujemo na gore prikazan način. Odatle odredimo V_2. Traženo *m* odredimo iz relacije sa kojom smo se upoznali u dinamici translatornog kretanja: $\rho = \frac{m}{V}$. Podatak o gustini žive (ρ) je na nekoliko mjesta pomenut u zbirci.

Kako živa ulazi u rashlađen sud (u sud čija je zapremina V_1 smanjena za V_2) zapremina suda u koji ulazi živa je jednaka $V_1 – V_2 = \Delta V$. Traženo *m* odredimo iz relacije sa kojom smo se upoznali u dinamici translatornog kretanja: $\rho = \frac{m}{V}$. Podatak o gustini žive (ρ) je na nekoliko mjesta pomenut u zbirci.

Зад. 738. Балон запремине $V = 5\,[L]$, напуњен је ваздухом под притиском $p = 3\,[MPa]$ на температури $t_1 = 20°C$. Ако се балон отвори у просторији где влада притисак $p_2 = 0{,}1\,[MPa]$ и где је температура $t_2 = 30°C$, одредити запремину коју ће заузети ваздух после отварања балона.

Рјешење: Основни параметри сваког гаса су запремина, притисак и температура гаса.

$V = 5\,[L]$

$p = 3\,[MPa]$

$t_1 = 20°C$

$p_2 = 0{,}1\,[MPa]$

$t_2 = 30°C$

$V_2 = ?$

Стање гаса којим је испуњен балон је $\{V = 5\,[L],\ p = 3\,[MPa],\ t_1 = 20°C\}$. Стање гаса којим је испуњена просторија у којој се отвара балон је $\{V = V_2,\ p = p_2,\ t = t_2\}$. Када у просторији отворимо балон из њега ће изаћи извјестан гас, просторија је већ испуњена неким гасом па ће се тај гас измешати са гасом који је испуштен из балона. Стање новонасталог гаса представља равнотежу (изједначење) гаса којим је био испуњен балон и гаса којим је била испуњена соба, математички:

$$\frac{pV}{t_1} = \frac{p_2 V_2}{t_2}$$

Два разломка су једнака ако и само ако су им унакрсни производи једнаки.

$$pVt_2 = p_2V_2t_1$$

$$V_2 = \frac{pVt_2}{p_2t_1} = \frac{p}{p_2}\cdot\frac{t_2}{t_1}V$$

$$V_2 = \frac{3[MPa]}{0{,}1[MPa]}\cdot\frac{303{,}15[K]}{293{,}15[K]}\cdot 5[L] = 155[L]$$

Зад. 739. Колико се промени температура гаса ако се запремина повећа два пута, а притисак смањи три пута?

Рјешење: Општи закон за идеалне гасове. Изједначавамо 2 гасна стања.

$T_1 = T_1$

$V_1 = V_1$

$p_1 = p_1$

$T_2 = ?$

$V_2 = V_1 \cdot 2$

$p_2 = p_1/3$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$T_2\, p_1V_1 = p_2V_2T_1$$

[redacted]

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{V_2}{V_1}\,T_1$$

$$T_2 = \frac{p_1}{3p_1}\cdot\frac{2V_1}{V_1}\,T_1$$

$$T_2 = \frac{2}{3}\,T_1$$

Зад. 744. Колики је притисак потребно остварити на температури $t = 0°C$ да би се у суду запремине $V = 5[L]$ налазила количина хелијума чија је маса $m = 10[g]$?

Рјешење: $pV = nRT$ је релација (математичка релација) која представља стање идеалног гаса.

$t = 0°C$
$V = 5[L]$
$m = 10[g]$
$M =$
$p = ?$

Нас занима какав однос треба да буде између запремине, притиска и температуре хелијума (посматраног гаса) који се налази у суду запремине V (што је уједно и запремина посматраног хелијума) да би маса хелијума у посуди била $10[g]$. Запремина гаса (тако и хелијума) се мења са промјеном притиска гаса, то значи да ћемо подешавањем притиска хелијума запремину хелијума довести на ниво гдје је маса посматраног хелијума у посуди једнака $10[g]$. Математички:

$$pV = nRT$$

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

$$P = \frac{mRT}{VM} = 1{,}13\,[MPa]$$

Зад. 745. Колико кг кисеоника налази у балону, запремине $V = 50 [L]$, у коме је притисак $P = 0{,}2 [MPa]$, а температура $t = 27°C$.

Рјешење:

$V = 50 [L]$
$P = 0{,}2 [MPa]$
$t = 27°C$
$m = ?$
$M = 0{,}032 [kg/mol]$

$$PV = nRT$$

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

$$PVM = mRT$$

$$m = \frac{PVM}{RT} = \frac{0{,}2 [MPa] \cdot 50 [L] \cdot 0{,}032 \left[\frac{kg}{mol}\right]}{8{,}314 \left[\frac{J}{mol\,K}\right] \cdot 300{,}15 [K]}$$

$$m = \frac{200000 [Pa] \cdot 0{,}05 [m^3] \cdot 0{,}032 \left[\frac{kg}{mol}\right]}{8{,}314 [J/mol\,K] \cdot 300{,}15 [K]} = 0{,}128 [kg]$$

Да би мјерни (израчунати) резултати били исправни све мјерне јединице морају бити конвертоване у своје основне облике (основне мјерне јединице за ту физичку величину).

Napomena:

Ako nas interesuje neki parametar nekog gasa (pritisak gasa, masa gasa,…) ili ako želimo podesiti neki parametar nekog gasa onda koristimo relaciju 13) $pV = nRT$ koja se još zove “Jednačinom gasnog stanja”. Ako dolazi do mješanja gasova, gas prelazi iz jednog prostora u prostor ispunjen nekim drugim gasom…onda koristimo relaciju 11) $\frac{pV}{T} = Nk = \text{const.}$

Зад. 746. Колика је маса ваздуха која се налази у просторији $4 \cdot 4 \cdot 3$ [m³], на температури $t = 27°C$ и притиску $P = 1013,25$ [mbar]? Моларна маса сувог ваздуха је $M = 0,029$ [Kg/mol].

Рјешење:

$V = 4 \cdot 4 \cdot 3$ [m³]

Консултације: како да ово урадим?

$t = 27°C = 300,15$ [K]

$P = 1013,25$ [mbar] $= 10132500$ [Pa]

$M = 0,029$ [Kg/mol]

Зад. 747. У балону, запремине $V = 10[L]$, налази се кисеоник под притиском $p = 10[MPa]$ и на температури $t = 0°C$. Колико кисеоника има у балону?

Рјешење:

$V = 10[L]$
$P = 10[MPa]$
$t = 0°[C]$
$M = 0{,}032[Kg/mol]$
$m = ?$

Унутар балона запремине V налази се извесна количина кисеоника (гаса). Балон је у потпуности испуњен кисеоником па је запремина балона уједно и запремина посматране количине кисеоника (молекули гаса у затвореном простору крећу дуж све три осе Декартовог тродимензионалног система, комплетан простор је испуњен молекулима гаса). Да би одредили масу посматране количине кисеоника у балону користићемо релацију која описује стање неког гаса.

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$PVM = mRT$$

$$m = \frac{PVM}{RT} = \frac{10 \cdot 10^6 [Pa] \cdot 0{,}01[m^3] \cdot 0{,}032[Kg/mol]}{8{,}314[J/mol \cdot K] \cdot 273{,}15[K]} \approx 1{,}4[Kg]$$

Зад. 748., 749., 750. важи аналогно $pV = nRT$ с тим да се у задатку под редним бројем 750 води рачуна о примјена Далтоновог закона о парцијалним притисцима.

Зад. 751. Челична боца садржи количину азота, масе $m = 50[g]$, на температури $t = 0°C$ и притиску $p_1 = 1,5[MPa]$. Боца може да издржи притисак $p_{max} = 2[MPa]$. Да ли ће боца издржати притисак који настане при загревању гаса до температуре $t_2 = 50°C$? Колика је запремина боце?

Рјешење: Испитни задатак.

$m = 50[g] = 0,05[Kg]$

$t_1 = 0°C = 273,15[K]$

$p_1 = 1,5[MPa] = 1\,500\,000[Pa]$

$M = 0,028[Kg/mol]$

$p_{max} = 2[MPa] = 2\,000\,000[P]$

$t_2 = 50°C = 323,15[K]$

$p_2 = ?$

$V = ?$

. По ŠARLOVOM закону за изохорне процесе, притисак гаса се мијења заједно са промјеном температуре гаса (температура гаса расте од t_1 до t_2) по релацији:

$$P_2 = P_1 \frac{t_2}{t_1}$$

$$P_2 = 1\,500\,000 [Pa] \frac{323,15 [K]}{273,15 [K]} = 1\,774\,574,41 [Pa]$$

Како је $P_2 < P_{max}$ то значи да ће боца издржати повишен притисак.

. Запремина боце је једнака запремини гаса (азот у нашем случају) који се налази у њој.

Када се неки гас зароби у неки затворен простор (боца, суд...) молекули тог гаса се крећу (простиру) у свим могућим правцима, запремина гаса се тако изједначи са запремином простора, а за описивање стања гаса користимо релацију гасног стања:

$$P_1 V = nRt_1 = \frac{m}{M} RT$$

$$V = \frac{mRT}{P_1 M} = \approx 2,75 [L]$$

Зад. 7.52. Два суда су спојена помоћу цеви на којој се налази славина. Када је славина затворена притисак гаса у првом суду је $P_1 = 0,2\,[MPa]$, а у другом $P_2 = 0,4\,[MPa]$. У судовима се налазе једнаке количине истог гаса. Колики притисак ће се успоставити у судовима после отварања славине?

Рјешење: Испитни задатак

1. суд:

$P_1 = 0,2\,[MPa]$

$m_1 = m\,[kg]$

$V_1 = V_1\,[m^3]$

$T_1 = T\,[K]$

2. суд:

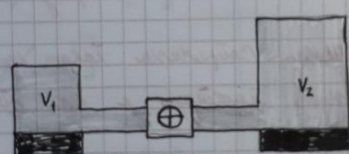
$P_2 = 0,4\,[MPa]$

$m_2 = m\,[kg]$

$V_2 = V_2\,[m^3]$

$T_2 = T\,[K]$

$p = ?$



~~SLIKA 1~~

SLIKA 2

Ако је славина затворена, први суд је испуњен гасом а стање гаса у првом суду је одређено "једначином гасног стања. Исто важи и за гас који се налази у другом суду. Математички: $PV = nRT$

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} RT \quad , \quad P_2 V_2 = \frac{m}{M} RT$$

Када се славина одврне цео простор (оба суда, цев...) ће се испунити гасом SLIKA 2. Запремина тог гаса (којим је испуњен систем SLIKA 2) је неко $V = V_1 + V_2$, маса $m + m = 2m$, температура T (изотермски процес је у питању) а притисак p. Стање гаса у посматраном систему је одређено једначином гасног стања:

$$P(V_1 + V_2) = \frac{2m}{M} \frac{RT}{1} \longrightarrow P = \frac{2mRT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{2mRT}{MV_1 + MV_2}$$

$$P = \frac{2mRT}{\frac{MRT_m}{P_1 M} + \frac{MRT_m}{P_2 M}} = \frac{2mRT}{\frac{mRT(P_1 + P_2)}{P_1 P_2}}$$

$$P = \frac{2P_1 P_2}{P_1 + P_2} \, [Pa]$$

Зад. 772: Колику количину топлоте је потребно довести количини метана, масе $m = 20[g]$, на температури $t_1 = 25°C$, да би се његов притисак повисио за $\Delta P = 50[kPa]$? Метан се налази у балону запремине $V = 12[L]$. Моларна маса метана је $M = 0,016[Kg/mol]$, а моларна топлотна капацитивност $C_{mv} = 30,56[J/mol \cdot K]$.

Рјешење:

$Q = ?$

$m = 20[g]$

$t_1 \; 25°C$

$\Delta P = 50[kPa]$

$V = 12[L]$

$M = 0,016[Kg/mol]$

$C_{mV} = 30,56[J/mol \cdot K]$

Количина топлоте Q коју требамо одредити је дата формулом:

[redacted]

$$Q = mc_V \Delta T = \frac{m}{M} C_{mV} \Delta T$$

при чему је t_2 температура метана на којој је притисак посматране количине метана за ΔP већи од почетног. Посматрани метан (гас) са притиска P_1 и температуре t_1 прелази на притисак $P_2 = P_1 + \Delta P$ и температуру t_2.

Да би се то остварило запремину посматране количине метана треба одржавати сталном па је ријеч о изохорном процесу. По општем закону за идеалне гасове имамо релацију:

$$\frac{P_1 V}{t_1} = \frac{P_2 V}{t_2} \quad \dots \quad / \cdot \frac{1}{V}$$

$$\frac{p_1}{t_1} = \frac{p_2}{t_2} \longrightarrow t_2 = \frac{p_2}{p_1} t_1$$

$$p_1 V = nRt_1 = \frac{m}{M} R t_1 \longrightarrow p_1 = \frac{mRt_1}{MV}$$

$$p_2 = p_1 + \Delta p = \frac{mRt_1}{MV} + \Delta p \longrightarrow p_2 = \frac{mRt_1 + \Delta p MV}{MV}$$

$$t_2 = t_1 \frac{mRt_1 + \Delta p MV}{mRt_1}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta p MV}{mRt_1} \approx 375\,[K]$$

$$Q = \frac{m}{M} C_{mV} (t_2 - t_1) = 2,25\,[kJ]$$

Зад. 779. Количина азота, масе $m = 10\,[g]$, налази се на температури $t_1 = 27°C$ и притиску $p_1 = 2\,[bar]$. Колики рад изврши гас ако се његова запремина повећа на $V_2 = 10\,[L]$ током загријавања при сталном притиску? Моларна маса азота је $M = 0,028\,[kg/mol]$.

Рјешење:

$m = 10\,[g]$

$t_1 = 27°C$

$p_1 = 2\,[bar]$

$A = ?$

$V_2 = 10\,[L]$

$M = 0{,}028\,[kg/mol]$

$A = p_1 (V_2 - V_1)$

$A = p_1 V_2 - p_1 V_1$

$p_1 V_1 = nRt_1 \;\Big]\!\rightarrow\; V_1 = \quad V_1 = \frac{nRt_1}{p_1}$

$$A = p_1 V_2 - \frac{nRt_1}{p_1} p_1$$

$$A = p_1 V_2 - \frac{m}{M} R t_1$$

$$A = 1{,}07\,[kJ]$$

Зад. 779. Количина азота, масе $m = 10\,[g]$, налази се на температури $t_1 = 27°C$ и притиску $p_1 = 2\,[bar]$. Колики рад изврши гас ако се његова запремина повећа на $V_2 = 10\,[L]$ током загријавања при сталном притиску? Моларна маса азота је $M = 0{,}028\,[kg/mol]$.

Рјешење:

$m = 10\,[g]$

$t_1 = 27°C$

$p_1 = 2\,[bar]$

$A = ?$

$V_2 = 10\,[L]$, $(\Delta p = 0)$

$M = 0{,}028\,[kg/mol]$

$$A = p_1 \Delta V = p_1 (V_2 - V_1)$$

$$A = p_1 V_2 - p_1 V_1$$

V_1 можемо изразити преко једначине гасног стања

$$p_1 V_1 = nRt_1 \longrightarrow V_1 = \frac{nRt_1}{p_1}$$

$$A = p_1 V_2 - nRt_1 = p_1 V_2 - \frac{m}{M} R t_1 =$$

$$2\,[bar]\ 10\,[L] - \frac{10\,[g] \cdot 8{,}314\,[J/molK] \cdot 300{,}15\,[K]}{0{,}028\,[kg/mol]} =$$

$$200000\,[Pa]\ 0{,}01\,[L] - \frac{10 \cdot 10^{-3}\,[kg] \cdot 8{,}314\,[J/molK] \cdot 300{,}15\,[K]}{0{,}028\,[kg/mol]} = 1001{,}82\,[J]$$

$$A \approx 1002\,[J]$$

Зад. 780. Колики се рад изврши при изобарској експанзији гаса на притиску $P = 0,2\,[MPa]$ ако се гас загреје од температуре $t_1 = 0°C$ до температуре $t_2 = 100°C$?

Запремина гаса пре ширења је $V_1 = 10\,[cm^3]$.

Рјешење:

$P = 0,2\,[MPa]$, $\Delta P = 0$

$t_1 = 0°C$

$t_2 = 100°C$

$V_1 = 10\,[cm^3]$

С обзиром на то да гасови мењају своју запремину са променом притиска то се термичко ширење гасова може посматрати само под условом да се дата количина гаса одржава под сталним притиском.

Промјена запремине гаса при изобарској експанзији је описана математичком релацијом коју зовемо GeJ-LISAKOV закон: $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$, $(\Delta P = 0)$.

$$A = P\Delta V = P(V_2 - V_1) = PV_2 - PV_1$$

$$A = PV_1\frac{T_2}{T_1} - PV_1 = PV_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 0,2\,[MPa]\cdot 10\,[cm^3]\left(\frac{100°C}{0°C} - 1\right)$$

[redacted]

$$A = 0,2\cdot 10^6\,[Pa]\cdot 10\cdot 10^{-6}\,[m^3]\cdot\left(\frac{373,15\,[K]}{273,15\,[K]} - 1\right) = 0,73\,[J]$$

(AT95 = root) root's FAST AND EASY UNITS CONVERSION METHOD:

$1[m] = 10^{2}\,[cm]$ $\quad ()^3$

$1[cm] = 10^{-2}\,[m]$ $\quad ()^3$

$1[m^3] = 10^{6}\,[cm]$

$1[cm^3] = 10^{-6}\,[m^3]$

Зад. 781. Приликом изобарске експанзије двоатомског гаса извршени рад је износио $A = 2[MJ]$. Колика је количина топлоте доведена гасу?

Рјешење:

$(\Delta P = 0)$

$A = 2[MJ]$

$j = 5$

$Q = ?$

Количина топлоте, при изобарској експанзији која је доведена гасу, дата је релацијом:

$$Q = m c_p \Delta T = \frac{m}{M} C_{mp} \Delta T$$

$$C_{mp} = \frac{j+2}{2} R$$

Запамти ове изразе

DOVEDENA KOL. TOPLOTE PRI IZOBARSKOJ EKSPANZIJI

• При изобарској промени стања извршени рад је:

$$A = P\Delta V = nR\Delta T = \frac{m}{M} R\Delta T \rightarrow A = \frac{mR\Delta T}{M} \rightarrow \Delta T = \frac{AM}{Rm}$$

$$Q = \frac{m}{M} C_{mp} \Delta T = \frac{m}{M} \cdot \frac{7R}{2} \frac{AM}{Rm} = \frac{7}{2} A[J] = 7[MJ]$$

Зад. 782. Приликом изобарске експанзије кисеоника O, утроши се количина топлоте $Q = 4[MJ]$. Колики се део ове енергије утроши на повећање његове унутрашње енергије? Колика ће бити ова енергија ако се ради о кисеонику O_2 и O_3? Решење:

Према I принципу термодинамике:

$\Delta P = 0$

O (OXYGEN)

$Q = 4[MJ]$

$\Delta U = ?$

$$\boxed{Q = \Delta U + A} \;\Rightarrow\; \Delta U = Q - A$$

ΔT се појављује у обе релације па смо га изразили.

$$A = P\Delta V = nR\Delta T = \frac{m}{M} R\Delta T$$

$$Q = mc_p\Delta T = \frac{m}{M} C_{mp}\Delta T = \frac{m(j+2)R\Delta T}{2M} \longrightarrow \Delta T = \frac{Q2M}{mR(j+2)}$$

[redacted] $\Delta U = Q - A$

$$\Delta U = \frac{mR(j+2)}{2M}\cdot\frac{2MQ}{mR(j+2)} - \frac{mR}{M}\cdot\frac{2MQ}{mR(j+2)} = Q - \frac{2Q}{j+2}$$

$$\Delta U = \frac{Q(j+2) - 2Q}{j+2} = \frac{jQ}{j+2} \longrightarrow \Delta U = \frac{jQ}{j+2}$$

За: O је $j = 3$; O_2 је $j = 5$; O_3 је $j = 6$ $\longrightarrow$ $\Delta U = 2,4\,[MJ]$; $\Delta U = 2,9\,[MJ]$; $\Delta U = 3,0\,[MJ]$

Зад. 785. Ако се количини ваздуха масе $m = 100\,[g]$, повиси температура, при сталном притиску од $t_1 = 5°C$ до $t_2 = 35°C$, израчунати:

a) доведену количину топлоте гасу,

b) промену унутрашње енергије гаса,

c) рад који изврши гас при повишењу температуре.

Рјешење:

$m = 100\,[g]$

$\Delta P = 0$

$t_1 = 5°C$

$t_2 = 35°C$

a) $Q = ?$

$$Q = mc_p\Delta t = \frac{m}{M} C_{mp}\Delta t$$

$$Q = \frac{m}{M}\frac{j+2}{2}R\Delta t$$

$$Q = \frac{mR(j+2)\Delta t}{2M}\,[J]$$

b) $\Delta U = Q - A$

c) $A = Q - \Delta U$

Зад. 789. У цилиндру са покретним клипом, запремине $V_1 = 2[L]$, налази се кисеоник на притиску $P = 0,1[MPa]$. Услед загревања његова запремина се повећа 2 пута.

a) Колики рад изврши гас при ширењу?

b) Колика количина топлоте је доведена гасу током ширења?

c) Колика је промена унутрашње енергије гаса?

Рјешење:

$V_1 = 2[L]$

$P = 0,1[MPa]$

$V_2 = 2V_1$

a) $A = ?$

$$A = PdV = P(V_2 - V_1) = P(2V_1 - V_1) = PV_1 = 200[J]$$

b) $Q = ?$

$$Q = mc_p\Delta T$$

$$PV_1 = nRT_1 = \frac{m}{M}RT_1 \longrightarrow m = \frac{pMV_1}{RT_1}$$

$$c_p = \frac{j+2}{2}\frac{R}{M}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{V_2 T_1}{V_1} - T_1 = \frac{2V_1 T_1}{V_1} - T_1 = T_1$$

$$Q = \frac{pMV_1}{RT_1}\cdot\frac{j+2}{2}\cdot\frac{R}{M}\cdot T_1 = \frac{j+2}{2}PV_1 = 700[J]$$

c : $\Delta U = ?$

$$\Delta U = Q - A = 700 - 200 = 500\,[J]$$

$$c_p = \frac{R(j+2)}{2M} \quad и \quad c_V = \frac{jR}{2M}$$

$$C_{mp} = c_p M = \frac{R(j+2)}{2} \quad и \quad C_{mV} = c_V M = \frac{jR}{2}$$

Зад. 790. У цилиндру са покретним клипом налази се количина азота $n = 3[mol]$. За колико се промени унутрашња енергија ове количине азота приликом повишења његове температуре за $\Delta T = 80[K]$, загревањем?

Рјешење:

$n = 3[mol]$

$\Delta U = ?$

$\Delta T = 80[K]$

$$\boxed{\Delta U = \frac{j}{2} nR\Delta T}$$

Математички израз за PROMJENU UNUTRAŠNJE ENERGIJE.

Азот је двоатомски гас: $j = 5$ Запамти

$$\Delta U = \frac{5}{2} 3[mol]\, 8{,}314[J/molK]\, 80[K] = 4988{,}4[K]$$

Зад. 791. У суду запремине $V_1 = 5[L]$, налази се количина азота чија је маса $m = 5{,}6[g]$.

a) Колику количину топлоте је потребно довести гасу у суду да би се његова запремина повећала на $V_2 = 7[L]$, при сталној температури $T = 300[K]$?

b) Колики рад гас изврши при овоме?

Рјешење:

$V_1 = 5[L]$

$m = 5{,}6[g]$

$M = 0{,}028[kg/mol]$

a) $Q = ?$, $\Delta T = 0$

$Q = \Delta U + A = \frac{j}{2} nR\Delta T + A = 0 + A = A$ јер температура $T = 300[K]$ се одржава сталном (изотермска промјена стања) у овом случају $\Delta T = 0$.

$$Q = A = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{5{,}6\cdot 10^{-3}\,[kg]}{0{,}028\,[kg/mol]}\; 8{,}314\,[J/mol\cdot K]\; 300\,[K] \ln\left(\frac{0{,}007\,[m^3]}{0{,}005\,[m^3]}\right)$$

$$\left.(a) = (b)\right] \longrightarrow Q = A = 168\,[J]$$

Да поновимо: Механички рад је једнак производу силе и помјерају. За гасове:

- Ако је $P = const \iff \Delta P = 0$ тада је

$$A = P\Delta V = nR\Delta T\ [J]$$

- Ако површину p-V фигуре морамо рачунати интеграцијом ($\Delta P = VAR$) тада је:

$$A = nRT \ln\frac{V_2}{V_1} = nRT \ln\frac{p_1}{p_2}\ [J]$$

Зад. 794. Колики се рад изврши при изотермској експанзији количине кисеоника, масе $m = 32\,[g]$, на температури $t = 7°C$, ако се при овоме његова запремина повећа 3 пута?

Рјешење:

$\Delta T = 0$
$m = 32\,[g]$
$t = 7°C$
$V_2 = 3V_1$
$j = 5$
$A = ?$

$$A = nRT \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$A = nRT \ln\frac{3V_1}{V_1} = nRT \ln 3\,[J]$$

Зад. 795. Количина метана, масе $m = 40\,[g]$, налази се на температури $T_1 = 300\,[K]$. Колики рад изврши ова количина метана ако се адијабатски рашири до запремине која је 2 пута већа од почетне?

Рјешење:

$m = 40\,[g]$

$T_1 = 300\,[K]$

$A = ?$

$V_2 = 2V_1\,[m^3]$

Рад гаса при адијабатској експанзији:

$$\boxed{A = \frac{nRT}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right]}$$

Метан је двоатомски гас па је $j = 5$.

