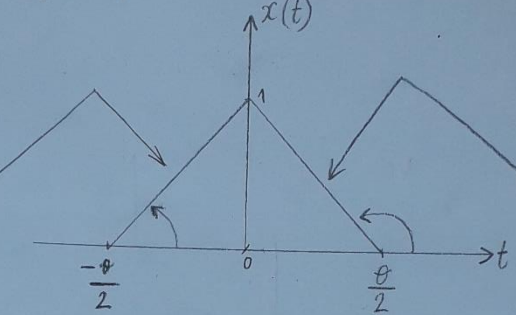
Одредити спектралну густину амплитуда троугаоног импулса користећи теорему о диференцирању.



$x(t) = kt + n$ ✓

$x(t=0) = 1 \longrightarrow n = 1$ ✓

$x\left(t = \frac{-\theta}{2}\right) = 0 \longrightarrow k = \frac{2}{\theta}(-1)^2$

$x(t) = \frac{2}{\theta}t + 1$ ✓

Само сам дефинисао праве.

✓ $x(t) = kt + n$

✓ $x(t=0) = 1 \longrightarrow n = 1$ ✓

✓ $x\left(t = \frac{\theta}{2}\right) = 0 \longrightarrow k\frac{\theta}{2} + 1 = 0$

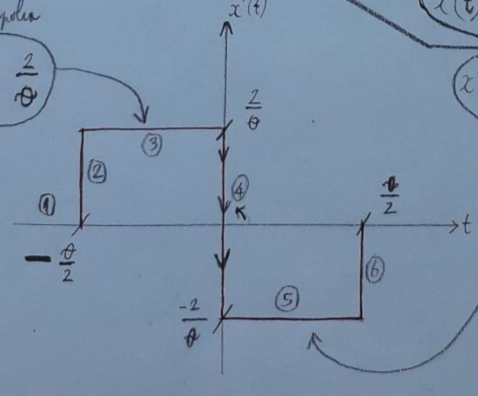
$k = -\frac{2}{\theta}$

$x(t) = \frac{-2}{\theta}t + 1$ ✓

То је права

✓ $x'(t) = \frac{2}{\theta}$

$x'(t) = \frac{-2}{\theta}$ исто права. ✓

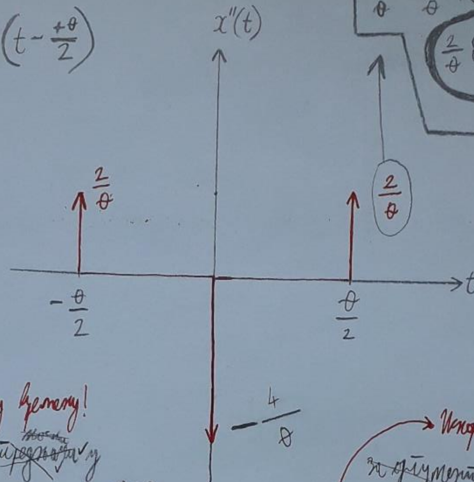


Значи нацртао сам двије праве, висина $\frac{2}{\theta}$ и $-\frac{2}{\theta}$ између тачака $-\frac{\theta}{2}$ и $\frac{\theta}{2}$.

Слиједећи корак је поново диференцирање.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{2}{\theta}\delta\left(t-\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{-4}{\theta}\delta(t) + \frac{2}{\theta}\delta\left(t-\frac{+\theta}{2}\right)$$

$$\frac{2}{\theta} = \frac{2}{\theta}\cdot 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\theta}\delta\left(t+\frac{\theta}{2}\right) \checkmark$$



· Искористи померање у времену!

Овде ти сигнал ~~предњачи~~ касни у односу на вертикалну... $0-\frac{\theta}{2} = -\frac{\theta}{2}$

$0-\frac{\theta}{2}$

мето

Искористи померање у времену!

