



جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الثاني

الفرع الصناعي - فرع الحاسوب وتقنية المعلومات

المؤلفون

ثائر عبد العباس مطشر	محمد عبد الغفور الجواهري	د. اياد غازي ناصر
سعد خضير عباس	صفية كاظم حسن	موفق صالح عمر
نجم عبد الله حسين الغريري		كاوة حسين الياس

1442 هـ - 2020 م

الطبعة الرابعة



المقدمة

تعد المناهج أحد أهم حلقات العملية التعليمية التربوية حيث أن للمناهج دور كبير في إيصال المعلومة إلى المتلقى (الطالب) وأن لتطوير المناهج العلمية دور أساسى مهم في تطوير مجمل العملية التعليمية كما ان التطور هو سنة الحياة الإنسانية المتتجدة دوماً والعلم جزء من الحياة المتتجدة لذلك لا بد أن تعكس المناهج التطورات الحديثة في مختلف ميادين الحياة حيث أن النمو المعرفي سريع جداً مما يحتم تحديث المناهج بصورة مستمرة وان عملية التحديث والتطوير هي عملية متكاملة.

ان التوجه من قبل وزارة التربية نحو تحسين جودة التعليم فرضته عوامل وحاجات تربوية وعلمية متعددة، وقد تمثل هذا التوجه بالاهتمام بأهمية تحسين نوعية التعليم في المنطقة انسجاماً مع مقررات مؤتمر التعليم للجميع الاقليمي العربي (القاهرة، 2000) بأن تكون جودة التعليم في سلم الاولويات.

لقد تناولت أحدث الدراسات والبحوث الجديدة في مجال الذكاء ونمو الدماغ ثورة كبيرة في الطريقة التي نتعلم بها، مما كان له الأثر في تغيير الممارسات داخل الصف المدرسي وطرائق التعليم والتعلم وطرائق التقويم.

إن الحاجة لأحداث تحول نوعي في عملية التعلم هي تحد يواجه المجتمعات على كل مستوى من مستويات التنمية، فالدول الأقل نمواً والنامية والانتقالية والمتطرفة عليها جميعاً أن تجد وسائل لجعل التعلم داعماً للتغيير.

والتعلم في كل مكان بحاجة إلى أن يتحول إلى تجربة أكثر ملائمة وحراماً إذا ما أريد طلبتنا أن يدخلوا سوق العمل المتغير بالمهارات التي يحتاجونها كي يتمكنوا من المنافسة.

وإدراكاً لكل هذه التحديات وحالات قطاع التعليم المهني في العراق لتحسين جودة هذا التعليم في مختلف قنواته التعليمية تقوم شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بتوفيق مبادرة طموحة تهدف إلى إحداث تغيير جوهري في مناهجها الدراسية، تهدف هذه المبادرة في جانبها المتعلق بعلوم الرياضيات إلى إعداد الكتب الدراسية لمادة الرياضيات بما يتلاءم مع المعايير العالمية والنظريات التربوية الحديثة فضلاً عن رفع مستوى تحصيل طلاب التعليم المهني في مادة الرياضيات ليتسنى لهم منافسة أقرانهم من طلبة التعليم العام عن طريق إحداث نقلة نوعية في المناهج من حيث الإعداد العلمي وأسلوب العرض والربط مع التطبيقات الحياتية .

إن هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو الكتاب الصناعي لطلبة الفرع الصناعي وفرع الحاسوب وتقنيات المعلومات في التعليم المهني وهو في سبعة فصول يتناول الفصل الأول فيه موضوع الأسس واللوغاريتمات فيما يتناول الفصل الثاني المتتابعات، أما الفصل الثالث فقد تناول طرائق العد ومبرهنـة ذي الحدين تلاه الفصل الرابع الذي تضمن الدوال الدائرية أما الفصل الخامس فقد بحث في الدائرة كأحد

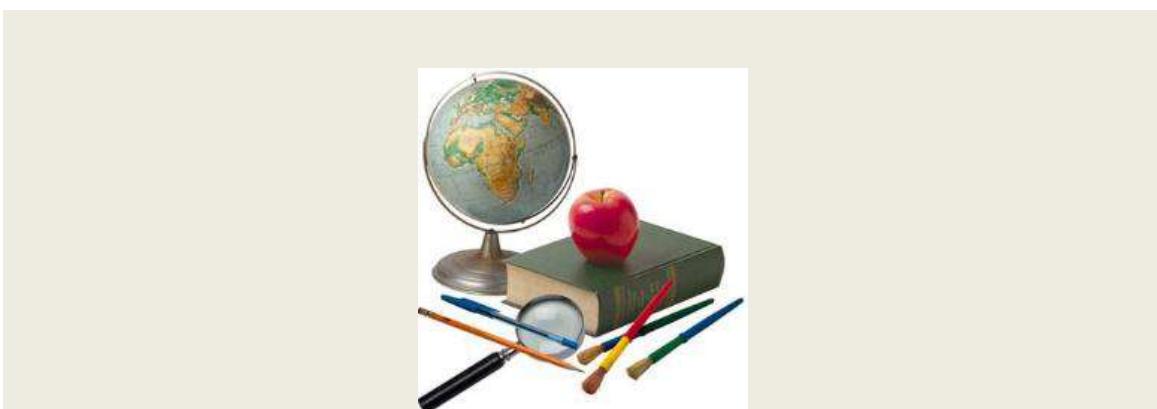
القطعون المخروطية وفي الفصل السادس تناولنا حساب التفاضل كما تناول الفصل السابع الهندسة الفراغية.

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للأهداف المقررة، وحاولنا ان نتبع عند تأليفه الطرق الحديثة فكان مجهدنا منصباً على الشرح المفصل لكل مفرداته بما يقربها من الاذهان وتوكينا الاكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية. وهنا لا بد من الاشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل ثلاثة حصص لكل أسبوع وما مجموعه (30 أسبوعاً).

الفصل	الوقت المخصص له
الفصل الأول	أربعة أسابيع
الفصل الثاني	أربعة أسابيع
الفصل الثالث	أربعة أسابيع
الفصل الرابع	خمسة أسابيع
الفصل الخامس	أربعة أسابيع
الفصل السادس	ستة أسابيع
الفصل السابع	ثلاثة أسابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة التي يقول صاحبها ((إني رأيت أنه لا يكتب إنسان كتاباً في يومه إلا قال في خده: لو غير هذا لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يستحسن، ولو قدم هذا لكان أفضل، ولو ترك هذا لكان أجمل، وهذا من أعظم العبر للإنسان، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)). آملين من اخواننا المدرسين أن يوافقونا بمحاظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

المؤلفون



الفهرس

الصفحة

الموضوع

الفصل الاول – الأسس واللوغاريتمات 32 -6

الفصل الثاني – المتتابعات 48-33

الفصل الثالث- طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين 72-49

الفصل الرابع – الدوال الدائرية 102 -73

الفصل الخامس- القطوع المخروطية (الدائرة) 128 -103

الفصل السادس- حساب التفاضل 156 -129

الفصل السابع- الهندسة الفراغية(المجسمة) 182 -157

الفصل الأول

$$\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \times 4 \times 4 = 64 \\ \updownarrow \\ \log_4(64) = 3 \end{array}$$

الأسس واللوغاريتمات

الفصل الأول

الأسس واللوغاریتمات

(Exponential and Logarithm)

البنود
(SECTIONS)

مفهوم الأسس	1-1
قوانين الأسس عندما تكون اعداد صحيحة	1-1-1
تعريف الأس الكسري - قوانين الأس عندما تكون اعداداً نسبية	2-1-1
الدالة الأسية - تمثيلها بيانياً - خواصها	3-1-1
المعادلات الأسية	4-1-1
مفهوم اللوغاریتم	2-1
الدالة اللوغاریتمية	1-2-1
خواص اللوغاریتمات	2-2-1
اللوغاریتمات العشرية	3-2-1
اللوغاریتمات الطبيعية	4-2-1

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>Exponent</i>	x^n	المتغير x مرفوع للقوة n
<i>Exponential function</i>	$f(x) = x^n$	الدالة الأسية
<i>Logarithmic function</i>	$y = \log_n x$	الدالة اللوغاریتمية
<i>Decimal Logarithm</i>	$y = \log x$	اللوغاریتم العشري
<i>Natural Logarithm</i>	$y = \ln x$	اللوغاریتم الطبيعي
<i>The Constitution</i>	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون او الدستور

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

▷ مفهوم الأسس

▷ حل مسائل الأسس عندما تكون اعداد صحيحة او اعداد نسبية

▷ معنى الدالة الأسية وكيفية تمثيلها بيانياً

▷ حل المعادلات الأسية

▷ مفهوم اللوغاریتم وعلاقته بالأس

▷ الدالة اللوغاریتمية وقوانينها

▷ اللوغاریتمات العشرية والطبيعية

الفصل الاٰول

الأسس واللوغاريتمات (Exponential and Logarithm)

1-1 مفهوم الأُس

علمنا من دراستنا السابقة انه يمكننا كتابة المقدار $3 \times 3 \times 3 \times 3$ بالصيغة 3^4 فالعدد 4 يدل على عدد مرات ضرب العدد 3 في نفسه وتقرأ (أس 4) أو (القوة الرابعة للعدد 3) ويمكننا تعميم ذلك كالتالي :-

$$a^n = a \times a \times a \times a \times \dots \dots \dots \text{إلى } n \text{ من المرات}$$

مثال 1

- 1) $2^2 = 2 \times 2 = 4$
 - 2) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
 - 3) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
 - 4) $(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 64$

يمكنا أن نستنتج من المثال أعلاه ما يأتي :-

١١. عند رفع اي عدد حقيقي موجب الى اية قوة (فردية كانت أم زوجية) يكون الناتج دائماً عدداً حقيقياً موجباً

2. عند رفع أي عدد حقيقي سالب إلى قوة زوجية يكون الناتج عدداً حقيقياً موجباً، أما إذا رفع إلى قوة فردية، فإن الناتج يكون عدداً حقيقياً سالباً.

1-1-1 قوانيں الأسس عندما تكون اعداداً صحيحة

١. قانون الأسس في الضرب

- اذا كان كل من $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ فأن :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

مثال 2

- $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$
 - $5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^1 = 5^{3+2+1} = 5^6$
 - $a^2 \cdot b^4 \cdot a^3 = a^{2+3} \cdot b^4 = a^5 \cdot b^4$

2. قانون الأسس في القسمة

- إذا كان كل من $a \in \mathbb{R}$ و $m, n \in \mathbb{Z}$ فإن :-

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \forall m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \forall m < n \\ 1 & m \equiv n \end{cases}$$

مثال 3

$$1) \frac{a^{17}}{a^3} = a^{17-3} = a^{14}$$

$$2) \frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3 = 8$$

$$3) \frac{3^5}{3^7} = \frac{1}{3^{7-5}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$4) \frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 = 1$$

مثال 4

أكتب المقدار الآتي ببساط صورة :-

$$\frac{x^3 \cdot y^2 \cdot x^4}{x^2 \cdot y \cdot y^5}$$

الحل

$$\frac{x^3 \cdot y^2 \cdot x^4}{x^2 \cdot y \cdot y^5} = \frac{x^7 \cdot y^2}{x^2 \cdot y^6} = \frac{x^5}{y^4}$$

3. قانون الأسس في الرفع :-

إذا كان كل من $m, n \in \mathbb{Z}$ وكان $a \in \mathbb{R}$ فأن :-

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

ويمكننا الاستنتاج مما سبق أن :-

$$1) (a^m)^n = (a^n)^m, \quad \forall a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) (a^m \cdot b^n)^c = a^{mc} \cdot b^{nc}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; m, n, c \in \mathbb{Z}$$

$$3) \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^c = \frac{a^{mc}}{b^{nc}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; m, n, c \in \mathbb{Z}$$

مثال 5 اثبت أن :-

$$(7^2)^3 = (7^3)^2$$

الحل

$$1) (7^2)^3 = 7^{(2) \cdot (3)} = 7^6$$

$$2) (7^3)^2 = 7^{(3) \cdot (2)} = 7^6$$

$$(7^2)^3 = (7^3)^2 \quad \text{وهكذا يكون}$$

مثال 6

أختصر المقدار الآتي ليكون الناتج بأسس موجبة :-

$$\frac{(x^2)^3 y^4 z^6}{x^3 (y^3)^2 z^5}$$

الحل

$$\frac{(x^2)^3 y^4 z^6}{x^3 (y^3)^2 z^5} = \frac{x^6 \cdot y^4 \cdot z^6}{x^3 \cdot y^6 \cdot z^5} = \frac{x^{6-3} \cdot z^{6-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 \cdot z}{y^2} = \frac{x^3 z}{y^2}$$

مثال 7

بسط المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة :-

$$1) (a^3 \cdot b^2)^4 \quad , \quad 2) \left(\frac{a^4}{b^5}\right)^5$$

الحل

$$1) (a^3 \cdot b^2)^4 = a^{12} \cdot b^8$$

$$2) \left(\frac{a^4}{b^5}\right)^5 = \frac{a^{20}}{b^{25}}$$

مثال 8

أختصر المقدار الآتي إلى أبسط صورة :-

$$\frac{(x^2 \cdot y^4 \cdot z)^a \cdot (x \cdot y^2 \cdot z^3)^{2a}}{(y^2 \cdot z^5)^{3a}}$$

الحل

$$\frac{(x^2 \cdot y^4 \cdot z)^a \cdot (x \cdot y^2 \cdot z^3)^{2a}}{(y^2 \cdot z^5)^{3a}} = \frac{x^{2a} \cdot y^{4a} \cdot z^a \cdot x^{2a} \cdot y^{4a} \cdot z^{6a}}{y^{6a} \cdot z^{15a}}$$

$$= \frac{x^{4a} \cdot y^{8a} \cdot z^{7a}}{y^{6a} \cdot z^{15a}}$$

$$= \frac{x^{4a} \cdot y^{8a-6a}}{z^{15a-7a}}$$

$$= \frac{x^{4a} \cdot y^{2a}}{z^{8a}}$$

$$= \frac{x^{4a} y^{2a}}{z^{8a}}$$

مثال 9

أثبت أن :-

$$\frac{(81)^{n+1} \cdot (625)^n}{(9)^{2n} \cdot (27) \cdot (25)^{2n-1}} = 75$$

الحل

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{(81)^{n+1} \cdot (625)^n}{(9)^{2n} \cdot (27) \cdot (25)^{2n-1}} = \frac{(3^4)^{n+1} \cdot (5^4)^n}{(3^2)^{2n} \cdot (3^3) \cdot (5^2)^{2n-1}} \\ &= \frac{3^{4n+4} \cdot 5^{4n}}{3^{4n} \cdot 3^3 \cdot 5^{4n-2}} = (3)^{4n+4-4n-3} \cdot (5)^{4n-4n+2} \\ &= (3)^1 \cdot (5)^2 = (3) \cdot (25) = 75 = R.H.S \end{aligned}$$

4. الأسس الصفرى :-

إذا كان $a^0 = 1$ فإن $a \neq 0$

لتوسيع سبب إعطاء هذا المعنى للأسس الصفرى لاحظ المثال الآتى :-

مثال 10

على فرض بقاء قانون الأسس في الضرب صحيحاً في حالة كون الأسس صفراً، ما قيمة المقدار $(3)^0 \cdot (3)^5$ ؟

الحل

$$(3)^0 \cdot (3)^5 = 3^{0+5} = 3^5$$

$$(3)^0 = 1$$

وهذا يعني ان

وبالطريقة نفسها يمكننا التوصل الى ان :-

$$5^0 = 1 , 4^0 = 1$$

5. الأسس الصحيح السالب :-

إذا كان $n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ فإن :-

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال 11

على فرض بقاء قانون الأسس في الضرب صحيحاً في حالة كون الأسس عدداً صحيحاً موجباً ما قيمة المقدار $(2)^{-3} \cdot (2)^3$ ؟

الحل

$$(2)^{-3} \cdot (2)^3 = 2^{-3+3} = 2^0 = 1$$

ومن هذه النتيجة يمكننا التوصل الى ان المقدار $(2)^{-3}$ يساوي $\frac{1}{(2)^3}$

مثال 12

بسط المقدار $\frac{1}{11^{-2}}$ ليكون الناتج بأسس موجبة.

الحل

$$\frac{1}{11^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{11^2}} = 11^2$$

وبصورة عامة إذا كان $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, فأن :-

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

تمارين (1-1)

1. اختصر المقادير الآتية بحيث تكون الأسس في النواتج أعداداً صحيحةً موجبة :-

$$a) \frac{(5) \cdot (5)^4 \cdot (5)^6}{(2)^2 \cdot (2)^3}$$

$$b) \frac{(5) \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2)^8 \cdot (3)^7}$$

$$c) \frac{(-2)^5 \cdot (-5)^3}{(5)^2 \cdot (-2)^4}$$

2. ضع كلاً من المقادير الآتية بأبسط صورة :-

$$a) \frac{m^2 \cdot n^3}{n^4} \cdot \frac{m^4 \cdot n^6}{n^5}, m, n \neq 0$$

$$b) \frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (b \cdot a)^3}{(b^2 \cdot a)^2}, a, b \neq 0$$

$$c) \frac{(x+y)^2 \cdot (x+y)^3}{(x+y)}, x, y \neq 0$$

3. أثبت أن :-

$$a) \frac{(3)^{2n}}{(3)^{2n+1}} = \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \frac{(7)^2 \cdot (7)^{3x}}{7^{2(x+1)}} = 7^x \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

2-1-1 تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون اعداداً نسبية

الأس الكسري :- إذا كان $n \in \mathbb{N}^+ : n > 1$ ، $m \in \mathbb{Z}$

$$a \geq 0, a \in \mathbb{R} \text{ حيث } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

وبصورة أخرى ومع مراعاة الشروط الواردة أعلاه فأن

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

مبرهنة 1 إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عددين نسبيين فأن:-

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

مبرهنة 2 إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عددين نسبيين فأن:-

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

نتيجة 1 إذا كانت \mathbb{Q} مجموعة الأعداد النسبية وكانت $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Q}$ فأن:-

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ملاحظة :- يتضح لنا من خلال المبرهنتين الأخيرتين أن قوانين الأسس التي استعملناها عندما كانت الأسس اعداداً طبيعية أو صحيحة، تبقى صائبة عندما تكون الأسس اعداداً نسبية. وسوف نقبل المبرهنة الآتية دون الخوض في تفاصيل برهانها:

مبرهنة 3 ليكن كل من a, b عدداً حقيقياً موجباً $n \in \mathbb{N}^+ : n > 1$ فإن:-

$$1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

ملاحظة :- إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً فإن المبرهنة تكون صحيحة عندما يكون a او b سالباً.

(تأمل في العمليات التي يتم اجرائها على الاسس فيما يأتي)

مثال 13

$$1) (\sqrt[4]{7})^5 = (7^{\frac{1}{4}})^5 = 7^{\frac{5}{4}}$$

$$2) (\sqrt{a^3 \cdot b^4})^3 = (a^{\frac{3}{2}} \cdot b^2)^3 = (a^{\frac{3}{2}} \cdot b^2)^3 = a^{\frac{3}{2} \cdot 3} \cdot b^{2 \cdot 3} = a^{\frac{9}{2}} \cdot b^6$$

تكميلة

$$3. \sqrt{50} = \sqrt{(25) \cdot (2)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$5. \sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-1}{10} = -0.1$$

$$6. \sqrt[3]{(125)^{-1}} \cdot \sqrt[4]{0.0016} = (125)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{16}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = [(5^3)]^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2^4}{10^4}\right)^{\frac{1}{4}} \\ = (5)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$7. (\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{b})^{-4} \cdot \left(\frac{a^4 \cdot b^{\frac{8}{3}}}{c^{-4}}\right)^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}})^{-4} \cdot (a^4 \cdot b^{\frac{8}{3}} \cdot c^4)^{\frac{3}{4}} \\ = a^{-3} \cdot b^{-2} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^3 = c^3$$

$$8. \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$9. \sqrt{64b^4 \cdot c^{-6}} = [(8)^2 \cdot b^4 \cdot c^{-6}]^{\frac{1}{2}} \\ = (8^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (c^{-6})^{\frac{1}{2}} = 8b^2c^{-3} = \frac{8b^2}{c^3}$$

مثال 14

بسط المقدار $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ بحيث يكون المقام عدداً نسبياً.

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

يسمى المقدار $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ في المثال 14 السابق والذي ضربنا به كل من بسط الكسر ومقامه (العامل المنسوب) او (المراافق) والذي يعرف بأنه الحدانية الجبرية التي تحول مقام الكسر الى عدد نسبي.

مثال 15

بسط المقدار الاتي ليكون مقامه عدداً نسبياً.

$$\frac{7}{2\sqrt{3} + 1}$$

الحل

$$\begin{aligned}\frac{7}{2\sqrt{3} + 1} &= \frac{7}{2\sqrt{3} + 1} \times \frac{2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{14\sqrt{3} - 7}{(2\sqrt{3})^2 - (1)^2} = \frac{14\sqrt{3} - 7}{(4) \cdot (3) - 1} = \frac{14\sqrt{3} - 7}{11}\end{aligned}$$

مثال 16

أثبت أن :-

$$\left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(2) \cdot 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right)^{\frac{1}{n}} = 8$$

الحل

$$L.H.S = \left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(2) \cdot 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}}}{(2) \cdot 2^{\frac{-n}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{(2)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}}}{(2) \cdot 2^{\frac{-n}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= (2^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}})^{\frac{1}{n}}$$

$$= (2^{3n})^{\frac{1}{n}} = 2^3$$

$$= 8 = R.H.S$$

مثال 17

أثبت أن :-

$$\frac{9^{(\frac{1}{2}n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n} - 3^{n-1}} = 18$$

الحل

$$\begin{aligned}
 L.H.S &= \frac{9^{(\frac{1}{2}n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n} - 3^{n-1}} \\
 &= \frac{(3^2)^{(\frac{1}{2}n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n} - 3^{n-1}} \\
 &= \frac{(3)^{(n+2)} + 3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}} - 3^{n-1}} \\
 &= \frac{(3)^{(n+2)} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}} \\
 &= \frac{(3^n \cdot 3^2) + (3^n \cdot 3^1)}{3^n - (3^n \cdot 3^{-1})} \\
 &= \frac{3^n(3^2 + 3^1)}{3^n(1 - 3^{-1})} \\
 &= \frac{9 + 3}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{12}{\frac{3-1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} \\
 &= (12) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 18 = R.H.S
 \end{aligned}$$

تمارين (2-1)

1. جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :-

$$a) \frac{\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{2}}$$

$$c) \sqrt[3]{\sqrt{729}}$$

$$b) (\sqrt[7]{27})^{-\frac{7}{3}}$$

$$d) 2Z^0 + (2Z)^0 - 3$$

2. بسط كل من المقادير الآتية ليكون الناتج بأسس موجبة :-

$$a) \frac{5 \cdot (3)^{n-1} - 3^n}{3^{n+1} + (2) \cdot (3)^{n-1}}$$

$$c) \frac{x^3}{y^{-2}} \div \frac{x^{-2}}{y^3}$$

$$b) \frac{(25)^n \cdot (10)^{n+1}}{(125)^n \cdot (4)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$d) x^2 \cdot y^2 (x^{-2} + y^{-2})$$

3. أثبت صحة المتطابقات الآتية :-

$$a) \frac{2^{n-2} \cdot 4^{n+2}}{8^n} = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \frac{25^{n+2} - 5^{2n+3}}{(4) \cdot 5^{2n}} = 5^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$c) \frac{(5) \cdot (5)^{2n} - 4 \cdot (25)^{n-\frac{1}{2}}}{(2) \cdot (5)^{2n+1} + (125)^{\frac{2n}{3}}} = \frac{21}{55} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$d) \left(\frac{4^{n+1} \cdot 2^{-n}}{4^{n(n-1)}} \div \frac{8^{n+1}}{4^{(n+1)(n-1)}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. بسط المقادير الآتية ليكون مقام كل منها عدداً نسبياً :-

$$a) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$$

$$b) \frac{\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3} - 1}$$

$$c) \frac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$$

3-1-1 الدالة الأسية - تمثيلها بيانيًّا - خواصها

أطلعت عزيزي الطالب في البنود السابقة على قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحةً أو نسبةً. وفي هذا البند سوف نقبل القوانين السابقة للأسس عندما تكون أعداداً حقيقة دون الخوض في تفاصيل برهان ذلك.

تعريف

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي الواحد فإن الدالة

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+: f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

تسمى ((الدالة الأسية)) وهي دالة من نوع التقابل ((أي أنها دالة شاملة ومتباينة)) ويمكن إعادة صياغة التعريف أعلاه كما يأتي:

تعرف الدالة الأسية $f_a(x)$ بأنها تطبيق من \mathbb{R}^+ إلى \mathbb{R} وقاعدة اقتران هذا التطبيق هي:

$$f_a(x) = a^x : a \in \mathbb{R}^+/\{1\}, x \in \mathbb{R}$$

1) $f_7(x) = 7^x$

2) $f_5(x) = 5^x$

3) $f_{\sqrt{7}}(x) = (\sqrt{7})^x$

4) $f_{\frac{3}{4}}(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

مثال 18

أرسم منحني الدالة الأسية $f_2(x)$ ومنه أرسم منحني الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$.

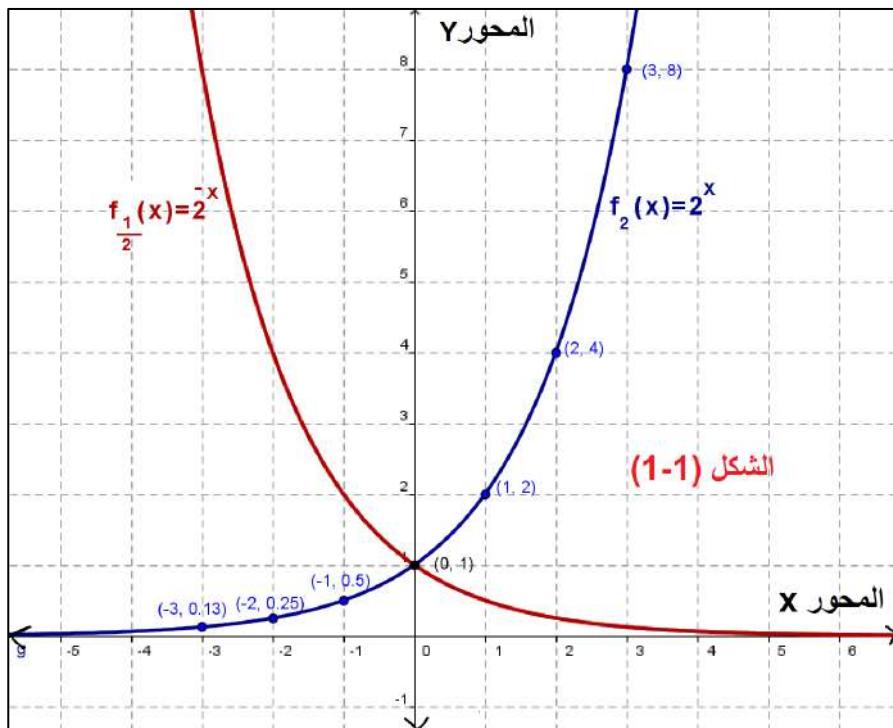
الحل

حيث أن $f_2(x) = 2^x$ نقوم بتكوين جدول قيم تعويضية للدالة بهدف استخراج أزواج مرتبة تمثل نقاطاً يمكن أسقاطها على المستوى الاحادي، ثم توصيلها للحصول على جزء من التمثيل البياني للدالة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

تكميلة

أما بالنسبة للدالة $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ فإنه من الملاحظ أن الدالتين $f_2(x)$ و $f_{\frac{1}{2}}(x)$ تناظر أحدهما الأخرى حول المحور y وبذلك نستطيع رسمهما بالاعتماد على هذه الحقيقة ، وكما في الشكل (1-1) الآتي :-



وبالمثل يمكن أن نتناول أية دالة حقيقة $f_a(x) = a^x$ (حيث $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^+$) وكما أسلفنا فإن هذه الدالة تسمى ((الدالة الأسية)) وهي تتمتع بخواص الأسس التي درسناها في البنود السابقة.

أي أنه إذا كان $a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$ فإن :-

$$1) f_m(x) \cdot f_m(y) = f_m(x + y)$$

$$2) \frac{f_m(x)}{f_m(y)} = f_m(x - y)$$

$$3) [f_m(x)]^n = f_m(nx)$$

خواص الدالة الأسية $f_a(x) = a^x$

إذا قمنا برسم منحنيات الدوال

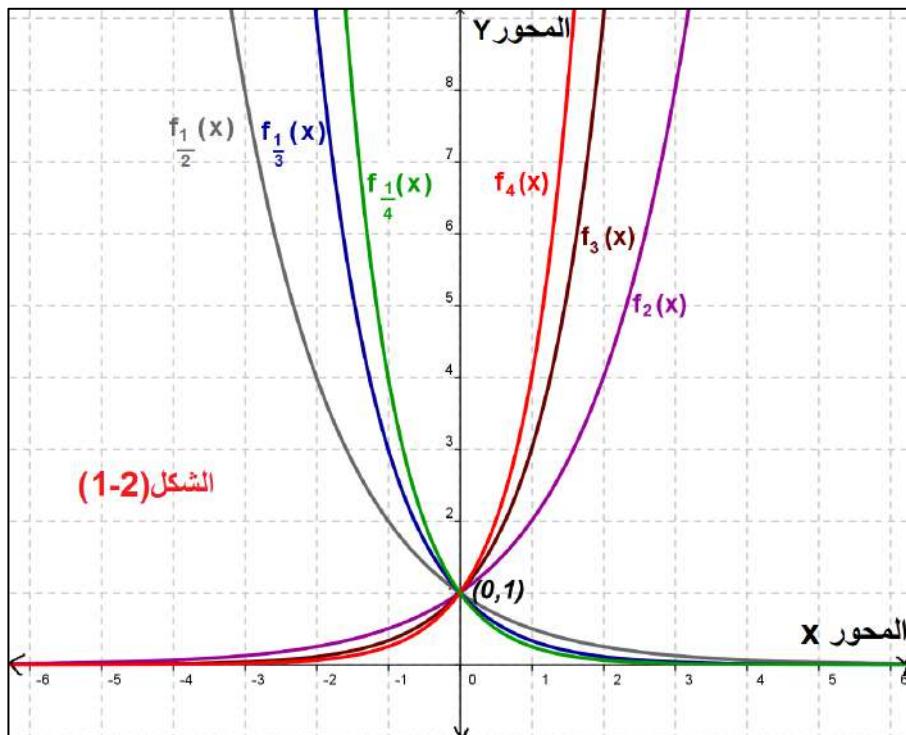
$f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), \dots$ وكذلك الدوال:

$f_{\frac{1}{2}}(x), f_{\frac{1}{3}}(x), f_{\frac{1}{4}}(x), f_{\frac{1}{5}}(x), \dots$

فأننا سوف نجد مجموعتين من المنحنيات :-

1. دوال تزايدية عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيمة الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .
2. دوال تناظرية عندما $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيمة الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .

وفي الشكل (1-2) أدناه رسمنا ستة من هذه المنحنيات (لاحظ أن الظاهر في الرسم هو جزء من المنحني وليس المنحني كله) ثلاثة منها يكون فيها $a > 1$ والثلاثة الأخرى فيها $0 < a < 1$ وقد أخترنا قيم a في المجموعة الثانية لتكون مقلوبات قيم a في المجموعة الأولى، كما نلاحظ أن جميع المنحنيات تمر بالنقطة $(0, 1)$.



نرى مما سبق إن :-

1. الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متباينة أي :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x = y \Rightarrow a^x = a^y$$

2. الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة شاملة :

مجال f هو \mathbb{R} ومجالها المقابل هو \mathbb{R}^+ كما إن المدى هو $\{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$ أي إن المدى يساوي المجال المقابل.

3. الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متقابلة لأنها دالة شاملة ومتباينة.

4-1-1 المعايير الأساسية

المعادلة الأسيّة هي المعادلة التي تحتوي على مجهول في الأس، وطريقة حلها تعتمد على الحقيقةين الآتتين:

- .1 .إذا كان $a \neq 1$ فأن $x = y$ حيث $a^x = a^y$

.2 .إذا كان $a \neq b \neq 1$ فأن $x = y = 0$ حيث $a^x = b^y$

مثال 19

حل المعادلات الأسيّة الآتية :-

$$1) \quad 125^x = 5^{x-2}$$

$$2) \quad 7^{x+2} = 3^{x+2}.$$

$$1) \quad [(5)^3]^x = 5^{x-2} \quad \Rightarrow \quad 5^{3x} = 5^{x-2} \quad \Rightarrow \quad 3x = x - 2$$

$$\Rightarrow 3x - x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\therefore S.s = \{-1\}$$

$$2) 7^{x+2} = 3^{x+2}$$

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore S.S = \{-2\}$$

مثال 20

حل المعادلات الأسبة الآتية :-

$$1) \quad 16^x = \frac{1}{4}$$

$$2) 5^{x^2-x} = 25$$

$$3) 4^{2x-3} = 1$$

$$4) 2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$$

الحل

$$1) 16^x = \frac{1}{4} \Rightarrow [(4)^2]^x = (4)^{-1}$$

$$\Rightarrow (4)^{2x} = (4)^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore S, s = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$$

تكميلة

$$2) 5^{x^2-x} = 25 \Rightarrow 5^{x^2-x} = 5^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

أما $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$\therefore S.s = \{-1, 2\}$$

$$3) 4^{2x-3} = 1 \Rightarrow 4^{2x-3} = 4^0$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S.s = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$4) 2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12} \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\therefore S.s = \{-2, +2\}$$

ćمارين (1-3)

1. جد قيمة x في كل من المعادلات الأسية الآتية :-

$$a) (0.01)^{-x} = 100$$

$$e) 7^{x^2-2x+1} = 49^{x-1}$$

$$b) (0.1)^{x+1} = 10$$

$$f) 2^{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{16}$$

$$c) x^{5x} = \sqrt{x}, \quad x \neq 0$$

$$g) x^{\frac{3}{4}} = 27$$

$$d) 1 = y^{x^2-3x-4}$$

$$h) 10^x = \frac{10}{\sqrt{1000}}$$

2. مثل الدالة الأسية $f_3(x) = 3^x$ بيانياً ومن المخطط البياني جد قيمة $3^{1.5}$ بصورة تقريرية، وإذا علمت أن $3^x = 5$ جد قيمة x بصورة تقريرية.