Адијабатска константа $\varkappa$ се рачуна по формули:

$$\boxed{\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} = \frac{j+2}{2}} = \frac{7}{2}$$

$$A = \frac{nRT}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{2V_1}\right)^{\varkappa - 1}\right] = \frac{mRT}{M(\varkappa - 1)}\left[1 - (1/2)^{\varkappa - 1}\right] =$$

$$\frac{mRT}{M\frac{5}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{2mRT}{5M}\left(1 - (0{,}5)^{2{,}5}\right) \approx 4\,[kJ]$$

Зад. 796. Колики ће рад извршити при изотермској експанзији количине гаса $n = 3[mol]$, на температури $t = 0°C$, ако при овоме притисак гаса опадне на 1/5 првобитног?

Колико пута ће повећа запремина гаса?

Рјешење:

$A = ?$

$n = 3[mol]$

$t = 0°C$

$P_2 = P_1 \frac{1}{5} [Pa]$

$V_2 = ?$

Када P_1 помножимо са $\frac{1}{5}$, P_1 опадне за $\frac{1}{5}$.

Пошто ће ради о изотермској експанзији $(\Delta T = 0)$ рад који гас изврши дат је формулом:

$$\boxed{A = nRT \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

$$A = nRT \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_1}{\frac{P_1}{5}}\right) = nRT \ln 5$$

$$= 3[mol] \cdot 8,314[J/mol \cdot K] \cdot 273,15[K] \cdot \ln 5 = 10,965[J]$$

Из општег закона за идеалне гасове, можемо изразити V_2.

$$\frac{P_1 V_1}{T} = \frac{P_2 V_2}{T} \ldots / \cdot T \quad \text{Бојл - Мариотов закон}$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \longrightarrow V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} = \frac{P_1 V_1}{\frac{P_1}{5}}$$

$$V_2 = 5 V_1$$ овиме смо потврдили

Бојл - Мариотов закон.

Зад. 797. Гас се налази у цилиндру са покретним клипом почетне запремине $V_1 = 2\,[L]$ и на притиску $p_1 = 0{,}1\,[MPa]$.

a) Колики се рад изврши изотермској компресији ако се притисак гаса током компресије повиси на $p_2 = 0{,}2\,[MPa]$?

b) Колика је количина топлоте доведена гасу?

$V_1 = 2\,[L]$

$P_1 = 0{,}1\,[MPa]$

a) $A = ?$

$\Delta T = 0$

$P = 0{,}2\,[MPa]$

$$A = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} = P_1 V_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = -139\,[J]$$

Негативан предзнак рада значи да рад није извршио гас, рад је извршен над гасом.

b) $Q = ?$, $\Delta T = 0$

$$Q = \Delta U + A$$

$$Q = \frac{j}{2} nR\Delta T + A = 0 + A \rightarrow Q = A = -139\,[J]$$

Расхладна машина.

Зад. 798. У цилиндру са покретним клипом, запремине $V = 1[L]$, налази се азот на стандардним условима.

Колика је запремина азота ако се адијабатски рашири тако да му је крајњи притисак $P_2 = 50,5\,[kPa]$?

Рјешење:

$V = 1[L]$

$T = 273,15\,[K]$

$P = 101\,325\,[Pa]$

$V_2 = ?$

$P_2 = 50,5\,[kPa]$

За азот (двоатомски гас) је $j = 5$.

$$p_1 V_1^{x} = p_2 V_2^{x} \rightarrow V_2^{x} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right) V_1^{x}$$

[redacted]

$$V_2 = V_1 \sqrt[x]{\frac{p_1}{p_2}} = 1,64\,[L]$$

Зад. 799. За колико се снизи притисак гаса у суду из кога нагло истекне (1/2) његове садржине?

Узети да је адијабатска константа гаса $x = 1,32$.

$V_2 = \frac{1}{2} V_1$

$x = 1,32$

$$P_1 V_1^{x} = P_2 V_2^{x}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{x} = \left(\frac{V_1}{2V_1}\right)^{x} = (0,5)^{1,32} = 2,5$$

Зад. 800. Извесна количина хелијума се налази на стандардним условима. Колика ће да буде температура и притисак ове количине хелијума ако се адијабатски сабије на (1/20) првобитне запремине?

Рјешење:

(Хелијум $j = 3$), Адијабатска константа за хелијум $\varkappa = 1,66$

$T = 273,15 [K]$

$P = 101\,325 [Pa]$

$P_2 = ?$

$T_2 = ?$

$V_2 = \frac{1}{20} V_1$

$$P V_1^{\varkappa} = P_2 V_2^{\varkappa} \quad (1)$$

$$P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} P_1 = \left(\frac{20 V_1}{V_1}\right)^{1,66} P = 14,6 [MPa]$$

$$T_1 V_1^{\varkappa - 1} = T_2 V_2^{\varkappa - 1} \quad (2)$$

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} T_1 = (20)^{0,66} T = 2120 [K]$$

(1) Адијабатски процес, непознате величине су притисак или запремина, поставимо једначину облика: $P_1 V_1^{\varkappa} = P_2 V_2^{\varkappa}$

гаса

(2) Адијабатски процес, температура гаса је непозната величина док су остали параметри познати, поставимо једначину облика: $T_1 V_1^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1}$

Извесна количина хелијума се адијабатски сабија (мења јој се запремина). Интересују нас вредности притиска и температуре извесне количине хелијума када запремину V_1 сабијамо на њену двадесетину ($V_2 = \frac{1}{20} V_1$).

Када адијабатски процес сабије запремину, однос између притиска и запремине дат је релацијом (1), а однос између запремине и температуре гаса дат је релацијом (2).

$$(1) \quad PV^{\varkappa} = const$$

$$(2) \quad TV^{\varkappa - 1} = const$$

$$(3) \quad TP^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = const$$

$\rightarrow$ Једначине адијабатских процеса

Када препознамо о ком се адијабатском процесу ради (шта се са чиме мијења) примјенимо једну од ове 3 формуле...

Зад. 801. У суду се налази ваздух на температури $t_1 = 0°C$. Колика је температура ваздуха после адијабатске експанзије при којој се притисак гаса снизи на 1/3 његове првобитне вредности? Адијабатска константа за ваздух је $\chi = 1,4$.

Решење: Користимо релацију која повезује температуру и притисак гаса код адијабатских процеса:

$t_1 = 0°C$

$t_2 = ?$

$P_2 = \frac{1}{3} P_1$

$\chi = 1,4$

$$\boxed{TP^{\frac{1-\chi}{\chi}} = const}$$

$$t_1 P_1^{\frac{1-\chi}{\chi}} = t_2 P_2^{\frac{1-\chi}{\chi}}$$

$$t_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\chi}{\chi}} t_1 = 3^{\frac{1-\chi}{\chi}} \cdot t_1$$

$$t_2 \approx 195,2\,[K]$$

Зад. 802. Извесна количина кисеоника се налази у суду на притиску $P_1 = 505\,[kPa]$ и температури $t_1 = 5°C$.

Колики проценат гаса треба пошто да истекне из суда (без размене унутрашње енергије са околином) да би притисак гаса у суду опао на $P_2 = 303\,[kPa]$?

Рјешење: Без размене унутрашње енергије са околином $\Rightarrow$ адијабатски процес.

$P_1 = 505\,[kPa]$
$t_1 = 5°C$
$\% = ?(V)$
$P_2 = 303\,[kPa]$

$$P_1 V_1^{\varkappa} = P_2 V_2^{\varkappa}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} \longrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt[\varkappa]{\frac{P_1}{P_2}} = \left(\frac{505\,[kPa]}{303\,[kPa]}\right)^{\frac{1}{1,4}}$$

па је $\frac{V_2}{V_1} = 1,44$

Зад. 806. За колико се разликују радови које је потребно извршити да би се остварила адијабатска односно изотермска компресија количине гаса $n = 3[mol]$, при чему се његова запремина смањи од $V_1 = 4[L]$ на $V_2 = 2[L]$? Почетна температура гаса је $0°C$, док је његова адијабатска константа $\varkappa = 1{,}3$.

Рјешење:

$\Delta A = ?$

$n = 3[mol]$

$V_1 = 4[L]$

$V_2 = 2[L]$

$t_0 = 0°C$

$\varkappa = 1{,}3$

Рад гаса при адијабатској компресији дат је релацијом:

$$A = \frac{nRt_0}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right]$$

Рад гаса при изотермској компресији дат је релацијом: $A = nRt_0 \ln\frac{V_2}{V_1}$

Сада је ΔA разлика између адијабатског и изотермског рада посматране количине гаса.

$$A = \frac{nRt_0}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right] - nRt_0 \ln\frac{V_2}{V_1} = nRt_0\left[\frac{1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right] - \ln\frac{V_2}{V_1}\right]$$

$$= 3[mol] \cdot 8{,}314\left[\frac{J}{mol \cdot K}\right] \cdot 273{,}15[K] \cdot \left[\frac{1}{0{,}3} \cdot \left[1 - 2^{0{,}3}\right] - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$\approx 10\,492[J]$$

Зад. 807. За колико ће снизи температура количини кисеоника $n = 3[mol]$ ако се при његовој адијабатској експанзији добије рад $A = 1[kJ]$?

Рјешење:

$\Delta t = 0$

$n = 3[mol]$

$A = 1[kJ]$

Гас је извршио адијабатску експанзију која износи $1[kJ]$.

$$A = \frac{nRT}{\varkappa-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}\right]$$

Из једначина адијабатских процеса однос температуре и запремине гаса дат је релацијом: $TV^{\varkappa-1} = const.$

$$\underbrace{t_1 V_1^{\varkappa-1} = t_2 V_2^{\varkappa-1}}$$

[redacted] $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \frac{t_2}{t_1}$

$$A = \left[1-\frac{t_2}{t_1}\right]\cdot\frac{nRt_1}{\varkappa-1} = \frac{nRt_1}{\varkappa-1} - \frac{nRt_2}{\varkappa-1} =$$ [redacted]

$$A = \frac{nR}{\varkappa-1}(t_1-t_2) \rightarrow$$ [redacted]

$$t_1 - t_2 = \frac{A(\varkappa-1)}{nR} = 289{,}15[K]$$

За кисеоник

$\varkappa = 1{,}4$

Зад. 808. Колики је степен корисног дејства идеалне топлотне машине, чији се рад заснива на Карноовом циклусу, ако је највећа разлика температура радног тела (идеалног гаса) $\Delta T = 100[K]$, а највиша температура у току циклуса $T_1 = 400[K]$?

Рјешење:

$\eta = ?$
Карноов циклус
$\Delta T = 100[K]$
$T_1 = 400[K]$

Ако се рад топлотне машине заснива на Карноовом циклусу, онда је:

[redacted] $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

T_1 = температура грејног система

T_2 = температура хладњака

$$T_1 - T_2 = \Delta T$$

$$T_1 = \Delta T + T_2$$

$$400 = 100 + T_2$$

$$T_2 = 300[K]$$

Степен корисног дејства: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(400-300)[K]}{400[K]} = 0{,}25$$

Зад. 809. Колики је степен корисног дејства идеалне топлотне машине, чији се рад заснива на Карноовом циклусу, ако се у току једног циклуса утроши количина топлоте $Q = 42[kJ]$, при чему се вода у хладњаку машине загреје за $\Delta T = 2°C$? Маса воде у хладњаку је $m = 4[kg]$.

Рјешење:

$\eta = ?$

Карноов циклус

$Q = 42[kJ]$

$\Delta T = 2°C$

$m = 4[kg]$

Степен корисног дејства идеалне топлотне машине је:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{mc\Delta t}{Q} = 0,202$$

50. Ширење чврстих тијела при загријавању

Термичко ширење чврстих тела састоји се у повећању њихове запремине јер се тело шири у сва три правца.

Замислимо неко чврсто тело. Свако чврсто тело има своју висину, ширину и дужину (своју запремину) па га можемо описати Декартовим тродимензио-налним координатним системом тако што ћемо његовој висини, ширини и дужини придружити по једну тачку Декартовог тродимензионалног координатног система. За наше замишљено тијело нека то буду тачке $(0,0,z)$ = висина тела, $(0,y,0)$ = ширина тела, $(x,0,0)$ = дужина тела, при чему $z, y, x \in \mathbb{R}^+$.

Ако су двије од три величине посматраног тела занемарљиве у односу на трећу (рецимо штап дужине L_0, $L_0 \gg$ (висина/ширина) штапа) онда при загревању посматрамо само промјену те истакнуте величине. У том случају тело се линеарно шири.

Нека је на $0°C$ дужина неког штапа L_0. При загревању за [redacted] $t°C$ штап ће се издужити и имаће дужину L_t.

Релација која повезује ове двије величине гласи:

$$L_t = L_0(1 + at + a't^2 + a''t^3 + \ldots + \ldots) \quad L(t) = L_0(1 + at + a't^2 + a''t^3 + \ldots)$$

гдје су $a, a', a''\ldots$ константе. Када се израчунава L у малом опсегу температуре, нпр. од $0°$ до $100°C$ имамо апроксимативну релацију: $L_t = L_0(1 + at)$

Ако је посматрано тело нека плоча занемарљиве дужине, а уочљиве висине и ширине, онда при загревању плоче њена висина и ширина ће линеарно шире. Нека је на $0°C$ висина плоче једнака b_0, а ширина плоче једнака a_0. Површина такве плоче на $0°C$ је једнака $S_0 = b_0 a_0$. Загревањем плоче за $t°C$ странице плоче ће линеарно шире (издужују). Математички:

$$\left.\begin{array}{l} a_t = a_0(1+\alpha t) \\ b_t = b_0(1+\alpha t) \end{array}\right] \longrightarrow S_t = a_0 b_0 (1+\alpha t)^2 = S_0(1+\alpha t)^2 = S_0(1+2\alpha t+\alpha^2 t^2)$$

Површинско ширење чврстих тела при загревању

За мали опсег температура: $\boxed{S_t = (1+\beta t)S_0}$ при чему је $\beta = 2\alpha$ температурски коефицијент површинског ширења.

Ако је посматрано тело рецимо нека коцка видљиве висине, дужине и ширине онда је на $0°C$ посматрана коцка димензија (z_0, y_0, x_0). Загревањем посматране коцке за $t°C$ она ће шири у сва три правца. Математички:

$$\left.\begin{array}{l} z_t = z_0(1+\alpha t) \\ y_t = y_0(1+\alpha t) \\ x_t = x_0(1+\alpha t) \end{array}\right] \longrightarrow V_t = z_0 y_0 x_0 (1+\alpha t)^3 = \overbrace{z_0 y_0 x_0}^{V_0}(1+3\alpha t+3\alpha^2 t^2+\alpha^3 t^3)$$

за мали опсег температура имамо апроксимацију:

$$V_t = V_0(1+\gamma t)$$

Запреминско ширење чврстог тела при загревању

при чему је [redacted] $\gamma = 3\alpha$ температурски коефицијент запреминског ширења.

51. Ширење гасова при загревању

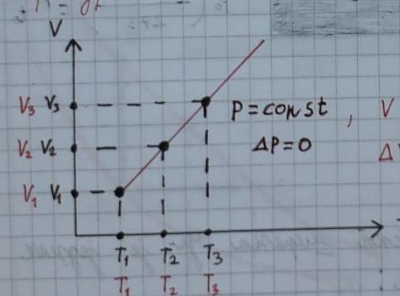
Сваки гас је одређен са 4 податка: запремина, притисак температура и маса гаса.

Гасови се при загревању знатно више шире од чврстих и течних тела. С обзиром на то да гасови мењају своју запремину са променом притиска то се термичко ширење гасова посматра само под условом да се дата количина посматраног гаса одржава под сталним притиском.

Тада се при загревању, термичко ширење гасова мења по закону који има исти облик као и апроксимативни закон ширења чврстих тела при загревању, тј. гасови се при загревању шире према релацији:

$V_t = V_0(1+\gamma t)$ запреминско ширење, $(P = const)$ (1)

Релација (1) се зове "GEJ-LISAKOV закон". При сталном притиску гаса, запремине гаса се односе као одговарајуће температуре гаса.



$P = const$, $V = const$

$\Delta P = 0$ $\Delta V = 0$

■ Изоборни процес ■ Изохорни процес

Isobaric process Isochoric process

Термичко ширење гасова се може посматрати тако да се њихова запремина одржава константном. У том случају притисак гаса се мјери по релацији:

(2) $p_t = p_0(1+\gamma t)$, p_0 је притисак гаса на 0°C, а $V = const.$

Релација (2) је Šarlov закон за изохорне процесе.

При сталној запремини гаса, притисци гаса се односе као одговарајуће температуре гаса.

Увођењем апсолутне температуре, то јест температуре мјерене од апсолутне нуле релације (1) и (2) се могу написати у облику:

$$\left.V = V_0(1+\gamma t) = V_0\left(1+\frac{1}{273}t\right) = V_0\left(\frac{273+t}{273}\right) = V_0\frac{t}{t_0}\right] \rightarrow$$

$$\left.\frac{V}{V_0} = \frac{t}{t_0}\right] \rightarrow \frac{V}{t} = const$$

$p = p_0(1+\gamma t) = p_0\left(1+\frac{1}{273}t\right) =$ [redacted] $p_0\left(\frac{273+t}{273}\right) = p_0\frac{t}{t_0}\Big] \rightarrow$

$$\left.\frac{p}{p_0} = \frac{t}{t_0}\right] \rightarrow \frac{p}{t} = const$$

Коефицијент гасног запреминског ширења γ је једнак за све гасове и износи:

$$\gamma = \frac{1}{273°C}$$

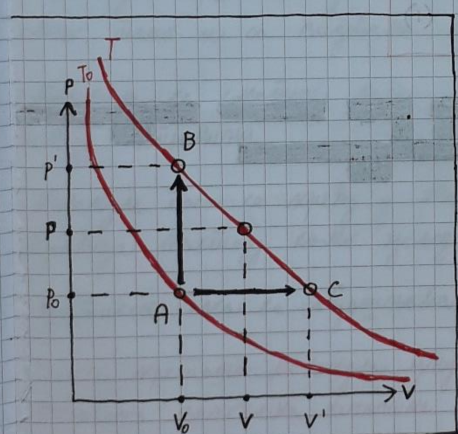
52. Једначина гасног стања

Код гасова се у великој мјери могу мењати запремина, притисак и температура. Ове величине одређују стање неког гаса и називају се основни параметри. Код гас мијења стања онда се у општем случају мењају све три величине.

Нека се у неком суду налази известан гас на температури T_0, запремини V_0 и притиску p_0. Тај гас се загревањем (изоборно/изохорно) може превести на температуру T, запремину V и притисак p.
Изведимо (докажимо) ово експериментално.

Повећањем температуре гаса по GeJ-LiSak-Šarlov-im законима:

$$V' = \frac{V_0}{T_0}T, \quad \Delta P = 0 \quad и \quad p' = \frac{p_0}{T_0}T, \quad \Delta V = 0$$



Са слике видимо:

$V_0 < V < V'$. Изобарским процесом гас почетног стања (T_0, V_0, p_0) смо превели на стање (T, V, p_0). Затим смо гас изохорним процесом превели са стања (T, V, p_0) на стање (T, V, p). (У природи величине као што су температура, вријеме су непрекидне функције. Због грешке људског фактора, ограничене прецизности мјерних инструмената..

Да би гас превели на запремину V (притисак P) ми се фокусирамо на опсег (V_0, V') то јест (P_0, P') док стање не потрефимо тражену вриједност.)

Како су стања B и C на истој температури T по Бојл-Мариотовом закону (Robert Boyle-Edme Marriote):

$$PV = P_0 V' = P' V_0 = P_0 \frac{V_0}{T_0} T = \frac{P_0}{T_0} V_0 T = const$$

одакле и проистиче Бојл-Мариотов закон:

На сталну температуру, при непромењивој количини гаса производ притиска гаса и запремине гаса остаје константан. То значи, колико пута повећамо притисак гаса, толико пута ће мо смањити запремину гаса и обратно. Математички:

$$\boxed{\frac{PV}{T} = const \qquad (1)}$$

[redacted]

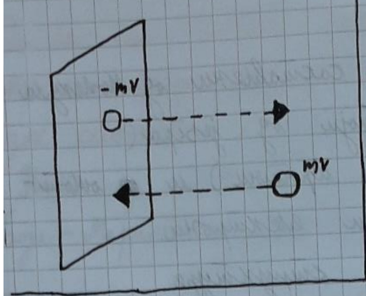
53. Кинетичка теорија гасова

Гасови су као и сва друга тела састављени од молекула а молекули из атома. Атом се састоји од језгра (неутрони и позитивно наелектрисани протони) и омотача који чине негативно наелектрисани електрони. Дакле молекуле су честице сложене структуре.

Кинетичка теорија гасова полазећи од једноставног модела квантитативно описује понашање и особине гасова повезујући mikroskopske особине гасова (нпр. притисак, запремина...) са њиховим mikroskopskim особинама (нпр. маса, брзина...). По кинетичкој теорији гасова:

- Молекули неког гаса су једнаке еластичне куглице сферног облика;
- Молекуле врше искључиво еластичне судоре како међусобно тако и са зидовима суда у којем се налазе;
- Молекуле се сматрају материјалним тачкама, мада реално имају запремину.
- Молекуле гаса се крећу у свим правцима, а промјене правца настају само услед судара;
- Притисак гаса се објашњава великим бројем судара;

Дакле кретање молекула унутар неког суда описујемо Newton's законима механике.



Молекул масе m брзином v се креће према зиду суда. Приликом судара са зидом суда (другим молекулима) мијењају се правац и смјер кретања молекула.

Промјена импулса је: $\Delta P = mv - (-$[redacted]$mV) = 2mV$.

Да се 2 узастопна судара у исти зид дешавају када молекул пређе 2 дужине замишљене коцке за вријеме Δt:

$$\Delta t = \frac{2\Delta L}{v}$$

Сила која дјелује на молекул који се налази у некој замишљеној коцки (суду) је:

$$F = \frac{n}{3}\frac{mv^2}{\Delta L}$$

n = број молекула система, $\frac{n}{3}$ = број молекула у сва 3 правца замишљене коцке.

Притисак гаса се [redacted] објашњава великим бројем судара молекула [redacted] који гурају површ S под утицајем силе F то јест:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{n}{3}\frac{mv^2}{V} \rightarrow pV = \frac{n}{3}mv^2$$

Концентрација n молекула гаса запремине V је

$n_0 = \frac{n}{V}$ па је притисак:

$$p = \frac{n_0}{3} m v^2 = \frac{2}{3} n_0 E_k = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} k T = n_0 k T$$

где је E_k кинетичка енергија молекула гаса на температури T, $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ [J/K] Болцманова константа.

2. Geometrijska optika

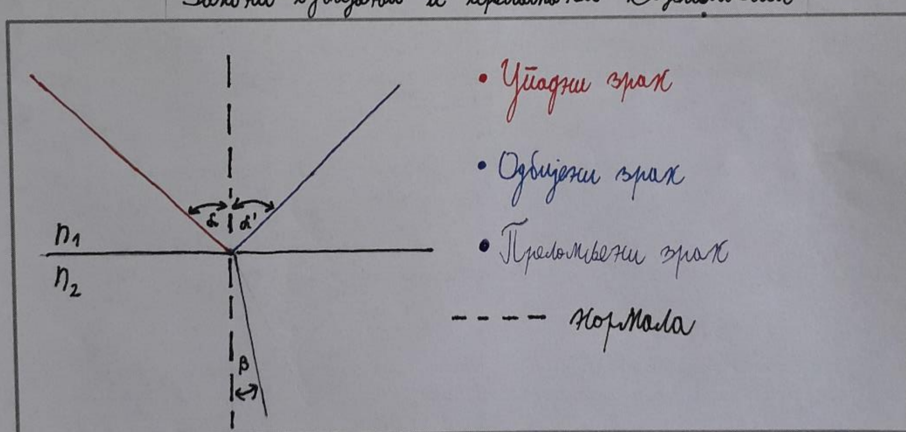
Svjetlosni izvori:
-primarni (toplotni, luminescentni, stimulisani)
-sekundarni (tijela od koje se svjetlost odbija)
-prirodni
-vještački

Brzina svjetlosti (kroz vakuum):
$c = 299\,792\,500 \pm 200\ [\frac{m}{s}]$

Apsolutni indeks prelamanja n neke sredine definiše se kao količnik brzine prostiranja svjetlosti u vakuumu c i brzine prostiranja svjetlosti u toj sredini V , tj.

$n = \frac{c}{V}$

Закони одбијања и преламања свјетлости



Prema zakonu odbijanja svjetlosti upadni ugao α jednak je odbojnom uglu α' , tj.
$\alpha = \alpha'$
pri čemu upadni zrak, normala i odbijeni zrak leže u istoj ravni.

Relativni indeks prelamanja sredine u koju svjetlost ulazi (druge sredine) u odnosu na sredinu kroz koju se ona prostire prije nailaska na graničnu površinu (prva sredina) dat je relacijom:

$$n_{2/1} = \frac{V_1}{V_2}$$

gdje su V_1 i V_2 – brzine prostiranja svjetlosti u prvoj i drugoj sredini, ili

$$n_{2/1} = \frac{n_2}{n_1}$$

gdje su n_1 i n_2 – apsolutni indeksi prelamanja prve i druge sredine.

Prema zakonu prelamanja je :

$$n_1\sin(\alpha) = n_2\sin(\beta)$$

gdje je n_1 – apsolutni indeks prelamanja sredine iz koje svjetlosni talas izlazi, n_2 – apsolutni indeks prelamanja sredine u koju svjetlosni talas ulazi, dok su α i β – upadni i prelomni ugao, pri čemu upadni zrak, normala i prelomljeni zrak leži u istoj ravni.

U opštem slučaju je :

$$n \cdot \sin(\text{ugao između pravca prostiranja talasa i normale}) = inv$$

gdje je n – apsolutni indeks prelamanja sredine kroz koju se svjetlost prostire.