~~За аргументе померања у времену само проматрај је ли $\pm\frac{\theta}{2}$!~~

$0-\left(-\frac{\theta}{2}\right) = +\frac{\theta}{2}$

$$x''(t) = \frac{2}{\theta}\delta\left(t+\frac{\theta}{2}\right) - \frac{4}{\theta}\delta(t) + \frac{2}{\theta}\delta\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

Следећи корак је да искористим померање у времену.

$$\frac{d^2x(t)}{t^2} = \frac{2}{\theta}\left(e^{-j\omega\frac{\theta}{2}} - 2e^{j\omega 0} + e^{j\omega\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{2}{\theta}\left(2\cos\left(\cancel{j}\omega\frac{\theta}{2}\right)-2\right) =$$

$$\frac{4}{\theta}\left(\cos\left(\omega\frac{\theta}{2}\right)-1\right) \checkmark$$

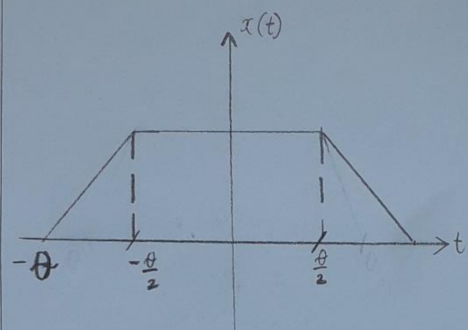
Диференцијал и интеграл ће се поништити...

$$\frac{d^2x(t)}{t^2} \longleftrightarrow (j\omega)^2 X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2x(t)}{dt^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

Још да одредимо степен и посао је завршен!

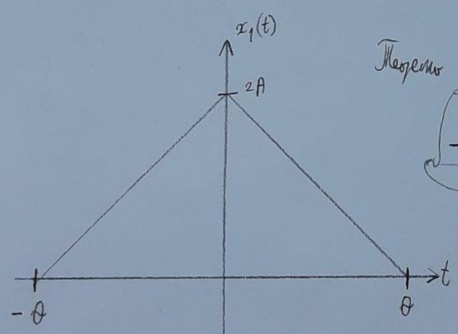
$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}\,\frac{4}{\theta}\left(\cos\left(\omega\frac{\theta}{2}\right)-1\right) \overset{j^2=-1}{=} \frac{4}{\theta\omega^2}\, 2\sin^2\left(\omega\frac{\theta}{4}\right)\frac{\theta}{16}\,\frac{16}{\theta} \checkmark$$

Одредити Фуријеву трансформацију сигнала са слике.

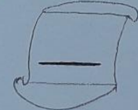


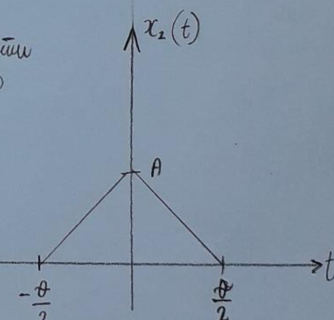
Теорема линеарности + разлика два

1° Начин (Остали ће се помињу...): апериодично сигнала.



Теорема линеарности





$$X(j\omega) = X_1(j\omega) - X_2(j\omega) =$$

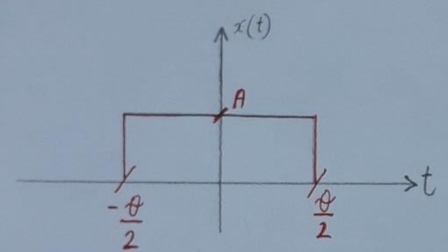
$$2A\theta\left(\frac{\sin\left(\omega\frac{\theta}{2}\right)}{\omega\frac{\theta}{2}}\right)^2 - \frac{A\theta}{2}\left(\frac{\sin\left(\omega\frac{\theta}{4}\right)}{\omega\frac{\theta}{4}}\right)^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Одредити Fourier-ову трансформацију

а) Правоугаоног импулса.