2-1 مفهوم اللوغاريتم

لقد عرفنا في موضوع الأسس أن $16 = 2^4$ وهذا، وبذلك يكون العدد الذي يوضع أساً للأساس 2 ليكون الناتج 4 هو العدد 2 ولن يكون الناتج 8 هو العدد 3 ولن يكون الناتج 16 هو العدد 4 كما أوضحنا أن العدد 2 في الأمثلة أعلاه يسمى ((الأس)) بينما كل من الأعداد 4 ، 3 ، 2 تسمى ((الأس)) أما الأعداد 16 ، 8 ، 4 فإنها تسمى ((الناتج)).

إذا أردنا أن نسأل ((ما هو العدد الذي نعطيه أساً للعدد 5 ليكون الناتج 125 فان التسلسل المنطقي الذي سوف نتبعه في الحل هو الآتي: -

$$5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$$

أن العدد (3) والذي يمثل أساً للأساس 5 لكي ينتج العدد 125 يطلق عليه اسم ((لوغاریتم)) العدد 125 للأساس 5 ويرمز له بالرمز \log ، كما أثنا نعبر رمزاً عن العبارة ((لوغاریتم العدد 125 للأساس 5 يساوي 3)) كما يأتي:- ، نلاحظ من ذلك ان الصيغة اللوغاريتمية هي صيغة بديلة للصيغة الأسية والعكس صحيح.

1-2-1 الدالة اللوغاريتمية

لقد تعلمنا في البند الخاص بالدالة الأسية إن $y = a^x$ حيث $a \in \mathbb{R}^+$ ولو تمعنا في الأمثلة التي أوردناها في شرحنا لمفهوم اللوغاريتم لتوصلنا الى ان الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسيّة للدالة الأسية ولذلك يمكننا صياغة التعريف الآتي للدالة الأسية :-

الدالة العكسيّة للدالة الأسية التي صيغتها العامة $y = a^x$ تسمى الدالة اللوغاريتمية وصيغتها العامة هي $y = \log_a x$ وتقرأ (x يساوي لوغاریتم y للأساس a) أي ان :-

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

الصيغة اللوغاريتمية الصيغة الأسية

وبذلك يمكننا الانتقال من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس وكما موضح بالأمثلة الآتية :-

مثال 21

أكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة لكل من الصيغ الأسية الآتية :-

1) $16 = 4^2$ 2) $13 = 13^1$ 3) $1000000 = 10^6$

4) $0.00001 = 10^{-5}$

1) $16 = 4^2 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

الحل

2) $13 = 13^1 \Rightarrow \log_{13} 13 = 1$

3) $1000000 = 10^6 \Rightarrow \log_{10} 1000000 = 6$

4) $0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow \log_{10} 0.00001 = -5$

مثال 22

أكتب الصيغة الأسية المقابلة لكل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية :-

$$1) 3 = \log_3 27 \quad 2) -3 = \log_5 \frac{1}{125} \quad 3) 1 = \log_{10} 10$$

الحل

$$1) 3 = \log_3 27 \Rightarrow 27 = 3^3$$

$$2) -3 = \log_5 \frac{1}{125} \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^{-3}$$

$$3) 1 = \log_{10} 10 \Rightarrow 10 = 10^1$$

ملاحظات :-

1. لوغاريتم العدد للأساس نفسه يساوي 1 أي ان $\log_x x = 1$.
2. لوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس عدا الواحد يساوي صفر أي ان

$$\log_a 1 = 0, a \neq 1$$

3. أن مجال الدالة اللوغاريتمية هو \mathbb{R}^+ ويترتب على ذلك أن العدد (صفر) وأي عدد سالب ليس له لوغاريتم.

مثال 23

جد قيمة المجهول في كل مما يأتي :-

$$1) \log_4 x = 3, \quad 2) \log_x 64 = 6, \quad 3) \log_{125} 25 = x$$

الحل

نحو الصيغة اللوغاريتمية الى الصيغة الأسية ثم نجد قيمة x

$$1) x = 4^3 \Rightarrow x = 64$$

$$2) 64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6 \Rightarrow x = 2$$

$$3) 25 = 125^x \Rightarrow 5^2 = 5^{3x} \Rightarrow 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

مثال 24

جد ناتج ما يأتي :-

$$1) \log_2 \sqrt[3]{2}, \quad 2) \log_{\sqrt[3]{3}} 81, \quad 3) \log_{10} 0.001$$

نحو الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية ثم نجد قيمة x

$$1) \log_2 \sqrt[3]{2} = x \quad \text{نفرض} \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = 2^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

الحل

$$2) \log_{\sqrt[3]{3}} 81 = y \quad \text{نفرض} \Rightarrow 81 = (\sqrt[3]{3})^y$$

$$\Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3}y} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{y}{3}} \Rightarrow 4 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 12$$

$$3) \log_{10} 0.001 = z \quad \text{نفرض} \Rightarrow 0.001 = 10^z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1000} = 10^z \Rightarrow 10^{-3} = 10^z \Rightarrow z = -3$$

مثال 25

جد لوغاریتم العدد $\frac{1}{625}$ للأساس 5.

الحل

$$\log_5 \frac{1}{625} = x \Rightarrow \frac{1}{625} = 5^x \Rightarrow \frac{1}{5^4} = 5^x \Rightarrow 5^{-4} = 5^x \Rightarrow x = -4$$

مثال 26

ما العدد الذي لوغاریتمه للأساس (0.01) يساوي 2 ؟

الحل

نفرض إن العدد = y

$$\log_{0.01} y = 2$$

$$y = (0.01)^2 = 0.0001$$

مثال 27

جد لوغاریتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$.

الحل

نفرض ان قيمة لوغاریتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$ يساوي x

$$\log_{2\sqrt{2}} 16 = x$$

$$(2\sqrt{2})^x = 16 \Rightarrow (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^x = 2^4$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^4 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 4 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

ćمارين (4-1)

1. ضع كل مما يأتي بالصيغة اللوغاريتمية :-

a) $125 = 5^3$

b) $4 = (\sqrt{2})^4$

c) $0.000001 = 10^{-6}$

d) $a^0 = 1$

e) $2 = 8^{\frac{1}{3}}$

2. ضع كل مما يأتي بالصيغة الأسيّة :-

a) $\log_{\sqrt{5}} 3125 = 10$

b) $\log_a a = 1$

c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

e) $\log_{10} 0.001 = -3$

3. احسب قيمة اللوغاريتمات الآتية :-

a) $\log_{10} 0.01$

b) $\log_7 1$

c) $\log_{10} 0.000001$

d) $\log_3 3$

4. ما قيمة x في كل مما يأتي :-

a) $\log_x 0.001 = 1$

b) $\log_{10}(2x + 3) = 1$

c) $\log_x \frac{1}{100} = -2$

d) $\log_2 64 = 10 - 2x$

e) $\log_{0.001} x = 2$

f) $\log_2 32 + \log_{25} 625 - \log_3 81 = x$

2-2-1 خواص اللوغاريتمات

$$1) \log_a(x \cdot y \cdot z \dots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots$$

مثال 28

$$1) \log_2[(5) \cdot (7)] = \log_2 5 + \log_2 7$$

$$2) \log_{\sqrt{2}}[(3) \cdot (11)] = \log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} 11$$

$$3) \log_7 30 = \log_7[(2) \cdot (3) \cdot (5)] = \log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 5$$

مثال 29

$$\log_{10} \frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{1}{8} = 0 \quad \text{أثبت أن :-}$$

الحل

$$L.H.S = \log_{10} \frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{1}{8}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{8}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} \right) = \log_{10} 1 = 0 = R.H.S$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

مثال 30

$$a) \log_3 \frac{x}{5} = \log_3 x - \log_3 5 \quad \text{مثال توضيحي على خاصية 2}$$

$$b) \log_5 \frac{6}{11} = \log_5 6 - \log_5 11 = \log_5[(2) \cdot (3)] - \log_5 11 \\ = \log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 11 \quad \text{أثبت أن :-}$$

مثال 31

$$a) \log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16} = \log_{10} 3 \quad \text{أثبت أن :-}$$

$$b) \log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 = 0 \quad \text{الحل}$$

$$a) L.H.S = \log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16} = \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \div \frac{15}{16} \right) \\ = \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{15} \right) = \log_{10} 3 = R.H.S$$

$$b) L.H.S = \log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 \\ = \log_a \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{66} \cdot 12}{\frac{132}{121}}$$

$$= \log_a \left(\frac{12}{11} \cdot \frac{121}{132} \right) = \log_a 1 = 0 = R.H.S$$

مثال 32

إذا كان $\log_{10} 5 = 0.699$ فما قيمة :-

1) $\log_{10} \frac{1}{5}$, 2) $\log_{10} \frac{1}{2}$

الحل

1) $\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} 5 - \log_{10} 5 = 0 - \log_{10} 5 = -0.699$

2) $\log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10}(0.5) = \log_{10} \frac{5}{10} = \log_{10} 5 - \log_{10} 10 = 0.699 - 1 = 0.301$

3) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad b \neq 1$$

مثال 33

1) $\log_4 5^{-3} = -3 \log_4 5$

2) $\log_5 \sqrt{7} = \log_5 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 7$

3) $\log_7 5 = \frac{\log_b 5}{\log_b 7} \quad (b \neq 1)$

مثال 34

أختصر المقدار الآتي :-

الحل

$$\log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 3 \cdot \log_3 5 = \frac{\log_b 7}{\log_b 5} \cdot \frac{\log_b 11}{\log_b 7} \cdot \frac{\log_b 3}{\log_b 11} \cdot \frac{\log_b 5}{\log_b 3} = 1$$

ملاحظة :-

إذا تساوى لوغاريتم عددين للأساس نفسه فإن العددين متساويان، والعكس

صحيح. أي :-

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

مثال 35

حل المعادلة اللوغاريتمية الآتية :-

$$\log_5(2x+1) + \log_5(x-2) = \log_5 7$$

الحل

في هذا المثال لم تعط مجموعة التعويض ولذلك يقتضي الامر أيجادها أولاً وكما يأتي :-

$$2x+1 > 0 \Rightarrow \{x: x > -\frac{1}{2}\}$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow \{x: x > 2\}$$

تكلمة

ولذلك فإن مجموعة التعويض للمعادلة اللوغاريتمية ستكون :-

$$\{x: x > \frac{-1}{2}\} \cap \{x: x > 2\} = \{x: x > 2\}$$

والآن نعاود حل المعادلة :-

$$\log_5(2x+1) + \log_5(x-2) = \log_5 7$$

$$\log_5(2x+1) \cdot (x-2) = \log_5 7$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow (2x+3)(x-3) = 0$$

أما $2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \notin \{x: x > 2\}$ بيمثل

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$\therefore S.s = \{3\}$$

3-2-1 اللوغاريتمات العشرية (لوغاریتمات الأعداد للأساس 10)

اللوغاريتمات العشرية هي اللوغاريتمات التي يكون أساسها العدد 10 ولأنها تستعمل

كثيراً في الحسابات العلمية لذا أتفق علماء الرياضيات على عدم كتابة الأساس 10 عند استعمالها، فمثلاً $\log 7$ يقصد بها $\log_{10} 7$.

لاحظ الصيغتين الأسية واللوغاريتمية الآتية التي تبين لنا لوغاریتمات القوى الصحيحة للإسas 10

$$10000 = 10^4 \Rightarrow \log 10000 = 4$$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$$

$$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$$

$$10 = 10^1 \Rightarrow \log 10 = 1$$

$$1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$$

$$0.1 = 10^{-1} \Rightarrow \log 0.1 = -1$$

$$0.01 = 10^{-2} \Rightarrow \log 0.01 = -2$$

$$0.001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0.001 = -3$$

وهكذا ...

مما سبق نستنتج ما يأتي :-

- لوغاریتمات القوى الصحيحة للإسas 10 هي أعداد صحيحة ((موجبة)) إذا كانت القوى أكبر من الواحد و((سالبة)) إذا كانت القوى أصغر من الواحد.

2. الدالة $y = \log x$ (وهي دالة تقابل من \mathbb{R}^+ إلى \mathbb{R}) ، هي دالة متزايدة ونقصد بذلك أن قيمة الدالة $\log x$ تتزايد مع ازدياد قيمة دالة x ويترتب على ذلك أن لوغاريتم العدد يزداد بازدياد العدد ويصغر بصغره.

3. إذا كانت $\{x: x \leq 0\}$ فإن $\log x$ تكون غير معرفة. (أي ان العدد السالب والصفر ليس لهما لوغاريتم).

4. إذا كانت $x \in (0, 1)$ فإن $\log x \in \{y: y < 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون سالبة).

5. عندما $x = 1$ فإن $\log x = 0$

6. إذا كانت $\{x: x > 1\}$ فإن $\log x \in \{y: y > 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون موجبة).

4-2-1 اللوغاريتمات الطبيعية

تعرفنا في البند السابق على اللوغاريتمات العشرية عندما كان الأساس 10 . والآن سنتعرف على اللوغاريتمات التي أساسها العدد الذي يرمز له بالرمز (e) الذي قيمته (2.71828) ويسمى العدد التبيري.

ملاحظة :-

خواص اللوغاريتمات الطبيعية هي خواص اللوغاريتمات العشرية نفسها.
تسمى اللوغاريتمات بدالة الأساس (e) باللوغاریتمات الطبيعية وهي تظهر في عدة مجالات وتطبيقات علمية متعددة قد تتعرف عليها في دراستك المستقبلية.

يعرف اللوغاريتم الطبيعي للعدد y بالصيغة $\ln y$ لتمييزه عن اللوغاريتم الاعتيادي (العشرى) أما الرمز المختصر (\ln) فهو مأخوذ من كلمة (*natural*) والتي تعنى (طبيعي).

ومن تعريف الدالة اللوغاريتمية لو أستبدلنا الأساس a بالأساس e فأننا سوف نحصل على:-

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln e^x = x$$

نتيجة 1

$$L.H.S = \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x = R.H.S$$

البرهان

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}, a \neq 1, a > 0$$

نتيجة 2

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y \quad \text{لبن}$$

البرهان

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:-

$$\ln x = \ln a^y \Rightarrow \ln x = y \cdot \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \therefore \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مثال 36

$$\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15}$$

جد قيمة المقدار :-

الحل

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 15} + \frac{1}{\ln 15} &= \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15} \\&= \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 15} \\&= \frac{\ln(3 \times 5)}{\ln 15} \\&= \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1\end{aligned}$$

ćمارين (5-1)

1. اختصر كل من المقادير الآتية :-

a) $\log_{10} \frac{5}{16} - \log_{10} \frac{8}{27} + \log_{10} \frac{32}{9}$

b) $\log_5 15 + \log_5 75 - \log_5 9$

c) $\log_{10}(x^2 - 9) - \log_{10}(x - 3) + \log_{10} \frac{x - 3}{x + 3}$

d) $\frac{\log_{10} \sqrt{125} + \log_{10} \sqrt{27} - \log_{10} \sqrt{8}}{\log_{10} 15 - \log_{10} 2}$

2. جد قيمة المجهول في كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10} \frac{55}{6} - \log_{10} x = \log_{10} \frac{11}{2} + 1$

b) $\log_{10} x + \log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 = 12$

c) $\log_3 81 = 7 - 3y$

d) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}}(x - 1) = 2$

3. أثبت صحة المتطابقات اللوغاريتمية الآتية :-

$$a) \log_{10} \frac{9}{8} - \log_{10} \frac{18}{40} + \log_{10} \frac{72}{18} = 1$$

$$b) \log_{10} 0.1 + \log_{10} 18 - \log_{10} 6 - \log_{10} 3 = -1$$

$$c) \log_{10} 3 + \log_{10} 270 - 2 \log_{10} 9 = 1$$

$$d) \log_b 30 - \log_b 310 - \log_b 31 + \log_b 961 - \log_b 3 = 0 , (b \neq 1)$$

4. حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

$$a) \log_{10}(3x+1) + \log_{10}(3x-7) - \log_{10} 2 = 1$$

$$b) \log_a(10-y) + \log_a(y+2) = \log_a 11 \quad y \in \{10 > y > 2\}$$

$$c) \log_2(x+14) - \log_2(x-5) = 1$$

$$d) \log_5(n+1) + \log_5(2n-1) = 1$$

5. إذا علمت أن $\log_{10} 3 = 0.4771$ ، $\log_{10} 2 = 0.3010$ فاحسب قيمة كل مما يأتي:-

$$a) \log_{10} 0.3$$

$$b) \log_{10} \frac{64}{27}$$

$$c) \log_{10} 60$$

$$d) \log_{10} \frac{81}{\sqrt{8}}$$

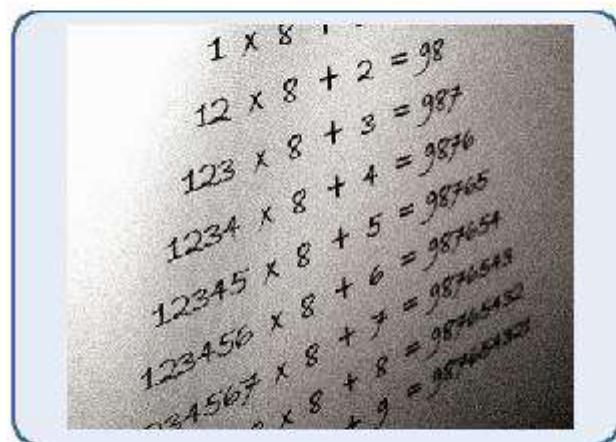
6. أثبت ان :-

$$a) \frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc} = 1$$

$$b) \log_{10} \left(\frac{40}{9} \right) + 2(2 \log_{10} 5 + \log_{10} 6) = 5$$

7. إذا كان $\log_b a = \frac{1}{ab}$ اثبت ان $a = \log_c b$ ، $b = \log_a c$:-

الفصل الثاني



المتتابعات

الفصل الثاني المتتابعات (Sequences)

البنود
(SECTIONS)

المقدمة	1-2
تعريف المتتابعة وحدتها العام	2-2
المتتابعة الحسابية	3-2
الأوساط الحسابية	4-2
مجموع المتتابعة الحسابية المنتهية	5-2
المتتابعة الهندسية	6-2
الأوساط الهندسية	7-2
مجموع المتتابعة الهندسية المنتهية	8-2

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>First term</i>	a	الحد الأول للمتتابعة الحسابية والهندسية
<i>common difference of an arithmetic sequence</i>	$d = U_{n+1} - U_n$	أساس المتتابعة الحسابية
<i>common ratio of an geometrical sequence</i>	$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$	أساس المتتابعة الهندسية
<i>the nth Term of an arithmetic sequence</i>	$U_n = a + (n - 1) \cdot d$	قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية
<i>the nth Term of an geometrical sequence</i>	$U_n = a \cdot r^{n-1}$	قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية
<i>sum of a certain number of terms of an arithmetic sequence</i>	$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$	قانون مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأخير
<i>sum of a certain number of terms of an arithmetic sequence</i>	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) \cdot d]$	قانون مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأساس
<i>sum of a certain number of terms of a geometrical sequence</i>	$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$	قانون مجموع المتتابعة الهندسية

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مفهوم المتتابعة
- تعريف المتتابعة العددية وحدتها العام
- مفهوم المتتابعة الحسابية وقانون الحد العام لها
- كيفية ادخال او سط حسابية بين عددين معينين
- ايجاد مجموع المتتابعة الحسابية المنتهية
- مفهوم المتتابعة الهندسية وقانون الحد العام لها
- كيفية ادخال او سط هندسية بين عددين معينين
- ايجاد مجموع المتتابعة الهندسية المنتهية



الفصل الثاني

المتتابعات

(Sequences)

1-2 المقدمة

المتتابعات هي دوال يكون مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة (\mathbb{N}^+) او مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (\mathbb{Z}^+) ، او يكون مجالها مجموعة جزئية ومرتبة من (\mathbb{Z}^+) او (\mathbb{N}^+) ، أي $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $n \in \mathbb{N}^+ \{1, 2, 3, \dots, n\}$

والمجال المقابل اي المدى هو مجموعة غير خالية. وقد تكون المتتابعات منتهية (Finite Sequences) او غير منتهية (Infinite Sequences) .

وكما ان مجموعة الأعداد الطبيعية هي $\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ وهي الأعداد الموجبة وان المجموعة الكاملة $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = W$ وهي مجموعة الأعداد الموجبة والصفر ، وأما مجموعة الأعداد الصحيحة فهي $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$ اي انها الأعداد السالبة والموجبة مع الصفر حيث ان $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ، وسنأخذ في الفصل هذا المتتابعات بشكل عام والمتتابعات الحسابية والهندسية والتين لها تطبيقات في المجالات الاقتصادية وعلم الأرض (الجيولوجيا) وغيرها من المجالات .
مما سبق يمكن ان نضع تعريفاً للمتتابعة كالاتي :-

2-2 تعريف المتتابعة وحدتها العام

المتتابعة (Sequence)

هي دوال يكون مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة (\mathbb{N}^+) او مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (\mathbb{Z}^+) ، او مجموعة جزئية من (\mathbb{Z}^+) او (\mathbb{N}^+) . ومجالها المقابل هو مجموعة جزئية غير خالية.

مثال: لتكن $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ او $f(n) = n + 2$

$$\text{فإنه عندما } f(1) = 1 + 2 = 3 \quad n = 1$$

$$\text{وعندما } f(2) = 2 + 2 = 4 \quad n = 2$$

$$\text{وعندما } f(3) = 3 + 2 = 5 \quad \text{وهكذا ...} \quad n = 3$$

فمن الممكن ان الاعداد الناتجة هي المجال المقابل اي المدى ونكتب بالصورة $\langle 3, 4, 5, \dots \rangle$ وتسمي بالمتتابعة وإذا رمزنا له $f(n)$ بالرمز U_n تصبح الدالة المعطاة بالشكل $U_n = n + 2$ وهذا الأخير هو القاعدة التي من خلالها وجدنا النواتج أي المجال المقابل (المدى) ونسمى $U_n = n + 2$ بـ $n \in \mathbb{N}^+$ او $n \in \mathbb{Z}^+$ بالحد التوقيعي او الحد العام (General term) او $U_n = \langle 3, 4, 5, \dots \rangle$ ، ونكتب المتتابعة في المثال السابق بالشكل $\langle U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \rangle$ ، وبصورة عامة تكتب المتتابعة كالاتي:-

$\langle U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \rangle$ حيث U_1 الحد الأول و U_2 الحد الثاني ... وهكذا.

مثال 1

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة التي حدها العام $U_n = 2n + 2$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

الحل

$$\text{الحد الأول} \quad U_1 = 2 \times 1 + 2 = 4$$

$$\text{الحد الثاني} \quad U_2 = 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$\text{الحد الثالث} \quad U_3 = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$\text{الحد الرابع} \quad U_4 = 2 \times 4 + 2 = 10$$

$$\text{الحد الخامس} \quad U_5 = 2 \times 5 + 2 = 12$$

المتتابعة هي: $\langle U_n \rangle = \langle 4, 6, 8, 10, 12 \rangle$

مثال 2

اكتب المتتابعة الآتية مكتفيًا بالحدود الستة الأولى ، حيث حدها العام $U_n = 5$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

الحل

$$U_1 = 5, U_2 = 5, U_3 = 5, U_4 = 5, U_5 = 5, U_6 = 5$$

$$\therefore \text{المتتابعة} \quad \langle U_n \rangle = \langle 5, 5, 5, 5, 5, 5 \rangle$$

ملاحظة :- في المثال 2 نلاحظ ان الحدود جميعها متساوية فتسمى مثل هذه المتتابعة بمتتابعة الثابتة.

ćمارين (1-2)

1. اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الآتية :-

a) $\langle U_n \rangle = \langle n - 1 \rangle$

b) $\langle U_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

c) $\langle U_n \rangle = \langle (-1)^2 \rangle$

d) $\langle U_n \rangle = \langle n^2 \rangle$

2. إذا كان $\mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$: فأكتب المتتابعة حيث :

3-2 المتتابعة الحسابية Arithmetic Sequence

تعريف

هي المتتابعة التي يكون الفرق بين كل حدرين متتالين من حدودها عدد ثابت يطلق عليه اساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (d) اما حدها الاول فيرمز له بالرمز (a).

وبذلك تكون المتتابعة الحسابية والتي تسمى ايضاً بالممتتابعة العددية هي:

$$\langle U_n \rangle = \langle a, a+d, a+2d, \dots \rangle$$

حيث $U_1 = a$ يسمى الحد الأول و $U_3 = a + 2d$ يسمى الحد الثاني و $U_2 = a + d$ يسمى الحد الثالث ، كما ذكرنا ان الأساس هو حاصل طرح حدرين متتالين من حدودها فيكون الأساس.

$$d = U_{n+1} - U_n$$

2-3 الحد العام للممتتابعة الحسابية General Term for Arithmetic Sequence

$$U_1 = a$$

كما علمنا ان:

$$U_2 = a + d$$

$$U_3 = a + 2d$$

$$U_n = a + (n-1)d$$

وبذلك سيكون الحد العام للممتتابعة الحسابية بالشكل:

$$U_n = a + (n-1).d \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ or } n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال 3

لاحظ الممتتابة الحسابية الآتية $\langle 1, 5, 9, 13, 17, \dots \rangle$ فيها الحد الأول هو 1

$$d = U_2 - U_1 \Rightarrow d = 5 - 1 = 4$$

$$d = U_3 - U_2 \Rightarrow d = 9 - 5 = 4$$

وهكذا... ولإيجاد الممتتابة الحسابية نستخدم طريقة الحد العام او طريقة إضافة الأساس للحد الأول لنحصل على الحد الثاني وإضافة الأساس للحد الثاني لنحصل على الحد الثالث وهكذا ...

مثال 4

اكتب الممتتابة الحسابية التي حدها الأول يساوي (2) وأساسها (3) مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى.

الحل

نستخدم طريقة الحد العام :

$$U_1 = a = 2$$

$$U_2 = a + d = 2 + 3 = 5, \quad U_3 = a + 2d = 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$$

$$U_4 = a + 3d = 2 + 3 \times 3 = 2 + 9 = 11,$$

$$U_5 = a + 4d = 2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$$

\therefore الممتتابة هي: $\langle 2, 5, 8, 11, 14 \rangle$

مثال 5

متتابعة حسابية حدتها الأول يساوي (7) وحدتها السادس يساوي (3) جد أساسها

الحل

$$U_6 = -3 \quad \text{لدينا الحد الأول } a = 7 \quad \text{ولدينا قيمة الحد السادس}$$

لإيجاد قيمة الأساس d نستخدم قانون الحد العام

$$U_6 = a + 5d$$

$$-3 = 7 + 5d \Rightarrow -3 - 7 = 5d \Rightarrow -10 = 5d \Rightarrow d = \frac{-10}{5} \Rightarrow d = -2$$

مثال 6

جد الحد السابع في المتتابعة الحسابية $< -2, 3, 8, \dots >$

الحل

$$d = U_3 - U_2 = 8 - 3 = 5 \quad \text{والأساس } n = 7 \quad a = -2$$

$$U_n = a + (n - 1)d$$

قانون الحد العام

$$U_7 = -2 + (7 - 1) \times 5$$

$$U_7 = -2 + 6 \times 5 \Rightarrow U_7 = -2 + 30 \Rightarrow U_7 = 28$$

مثال 7

في معمل ما يوجد (6) محركات كهربائية موضوعة بشكل متسلسل حيث تزيد قدرة المحرك بمقدار (2) حصان عن قدرة المحرك الذي قبله . فإذا كانت قدرة المحرك الأول (2) حصان فكم تبلغ قدرة المحرك السادس ؟

الحل

سيكون المحرك الأول هو الحد الأول اي ان $a = 2$ وستكون زيادة قدرة المحرك عن الذي

قبله هي الأساس اي $d = 2$ وبذلك ستكون قدرة المحرك السادس هي:

$$U_6 = a + 5d$$

$$\text{حصان } U_6 = 2 + 5 \times 2 = 12$$

ملاحظة :-

عندما يطلب في السؤال (إيجاد عدد حدود المتتابعة) او (ما رتبة الحد الذي قيمته) هذا يعني ان قيمة n مجهولة.

مثال 8

جد عدد حدود المتتابعة الحسابية $< 13, 11, 9, \dots, -5 >$

الحل

$$U_n = -5, a = 13, n = ?$$

قانون الحد العام

$$U_n = a + (n - 1).d$$

$$\therefore -5 = 13 + (n - 1) \times -2$$

$$-5 = 13 - 2n + 2 \Rightarrow -5 = 15 - 2n \Rightarrow -5 - 15 = -2n$$

$$\therefore -20 = -2n \Rightarrow n = \frac{-20}{-2} = 10$$

اي ان عدد حدود المتتابعة هو عشرة حدود.

مثال 9

في السيارة تحتوي علبة السرع (gear box) على 5 سرع فإذا كانت تقطع 20 km/h في السرعة الأولى وكان هناك زيادة ثابتة تبلغ 25 km/h ابتداءً من السرعة الأولى ، فكم تقطع إذا كانت في السرعة الخامسة؟

الحل

لاحظ ان السيارة فيها خمس سرع اي خمسة حدود وسيكون الحد الأول 20 وان الزيادة ستمثل اساس المتتابعة اي 25 وفي السؤال طلب ايجاد السرعة الخامسة اي الحد الخامس:

$$U_5 = a + 4d$$

$$U_5 = 20 + 4 \times 25 = 20 + 100 = 120 \text{ km/h}$$

4-2 الأوساط الحسابية Arithmetic Means

هي الأعداد التي تتوسط عددين او حدين معلومين (مذكورين) لأن ندخل الأعداد المرتبة a, b, c, d, \dots, f بين العددين a, f المذكورين اي تصبح $\langle a, b, c, d, \dots, f \rangle$ فإن الأوساط الحسابية هي الأعداد \dots, b, c, d, \dots ، حيث ان :-

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = \frac{\text{عدد الأوساط}}{2} + 1$$

مثال 10

ادخل ستة اوساط حسابية بين العددين 40، 12

الحل

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = \frac{\text{عدد الأوساط}}{2} + 1$$

$$= \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$$

∴ الحد الأخير هو U_8 ويساوي 40 والحد الأول هو $a = 12$ وسنجد الأساس d

$$U_8 = a + 7d$$

$$40 = 12 + 7d \Rightarrow 40 - 12 = 7d \Rightarrow 28 = 7d \Rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

∴ الأوساط هي ابتداءً من الحد الثاني U_2 والى الحد السابع U_7 وكما يأتي:

$$U_2 = 16, U_3 = 20, U_4 = 24, U_5 = 28, U_6 = 32, U_7 = 36$$

اي ان الأوساط هي الأعداد : 16, 20, 24, 28, 32, 36 بينما المتتابعة هي:

$$\langle 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 \rangle$$

5-2 مجموع المتتابعة الحسابية المنتهية

لتكن $< U_n >$ متتابعة حسابية فإذا رمزاً $< U_1, U_2, U_3, \dots, U_n >$ لمجموع n حداً منها ابتداءً من حدها الأول والى الحد النوني فيكون :

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (U_n - 2d) + (U_n - d) + U_n \dots (1)$$

وإذا كتبنا مجموع n حداً من هذه المتتابعة وابتداءً من الحد النوني الى الحد الأول سيكون:

$$S_n = U_n + (U_n - d) + (U_n - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \dots (2)$$

وبجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} S_n + S_n &= (a + U_n) + (a + d + U_n - d) + \dots + (U_n - d + a + d) + U_n + a \\ 2S_n &= (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n) + (a + U_n) \end{aligned}$$

$$2S_n = n [a + U_n] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

..
.. هذا قانون ايجاد مجموع عدد معين من حدود المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والحد الأخير.

وكما نعلم ان $U_n = a + (n - 1)d$ فيصبح القانون كما يأتي :

$$S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1).d]$$

ونستخدم هذا القانون لإيجاد مجموع عدد معين من حدود المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأساس.

مثال 11

جد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة الحسابية $< 10, 14, 18, \dots, 38 >$

الحل

$$a = 10, \quad d = 14 - 10 = 4, \quad U_n = 38, \quad n = 8$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1).d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2} [2 \times 10 + (8 - 1) \times 4]$$

$$S_8 = 4[20 + 7 \times 4]$$

$$S_8 = 4 \times 48 = 192$$

تمارين (2-2)

1. اختر الجواب الصحيح لكل مما يأتي :-

(أ) المتتابعة $< 3n + 2$

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (2) حدها الأول 5 واساسها 3 | (1) حدها الأول 4 واساسها 2 |
| (4) حدها الأول 1 واساسها -1 | (3) حدها الأول 2 واساسها -3 |

ب) المتتابعة الحسابية $> 10, 6, x, -2$ -> فإن قيمة x هي:

- | | |
|-------|--------|
| 4 (2) | 1 (1) |
| 2 (4) | -1 (3) |

2. اكتب المتتابعة الحسابية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى لكل مما يأتي :-

- | | |
|--------------------------|---------------|
| $d = 4$ واساسها $a = 2$ | أ) الحد الأول |
| $d = 6$ واساسها $a = -4$ | ب) الحد الأول |

3. اكتب الحد الثالث عشر لمتتابعة حسابية حدها الأول (3) وأساسها (4).

4. ادخل ثمانية اوساط حسابية بين العددين 2, 29

5. جد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية التي أقل من (100) ثم جد مجموعها.

6. ما رتبة الحد الذي قيمته (15) في المتتابعة الحسابية $< -7, -5, -3, \dots$

ملاحظة :- في السؤال السادس يجب ان نعلم ان قيمة n مجهولة وان $U_8 = 15$.

2-6 المتتابعة الهندسية Geometric Sequence

هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرةً يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة ويرمز له (r) اي ان :-

$$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

على ان لا يكون حد فيها يساوي صفر.