Prilikom nailaska talasa na optičku ređu sredinu može da nastane totalna refleksija ako je upadni ugao α veći od graničnog ugla totalne refleksije α_g, koji je određen relacijom

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

gdje su n_1 i n_2 – apsolutni indeksi prelamanja optički gušće i ređe sredine.

Ako se svjetlosni talas prostire kroz sredinu apsolutnog indeksa prelamanja n, onda pređenom putu l_0 (geometrijska dužina puta) odgovara optička dužina puta

$$l = nl_0$$

dok je talsna dužina svjetlosti u ovoj sredini

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

gdje je λ_0 – talasna dužina posmatrana monohromatske svjetlosti u vakuumu.

Indeks prelamanja n supstancije od koje je načinjena optička prizma može se odrediti pomoću relacije:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta+\delta_{min}}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

gdje je Θ - ugao prizme, a δ_{min} – minimalni ugao skretanja zraka svjetlosti prilikom prolaska kroz prizmu.
Za optički klin, tj. optičku prizmu malog ugla Θ može da se koristi relacija:

$$\delta_{min} = (n-1)\Theta$$

Zavisnost indeksa prelamanja supstancije od talasne dužine $n(\lambda)$ je složena. U praksi je poznata Košijeva relacija za disperiozne supstancije, koja ima oblik:

$$n(\lambda) = \alpha + \frac{b}{\lambda^2}$$

gdje su α i b – konstante čija vrijednost zavisi od vrste disperzione supstancije.

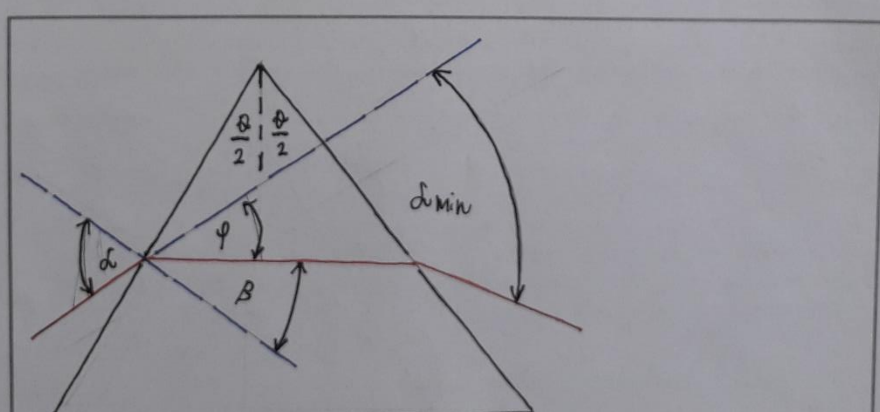
(дисперзија = расипање)

Ako su n_D, n_F, i n_C apsolutni indeksi prelamanja supstancije za monohromatske svetlosti (linije vodonika) talasnih dužina $\lambda_D = 589{,}3[nm]$, $\lambda_F = 486{,}1[nm]$ i $\lambda_C = 656{,}3[nm]$ onda se

$n_F - n_C$ naziva srednja disperzija

$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$ naziva relativna disperzija

$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$ koeficjent disperzije (ili Abeov broj)



2.

Žižna daljina f sfernog ogledala jednaka je polovini poluprečnika krivine R sferne površine ogledala, tj.

$$f = \frac{R}{2}$$

Jednačina sfernog ogledala ima oblik:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

Gdje je f – žižna daljina ogledala, a p i l rastojanje predmeta i lika od temena ogledala. U jednačini sfernih ogledala f se uzima kao pozitivna veličina za izdubljena (konkavna) ogledala, a kao negativna veličina za ispupčena (konveksna) ogledala. Rastojanja p i l uzimaju se kao pozitivne veličine za realne predmete i likove, a kao negativne veličine – za imaginarne predmete i likove.

Uvećanje (linearno) sfernih ogledala definisano je relacijom

$$\mu = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}$$

gdje su P i L – linearne veličine predmeta i lika.
Recipročna vrijednost žižne daljine f sočiva naziva se optička moć i obilježava se sa ω.
Naime,

$$\omega = \frac{1}{f}$$

Jedinica optičke moći je dioptrija (D), tj. $[\omega] = \frac{1}{[f]} = \frac{1}{m} = D$

Ako se svjetlost prelama na sfernoj graničnoj površini, poluprečnika krivine R, onda za taj slučaj važi relacija:

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{l}$$

gdje su n_1 i n_2 – apsolutni indeksi prelamanja sredina u kojima se nalaze predmet i lik, a p i l – rastojanja predmeta i lika od temena granične površine. Količnik $(n_2 - n_1) / R$ naziva se optička moć sferne površine.

Optička moć sfernog sočiva koje je izrađeno od supstancije apsolutnog indeksa prelamanja n_1, a čiji su poluprečnici krivine R_1 i R_2, određena je relacijom:

$$\omega = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

gdje je n_2 – apsolutni indeks prelamanja sredine u kojoj se sočivo nalazi.
U prethodnoj relaciji poluprečnike krivine treba uzeti kao pozitivne veličine za ispupčene površine, a kao negativne veličine – izdugubljene površine. Na taj način se dobija da je žižna daljina (optička moć) sabirnih sočiva pozitivna, a rasipnih negativna.

Ekvivalentna optička moć sistema od n spojenih tankih sočiva je:

$$\omega_e = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$$

Ako je reč o dva sočiva optičkih moći ω_1 i ω_2 , koja se nalaze na rastojanju α, ekvivalentna optička moć ovog sistema sočiva je:

$$\omega_e = \omega_1 + \omega_2 - \alpha\omega_1\omega_2$$

ili tražena odgovarajućim žižnim daljinama:

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\alpha}{f_1 f_2}$$

Uvećanje lupe, žižne daljine f, dato je relacijom:

$$u \approx \frac{s}{f}$$

gdje je s – daljina jasnog vida posmatrača (za normalan organ vida iznosi oko 0,25[m]).

Uvećanje teleskopa je:

$$u \approx \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

gdje su f_{ob} i f_{ok} – žižne daljine njegovog objektiva i okulara, dok je za mikroskop:

$$u = \frac{ls}{f_{ob} f_{ok}}$$

gdje je *l*- dužina cevi mikroskopa(rastojanje između objektiva i okulara), a s – daljina jasnog vida posmatrača.

Zadatak 1305. Imajući u vidu da je magnetna konstanta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{Tm}{A}]$, a električna konstanta $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} [\frac{C^2}{N \cdot m^2}]$, izračunati brzinu prostiranja svetlosti u vakuumu.

Zadatak 1306. Koliki je indeks prelamanja stakla ($\mu_r = 1$) čija je relativna permitivnost $\varepsilon_r = 2,5$?

Zadatak 1307. Kolika je brzina prostiranja svetlosti u staklu čiji je indeks prelamanja $n = 1,5$?

1305. $c = ?$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{36\pi} \cdot 10^{-16}}} \cong \frac{1}{\sqrt{0,1111 \cdot 10^{-16}}}$$

$$\approx 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Напомена: У рачуну се може слободно узети да је:

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right]$$

$$c = 299\ 792\ 500 \pm 200 \left[\frac{m}{s}\right]$$

1306.

[redacted]

$$n = c\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r}$$

$$= \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1,58$$

1307. $V = ?$

Апсолутни индекс преламања (n) неке средине дефинише се као количник брзине простирања светлости кроз вакуум (c) и брзине простирања светлости у тој средини (V).

$$n = \frac{c}{V}$$

$$V = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^{8} \left[\frac{m}{s}\right]}{1,5} = 2 \cdot 10^{8} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zadatak 1308. Dva paralelna snopa svetlosnih talasa kreću se kroz dve sredine različitih optičkih gustina (vakuum i voda). Koliko je duže vreme prostiranja svetlosnih talasa kroz vodu u odnosu na vreme prostiranja u vakuumu ako je geometrijska dužina njihovog puta l_0 = 10[m] ?

Брзина простирања светлости кроз вакуум једнака је $c = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]$ па пут дужине l_0 у вакуум-у светлост пређе за време:

$$t_1 = \frac{l_0}{c} = 0{,}000000033\,[s]$$

Запамти

Индекс (апсолутни индекс) преламања воде је $\boxed{n = 1{,}33}$ па је брзина простирања светлости кроз воду једнака $V = \frac{c}{1{,}33}$ па пут дужине l_0 у води светлост пређе за време:

$$t_2 = \frac{l_0}{V} = 0{,}000000044\,[s]$$

што је у односу на t_1 дуже за $0{,}000000011\,[s]$

Zadatak 1313. Ako je indeks prelamanja vode (u odnosu na vazduh) $n_1 = 1{,}33$, a stakla $n_2 = 1{,}6$, koliki je indeks prelamanja stakla u odnosu na vodu ?

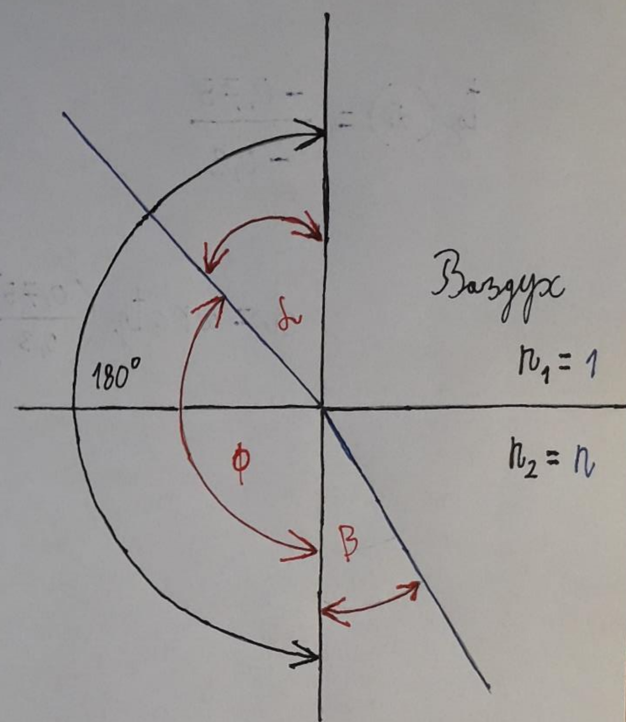
$$\boxed{n_{2/1} = ?}$$

Релативни индекс преламања средине у коју светлост улази (друге средине) у односу на средину кроз коју се она простире пре наиласка на граничну површину (прва средина) дат је релацијом:

$n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ па је [redacted] $n_{2/1} = \frac{n_2}{n_1} = 1{,}2$

Zadatak 1318. Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti na graničnu površinu vazduh – staklo da bi ugao između upadnog i prelomnog zraka bio φ = 150° ?
Smatrati da je indeks prelamanja stakla n = 1,5.

$\boxed{\alpha = ?}$



Из закона преламања светлости:

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$$

Имамо да је:

$$\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$$

$$180^\circ - \alpha + \beta = \phi$$

што се очита са слике

$$\beta - \alpha = \phi - 180^\circ$$

$$\beta = \alpha - 30^\circ$$

$$\sin(\alpha) = n \sin(\alpha - 30^\circ)$$

$$\sin(\alpha) = n\left[\sin(\alpha)\cos(30^\circ) - \cos(\alpha)\sin(30^\circ)\right]$$

$$\sin(\alpha) = n \sin(\alpha) 0{,}866 - n \cos(\alpha) 0{,}5$$

$$\sin(\alpha) = 1{,}3 \sin(\alpha) - 0{,}75 \cos(\alpha) \quad : \Big/ \frac{\cos(\alpha)}{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$tg(\alpha) - 1{,}3\,tg(\alpha) = -0{,}75$$

$$tg(\alpha)(1-1{,}3) = -0{,}75$$

$$tg(\alpha) = \frac{-0{,}75}{-0{,}3}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0{,}75}{0{,}3}\right) = 68^\circ\ 19' \ :$$

Zadatak 1318. Nepoznata (tražena) veličina je ugao $\boldsymbol{\alpha}$ koji upadni zrak zaklapa sa normalom.
Pošto se svjetlosni zrak prelama, prelomljeni zrak sa normalom zaklapa neki ugao $\boldsymbol{\beta}$ odma pišemo relaciju koja opisuje ovu situaciju i povezuje upadni-prelomni ugao.

$\mathbf{n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)}$

Na slici koju sam ja nacrtao donji krak ugla φ je trebalo produžiti sve do prelomnog zraka, kada se to uradi jasno si vidi da je **($180° - \alpha + \beta = \varphi$)**. Kako su φ i 180° poznate veličine preko njih utvrdimo vezu između α i β pa to kada uvrstimo u gornju relaciju dobijamo izraz kojim je izražava nepoznato α.
SLIKA: tacka u kojoj upadni zrak dolazi u dodir sa graničnom površinom je označena sa nekom zamišljenom normalnom (vertikalna osa), horizontalna osa = granična površ između prve i druge optičke sredine, donji krak ugla φ treba produžiti sve do prelomnog zraka, ostalo je sve dobro.

Zadatak 1319. Na slobodnu površinu vode pada zrak svetlosti pod uglom $\alpha = 30°$ prema normali.

a) Koliki je prelomni ugao ?

b) Odakle i pod kojim uglom treba da dođe zrak svetlosti da bi se na ovoj graničnoj površini totalno reflektovao ?

c) Koliko puta je manja brzina prostiranja svetlosti u vodi nego u vazduhu ?

Indeks prelamanja vode je $n = 1{,}34$.

$\boxed{a}$ $\beta = ?$

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta) \ \ldots$$

$n_1 = 1$ апсолутни индекс преламања [redacted] светлости у вакуум-у.

$$\sin(30°) = 1{,}34 \sin(\beta)$$

$$\sin(\beta) = \frac{0{,}5}{1{,}34}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{0{,}5}{1{,}34}\right) = 22°$$

$\boxed{b}$ $\alpha_g = ?$

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 48°$$

$\boxed{c}$ $$V = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]}{1{,}34} = 223\ 880\ 597 \left[\frac{m}{s}\right]$$

што је 1,34 пута мање од c.

Zadatak 1319. b) da bi došlo do pojave totalne refleksije svjetlosni zrak mora preći iz optički-gušće u optički-rjeđu sredinu, dakle mora preći iz vode n = 1,34 u vazduh $n = {}^{c}/_{c} = 1$, sada granični ugao totalne refleksije odredimo relacijom:

$$\boldsymbol{\alpha_g = \mathbf{arcsin}\left(\frac{n_{optički-rjeđa-sredina, sredina\ u\ koju\ svjetlost\ ulazi}}{n_{optički-gušća-sredina, sredina\ iz\ koje\ svjetlost\ dolazi}}\right)}$$

Zadatak 1320. Koliki je granični ugao totalne refleksije za graničnu površinu dijamant-vazduh ako je apsolutni indeks prelamanja dijamanta n = 2,42 ?

$$\boxed{\alpha_g = ?}$$

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{\text{средина у коју светлост улази – ДРУГА средина}}{\text{средина из које долази светлост – ПРВА средина}}\right) =$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 24^\circ\ 4'$$

Zadatak 1321. Zrak svetlosti pada na površinu neke tečnosti pod uglom α = 30°, a prelama se pod uglom β = 21°. Koliki je indeks prelamanja ove tečnosti, a koliki je granični ugao totalne refleksije za ovu graničnu površinu ?

$n_2 = ?$

$\alpha_g = ?$

n_2 ћемо одредити из закона преламања светлости.

$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$ при чему је $n_1 = \frac{c}{c} = 1$ апсолутни индекс преламања вакуум-ске средине.

$$n_2 = \frac{1 \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(21^\circ)} = \approx 1,4$$

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \approx 45^\circ\ 58'$$

Zadatak 1321. Ako u zadatku (kao što je u ovom slučaju) nije eksplicitno naglašeno iz koje sredine dolazi svjetlosni zrak onda se podrazumijeva da on dolazi iz vakuum-a (vazduh-a). Za vakuum odnosno vazduh je $n = \frac{c}{c} = 1$.

str. 1. Слика:

n_1 = вакуум

n_2 = дата течност

$\alpha = 30^\circ$

$\beta = 21^\circ$

Zadatak 1322. Zrak svetlosti, dolazeći iz stakla, indeksa prelamanja $n_1 = 1{,}7$, pada na graničnu površinu staklo-vazduh.

a) Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti na ovu graničnu površinu da bi se svetlost totalno refloktovala ?

b) Koliko treba povećati ovaj ugao ako se iznad stakla nalazi voda, indeksa prelamanja $n_2 = 1{,}33$?

$\boxed{a}$ $\alpha'_g = ?$

Зрак светлости из стаклене средине (ПРВЕ средине) прелази у ваздух (ДРУГУ средину). И стакло и ваздух су ОПТИЧКЕ средине.

$$\alpha'_g = \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right) = 36^\circ\ 1'$$

$\boxed{b}$ $\alpha''_g = ?$; $\Delta\alpha_g = ?$

Зрак светлости из [redacted] стакла (ПРВЕ средине) прелази у воду (ДРУГА оптичка средина).

$$\alpha''_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 51'\ 28'$$

$$\Delta\alpha_g = \alpha''_g - \alpha'_g = 15^\circ\ 27'$$

Zadatak 1321. Zrak svetlosti pada na površinu neke tečnosti pod uglom α = 30°, a prelama se pod uglom β = 21°. Koliki je indeks prelamanja ove tečnosti, a koliki je granični ugao totalne refleksije za ovu graničnu površinu ?

$$\boxed{\begin{array}{l} n_2 = ? \\ \alpha_g = ? \end{array}}$$

n_2 ћемо одредити из закона преламања светлости.

$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$ при чему је $n_1 = \frac{c}{c} = 1$ апсолутни индекс преламања вакуум - ске средине.

$$n_2 = \frac{1 \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(21^\circ)} = \approx 1,4$$

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \approx 45^\circ\ 58'$$

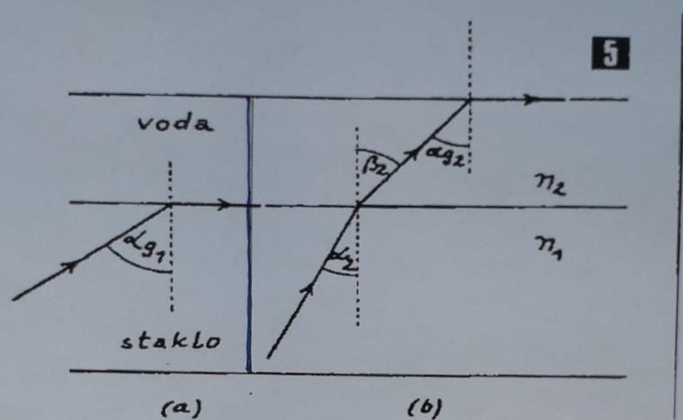
1 / n2

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n \text{ средине у коју улази светлосни зрак}}{n \text{ средине из које долази светлосни зрак}}\right) \quad (1)$$

Zadatak 1325. Iznad staklene ploče, indeksa prelamanja n_1 = 1,60, nalazi se sloj vode, indeksa prelamanja n_2 = 1,34. Koliki treba da je upadni ugao zraka svetlosti na graničnu površinu staklo-voda da bi se:

a) na njoj totalno reflektovao ,

b) totalno reflektovao na graničnoj površini voda-vazduh ?



1325. a) $\alpha > \alpha_{g_1} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \approx 57°$ **5**.

b) Kako je

$$\beta_2 = \alpha_{g_2} = \arcsin \frac{1}{n_2} \quad \text{i} \quad \sin\alpha_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin\beta_2$$

to je $\sin\alpha_2 = \frac{1}{n_1}$, odakle je potreban upadni ugao zraka svetlosti

$$\alpha_2 > \arcsin \frac{1}{n_1} = 38° \, 40'$$

Dobijeni rezultat se slaže sa činjenicom da se indeks prelamanja dve sredine ne menja ako se između njih umetne treća.. Voda u ovom slučaju ne utiče na veličinu izlaznog ugla zraka svetlosti.

b| Светлосни зрак долази из стакла, средине апсолутног индекса преламања n_1 (ПРВА средина) пролази кроз водени слој апсолутног индекса преламања n_2 и улази у ваздушну средину (ДРУГА средина). Користимо (1).

12. Консултације!

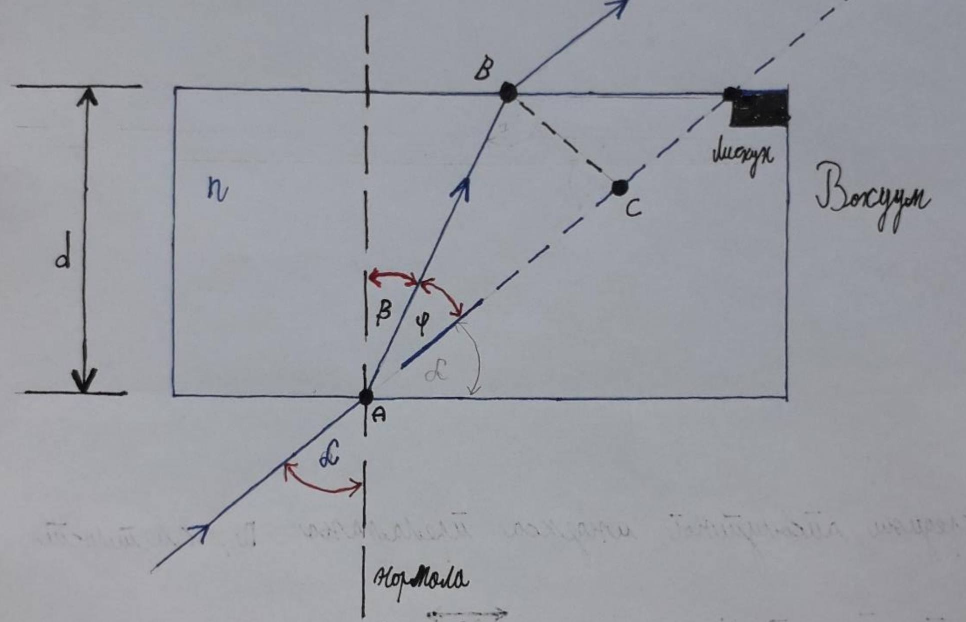
Zadatak 1325. Da bi došlo do pojave totalne refleksije, svjetlosni zrak mora iz optički gušće sredine preći u optički rjeđu sredinu.

a) kako je $(n_1 > n_2)$ to je α_g = arcsin($\frac{n_2}{n_1}$)
b) svjetlosni zrak iz stakla, prolazi kroz vodeni sloj, pa prolazi kroz vazduh. Dakle svjetlosni zrak dolazi iz optički gušće sredine(stakla) apsolutnog indeksa prelamanja n_1 , a zatim prolazi kroz optički rjeđu sredinu (vazduh) apsolutnog indeksa prelamanja n = 1 pa je :
   α_g = arcsin($\frac{1}{n_1}$).

Poenta primjera pod b) je da shvatimo da kod pojave totalne refleksije je bitno da znamo indeks prelamanja sredine iz koje svjetlost dolazi i sredine u kojoj se svjetlost završava. Ne bitno je kakve se sredine nalaze između sredine iz koje svjetlost dolazi i sredine u kojoj se svjetlost završava.

str. 1. Слика: Закони одбијања и преламања светлости

Zadatak 1326. Zrak svetlosti pada pod uglom $\alpha = 30°$ na PP-ploču od liskuna, debljine $d = 0{,}1$[mm].
a) Koliko je i kakvo ugaono pomeranje zraka svetlosti u PP-ploči ?
b) Koliko je pomeranje zraka svetlosti po pravcu usled prolaska kroz PP-ploču ?
c) Kolika je optička dužina puta svetlosti u PP-ploči ?
Indeks prelamanja liskuna je $n = 1{,}80$.



а) $\alpha - \beta = ?$

$\varphi = \alpha - \beta = 14°$

$1 \cdot \sin(\alpha) = n \sin(\beta)$

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n}$$

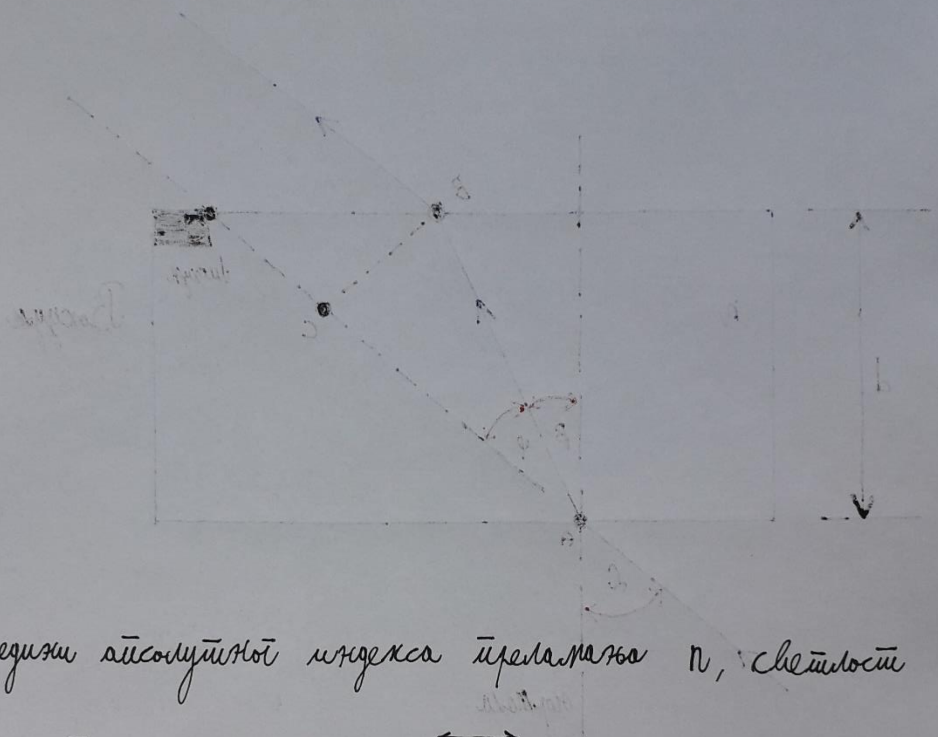
$$\beta = \arcsin\left(\frac{0{,}5}{1{,}80}\right) = 16°$$

Светлосни зрак долази из вакуум-ске средине и под углом α пада на плочу (PP) од лискуна. Светлосни зрак се у плочи прелома (са нормалом заклапа угао β), а како је пре преламања светлосни зрак са нормалом заклапао угао α то значи да је светлосни зрак направио угаони померај φ једнак разлици [redacted] $\alpha - \beta$.