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,e^{-j\omega t}\,dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\,dt = \boxed{\begin{matrix} -j\omega t = y \\ dt = \frac{-dy}{j\omega} \end{matrix}}$$

$$= \frac{-A}{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{y}\,dy = \frac{-A}{j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-\theta/2}^{\theta/2} = \frac{+A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\theta}{2}} - e^{-j\omega\frac{\theta}{2}}\right) =$$

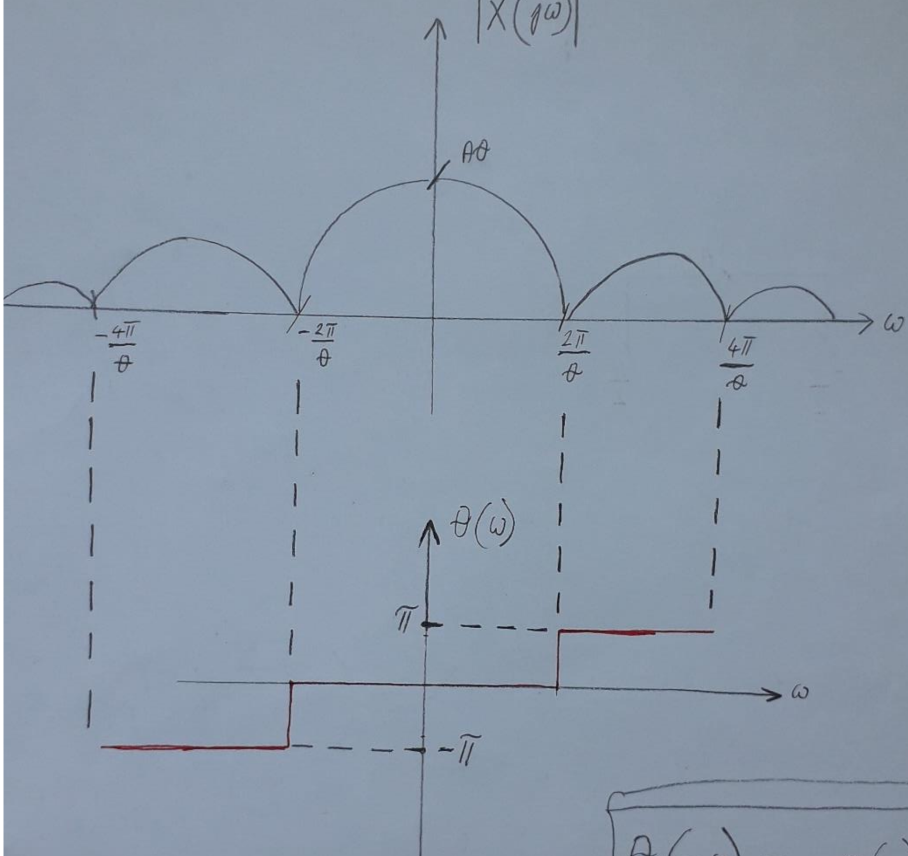
$$\frac{A}{j\omega}\left[\cos\left(\omega\frac{\theta}{2}\right) + j\sin\left(\omega\frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(\omega\frac{\theta}{2}\right) - j\sin\left(\omega\frac{\theta}{2}\right)\right)\right] =$$

$$\frac{A}{\cancel{j}\omega}\,2\cancel{j}\sin\left(\omega\frac{\theta}{2}\right) = \Big/ \frac{1}{\frac{2}{\theta}\,\frac{\theta}{2}} = A\theta\,\frac{\sin\left(\omega\frac{\theta}{2}\right)}{\omega\frac{\theta}{2}}$$

Значи, када тражимо коефицијенте F. реда... Морамо точно по шта штимамо!