ففي المتتالية التالية :- $< 2, 4, 8, 16, \dots >$ نلاحظ ان :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

وهكذا فإن ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له يساوي 2 فنقول انها تمثل متتابعة هندسية وأساسها $r = 2$ وكذلك فإن حدها الأول هو $a = 2$ اما المتتابعة $< 1, 4, 9, 16, 25, \dots >$ فأنها لا تمثل متتابعة هندسية لأن:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{1}, \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

∴ المتتابعة الهندسية التي حدها الأول (a) وأساسها (r) هي :-

$$< U_n > = < a, ar, ar^2, ar^3, \dots >$$

حيث ان $U_1 = a$ ويسمى الحد الأول ، $U_2 = ar$ ويسمى الحد الثاني ، $U_3 = ar^2$ ويسمى الحد الثالث وهكذا...

1-6-2 الحد العام للمتتابعة الهندسية General Term for Geometric sequence

ان الحد العام للمتتابعة الهندسية هو :-

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

مثال 12

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول يساوي (27) وأساسها ($\frac{1}{3}$)

الحل

$$U_1 = a = 27$$

$$U_2 = a \cdot r = 27 \times \frac{1}{3} = 9$$

$$U_3 = a \cdot r^2 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 27 \times \frac{1}{9} = 3$$

$$U_4 = a \cdot r^3 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 27 \times \frac{1}{27} = 1$$

$$U_5 = a \cdot r^4 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 27 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{3}$$

∴ المتتابعة هي $< 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3} >$

مثال 13

جد الحد السادس في المتتابعة الهندسية $< 6, 12, 24, \dots >$

الحل

$$a = 6, r = \frac{12}{6} = 2, n = 6$$

قانون الحد العام

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$U_6 = 6 \times 2^{6-1}$$

$$U_6 = 6 \times 2^5$$

$$U_6 = 6 \times 32 = 192$$

مثال 14

في مختبر الحاسوب في إحدى المدارس يوجد ثمانية أجهزة حاسوب، الذاكرة المستخدمة في كل جهاز تساوي ضعف الذاكرة المستخدمة في الجهاز الذي قبله. فإذا كانت الذاكرة المستخدمة في الحاسوب الأول (5G) فكم تبلغ الذاكرة المستخدمة في الحاسوب الخامس؟

الحل

إن ذاكرة الحاسوب الأول ستكون الحد الأول $a = 5$ وذاكرة الحاسوب الثاني ستكون ضعفها أي 10 بذلك سيكون الحد الثاني هو 10 والأساس هو 2 وسنجد الحد الخامس الذي هو الحاسوب الخامس

$$U_5 = 5 \times 2^{5-1}$$

$$U_5 = 5 \times 2^4$$

$$U_5 = 5 \times 16 = 80$$

مثال 15

في محل تجاري يوجد 6 مولدات كهربائية موضوعة بشكل متسلسل، فإذا كانت المولدة الثانية تولد نصف ما تولده المولدة الأولى من التيار، فإذا كانت الأولى تولد (640 A) فكم ستولد المولدة السادسة من التيار؟

الحل

ان ما تولده المولدة الأولى من التيار سيكون الحد الأول اي ان $a = 640$ ويكون الحد الثاني 320 اي نصفه اي ان الأساس هو $\frac{1}{2}$ والمطلوب في السؤال ايجاد الحد السادس وكما يلي:

$$\begin{aligned} U_6 &= a r^5 \\ \Rightarrow U_6 &= 640 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ \Rightarrow U_6 &= 640 \times \frac{1}{32} = 20 A \end{aligned}$$

7-2 الأوساط الهندسية Geometric Means

هي الأعداد التي تقع بين عددين او حدين معلومين كأن ندخل الأعداد المرتبة ... b, c, d, \dots بين العددين a, f بحيث ان $a, b, c, d, \dots, f >$ تكون متتابعة هندسية فإن الأوساط الهندسية هي الأعداد b, c, d, \dots حيث ان :-

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = \frac{\text{عدد الأوساط}}{2} + 2$$

مثال 16

ادخل ستة اوساط هندسية بين العددين 4, 512 فما هذه الأوساط ؟

الحل

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = \frac{\text{عدد الأوساط}}{2} + 2$$

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = 6 + 2 = 8$$

ستكون المتتابعة مكونة من ثمانية حدود وسيكون الحد الأخير $U_8 = 512$

$a = 4$ والحد الأول هو

$$U_8 = a r^7 \Rightarrow 512 = 4 r^7 \Rightarrow 128 = r^7$$

$$r^7 = 2^7 \Rightarrow r = 2$$

∴ الأوساط هي ابتداءً من الحد الثاني والى الحد السابع

$$U_2 = ar = 4 \times 2 = 8$$

$$U_3 = ar^2 = 4 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$U_4 = ar^3 = 4 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$$

$$U_5 = ar^4 = 4 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$$

$$U_6 = ar^5 = 4 \times 2^5 = 4 \times 32 = 128$$

$$U_7 = ar^6 = 4 \times 2^6 = 4 \times 64 = 256$$

∴ الأوساط الهندسية هي :- 8, 16, 32, 64, 128, 256

ملاحظة :-

يمكن ان نجد المتتابعة الهندسية وذلك بضرب الأساس في الحد الأول لينتاج الحد الثاني وبضرب الأساس في الحد الثاني لينتاج الحد الثالث وهكذا.



2-8 مجموع المتتابعة الهندسية المنتهية Sum of a Geometric Sequence

كما نعلم ان المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r هي $\{a, ar, ar^2, ar^3, \dots\}$ فإذا أخذنا عدداً معيناً من حدودها الأولى اي (n) من الحدود الأولى اي رمزاً S_n فيكون :-

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad \dots (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في r فتصبح

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + r \times ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad \dots (2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على :-

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

هذا قانون مجموع حدأً من حدود المتتابعة الهندسية .

17 مثال

جد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة الهندسية $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$

الحل

$$a = 1, \quad r = \frac{2}{1} = 2, \quad n = 8$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \Rightarrow S_n = \frac{1(1 - 2^8)}{1 - 2}$$

$$S_n = \frac{-255}{-1} = 255$$



ćمارين (3-2)

1. اختر الإجابة الصحيحة :-

أ) المتتابعة الهندسية $> 40, 20, 10, 5 <$ أساسها يساوي :-

$$r = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$r = \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$r = 2 \quad (1)$$

$$r = 3 \quad (3)$$

ب) قيمة x في المتتابعة الهندسية $> 27, x, 3, 1 <$ هي :-

$$x = -8 \quad (2)$$

$$x = -9 \quad (4)$$

$$x = 8 \quad (1)$$

$$x = 9 \quad (3)$$

ج) إن قيمة الحد الخامس في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = \frac{1}{2}$ هو :-

$$16 \quad (2)$$

$$-8 \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

2. أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الهندسية الآتية :-

أ) الحد الأول $a = 3$ وأساسها $r = -3$

ب) الحد الأول $a = 5$ وأساسها $r = \frac{1}{5}$

3. ادخل أربعة اوساط هندسية بين 3, 96

4. جد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية $> 5, 10, 20, ... <$

5. متتابعة هندسية حدها الثالث 8 وحدها السادس 1 فجد حدها الأول وأساسها؟

أسئلة متنوعة

1. ضع (✓) امام العبارة الصائبة و () امام العبارة الخطأ فيما يلي :-

أ. في المتتابعة التالية $< \frac{n^2+1}{2} >$ فإن الحد الرابع هو $U_4 = \frac{17}{2}$

ب. المتتابعة التالية تمثل متتابعة حسابية $< 2, 4, 6, 8, \dots >$

ج. الدالة التي مجالها \mathbb{Z} تمثل متتابعة.

د. الدالة التي مجالها \mathbb{N} تمثل متتابعة.

هـ. المتتابعة الحسابية التالية $< \dots, -35, -37, -39, \dots >$ أساسها هو $d = 2$

وـ. أساس المتتابعة الهندسية هو ناتج جمع كل حد فيها مع الحد السابق له مباشرةً أي $r = U_{n+1} + U_n$

2. اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة التالية :-

$$U_n = \begin{cases} n^2 & n \text{ فردي} \\ \frac{n}{n+1} & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

3. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الحسابية التي حدها الثاني يساوي نصف الحد الأول علمًاً ان الحد الأول يساوي 2 ؟

4. جد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتابعة الحسابية $< \dots, -8, -5, -2 >$

5. جد الحد الحادي عشر من المتتابعة الحسابية $< \dots, 11, 7, 3 >$

6. جد الحد السادس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها 2 ؟

7. ادخل اربعة اوساط هندسية بين العدددين 1-32

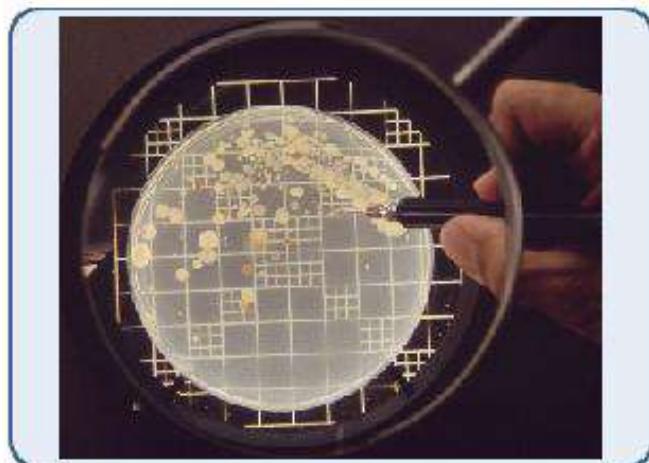
8. إن الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقبل القسمة على 3 ابتداءً من العدد 9 تمثل بالمتتابعة الحسابية التالية $< \dots, 15, 12, 9 >$ احسب مجموع ثمانيه حدود الأولى منها؟

9. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 16 وأساسها $\frac{1}{4}$ ؟

10. جد المتتابعة الحسابية التي حدها الثامن (21-) وحدها الثاني (3)؟

11. جد مجموع 6 حدود الأولى من المتتابعة الهندسية $< \dots, 16, 8, 4 >$

الفصل الثالث



طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين

الفصل الثالث

طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين

(Counting Methods & Binomial theorem)

البنود
(SECTIONS)

طرائق العد	1-3
المبدأ الأساسي للعد	1-1-3
مضروب العدد الصحيح	2-1-3
التباديل	3-1-3
التوافق	4-1-3
مبرهنة ذي الحدين بأسس صحيحة موجبة	2-3
مقدمة	1-2-3
إيجاد مفوك ذي الحدين $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $(a + b)^n$	2-2-3
إيجاد الحد العام في مفوك ذي الحدين $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $(a + b)^n$	3-2-3
إيجاد الحد الأوسط او الحدين الاوسطين في مفوك ذي الحدين $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $(a + b)^n$	4-2-3

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>Factorial</i>	$n!$	مضروب العدد
<i>Permutation</i>	$P_r^n = P(n, r)$	التباديل
<i>Positive Integer</i>	$C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r}$	التوافق
<i>Positive Integer</i>	\mathbb{Z}^+	مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة
<i>Real numbers</i>	\mathbb{R}	مجموعة الاعداد الحقيقة
<i>General Term</i>	T_r	الحد العام

سوف نتعلم في هذا الفصل:-

- المبدأ الأساسي للعدد وتطبيقاته العملية.
- مفهوم مضروب العدد الصحيح وخواص المضروب.
- مفهوم التباديل وخواصها وتطبيقات عملية عليها.
- مفهوم التوافق وخواصها وتطبيقات عملية عليها.
- مبرهنة ذي الحدين بأسس صحيحة موجبة.
- استخدام مبرهنة ذي الحدين لإيجاد مفکوك $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.
- إيجاد حد معين من مفکوك $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.
- إيجاد الحد الأوسط او الحدين الأوسطين في مفکوك $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.



الفصل الثالث

طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين

(Counting Methods & Binomial theorem)

1-3 طرائق العد (Counting Methods)

1-1-3 مبدأ العد الأساسي (Fundamental Counting Principle)

مثال 1

إذا كانت هناك 6 طرق يمكن ان نسلكها بين المدينتين (A) و (B)، و 4 طرق يمكن ان نسلكها بين المدينتين (B) و (C) فبكم طريقة يمكن لشخص ان يسافر من المدينة (A) الى المدينة (C) مروراً بالمدينة (B)؟

الحل

بالنظر الى المخطط ادناه يمكننا التوصل الى عدد الطرق التي يمكن ان يسلكها

الشخص وهي 24 طريقة ونبينها بالتفصيل الاتي: -

1T, 1U, 1V, 1W

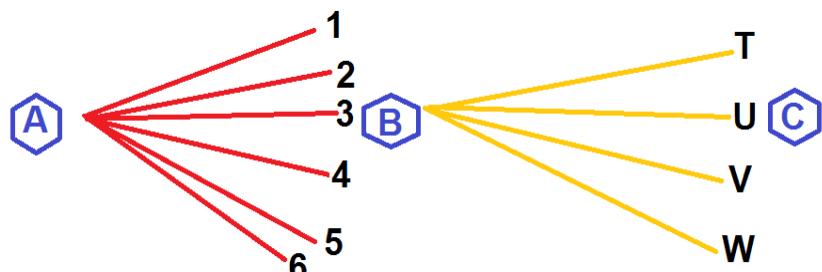
2T, 2U, 2V, 2W

3T, 3U, 3V, 3W

4T, 4U, 4V, 4W

5T, 5U, 5V, 5W

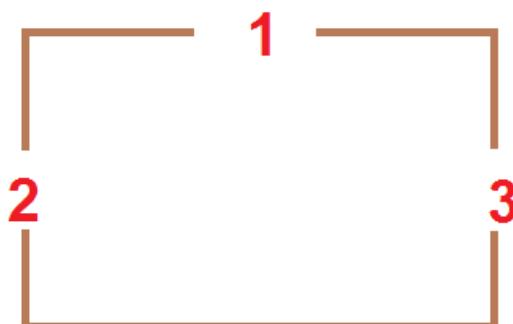
6T, 6U, 6V, 6W



مثال 2

بنية لها ثلاثة مداخل، فبكم طريقة يتمنى الشخص ان يدخل البناء من أحد المداخل ويغادرها من مدخل مختلف.

الحل



بالنظر الى المخطط المجاور يمكننا التوصل الى عدد الطرق التي يمكن ان يسلكها الشخص هي 6 طرق ونبينها بالتفصيل الاتي: -

تكميلة

- يدخل من المدخل 1 ويغادر من المدخل 2
- يدخل من المدخل 1 ويغادر من المدخل 3
- يدخل من المدخل 2 ويغادر من المدخل 1
- يدخل من المدخل 2 ويغادر من المدخل 3
- يدخل من المدخل 3 ويغادر من المدخل 1
- يدخل من المدخل 3 ويغادر من المدخل 2

عبارة أولية :-

إذا كان لدينا عدد (K) من العمليات (او الاختيارات) وكان بالإمكان اجراء العملية الاولى بعدد من الطرق مقداره (m) ، وكان بالإمكان اجراء العملية الثانية بعدد من الطرق مقداره (n) ، وكان بالإمكان اجراء العملية من الرتبة (K) بعدد من الطرق مقداره (z) ، بحيث ان اجراء اي عملية لا يؤثر على اجراء اي من العمليات الاخرى فان عدد الطرق التي يمكن اجراء كل تلك العمليات مجتمعة يساوي:-

$$m \times n \times \dots \times z$$

الآن أصبح بإمكاننا حل المثال (1) أعلاه باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه كالتالي:

- عدد الطرق المتاحة للسفر من المدينة (A) الى المدينة (C) مروراً بالمدينة (B) تساوي

$$(طريقة) 6 \times 4 = 24$$

كما أصبح بإمكاننا حل المثال (2) أعلاه باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه كالتالي:

- عدد الابواب الممكن الدخول منها يساوي 3.

- عدد الابواب التي يمكن الخروج منها يساوي 2 (الوجود شرط ان يكون الخروج من باب لم يتم الدخول منه). اذن عدد الطرق :-

$$(طريقة) 3 \times 2 = 6$$

اراد 3 سائحين أن يقطنوا في مدينة فيها ستة فنادق على ان يكون كل منهم في فندق مختلف، فبكم طريقة يمكن اجراء ذلك؟

عدد اختيارات السائح الاول تساوي 6 .

عدد اختيارات السائح الثاني تساوي 5 كونه لا يستطيع اختيار الفندق الذي سكن فيه السائح الاول.

عدد اختيارات السائح الثالث تساوي 4 كونه لا يستطيع اختيار الفندقين اللذين سكن فيهما السائحان الاول والثاني. وعليه (باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه) تكون عدد الطرق الممكنة هي: -

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

كم عدد رموز مكون من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام {1, 2, 3, 4, 5}

$$\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$$

b) التكرار مسموح به

(a) بما ان التكرار مسموح به فان:-

عدد الطرق لاختيار عدد يوضع في مرتبة المئات = 6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد=6

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من ثلاثة مراتب هو: -

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

b) بما ان التكرار غير مسموح به فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات = 6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 5

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد = 4

-اذاً عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من ثلاثة مراتب هو:-

$$6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ (طريقة)}$$

مثال

الحل

مثال 4

الحل

مثال 5

كم عدد رمزه مكون من رقمين وأصغر من 40 يمكن تكوينه باستخدام الأرقام {1, 2, 3, 4, 5}

(a) التكرار مسموح به (b) التكرار غير مسموح به

الحل

(a) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الواحد = 5

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من مرتبتين وأصغر من 40 هو:-

$$3 \times 5 = 15 \text{ (طريقة)}$$

(b) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الواحد = 4 (لأن التكرار غير مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من مرتبتين وأصغر من 40 هو:-

$$3 \times 4 = 12 \text{ (طريقة)}$$

مثال 6

كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب وأكبر من 500 يمكن تكوينه باستخدام الأرقام {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(a) التكرار مسموح به (b) التكرار غير مسموح به

الحل

(a) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 7

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الواحد = 7

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد المطلوب هو:-

$$3 \times 7 \times 7 = 147 \text{ (طريقة)}$$

(b) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 6 لأن التكرار غير مسموح به

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 5 لأن التكرار غير مسموح به

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد المطلوب هو:-

$$3 \times 6 \times 5 = 90 \text{ (طريقة)}$$

مثال 7

كم عدد رموز مكون من ثلاثة مراتب وأكبر من 500 يمكن تكوينه
 من الأرقام {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به.

(b) يكون العدد فردياً وتكرار الرقم في العدد مسموح به.

الحل

(a) بما ان العدد المطلوب زوجي والأرقام الزوجية المعطاة هي {2, 4, 6} وعدها 3 فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم زوجي يوضع في مرتبة الواحد = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 6 (لان التكرار غير مسموح به)

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات = 5 (لان التكرار غير مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد هو:-

$$3 \times 6 \times 5 = 90 \quad (\text{طريقة})$$

(b) بما ان العدد المطلوب فردي والأرقام الفردية المعطاة هي {1, 3, 5, 7} وعدها 4 فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم فردي يوضع في مرتبة الواحد = 4

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 7 (لان التكرار مسموح به)

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات = 7 (لان التكرار مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد هو:-

$$4 \times 7 \times 7 = 196 \quad (\text{طريقة})$$

2-1-3 مضروب العدد الصحيح (Factorial of Integer Number)

إذا كان لدينا 10 أشخاص يراد توظيفهم في 10 وظائف مختلفة فمن البديهي ان الوظيفة الاولى يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص العشرة بينما الوظيفة الثانية يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص التسعة المتبقين والوظيفة الثالثة يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص الثمانية المتبقين ... وهكذا الى ان نجد ان الوظيفة العاشرة لم يتبق لإشغالها سوى شخص واحد فقط، فإذا احتسبنا مراحل اشغال الوظائف وهي عشر مراحل فان عدد الخيارات في كل مرحلة سيكون بالترتيب التالي:-

الوظيفة 1	الوظيفة 2	الوظيفة 3	الوظيفة 4	الوظيفة 5	الوظيفة 6	الوظيفة 7	الوظيفة 8	الوظيفة 9	الوظيفة 10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

اي ان خيارات توزيع الاشخاص على الوظائف سوف تكون

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

إذا أعممنا الفكرة بتوظيف n من الأشخاص في n من الوظائف فان خيارات توزيع الأشخاص على الوظائف سوف تكون:

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1$$

وفي احيان كثيرة في الرياضيات نحتاج لإجراء عملية ضرب تنازلي يبدأ بالعدد الصحيح n وينتهي بالعدد الصحيح 1، يرمز لعملية الضرب هذه بالرمضان! ($n!$ يقرأ مضروب العدد n) ويعرف كالاتي

تعريف مضروب العدد الصحيح:

- 1) $n! = n(n-1)(n-2) \dots 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+: n \geq 2$
- 2) $1! = 1$
- 3) $0! = 1$

ملاحظة:-

$$n! = n(n-1)!$$

فلو عوضنا $n = 1$ فإننا نحصل على:-

$$1! = 1 \cdot (1-1)!$$

$$1! = 1 \times 0!$$

ولو عوضنا $n = 2$ فإننا نحصل على:-

$$2! = 2 \times (2-1)!$$

$$2! = 2 \times 1!$$

ولو عوضنا $n = 3$ فإننا نحصل على:-

$$3! = 3 \times (3-1)!$$

$$3! = 3 \times 2!$$

ويمكننا استخدام ما توصلنا اليه سابقاً وهو $(2! = 2 \times 1!)$ لنحصل على:-

$$3! = 3 \times 2 \times 1!$$

ولو عوضنا $n = 4$ فإننا نحصل على:-

$$4! = 4 \times (4-1)!$$

$$4! = 4 \times 3!$$

ويمكننا استخدام ما توصلنا اليه سابقاً وهو $(3! = 3 \times 2 \times 1!)$ و $(2! = 2 \times 1!)$ لنحصل على

$$4! = 4 \times 3 \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1!$$

ونستطيع اعمام ذلك كالاتي:-

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(\dots)(n-m)! \quad m \leq n \quad \text{حيث}$$

مثال 8

اثبت ان :

$$\frac{9!}{3! 3! 3!} = 1680$$

الحل

$$L.H.S = \frac{9!}{3! 3! 3!}$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{9 \times 4} \\ &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \\ &= 1680 \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

مثال 9

جد قيمة n إذا كان:-

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

الحل

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1) \times n = 30$$

$$n^2 + n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n-5)(n+6) = 0$$

$$(n-5) = 0 \Rightarrow n = 5 \quad \text{اما:}$$

$$(n+6) = 0 \Rightarrow n = -6 \notin \mathbb{Z}^+$$

مثال 10

جد قيمة $n!$ إذا علمت أن: $5040 = n!$

الحل

نكتب العدد 5040 على شكل حاصل ضرب أعداد متتابعة ابتداءً بالعدد 1 لنحصل على:-

$$5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

$$n! = 5040 \Rightarrow n! = 7! \Rightarrow n = 7$$

3-1-3 التباديل (Permutation)

يسمي وضع r من الأشياء مأخوذه من n من الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل لهذه الأشياء.
وتقرأ تبديل n ماخوذ منه r ويرمز له بالرمز P_r^n أو $(P(n, r))$.

ملاحظة: - في التباديل يكون الترتيب مهمًا جدًا. اي انه إذا اختلف الترتيب فإننا نحصل على وضع جديد. على سبيل المثال ABC يختلف عن BAC ويختلف عن CAB وهكذا.

تعريف التباديل:

ليكن $n \geq r$ بحيث $n, r \in \mathbb{Z}^+$

$$P_r^n = P(n, r) = \begin{cases} n! & ; r = n \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-r+1) & ; r < n \\ 1 & ; r = 0 \end{cases}$$

ملاحظة:-

$$P_r^n = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 11

أحسب: $P(8, 3)$

الحل

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!}$$

$$P(8, 3) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$$

$$P(8, 3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

مثال 12

أحسب: P_4^4

الحل

$$P_4^4 = 4!$$

$$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال 13

$$P(5, 0) = 1 \quad \text{أثبت ان:}$$

الحل

$$L.H.S = P(5, 0)$$

$$= \frac{5!}{(5-0)!}$$

$$= \frac{5!}{5!} = 1 = R.H.S$$

مثال 14

$$P(n, 2) = 90 \quad \text{جد قيمة } n \text{ اذا كان}$$

الحل

$$P(n, 2) = 90$$

$$n(n-1) = 90$$

$$n^2 - n = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$(n-10) = 0 \Rightarrow n = 10 \quad \text{اما:}$$

$$(n+9) = 0 \Rightarrow n = -9 \notin \mathbb{Z}^+ \quad \text{او: (يهم)} \quad \text{(يهم)}$$

مثال 15

شخص لديه 8 أشرطة قماش ملونة بألوان مختلفة، فبكم طريقة يمكن له ان يختار

اربعة منها ليصمم علمًا

الحل

- هنا ($n = 8$)، ($r = 4$) وحيث ان الترتيب مهم يكون:

$$P_r^n = P(8, 4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680 \quad \text{(طريقة)}$$

كما يمكننا اختصار خطوات الحل بان نبدأ بالعدد 8 وعمل أربع نقلات تنازليّة (اي نتوقف

عند العدد 5) وكما يأتي:-

$$P(n, r) = P(8, 4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \quad \text{(طريقة)}$$

مثال 16

كم كلمة ذات 4 حروف مختلفة يمكن تكوينها باستخدام حروف العبارة
(قوت القلوب):-

الحل

لاحظ ان الحروف المختلفة المستخدمة في العبارة هي (ق ،و،ت ،ا، ل، ب) و عددها 6

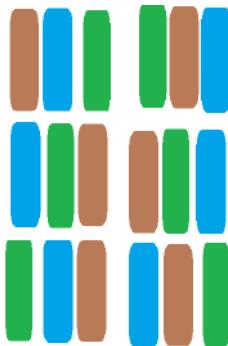
اي ان $(n = 6)$ ، $(r = 4)$ ، وحيث ان الترتيب مهم يكون :-

$$P(n, r) = P(6, 4) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \\ = 360 \quad (\text{طريقة})$$

مثال 17

بكم طريقة يمكن ترتيب وضع 3 كتب اغلفتها مختلفة الألوان على رف في مكتبة.

الحل



هنا $(n = 3)$ ، $(r = 3)$ ، وحيث ان الترتيب مهم يكون

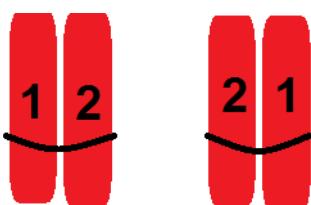
$$P(n, r) = P(3, 3) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad (\text{طريقة}) \\ \text{(لاحظ الشكل المجاور)}$$

مثال 18

بكم طريقة يمكن وضع 5 كتب على رف في مكتبة بحيث يبقى كتاباً محدداً متجاوراً مع بعضها دائماً.

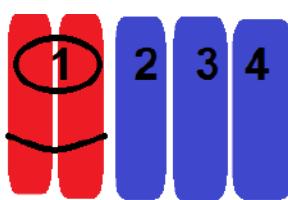
الحل

هذا السؤال مخادع وينبغي علينا الانتباه الى ان السبيل الوحيد لضمان بقاء الكتابين المحددين متجاوريين عند وضعهما على الرف هو اعتبارهما كتاباً واحداً (اي ربطهما معاً باستخدام خيط مثلاً). لاحظ ان الكتابين المحددين يمكن ترتيبهما كزمرة واحدة بطرقتين اعتماداً على من يكون بجهة اليسار كما في الشكل المجاور أي:-



$$[P(2, 2) = 2! = 2 \times 1 = 2]$$

وهكذا سوف يكون المطلوب هو ترتيب اربعة كتب (أحد هما مزدوج) على رف في مكتبة وذلك يتم بـ 24 طريقة كما في الشكل المجاور أي:-



$$[P(4, 4) = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24]$$

وحسب المبدأ الاساسي للعد يكون عدد الطرق الكلية هو
طريقة $2 \times 24 = 48$

4-1-3 التوافيق (Combination)

يسمى وضع r من الاشياء ماخوذة من n من الاشياء بصرف النظر عن ترتيبها بانه توفيق لهذه الاشياء. وتقرأ توفيق (او توافق n) ماخوذ منه r ويرمز له بالرمز C_r^n او $(n)_r^C$.

ملاحظة: - في التوافيق يكون الترتيب غير مهم. اي انه إذا اختلف الترتيب فقط فان وضع الاشياء يبقى كما هو. على سبيل المثال إذا كان لدينا مجموعة الطلاب {احمد، علي، محمد} وغيرنا في ترتيب كتابة الاسماء تكون {علي، محمد، احمد} او {احمد ، علي ، محمد} فان المجموعة هي للطلاب ذاتهم اي ان الترتيب غير مهم .

تعريف التوافيق:

ليكن $n \geq r$ بحيث $n, r \in \mathbb{Z}^+$

$$C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{p(n, r)}{r!} & ; r < n \\ 1 & ; r = 0, 1 \end{cases}$$

ملاحظات:-

$$\begin{aligned} 1) C(n, r) &= \frac{n!}{(n - r)! r!} \\ 2) C(n, r) &= C(n, n - r) \end{aligned}$$

مثال 19

أحسب: $C(8, 3)$

الحل

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8 - 3)! \times 3!}$$

$$= \frac{8!}{5! \times 3!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

مثال 20

$$C(50, 48)$$

الحل

$$C(50, 48) = C(50, 50 - 48) = C(50, 2)$$

$$= \frac{P(50, 2)}{2!} = \frac{50 \times 49}{2 \times 1} = 25 \times 49 = 1225$$

مثال 21

كم مجموعة جزئية ذات 3 عناصر يمكن تكوينها من مجموعة شاملة ذات 10 عناصر؟

الحل

ان ترتيب وضع العناصر في المجموعات غير مهم كما اوضحنا سلفاً ولذلك يكون عدد المجموعات الجزئية:

$$\begin{aligned} C(10, 3) &= \frac{P(10, 3)}{3!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 5 \times 3 \times 8 \\ &= 120 \end{aligned}$$

مثال 22

كم شكل رباعي يمكن تحديده من ست نقاط لا تقع 3 منها على استقامة واحدة.

الحل

ان الترتيب عند رسم قطع المستقيمات التي تصل بين ازواج النقاط غير مهم، والشكل الرباعي يكفي لتحديد أربع نقاط لذلك يكون عدد الاشكال الرباعية التي يمكن تحديدها هو :-

$$\begin{aligned} C(6, 4) &= \frac{P(6, 4)}{4!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 3 \times 5 = 15 \end{aligned}$$

مثال 23

اذا كان عدد أسئلة امتحان الرياضيات هو 8 والمطلوب حل 5 أسئلة منها فقط. فبكم طريقة يمكن الإجابة؟

الحل

حيث ان الترتيب غير ضروري عند حل الاسئلة في الامتحان (لا يشترط الإجابة حسب ترتيب الاسئلة) لذلك يكون عدد الطرق الممكنة للإجابة هي:-

$$\begin{aligned} C(8, 5) &= \frac{P(8, 5)}{5!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 8 \times 7 = 56 \end{aligned}$$

مثال 24

بكم طريقة يمكن أختيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين 7 رجال و5 سيدات؟

الحل

في هذا المثال نلاحظ ان الترتيب غير مهم لذلك يكون عدد الطرق كالاتي:-
يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين 7 بطرق عددها $C(7,3)$ ويمكن اختيار سيدتين من بين 5 بطرق عددها $C(5,2)$ وبالاعتماد على المبدأ الاساسي للعد تكون عدد الطرق الكلية لاختيار اللجنة هو:-

$$\begin{aligned} C(7,3) \times C(5,2) &= \frac{P(7,3)}{3!} \times \frac{P(5,2)}{2!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \\ &= 35 \times 10 = 350 \text{ (طريقة)} \end{aligned}$$

مثال 25

باقة ورد تحتوي 6 وردات حمر و 4 وردات بيض يراد اختيار 5 وردات تكون ثلاثة منها حمر فقط فبكم طريقة يمكن الاختيار؟

الحل

عدد طرق اختيار 3 وردات حمر هو $C(6,3)$ ، و حيث ان المطلوب هو 5 وردات فان العدد المتبقى وهو وردتين يتم اختيارهما من الورود البيض ويكون عدد طرق اختيارها هو $C(4,2)$.

وبالاعتماد على المبدأ الاساسي للعد يكون عدد الطرق الكلية لاختيار الورود هو:

$$\begin{aligned} C(6,3) \times C(4,2) &= \frac{P(6,3)}{3!} \times \frac{P(4,2)}{2!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \\ &= 20 \times 6 = 120 \text{ (طريقة)} \end{aligned}$$



تمارين (1-3)

1. شاحنة تحتوي على 20 صندوقاً في كل صندوق 100 علبة تحتوي العلبة الواحدة على 3 أجهزة موبайл. احسب حمولة الشاحنة من الموبايلات.

2. كم عدد زوجي ذي 4 مراتب يمكن تكوينه من الارقام {5, 1, 6, 2, 7, 4, 8} إذا كان :

(a) التكرار مسموحاً به في العدد نفسه (b) التكرار غير مسموح به في العدد نفسه

3. صندوق يحتوي عشرة مصابيح فإذا كانت (4) منها عاطلة وسحبنا منها ثلاثة مصابيح. جد عدد طرق السحب في الحالات الآتية:-

(a) اثنان منها صالحة وواحد عاطل (b) كلها عاطلة (c) على الأقل مصباح واحد صالح

4. إذا كان عدد أسئلة امتحان مادة ما هو 8 أسئلة وكان المطلوب الإجابة عن خمسة منها فقط بشرط أن تتضمن الإجابة ثلاثة من الأسئلة الأربع الأولى، فبكم طريقة يمكن الإجابة؟

5. بفرض أن التكرار غير مسموح به احسب :-

(a) عدد الأعداد ذات 3 مراتب التي يمكن تكوينها من الارقام {2, 3, 5, 6, 7, 9}

(b) عدد الأعداد ذات 3 مراتب الأقل من 400 التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

(c) عدد الأعداد الفردية ذات 3 مراتب التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

(d) عدد الأعداد ذات 3 مراتب من مضاعفات العدد 5 التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

6. جد قيمة n إذا كان :-

a) $P(n, 2) = 72$

b) $\binom{n}{2} = 10$

c) $2 \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

d) $C(n, 4) = C(n, 2)$

e) $P(n, 3) = 6 C(n, 4)$

7. بكم طريقة يمكنك تكوين شفرة رمزية ذات 6 حروف من حروف اللغة العربية (28 حرفاً) إذا كان التكرار غير مسموح به؟

8. صف دراسي فيه 5 طلاب مصريون و 4 سوريون و 8 عراقيون و 3 اردنيون . اخترنا طالبين.