13.

b

$$\overleftrightarrow{BC} = ? = d\,\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} \approx 0{,}0252\,[mm]$$



c У средини апсолутног индекса преламања n, светлост пређе пут геометријске дужине $\overleftrightarrow{AB}$ па је оптичка дужина пута:

$$n\,\overleftrightarrow{AB} = n\,\frac{d}{\cos(\beta)} \approx 0{,}1872\,[mm]$$

$$\cos(\beta) = \frac{d}{\overleftrightarrow{AB}}$$

Zadatak. 1326

$b)\ \overleftrightarrow{BC}$ = ?

sin(φ) = $\frac{\overleftrightarrow{BC}\ naspramna\ kateta}{\overleftrightarrow{AB}\ hipotenuza}$ (1)

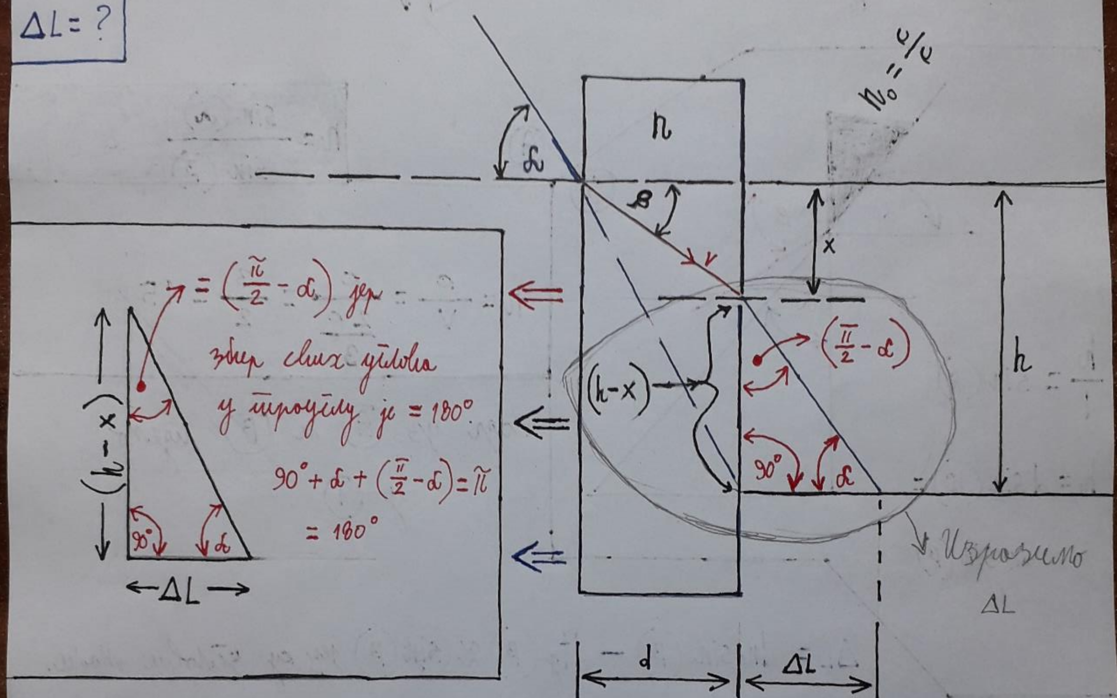
pa odavde je $\overleftrightarrow{BC}$ = sin(φ) * $\overleftrightarrow{AB}$, ostaje nam da nađemo $\overleftrightarrow{AB}$,

kako je cos(β) = $\frac{d}{\overleftrightarrow{AB}}$ to je $\overleftrightarrow{AB}$ = $\frac{\cos(\beta)}{d}$ pa kad se vratimo u (1) dobijamo da je :

$\overleftrightarrow{BC}$ = $\frac{d\sin(\varphi)}{\cos(\beta)}$

Zadatak 1327. Fotografskim aparatom snima se predmet. Za koliko će se pomeriti lik predmeta, u odnosu na objektiv, ako se između objektiva i filma postavi staklena PP-ploča debljine d = 1,2[cm] ? Brzina prostiranja svetlosti u ploči iznosi $V = (2/3)c$.

$\boxed{\Delta L = ?}$



[redacted]

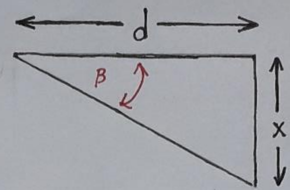
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\Delta L}{h-x}$$

$$\Delta L = \overbrace{tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}^{= \infty}(h-x) \quad (1)$$

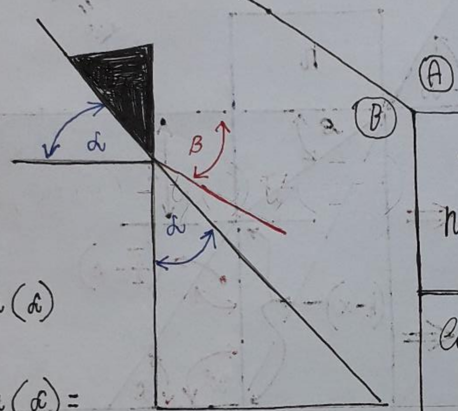
FAIL

$n_0 \sin(\alpha) = n \sin(\beta)$

$\sin(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha)}{n}$



$x = d\,tg(\beta)$



$n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{c}{\frac{2c}{3}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$\dfrac{h}{d} = \sin(\alpha)$

Сада уз (A) и (B) идемо у (1)

$h = d\sin(\alpha) =$

$dn \sin(\beta)$

$\Delta L = dn \sin(\beta) - d\,tg(\beta) \approx \sin(\beta)$ јер су углови мали.

$\Delta L = dn \sin(\beta) - d\sin(\beta)$

$\Delta L = dn\dfrac{\sin(\alpha)}{n} - d\dfrac{\sin(\alpha)}{n}$

$= d\sin(\alpha)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

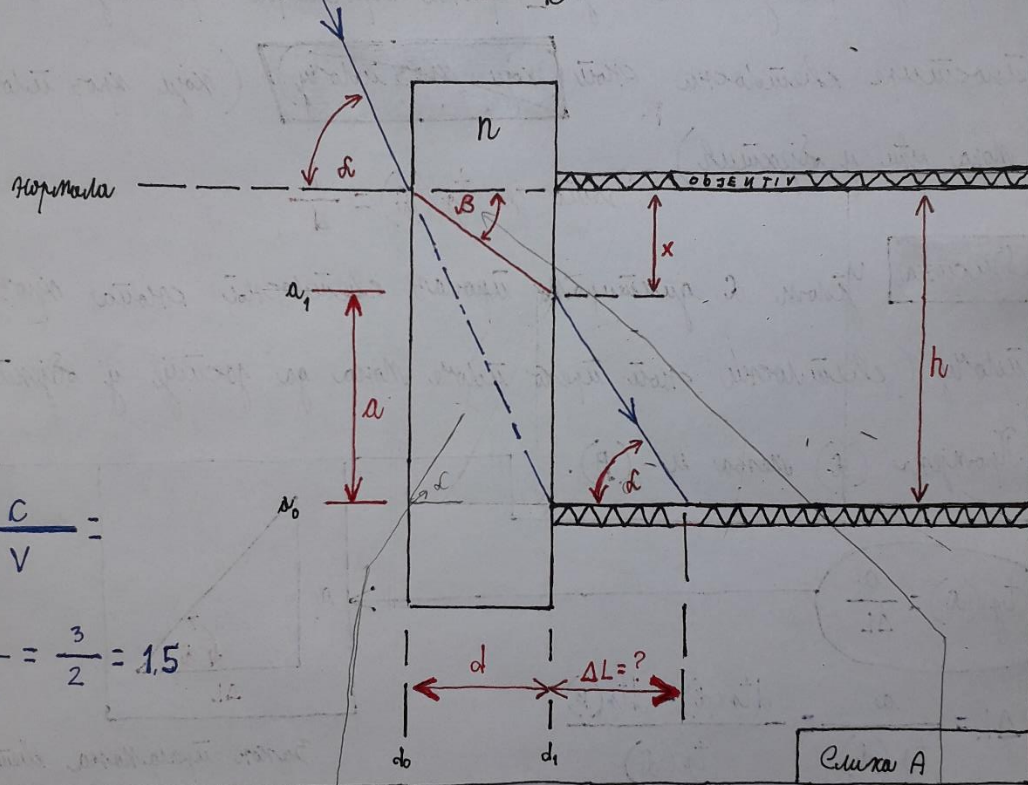
$\Delta L = (0{,}4\,[cm])\,\sin(\alpha)$ ☹

2. Покушај

Zadatak 1327. Fotografskim aparatom snima se predmet. Za koliko će se pomeriti lik predmeta, u odnosu na objektiv, ako se između objektiva i filma postavi staklena PP-ploča debljine d = 1,2[cm] ? Brzina prostiranja svetlosti u ploči iznosi $V= (2/3)c$.

Светлосни зрак долази из ваздушне средине.

$$n_0 = \frac{c}{c} = 1$$



$$n = \frac{c}{V} = \frac{c}{\frac{2c}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Са слике А се види да је померање светлосног снопа по PP-плочи:

$$a = h - x = d\left(tg(\alpha) - tg(\beta)\right) \qquad tg(\alpha) = \frac{h}{d}$$

$$a = h - x = d\left(\frac{h}{d} - \frac{x}{d}\right) \qquad tg(\beta) = \frac{x}{d}$$

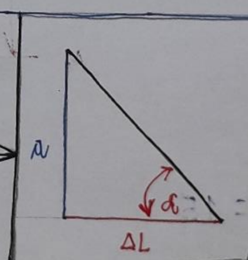
Ширина плоче је $(d = d_1 - d_0)$. Унутар плоче на висини од [redacted] n_0 до [redacted] h где год да повучемо праву дужине d паралелну са x-осом Декартовог тродимензионалног координатног система светлосни сноп ће пролазити кроз неку од тачака која лежи на нашој повученој правој. Дакле d је ширина простора кроз који се простире светлосни сноп [redacted] (који кроз плочу мора ући у објектив).

Зато је $tg(\alpha) = \frac{h}{d}$

[redacted] Углом α диктирамо пролаз светлосног снопа кроз плочу (светлосни сноп преко плоче мора да доспије у објектив).

Промјена (α) мења и (β).

$$tg(\alpha) = \frac{a}{\Delta L}$$



$$\Delta L = \frac{a}{tg(\alpha)} = \frac{d\,tg(\alpha) - d\,tg(\beta)}{tg(\alpha)}$$

Закон преламања светлости

$$n_0 \sin(\alpha) = n \sin(\beta)$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n = 1{,}5$$

[redacted] $= d - d\,\frac{\overbrace{tg(\beta)}^{\approx \sin(\beta)}}{\underbrace{tg(\alpha)}_{\approx \sin(\alpha)}} =$

$$d\left(1 - \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}\right) = d\left(1 - \frac{1}{1{,}5}\right) = 0{,}4\,[cm]$$

Zadatak 1327. Fotografskim aparatom snima se predmet koji se nalazi u nekoj vazdušnoj sredini. Između predmeta i objektiva postavi se staklena PP-ploča pa svjetlosni zrak prije ulaska u objektiv fotoaparat-a mora proći kroz staklenu PP ploču. Upadni svjetlosni zrak ulazi u PP ploču, mjesto na kojem svjetlosni zrak ulazi u PP ploču označeno je gornjom isprekidanom normalom. Upadni zrak sa normalom zaklapa neki ugao α, a kako unutar PP ploče dolazi do prelamanja svjetlosnog zraka, prelomljeni zrak sa tom istom normalom zaklapa neki ugao β. Izlaskom iz PP ploče svjetlosni zrak se još jednom prelama, a to mjesto je označeno sa donjom isprekidanom normalom. Taj zrak sa objektivom zaklapa ugao α, a kad pogledamo sliku vidimo da je svjetlosni zrak ušao u objektiv na rastojanju Δ*l* koje mi trebamo odrediti.

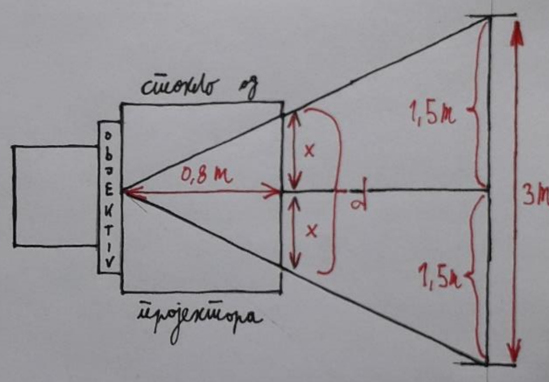
tg(α) = $\boldsymbol{\frac{a}{\Delta l}}$ pa odavde je **Δ*l* =** $\boldsymbol{\frac{a}{tg(\alpha)}}$,

***a* = h – x** pri čemu je **h = tg(α)d** i **x = tg(β)d** .

sin(), cos(), tg(), ctg() se definišu kao odnosi između kateta i hipotenuze, kao i između kateta samih.

Zadatak 1329. U bioskopskoj sali rastojanje od objektiva projektora do ekrana iznosi 40[m]. Ako je veličina slike na ekranu 3 x 3 [m²], kolika je ona na prozorskom staklu projektora pod pretpostavkom da je ono udaljeno 0,8[m] od njegovog objektiva ?

$d = ?$ $\boxed{d \times d = ?}$



Из сличности троуглова:

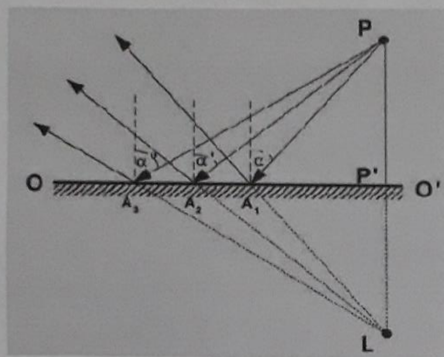
$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{0{,}8}{40}$$

$$x = 0{,}03\,[m]$$

$$d = 2x = 0{,}06\,[m]$$

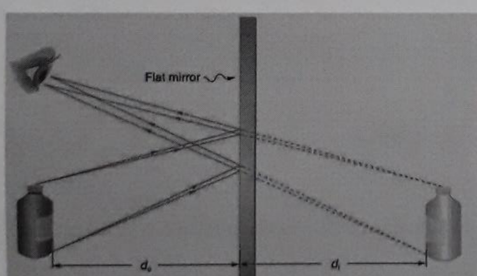
$$d \times d = 6 \times 6\,[cm^2]$$

Zadatak 1330. Za koliko će se povećati rastojanje između predmeta i lika u ravnom ogledalu ako se rastojanje između ogledala i predmeta poveća za 10[cm] ?



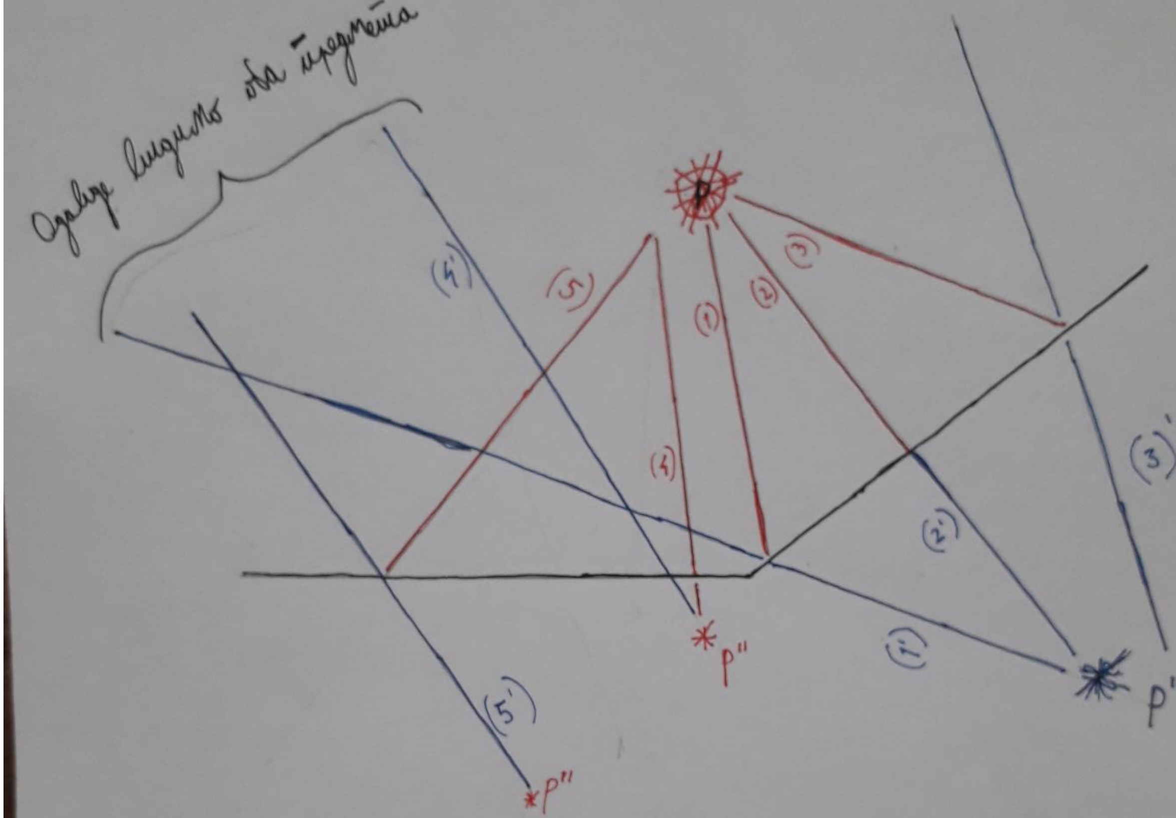
Uglačane ravne površine koje odbijaju najveći deo upadnih zraka nazivaju se ravna ogledala (mirna površina vode, staklo, ogledalo). Neka je OO' ravno ogledalo, a P svijetli tačkasti predmet. Svi svjetlostni zraci iz tačke P koji padaju na ogledalo odbiće se prema zakonu odbijanja. Svi zraci su posle odbijanja divergentni i to tako kao da dolaze iz zamišljene tačke L koja se nalazi iza ogledala. Tačka L naziva se lik tačke P. Njen položaj je simetričan sa položajem tačke P u odnosu na ogledalo. Pošto se u tački L ne sjeku odbijeni zraci nego njihovi geometrijski produžeci, takav lik se naziva imaginaran ili zamišljen. Taj lik je na istom rastojanju od ogledala kao i predmet (L=P). Jednačina ravnog ogledala ima oblik:

$p = l$



Из једначине равног огледала, када p помакнемо за 10[cm] од тачке његовог првобитног положја тада ће се и L од своје првобитне тачке помјерити за 10[cm] па ће се растојање између p и L повећало за 20[cm].

Zadatak 1331. Svetao predmet P se nalazi iznad dva ravna ogledala. Grafični odrediti prostor iznad ogledala iz koga se mogu videti likovi predmeta u oba ogledala.



Светлост која потиче од извора P на оба огледала пада у свим правцима

- Зрак који пада на огледало.

- = ◉' Светлост коју ми видимо као извор када гледамо у огледало

Zadatak 1332. Za koliko se prividno približi tekst čitaocu ako se iznad teksta postavi staklena PP-ploča, debljine d = 5[mm] i indeksa prelamanja n = 1,6 ? Pretpostaviti da čitalac čita tekst približno pod pravim uglom.

$d = d_0 n = 5[mm]$ Оптичка дужина пута.

$d_0 = \frac{d}{n}$ Геометријска дужина пута.

$$\Delta h = d - d_0 = d - \frac{d}{n} = 1,875[mm]$$

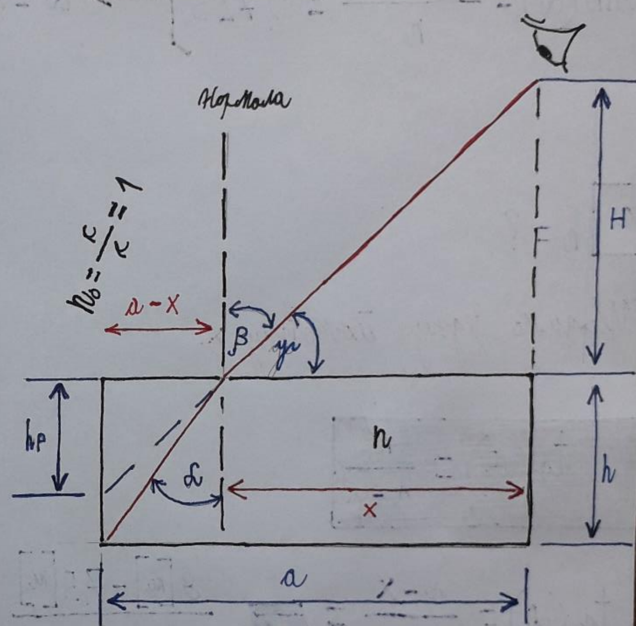
$a = 8[m]$

Zadatak 1333. Bazen u obliku kvadrata, strana a = 8[m], napunjen je do vrha vodom indeksa prelamanja n = 1,33. Stojeći neposredno pored bazena, čovek posmatra njegovo dno sa visine H = 1,5[m] u odnosu na površinu vode u bazenu. Čovek pri ovome proceni da je dubina vode u bazenu na njegovom drugom kraju h_p = 10[cm].

a) Kolika je stvarna dubina bazena ?

b) Kolika bi bila procenjena dubina vode u bazenu neposredno ispred posmatrača ?

Концентриши се на угао. Питај шта је наспрамна катета, налегла катета, а шта хипотенуза. На основу познатог одреди му tg, ctg...



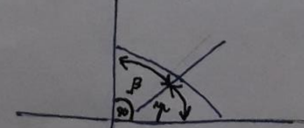
$$tg(\gamma) = \frac{H + h_p}{a} = \frac{1{,}5[m] + 10 \cdot 10^{-2}[m]}{8[m]} = 0{,}2$$

$$\gamma = arctg(0{,}2) = 11^\circ\ 20'$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 78^\circ\ 40'$$

β и γ леже у истом квадранту:



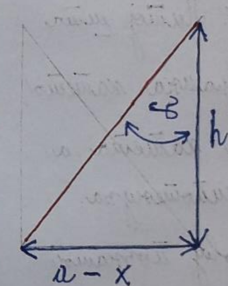
Како нам је познато β можемо одредити α из закона о преламању светлости:

$$n \sin(\alpha) = n_0 \sin(\beta)$$

$$\left.\sin(\alpha) = \frac{\sin(\beta)}{n} = 0{,}723\right\} \longrightarrow \alpha = \arcsin(0{,}723) = 46^{\circ}\,20'$$

$\boxed{a}$ $h = ?$

Уводимо једну помоћну x.



$$tg(\alpha) = \frac{a - x}{h} = \frac{8[m] - 7{,}5[m]}{h}$$

$$\left. tg(\varphi) = \frac{H}{x} \right] \longrightarrow x = \frac{H}{tg(\varphi)} = 7{,}5\,[m]$$

$$h = \frac{0{,}5}{tg(\alpha)} \approx 0{,}482\,[m]$$

$\boxed{b}$ Оптичка дужина

$$h = n h_0$$

$$h_0 = \frac{h}{n} \approx 0{,}362\,[m]$$

Zadatak 1333. Upadni zrak dolazi iz dubine bazena, usmjeren je ka oku posmatrača, a sa isprekidanom normalom zaklapa ugao α. Izlaskom iz vode apsolutnog indeksa prelamanja *n* i ulaskom u vazdušnu optičku sredinu upadni svjetlosni zrak se prelama. Prelomni zrak sa isprekidanom normalom zaklapa ugao β, a sa vodenom površinom ugao γ. Za početak odredimo sva 3 ugla.

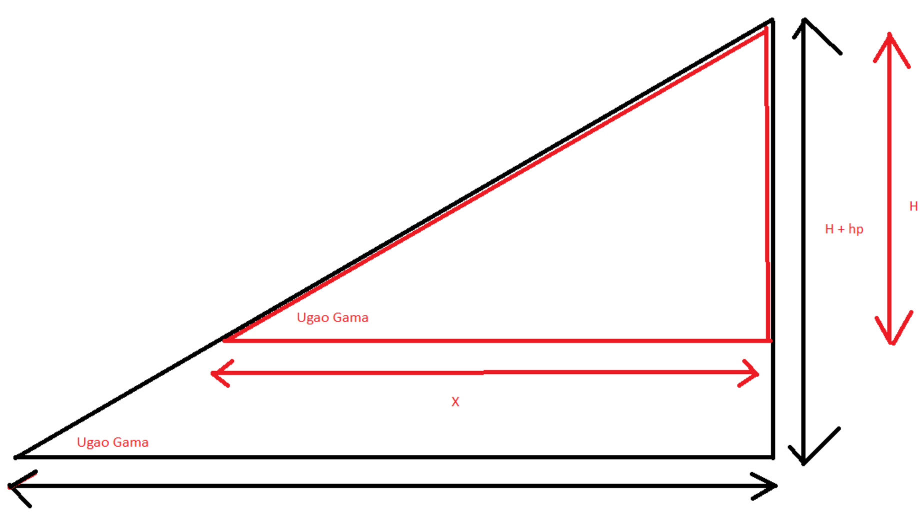
Ugao γ:
-naspramna kateta je visine $H + h_p$
-nalegla kateta je dužine *a*
-hipotenuza ovog trougla je prava koja potiče od donjeg kraja duži h_p, penje se do površine vode(naznačeno isprekidanom linijom) prolazi kroz vodu i penje se do visine posmatrača h.
-Dakle tg(γ) = $\frac{H + h_p}{a}$

Takođe ugao γ (scenario koji je nacrtan na slici):
-naspramna kateta je visine H
-nalegla kateta je dužine X
-hipotenuza ovog trougla je prava koja potiče od tačke na površini vode,a penje se do visine posmatrača h.