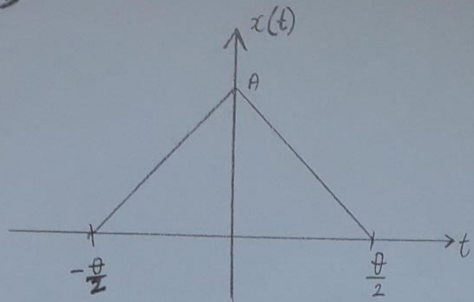
Нули: $\omega \frac{\theta}{2} = k\pi$

$\omega = \frac{2\pi}{\theta} k$



$$\boxed{\theta(-\omega) = -\theta(\omega)}$$

b)



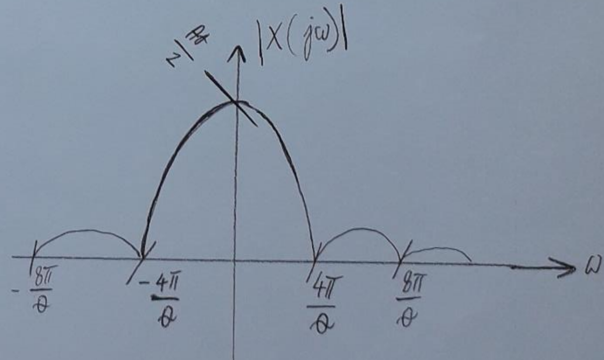
$$\underline{F_n} = \frac{A\theta}{2T}\left(\frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{4}\right)}{n\omega_0\frac{\theta}{4}}\right)^2$$

$$X(j\omega) = \lim_{T\to\infty} T\cdot \underline{F_n} = \frac{A\theta}{2}\left[\frac{\sin\left(\omega\frac{\theta}{4}\right)}{\omega\frac{\theta}{4}}\right]^2 \checkmark$$

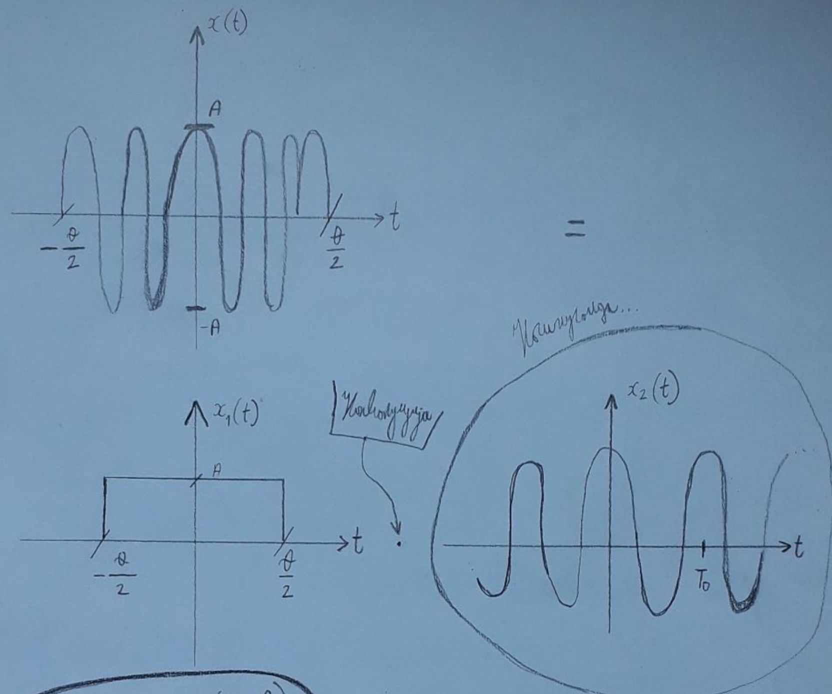
Нуле:

$\omega \frac{\theta}{4} = n\pi$

$\omega = \frac{4\pi}{\theta} n$



2. Задатак а)



$$X_{1n} = \frac{A\theta}{T} \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\theta}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{\theta}{2}}$$

$$X_1(j\omega) = \lim_{T\to\infty} T X_{1n} = A\theta \frac{\sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)}{\omega \frac{\theta}{2}}$$

Нуле: $\omega = \frac{2\pi}{\theta} k$

→ Нађи израз за спектар периодичног П тако да на испиту преко лимеса можеш наћи спектар апериодичног таквог сигнала.

$$x(t) = x_1(t)\cos(\omega_0 t) =$$

$$x_1(t)\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) =$$

$$\frac{1}{2}x_1(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x_1(t)e^{-j\omega_0 t}$$

У свијету сигнала знај да је ± два или више сигнала (још ако у исти помножени скаларно, а због 1 увијек јесу) знај да је то линеарност.