جد عدد طرق الاختيار ليكون:-

(a) الطالبان عراقياً و سورياً

(b) الطالبان كلاهما عراقي

(c) الطالبان من قارة آسيا

2-3 مبرهنة ذي الحدين بأسس صحيحة موجبة (Binomial theorem)

1-2-3 المقدمة

سبق ان تعلمنا في المرحلة المتوسطة ان القوة الثانية للمقدار ذي الحدين $a + b$ هي² $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
وعرفنا:-

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

وعندما نحتاج الى القوة الثالثة للمقدار ذاته أي $(a + b)^3$ فإننا نتبع الطريقة الآتية:-

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

وباستخدام اسلوب الضرب المتكرر نحصل على القوة الرابعة والخامسة وغيرها حيث نحصل على:-
يسمي الطرف اليمين لكل واحدة من المتساويات السابقة ((مفكوك ذي الحدين)) للاس 1 أو 2 أو 3 ... الخ.

إذا طلب منا مثلاً أيجاد مفكوك $(a + b)^{100}$ فإننا نجد ان طريقة الضرب المتكرر التي اتبعناها فيما سبق تصبح غير ذات جدوى لكونها تحتاج الى وقت طويل وجهد كبير وكمية كبيرة من الوراق، وقد حاول علماء الرياضيات عبر التاريخ البحث عن طريقة ميسرة لإيجاد مفكوك ذي الحدين.

2-2-3 ايجاد مفكوك ذي الحدين $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ وكان $a, b \in \mathbb{R}$ فان:-

$$\begin{aligned} 1) (a + b)^n &= C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n \\ 2) (a - b)^n &= C_0^n a^n b^0 - C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 - \dots + C_n^n a^0 b^n \end{aligned}$$

ملاحظات :-

1) ان عدد الحدود يزيد واحداً على اس القوس ذي الحدين اي ان عدد حدود المفكوك يساوي $n + 1$ فمفكوك القوة الثانية يحتوي على ثلاثة حدود ومفكوك القوة الرابعة يحتوي على خمسة حدود ... وهكذا.

2) ان اس الحد الاول واس الحد الاخير يساوي اس القوس ذي الحدين، لاحظ المثالين الآتيين:-

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

3) ان اس a ينقص واحداً عن اس a في الحد الذي يسبقه بينما اس b يزيد بمقدار واحد عن اس b في الحد الذي يسبقه اي ان اسس a تنازليّة من n الى 0 واسس b تصاعديّة من 0 الى n .

4) ان مجموع اسي a, b في اي حد يساوي اس المقدار ذي الحدين وهو n .

5) في مفكوك $(a - b)^n$ تكون اشارة الحد الاول موجبة واشارة الحد الثاني سالبة وتعاقب الاشارات بهذا الترتيب في بقية حدود المفكوك.

6) اذا كان n عدداً زوجياً فان عدد حدود المفكوك يكون فردياً ورتبة الحد الاوسط تصبح $\frac{n}{2} + 1$ واذا كان n عدداً فردياً فان عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وتكون رتبة الحدين الاوسطين

$$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1 \right)$$

مثال 26 جد مفوك 5 $(2 + x)^5$

$$\begin{aligned}
 (2 + x)^5 &= C_0^5 2^5 x^0 + C_1^5 2^{5-1} x^1 + C_2^5 2^{5-2} x^2 + C_3^5 2^{5-3} x^3 \\
 &\quad + C_4^5 2^{5-4} x^4 + C_5^5 2^{5-5} x^5 \\
 &= C_0^5 2^5 x^0 + C_1^5 2^4 x^1 + C_2^5 2^3 x^2 + C_3^5 2^2 x^3 + C_4^5 2^1 x^4 \\
 &\quad + C_5^5 2^0 x^5 \\
 &= 1 \times 32 \times 1 + 5 \times 16 \times x + 10 \times 8 \times x^2 + 10 \times 4 \times x^3 \\
 &\quad + 5 \times 2 \times x^4 + 1 \times 1 \times x^5 \\
 &= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5
 \end{aligned}$$

مثال 27

جد مفوك 5 $(1 - \sqrt{x})^5$

$$\begin{aligned}
 (1 - \sqrt{x})^5 &= C_0^5 1^5 (\sqrt{x})^0 - C_1^5 1^{5-1} (\sqrt{x})^1 + C_2^5 1^{5-2} (\sqrt{x})^2 \\
 &\quad - C_3^5 1^{5-3} (\sqrt{x})^3 + C_4^5 1^{5-4} (\sqrt{x})^4 - C_5^5 1^{5-5} (\sqrt{x})^5 \\
 &= C_0^5 1^5 x^0 - C_1^5 1^4 (\sqrt{x})^1 + C_2^5 1^3 (\sqrt{x})^2 - C_3^5 1^2 (\sqrt{x})^3 \\
 &\quad + C_4^5 1^1 (\sqrt{x})^4 - C_5^5 1^0 (\sqrt{x})^5 \\
 &= 1 \times 1 \times 1 - 5 \times 1 \times \sqrt{x} + 10 \times 1 \times x - 10 \times 1 \times x\sqrt{x} \\
 &\quad + 5 \times 1 \times x^2 - 1 \times 1 \times x^2\sqrt{x} \\
 &= 1 - 5\sqrt{x} + 10x - 10x\sqrt{x} + 5x^2 - x^2\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

مثال 28

جد قيمة المقدار $(101)^3$

$$\begin{aligned}
 (101)^3 &= (1 + 100)^3 \\
 &= C_0^3 1^3 (100)^0 + C_1^3 1^2 (100)^1 + C_2^3 1^1 (100)^2 + C_3^3 1^0 (100)^3 \\
 &= 1 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times 100 + 3 \times 1 \times 10000 + 1 \times 1 \times 1000000 \\
 &= 1 + 300 + 30000 + 1000000 \\
 &= 1030301
 \end{aligned}$$

3-2-3 ايجاد الحد العام في مفهوك $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

لو تمعنا في مفهوك مبرهنة ذي الحدين لوجدنا ان الحد العام (اي الحد الذي تسلسه) هو :-

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

مثال 29

جد الحد الخامس في مفهوك $(a + b)^{10}$

الحل

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_5 = C_{5-1}^{10} a^{10-5+1} b^{5-1}$$

$$T_5 = C_4^{10} a^6 b^4$$

$$T_5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} a^6 b^4$$

$$T_5 = 210 a^6 b^4$$

مثال 30

جد الحد الرابع في مفهوك $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^5$ حيث $x \neq 0$

الحل

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_4 = C_{4-1}^5 \left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-4+1} (-2x)^{4-1}$$

$$T_4 = C_3^5 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 (-2x)^3$$

$$T_4 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{x^4}\right) (-8x^3)$$

$$T_4 = -80 \frac{x^3}{x^4}$$

$$T_4 = \frac{-80}{x}$$

مثال 31

برهن ان مفهوك المقدار الاتي فيه حد يحتوي x^{15} ثم جد معامله.

$$\left(x^2 + \frac{2}{x^3} \right)^{10}$$

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_r = C_{r-1}^{10} (x^2)^{10-r+1} \left(\frac{2}{x^3} \right)^{r-1}$$

نغض النظر عن المعاملات العددية في الخطوة الاتية:-

$$x^{15} = (x^2)^{11-r} (x^{-3})^{r-1}$$

$$x^{15} = x^{22-2r} x^{-3r+3}$$

$$x^{15} = x^{25-5r}$$

$$15 = 25 - 5r$$

$$5r = 10$$

$$r = 2$$

اي ان الحد الذي يحتوي x^{15} هو الحد الثاني وعليه فان:-

$$T_2 = C_{2-1}^{10} (x^2)^{10-2+1} \left(\frac{2}{x^3} \right)^{2-1}$$

$$T_2 = C_1^{10} (x^2)^9 \left(\frac{2}{x^3} \right)$$

$$T_2 = 10 \times x^{18} \times \left(\frac{2}{x^3} \right)$$

$$T_2 = 20x^{15}$$

اي ان المعامل العددي للحد هو 20 .



4-2-3 ايجاد الحد الاوسط او الحدين الاوسطين في مفهوك $(a + b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

كما اوردنا في الملاحظات السابقة فإنه:-

- إذا كان n عدداً زوجياً فان عدد حدود المفهوك يكون فردياً ورتبة الحد الاوسط تصبح $\frac{n}{2} + 1$.
- إذا كان n عدداً فردياً فان عدد حدود المفهوك يكون زوجياً وتكون رتبة الحد بين الاوسطين $\cdot \left(\frac{n+1}{2} \right), \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right)$.

مثال 32

جد الحد الاوسط في مفهوك $(a + b)^6$

الحل

رتبة الحد الاوسط في المفهوك هي :-

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$$

اي ان الحد الاوسط هو الحد الرابع

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_4 = C_{4-1}^6 a^{6-4+1} b^{4-1}$$

$$T_4 = C_3^6 a^3 b^3$$

$$T_4 = 20 a^3 b^3$$

مثال 33

جد الحدين الاوسطين في مفهوك $\left(\frac{3x}{2} - \frac{2}{3x} \right)^7$

الحل

رتبتا الحدين الاوسطين في المفهوك هي:-

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{n+1}{2} + 1 = \frac{7+1}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$$

اي ان الحدين الاوسطين هما الحدان الرابع والخامس.

$$T_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_4 = C_{4-1}^7 \left(\frac{3x}{2} \right)^{7-4+1} \left(\frac{-2}{3x} \right)^{4-1}$$

$$T_4 = C_3^7 \left(\frac{3x}{2} \right)^4 \left(\frac{-2}{3x} \right)^3$$

تكميلة

$$T_4 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{81x^4}{16} \times \frac{-8}{27x^3}$$

$$T_4 = \frac{-105}{2} x$$

$$T_5 = C_{5-1}^7 \left(\frac{3x}{2}\right)^{7-5+1} \left(\frac{-2}{3x}\right)^{5-1}$$

$$T_5 = C_4^7 \left(\frac{3x}{2}\right)^3 \left(\frac{-2}{3x}\right)^4$$

$$T_5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{27x^3}{8} \times \frac{16}{81x^4}$$

$$T_5 = \frac{70}{3x}$$

مثال 34

اختصر المقدار $(2+x)^4 + (2-x)^4$ ثم جد قيمة المقدار

$$(2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4$$

الحل

$$(2+x)^4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

$$(2-x)^4 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5$$

بالجمع

$$\begin{aligned} (2+x)^4 + (2-x)^4 &= 2[T_1 + T_3 + T_5] \\ &= 2[2^4 + C_2^4 2^2 x^2 + x^4] \\ &= 2[16 + 24x^2 + x^4] \\ &= 32 + 48x^2 + 2x^4 \end{aligned}$$

ولإيجاد قيمة المقدار: - نعرض

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4 &= 32 + 48 \times 3 + 2 \times 9 \\ &= 194 \end{aligned}$$

تمرين (2-3)

1. جد مفكوك كلاً مما يأتي :-

a) $(a - b)^3$

b) $(1 + x)^4$

c) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7 ; x > 0$

d) $\left(\frac{1}{x} + x\right)^6 ; x \neq 0$

2. جد الحد الثامن في مفكوك: $\cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

3. جد الحد الأوسط في مفكوك: $\cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^{14}$

4. جد الحدين الأوسطين في مفكوك: $\cdot \left(3x^2 - \frac{2}{3x}\right)^5$

5. جد الحد الخلالي من x في مفكوك: $\cdot \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

6. جد قيمة المقدار: $\cdot (x + \sqrt{3})^4 + (x - \sqrt{3})^4$

7. جد قيمة المقدار $6(0.99)^6$ باستخدام مبرهنة القوس ذي الحدين.

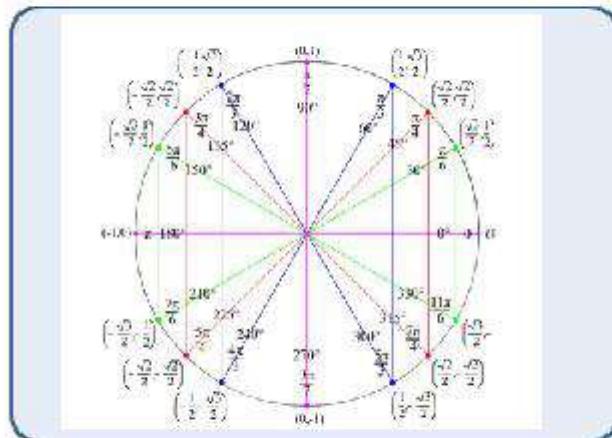
8. جد الحد الاخير في مفكوك: $\cdot (1 + x^n)^5$

9. إذا علمت ان الحدين الأوسطين في مفكوك $7(5x + 4y)$ متساويان فما هي العلاقة بين x, y

10. برهن انه لا يوجد حد خال من x في مفكوك المقدار $19(5x - \frac{4}{x^2})$



الفصل الرابع



الدوال الدائرية

**الفصل الرابع
الدوال الدائرية
(Circular Functions)**

البنود
(SECTIONS)

مراجعة وتعزيز لما درسه الطالب في الصف الأول	1-4
زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض	2-4
الدوال الدائرية لمجموع او الفرق بين دالتين	3-4
الدوال الدائرية لضعف الزاوية	4-4
الدوال الدائرية لنصف الزاوية	5-4
حل المثلث	6-4
المعادلات المثلثية	7-4

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>sine</i>	$\sin \theta$	جيب الزاوية
<i>cosine</i>	$\cos \theta$	جيب تمام الزاوية
<i>tangent</i>	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	ظل الزاوية
<i>cosecant</i>	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	قاطع تمام الزاوية
<i>secant</i>	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	قاطع الزاوية
<i>cotangent</i>	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	ظل تمام الزاوية
<i>alfa</i>	α	الزاوية ألفا
<i>beta</i>	β	الزاوية بيتا

تعلمنا سابقاً :-

- مفهوم الزاوية الموجة بالوضع القياسي ومفهوم دائرة الوحدة.
- التمييز بين نظامي قياس الزاوية الستيني والدائري وكيفية التحويل من نظام لأخر.
- النسب المثلثية ومقولاتها لزوايا حادة.
- بعض العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية.
- استعمال الحاسبة الإلكترونية اليدوية في إيجاد قيم النسب المثلثية.
- إيجاد النسب المثلثية لزوايا خاصة.
- رسم المخطط البياني للدوال $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$.
- مفهوم الزاوية الموجة بالوضع القياسي ومفهوم دائرة الوحدة.

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مراجعة المعلومات التي درسناها في الصف الأول الصناعي.
- حل المثلث باستخدام قانوني الجيب والجيب تمام
- مفهوم زوايا الارتفاع والانخفاض واستخدامه في حل مسائل عملية
- قوانين الدوال الدائرية لمجموع او الفرق بين قياسي زاويتين
- قوانين الدوال الدائرية لضعف الزاوية
- قوانين الدوال الدائرية لنصف الزاوية
- كيفية حل المعادلات المثلثية

الفصل الرابع

الدوال الدائرية

(Circular Functions)

1-4 مراجعة وتعزيز

عرفنا في دراستنا السابقة الدوال الدائرية \sin , \cos , \tan باستخدام هذه الدوال يمكننا أن نعرف دوالاً أخرى وذلك كما يأتي:

1-1-4 دالة ظل التمام (\cot)

الدالة [Cotangent] ظل تمام ويرمز لها \cot وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة \tan (ظل)

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

أي أن:

: **\cot دالة**

$$\cot : \{ \theta : \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} : \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

أي أن الدالة \cot تعرف لكل الأعداد الحقيقية بشرط ($\sin \theta \neq 0$)

2-1-4 تعريف دالة القاطع (\sec)

الدالة [secant] (قاطع) ويرمز لها \sec وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة \cos (جيب تمام)

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

: **\sec دالة**

$$\sec : \{ \theta : \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} : \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

أي أن الدالة \sec تعرف لكل الأعداد الحقيقية بشرط ($\cos \theta \neq 0$)

3-1-4 تعريف دالة القاطع التمام (\csc)

الدالة [cosecant] (القاطع التمام) ويرمز لها \csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

: **\csc دالة**

$$\csc : \{ \theta : \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} : \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

أي أن الدالة \csc تعرف لكل الأعداد الحقيقية بشرط $(\sin \theta \neq 0)$

4-1-4 العلاقات بين الدوال الدائرية

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

ملاحظة :-

$$\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$$

$$\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$$

وهكذا بالنسبة للدوال الدائرية الأخرى
اشتقاق العلاقات أعلاه

1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

لقد سبق اشتقاقها في دراستنا السابقة

2) $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

البرهان:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\div \cos^2 \theta)$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \quad \text{و. هـ. م}$$

3) $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$

البرهان:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\div \sin^2 \theta)$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \quad \text{و. هـ. م}$$

مثال 1

إذا كان : $\cot \theta = \frac{4}{3}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ أو $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$)

جد قيم الدوال الدائرية الخمسة الأخرى أي قيم كل من: $(\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta, \sec \theta, \csc \theta)$

1) $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

الحل

$$\tan \theta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$$

تكميلة

$$2) \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{9+16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\therefore \csc^2 \theta = \frac{25}{9}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{\csc^2 \theta} = \sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow \csc \theta = \pm \frac{5}{3}$$

$$\therefore 0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \therefore \csc \theta = \frac{5}{3}$$

$$3) \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\sec^2 \theta = \frac{25}{16}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{\sec^2 \theta} = \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\sec \theta = \pm \frac{5}{4}$$

$$\therefore 0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \therefore \sec \theta = \frac{5}{4}$$

$$4) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} = 1 \times \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$5) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Leftrightarrow \sin \theta = \cos \theta \tan \theta$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$$

مثال 2

$$\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta) = \cos^2 \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

$$L.H.S = \sin \theta (\csc \theta - \sin \theta)$$

الحل

$$= \sin \theta \csc \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta = R.H.S$$

مثال 3

$$\cot^2 \theta \sec^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \quad \text{أثبت أن:}$$

الحل

$$\begin{aligned} L.H.S &= \cot^2 \theta \sec^2 \theta - \cot^2 \theta \\ &= \cot^2 \theta (\sec^2 \theta - 1) \\ &= \cot^2 \theta \tan^2 \theta \\ &= \frac{1}{\tan^2 \theta} \times \tan^2 \theta = 1 = R.H.S \end{aligned}$$

5-1-4 قيم الدوال الدائرية التي قياسها ($-\theta$)

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\csc(-\theta) = -\csc \theta$

مثال 4

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin(-\theta) \cos \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

الحل

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ R.H.S &= 1 + 2 \sin(-\theta) \cos \theta \\ &= 1 + 2(-\sin \theta) \cos \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ \therefore L.H.S &= R.H.S \end{aligned}$$

6-1-4 قيم الدوال الدائرية للزوايا ($90^\circ n \pm \theta$)

حيث n عدد صحيح غير سالب، قياس لزاوية حادة

1 - الدوال الدائرية للزوايا ($90^\circ \pm \theta$) تتحول الدوال الدائرية للزوايا إلى متمماتها وبالعكس مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربع أي:

$\sin(90^\circ \pm \theta) = +\cos \theta$
$\cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$
$\tan(90^\circ \pm \theta) = \mp \cot \theta$
$\cot(90^\circ \pm \theta) = \mp \tan \theta$
$\sec(90^\circ \pm \theta) = \mp \csc \theta$
$\csc(90^\circ \pm \theta) = +\sec \theta$

2- الدوال الدائرية للزوايا ($270^\circ \pm \theta$) نفس الحالة الأولى مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربع أي:

$\sin(270^\circ \pm \theta) = -\cos \theta$
$\cos(270^\circ \pm \theta) = \pm \sin \theta$
$\tan(270^\circ \pm \theta) = \mp \cot \theta$
$\cot(270^\circ \pm \theta) = \mp \tan \theta$
$\sec(270^\circ \pm \theta) = \pm \csc \theta$
$\csc(270^\circ \pm \theta) = -\sec \theta$

مثال 5

جد $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ إذا كان: $4 \cos^2 75^\circ$

الحل

$$75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) \quad \therefore \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$$

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$$

$$(\cos 75^\circ)^2 = (\sin 15^\circ)^2 \quad \text{بتربيع طرفي}$$

$$\cos^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ \quad \text{نضرب طرفي المعادلة بالعدد 4}$$

$$4 \cos^2 75^\circ = 4 \sin^2 15^\circ$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^2 = 4 \frac{2-\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

مثال 6

جد $\cos 315^\circ, \sin 150^\circ$

الحل

$$1) 150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2) 315^\circ = 270^\circ + 45^\circ$$

$$\cos 315^\circ = \cos(270^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 - الدوال الدائرية للزوايا ($180^\circ \pm \theta$) تبقى الدوال الدائرية نفسها مع ملاحظة الإشارة في الأربع
الأربعة أي:

$\sin(180^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$
$\cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos \theta$
$\tan(180^\circ \pm \theta) = \pm \tan \theta$
$\cot(180^\circ \pm \theta) = \pm \cot \theta$
$\csc(180^\circ \pm \theta) = \mp \csc \theta$
$\sec(180^\circ \pm \theta) = -\sec \theta$

4 - الدوال الدائرية للزوايا ($360^\circ \pm \theta$) نفس الحالة الثالثة مع ملاحظة الإشارة في الأربع الأربعة أي:

$\sin(360^\circ \pm \theta) = \pm \sin \theta$
$\cos(360^\circ \pm \theta) = +\cos \theta$
$\tan(360^\circ \pm \theta) = \pm \tan \theta$
$\cot(360^\circ \pm \theta) = \pm \cot \theta$
$\csc(360^\circ \pm \theta) = \pm \csc \theta$
$\sec(360^\circ \pm \theta) = +\sec \theta$

مثال 7

جد $\cos 315^\circ, \sin 150^\circ$

الحل

1) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

2) $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$

$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال 8

جد $\tan(-300^\circ), \cos(-240^\circ)$

الحل

1) $\cos(-240^\circ) = \cos(240^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos(180^\circ + 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) $\tan(-300^\circ) = -\tan 300^\circ$

$$\begin{aligned} &= -\tan(360^\circ - 60^\circ) \\ &= -(-\tan 60^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

تمارين (1-4)

$$1. \text{ اذا كان } \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi, \text{ بحيث } \cot \theta = -\frac{9}{40}$$

جد قيم الدوال الدائرية الخمسة الأخرى ($\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta, \sec \theta, \csc \theta$)

2. أثبت صحة المتطابقات الآتية :-

$$1) \sin^2 \theta \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$2) \sec \theta - \frac{\tan^2 \theta}{\sec \theta} = \cos \theta$$

$$3) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \sec \theta$$

$$4) (\sec \theta + 1) [\sec(-\theta) - 1] = \tan^2 \theta$$

$$5) \csc \theta + \cot \theta = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$6) 2 \tan \theta \sec \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$7) \frac{\sec \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\sec \theta} = \frac{\tan^2 \theta + \cos^2 \theta}{\tan \theta}$$

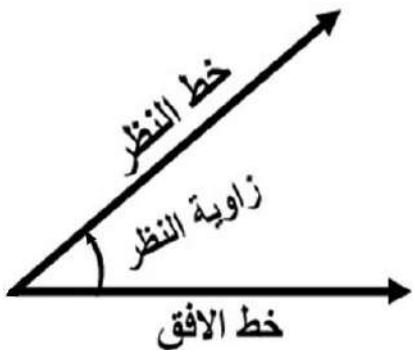
$$8) \frac{\cos \theta}{1 + \sec \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\tan^2 \theta}$$

3. جد قيم كلًّا مما يأتي :-

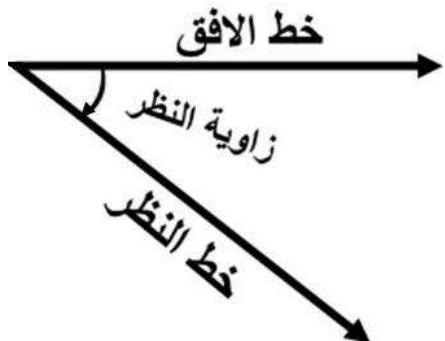
$$\cos(-300^\circ), \sin(-240^\circ), \sec 210^\circ, \tan 330^\circ, \sin 420^\circ$$

2-4 زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

زاوية الارتفاع: هي زاوية النظر الى الاعلى من فوق خط الأفق. (لاحظ الشكل المجاور)



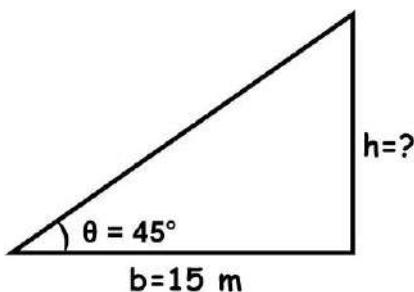
زاوية الانخفاض: هي زاوية النظر الى الاسفل من تحت خط الأفق. (لاحظ الشكل المجاور)



مثال 9

من نقطة تبعد عن قاعدة عمود كهرباء بـ (15 m) وجد أن زاوية ارتفاع قمته (45°) جد ارتفاع العمود الكهربائي؟

الحل



$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{ارتفاع عمود الكهرباء}}{\text{بعد النقطة عن قاعدة العمود}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{15} \Rightarrow 1 = \frac{h}{15}$$

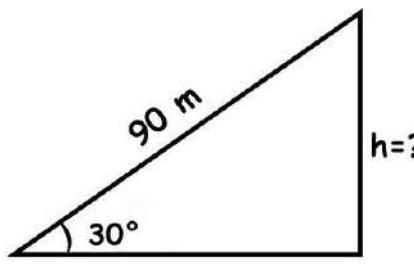
وباستخدام خواص التناسب (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين) نتوصل إلى:

$$h = 15 m.$$

مثال 10

طائرة ورقية طول خيطها (90m) والزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض تساوي (30°) جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض؟

الحل

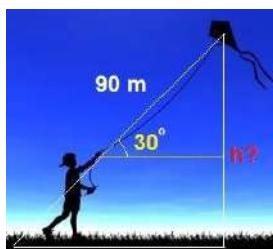


$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{90}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{90}$$

وباستخدام خواص التناسب (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين) نتوصل إلى:



$$2h = 90$$

$$\frac{2h}{2} = \frac{90}{2}$$

$$h = 45 m.$$

مثال 11

شخص واقف على سطح منزل ارتفاعه (6 m) رصد طيراً على حافة قمة عمارة وعندهما نظر إلى قاعدة العمارة لاحظ طفلاً يراقب الطير جد بعد العمارة عن المنزل وارتفاعها؟ إذا كان زاوية ارتفاع قمة العمارة (60°) وزاوية انخفاض قاعدة العمارة (45°).

الحل

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{6}{b}$$

$$1 = \frac{6}{b}$$

$$b = 6 m$$

تملأة

$$2 \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{ال المجاور}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{b}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{6}$$

$$h = 6\sqrt{3} = 6 \times 1.7$$

ارتفاع العمارة عن سطح المنزل m

ارتفاع العمارة عن سطح المنزل + ارتفاع المنزل = ارتفاع العمارة

$$H = 6 + h$$

$$H = 6 + 10.2 = 16.2 m.$$

تمارين(4-2)

- وقف شخص على قمة منذنة ملوية سامراء أبصر صديقين من اصدقائه يقانن مع قاعدة المنذنة على استقامة واحدة وكانت زاوية انخفاض الصديق الاول (30°) وزاوية انخفاض الصديق الثاني (60°) جد المسافة بين الصديقين ؟ مع العلم ارتفاع المنذنة ($52 m.$)
- وجد من موقع على سطح الارض يبعد عن قاعدة برج اتصالات بغداد أن زاوية ارتفاع قمتها (37°) وزاوية ارتفاع مطعم البرج (37°) وارتفاع البرج ($205 m.$) جد بعد الموقع عن قاعدة البرج والمسافة بين المطعم وقمة البرج ؟
- طائرة مقاتلة على ارتفاع ($100 000 ft.$) رصدت هدفين معدبين على مستوى واحد على سطح الارض الاول بزاوية انخفاض (30°) والثانية بزاوية انخفاض (45°) جد بعد الطائرة عن الهدفين؟ علماً أن $\sqrt{3} = 1.732$ ، $\sqrt{2} = 1.414$
- شاهد صياد طيراً على شجرة نخيل فصوب ببندقية مقدارها (30°) ولم يصب ثم تقدم بمسافة ($20 m.$) وصوب بزاوية مقدارها (60°) فأصاب الطير ، جد ارتفاع الشجرة ؟

3- 4 الدوال الدائرية لمجموع أو لفرق قياس زاويتين :

نبحث في هذا البند دوال مثل:

$$\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta), \tan(\alpha \pm \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α alpha (الف) , β beta (بيتا)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

أولاً:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

ثانياً:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}, \tan \alpha \tan \beta \neq \pm 1$$

ثالثاً:

مثال 12

احسب قيمة كلًّا مما يأتي :-

$$\sin 75^\circ, \cos 15^\circ, \tan 105^\circ$$

الحل

1) $\sin 75^\circ$

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

2) $\cos 15^\circ$

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

الطريقة الأولى:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$$

الطريقة الثانية:

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

3) $\tan 105^\circ$

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

تملأ

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(60^\circ + 45^\circ) &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \\ \therefore \tan 105^\circ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

مثال 13

أثبت أن :-

$$\sin 115^\circ \cos 25^\circ - \cos 115^\circ \sin 25^\circ = 1$$

الحل

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}L.H.S &= \sin 115^\circ \cos 25^\circ - \cos 115^\circ \sin 25^\circ \\ &= \sin(115^\circ - 25^\circ) \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1 \quad = R.H.S\end{aligned}$$

مثال 14

جد قيمة α اذا علمت ان :-

$$\frac{\tan 2\alpha - \tan \alpha}{1 + \tan 2\alpha \tan \alpha} = \sqrt{3}$$

الحل

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

بمقارنة الطرف الأيمن من القانون مع الطرف الأيسر من السؤال نحصل على

$$\tan(2\alpha - \alpha) = \sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \alpha > 0$$

 $\therefore \alpha$ تقع اما في الربع الاول او في الربع الثالث

$$\therefore \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \tan \alpha = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ + 60^\circ \\ &= 240^\circ\end{aligned}$$

-1- في الربع الاول

-2- في الربع الثالث

$$S.S = \{60^\circ, 240^\circ\}$$

تمارين (3-4)

1. احسب قيمة كلًّا مما يأتي :-

$$\sin 15^\circ, \cos 105^\circ, \cos 135^\circ, \tan 75^\circ$$

2. اثبت كلًّا مما يأتي :-

$$a) \cos 183^\circ \cos 153^\circ + \sin 183^\circ \sin 153^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \frac{\tan 27^\circ + \tan 18^\circ}{1 - \tan 27^\circ \tan 18^\circ} = 1$$

$$c) \cos(120^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

4-4 الدوال الدائرية لضعف الزاوية

لكل عدد حقيقي α فإن :-

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال 15

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad \sin \alpha = \frac{5}{8} \quad \text{أوجد } \cos 2\alpha \text{ إذا علمت أن : -}$$

الحل

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 1 - 2 \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{25}{64} = 1 - \frac{25}{32} \\ &= \frac{32 - 25}{32} = \frac{7}{32} \end{aligned}$$

مثال 16

$$\sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ \quad \text{جد قيمة المقدار . -}$$

الحل

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

تكميلة

$$\begin{aligned} \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ &= \frac{\sin 2(22.5^\circ)}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مثال 17

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

أثبت أن :-

الحل

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$$

$$L.H.S = \cos(3\alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

مثال 18

$$\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$$

$$0 < 2\alpha < 90^\circ, \cos(2\alpha) = \frac{7}{25}$$

إذا كان

الحل

1) $\sin\alpha$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\frac{7}{25} = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{25} = \frac{25 - 7}{25} = \frac{18}{25}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{18}{25}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm \frac{3}{5}$$

تنتمي الى الربع الأول $\cos(2\alpha) ::$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

2) $\cos\alpha$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\frac{7}{25} = 2\cos^2\alpha - 1$$

تكميلة

$$2\cos^2\alpha = 1 + \frac{7}{25} = \frac{25+7}{25}$$

$$2\cos^2\alpha = \frac{32}{25}$$

$$\frac{2}{2}\cos^2\alpha = \frac{32}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{32}{2 \times 25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{4}{5}$$

تنتمي الى الربع الأول $\cos(2\alpha) \therefore$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

3) $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال 19

اثبت أن :-

الحل

$$\begin{aligned} L.H.S &= \csc(2\alpha) = \frac{1}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \csc\alpha \sec\alpha \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

ćمارين (4-4)

1. جد قيمة كلاً من :-

$\sin(2\alpha), \cos(2\alpha), \tan(2\alpha)$ إذا كان

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ بحيث } \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

2. جد قيمة كلاً من :-

$\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ إذا كان

$$0 < 2\alpha < 90^\circ \text{ بحيث } \cos(2\alpha) = \frac{24}{25}$$

3. اوجد قيمة المقدار :-

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$$

4. اوجد قيمة المقدار :-

$$\frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$$

5. اثبت أن :-

$$1 - \sin^2(2\alpha) = 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha$$

6. اثبت أن :-

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \tan 2\alpha$$

7. اثبت أن :-

$$\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = 2 \csc(2\alpha)$$

8. اثبت أن :-

$$\frac{\cos(2\alpha)}{\sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha - 1$$

4- الدوال الدائرية لنصف الزاوية:

أولاً :

$$\sin \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \in R$$

$$\text{Either } \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Or } \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

ثانياً :

$$\cos \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \in R$$

$$\text{Either } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Or } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

ثالثاً:

$$\tan \frac{\alpha}{2} , \quad \alpha \in R$$

$$Either \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$Or \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin 15^\circ$$

مثال 20 جد

الحل

$$15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\therefore \sin 15^\circ = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

مثال 21

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha \quad \text{اثبت أن: -}$$

الحل

$$L.H.S = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \cos \alpha}{2}$$

$$= \cos \alpha \\ = R.H.S$$

مثال 22

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} , \quad \cos \alpha = -\frac{7}{25}$$

عندما $\sin \frac{\alpha}{2}$ جد

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ عندما في الربع الثالث فإن:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \quad \text{أي:}$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} > 0 , \quad \cos \frac{\alpha}{2} < 0$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{25 + 7}{25}} = \sqrt{\frac{32}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{32}{25} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{25 - 7}{25}} = -\sqrt{\frac{18}{25}} \\ &= -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

ćمارين (5-4)

$$\cos 15^\circ , \quad \tan 15^\circ , \quad \sin 22^\circ 30' \quad \text{ج. 1}$$

2. اثبت كل ما يأتي :-

a) $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{4}\right) = \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b) $2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = \cos \alpha$

6-4 حل المثلث

يقصد بحل المثلث ايجاد العناصر المجهولة من معرفة عناصر معلومة فيه. للمثلث ستة عناصر وهي ثلاثة زوايا وثلاثة أضلاع ، لحله يجب معرفة ثلاثة عناصر من العناصر الستة.