Ugao β leži u istom kvadrantu sa uglom γ što znači da je β + γ = 90° . Sada kada nam je poznato i β iz zakona o prelamanju svjetlosti odredimo ugao α.

a) Vidimo da je dužina nalegle katete ugla α jednaka traženom h.
   $\frac{a-X}{h}$ = tg(α) , a $\frac{H}{X}$ = tg(γ) pa iz ovoga izrazimo nepoznato i traženo h.
b) sve je objašnjeno u rješenju zadatka.

Zadatci ovog tipa (nepoznata je visina, dužina, širina neke linije) se rješavaju preko trigonometrijskih funkcija tako što odredimo nepoznate uglove pa uspostavimo veze između kateta.

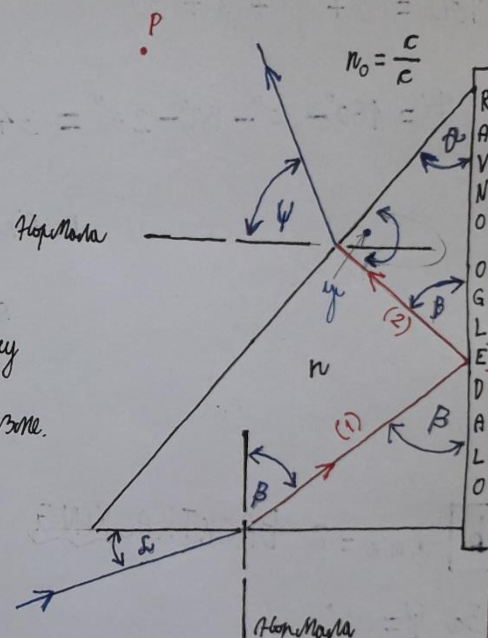


Запамти: Мјесто на граничној површини 2 средине различитих индекса преламања мора бити означено нормалом ако долази до преламања светлости.

Zadatak 1335. Zrak svetlosti pada na donju stranu staklene prizme, čiji je ugao pri vrhu Θ = 30°, a indeks prelamanja *n* = 1,6. Prizma je jednom bočnom stranom naslonjena na ravno ogledalo (prema slici).

a) Ako je upadni ugao zraka svetlosti na donju površinu prizme α = 45°, pod kolikim uglon ψ on napušta prizmu ?

b) Kolika je najmanja vrednost upadnog ugla α, pri kome će svetlosni zraci jos izlaziti iz prizme ?



$\boxed{a}$ $\psi = ?$

Светлосни зрак долази из вакуум-ске средине и под углом α пада на граничну површину између вакуума (n_0) и оптичке призме.

Како је n апсолутни индекс прела-мања оптичке призме, унутар призме долази до преламања светлосних зрака, а преломљени зрак са нормалом заклапа неки угао β. Из закона о преламању светлости.

$$n_0 \sin(\alpha) = n \sin(\beta)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0,707}{1,6}\right) \approx 26^\circ$$

Светлосни зрак (1) удара (пада на) у равно огледало. Он се одбија од огледало, а ми га из тачке P видимо као зрак (2) који долази од тачке E што је последица природе огледала.

Зрак (2) пада на граничну површину (између средина индекса преламања n и n_0) под неким углом γ.

$$180^\circ = \theta + \gamma + \beta + 90^\circ$$

$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ - 26^\circ = 34^\circ$ па из закона о преламању светлости

$$n_0 \sin(\psi) = n \sin(\gamma)$$

$$\sin(\psi) = n \sin(\gamma)$$

$$\psi = \arcsin\left(n \sin(\gamma)\right) = 63^\circ$$

$\boxed{b.}$ $\alpha_{min} = ?$ BACKTRACKING ALGORITHM

За $\psi = 90^\circ$

$$\sin(\psi) n_0 = \sin(\gamma) n$$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{n}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 38^\circ$$

$$180^\circ = \theta + \gamma + \beta + 90^\circ$$

$$180^\circ - 30^\circ - 38^\circ - 90^\circ = \beta$$

$$\beta = 22^\circ$$

$$n_0 \sin(\alpha_{min}) = n \sin(22^\circ)$$

$$\alpha_{min} = \arcsin\left(n \sin(22^\circ)\right) = 36^\circ$$

Zadatak 1335. Upadni zrak pod uglom α ulazi u optičku prizmu. Pri ulasku u optičku prizmu upadni zrak se prelama, mjesto na kojem dolazi do prelamanja svjetlosti označeno je sa isprekidanom normalom. Prelomni zrak sa tom normalom zaklapa ugao β koji se odredi pomoću zakona o prelamanju svjetlosti. Taj prelomni zrak označen sa (1) prolazi kroz prizmu i udara od tačku E na ravnom ogledalu. Ugao koji upadni zrak (1) zaklapa sa ogledalom je takođe β. Zrak se odbija od ogledalo (prema zakonu odbijanja svjetlosti upadni ugao jednak je odbojnom uglu) a taj odbijeni zrak je označen sa (2). Zrak (2) izlazi iz optičke prizme i tu se prelama. Izlazni zrak sa normalom koja je podvučena na mjestu prelamanja svjetlosti zaklapa ugao ψ koji ćemo odrediti primjenom zakona o odbijanju svjetlosti. Da bi to izveli treba nam ugao γ. Na slici je napravljena greška s moje strane. Nacrtana tačka koja opisuje položaj ugla γ treba biti ispod normale što znači da je ugao između nacrtane dvije strelice jednak 90° - γ . Zbir svih uglova u trouglu mora biti jednak 180° pa je γ = 180° - 90° - Ɵ - β.

Zadatak 1339. Staklena prizma, čiji je ugao pri vrhu $\Theta = 38°$, ima za neku monohromatsku svetlost minimalni ugao skretanja $\delta_{min} = 27°$. Koliki je indeks prelamanja supstancije od koje je načinjena prizma ?

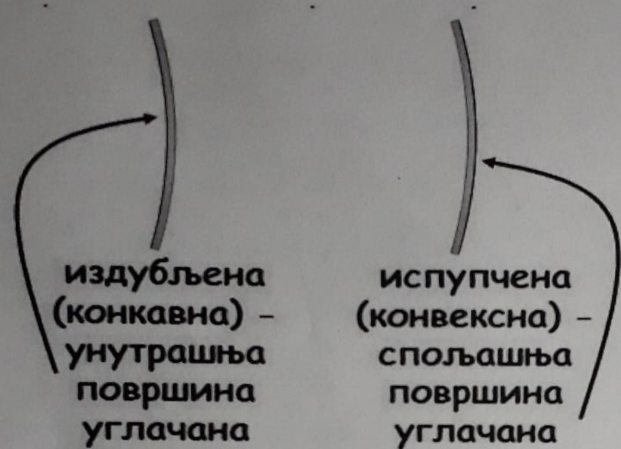
$n = ?$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta + \delta_{min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1,61$$

Сферна огледала

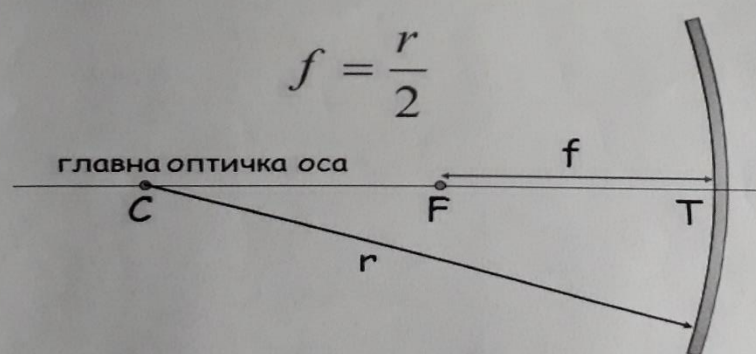
Сферна огледала – огледала чије су углачане површине криве.

Сферна огледала могу бити:



Елементи сферних огледала:

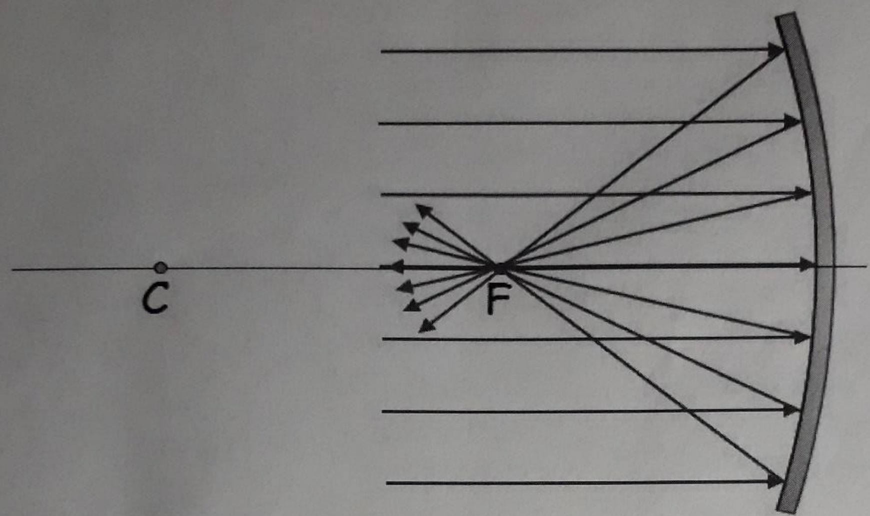
$$f = \frac{r}{2}$$



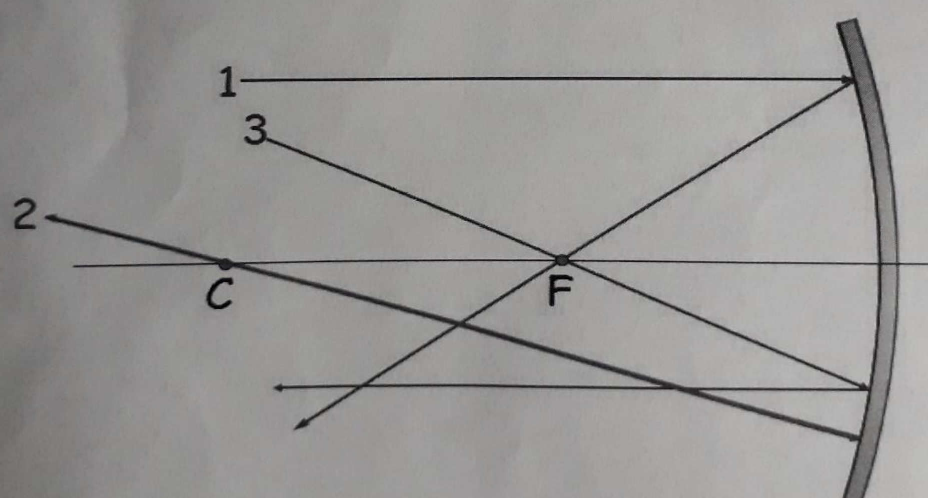
- C – центар кривине
- r – полупречник кривине
- T – теме огледала
- F – жижа (фокус) огледала
- f – жижна даљина (растојање од жиже до темена огледала) главна оптичка оса

Издубљено огледало:

Сви зраци паралелни са главном оптичком осом после одбијања од огледала пролазе кроз жижу огледала – скупљају се.



За конструкцију лика користе се карактеристични зраци – зраци чији су правци после одбијања познати.

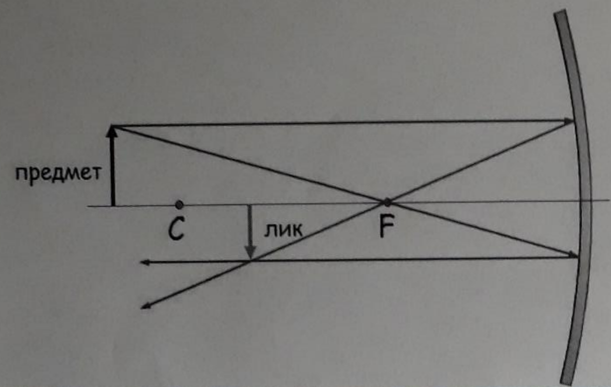


1 – зрак паралелан са главном оптичком осом огледала након одбијања пролази кроз жижу

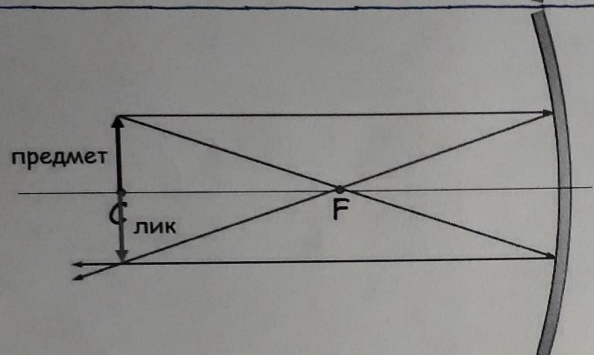
2 – зрак који пролази кроз центар кривине враћа се након одбијања истим путем

3 – зрак који пролази кроз жижу након одбијања је паралелан са главном оптичком осом

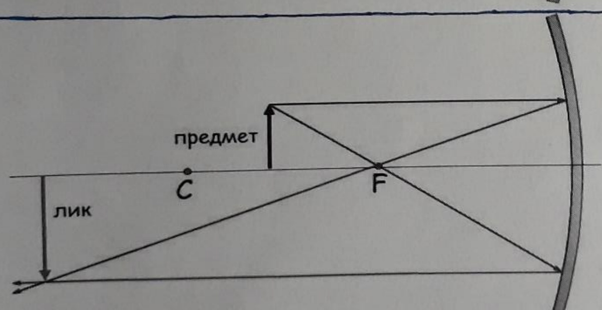
Зависно од положаја предмета у односу на огледало, лик може бити реалан или имагинаран, увећан или умањен, усправан или изврнут.За налажење лика није потребно користити сва три карактеристична зрака, већ само два. (За налажење лика довољно је да се користе два зрака).



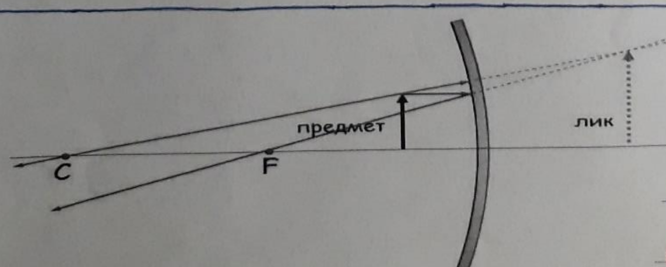
Предмет се налази на удаљености већој од центра кривине. Лик:
реалан (стваран), умањен обрнут.



Предмет се налази у центру кривине.
Лик:
реалан (стваран), по величини једнак предмету обрнут.



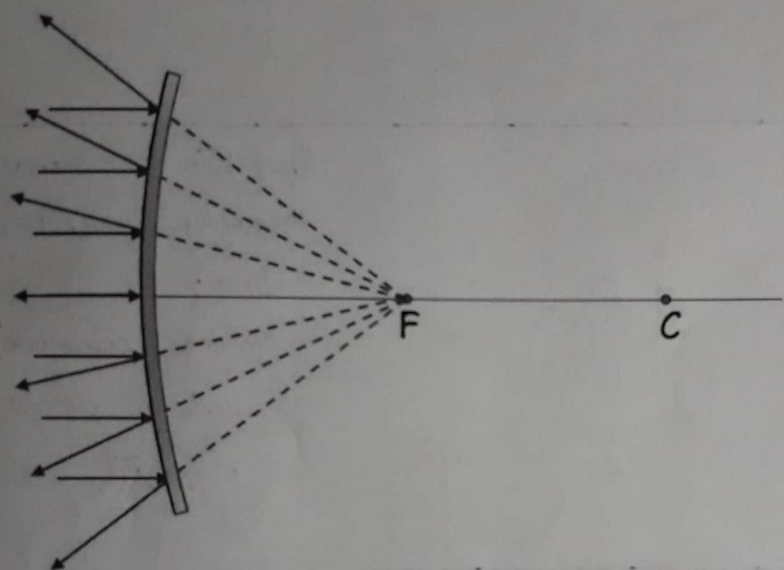
Предмет се налази између жиже и центра кривине. Лик:
реалан (стваран), увећан, обрнут.

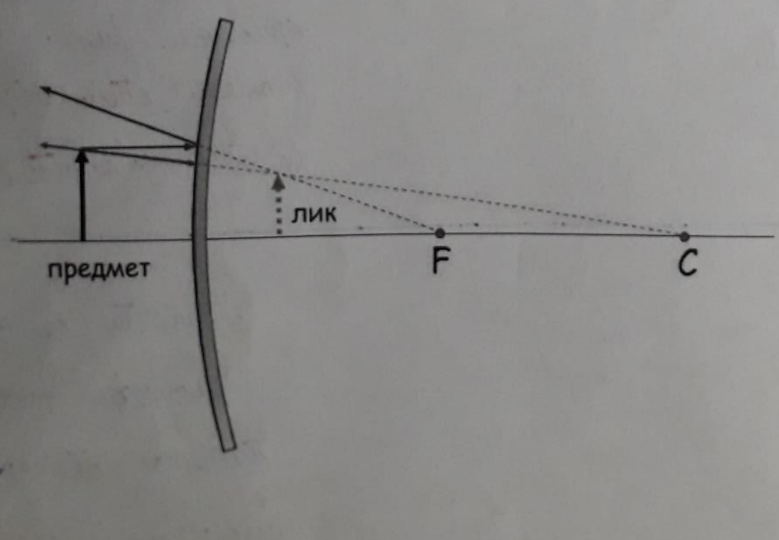


Предмет се налази између жиже и темена огледала.
Лик: имагинаран (нестваран), увећан, усправан.

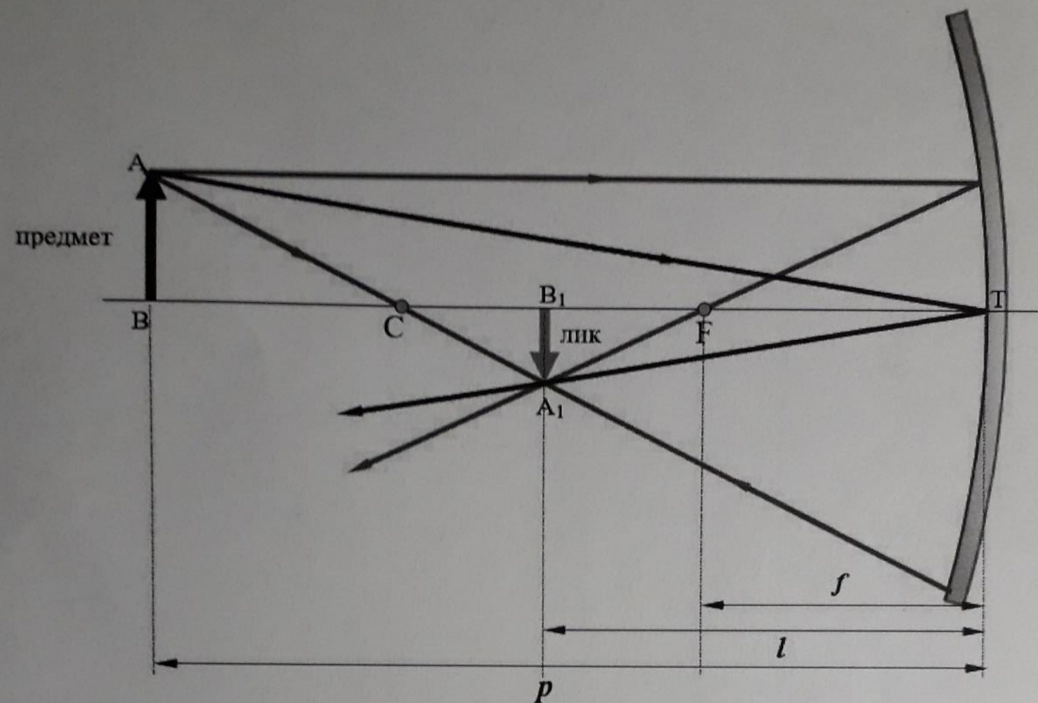
Испупчено огледало:

Све што је наведено за издубљена важи и за испупчена. Сви зраци паралелни са главном оптичком осом одбијају се као да долазе из жиже огледала





Једначина сферних огледала



p – удаљеност предмета од огледала
l – удаљеност лика од огледала
f – жижна даљина
r – полупречник кривине

Jednačina za konveksno ogledalo glasi:

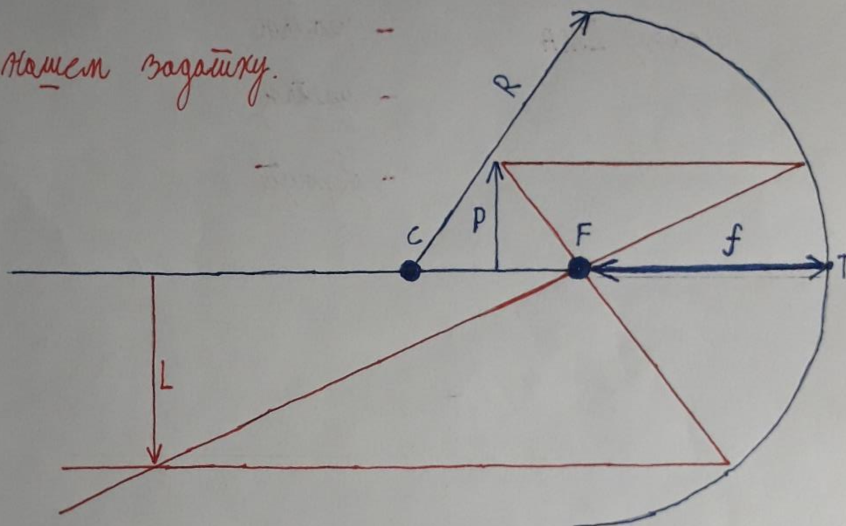
$$\boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = \frac{-1}{f}}$$

Код издубљеног (конкавног) огледала унутрашња страна је углачана.

Zadatak 1347. Poluprečnik krivine izdubljenog sfernog ogledala iznosi R = 60[cm]. Predmet, veličine *P* = 20[cm], nalazi se na rastojanju *p* = 45[cm] od ogledala. Kakav je lik predmeta, gde se nalazi i kolika je njegova veličina ? Kolika je žižna daljina ogledala ?

Жижна даљина сферног огледала одређена је релацијом $\left(f = \frac{R}{2}\right)$:

$f = 30\,[cm]$ у нашем задатку.



Имамо случај када се предмет налази између тачке центра кривине и тачке жиже огледала јер је $(C > p > f)$. Из једначине сферног огледала је:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} = \frac{2p - R}{pR}$$

$l = \frac{pR}{2p-R} = 90[cm]$ је удаљеност лика од темена огледала.

Образац за

$$u = \boxed{\frac{L}{P} = \frac{l}{p}} \rightarrow L = \frac{lP}{p} = \frac{90[cm]\,20[cm]}{45[cm]} = 40[cm]$$

висину LIKA

- реалан
- увећан
- обрнут

За конструкцију лика користим карактеристичне зраке

1 и 3

Zadatak 1347. Jednačina: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$ se naziva jednačinom izdubljenog(konkavnog) ogledala. Koristimo je da odredimo rastojanje predmeta p ili rastojanje lika *l* od tjemena ogledala.

Zadatak 1349.
*Konstrukcija lika u prvom slučaju:
1) karakteristični zrak, polazi od predmeta paralelno sa glavnom optičkom osom, odbija se od ogledalo i prolazi kroz žižu(F).
2) karakteristični zrak prolazi kroz tačku C , odbija se od ogledalo, odbijeni zrak se kreće paralelno sa glavnom optičkom osom u smjeru suprotnom od svjetlosti koja dolazi od predmeta.
3) karakteristični zrak (Ovdje ga nismo mogli iskoristiti !) polazi od predmeta, prolazi kroz žižu, a zatim se odbija od ogledalo, odbijeni zrak se kreće paralelno sa glavnom optičkom osom.
*Na slici nisam dobro nacrtao *l* , *l* ide od tjemena ogledala (tačka na ogledalu koja leži na glavnoj optičkoj osi) do lika (L). *Ostalo je sve dobro.

Jednačina **izdubljenog(konkavnog)** sfernog ogledala kada je lik **realan**:

$$\boldsymbol{\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}}$$

Jednačina **izdubljenog(konkavnog)** sfernog ogledala kada je lik **imaginaran**:

$$\boldsymbol{\frac{1}{-f} = \frac{1}{-p} + \frac{1}{l}}$$

Zadatak 1348. Ispred izdubljenog sfernog ogledala, poluprečnika krivine R = 40[cm], nalazi se predmet veličine P = 6[cm]. Na kom mestu treba da se nalazi predmet da bi njegov lik bio realan i 10 puta veći od predmeta ?

$\boxed{p = ?}$

Према услову задатка је:

$$L = 10P \quad (1)$$

$$f = \frac{R}{2} = 20[cm]$$

Из једначине сферног огледала $\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}\right)$ имамо да је:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

Знамо да због услова (1) мора бити:

$\frac{L}{P} = \frac{l}{p} = 10$ па је $L = 10P$ и $l = 10p$ па са овим подацима рјешавамо једначину сферног огледала.