За сада имам да је:

Видим теорему линеарности, а сваки од сабирака је сигнал по времену и то помножен са $e^{\pm j\omega_0 t}$

$$x(t) = \frac{1}{2} x_1(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x_1(t) e^{-j\omega_0 t}$$

Хоћу да осјетиш тај корак када сигнал из времена требаш да пребацуш у фреквенцију.

И сада за тај сигнал ја требам одредити (његов) спектар...

- У изразу (релацији) за $x_1(t)$ ја препознајем (Модулациону теорему)

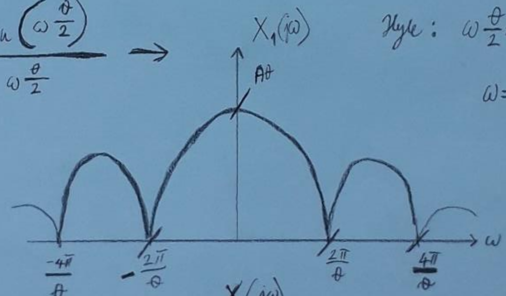
помјерај у фреквенцији: $\boxed{x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(j(\omega \pm \omega_0))}$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} X_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X_1(\omega + \omega_0)$$

$$X_1(j\omega) = A\theta \frac{\sin\left(\omega \frac{\theta}{2}\right)}{\omega \frac{\theta}{2}} \rightarrow$$

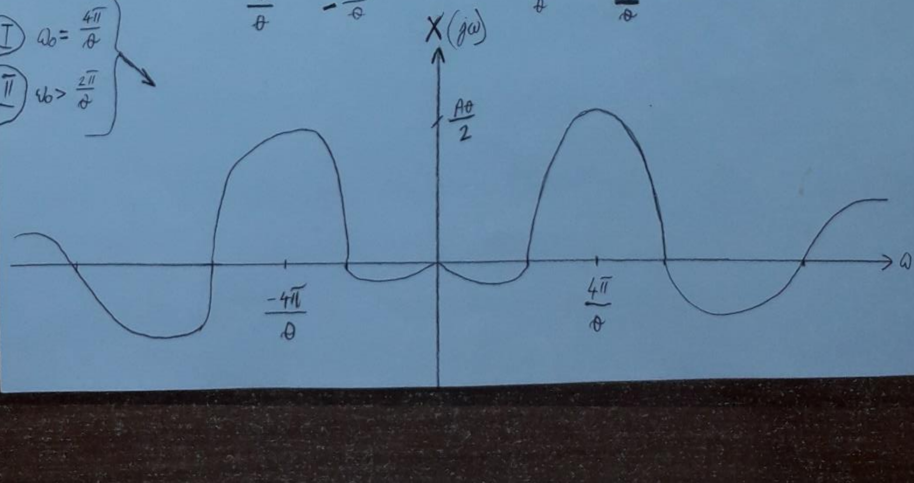
Нуле: $\omega \frac{\theta}{2} = \pm k\pi$