لحل المثلث طرق مختلفة لكن في هذا الفصل نقتصر على طريقتين

الطريقة الاولى: باستخدام قانون الجيب (sines)

الطريقة الثانية: باستخدام قانون جيب التمام (cosines)

وفيما يأتي شرح لكل طريقة مع الامثلة والتمارين :

6-1 الطريقة الاولى: لحل المثلث بهذه الطريقة نستخدم القانون التالي ويسمى قانون الجيب sines

$$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$$

حيث :-

A, B, C رموز لرؤوس أو زوايا المثلث $A' B' C'$ رموز لأضلاع المثلث $A' B' C'$ ، وهي تقابل الزوايا اعلاه على الترتيب.

مثال 23

حل المثلث $A' B' C'$ الذي فيه :-

$$A' = 2 \text{ cm.}, \quad m\hat{A}' = 105^\circ, \quad m\hat{B}' = 30^\circ$$

الحل

حيث ان مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$ أي :-

$$m\hat{A}' + m\hat{B}' + m\hat{C}' = 180^\circ$$

$$m\hat{A}' + 30^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{A}' + 135^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{A}' = 180^\circ - 135^\circ$$

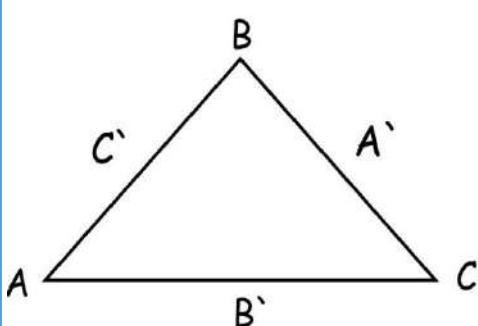
$$m\hat{A}' = 45^\circ.$$

و. ه . م.

$$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{B'}{\sin 30^\circ} = \frac{C'}{\sin 105^\circ}$$

نجد قيم النسب المثلثية من جدول قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة



تملأ

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\mathcal{B}^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\mathcal{B}^\circ}{\frac{1}{2}}$$

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \mathcal{B}^\circ \times \frac{2}{1} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\mathcal{B}^\circ \Rightarrow \mathcal{B}^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$\mathcal{B}^\circ = \sqrt{2} \text{ cm.}$

و . ه . م . 2.

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\mathcal{C}^\circ}{\sin 105^\circ}$$

 $\sin 105^\circ$

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{قانون}$$

$$\sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

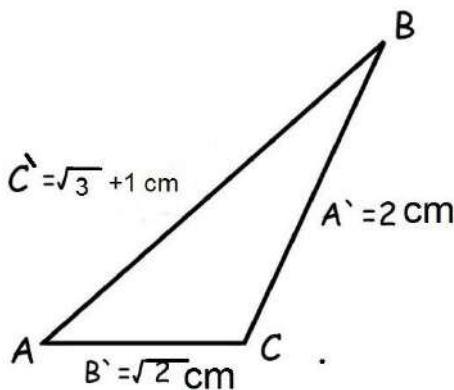
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\mathcal{C}^\circ}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \mathcal{C}^\circ \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}\mathcal{C}^\circ}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow 2\sqrt{2}\mathcal{C}^\circ = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}^\circ = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3} + 1) \text{ cm.} \quad \text{و . ه . م . 3.}$$



مثال 24

حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$B' = 24 \text{ cm.} , \quad m\hat{A} = 35^\circ , \quad m\hat{B} = 80^\circ$$

الحل

حيث ان مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$ اي :-

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$35^\circ + 80^\circ + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$115^\circ + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$m\hat{C} = 180^\circ - 115^\circ$$

$$m\hat{C} = 65^\circ.$$

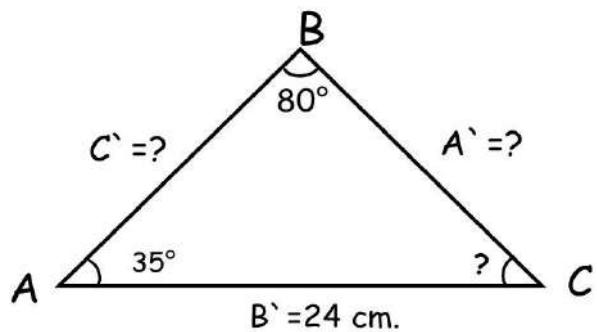
و. ه. م.

$$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$$

$$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B}$$

$$\frac{A'}{\sin 35^\circ} = \frac{24}{\sin 80^\circ}$$

$$A' \sin 80^\circ = 24 \sin 35^\circ$$



نجد قيم النسب المثلثية باستخدام الحاسبة اليدوية

$$\begin{aligned} A' &= \frac{24 \sin 35^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{24 \times 0.574}{0.985} \\ &= \frac{13.776}{0.985} \\ &= 13.985 \end{aligned}$$

$$A' \approx 14 \text{ cm.}$$

و. ه. م.

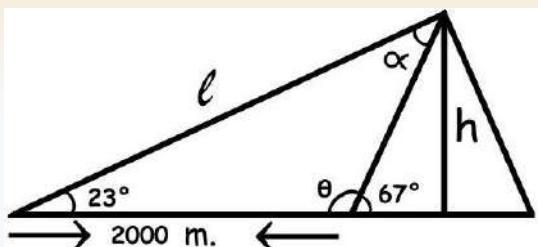
$$\begin{aligned} \frac{B'}{\sin B} &= \frac{C'}{\sin C} \\ \frac{24}{\sin 80^\circ} &= \frac{C'}{\sin 65^\circ} \\ C' \sin 80^\circ &= 24 \sin 65^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= \frac{24 \sin 65^\circ}{\sin 80^\circ} \\ &= \frac{24 \times 0.906}{0.985} \\ &= \frac{21.751}{0.985} = 22.08 \approx 22.1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

و. ه. م.

مثال 25

عربة حمل سياحية معلقة بسلك حديدي تحمل سائحين من موقع على مستوى سطح الأرض إلى موقع سياحي على قمة جبل كما هو موضح تفاصيلها في الشكل الآتي جد :-
أولاً طول السلك الحديدي ، ثانياً ارتفاع الجبل.



الحل

نجد أولاً قيمة الزاوية θ بين الجبل ومستوى سطح الأرض

زاوية اي مستقيم تساوي 180°

$$\theta + 67^\circ = 180^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 67^\circ$$

$$\theta = 113^\circ$$

والآن نجد قيمة الزاوية α

مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

$$\alpha + \theta + 23^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 113^\circ + 23^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 136^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 136^\circ$$

$$\alpha = 44^\circ$$

$$\frac{2000}{\sin x} = \frac{\text{طول السلك}}{\sin \theta}$$

$$\frac{2000}{\sin 44^\circ} = \frac{\ell}{\sin 113^\circ}$$

$$\ell \cdot \sin 44^\circ = 2000 \sin 113^\circ$$

$$\ell = \frac{2000 \times \sin 113^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{2000 \times 0.920504853}{0.69465837}$$

$$\ell = \frac{2000 \times 0.921}{0.695} = \frac{1842}{0.695} \simeq 2650 \text{ m.}$$

والآن نجد ارتفاع الجبل

$$\frac{\text{ارتفاع الجبل}}{\sin 23^\circ} = \frac{\text{طول السلك}}{\ell}$$

$$0.391 = \frac{h}{2650} \Rightarrow h = 0.391 \times 2650 \simeq 1035 \text{ m.}$$

تمارين (6-4)

1. حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$A' = \sqrt{6} \text{ in.}, \quad C' = 2 \text{ in.}, \quad \hat{m A} = 60^\circ$$

2. حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$A' = 39 \text{ mm.}, \quad \hat{m B} = 110^\circ, \quad \hat{m C} = 32^\circ$$

3. القمر الصناعي نايل سات يدور في مداره بالقرب من مدينة بغداد والحلة فإذا كانت المسافة بين المدينتين (100 km.) وزاويتا التقاط البث في بغداد (80°) وفي الحلة (55°). جد ارتفاع القمر الصناعي ؟

(2-6-4) الطريقة الثانية: لحل المثلث بهذه الطريقة نستخدم القانون التالي ويسمى قانون جيوب التمام (cosines)

$$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B'C' \cos A$$

$$B'^2 = A'^2 + C'^2 - 2A'C' \cos B$$

$$C'^2 = A'^2 + B'^2 - 2A'B' \cos C$$

حيث :- A, B, C تمثل رموز لزوايا المثلث $A B C$ ، $A' B' C'$ تمثل رموز لأضلاع المثلث $A B C$ وهي تقابل الزوايا اعلاه على الترتيب.

مثال 26 حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$A' = \sqrt{6} \text{ unit}, \quad B' = \sqrt{3} + 1 \text{ unit}, \quad C' = 2 \text{ unit}$$

الحل

نكتب القانون بالصيغة التالية لتسهيل الحل عند ايجاد الزاوية

$$\cos A = \frac{B'^2 + C'^2 - A'^2}{2B'C'}$$

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (2)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times (\sqrt{3} + 1) \times 2}$$

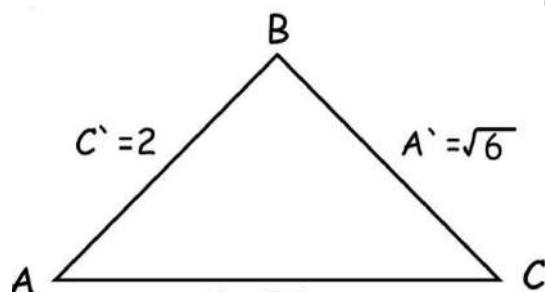
$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 6}{4(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \hat{m A} = 60^\circ$$

$$\cos C = \frac{A'^2 + B'^2 - C'^2}{2A'B'}$$

و.ه.م



تملة

$$\cos C = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (2)^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}+1)} = \frac{6 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$\left(\cos C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ أو } \left(\cos C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

و . ه . م

$$m\hat{C} = 45^\circ$$

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

$$60^\circ + m\hat{B} + 45^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} + 105^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} = 180^\circ - 105^\circ$$

$$m\hat{B} = 75^\circ$$

و . ه . م

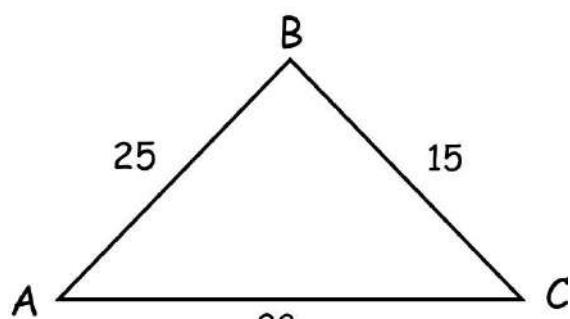
حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$A' = 15 \text{ unit} , \quad B' = 25 \text{ unit} , \quad c' = 28 \text{ unit}$$

مثال 27

الحل

$$\cos A = \frac{B'^2 + C'^2 - A'^2}{2 B' C'} \\ \cos A = \frac{25^2 + 28^2 - 15^2}{2 \times 25 \times 28} \\ = \frac{625 + 784 - 225}{1400} \\ = \frac{1184}{1400} = 0.845714285$$



$$m\hat{A} = 32.3^\circ$$

$$\cos C = \frac{A'^2 + B'^2 - C'^2}{2 A' B'} \\ = \frac{225 + 625 - 784}{2 \times 15 \times 25} = \frac{66}{750} = 0.088$$

$$m\hat{C} = 85^\circ$$

تملأ

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$32.3^\circ + m\hat{B} + 85^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} + 117.3^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} = 180^\circ - 117.3^\circ = 62.7^\circ$$

مثال 28

حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$m\hat{B} = 95^\circ , \quad A^\circ = 16 \text{ unit} , \quad C^\circ = 7 \text{ unit}$$

الحل

$$\begin{aligned} B^\circ &= A^\circ + C^\circ - 2A^\circ C^\circ \cos B \\ &= 16^2 + 7^2 - 2 \times 16 \times 7 \times \cos 95^\circ \\ &= 256 + 49 - 224 \times (-0.087) \\ &= 305 + 19.488 \\ &= 324.488 \\ B^\circ &\simeq 18 \text{ unit} \end{aligned}$$

و . م . 1.

$$A^\circ = B^\circ + C^\circ - 2B^\circ C^\circ \cos A$$

$$16^2 = 18^2 + 7^2 - 2 \times 18 \times 7 \times \cos A$$

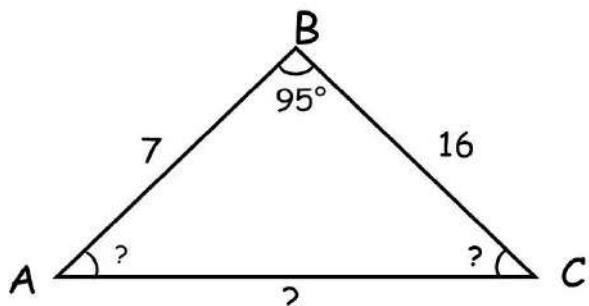
$$256 = 324 + 49 - 252 \cos A$$

$$252 \cos A = 373 - 256$$

$$252 \cos A = 117$$

$$\cos A = \frac{117}{252} = 0.464$$

$$m\hat{A} = 62.3^\circ$$



و . م . 2.

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$62.3 + 95 + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$m\hat{C} = 180^\circ - 157.3 = 22.7^\circ$$

و . م . 3.

تمارين (7-4)

1. حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$m\hat{B} = 25^\circ, \quad A^\circ = 12 \text{ cm.}, \quad c^\circ = 15 \text{ cm.}$$

2. حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$m\hat{A} = 95.7^\circ, \quad B^\circ = 3.2 \text{ cm.}, \quad c^\circ = 1.5 \text{ cm.}$$

3. حل المثلث $A B C$ الذي فيه :-

$$A^\circ = 18 \text{ cm.}, \quad B^\circ = 21 \text{ cm.}, \quad C^\circ = 10 \text{ cm.}$$

7-4 المعادلات المثلثية Triangles Equations

المعادلة المثلثية :- هي جملة مفتوحة تحتوي على دالة مثلثية أو أكثر لزاوية معينة أو لعدة زوايا بعضها تتحقق المعادلة والبعض الآخر لا تتحققها.

مثال 29

حل المعادلة الآتية :-

$$0 \leq x < 360^\circ, \quad \sin x - \frac{1}{2} = 0$$

الحل

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ بتطبيق العلاقة الآتية :-

$$\sin \theta = |\sin x|$$

$$\therefore \sin \theta = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$\because \sin x > 0$ (موجب)

$\therefore \hat{x}$ تقع اما في الربع الأول او في الربع الثاني

1) عندما تقع \hat{x} في الربع الأول فأن :

$$x = \theta$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

2) عندما تقع \hat{x} في الربع الثاني فأن

$$x = 180^\circ - \theta$$

$$x = 180^\circ - 30^\circ$$

$$x = 150^\circ$$

$$\therefore S.S = \{30^\circ, 150^\circ\}$$

مثال 30

حل المعادلة الآتية :-

$$0 \leq x < 360^\circ \text{ عندما } \cos x + \frac{1}{2} = 0$$

الحل

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ بتطبيق العلاقة الآتية :-

$$\cos \theta = |\cos x|$$

$$\cos \theta = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\because \cos x < 0 \text{ (سالب)}$$

\hat{x} تقع اما في الربع الثاني او في الربع الثالث

(1) عندما تقع \hat{x} في الربع الثاني فأن :

$$x = 180^\circ - \theta$$

$$x = 180^\circ - 60^\circ$$

$$x = 120^\circ$$

(2) عندما تقع \hat{x} في الربع الثالث فأن :

$$x = 180^\circ + \theta$$

$$x = 180^\circ + 60^\circ$$

$$x = 240^\circ$$

$$\therefore S.S = \{120^\circ, 240^\circ\}$$

مثال 31

إذا علمت أن $0 \leq x < 360^\circ$ حل المعادلة الآتية :-

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

الحل

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

$$(\sin x - 2)(2 \sin x + 1) = 0$$

$$\text{either } \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2$$

تهمل لأن $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{or } 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ باستخدام العلاقة التالية

$$\sin \theta = |\sin x|$$

$$\sin \theta = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

تملأة

$$\because \sin x < 0 \quad (\text{سالب})$$

$\therefore \hat{x}$ تقع اما في الربع الثالث أو في الربع الرابع

1- عندما تقع \hat{x} في الربع الثالث

$$x = 180^\circ + \theta$$

$$x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

2- عندما تقع \hat{x} في الربع الرابع

$$x = 360^\circ - \theta$$

$$x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

$$\therefore S.S = \{210^\circ, 330^\circ\}$$

تمارين (8-4)

حل المعادلات الآتية بحيث $0^\circ \leq x < 360^\circ$

$$1) 2 \cos x + \sqrt{2} = 0$$

$$2) \sqrt{3} \tan x - 1 = 0$$

$$3) 2 \cos x \sin x - \cos x = 0$$

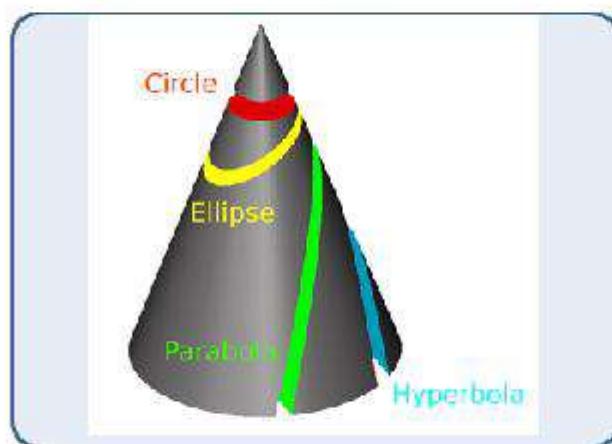
$$4) 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$5) 3 \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0$$

$$6) \sec^2 x - 6 \sec x = 16$$

$$7) \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

الفصل الخامس



القطوع المخروطية (الدائرة)

الفصل الخامس

القطوع المخروطية - الدائرة

(Conic sections-The circle)

البنود
(SECTIONS)

القطوع المخروطية	1-5
الدائرة	2-5
تعريف الدائرة كأحد القطوع المخروطية	1-2-5
معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل	3-5
معادلة الدائرة التي مركزها أي نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة)	4-5
تماس الدائرة مع المحورين الأحاديثين	5-5
معادلة الدائرة التي تمس مستقيماً معلوماً	6-5
الصيغة العامة لمعادلة الدائرة	7-5
علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة	8-5
علاقة مستقيم معلوم بدائرة معلومة	9-5
معادلة مماس الدائرة عند نقطة من نقاطها	10-5

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>Center</i>	$C(h, k)$	مركز الدائرة
<i>Radius</i>	r	نصف قطر الدائرة
<i>Point</i>	$P(x, y)$	النقطة في المستوى الإحداثي
<i>The standard equation Of the circle</i>	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة
<i>The general equation Of the circle</i>	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $h = \frac{-A}{2}, \quad k = \frac{-B}{2}$ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$	الصيغة العامة لمعادلة الدائرة
<i>The equation of the tangent of the circle</i>	$xx_1 + yy_1 - h(x + x_1) - k(y + y_1) + c = 0$	إيجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة التماس (x_1, y_1)

تعلمنا سابقاً :-

- قطر الدائرة هو قطعة المستقيم الواصلة بين أي نقطتين عليها وتمر بمركزها.
- وتر الدائرة هو قطعة المستقيم الواصلة بين أي نقطتين عليها ولا تمر بمركزها.
- مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف قطرها المرسوم من نقطة التماس.
- المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- بعد العمودي بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي
$$d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
- نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوى الإحداثي
$$C(x, y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
- ميل المستقيم في المستوى الإحداثي
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
- معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- الاشكال التي تتولد من قطع المخروط الدائري القائم بمستويات مختلفة وسمياتها.
- مفهوم الدائرة كأحد القطوع المخروطية
- استخراج معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل.
- استخراج معادلة الدائرة التي مركزها اية نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة).
- استخراج معادلة الدائرة التي لها تماس مع المحورين الاحداثيين.
- استخراج معادلة الدائرة التي تمس مستقيماً معلوماً.
- استخراج المركز ونصف القطر للدائرة باستعمال الصيغة العامة لمعادلة الدائرة.
- تحديد نوع العلاقة بين نقطة معلومة ودائرة معلومة.
- تحديد نوع العلاقة بين مستقيم معلوم ودائرة معلومة.
- استخراج معادلة مماس الدائرة عند نقطة من نقاطها.

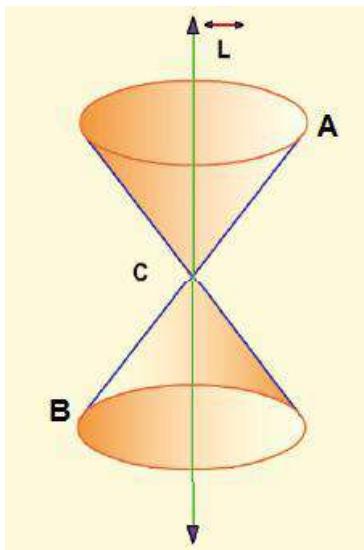
الفصل الخامس

القطوع المخروطية – الدائرة (Conic sections – The circle)

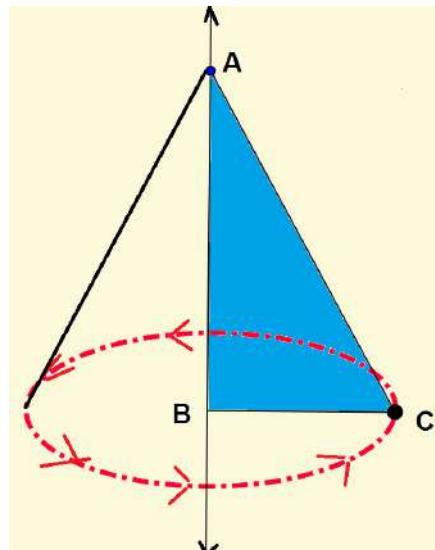
1-5 القطوع المخروطية

يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث ABC القائم الزاوية في B دورة كاملة حول أحد الضلعين القائمين كمحور للدوران كما في الشكل 1-5 اما في الشكل 2 فلأننا نلاحظ انه ينتج عن دوران مستقيم حول محور ثابت بزاوية ثابتة بينهما مخروط دائري قائم وان مولدي المخروط يتقاطعان عند الرأس C .

يسمى \overleftrightarrow{L} محور المخروط والذي يمكن ان نعرفه بأنه (قطعة المستقيم المحددة برأس المخروط ومركز قاعدته)، ويسمى \overline{AB} مولد المخروط والذي يمكن ان نعرفه بأنه (قطعة المستقيم المحددة برأس المخروط وإحدى نقاط قاعدته).



الشكل 2-5



الشكل 1-5

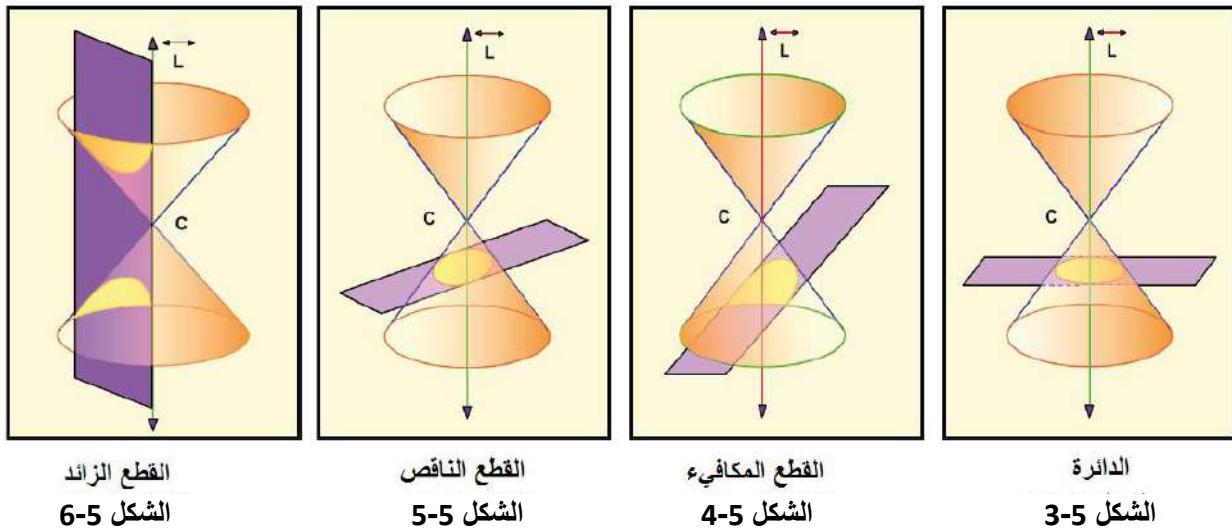
ان الاشكال الهندسية الناتجة من قطع المخروط الدائري القائم بمستوى في حالات معينة تسمى قطوعاً مخروطية وهي :-

(1) الدائرة (Circle) : ونحصل عليها من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوى عمود على المحور \overleftrightarrow{L} ويواري القاعدة، وتكبر هذه الدائرة كلما ابتعدنا عن الرأس كما في الشكل 3-5.

(2) القطع المكافئ (Parabola) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوى مواز لآحد مولاته كما في الشكل 4-5.

(3) القطع الناقص (Ellipse) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوى غير مواز لقاعدته ولا يوازي احد مولاته كما في الشكل 5-5.

(4) **القطع الزائد (Hyperbola)**: ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوى موازٍ لمحوره ويقطع مولدين من مولاته كما في الشكل 5-6 .



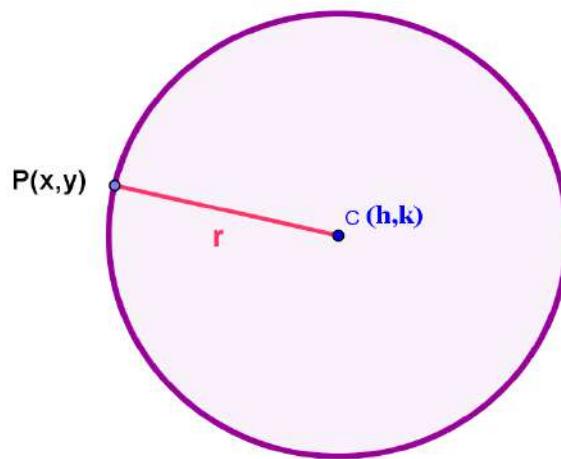
2-5 الدائرة (Circle)

1-2-5 تعريف الدائرة :-

هي مجموعة النقط في المستوى التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز Center) بمساوي مقداراً ثابتاً غير سالب يسمى (نصف القطر Radius) . سوف نرمز لمركز الدائرة بالرمز C ونرمز لنصف القطر بالرمز r . وبلغة المجموعات يمكننا تعريف الدائرة كما يأتي: -

$$\text{Circle} = \{p: \overline{pc} = r, r > 0\}$$

حيث $P(x,y)$ هي نقطة تنتمي إلى الدائرة. كما في الشكل 5-7 أدناه :-

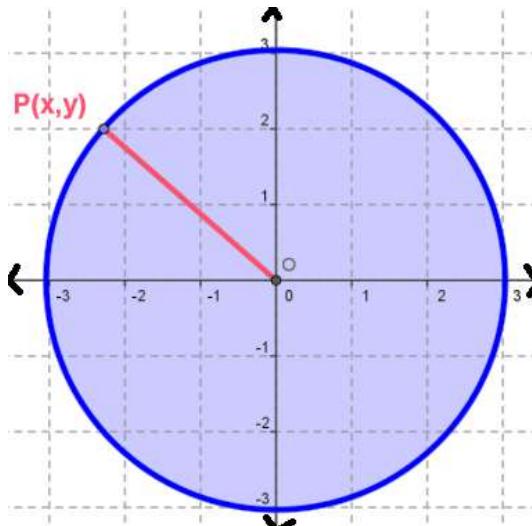


الشكل 7-5

3-5 معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

في هذا البد سوف نجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r في المستوى الابداي.

لتكن $P(x, y)$ اي نقطة في المستوى [لاحظ الشكل 8-5 أدناه]، المسافة \overline{OP} بين نقطة الأصل $O(0, 0)$ والنقطة P يمكن استخراجها بقانون المسافة بين نقطتين وكما يأتي :-



الشكل 8-5

$$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :-

وهذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r .

مثال 1

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات، ثم تتحقق من ان النقطة $(4, 3)$ تنتهي لها.

الحل

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (\text{المعادلة المطلوبة})$$

وللحاق من ان النقطة $(4, 3)$ تنتهي للدائرة نعوض $(x = 4, y = 3)$ في معادلة الدائرة أي :-

$$4^2 + 3^2 = 25$$

$$16 + 9 = 25$$

وهي عبارة صائبة، وهذا يعني ان النقطة $(4, 3)$ تتحقق معادلة الدائرة مما يعني انها تنتهي للدائرة.

4-5 معادلة الدائرة التي مركزها نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة)

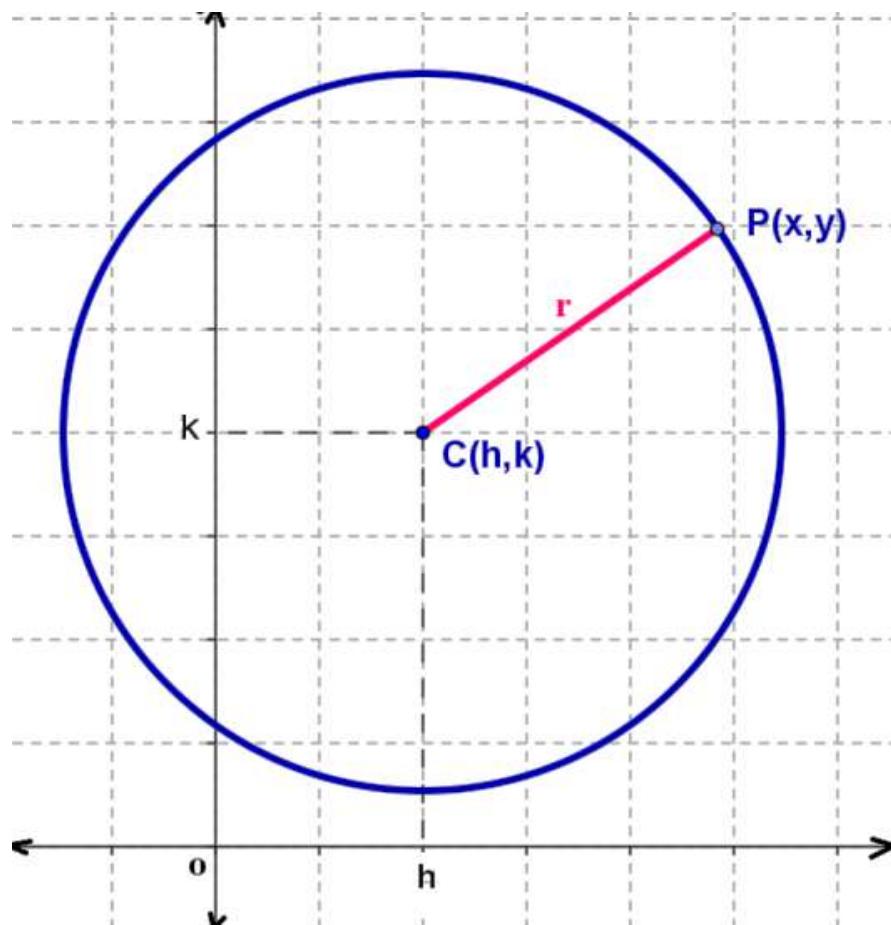
من تعريف الدائرة نستنتج ان بعد ايّة نقطة $P(x, y)$ تتنمي للدائرة [لاحظ الشكل 9-5 أدناه] عن مركز الدائرة $C(h, k)$ مساوياً لطول نصف قطرها (r) وبموجب قانون المسافة بين نقطتين أيضاً يكون :-

$$\overline{CP} = r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

هذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي مركزها $C(h, k)$ ونصف قطرها r والتي يطلق عليها اسم الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة.



الشكل 9-5

مثال 2

جد معادلة الدائرة التي مركزها $C(2, -3)$ ونصف قطرها 5 وحدات.

الحل

$$\because C(h, k) = C(2, -3) \Rightarrow h = 2, k = -3, r = 5 \text{ units}$$

بالتعويض في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة وهي :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

نحصل على: -

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

مثال 3

جد معادلة الدائرة التي مركزها $C(-1, 0)$ وتمر ببنقطة الأصل $(0, 0)$.