[redacted]

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{10p}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{11}{10p}$$

$$20p = 11R$$

$$p = \frac{440\,[cm]}{20} = 22\,[cm]$$

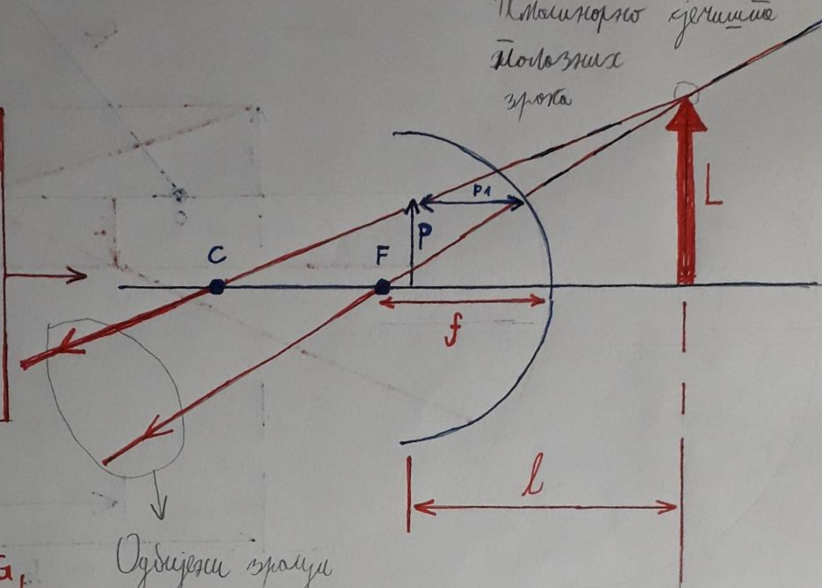
$(R = C) > p > f$ што у геометријском смислу значи да предмет треба поставити између тачака C и F.

Zadatak 1349. Poluprećnik krivine konkavnog sfernog ogledala iznosi $R = 15[cm]$. Predmet, veličine $P = 2[cm]$, postavi se na rastojanje $p_1 = 5[cm]$, a zatim na rastojanje $p_2 = 20[cm]$ od ogledala. Kakvi su likovi predmeta, gde se nalaze i kolika je njihova veličina u oba slučaja ?

1° Сада постављамо

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= 5[cm] \\ C = R &= 15[cm] \\ f = \frac{R}{2} &= 7{,}5[cm] \end{aligned}}$$

предмет



$$\overbrace{\text{Из једначине сферног}}^{\text{IZDUBLJENOG}} \text{ огледала за имагинаран лик:}$$

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{-p_1} + \frac{1}{l}$$

$$-\frac{2}{R} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{R - 2p_1}{R p_1}$$

$$l = 15[cm]$$

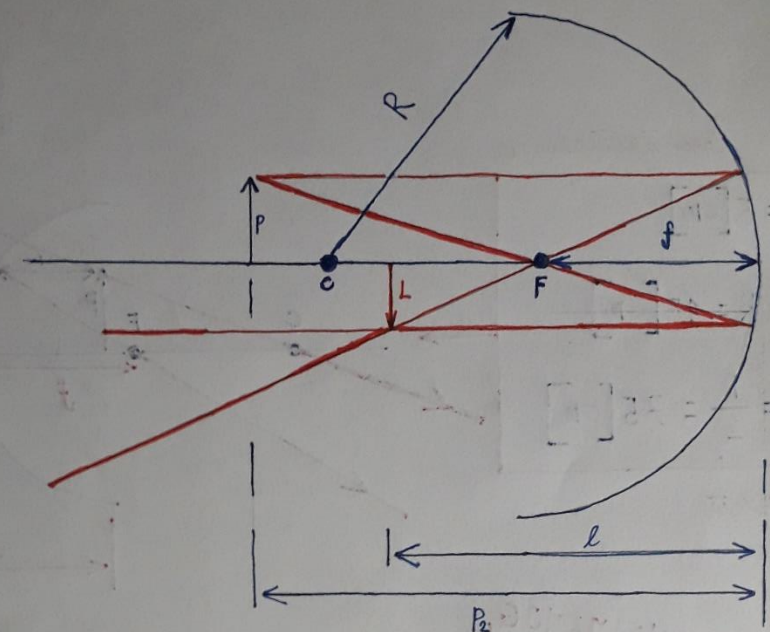
$$\frac{L}{P} = \frac{l}{p_1}$$

$$L = \frac{l P}{p_1} = 6[cm]$$

- имагинаран
- увећан
- усправан

2.

$$P_2 > (C = R) > \left(f = \frac{R}{2}\right)$$



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{2P_2 - R}{RP_2}$$

$$l = 12\,[cm]$$

$$L = \frac{lP}{P_2} = 1{,}2\,[cm]$$

— реалан

— умањен

— обрнут

Zadatak 1349.
*Konstrukcija lika u prvom slučaju:
1) karakteristični zrak, polazi od predmeta paralelno sa glavnom optičkom osom, odbija se od ogledalo i prolazi kroz žižu(F).
2) karakteristični zrak prolazi kroz tačku C , odbija se od ogledalo, odbijeni zrak se kreće paralelno sa glavnom optičkom osom u smjeru suprotnom od svjetlosti koja dolazi od predmeta.
3) karakteristični zrak (Ovdje ga nismo mogli iskoristiti !) polazi od predmeta, prolazi kroz žižu, a zatim se odbija od ogledalo, odbijeni zrak se kreće paralelno sa glavnom optičkom osom.
*Na slici nisam dobro nacrtao *l* , *l* ide od tjemena ogledala (tačka na ogledalu koja leži na glavnoj optičkoj osi) do lika (L). *Ostalo je sve dobro.

Jednačina **izdubljenog(konkavnog)** sfernog ogledala kada je lik **realan**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

Jednačina **izdubljenog(konkavnog)** sfernog ogledala kada je lik **imaginaran**:

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{-p} + \frac{1}{l}$$

Zadatak 1350. Gde je potrebno postaviti predmet ispred izdubljenog sfernog ogledala žižne daljine $f = 20[\mathrm{cm}]$ da bi se dobio dva puta veći imaginarni lik ?

Zadatak 1351. Gde je potrebno postaviti predmet ispred izdubljenog sfernog ogledala da bi se dobio lik iste veličine kao predmet ? Kakav je ovaj lik ?

$l = 2p$ из услова задатка

IZDUBLJENOG

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{-p} + \frac{1}{l}$$ једначина сферног огледала (имагинаран лик)

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{-f} + \frac{1}{p} = \frac{f-p}{pf}$$

$$l = \frac{pf}{f-p}$$

$$2p = \frac{pf}{f-p}$$

$$2p(f-p) = pf \quad /:p,\ p>0$$

$$2f - 2p = f$$

$$-2p = -f$$

$$p = \frac{f}{2} = 10\,[\mathrm{cm}]$$ између жиже (F) и темена (T) огледала.

$p = L \longrightarrow p = l$

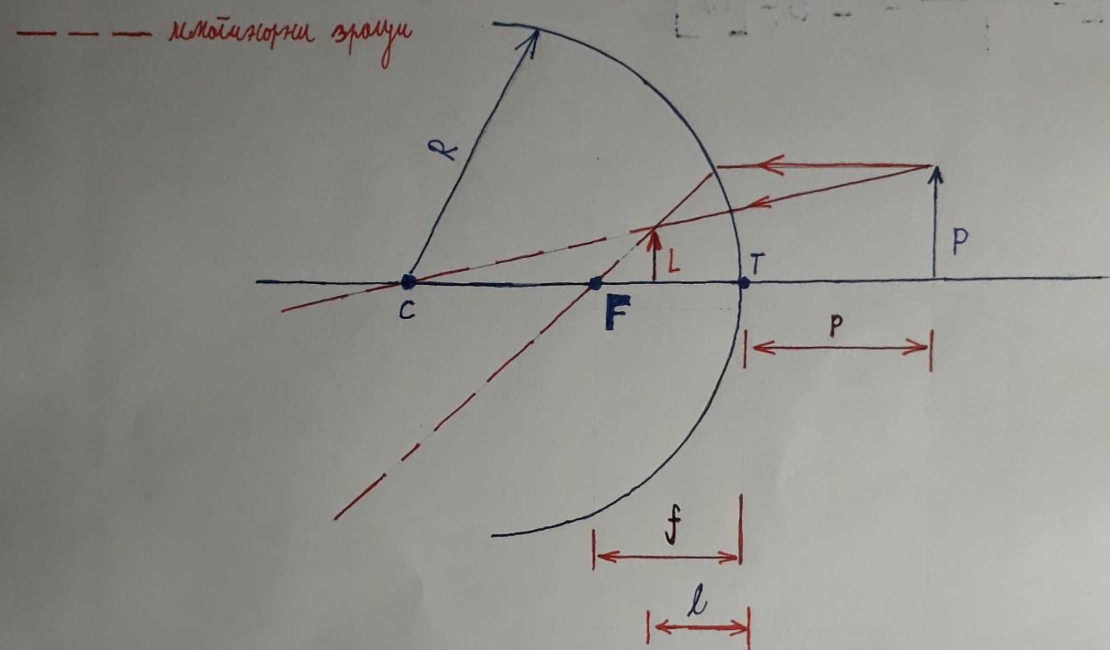
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{p}$$

[redacted]

$p = 2f$ треба га поставити у центар кривине.

Zadatak 1352. Ispred ispupčenog sfernog ogledala, polupričnika krivine R = 54[cm], nalazi se predmet, veličine P = 6[cm] na rastojanju p = 36[cm] od njegovog temena. Kakav je lik predmeta, gdje se nalazi i kolika je njegova veličina ?



[redacted]

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$$

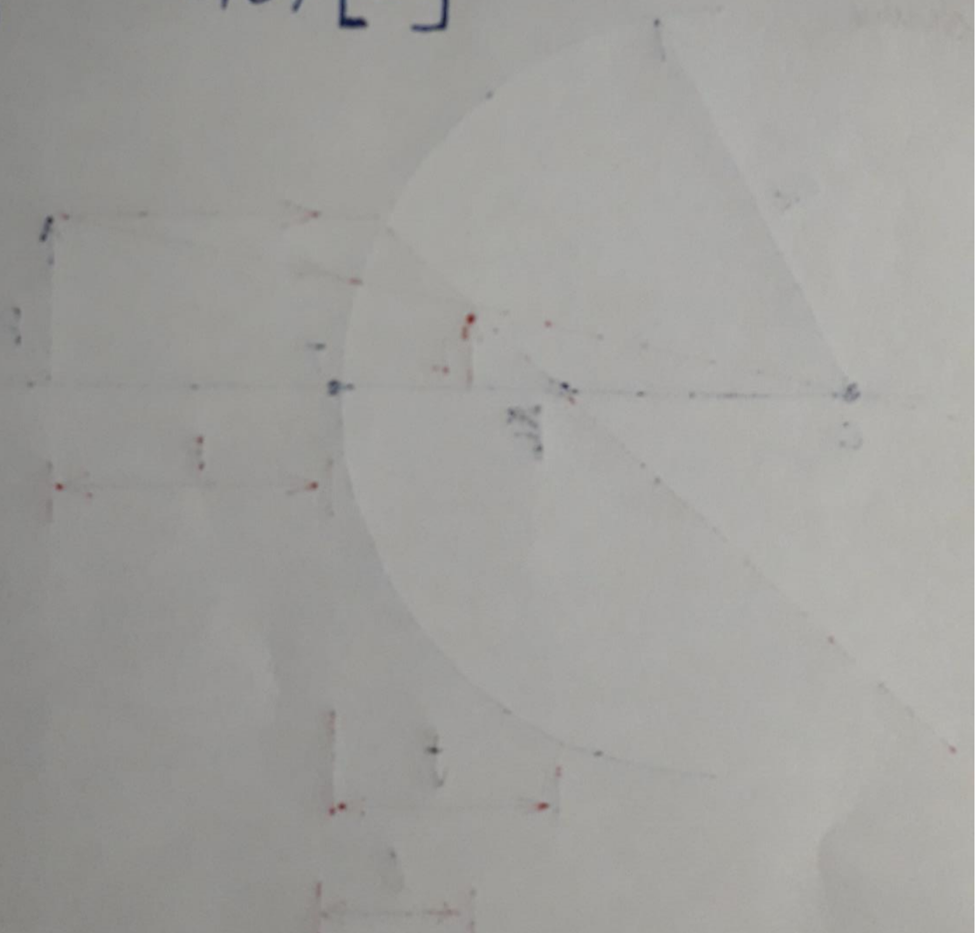
$$-\frac{2}{R} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$$

$$-\frac{1}{l} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{p} = \frac{-2p - R}{Rp}$$

$$l = \frac{Rp}{2p + R} = 15,4\,[cm]$$

$$\frac{L}{P} = \frac{\ell}{p}$$

$$L = \frac{\ell P}{p} = 2{,}57\,[cm]$$



Zadatak 1353. Ispred konveksnog sfernog ogledala nalazi se predmet na rastojanju $p = R$ od njegovog temena (gdje je R-poluprečnik krivine ogledala). Ako se umesto sfernog ogledala postavi ravno ogledala, za koliko će se:

a) udaljiti lik predmeta od temena ogledala,

b) povećati lik predmeta ?

$\boxed{a}$ Удаљеност лика од темена испупченог (конвексног) сферног огледала:

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{-2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$l = \frac{pR}{2p+R} = l_1$$

Удаљеност лика од темена равног огледала:

$$l = p = l_2$$

Од нас се у задатку тражи да одредимо колико пута је l_2 веће од l_1.

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{p}{\frac{pR}{2p+R}} = \frac{3R}{R} = \text{[redacted]} = 3$$

6

Увећање лика код сферног (конкавног или конвексног) огледала:

$$u = \frac{l_1}{p} = \frac{\frac{pR}{2p+R}}{p} = \frac{1}{3} =$$ [redacted] u_1

Увећање лика код равног огледала:

$$u = \frac{l_2}{p} = 1 = u_2$$

што значи да је у равном огледалу лик

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$ пута већи.

Zadatak 1353.
Jednačina ispupčenog(**konveksnog**) ogledala:

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-l}$$

pa u izrazu pod *a*) nisam dobro napisao formulu za konveksno ogledalo , a nisam ni vodio računa o predznacima prilikom prebacivanja operanada pa sam igrom slučaja dobio izraz kakav bi se trebao dobiti ako se formula napiše onako kako treba.

Zadatak 1354. Na kom rastojanju od temena ispupčenog sfernog ogledala, poluprečnika krivine R = 60[cm], treba postaviti predmet da bi se dobio 5 puta manji lik nego što je predmet ?
Kakav je ovo lik ?

Према услову задатка:

$$\frac{L}{P} = \frac{l}{p} = \frac{1}{5}$$

Елементе сферних огледала повезујемо једначином за одговарајуће сферно (конкавно или конвексно) огледало. Једначина сферног конвексног огледала:

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$$

а знамо да је $f = \frac{R}{2}$ док из почетног услова имамо да је $\left.5l = p\right] \rightarrow l = \frac{p}{5}$.

$$-\frac{2}{R} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{p}{5}}$$

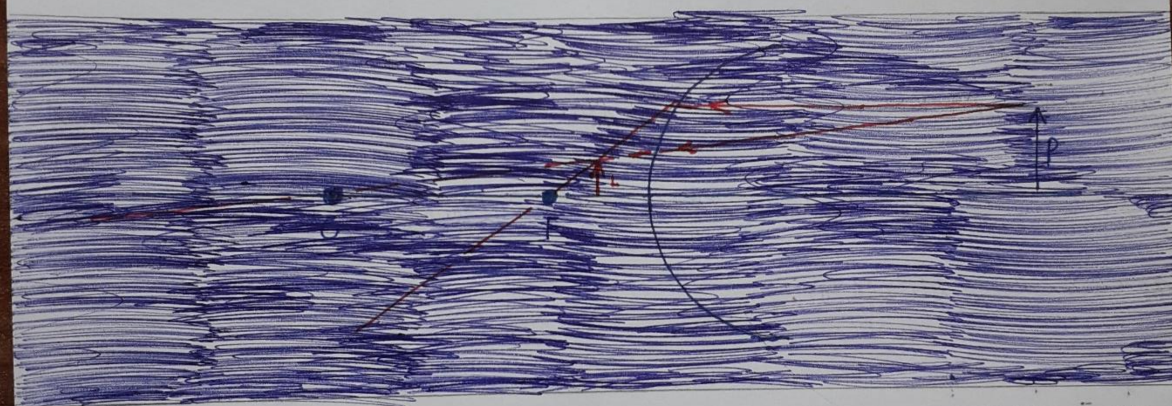
$$-\frac{2}{R} = \frac{1-5}{p}$$

$2p = 4R$

$p = 2R = 120\,[cm]$

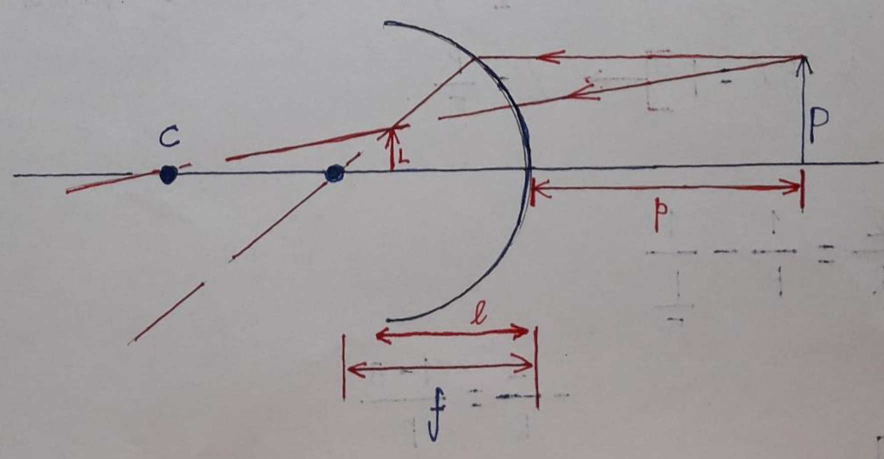
$p > (C = R) > \left(f = \frac{R}{2}\right)$ Сада имамо све податке

па можемо конструисати слику.



Лик:

- имагинаран
- умањен
- усправан



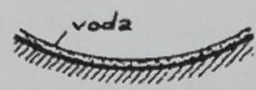
Zadatak 1355. Na izdubljeno sfernog ogledalo, žižne daljine f = 10[cm], nanesen je tanak sloj vode indeksa prelamanja n = 1,33.

a) Kolika je žižna daljina ovog sistema ?

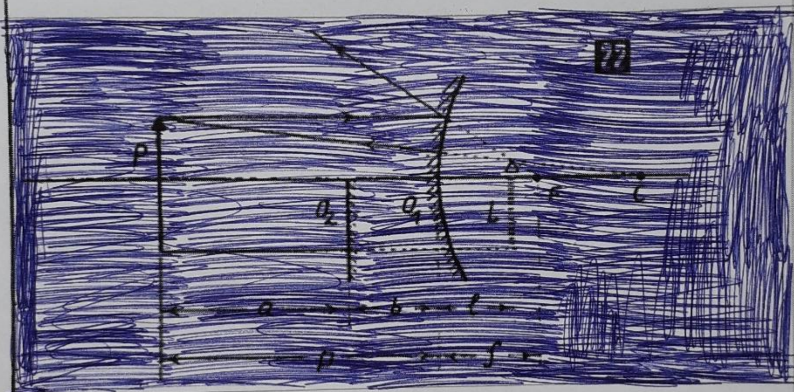
b) Kolika bi bila žižna daljina ogledala kada bi se ono duboko potopilo u vodu ?

1355. a) $f' = f/n = 7{,}5$ cm **21**.

21

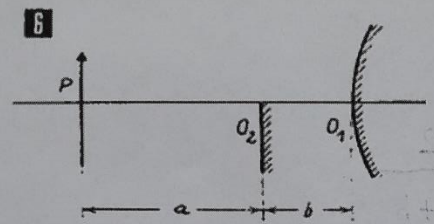


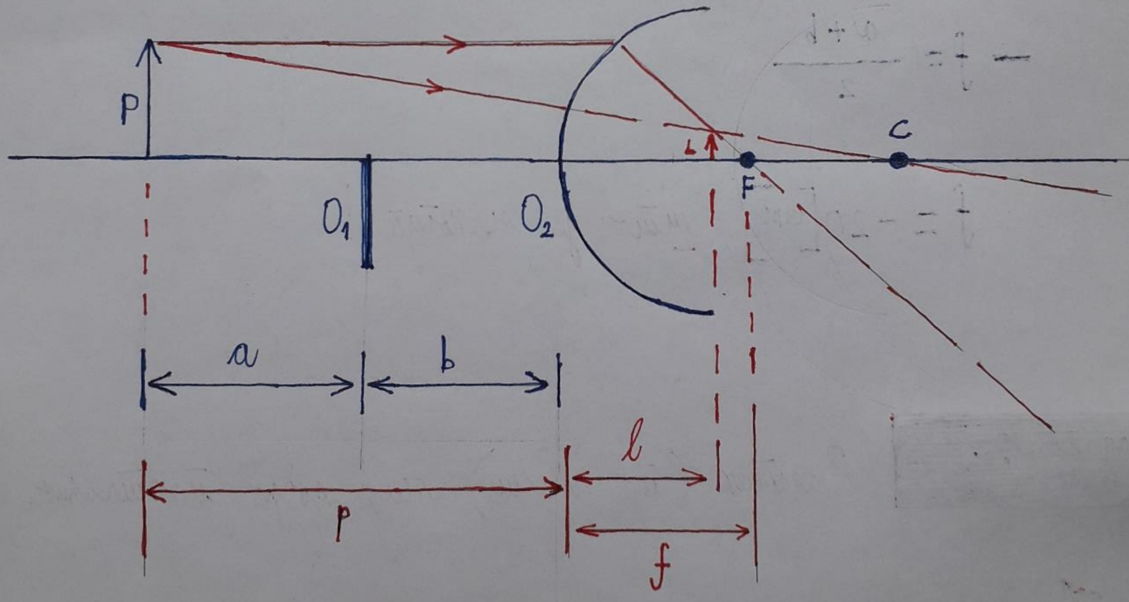
b) Žižna daljina je ista kao kada je ogledalo u vazduhu, jer zakon odbijanja važi za svaku sredinu: upadni ugao jednak je odbojnom u svakoj sredini.



а) У ваздуху (вакууму) је $f = \frac{R}{2}$. Ако преко углачане површине сферног огледала нанесемо танак слој воде ми углача-ну површину сферног огледала подебљавамо n - пута [redacted] јер да би пао на огледало светлосни зрак мора прво проћи кроз водени слој.

Zadatak 1356. Za određivanje žižne daljine ispupčenog sfernog ogledala O_1 koristi se eksperiment čiji su elementi prikazani na slici. Ravno ogledalo O_2 pomera se duž ose sfernog ogledala sve dotle dok se likovi predmeta P u oba slučaja ne poklope, pri čemu su rastojanja α = 30[cm] i b = 10[cm]. Kolika je žižna daljina sfernog ogledala ?





$p = a + b$ ✓

$a = b - l$?

Лик предмета P у огледалу O_1 је L_1 и поклапа се са ликом предмета P у огледалу O_2, са ликом L_2.

$$\frac{L_1}{P} = \frac{-l}{p} = 1 \quad \text{па је} \quad \frac{L_2}{P} = \frac{-l}{p} = 1 \rightarrow \frac{-l}{p} = 1 \rightarrow -l = p$$

$$-l = a + b$$

36. (−) имагинарни лик

$l = -(a+b)$

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{+l}$$

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{-a-b} = \frac{2}{a+b}$$

$$-f = \frac{a+b}{2}$$

$f = -20[cm]$ што је немогуће!

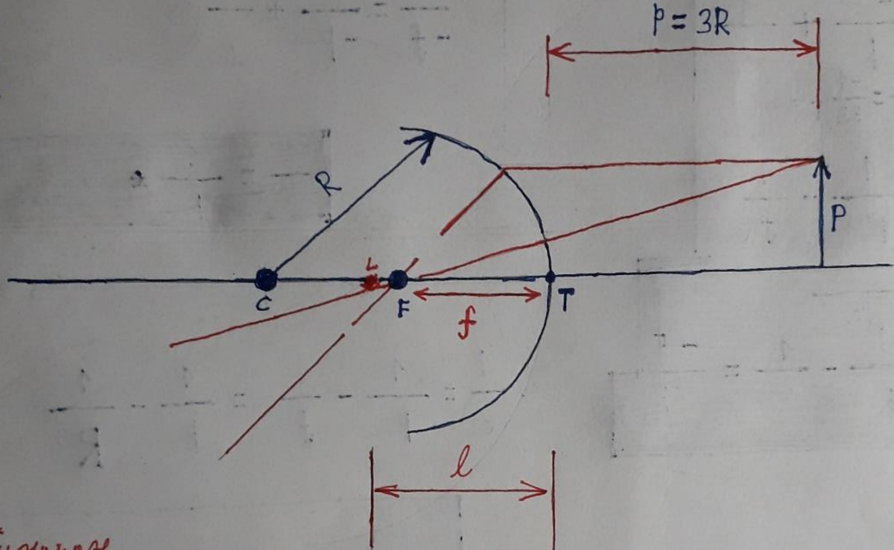
[redacted] Задатак (по мени) није добро постављен.

Проблем и његово рјешење (у збирци и код мене) се потиру.

Zadatak 1358. Svetao predmet se nalazi na rastojanju $p = 3R$ od temena izdubljenog sfernog ogledala poluprečnika krivine R. Za koliko će se povećati veličina lika predmeta u ogledalu ako se njegov poluprečnik krivine poveća dva puta ?