$\omega = \frac{2k\pi}{\theta}$

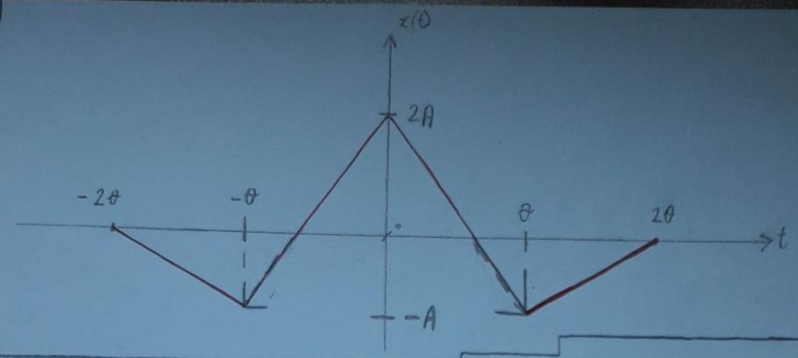


I $\omega_0 = \frac{4\pi}{\theta}$

II $\omega_0 > \frac{2\pi}{\theta}$



b)



1. $M_1(\overset{x_1,\, y_1}{-2\theta, 0})$, $M_2(\overset{x_2,\, y_2}{-\theta, A})$ $\rightarrow$ $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $\rightarrow$ $\dfrac{x(t)-0}{A-0} = \dfrac{t-(-2\theta)}{-\theta-(-2\theta)}$

$$\frac{x(t)}{A} = \frac{t+2\theta}{2\theta-\theta}$$

$$x(t)\,\theta = At + 2A\theta$$

Нешто се рачун не поклопи! $y_2 = -A$

Пробаћу другом формулом!

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

---

1. $M_1(x_1 = -2\theta,\ y_1 = 0)$, $M_2(x_2 = -\theta,\ y_2 = -A)$ $\rightarrow$ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ једначина праве која пролази кроз 2 тачке.

$$x(t) = \frac{-A}{\theta}(t + 2\theta)$$

$x(t) = y$, $x = t$ $\rightarrow$

$$x(t) = \frac{-A}{\theta}t - 2A$$

Даље идеш, по двије тачке почевши од задње тачке из претходне итерације!

6.

2.) $M_1(x_1 = -\theta,\ y_1 = -A)$, $M_2(x_2 = 0,\ y_2 = 2A)$ $\longrightarrow$ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$x(t) + A = \frac{2A + A}{0 - (-\theta)}\left(t - (-\theta)\right)$$

$$x(t) + A = \frac{3A}{\theta}(t + \theta)$$

Осталим тачкама аналогно је!

3) $M_1(x_1 = 0,\ y_1 = 2A)$, $M_2(x_2 = \theta,\ y_2 = -A)$ $\longrightarrow$ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$x(t) - 2A = \frac{-3A}{\theta}(t - 0)$$

$$x(t) = \frac{-3At}{\theta} + 2A$$

4.) $M_1(x_1 = \theta,\ y_1 = -A)$, $M_2(x_2 = 2\theta,\ y_2 = 0)$ $\longrightarrow$ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$x(t) + A = \frac{0 - (-A)}{2\theta - (+\theta)}(t - \theta)$$

$$x(t) + A = \frac{A}{\theta}(t - \theta)$$

$$x(t) = \frac{A}{\theta}t - 2A$$

Решение:

① $$x(t) = \frac{-A}{\theta}t - 2A$$

$$x'(t) = \frac{-A}{\theta}$$

што је нагиб од -2θ до θ на хоризонтали

② $$x(t) + A = \frac{3A}{\theta}t + 3A$$

$$x'(t) = \frac{3A}{\theta}$$

од $-\theta$ до 0 на хоризонтали.