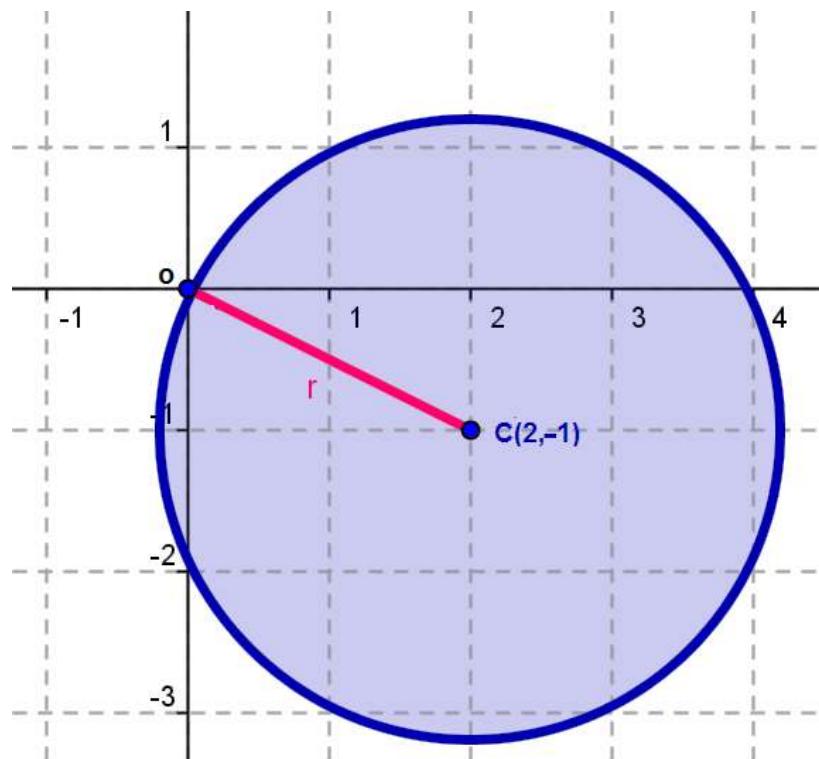
الحل

حيث ان الدائرة تمر ببنقطة الأصل فان نصف قطرها $r = CO$ كما في الشكل 10-5 أدناه
أي :-

$$r = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ units}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$



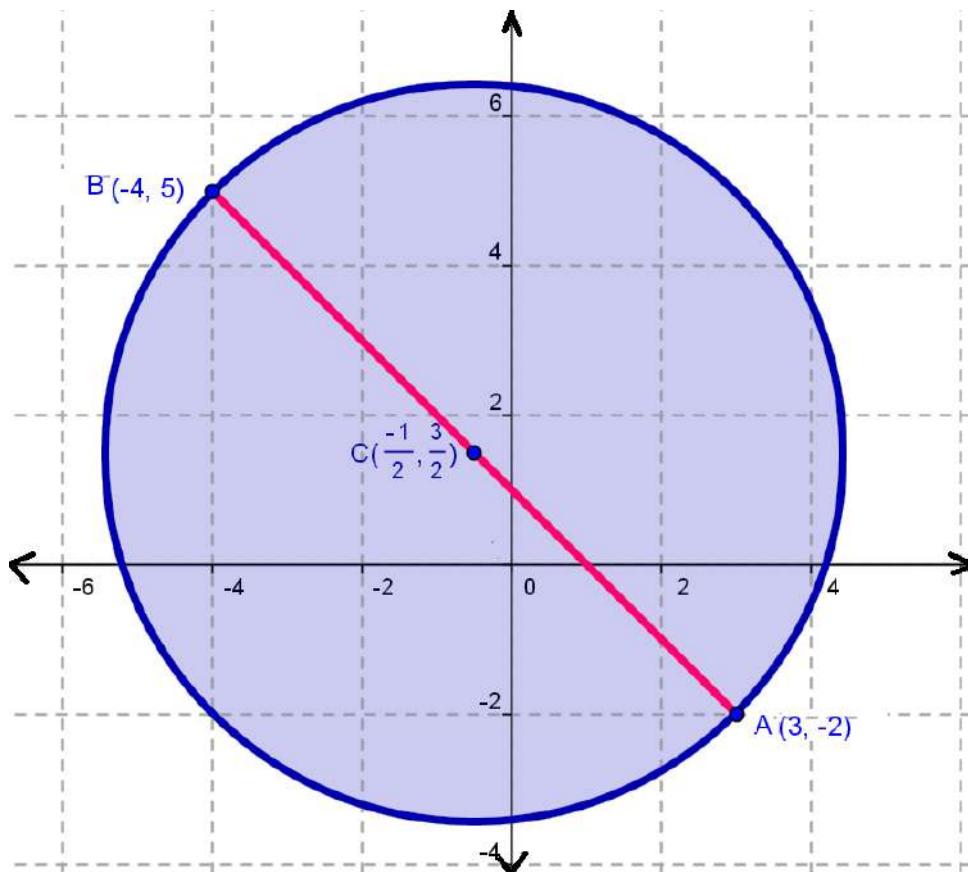
الشكل 10-5

مثال 4

جد معادلة الدائرة التي نهياها أحد أقطارها النقطان $(5, -2), (-4, 5)$

الحل

حيث ان مركز الدائرة $C(h, k)$ هو نقطة المنتصف لقطعة المستقيم \overline{AB} (الذي يمثل قطر الدائرة) كما في الشكل 11-5 ادناه لذلك يكون :-



الشكل 11-5

$$h = \frac{3+(-4)}{2} = \frac{-1}{2}, \quad k = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow C(h, k) = C\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

اما نصف قطر الدائرة فهو المسافة بين النقطة C واحدي النقطتين A, B ولنأخذ النقطة A :-

$$r = CA = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}} = \frac{\sqrt{98}}{2} \text{ units}$$

وبالتعويض عن قيم r, h, k في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة نحصل على :-

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{98}{4}$$

مثال 5

جد إحداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ نستنتج ان :-

$$h = 5, k = -3, r = 4 \text{ units}$$

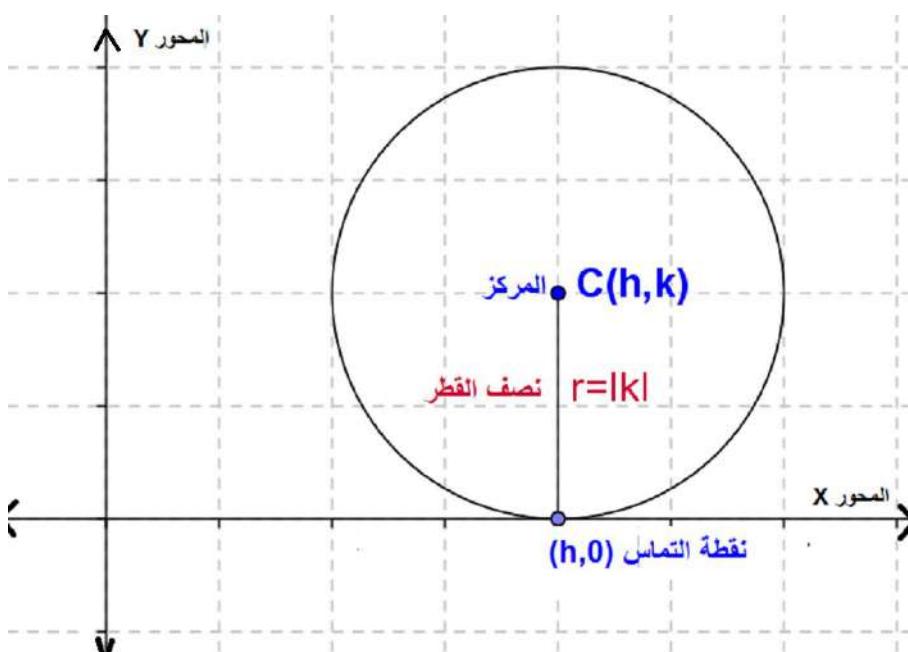
ولذلك فان المركز $C(h, k) = C(5, -3)$ ونصف القطر يساوي 4 وحدة .

الحل

5-5 تمس الدائرة مع المحورين الاحداثيين

اولاً: الدائرة التي تمس المحور x يكون $r = |k|$ وتكون نقطة التمس $(h, 0)$ كما في الشكل أدناه وتكون معادلة الدائرة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = k^2$$



الشكل 12-5

مثال 6

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, 5)$ وتمس المحور x ثم جد نقطة التمس.

الحل

$$r = |k| = |-3| = 3 \text{ units}$$

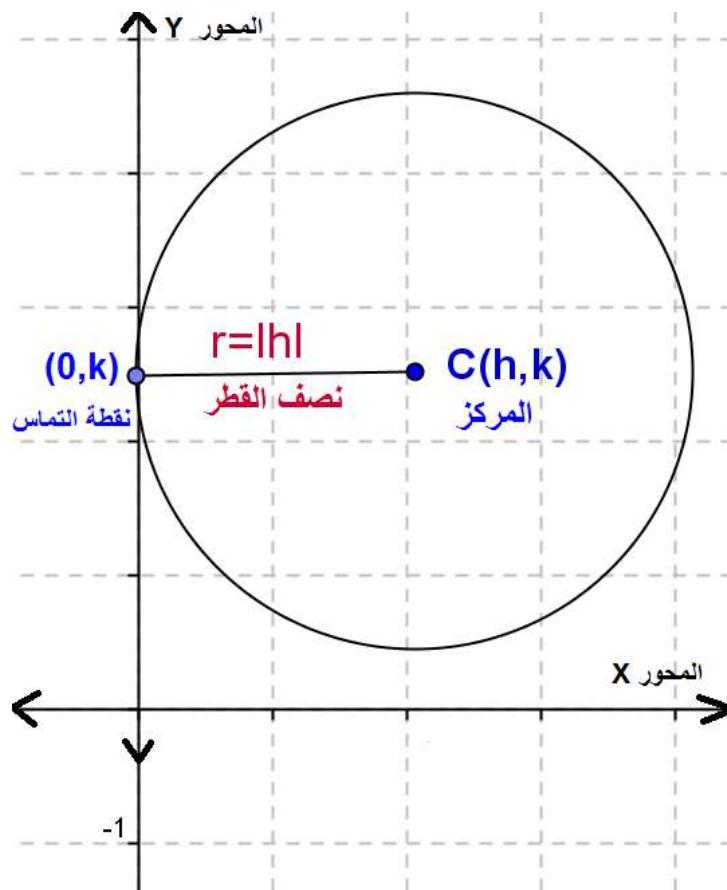
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

وتكون نقطة التمس هي : $(h, 0) = (5, 0)$

ثانياً: الدائرة التي تمس المحور y يكون $|h| = r$ وتكون نقطة التماس $(0, k)$ كما في الشكل أدناه وتكون معادلة الدائرة :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



الشكل 13-5

مثال 7

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, -5)$ وتمس المحور y ثم جد نقطة التماس.

الحل

$$r = |h| = |-3| = 5 \text{ units}$$

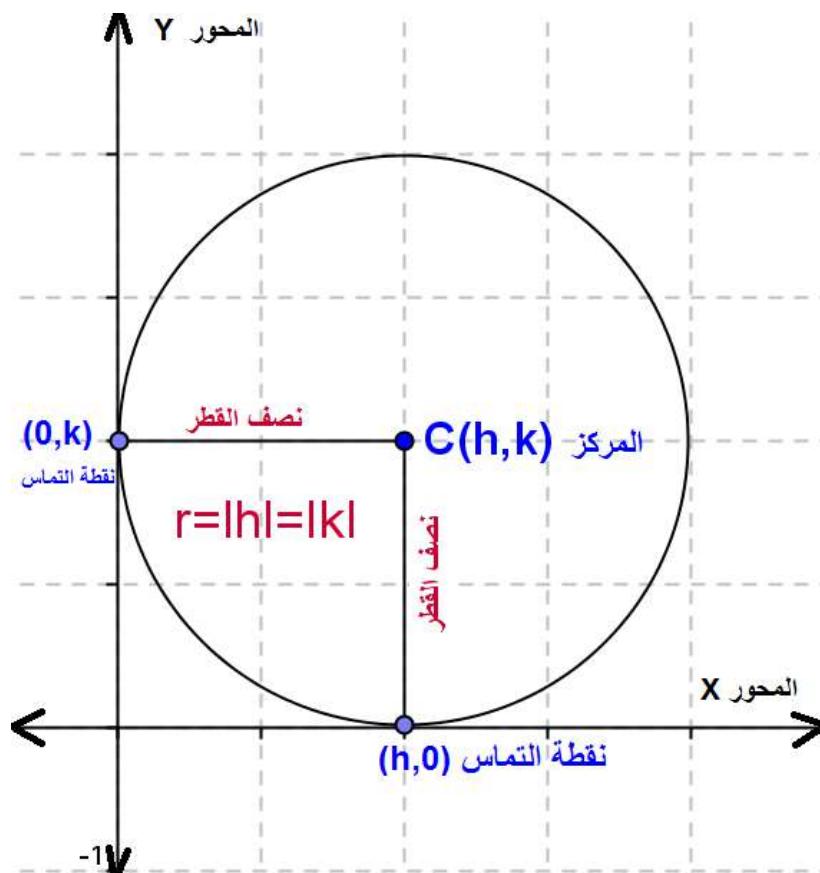
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

وتكون نقطة التماس هي : $(0, k) = (0, -3)$

ثالثاً: الدائرة التي تمس المحورين معاً يكون $|h| = |k| = r$ وتكون نقطتا التماس هما $(0, k)$ و $(h, 0)$ كما في الشكل 14-5 أدناه وتكون معادلة الدائرة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 = k^2$$



الشكل 14-5

مثال 8

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-6, 6)$ وتمس المحورين ثم جد نقطتي التماس.

الحل

$$r = |h| = |k| = 6 \text{ units}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36$$

وتكون نقطتا التماس هما :-

$$(0, k) = (0, -6)$$

$$(h, 0) = (6, 0)$$

الشكل 5-15 أدناه يوضح جميع حالات تطابق الدائرة مع المحورين، لاحظ أنه يمكننا أن نكتب أحدها

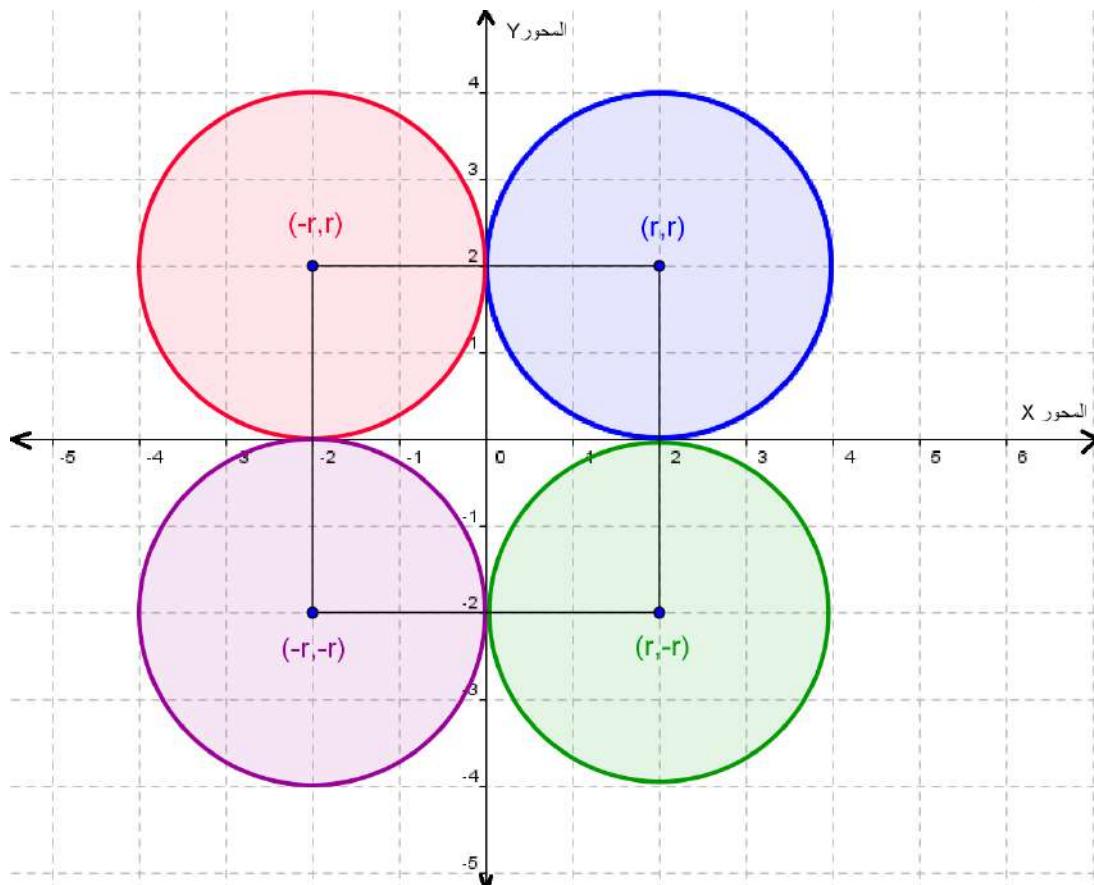
مركز الدائرة كما يأتي لكل حالة نظراً لكون $|h| = |k| = r$

$$C(h, h) = C(k, k) = C(r, r) \quad \text{في الربع الأول}$$

$$C(-h, h) = C(-k, k) = C(-r, r) \quad \text{في الربع الثاني}$$

$$C(-h, -h) = C(-k, -k) = C(-r, -r) \quad \text{في الربع الثالث}$$

$$C(h, -h) = C(k, -k) = C(r, -r) \quad \text{في الربع الرابع}$$



الشكل 5-15

مثال 9

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (2,4).

الحل

الدائرة تقع في الربع الأول لأنها تمس المحورين وتمر بالنقطة (2,4) ولذلك فان مركزها سوف يكون $C(h, h) = C(r, r)$ اي ان معادلة الدائرة هي :-

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

وحيث ان الدائرة تمر بالنقطة (2,4) فإنها تحقق معادلتها اي اتنا نعرض 4 في المعادلة

$$(2 - r)^2 + (4 - r)^2 = r^2$$

$$4 - 4r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2$$

تكميلة

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r - 10)(r - 2) = 0$$

: أما

$$r - 10 = 0$$

$$r = 10 \text{ Units}$$

مركز الدائرة $C(10, 10)$

وتكون معادلة الدائرة :-

$$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

: أو

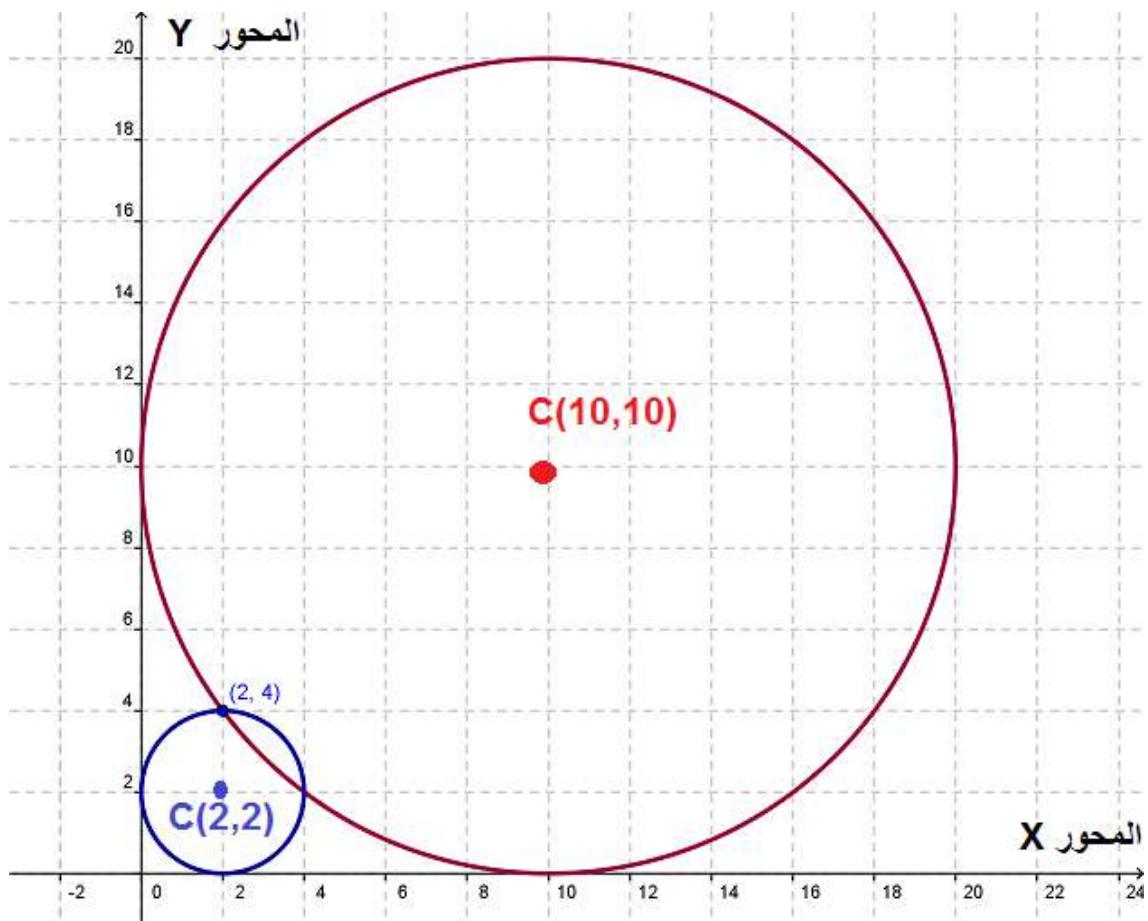
$$r - 2 = 0$$

$$r = 2 \text{ Units}$$

مركز الدائرة $C(2, 2)$

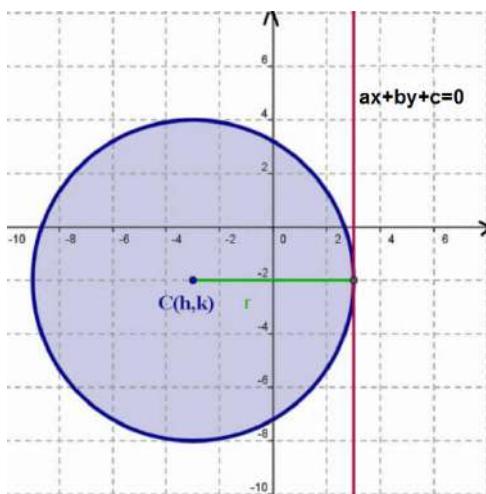
وتكون معادلة الدائرة :-

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$$



الشكل 16-5

6-5 معادلة الدائرة التي تمس مستقيماً معلوماً



من الواضح في الشكل 17-5 أدناه ان البعد العمودي بين المستقيم ومركز الدائرة يساوي طول نصف قطر الدائرة وعليه فانه بالإمكان ايجاد نصف القطر باستخدام قانون البعد العمودي بين المستقيم $ax + by + c = 0$ والنقطة (x_1, y_1) الذي درسناه في الصف الاول وهو:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

الشكل 17-5

مثال 10

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم $4x - 3y = 15$

الحل

ان البعد العمودي بين مركز الدائرة وهو نقطة الأصل اي $O(0,0)$ والمستقيم الذي معادلته $4x - 3y - 15 = 0$ يساوي طول نصف قطر الدائرة.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{|4 \times 0 + (-3) \times 0 + (-15)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

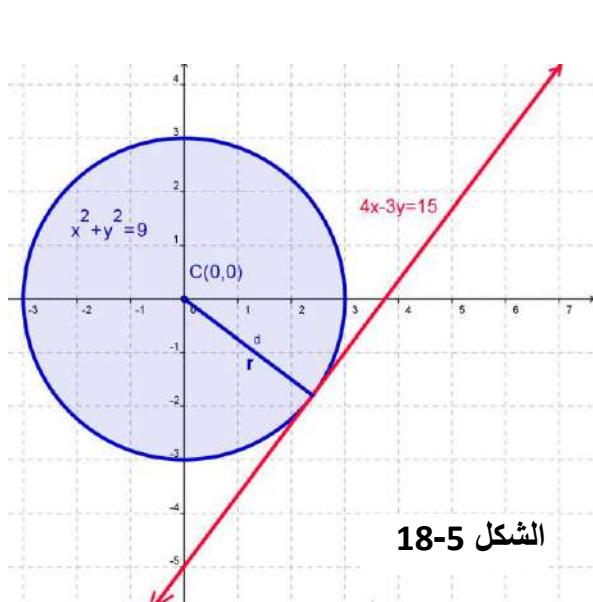
$$r = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ units}$$

وحيث ان معادلة الدائرة التي مركزها نقطة
الأصل هي:-

$$x^2 + y^2 = r^2$$

لذلك فان معادلة الدائرة هي:-

$$x^2 + y^2 = 9$$



الشكل 18-5

7-5 الصيغة العامة لمعادلة الدائرة

ان الصيغة العامة لمعادلة الدائرة تنتج من تبسيط الصيغة القياسية لها وكما يأتي :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

نعيد ترتيب الحدود لتكون كما يأتي :-

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

وبفرض ان : $A = -2h$, $B = -2k$, $C = h^2 + k^2 - r^2$ ، نحصل على الصيغة العامة وهي :-

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$h = \frac{-A}{2} , \quad k = \frac{-B}{2} \quad \text{أي إن :}$$

$$, r^2 = h^2 + k^2 - c$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$

ونستطيع ان نقول ان مركز الدائرة هو $C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ وان نصف قطرها هو

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$

كما يمكننا التوصل الى الاستنتاجات الآتية :-

1. معادلة الدائرة معادلة من الدرجة الثانية بمتغيرين هما x , y .

2. معامل x^2 يساوي معامل y^2 (ويجب ان يكون 1) .

3. المعادلة لا تحتوي على الحد xy .

$$. (r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}) \in \mathbb{R}^+ . 4$$

ملاحظة :- إذا كانت الدائرة تمر بنقطة الاصل $(0,0)$ فان الصيغة العامة لمعادلتها يمكن الحصول

عليها بتعويض $x = 0$, $y = 0$ في الصيغة القياسية لتكون :-

$$(0 - h)^2 + (0 - k)^2 = r^2$$

$$h^2 + k^2 = r^2$$

وبالتعويض في الصيغة القياسية نحصل على :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = h^2 + k^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk = 0$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By = 0$$

مثال 11 جد احداثي المركز وطول نصف القطر إذا كانت المعادلة تمثل معادلة دائرة في كل مما يأتي :-

- 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 5$
- 2) $x^2 + y^2 + 7x - 2y = 25$
- 3) $x^2 - y^2 - 9x + 16y = 50$
- 4) $x^2 + y^2 - 4x + 7xy + 6y = 8$

الحل

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 5$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$$

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2 , \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow C = (2, -3)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-5)} = \sqrt{4 + 9 + 5} = \sqrt{18} \text{ units}$$

2) $x^2 + y^2 + 7x - 2y = 25$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كونها معادلة من الدرجة الثالثة.

3) $x^2 - y^2 - 9x + 16y = 50$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون معامل x^2 يساوي 1 ولا يساوي معامل y^2 الذي يساوي

- 1

4) $x^2 + y^2 - 4x + 7xy + 6y = 8$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كونها تحتوي على الحد xy

5) $x^2 + 2y^2 - 8x + 5y = 12$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون معامل x^2 يساوي 1 ومعامل y^2 يساوي 2 اي انها غير متساوية.

6) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 19 = 0$

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1 , \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow C = (1, -3)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 9 - 19} = \sqrt{-9}$$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون $r \notin \mathbb{R}^+$

7) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 24y + 33 = 0$

نجعل معامل x^2 يساوي معامل y^2 ويساوي 1 بقسمة المعادلة على العدد 3 لتصبح كالتالي :-

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$$

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2 , \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \Rightarrow C = (2, -4)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{4 + 16 - 11} = \sqrt{9} = 3 \text{ units}$$

مثال 12

جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها كالاتي ثم حولها الى الصيغة العامة.

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

الحل
بالمقارنة مع الصيغة القياسية

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = 3, k = -2 \Rightarrow C(h, k) = C(3, -2)$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ units}$$

وللتحويل الى الصيغة العامة نقوم بفتح الاقواس وترتيب الحدود في المعادلة الاسلية كالاتي :-

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

مثال 13

إذا كانت $dx^2 + 4y^2 + ax + by + c = 0$ تمثل معادلة دائرة مركزها

. a, b, c, d وطول نصف قطرها 5 units جد قيمة الثوابت

حيث ان معامل x^2 يجب ان يساوي معامل y^2 لذلك فان 4

وبما ان المركز $C(h, k) = C(2, -3)$ ، لذلك تكون

لكن :-

$$h = \frac{-a}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -4$$

$$k = \frac{-b}{2} \Rightarrow -3 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 6$$

كذلك :-

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$

$$5 = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - c}$$

$$5 = \sqrt{13 - c}$$

وبتربيع الطرفين:

$$25 = 13 - c$$

$$c = 13 - 25$$

$$\boxed{c = -12}$$

مثال 14

جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي للمحور y وتمر بالنقطتين $P_1(2, -3), P_2(-6, 5)$

الحل

بما ان مركز الدائرة ينتمي للمحور y لذلك يكون $C(0, k)$ وكذلك

$$r = CP_1 = \sqrt{(0 - 2)^2 + (k + 3)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + (k + 3)^2}$$

$$r = CP_2 = \sqrt{(0 + 6)^2 + (k - 5)^2}$$

تكميلة

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{36 + (k - 5)^2} \\
 \therefore \sqrt{4 + (k + 3)^2} &= \sqrt{36 + (k - 5)^2} \\
 \text{وبتربيع الطرفين نحصل على:} \\
 4 + (k + 3)^2 &= 36 + (k - 5)^2 \\
 4 + k^2 + 6k + 9 &= 36 + k^2 - 10k + 25 \\
 13 + 6k &= 61 - 10k \\
 10k + 6k &= 61 - 13 \\
 16k &= 48 \\
 k &= \frac{48}{16} = 3 \\
 \therefore C &= (0, 3) \\
 \therefore r &= \sqrt{4 + (3 + 3)^2} \\
 r &= \sqrt{4 + 36} \\
 r &= \sqrt{40} \\
 r &= 2\sqrt{10} \text{ units}
 \end{aligned}$$

وبالتعويض في الصيغة القياسية

$$\begin{aligned}
 (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\
 \text{نحصل على معادلة الدائرة وكما يأتي:} \\
 (x - 0)^2 + (y - 3)^2 &= (\sqrt{40})^2 \\
 x^2 + (y - 3)^2 &= 40
 \end{aligned}$$

مثال 15

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (0, 0), (0, 4), (1, 3)

الحل

ان الصيغة العامة لمعادلة الدائرة التي تمر ب نقطة الاصل وكما اوضحنا سابقاً هي :-

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + Ax + By &= 0 \\
 \text{النقطة } P_2(0, 4) \text{ تحقق هذه المعادلة أي:} \\
 0 + 4^2 - A \times 0 - B \times 4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$16 + 4B = 0 \Rightarrow B = -4$$

كذلك النقطة $P_3(1, 3)$ تتحقق هذه المعادلة أيضاً اي:-

$$1^2 + 3^2 - A \times 1 + B \times 3 = 0$$

$$1 + 9 + A + 3B = 0$$

$$10 + A + 3 \times (-4) = 0$$

$$-2 + A = 0$$

$$A = 2$$

بالتعويض في الصيغة العامة اعلاه نحصل على معادلة الدائرة وهي :-

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

8-5 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

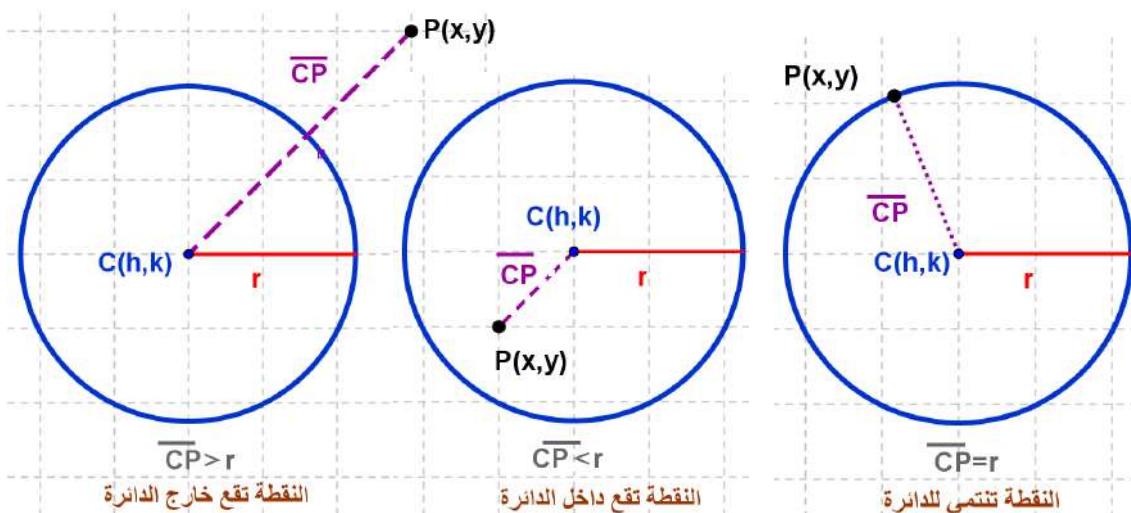
لتكن لدينا الدائرة التي مركزها النقطة $C(h, k)$ وطول نصف قطرها يساوي r units ولتكن $P(x, y)$ اي نقطة معلومة في المستوى.

ولكي نعین موقع النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للدائرة فان هناك ثلاثة احتمالات لا غيرها (لاحظ الشكل 19-5 وهي :-)

1) النقطة تنتهي للدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{CP} = r$.

2) النقطة تقع داخل الدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{CP} < r$.

3) النقطة تقع خارج الدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{CP} > r$.



الشكل 19-5 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

مثال 16

بين موقع النقطة $P(-2, -3)$ بالنسبة للدائرة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 - 8x - 3 = 0$$

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4, \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(4, 0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{16 + 0 - (-3)} = \sqrt{19} \text{ units}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(4 + 2)^2 + (0 + 3)^2}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{36 + 9}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{45} \text{ units}$$

$$\therefore \overline{CP} > r$$

اذن النقطة تقع خارج الدائرة.

مثال 17

أثبت أن النقطة $P(1, -5)$ تقع داخل الدائرة التي معادلتها:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ نتوصل إلى أن :-

$$h = 2, k = -3 \Rightarrow C = (2, -3)$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ units}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-3 + 5)^2}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{1 + 4}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{5} \text{ units}$$

$$\therefore \overline{CP} < r$$

إذن النقطة تقع داخل الدائرة.

الحل

ما علاقة النقطة $P(1, 3)$ بالدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ ؟

مثال 18

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \Rightarrow C(-1, 2)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 4 - 0} = \sqrt{5} \text{ units}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{4 + 1}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{CP} = r \text{ units}$$

إذن النقطة تتنمي للدائرة.