1°

$p = 3R$



Лик:

- имагинаран
- умањен (веома умањен)
- обрнут

Једначина за имагинаран лик сферног конкавног огледала:

$$-\frac{1}{f} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{2}{R}$$

$$\boxed{\frac{1}{l} = \frac{R-2p}{pR}}$$

$$l = \frac{pR}{R-2p}$$

$$u_1 = \frac{L}{P} = \frac{l}{p} = \frac{\frac{pR}{R-2p}}{p}$$

$$= \frac{R}{R-2p}$$

2°

$$p = 2\cdot 3R = 6R$$

замена p ×

$$f = \frac{2R}{R} = R$$

се не мења!

$$p = 3R$$

$$R = 2R$$

$$f = \frac{2R}{2} = R$$

[redacted]

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{-p} + \frac{1}{\ell}$$

[redacted]

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{R-p}{pR}$$

$$\ell = \frac{pR}{R-p}$$

$$u_2 = \frac{\ell}{p} = \frac{\frac{pR}{R-p}}{p} = \frac{R}{R-p}$$

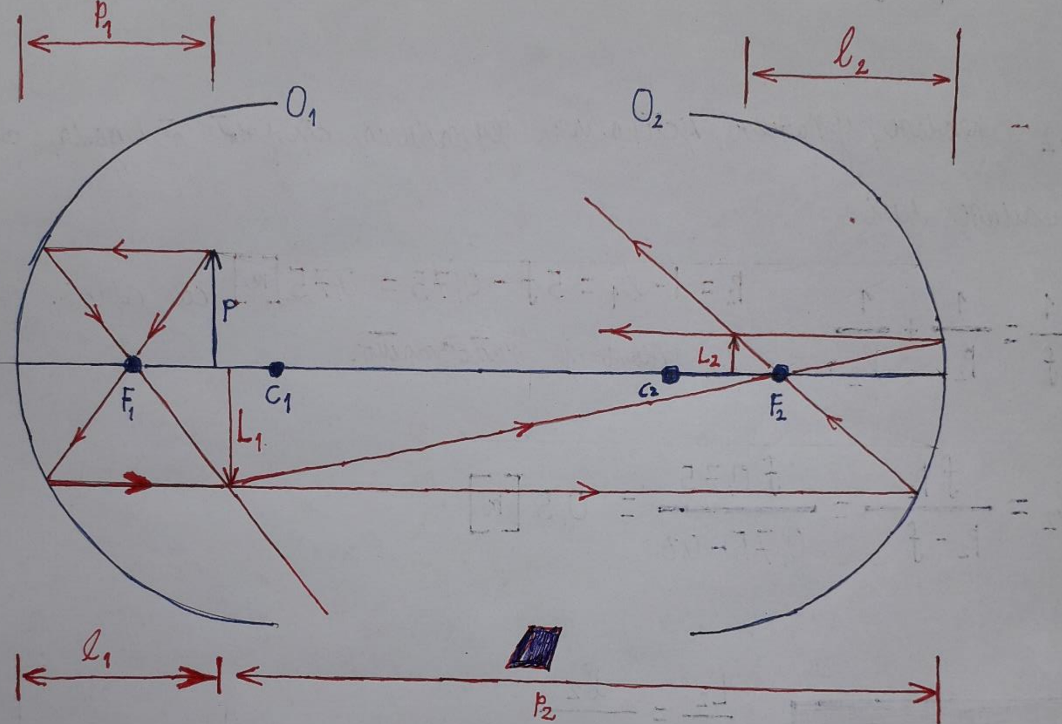
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{R}{R-p}}{\frac{R}{R-2p}} = \frac{R-2p}{R-p}$$

$$= \frac{R-6R}{R-3R} = \frac{-5}{-2}$$

$= 2,5 \times$ се

повећа.

Zadatak 1360. Dva su jednaka izdubljena sferna ogledala, žižnih daljina $f = 0{,}3$[m], postavljena su jedno naspram drugog na rastojanju $d = 5f$, tako da im se optičke ose poklapaju. Na rastojanju $p_1 = 0{,}5$[m] od jednog ogledala nalazi se svetao predmet, veličine $P = 2$[cm]. Gde se nalazi lik predmeta koji stvara svetlosni snop ako se odbije najpre od bližeg ogledala, zatim od daljeg ? Kolika je veličina ovog lika ? $L_2 = ?$



Слика: Конструишемо лик предмета P у огледалу O_1. Затим, конструишемо лик лика L_1 у огледалу O_2.

L_1 - реалан, увећан, обрнут па користимо једначину сферног огледала за реалан лик.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1}$$ Све нам је познато осим l_1.

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1 - f}{f\,p_1}$$

$$l_1 = \frac{f\,p_1}{p_1 - f} = 0{,}75\,[m]$$

L_2 – реалан, умањен, усправан, једначина сферног огледала за реалан лик.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2}$$

$p_2 = d - l_1 = 5f - 0{,}75 = 0{,}75\,[m]$ са слике, l_2 нам је непознато.

$$l_2 = \frac{f\,p_2}{p_2 - f} = \frac{f\,0{,}75}{0{,}75 - 0{,}3} = 0{,}5\,[m]$$

$$\frac{L_2}{p_2} = \frac{l_2}{p_2}$$

$$L_2 = \frac{l_2\,P_2}{p_2} = \frac{l_2\,P l_1}{p_1\,p_2} = 0{,}015\,[m]$$

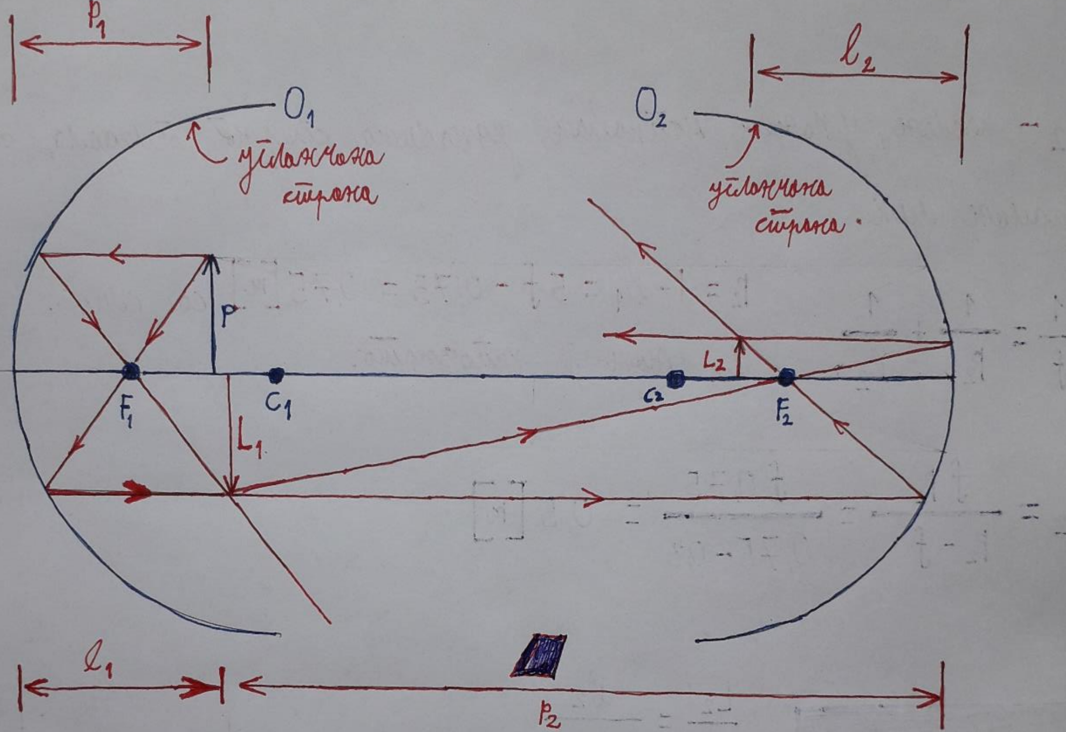
$P_2 = L_1$ је за огледало O_2 предмет.

$$\frac{L_1}{P} = \frac{l_1}{p_1}$$

$$L_1 = \frac{P\,l_1}{p_1}$$

Zadatak 1360. Dva su jednaka izdubljena sferna ogledala, žižnih daljina f = 0,3[m], postavljena su jedno naspram drugog na rastojanju d = 5f, tako da im se optičke ose poklapaju. Na rastojanju p_1 = 0,5[m] od jednog ogledala nalazi se svetao predmet, veličine P = 2[cm]. Gde se nalazi lik predmeta koji stvara svetlosni snop ako se odbije najpre od bližeg ogledala, zatim od daljeg ? Kolika je veličina ovog lika ?

$L_2 = ?$



Слика: Конструишемо лик предмета P у огледалу O_1. Затим, конструишемо лик лика L_1 у огледалу O_2.

L_1 - реалан, увећан, обрнут па користимо једначину сферног огледала за реалан лик.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1}$$ Све нам је познато осим l_1.

[redacted]

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1 - f}{f\,p_1}$$

$$l_1 = \frac{f\,p_1}{p_1 - f} = 0{,}75\,[m]$$

L_2 – реалан, умањен, усправан, једначина сферног огледала за реалан лик.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2}$$

$p_2 = d - l_1 = 5f - 0{,}75 = 0{,}75\,[m]$ са слике,
l_2 нам је непознато.

$$l_2 = \frac{f\,p_2}{p_2 - f} = \frac{f\,0{,}75}{0{,}75 - 0{,}3} = 0{,}5\,[m]$$

$$\frac{L_2}{P_2} = \frac{l_2}{p_2}$$

[redacted]

$$L_2 = \frac{l_2 P_2}{p_2} = \frac{l_2 P l_1}{p_1 p_2} = 0{,}015\,[m]$$

$P_2 = L_1$ је за огледало O_2 предмет.

$$\frac{L_1}{P} = \frac{l_1}{p_1}$$

$$L_1 = \frac{P\,l_1}{p_1}$$

Zadatak 1362. Svetao predmet nalazi se na rastojanju p = 30[cm] od:
a) ravnog ogledala,
b) ravne površine vode, indeksa prelamanja n = 1,34.
Odrediti položaj lika u oba slučaja.

a $l = p = 30\,[cm]$

b Ако се светлост прелама на сферној граничној површи полупречника закривљености граничне површи R онда важи ова релација.

$$\boxed{\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{l}}$$

За наш задатак:

$$\frac{n-1}{R \to +\infty} = \frac{1}{p} + \frac{n}{l}$$

$$0 = \frac{1}{p} + \frac{n}{l}$$

$$l = -np = -40{,}2\,[cm]$$

Да појасним за $\boxed{b}$.

Замислимо да се светао предмет налази на растојању P од центра Атланског океана. [redacted]

Предмет се налази у ваздуху што значи да светлосни зраци који потичу од предмета из ваздушне средине $n_1 = \frac{c}{c} = 1$ пролазе кроз граничну површ и простиру се кроз воду апсолутног индекса преламања $n_2 = n$.

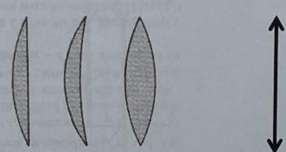
$R \to +\infty$ јер са које год тачке да посматрамо Атлански океан не видимо му ни почетак ни крај а због закривљености планете Земље површина Атланског океана је такође закривљена (мада се нама чини да је равна).

СОЧИВА

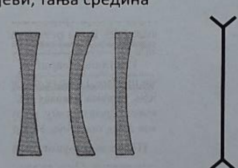
Оптичка сочива су провидна тела са две сферне граничне површине или једном сферном и једном равном површином. Ова сочива могу да се праве од стакла или неког другог провидног материјала. Користе се код наочара, микроскопа, телескопа, фото апарата и других оптичких инструмената.

Врсте сочива:

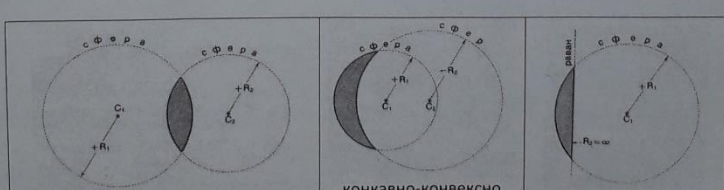
- сабирна (конвексна) - тањи крајеви, дебља средина



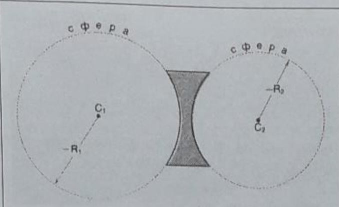
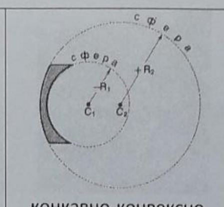
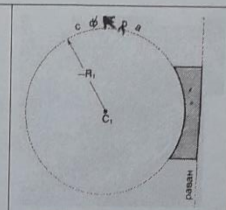
- расипна (конкавна) - дебљи крајеви, тања средина



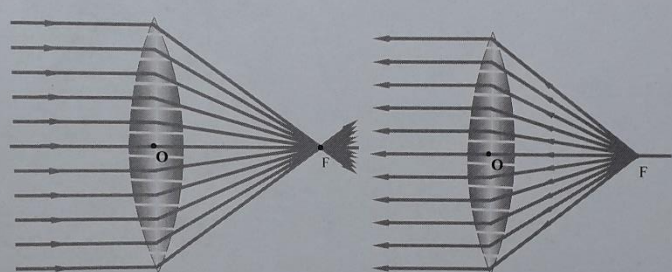
Ова подела на сабирна и расипна сочива важи под условом да се сочива налазе у средини чији је индекс преламања мањи од индекса преламања материјала од којег су сочива направљена.



биконвексно сочиво | конкавно-конвексно сочиво | планконвексно сочиво

		
биконкавно сочиво	конкавно-конвексно сочиво	планконкавно сочиво

Сваки део сочива се понаша као оптичка призма, а централни део као оптичка плоча. Приликом проласка кроз сочиво светлосни зрак се прелама два пута, приликом уласка у сочиво и приликом изласка из њега (као код оптичке призме). Да би било једноставније за разматрање приказиваћемо као да се светлост прелама само једном и то по средини сочива[1].



Код сабирних сочива преломљени зраци се секу у једној тачки која се назива жижа сочива.

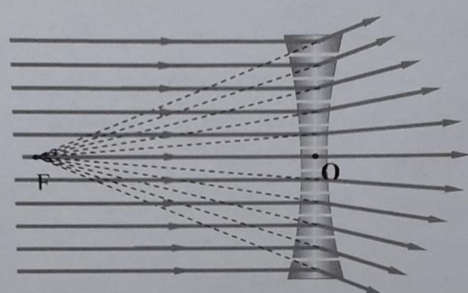
Зраци који су паралелни са главном оптичком осом сабирних сочива, после преламања на сочиву секу се у једној тачки која се назива **жижа сочива** (слика лево). Оваква сочива сакупљају, тј. сабирају светлосне зраке па су зато и добила назив **сабирна сочива**. Уколико светлост иде у супротном смеру, тј. ако је светлосни извор тачкаст и налази се

[1] Ако је дебљина сочива много мања од полупречника кривине његових површи, за такво сочиво може да се каже да је танко. Код танких сочива може се сматрати да се преламање врши само на равни која пролази кроз центар сочива. Приликом разматрања у овом поглављу посматраћемо танка сочива.

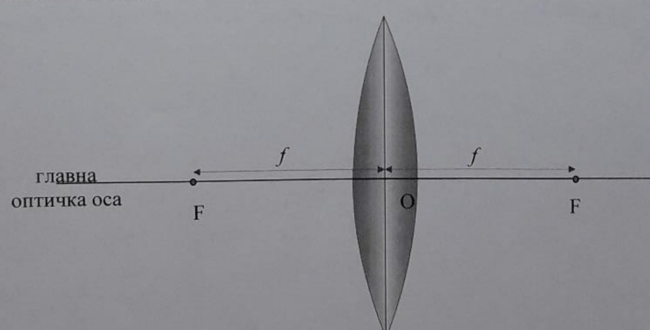
у жижи сочива, светлосни зраци ће након проласка кроз сочиво постати паралелни са главном оптичком осом (слика десно).

Свако сабирно сочиво има две жиже и то по једну са сваке стране сочива. Обе жиже су једнако удаљене од центра сочива.

Код расипних сочива продужеци преломљених зракова се секу у једној тачки. Та тачка представља имагинарну жижу расипног сочива. Ова сочива „расипају" светлосне зраке, па су зато и добила назив **расипна сочива**.



Елементи сочива:

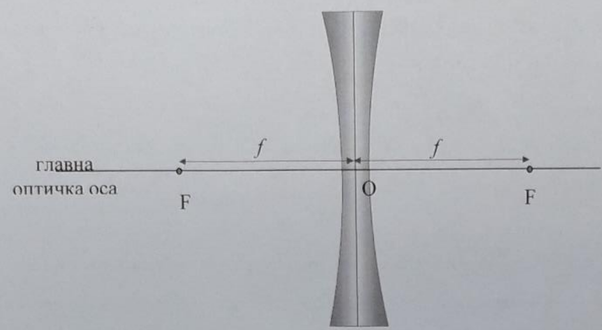


O - **оптички центар** сочива

F - **жиже** (фокуси) сочива

f - **жижна даљина** (растојање од жиже до оптичког центра сочива)

главна оптичка оса - прва линија која пролази кроз жиже и оптички центар сочива



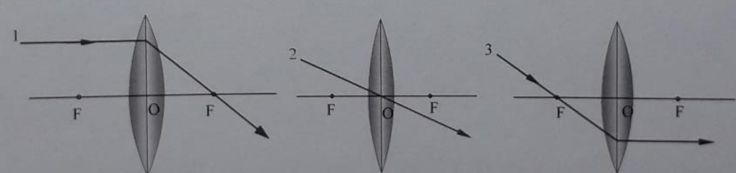
За одређивање положаја ликова код сочива користе се зраци који полазе од предмета. Као и у случају сферних огледала, приликом конструкције ликова користићемо само карактеристичне зраке. **Карактеристични зраци** су зраци чији су правци простирања после преламања познати.

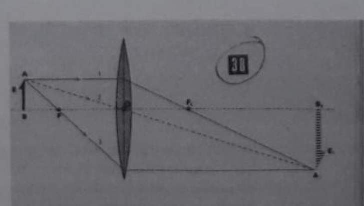
За конструкцију ликова могу да се користе следећи карактеристични зраци:

1 - зрак паралелан са главном оптичком осом сочива након преламања пролази кроз жижу

2 - зрак који пролази кроз оптички центар сочива не прелама се

3 - зрак који пролази кроз жижу након преламања постаје паралелан са главном оптичком осом



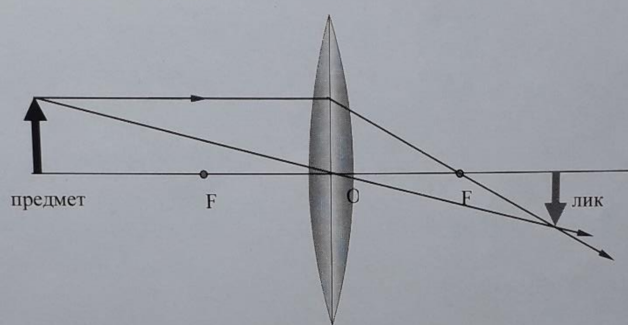


Ако се предмет налази на главној оптичкој оси за конструкцију лика довољно је да се користе два зрака.

Примери:

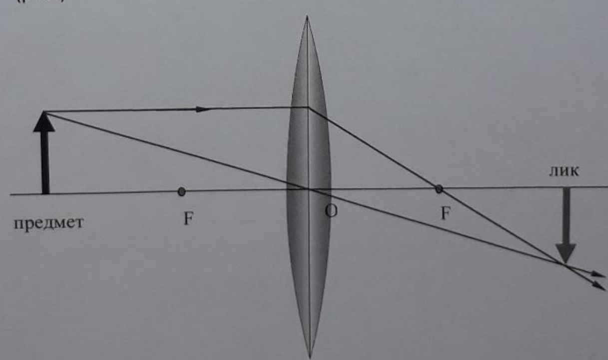
Одређивање положаја, врсте и величине лика за неке карактеристичне положаје предмета у односу на сабирно сочиво:

1. предмет се налази далеко од сочива (растојање предмета је веће од двоструке жижне даљине p>2f)



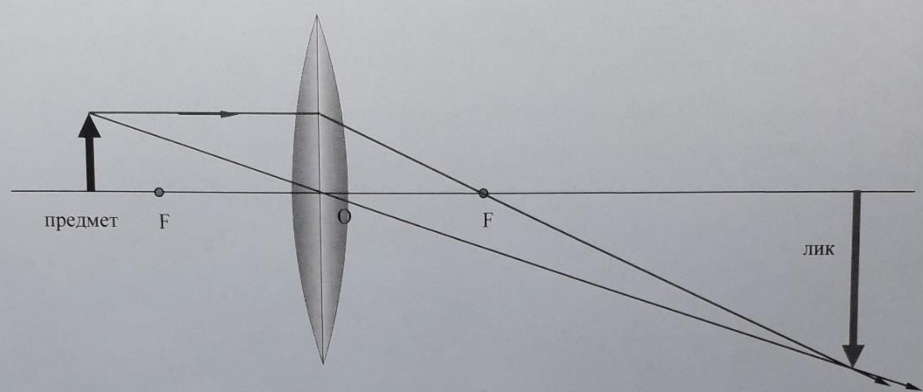
лик: реалан (стваран), умањен, обрнут

2. предмет се налази на растојању које је једнако двострукој жижној даљини (p=2f)



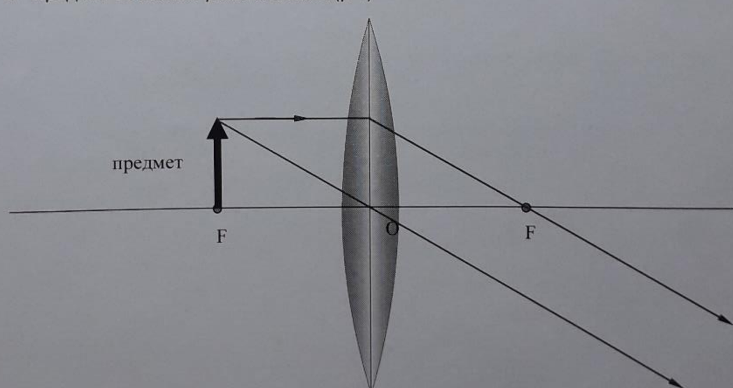
лик: реалан (стваран), по величини једнак предмету, обрнут

3. предмет се налази испред жиже сочива (p>f)



лик: реалан (стваран), увећан, обрнут

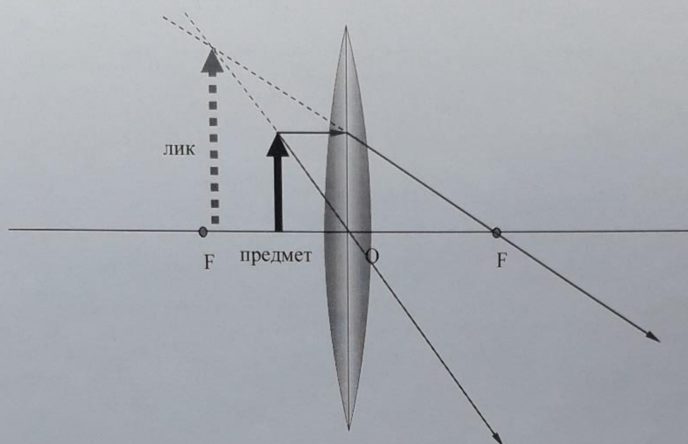
4. предмет се налази у жижи сочива (p=f)



после преламања на сочиву, зраци су паралелни, не може да се формира лик

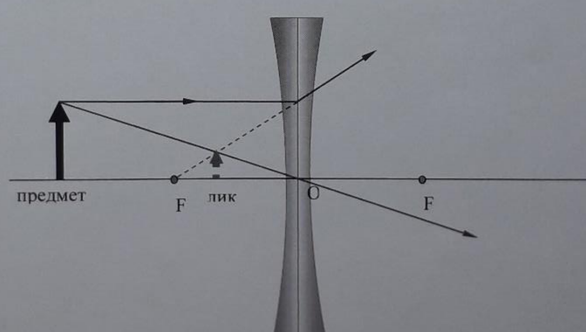
односно можемо да кажемо да се лик налази у бесконачности

5. предмет се налази између жиже и сочива (p<f)



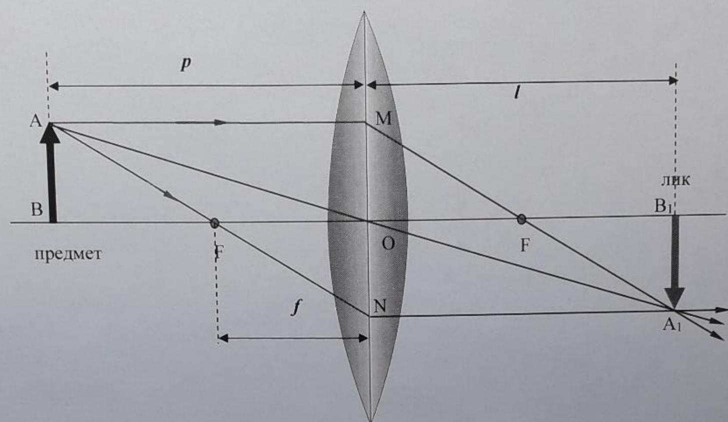
лик: имагинаран (нестваран), увећан, усправан

За конструкцију ликова код расипних сочива важе иста правила као и код сабирних сочива. Код расипних сочива лик се увек образује на оној страни на којој се налази и предмет.



Лик је увек усправан, имагинаран и умањен.

Једначина сочива



p - удаљеност предмета од сочива

l - удаљеност лика од сочива

f - жижна даљина

Слични троуглови:

$\Delta ABF \sim \Delta NOF \qquad \Delta A_1B_1F \sim \Delta MOF$

$$\frac{AB}{ON} = \frac{BF}{OF} = \frac{p-f}{f} \qquad \frac{MO}{A_1B_1} = \frac{OF}{FB_1} = \frac{f}{l-f}$$

$$AB = MO \qquad ON = A_1B_1$$

$$\frac{p-f}{f} = \frac{f}{l-f}$$

$$(p-f)(l-f) = f^2$$

$$pl - pf - fl + f^2 = f^2$$

$$pl - pf - fl = 0$$

$$pl = pf + fl \quad / : lpf$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

За расипна сочива једначина може да се напише у следећем облику: $-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$

Увећање сочива

Ликови који се добијају помоћу сочива могу да буду увећани, умањени и у специјалном случају једнаки по величини са предметом. Увећање сочива се израчунава као количник величине лика и величине предмета односно као количник удаљености лика и удаљености предмета од сочива.