Нагибот

③ $$x(t) = \frac{-3At}{\theta} + 2A$$

$$x'(t) = \frac{-3A}{\theta}$$

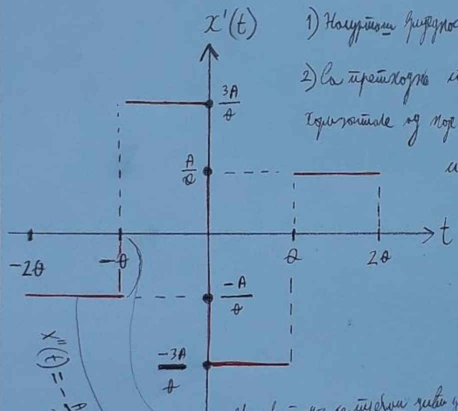
④ $$x(t) = \frac{A}{\theta}t - 2A$$

$$x'(t) = \frac{A}{\theta}$$

Прво узми ги на вертикални нагибот све ове тачка $x'(t)$

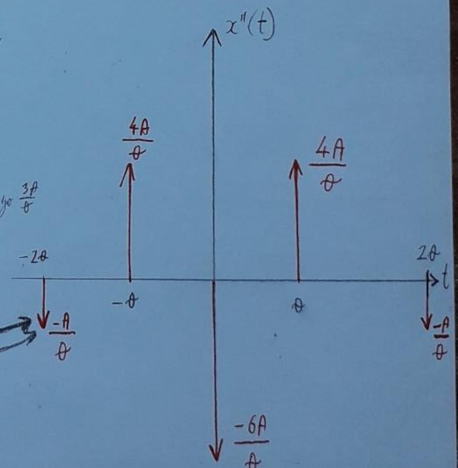
1) Нацртати вредности $x'(t)$ на вертикали

2) Са претходне странице прочитати дуж хоризонтале од које до које тачке ти се нагиб протеже.



Из ове тачке се треба ићи до $\frac{3A}{\theta}$ што је скок $\frac{3A}{\theta} + \left|\frac{-A}{\theta}\right|$

$x''(t) = -\frac{A}{\theta}\delta(t+2\theta)$ почни да ти нагиб иде до



$$x''(t) = \frac{-A}{\theta}\delta(t+2\theta) + \frac{4A}{\theta}\delta(t+\theta)$$

$$- \frac{6A}{\theta}\delta(t) + \frac{4A}{\theta}\delta(t-\theta) - \frac{A}{\theta}\delta(t-2\theta)$$

Избацит ли ово

$$x''(t) = \frac{A}{\theta}\left[-\delta(t+2\theta) - \delta(t-2\theta) + 4\delta(t+\theta) - 4\delta(t-\theta) - \cancel{6\delta(t)}\right] =$$

$$\frac{A}{\theta}\left[-e^{j\omega 2\theta} - e^{-j\omega 2\theta} + 4e^{j\omega\theta} - 4e^{-j\omega\theta} - 6\right] \Rightarrow$$

$$\frac{A}{\theta}\left[-2\cos(2\omega\theta) + 8\cos(\omega\theta) - 6\right] =$$

$$\frac{2A}{\theta}\left[-\cos(2\omega\theta) + 4\cos(\omega\theta) - 3\right] = X''(j\omega)$$

$X''(0) = 0$ ✓

Податак који добијам из саме формулације теореме о диференцирању!

$$X'(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X''(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X'(j\omega) + \pi X'(0)\,\delta(\omega)$$

Шта ће ти ово?

$$X'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\,dt = 0 \rightarrow \text{непарна фја.}$$

Ајде бре

$$X'(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X''(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X'(j\omega) \text{ па}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} X^2(j\omega) =$$

Искористи ово!

$$\frac{-1}{\omega^2} \frac{2A}{\theta} \left[-\cos(2\omega\theta) + 4\cos(\omega\theta) - 3 \right]$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$-\cos(2\omega\theta) + 4\cos(\omega\theta) - 3 = 1 - 2\cos^2(\omega\theta) + 4\cos(\omega\theta) - 3 =$$

$$-2\cos^2(\omega\theta) + 4\cos(\omega\theta) - 2 = -2\left[\cos^2(\omega\theta) - 2\cos(\omega\theta) + 1\right] =$$

$$X(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2} \frac{2A}{\theta} \left(-8\sin^4\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) \right) = \frac{16A}{\omega^2\theta} \sin^4\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) \overline{\frac{\theta}{4} \frac{4}{\theta}}^{\,1}$$

$$= 4A\theta \left(\frac{\sin^2\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{\frac{\omega\theta}{2}} \right)^2 \checkmark$$