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}$$

L – висина лика

P – висина предмета

p - удаљеност предмета од сочива

l - удаљеност лика од сочива

f - жижна даљина

слабије - тање - жижа удаљенија

јаче - дебље - жижа ближе

Оптичка јачина

На основу дебљине сочива можемо да се закључи да ли су јача или слабија. Тања сочива су слабија, а дебља су јача. Код тањих сочива жижа је на већој удаљености од сочива него код дебљих.

Физичка величина којом се одређује јачина сочива назива се оптичка јачина сочива, а обележава се грчким словом омега (ω).

$$\omega = \frac{1}{f}$$

Оптичка јачина сочива је обрнуто сразмерна жижној даљини сочива.

Способност сочива да скреће зраке – већа – више скреће зраке

Јединица за оптичку јачину сочива је диоптрија, а означава се словом D.

$$D = \frac{1}{m}$$ D>0 сабирна; D<0 расипна

Оптичку јачину од 1 диоптрије има сочиво чија је жижна даљина 1 метар.

пример - наочари

Оптичка моћ је позитивна за сабирна сочива, а негативна за расипна сочива.

Оптичка једначина сочива

Жижна даљина, а према томе и оптичка моћ, зависе од полупречника кривине сферних површина и релативног индекса преламања материјала од којег је сочиво направљено, у односу на спољашу средину.

$$\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

- сабирна сочива – конвексне површине – полупречници кривина сферних површина узимају се са знаком плус
- расипна – конкавне површине – полупречници кривина сферних површина узимају се са знаком минус

Код планконвексних и планконкавних сочива једна страна је равна, па $r \to \infty$. У том случају $\frac{1}{r} \to 0$

$$\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{r}$$

Када су полупречници кривина обе сферне површине међусобно једнаки $(r_1 = r_2 = r)$

$$\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{r}$$

Систем сочива

Ако сочива имају заједничку оптичку осу (центрирана сочива)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

d – растојање између сочива.

Ако су сочива прислоњена јена уз друго (d =0)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

НЕДОСТАЦИ СОЧИВА

Приликом досадашњих разматрања претпостављали смо услове под којима сочива дају верне ликове и под којима важе изведене једначине. Ови услову нису једноставни за остварење.

Сочива имају низ недостатака, због чега се не добијају правилни и оштри ликови.

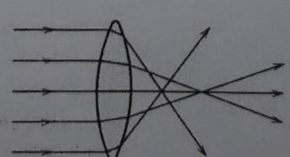
Ликове предмета код сочива до сада смо посматрали искључиво у параксијалном снопу, тј. претпостављали смо да на сочиво падају зраци под малим углом у односу на оптичку осу. У том случају сви зраци који полазе из тачкастог предмета секу се, после преламања, у једној тачки стварајући оштар лик.

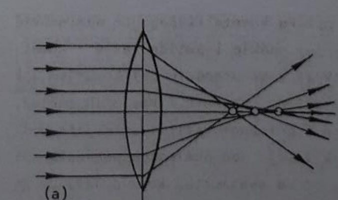
Сложена (полихроматска) бела светлост, која се обично користи, разлаже се приликом проласка кроз сочиво.

Недостаци сочива не могу се потпуно отклонити, али је могуће кориговати њихов утицај. Недостаци оптичких система називају се аберације.

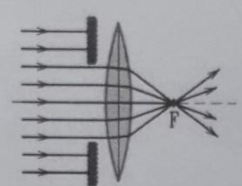
Сферна аберација

Сферна аберација је недостатак сочива која долази до изражаја код сочива мале жижне даљине (дебља сочива) и већег отвора дијафрагме (бленде). Зраци који падају на периферни део сочива преламају се јаче од оних који су ближи средини сочива (ближе главној оптичкој оси). Не постоји јединствена жижа, па добијени ликови нису оштри.



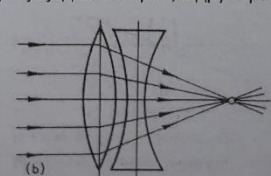


Сферна аберација може да се ублажи ако се испред сочива постави заклон са кружним отвором. На овај начин се изолују периферни зраци, а пропуштају зраци који су ближе оптичкој оси и који се преламају у једну тачку.



Фотоапарати и камере су опремљени одговарајућом блендом[2], којом се контролише интензитет светлости и смањује сферна аберација. Оштрија слика се добија када је отвор бленде мањи, јер тада светлост пада само на централни део сочива објектива. Али, тада се јавља проблем пошто је смањен интензитет светлости.

Сферна аберација може да се умањи употребом комбинованих сочива различитог индекса преламања, од којих је једно сабирно, а друго расипно.

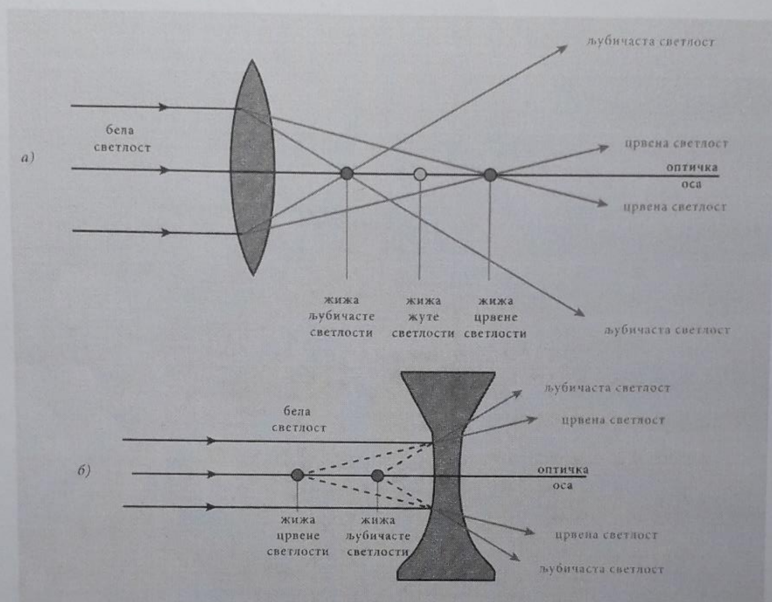


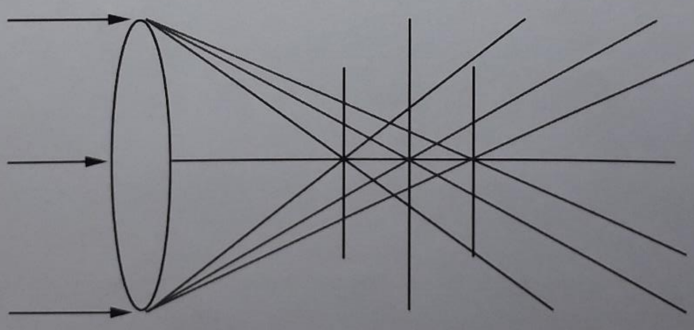
Хроматична аберација

Хроматична аберација је последица дисперзије светлости. Слично као код призме, када бела светлост прође кроз сочиво поједине компоненте (боје) беле светлости различито се преламају, па се њихови зраци не секу у истој тачки – жижи, већ свака боја образује

[2] Бленда је отвор којим се контролише ширина снопа светлости који пада на сочиво.

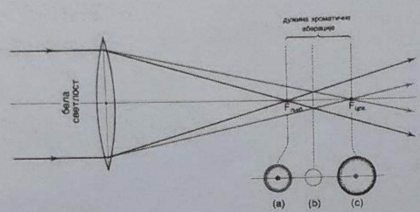
посебну жижу. Љубичаста светлост се највише прелама, а црвена најмање, па ће жижа љубичасте светлости бити најближа сочиву, а црвена најудаљенија.

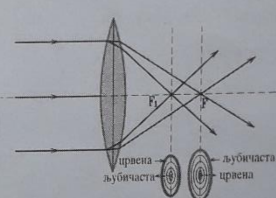


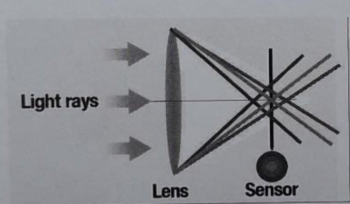


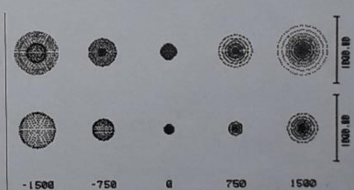
Ако је на сочиво усмерен сноп зрака паралелних оптичкој оси ликови нису оштри, осим тога на крајевима су обојени.

Када се заклон постави у положај (a) односно у жижну раван љубичасте светлости, на њему ће се појавити љубичасто обојена жижа, оивичена црвеним прстеном. Када се заклон постави у положај (c) односно у жижну раван црвене светлости, на њему ће се појавити црвена жижа оивичена љубичастим прстеном. Између ових тачака појављују се жиже осталих боја светлости.

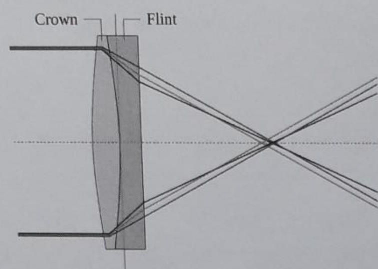


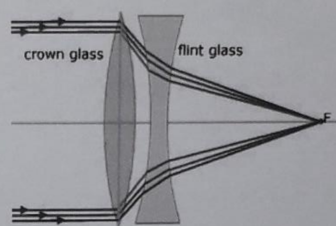






Хроматична аберација се отклања применом комбинованих сочива и то конвексног сочива од крон стакла и конкавног сочива од флинт стакла.



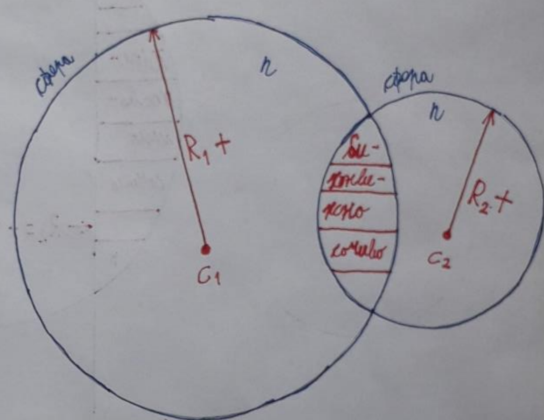


Хроматична аберација се у овом случају скоро и не примећује на ликовима предмета осветљених белом светлошћу.

Zadatak 1365. Žižna daljina tankog sfernog sočiva, načinjenog od stakla indeksa prelamanja n = 1,70 iznosi f = 30[cm]. Koliki su poluprečnici krivina sočiva ako je ono:

a) bikonveksno,

b) plankonveksno ?



a

$R_1 = ?$

$R_2 = ?$

$$\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_1 = R_2$ → За биконвексно сочиво.

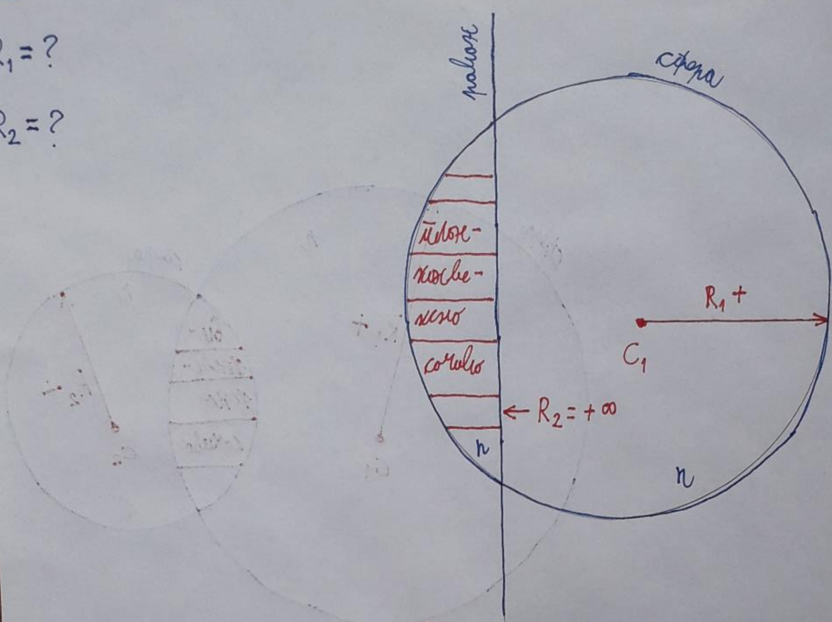
$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R_1}$$

$$R_1 = R_2 = 2f(n-1) = 0{,}42\,[m]$$

b

$R_1 = ?$

$R_2 = ?$



$$\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \overset{0}{\boxed{\frac{1}{R_2}}}\right)$$

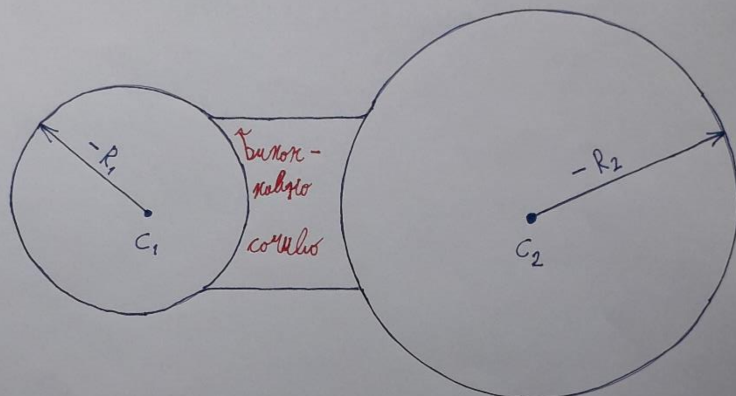
$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$R_1 = f(n-1) = 0{,}21\,[m]$$

$$R_2 \longrightarrow +\infty$$

Zadatak 1367. Tanko bikonkavno sferno sočivo, načinjeno od kron-stakla, indeksa prelamanja n = 1,52 ograničeno je sfernim površinama, polupredčnika krivine R_1 = 30[cm] i R_2 = 40[cm]. Kolika je žižna daljina ovog sočiva ?

$f = ?$



$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{-R_1} + \frac{1}{-R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)(-1)\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{-R_2(n-1) - R_1(n-1)}{R_1 R_2}$$

$$f = \frac{R_1 R_2}{-(n-1)(R_1 + R_2)} =$$

$$-33\,[cm]$$

18.

Zadatak 1368. Bikonveksno tanko sferno sočivo načinjeno od stakla indeksa prelamanja n = 1,60 ima žižnu daljinu f = 10[cm] kada se nalazi u vazduhu. Kolika će biti žižna daljina ovog sočiva:

a) ako se ono potopi u tečnost indeksa prelamanja n_1 = 1,50,

b) u sredini indeksa prelamanja n_2 = 1,70 ?

Оптичка једначина сочива

$$\boxed{\omega = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$ у вакууму-у,

$$\boxed{\omega = \frac{1}{f} = \left(\frac{n \text{ сочива у вакууму}}{n_s - \text{у средини индекса лома}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$ у средини индекса лома.

За биконвексно огледало важи да је $R_1 = R_2$, а R можемо одредити оптичком једначином сочива у вакууму.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R}$$

$$R = 2f(n-1) = 12\,[\text{cm}]$$

a $f_1 = ?$

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\frac{2}{R} = \left(\frac{n - n_1}{n_1}\right)\frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{2(n - n_1)}{n_1 R}$$

$$f_1 = \frac{R n_1}{2n - 2n_1} = 90\,[cm]$$

b $f_2 = ?$

$$f_2 = \frac{R n_2}{2n - 2n_2} = -102\,[cm]$$

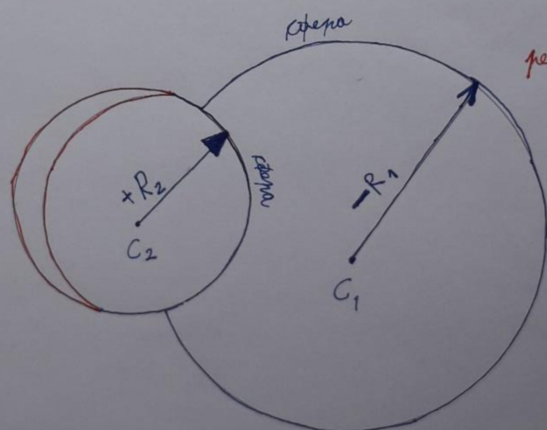
Zadatak 1370. Tanko konveksno-konkavno sferno sočivo ima poluprečnike krivina konkavne površine $R_1 = 20[cm]$,a konveksne površine $R_2 = 2R_1$. Indeks prelamanja stakla od koga je sočivo načinjeno iznosi $n = 1,66$. Kolika je optička moć ovog sočiva ?

$$\omega = ?$$

$$\omega = (n-1)\left(\frac{-1}{R_1} + \frac{1}{2R_1}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{R_1}\right) =$$

$$(n-1)\left(\frac{1-2}{2R_1}\right) = \frac{-1(n-1)}{2R_1} = -1,65\,[D]$$

R_1 морамо претворити у метре да би резултат био исправан.



Zadatak 1373. Kolika je optička moć: a) sabirnog sočiva, b) rasipnog sočiva žižne daljine $f = 40[\mathrm{cm}]$?

$\boxed{a}$ $$\omega = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\,[D]$$

$\boxed{b}$ $$\omega = -\frac{1}{f} = -2{,}5\,[D]$$

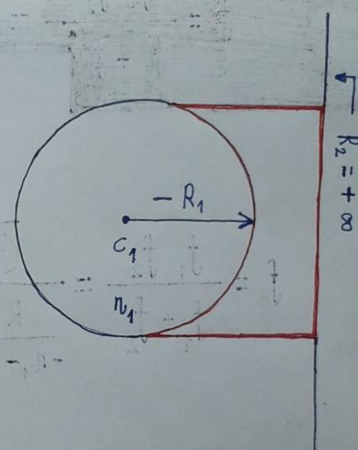
Zadatak 1374. Tanko plankovkavno sočivo načinjeno je od kron-stakla indeksa prelamanja n_1 = 1,52, a plankonveksno sočivo od flint-stakla indeksa prelamanja n_2 = 1,90. Poluprečnici krivina oba sočiva su jednaki i iznose R = 40[cm]. Sočiva su spojena sfernim površinama. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema sočiva ?

$d = 0$

$f_e = ?$

$R_1 = R$ у оба посматрана случаја.

Код планкокавног сочива $\Rightarrow$

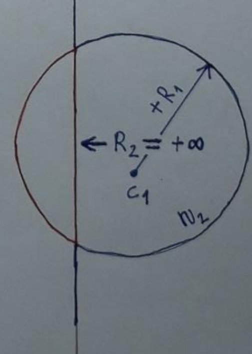


$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{-R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1 - n_1}{R_1}$$

$$f_1 = \frac{R}{1 - n_1}$$

Код планконвексног огледала $\Rightarrow$

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{+R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n_2 - 1}{R_1}$$



$$f_2 = \frac{R}{n_2 - 1}$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} + 0$$

[redacted]

$$f_e = \frac{f_1 \ f_2}{f_1 + f_2} = \frac{\dfrac{R^2}{(1-n_1)(n_2-1)}}{\dfrac{R}{-n_1+1} + \dfrac{R}{n_2-1}}$$

$$\frac{R}{n_2 - n_1} \cong 105 \, [cm]$$

Zadatak 1375. Tanko bikonveksno sočivo, jednakih poluprečnika krivina R = 30[cm], načinjeno je od stakla indeksa prelamanja n = 1,80.

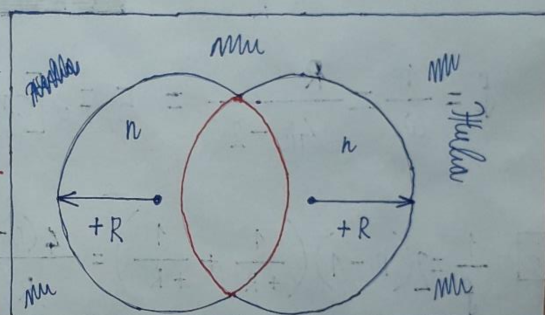
a) Sočivo se najpre postavi na živu, pri čemu se do polovine potopi u nju. Površina sočiva do žive deluje kao izdubljeno sferno ogledalo. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema ?

b) Gde se nalazi žiža sistema kada je sočivo postavljeno na ravno ogledalo ili se nalazi iznad površine žive ?

c) Kolika je, prema tome, promena žižne daljine sistema pri potapanju u živu ?

a)

$f_e = ?$



Посматрано сочиво поставимо на живу којом је испуњен наш базен (слика).

За посматрано биконвексно огледало је $\left(+R_1 = +R_2 = R\right)$:

$$\omega_1 = 2\frac{1}{f} = 2(n-1)\left(\frac{1}{+R} + \frac{1}{+R}\right) = \frac{4(n-1)}{R}$$ оптичка моћ сочива. Разлог множења са 2: Свјетлосни зраци долазе из ваздуха, пролазе кроз сочиво, ударају у живу и од ње се одбију и опет прођу кроз сочиво (свјетлосни зраци 2× прођу кроз сочиво). Зраке свјетлости одбијене од живу када прођу кроз сочиво видимо као да су одбијени од издубљено

сферно огледало оптичке моћи:

$$\omega_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{R}{2}} = \frac{2}{R}$$

$$\omega_e = \omega_1 + \omega_2 = \frac{4n - 4 + 2}{R} =$$ [redacted] $$= \frac{2(2n-1)}{R}$$

$$f_e = \frac{1}{\omega_e} = \frac{R}{4n-2} = 5,76\,[cm]$$

b $$\frac{1}{f} = 2(n-1)\left(\frac{1}{+R} + \frac{1}{+R}\right) = \frac{4(n-1)}{R}$$

[redacted] $$f = \frac{R}{4n-4} \approx 9,3\,[cm]$$

c $$\Delta f = f - f_e = \approx 3,7\,[cm]$$

Zadatak 1376. Na ravno ogledalo, iznad koga se nalazi tanak sloj vode postavljeno je tanko sabirno sočivo, žižne daljine $f_1 = 50[cm]$, načinjeno od stakla indeksa prelamanja $n_1 = 1{,}60$. Sočivo se pri ovome do polovine potopi u vodu, čiji je indeks prelamanja $n_2 = 1{,}34$. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema ?

Сабирно сочиво – узмимо произвољно биконвексно сочиво тако да је $(+R_1 = +R_2 = R)$.

$f_e = ?$

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{2}{R} \rightarrow f_1 = \frac{R}{2(n_1-1)}$$

$$R = 2f_1(n_1 - 1)$$

$$\frac{1}{f_2} = (-n_2 + 1)\frac{2}{R} \rightarrow f_2 = \frac{R}{2(-n_2+1)} = \frac{R}{2(1-n_2)}$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$d = 0$ јер сочива су прислоњена једно уз друго.

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \text{[redacted]}$$

$= 115\,[cm]$

Zadatak 1318. Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti na graničnu površinu vazduh – staklo da bi ugao između upadnog i prelomnog zraka bio φ = 150° ?
Smatrati da je indeks prelamanja stakla n = 1,5.

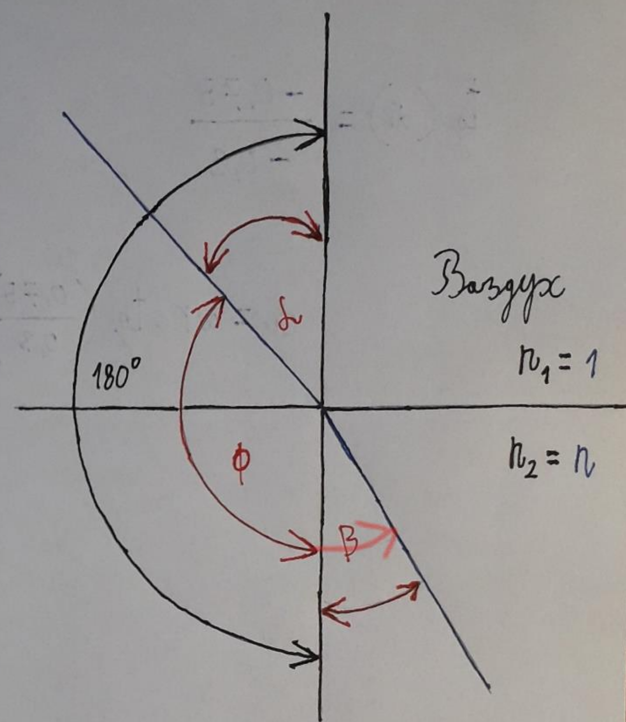
$\boxed{\alpha = ?}$

Из закона преламања светлости:

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$$

Имамо да је:

$$\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$$



$$180^\circ - \alpha + \beta = \phi$$

што се очита са слике

$$\beta - \alpha = \phi - 180^\circ$$

$$\beta = \alpha - 30^\circ$$

$$\sin(\alpha) = n \sin(\alpha - 30^\circ)$$

$$\sin(\alpha) = n\left[\sin(\alpha)\cos(30^\circ) - \cos(\alpha)\sin(30^\circ)\right]$$

$$\sin(\alpha) = n \sin(\alpha) 0{,}866 - n \cos(\alpha) 0{,}5$$

$$\sin(\alpha) = 1{,}3 \sin(\alpha) - 0{,}75 \cos(\alpha) \quad : \Big/ \begin{matrix} \cos(\alpha) \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{matrix}$$