9-5 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

يكون المستقيم مماساً للدائرة (اي يشتراك معها في نقطة) او قاطعاً لها (اي يشتراك معها في نقطتين) او غير قاطع او مماس لها (اي لا يشتراك معها في اي نقطة). (لاحظ الشكل 5-20)، ويمكن الاستدلال على ذلك كما يأتي :-

- 1) نستخرج مركز الدائرة وطول نصف قطرها كما تعلمنا في البند السابق.
- 2) نستخرج بعد العمودي بين مركز الدائرة والمستقيم المعلوم باستعمال القانون الذي سبق أن استعملناه في بعض الأمثلة السابقة وهو :-

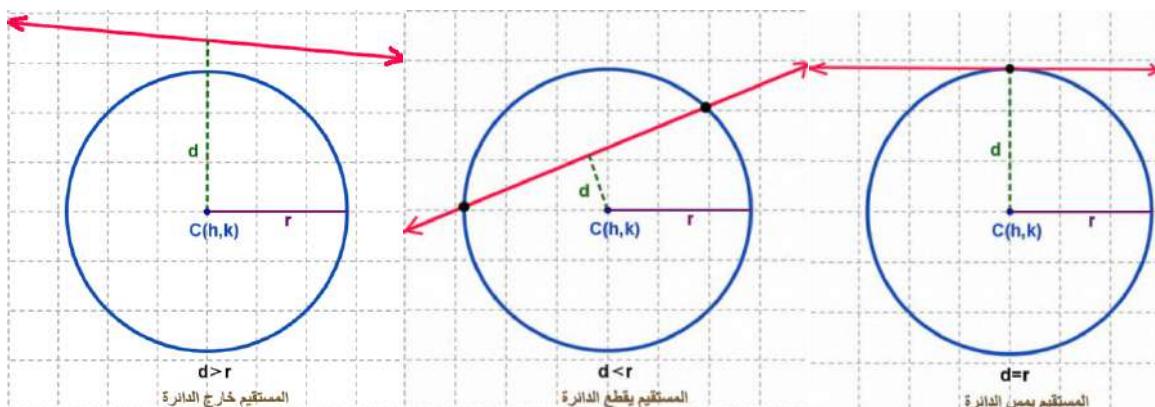
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(3) نقارن البعد مع طول نصف القطر ويكون :-

. المستقيم مماساً للدائرة عندما يكون: $d = r$

. المستقيم يقطع الدائرة عندما يكون: $d < r$

. المستقيم غير قاطع أو غير مماس للدائرة عندما يكون: $d > r$



الشكل 5-20 علاقة مستقيم معروفة بمعلومة دائرة

ملاحظة :-

يمكن تعين نوع العلاقة بين مستقيم معروفة ومعلومة دائرة بطريقة أخرى هي حل معادلتي المستقيم والدائرة جبرياً فإذا :-

حصلنا على نقطتين حقيقيتين مختلفتين فإن المستقيم يقطع الدائرة في هاتين النقطتين.

حصلنا على نقطة واحدة فإن المستقيم يمس الدائرة في تلك النقطة.

لم نحصل على أية نقاط فإن المستقيم يقع خارج الدائرة.

مثال 19

ما علاقة المستقيم $x^2 + y^2 - 4 = y - 2$ بالدائرة التي معادلتها $x = 0$ ؟

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = 0, \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(0, 0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2 \text{ units}$$

نرتب معادلة المستقيم على الوجه الآتي :-

$$x - y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

أذن المستقيم يقطع الدائرة. $\therefore d < r$

تكميلة

الحل بالطريقة الثانية :- نعرض معادلة المستقيم $x = y - 2$ في معادلة الدائرة وكما يأتي :-

$$(y - 2)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 + y^2 - 4 = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y - 2) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 - 2 = -2 \Rightarrow (-2, 0) \quad \text{أما:}$$

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2 - 2 = 0 \Rightarrow (0, 2) \quad \text{أو:}$$

حصلنا على نقطتين مختلفتين لذلك فان المستقيم يقطع الدائرة في هاتين النقطتين.

مثال 20

بين ان المستقيم الذي معادلته $x - 2y + 11 = 0$ يمس الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ وجد نقطة التماس.

الحل

نستخدم الطريقة الثانية للحل في هذا السؤال لكون نقطة التماس مطلوبة ايضاً.

$$x - 2y + 11 = 0 \Rightarrow x = 2y - 11$$

$$(2y - 11)^2 + y^2 + 2(2y - 11) - 19 = 0$$

$$4y^2 - 44y + 121 + y^2 + 4y - 22 - 19 = 0$$

$$5y^2 - 40y + 80 = 0$$

$$y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$(y - 4)^2 = 0$$

$$y - 4 = 0$$

$$y = 4$$

$$x = 2 \times 4 - 11$$

$$x = 8 - 11 = -3$$

حصلنا على نقطة واحدة هي (4, -3) وهذا يعني ان المستقيم يمس الدائرة وان هذه النقطة هي نقطة التماس.

مثال 21

بين ان المستقيم الذي معادلته $4x + 3y - 12 = 0$ لا يقطع الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 2 = 0$ ولا يمسها.

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = 0, \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(0, 0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{0 + 0 + 2} = \sqrt{2} \text{ units}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore d > r$$

أدن المستقيم يقع خارج الدائرة اي لا يقطعها ولا يمسها.

10-5 معادلة مماس الدائرة عند نقطة من نقاطها

لإيجاد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ عند النقطة (x_1, y_1) التي تنتمي إليها نستخدم المبرهنة التي درسناها في الصف الثالث المتوسط والتي تنص على : ((المماس عمود على نصف قطر الدائرة المرسوم من نقطة التماس)).

اما خطوات ايجاد معادلة المماس فهي كالتالي :-

1) نستخرج مركز الدائرة $C(h, k)$.

2) نجد ميل (*Slope*) نصف القطر المار بنقطة التماس باستعمال القانون الذي درسناه في الصف الاول ضمن فصل الهندسة الاعدادية وهو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ولذلك يكون ميل نصف القطر m_r :-

$$m_r = \frac{y_1 - k}{x_1 - h}$$

3) وبما ان المماس عمودي على نصف القطر اعتماداً على المبرهنة التي ذكرناها آنفاً فان ميل المماس m_t يساوي المقلوب السالب لميل نصف القطر أي :-

$$m_t = \frac{-1}{m_r}$$

4) نجد معادلة المماس بمعلومية ميله ونقطة التماس بالقانون الآتي :-

$$y - y_1 = m_t (x - x_1)$$

مثال 22

جد معادلة مماس الدائرة $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$ عند النقطة $(1, -1)$.

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4, \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow C(4, -5)$$

$$m_r = \frac{y_1 - k}{x_1 - h} \Rightarrow m_r = \frac{-1 - (-5)}{1 - 4} = \frac{-1 + 5}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$y - y_1 = m_t (x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{3}{4} (x - 1)$$

$$4y + 4 = 3x - 3$$

$$4y + 4 - 3x + 3 = 0$$

$$-3x + 4y + 7 = 0$$

$$3x - 4y - 7 = 0$$

معادلة المماس للدائرة

ملاحظة :-

يمكننا استخدام القانون الآتي لإيجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة التماس بشكل مباشر :-

$$xx_1 + yy_1 - h(x + x_1) - k(y + y_1) + c = 0$$

حيث $C(h, k)$ المركز ، (x_1, y_1) نقطة التماس ، c الحد المطلق في معادلة الدائرة.

حل المثال السابق بهذه الطريقة :-

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4 , \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow C(4, -5)$$

$$xx_1 + yy_1 - h(x + x_1) - k(y + y_1) + c = 0$$

$$x \times 1 + y \times (-1) - 4(x + 1) - (-5)(y - 1) + 16 = 0$$

$$x - y - 4x - 4 + 5y - 5 + 16 = 0$$

$$-3x + 4y + 7 = 0$$

$$\boxed{3x - 4y - 7 = 0}$$
 معادلة المماس للدائرة

تمارين (1-5)

1. استخرج معادلة الدائرة في كل من الحالات الآتية :-

(a) طول نصف القطر 7 units ومركزها النقطة (2, -2).

(b) مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (-1, -6).

(c) مركزها النقطة (3, 7) وتمر بنقطة الأصل.

(d) مركزها النقطة (1, 1) وتمر بالنقطة (5, -2).

(e) نهايتها أحد أقطارها النقطتان (-3, 5), (2, 1).

2. جد احداثيي المركز وطول نصف القطر للدوائر الآتية :-

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3 \quad (\text{a})$$

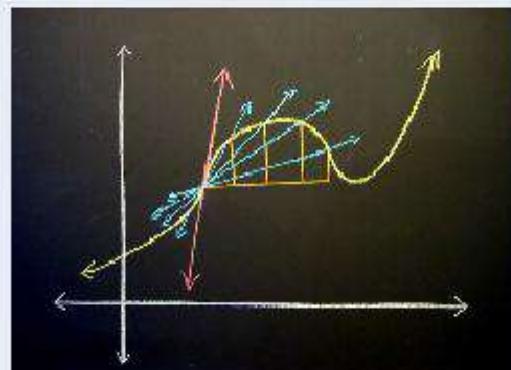
$$(x - 4)^2 + y^2 = 9 \quad (\text{b})$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0 \quad (\text{c})$$

$$(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 49 \quad (\text{d})$$

3. إذا كانت $0 = mx^2 + 2y^2 - 4ax + 4by + cxy + 6$ معادلة دائرة تمس المحورين معاً، جد قيم الثوابت $m, a, b, c \in \mathbb{R}$ ؟
4. إذا كانت $0 = ax^2 + 2y^2 + 8x - 12y + c$ معادلة دائرة تمس المحور y ، جد :-
- . $a, c \in \mathbb{R}$ قيم الثوابت (a)
 - (b) علاقة النقاط $(-2, 5), (1, 5), (1, -1)$ بالدائرة
5. جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي الى المحور x وتمر بالنقطتين $(1, 5), (-1, 3)$.
6. جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين معاً وطول نصف قطرها 5 units للحالات الآتية :-
- (a) الدائرة تقع في الربع الأول.
 - (b) الدائرة تقع في الربع الثالث.
7. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, -2)$ وتمس المستقيم $x - y = 5$.
8. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, -5)$ وتمس المستقيم $5x + 12y - 4 = 5$.
9. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط: $P_1(0, 0), P_2(2, -1), P_3(4, -3)$.
10. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط: $P_1(0, 2), P_2(3, 3), P_3(7, 1)$.
11. بين ان النقطة $P(1, 2)$ تنتهي للدائرة التي معادلتها $0 = x^2 + y^2 - 2x - 3y + 3$ ثم جد معادلة المماس للدائرة عند تلك النقطة .
12. جد معادلة الدائرة التي تمس المحور x عند النقطة $(0, 4)$ ومركزها ينتمي الى المستقيم الذي معادلته $0 = x + 2y + 2$.
13. لتكن $25 = x^2 + y^2$ معادلة دائرة، بين موقع النقاط الآتية بالنسبة للدائرة:
- . $P_1(3, 4), P_2(2, -2), P_3(-4, 4)$
14. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(-3, 6)$ وتمس المحورين معاً .
15. جد معادلة الدائرة التي تمس المحور x وتمس المستقيم $4 = y$ ويقع مركزها على المحور y .

الفصل السادس



حساب التفاضل

الفصل السادس حساب التفاضل (Calculus- Differentiation)

البنود
(SECTIONS)

الغاية	1-6
الجوار	1-1-6
غاية الدالة	2-1-6
الاستمرارية	2-6
استمرارية الدالة عند نقطة معينة	1-2-6
المشتقات	3-6
ميل المماس للمنحنى عند نقطة معينة	1-3-6
مشتقة الدالة	4-6
معادلة المماس لمنحنى الدالة عند نقطة معينة	1-4-6
التطبيق الفيزيائي للمشتقة	5-6
قواعد ايجاد المشتقة	6-6
المشتقات من الرتب العليا	7-6

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
epsilon	ϵ	عدد متاهي في الصغر
Neighborhood left	$(a - \epsilon, a)$	جوار العدد a من اليسار
Right Neighborhood	$(a, a + \epsilon)$	جوار العدد a من اليمين
Neighborhood	$(a - \epsilon, a + \epsilon)$	جوار العدد a
x approaches to a from the left	$x \rightarrow a^-$	قيمة x تقترب من a من اليسار
x approaches to a from the right	$x \rightarrow a^+$	قيمة x تقترب من a من اليمين
x approaches to a	$x \rightarrow a$	قيمة x تقترب من a
The limit of the function $f(x)$ When x approaches to a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب قيمة x من a

Delta x	Δx	مقدار التغير في x
Delta y	Δy	مقدار التغير في y
Delta y Delta x over	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	مقدار التغير بالدالة
The first derivative of the function	$f'(x), y', \frac{dy}{dx}$	المشتقة الأولى للدالة $f(x)$
The 2.nd derivative of the function	$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$	المشتقة الثانية للدالة $f(x)$
Slope of the tangent of the function	$m = f'(a)$	ميل المماس لمنحني $f(x)$ عند النقطة a
distance	s	الموقع ، البعد ، الازاحة
Time	t	الزمن
Velocity	$V = \frac{ds}{dt}$	السرعة
The first derivative of the function	$A = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	التعجيل

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مفهوم الجوار تمهدأ لمفهوم غاية الدالة عند نقطة.
- كيفية ايجاد قيمة الغاية للدوال الجبرية.
- مفهوم الاستمرارية للدالة عند أحد نقاطها.
- تحديد فيما إذا كانت الدالة مستمرة عند نقطة من نقاطها ام لا.
- مفهوم مشتقة الدالة وكيفية ايجادها باستخدام التعريف.
- كيفية ايجاد معادلة المماس لمنحني عند نقطة معينة.
- التطبيق الفيزيائي للمشتقة.
- القواعد الاساسية لإيجاد المشتقة.
- المشتقات من الرتب العليا.

الفصل السادس

حساب التفاضل

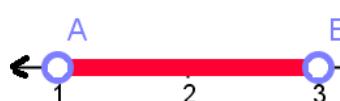
(Calculus- Differentiation)

6-1 الغاية (Limit)

ان مفهوم الغاية هو من المفاهيم المهمة في الرياضيات وهي الاساس لمفاهيم أخرى مثل استمرارية الدالة وفي حساب التفاضل والتكامل.

1-1-6 الجوار (Neighborhood)

لتوضيح مفهوم الجوار نعطي هذه المفاهيم البسيطة وصولاً إلى مفهوم الجوار. سبق ان تعلمنا مفهوم الفترات المفتوحة في الأعداد الحقيقية وكيفية توضيحيها على خط الأعداد، فمثلاً الفترة المفتوحة $(1, 3)$ تمثل بقطعة المستقيم \overline{AB} على خط الأعداد كما في الشكل 1-6 المجاور.



الشكل 1-6

نلاحظ ان العدد 2 ينتمي للفترة المفتوحة $(1, 3)$ وتوجد قيم في الفترة أكبر من العدد 2 وتكبر اقتراباً للعدد 3 وكذلك توجد قيم أصغر من العدد 2 وتصغر اقتراباً للعدد 1.

تعريف

إذا كان a إذا كان a عدداً حقيقياً وكان $0 < \epsilon$ (هذا الرمز لاتيني ويقرأ أبسيلون)
فأن الفترة :-

. $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ هي جوار للعدد a a تتنمي للفترة) . (1)

. $(a - \epsilon, a)$ هي جوار العدد a من اليسار a لا تتنمي للفترة) . (2)

. $(a, a + \epsilon)$ هي جوار للعدد a من اليمين a لا تتنمي للفترة) . (3)

لذلك يوجد عدد غير منهٍ من الجوارات للعدد a حسب قيم ϵ .

مثال 1

إذا كانت $2 = a = \frac{1}{2}$ ، أكتب جواراً للعدد a ثم أكتب جوار اليسار وجوار اليمين.

الحل

ان جوار العدد $2 = a$ هو الفترة المفتوحة $\left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right)$ اي $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

اما جوار اليسار للعدد $2 = a$ فهو الفترة المفتوحة $\left(2 - \frac{1}{2}, 2\right)$ اي $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

وكذلك جوار اليمين للعدد $2 = a$ هو الفترة المفتوحة $\left(2, 2 + \frac{1}{2}\right)$ اي $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

مثال 2

إذا كانت $1 = a$ ، اكتب ثلاثة جوارات للعدد a .

الحل

1) نختار $\epsilon = \frac{1}{2}$ فيكون جوار العدد $1 = a$ هو الفترة المفتوحة $\left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right)$ اي $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2) نختار $\epsilon = \frac{3}{4}$ فيكون جوار العدد $1 = a$ هو الفترة المفتوحة $\left(1 - \frac{3}{4}, 1 + \frac{3}{4}\right)$ اي $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$

3) نختار $\epsilon = \frac{2}{3}$ فيكون جوار العدد $1 = a$ هو الفترة المفتوحة $\left(1 - \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3}\right)$ اي $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

2-1-6 غاية الدالة (Limit Of a Function)

هناك بعض المفاهيم التي يجب توضيحها قبل الدخول في تعريف غاية الدالة ومنها ما يأتي :-

- (1) ($x \rightarrow a$) (تقرأ x تقترب من a) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً من العدد a ، يميناً ويساراً ويمكن ان نقول ان قيم x هي الاعداد التي تنتمي الى جوارات العدد a والقريبة منه . مثلاً ($x \rightarrow 2$) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً جداً من العدد 2 سواء أكانت عن يمينه أو عن يساره ومنها :-

من اليسار: ... , 1.999 , 1.99 , 1.9
و كذلك الاعداد: -

من اليمين: ... , 2.001 , 2.0001 , 2.1

- (2) ($x \rightarrow a^+$) (تقرأ x تقترب من a من جهة اليمين) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً جداً من العدد a وتقع في جهة اليمين اي اكبر من العدد a ، فمثلاً ($x \rightarrow 1^+$) تعني ان قيم هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً جداً من العدد 1 – من جهة اليمين اي اكبر من العدد (1 –) ومنها :-

-0.999 , -0.99 , -0.9 , ...

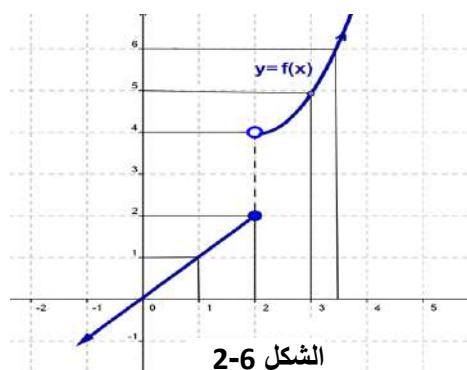
- (3) ($x \rightarrow a^-$) (تقرأ x تقترب من a من جهة اليسار) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً جداً من العدد a وتقع في جهة اليسار اي اصغر من العدد a ، مثلاً ($x \rightarrow 0^-$) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقة القريبة جداً جداً من العدد 0 من جهة اليسار اي اصغر من العدد (0) (ومنها :-

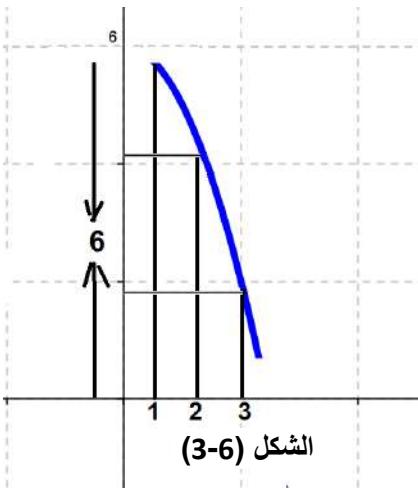
-0.1 , -0.01 , -0.001 , -0.0001 , ...

غاية الدالة عند نقطة :-

سوف نقوم بتوضيح مفهوم غاية الدالة عند نقطة باستعمال التمثيل البياني للدالة موضحاً بالشكل 2-6 الذي حيث نلاحظ هندسياً ان الدالة ($y = f(x)$) منفصلة عند $y = 2$ ، وعندما x تقترب من العدد 2 من جهة اليسار وكتب ($x \rightarrow 2^-$) فان قيم الدالة ($y = f(x)$) تقترب من 2 ايضاً وتقول عندئذ ان $2^- \rightarrow f(x) = 2$ عندما ونكتب بالرموز :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$





اما عندما تقترب x من العدد 2 من جهة اليمين ونكتب $(x \rightarrow 2^+)$ فان الدالة $y = f(x)$ تقترب من العدد 4 ونقول عندئذ ان $f(x) \rightarrow 4$ عندما $x \rightarrow 2^+$ ونكتب بالرموز

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

الآن لاحظ الشكل (3-6) المجاور:

عندما $(x \rightarrow 3)$ يميناً او يساراً فان الدالة $y = f(x)$ تقترب من العدد 6 ويقال ان $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$ ، اي ان العدد 6 هو غاية الدالة $y = f(x)$ بمعنى ان القيمة التي تقترب منها الدالة $y = f(x)$ عندما تقترب x من العدد 3 سواء كان هذا الاقتراب من اليمين او من اليسار اي $[x \rightarrow 3^-]$ او $[x \rightarrow 3^+]$

لاحظ في المثالين السابقين اننا لم ذكر ان كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة ام غير معرفة عند $x = 2$ وذلك لأن الغاية تعنى بقيم الدالة عندما تقترب x من العدد المعين اي عندما تكون الدالة معرفة في جوار العدد المعين .

والآن سنقوم بعرض فكرة الغاية بطريقة ثانية :-

مثال 3

لتكن الدالة $f(x) = x + 3$ والمطلوب ان نبحث عن غاية الدالة عندما $x \rightarrow 2^+$ وكما أوضحنا سابقاً فإن قيم x قريبة جداً جداً من العدد 2 يميناً ويساراً. وعند تعويض هذه القيم في الدالة $f(x) = x + 3$ فالتالي نحصل على قيم الدالة $f(x)$ كما في الجدول الآتي:

x	1.9	1.99	0.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1

(من اليسار) $x \rightarrow 2^+$ (من اليمين)

نلاحظ انه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين او من اليسار اي $[x \rightarrow 2^+]$ او $[x \rightarrow 2^-]$ فإن:

x	1.9	1.99	0.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1

تقرب من العدد 5 وبالتالي فان العدد 5 هو غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد 2 وبالرموز نكتب :-

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

ومما سبق يمكن ان نلخص مفهوم الغاية للدالة $f(x)$ كما يأتي :-

ليكن a و L عددين حقيقيين. نقول أن L هو غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a اذا تحقق الشرطان الآتيان :-

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

ومن ثم نكتب بالرموز:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

أي أن $2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ تقرأ ($x \rightarrow a$) عندما $f(x)$ تقترب من L عندما x تقترب من a).

► ملاحظات حول إيجاد الغايات

1. نحدد مجال الدالة $f(x)$.
2. لإيجاد خالية الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$ ليس من الضروري ان تكون a تنتمي لمجال الدالة. اي ليس من الضروري ان تكون $f(a)$ معرفة ولكن المهم ان تكون الدالة معرفة جوار العدد a من اليمين ومن اليسار.
3. اذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

موجودتين فانه:

- (a) يقال ان للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \rightarrow a$
 $L_1 = L_2 \Leftrightarrow x \rightarrow a$
- (b) يقال ان الغاية غير موجودة للدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$
 $L_1 \neq L_2 \Leftrightarrow x \rightarrow a$

► مبرهنات الغايات

1. خالية الدالة $f(x)$ ان وجدت فهي وحيدة. بتعبير اخر: إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

فإن:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ موجودة}$$

2. اذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت فان :

مثال 4

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$$

3. اذا كانت $f(x) = x$ فان:

مثال 5

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$$

5. إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

موجودتين فأن:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

مثال 6

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 4 = 1 + 4 = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -5} (x - 3) = \lim_{x \rightarrow -5} x - \lim_{x \rightarrow -5} 3 = -5 - 3 = -8$$

6. إذا كانت $f(x) = x$ موجودة وكانت c عدداً ثابتاً فان:

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

مثال 7

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 4x = 4 \times \lim_{x \rightarrow 2} x = 4 \times 2 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2} = \frac{3^2 - 1}{3 + 2} = \frac{8}{5}$$

مثال 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -3} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow -3} x \\ &= (-3)^2 + 2 \times (-3) \\ &= 9 - 6 = 3 \end{aligned}$$

مثال 9

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \geq 1 \\ 2x & , x < 1 \end{cases} \quad \text{لتكن:}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \rightarrow 1$ ؟

الحل

$$f(x) = x^2 + 1$$

عندما $x \rightarrow 1^+$ (من اليمين) فإن

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2 = L_1$$

$$f(x) = 2x$$

عندما $x \rightarrow 1^-$ (من اليسار) فإن

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 \times 1 = 2 = L_2$$

$$\therefore L_1 = L_2 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

إذ ان الغاية موجودة عند $x \rightarrow 1$ وقيمتها تساوي 2.

مثال 10

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x \leq 2 \\ x + 1 & , x > 2 \end{cases} \quad \text{لتكن:}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \rightarrow 2$ ؟

الحل

$$f(x) = x + 1 \quad \text{عندما } x \rightarrow 2^+ \text{ (من اليمين) فأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 2 + 1 = 3 = L_1$$

$$f(x) = 1 - x \quad \text{عندما } x \rightarrow 2^- \text{ (من اليسار) فأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x) = 1 - 2 = -1 = L_2$$

$$\therefore L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة عندما $x \rightarrow 2$

اي ان: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غير موجودة

مثال 11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , x \leq 1 \\ 2x + a & , x > 1 \end{cases} \quad \text{لتكن:}$$

و كانت $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجودة فاحسب قيمة a .

بما ان $f(x)$ موجودة فان الغاية من اليسار $L_1 = L_2$ الغاية من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2)$$

$$2 \times 1 + a = 1^2 + 2$$

$$2 + a = 3$$

$$a = 3 - 2$$

$$a = 1$$

الحل

مثال 12

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x > 1 \\ b - 2x & , x \leq 1 \end{cases} \quad \text{لتكن:}$$

. a, b فجد قيم كلًّا من a, b ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$ موجودة $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وكانت

الحل

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} (b - 2x) = 5$$

$$b - 2 \times 1 = 5$$

$$b = 5 + 2 = 7$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجودة

الغاية من اليمين $L_1 = L_2$ الغاية من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

تكميلة

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + a) = 5$$

$$1^2 + a = 5$$

$$a = 5 - 1 = 4$$

مثال 13

جد قيمة a إذا علمت أن :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = 2a + 3$$

الحل

$$\frac{1^2 + 3 \times 1 - 1}{1 + 2} = 2a + 3$$

$$\frac{1 + 3 - 1}{3} = 2a + 3$$

$$\frac{3}{3} = 2a + 3$$

$$1 = 2a + 3$$

$$2a = 1 - 3$$

$$2a = -2$$

$$a = -1$$

ملاحظة :- إن العمليات الرياضية الآتية تعتبر تعابيرًا ليس ذات معنى في علم الرياضيات :-

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty \times \infty, 1^\infty, 0^0$$

مثال 14

جد قيمة :-

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

الحل

عند $x = 2$ يكون

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

[تعبير ليس ذو معنى]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

مثال 15

جد قيمة :-

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$$

الحل

عند $x = \sqrt{2}$ يكون

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2 - 2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

[تعبير ليس ذو معنى]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} \cdot \frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x^2 - 2)(x + \sqrt{2})}{x^2 - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

مثال 16

جد قيمة :-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

الحل

عند $x = 0$ يكون

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{0+1} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

[تعبير ليس ذو معنى]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{0+1} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تمارين (1-6)

1. جد قيم الغايات الآتية :-

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 + 3)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + 2x - 15}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

2. جد قيمة a إذا كانت :-

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 3} = 3a - 4$$

3. جد قيمة a إذا كانت :-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 8$$

4. جد قيمة a, b إذا كانت :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -8, \quad f(x) = ax^2 + bx$$

5. إذا كانت :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x > 2 \\ 5 - 2x, & x \leq 2 \end{cases}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \rightarrow 2$ (a)

6. إذا كانت :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$$

هل $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = a$ موجودة (معرفة)

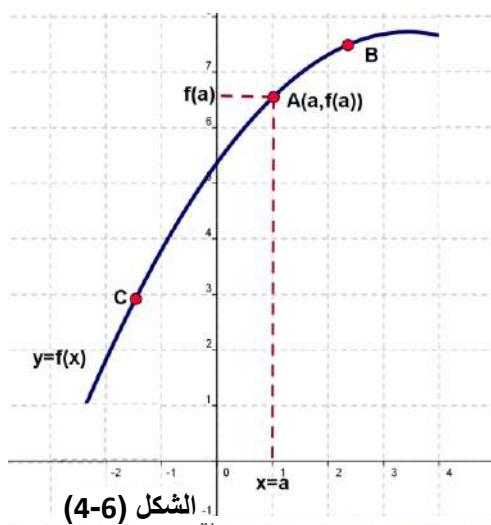
$$f(x) = \begin{cases} a + 2x, & x \leq -1 \\ 3 - x^2, & x > -1 \end{cases}$$

7. إذا كانت :-

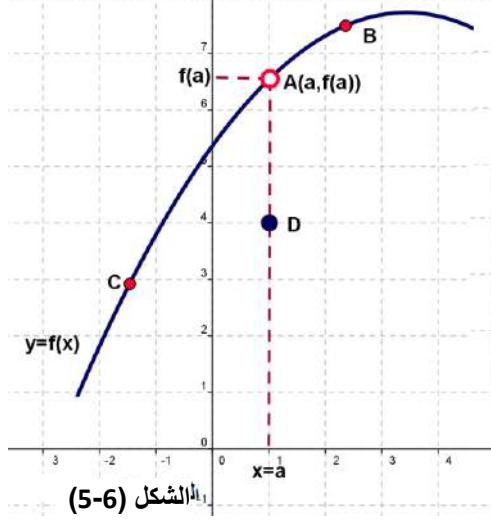
و كانت: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = a$ موجودة ، جد قيمة a

2-6 الاستمرارية (Continuity)

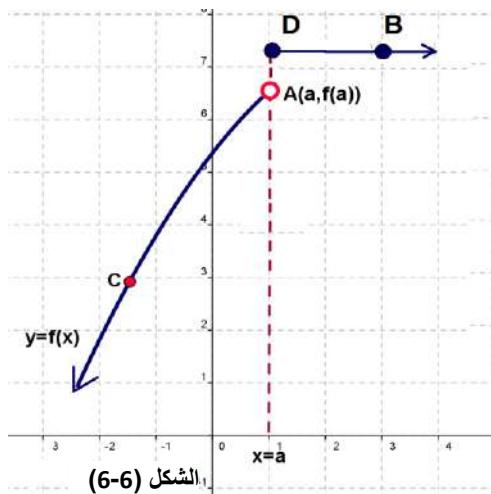
يمكن ان نوضح فكرة استمرارية الدالة عند نقطة معينة باستعمال الاشكال البيانية للدواال الآتية عند النقطة المبينة في كل شكل منها.



في الشكل (4-6) المجاور نلاحظ انه عندما نضع القلم في اقصى اليسار عند النقطة C ونحرك القلم على المنحني ($y = f(x)$) باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا لا نرفع القلم، اي ان الحركة تكون مستمرة بدون انقطاع.



في الشكل (5-6) المجاور نلاحظ انه عندما نضع القلم في اقصى اليسار عند النقطة C ونحرك القلم على المنحني ($y = f(x)$) باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا نجد فجوة عند النقطة $x = a$ ، ولذلك فإننا نضطر لرفع القلم وتخطي الفجوة (عبورها). اي ان المنحني غير مستمر لأنه ينقطع عند النقطة $(x = a)$ فضلاً عن وجود النقطة المنفردة D والتي هي احدى نقاط الدالة والتي تحتاج للمرور عليها ان نتحرك صوبها تاركين المنحني.



وذلك الشكل (6-6) ادناه عندما نبدأ من النقطة C ونحرك القلم على المنحني ($y = f(x)$) باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا نجد فجوة عند النقطة $x = a$ ، ولذلك فإننا نضطر لرفع القلم وتخطي الفجوة (عبورها) للتوجه نحو النقطة D اي ان المنحني غير مستمر (لأنه ينقطع عند النقطة $x = a$).

مما سبق نلاحظ ان المنحني في الشكل (4-6) يكون مستمراً عند النقطة $x = a$ ويقال ان الدالة $y = f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = a$ بينما في الشكلين الآخرين يقال ان الدالة غير مستمرة عند النقطة $x = a$.

1-2-6 استمرارية الدالة عند نقطة

بناء على ما تم التوصل اليه فيما سبق نستطيع ان نعرف مفهوم الاستمرارية عند نقطة معينة كالتالي:

تعريف

اذا كانت $f(x)$ دالة وكان $a \in \mathbb{R}$ وتحقق ما يأتي :-

$$1) f(a) \text{ معرفة}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ موجودة}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

فيقال عندئذ ان الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = a$.

اما اذا لم يتحقق على الاقل شرط واحد من الشروط الثلاثة اعلاه فيقال عندئذ ان الدالة $f(x)$ ليست مستمرة عند النقطة $x = a$.

مثال 17

اذا كانت $f(x) = x^2 + 3$. هل ان $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$ ؟

الحل

$f(x)$ كثيرة الحدود وان أوسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .

$$1) f(1) = 1^2 + 3 = 4 \quad \text{معرفة}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad (\text{اي ان الغاية موجودة})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 4$$

اذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$.

مثال 18

أبحث استمرارية الدالة الآتية عند $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

الحل

$$1) f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \quad \text{معرفة}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4} \quad (\text{اي ان الغاية موجودة})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{3}{4}$$

اذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 3$.

مثال 19

ابحث استمرارية الدالة الآتية عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , \quad x \geq 2 \\ -7 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

الحل

1) $f(2) = 2^2 + 4 = 8$ معرفة

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8 = L_1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-7) = -7 = L_2$

(اي أن الغاية غير موجودة)

أذن الدالة $f(x)$ ليست مستمرة عند $x = 2$

مثال 20

ابحث استمرارية الدالة الآتية عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & , \quad x \neq 2 \\ 12 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

الحل

1) $f(2) = 12$ معرفة

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)$$

$$= 2^2 + 2 \times 2 + 4$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12 \quad (\text{اي أن الغاية موجودة})$$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 12$

أذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$

ćمارين (2-6)

1. لتكن $x = 3$ ابحث استمرارية الدالة عند $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. لتكن :-

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

ابحث استمرارية الدالة عند في مجالها.

3. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \quad x \geq 1 \\ 3x + 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$, $x = -1$, $x = 1$.

4. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , \quad x \leq 2 \\ 1 - x^2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

اثبت ان $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$.

5. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & , \quad x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة a اذا كانت $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$.

6. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \quad x \neq 1 \\ 4 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x = 1$ ؟

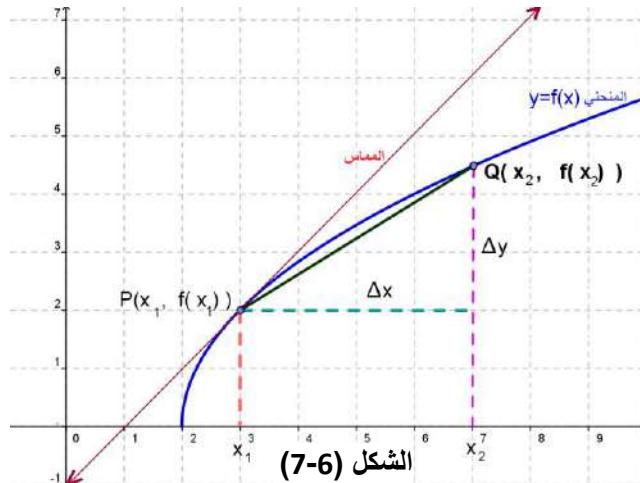
3-6 المشتقات (The Derivatives)

بعد ان اتممنا شرح الغایة والاستمرارية أصبحنا الان مستعدون للدخول في موضوع حساب التفاضل، ولنبدأ بمصطلح المشتقة.

نظراً لتطابق مفهوم المشتقة لدالة ما مثل $f(x)$ عند نقطة معينة مع مفهوم ميل المستقيم المماس لمنحنى تلك الدالة عند تلك النقطة، لذلك نجد من الضروري أن نبدأ هذا الفصل بموضوع مماس المنحنى عند نقطة معينة.

1-3-6 ميل المماس للمنحي عند نقطة معينة

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $I \in \mathbb{R}$ ولتكن x_1, x_2 عددين في I ، عندئذ يكون بيان الدالة $f(x)$ مستمراً عند النقطتين $(P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2)))$ ، نرسم القطعة المستقيمة \overline{PQ} كما في الشكل (7-6) الآتي :



لترمز $\Delta x = x_2 - x_1$ فيكون $x_2 = x_1 + \Delta x$ وبالتالي $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$ ومن معلوماتنا السابقة عن ميل المستقيم فان ميل القطعة المستقيمة \overline{PQ} يكون مساوياً الى:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

$$\therefore m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \Delta x \neq 0$$

والآن نعتبر النقطة P ثابتة ونحرك النقطة Q على المنحي باتجاه النقطة P . كلما اقتربت Q من P اقتربت Δx من الصفر وعندما تصبح القطعة المستقيمة \overline{PQ} أقرب الى المماس لمنحي الدالة عند النقطة P . وهذا يعني ان ميل المماس m للمنحي $y = f(x)$ عند نقطة التماس P هو الغاية لميل القطعة المستقيمة \overline{PQ} عندما تقترب Δx من الصفر ($\Delta x \rightarrow 0$) .
من هنا نستطيع ان نعرف ميل المماس m للدالة $y = f(x)$ عند النقطة P كالتالي :-

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} , \quad \Delta x \neq 0$$

مثال 21

جد ميل المماس للمنحي $f(x) = x^2 - 1$ عند $x = 2$

الحل

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} , \quad \Delta x \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

تكميلة

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(2 + \Delta x)^2 - 1] - (2^2 - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 1] - (4 - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) \\
 &= 4 + 0 = 4
 \end{aligned}$$

(4-6) مشتقة الدالة

لدينا الدالة $y = f(x)$ ، لاحظنا في البند السابق (5-3) ان تغييراً صغيراً في قيمة x مقداره Δx ادى الى تغيير صغير في قيمة الدالة $y = f(x + \Delta x) - f(x)$ حيث : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ وبقسمة Δy على Δx نحصل على:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \Delta x \neq 0$$

حيث يمثل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ معدل تغير الدالة.

عندما نحسب الغاية لمعدل تغير الدالة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر فأننا بذلك نحصل على معدل التغير الانني او اللحظي للدالة ونرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ ونطلق عليه تسمية (مشتقة الدالة) عند تلك النقطة، ونعبر عن ذلك بالرموز كالاتي :-

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

أي ان المشتقة للدالة عند نقطة معينة x هو معدل التغير الانني او اللحظي للدالة عند تلك النقطة.

ومن هنا وكما ورد في البند (3-6) نلاحظ ان قيمة مشتقة الدالة عند نقطة معينة تمثل ميل المستقيم المماس لمنحنى تلك الدالة عند تلك النقطة.

مثال 22

جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 5x$ باستعمال التعريف ثم أحسب $f'(0), f'(3)$

الحل

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0 \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x)] - (x^2 - 5x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x - x^2 + 5x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 5) \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

$$f'(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$$

أدن:

$$f'(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$$

مثال 23

جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ باستعمال التعريف.

الحل

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0 \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \end{aligned}$$

تكميلة

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} \\
 &= \frac{-1}{x(x + 0)} \\
 &= \frac{-1}{x^2}
 \end{aligned}$$

1-4-6 معادلة المماس لمنحني الدالة عند نقطة معينة

إذا كانت $y = f(x)$ دالة، (x_1, y_1) نقطة على منحني تلك الدالة فان معادلة المستقيم المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ تكون :}$$

مثال 24

إذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ، جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد

معادلة المماس للمنحني عند $x = 2$

الحل

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0 \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 1 - (2x^2 + 3x + 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 3x + 3\Delta x + 1 - 2x^2 - 3x - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x - 2x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 3)}{\Delta x} \\
 &= 4x + 2 \times 0 + 3
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x + 3$$

$$\therefore m = f'(2) = 4 \times 2 + 3 = 11$$

تمالة

ذلك:

$$y = f(2) = 2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 15$$

نقطة التماس $(2, 15)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 15 = 11(x - 2)$$

$$y - 15 = 11x - 22$$

$$11x - y - 7 = 0 \quad \text{معادلة المماس}$$

6-5 التطبيق الفيزيائي للمشتقة

ان الازاحة والزمن مقداران فيزيائيان نستطيع قياسهما فلو فرضنا ان جسماً ما في الزمن t كان في الموقع $S = f(t)$ وفي زمن $(t + \Delta t)$ كان في الموقع $f(t + \Delta t)$.

$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t) \quad \text{اذن :}$$

حيث تمثل ΔS التغير في الازاحة S عندما يكون التغير في الزمن (t) يساوي Δt .

وبما ان معدل السرعة هو الفرق بين الازاحتين مقسوما على الفرق بين الزمنين فانه يمكننا ان نقول ان معدل السرعة هو $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ونعبر عن ذلك بالرموز كالتالي:-

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

وعندما تصغر Δt وتقترب من الصفر فان معدل السرعة يصبح السرعة الانية للجسم في تلك اللحظة ونرمز لها بالرمز V حيث:-

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

اي ان السرعة الانية V هي مشتقة الازاحة $S = f(t)$ وبالرموز:-

$$V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبما ان التعجيل يمثل معدل السرعة بالنسبة للزمن فان مشتقة السرعة الانية تعطي تعجيل الجسم اي ان:-

$$A = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

مثال 25

لتكن الدالة $S = f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالأمتار. جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 sec من بدء الحركة.

الحل

$$\therefore S = f(t) = 2t^2 + 3$$

$$\therefore S = f(2) = 2 \times 2^2 + 3 = 11 \text{ m}$$

اي ان موقع الجسم يكون على بعد 11 m بعد 2 sec من بدء الحركة .

$$V = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2(t + \Delta t)^2 + 3 - (2t^2 + 3)}{\Delta t}$$

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 3 - 2t^2 - 3}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - 2t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(4t + 2\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4t + 2\Delta t)$$

$$= 4t + 2 \times 0 = 4t$$

اذن سرعة الجسم بعد 2 sec من بدء الحركة هي:

$$V = 4 \times 2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

مثال 26

لتكن الدالة $V(t) = 3t^2$ تمثل سرعة جسم متحرك مقاسة بالأمتار على الثانية جد التعجيل A بعد 2 sec من بدء الحركة .

الحل

$$A = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t + \Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t}$$

تمام

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(6t + 3\Delta t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6t + 3\Delta t) \\
 &= 6t + 3 \times 0 = 6t
 \end{aligned}$$

اذن تعجيل الجسم بعد 2 sec من بدء الحركة هو:

$$A = 6 \times 2 = 12 \text{ m/sec}^2$$

(6-6) قواعد ايجاد المشتقة

في هذا البند سنقدم بعض القواعد التي تسهل علينا استخراج مشتقة الدالة عند نقطة في مجالها بدون استخدام التعريف، وبرهنة هذه القواعد ممكن باستخدام التعريف إلا إننا سوف نقبل بها بدون برهان وهي :-

(1) مشتقة الدالة الثابتة $y = f(x) = C$ حيث C عدد حقيقي ثابت هي:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

مثال 27

إذا كانت $y' = 0$ فإن $y = 7$

وإذا كانت $f'(x) = 0$ فإن $f(x) = -5$

وإذا كانت $y' = 0$ فإن $y = \frac{1}{2}$

وإذا كانت $h'(x) = 0$ فإن $h(x) = \sqrt{3}$

(2) مشتقة الدالة $y = f(x) = x^n$ حيث $n \in \mathbb{R}$

إذا كانت $y' = 3x^2$ فإن $y = x^3$

مثال 28

وإذا كانت $f'(x) = 5x^4$ فإن $f(x) = x^5$

وإذا كانت $\frac{dy}{dx} = 1$ فإن $x^{1-1} = x^0 = 1$

وإذا كانت $g'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$ فإن $g(x) = x^{-4}$

(3) مشتقة الدالة $y = f(x) = a \cdot x^n$ حيث $y' = f'(x) = a \cdot n x^{n-1}$ تساوي $n \in \mathbb{R}$

مثال 29

$$\text{إذا كانت } y' = 15x^4 \text{ فإن } y = 3x^5$$

وإذا كانت $y = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ فإن المشتقة تستخرج كما يلي :

$$y = 5 \times x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = 5 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{10}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

(4) مشتقة مجموع او طرح عدد من الدوال كل منها قابلة للاشتاقاق في نفس النقطة يساوي حاصل جمع او طرح مشتقاتها في تلك النقطة

مثال 30

$$y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$$

إذا كانت

$$y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} - 0$$

فإن

$$y' = -12x^{-4} - 10x + 7$$

(5) مشتقة حاصل ضرب دالتين كل منها قابلة للاشتاقاق في نفس النقطة يساوي :
الدالة الاولى \times مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية \times مشتقة الدالة الاولى

مثال 31

$$f(x) = (3x - 2)(4x + 1)$$

إذا كانت

$$f'(x) = (3x - 2) \times 4 + (4x + 1) \times 3$$

فإن

$$= 12x - 8 + 12x + 3$$

$$= 24x - 5$$

(6) مشتقة حاصل قسمة دالتين كل منها قابلة للاشتاقاق في نفس النقطة يساوي

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

مثال 32

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 2}, \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

إذا كانت

$$f'(x) = \frac{(3x + 2) \times 2 - (2x + 1) \times 3}{(3x + 2)^2}$$

فإن

$$= \frac{6x + 4 - 6x - 3}{(3x + 2)^2} = \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

7) مشتقة الدالة بالصورة $f(x) = [g(x)]^n$ تساوي
 $f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
أي ان الدالة المعرفة لأس حقيقي نشتقها من الخارج ثم من الداخل

مثال 33

$$y = 4 \times (2x^2 + 3x - 2)^5$$

إذا كانت

$$y' = 20(2x^2 + 3x - 2)^4 \times (4x + 3)$$

فإن

مثال 34

تتبع خطوات الاشتتقاق في كل من الامثلة الآتية :-

$$a) y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} = (x^{13} + 13 + x^{-13})^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = \frac{1}{5}(x^{13} + 13 + x^{-13})^{\frac{-4}{5}}(13x^{12} - 13x^{-14})$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 + 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 4x^3 - x^6}{(x^4 + 1)^2}$$

$$c) y = \left(\frac{x+2}{x^2 - 3x}\right)^2$$

$$y' = 2\left(\frac{x+2}{x^2 - 3x}\right) \left[\frac{(x^2 - 3x) - (2x - 3)(x + 2)}{(x^2 - 3x)^2} \right]$$

$$= 2\left(\frac{x+2}{x^2 - 3x}\right) \left[\frac{x^2 - 3x - 2x^2 - x + 6}{(x^2 - 3x)^2} \right]$$

$$= 2\left(\frac{x+2}{x^2 - 3x}\right) \left[\frac{-x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 3x)^2} \right]$$

$$= 2\left(\frac{(x+2)(-x^2 - 4x + 6)}{(x^2 - 3x)^3}\right)$$

تملة

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\frac{(x+2)(-x^2 - 4x + 6)}{(x^2 - 3x)^3} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{-x^3 - 4x^2 + 6x - 2x^2 - 8x + 12}{(x^2 - 3x)^3} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{x^3 - 6x^2 - 2x + 12}{(x^2 - 3x)^3} \right) = \frac{2x^3 - 12x^2 - 4x + 24}{(x^2 - 3x)^3}
 \end{aligned}$$

d) $g(x) = (x^3 - 2x^2)^4$

$$g'(x) = 4(x^3 - 2x^2)^3(3x^2 - 4x)$$

e) $y = \frac{x}{2} - \frac{5x^3}{2}$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}(3x^2) = \frac{1}{2} - \frac{15}{2}x^2$$

f) $h(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^5} \Rightarrow h(x) = (1+x^2)^{\frac{5}{3}}$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{5}{3}(1+x^2)^{\frac{2}{3}}(2x) \\
 &= \frac{10x}{3}(1+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{10x}{3}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}
 \end{aligned}$$

i) $y = \frac{7}{x^9} \Rightarrow y = 7x^{-9}$

$$y' = -63x^{-10} = \frac{-63}{x^{10}}$$

g) $y = \frac{5}{x^2 - 7x + 3}$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x^2 - 7x + 3) \cdot 0 - 5(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 3)^2} \\
 &= \frac{-10x + 35}{(x^2 - 7x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

h) $f(x) = (4x^2 - 3)^2 \times (x + 5)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (4x^2 - 3)^2 \times 1 + (x + 5) \times 2(4x^2 - 3)^1 \times 8x \\
 &= (4x^2 - 3)^2 + 16x(4x^2 - 3) \times (x + 5) \\
 &= (4x^2 - 3)[(4x^2 - 3) + 16x(x + 5)] \\
 &= (4x^2 - 3)[4x^2 - 3 + 16x^2 + 80x] \\
 &= (4x^2 - 3)[20x^2 + 80x - 3]
 \end{aligned}$$

تمارين (3-6)

1. جد المشتقة لكل من الدوال الآتية :-

$$1) f(x) = 2x - 3$$

$$8) y = \frac{\sqrt{x^3 + 4}}{x^2(x - 2)^3}$$

$$2) f(x) = x^3 + 2x - 5$$

$$9) y = \left(\frac{\sqrt{2x - 7}}{x^2} \right)^{-2}$$

$$3) f(x) = \sqrt{x} + 1$$

$$10) y = \sqrt{\frac{2x}{x^2 + 1.8}}$$

$$4) f(x) = \frac{3}{x + 2}$$

$$11) y = (4x^2 \sqrt{x^3})^{\frac{1}{4}}$$

$$5) f(x) = 2x^2 - 5x^{-2} + 3x^3 - x^{-1}$$

$$12) f(t) = \sqrt{\frac{t - 2}{t^2 + 5}}$$

$$6) f(t) = \frac{t^2}{t^2 + 2}$$

$$13) y = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 1} \right)^5$$

$$7) y = (x^4 - 3x)^{-2}$$

$$14) y = x(x^2 - 2)^7$$

2. جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحني الذي معادلته $f(x) = x^2 + 2x + 1$ عند النقطة $(1, 4)$

3. جد معادلة المماس للمنحني الذي معادلته $f(x) = x^3 - 1$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y .

4. جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $S(t) = \sqrt{3t^2 + 24}$ ، حيث S الازاحة بالأمتار ، الزمن بالثاني . جد الزمن اللازم ليصل الى سرعة $.1 \text{ m/sec}$

7-6 المشتقات من الرتب العليا

لتكن $f(x)$ دالة مشتقها $f'(x)$ ، يطلق على $f'(x)$ اسم المشتقة الاولى وهي دالة لنفس المتغير x اذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة فانه يطلق عليها اسم المشتقه الثانية للدالة وعليه فان المشتقه الثانية هي مشتقه المشتقه الاولى ويرمز لها بأحد الرموز الآتية :-

$$f''(x) , y'', \frac{d^{(2)}y}{dx^2} , \frac{d^{(2)}}{dx^2}(f(x))$$

وهكذا تعرف المشتقه ذات الرتبة n للدالة $y = f(x)$ بانها مشتقه المشتقه ذات الرتبة $(n - 1)$ ويرمز لها بأحد الرموز الآتية :-

$$f^{(n)}(x) , y^{(n)}, \frac{d^{(n)}y}{dx^n} , \frac{d^{(n)}}{dx^n}[f(x)]$$

مثال 35

جد المشتقه الثانيه لكل من الدوال الاتيه :-

$$a) f(x) = (x^2 + 3)^{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{5}{2}(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} \cdot 2x \\&= 5x(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= 5x \left(\frac{3}{2}(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} \times 2x \right) + (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} \cdot 5 \\f''(x) &= 15x^2 \cdot (x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

تمارين (4-6)

1. جد المشتقه لكل من الدوال الاتيه :-

$$a) f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$$

$$b) f(x) = \frac{3x}{x-1}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x^3 + 3} + 5x$$

$$d) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

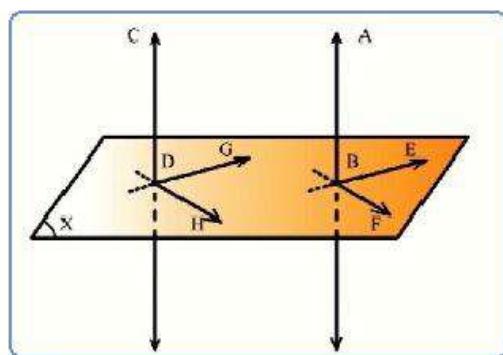
$$e) f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. جد المشتقه الثالثة إذا كانت: $y = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ إذا علمت ان $f(x) = \frac{2}{x^2}$ أثبت صحة المتطابقة الاتيه :-

$$f'''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) = \frac{2x-4}{x^3} + \frac{12x-48}{x^5}$$

الفصل السابع



الهندسة الفراغية
(المجسمة)

الفصل السابع

الهندسة الفراغية (المجسمة) (Solid Geometry)

البنود
(SECTIONS)

الهندسة الفراغية (المجسمة)	1-7
العلاقة بين المستقيمات والمستويات في الفضاء	2-7
مبرهنة(1) (خط تقاطع مستويين متوازيين بمستوى ثالث متوازيين)	3-7
مبرهنة(2) (إذا توازى مستقيمان فالمستوى الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر)	4-7
مبرهنة (3) (المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان)	5-7
مبرهنة(4) (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل منهما مستقيم محتوى في أحدهما ويواذي الآخر).	6-7
تعامد المستقيمات والمستويات	7-7
مبرهنة(5) (المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) (أكتب المعادلة هنا)	8-7
مبرهنة(6) (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)	9-7

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
<i>Straight line</i>	\overleftrightarrow{AB}	المستقيم AB
<i>length</i>	$\ AB\ $	طول القطعة المستقيمة AB
<i>Plane</i>	(X)	المستوي X
<i>Intersection</i>	\cap	تقاطع
<i>Implies</i>	\Rightarrow	يؤدي الى
<i>Measure of an angle</i>	$m\angle$	قياس الزاوية
<i>Perpendicular</i>	\perp	عمود على
<i>Parallel</i>	\parallel	يواذي
<i>Not Parallel</i>	\nparallel	لا يوازي
<i>Null set</i>	\emptyset	مجموعة خالية
<i>Belongs to</i>	\in	ينتهي الى
<i>Doesn't Belong to</i>	\notin	لا ينتهي الى
<i>Subset</i>	\subset	مجموعة جزئية
<i>Therefore</i>	\therefore	اذن
<i>Because</i>	\because	بما ان
<i>Identical to</i>	\equiv	متطابق مع

7-1 الهندسة الفراغية (المجسمة) Space Geometry

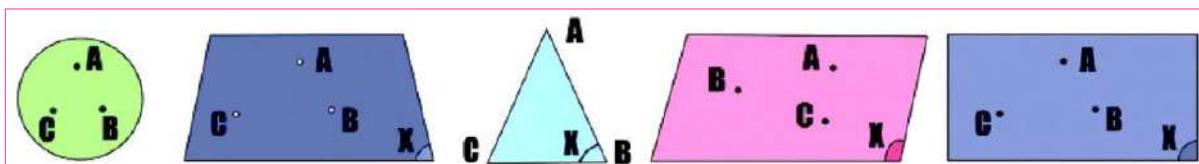
تمہید 1-1-7

تعلمت في الهندسة المستوية كلاً من النقطة والمستقيم (*Line*) حيث رمزاً له \overleftrightarrow{AB} او واستخدمنا الرمز \overrightarrow{AB} للدلالة على قطعة المستقيم L والرمز $\|AB\|$ للدلالة على طول القطعة AB . المستقيمة

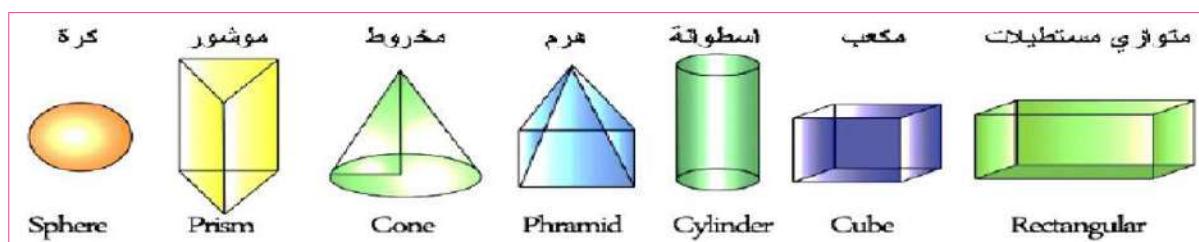


و سندرس مصطلح هندسي يدعى المستوى *plane* وهو الذي لو أخذت عليه أي نقطتين ووصل بينهما بمستقيم لأنطبقت جميع نقاط ذلك المستقيم عليه مثل زجاج النافذة ، سطح المنضدة ، ساحة ملعب كرة القدم ،

- وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث *Triangle* ، مربع *Square*
- مستطيل *Rectangle* ، متوازي أضلاع *Parallelogram* ، شبه منحرف *Trapezoid*
- دائرة *Circle* ، ويرمز له (X) او (Y) ويقرأ المستوى X او Y كما في الأشكال الآتية :-

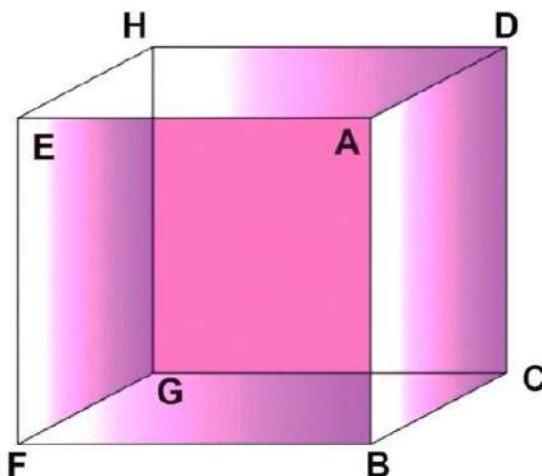


و درست العلاقة بين النقطة والمستقيم التي يحويها مستو واحد كما درست بعض المجسمات مثل :



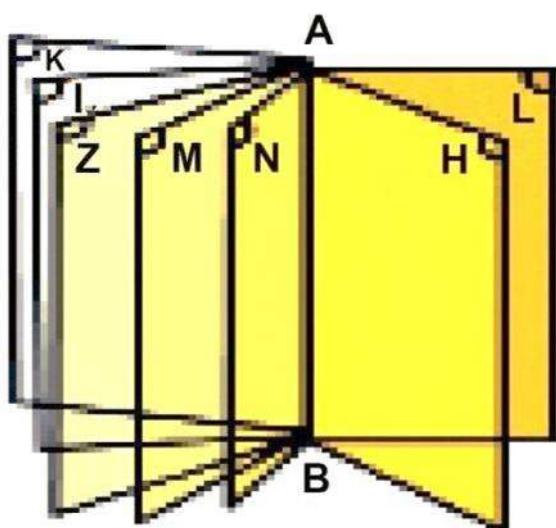
كما شاهدت غيرها كالأجهزة المنزلية (الثلاجة ، الغسالة ، المبردة ، التلفزيون ، ...) والسيارات والعقارات وهي تمثل اشكالاً هندسية ذات ثلاثة أبعاد وتشغل حيزاً من الفراغ وأن دراستها تسمى بالهندسة الفراغية وهي تدرس العلاقة بين النقط والمستقيمات والمستويات التي يحويها الفضاء.

نشاط (1)



في الشكل المجاور اذكر:

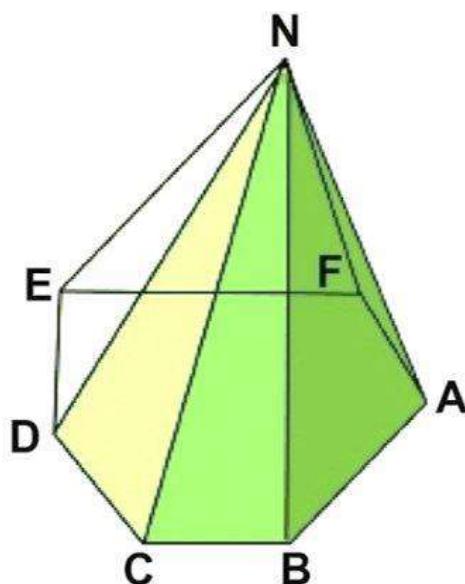
- (1) المستقيمات التي تمر بالنقطة A .
- (2) المستقيمات التي تمر بالنقطتين A ، B معاً.
- (3) المستويات التي تمر بالنقطة A .
- (4) المستويات التي تمر بالنقطتين A ، B معاً



نشاط (2)

في الشكل المجاور:

- (1) اذكر المستويات التي تمر بالنقطة A .
- (2) اذكر المستويات التي تمر بالمستقيم \overleftrightarrow{AB} .



نشاط (3)

في الشكل المجاور:

- (1) اذكر مستقيماً يمر بالنقطة N .
- (2) اذكر مستوىً يمر بالنقطة N .
- (3) اذكر مستوىً يمر بالنقطتين A ، N معاً.
- (4) اذكر مستوىً يمر بالنقاط N ، B ، A معاً.
- (5) اذكر أربع نقط ليست في مستوٍ واحد.
- (6) كم مستوٍ يمر بالنقطة N .

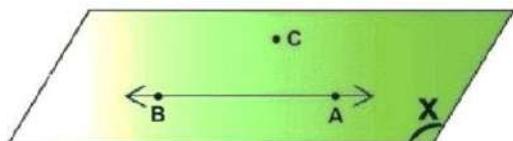
مما سبق نستنتج :

2-1-7 عبارة أولية :

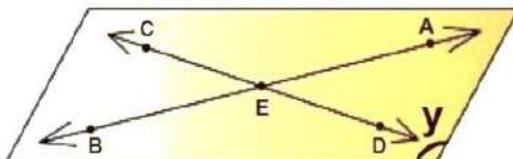
لكل ثلات نقاط على استقامة واحدة Non collinear يوجد مستوى واحد فقط (وحيد) يحويها.

ومنها نحصل على :

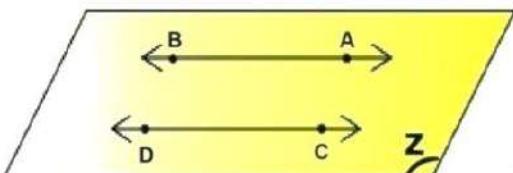
(ا) لكل مستقيم ونقطة لا تنتهي اليه يوجد مستوى واحد يحويها.



(ب) لكل مستقيمين متقطعين يوجد مستوى واحد يحويهما.



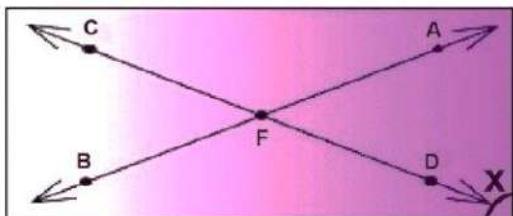
(ج) لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوى واحد يحويهما.



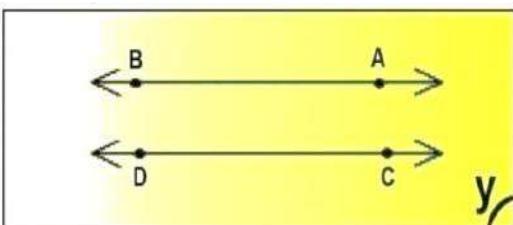
2-7 العلاقة بين المستقيمات والمستويات في الفضاء

2-7-1 العلاقة بين مستقيمين في الفضاء:

(ا) المستقيمان المتقطعان Intersecting Lines : اللذان يشتراكان بنقطة واحدة فقط وهما في مستوى واحد.



(ب) المستقيمان المتوازيان Parallel lines : إذا لم يشتراكا بأية نقطة وهما في مستوى واحد.



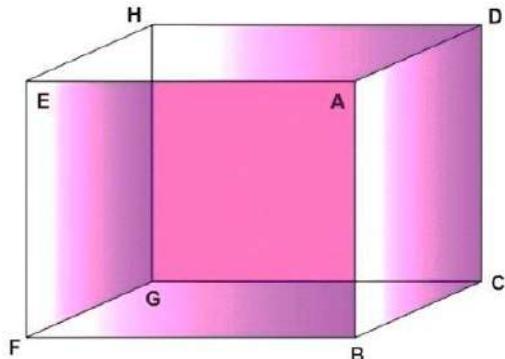
ج) المستقيمان المتخالغان skew lines : اللذان لا يمكن أن يحتويهما مستوٍ واحدٍ (أي إنهمما

غير متقاطعين وغير متوازيين).

(أي أن مجموعة تقاطعهما خالية ولا

يحتويهما مستوٍ واحدٍ)

نشاط :



من الشكل المجاور نلاحظ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DH} متخالفين:

(أ) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

(ب) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.

(ج) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.

2-2-7 العلاقة بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

(أ) المستقيم الموازي للمستوي : إذا لم يشتراك معه بأية نقطة أو كان محظى فيه.

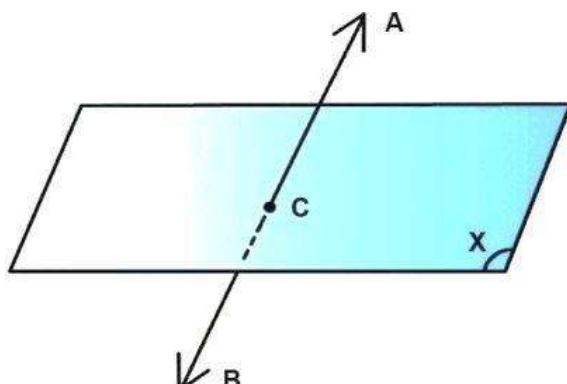


$$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \emptyset$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$$

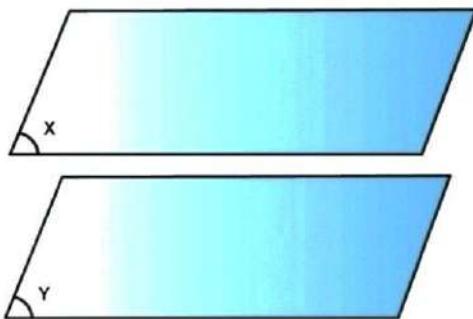
(ب) المستقيم القاطع للمستوي : إذا اشتراك معه بنقطة واحدة فقط (X).



$$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{C\}$$

7-2-3 العلاقة بين مستويين في الفضاء:

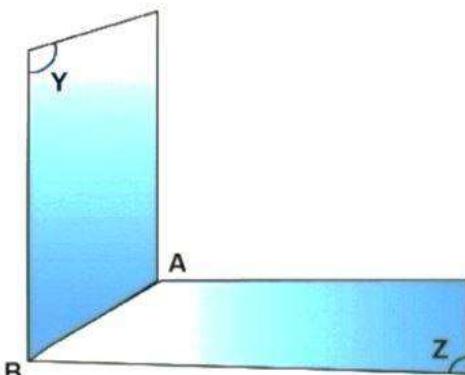
(أ) المستويان المتوازيان : إذا لم يشتركا بأية نقطة.



$$(X) \cap (Y) = \emptyset$$

$$\therefore (X) \parallel (Y)$$

(ب) المستويان المتقاطعان : إذا اشتراكا بمستقيم.



$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$$

نلاحظ أنه إذا اشتراك المستويان بنقطة فأنهما يشتركان بخط مستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين ويسمى (مستقيم التقاطع) ويكون محتوى في كليهما.

ملاحظة:

(أ) التساوي : إسمان لشيء واحد.

(ب) كل مستقيم يوازي نفسه.

(ج) كل مستوي يوازي نفسه.

ما نقدم نستنتج :

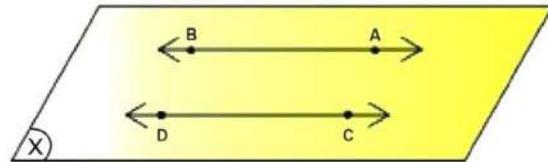
(أ) إذا توازى مستقيمان فالمستوى المار ب أحدهما ونقطة من الآخر فإنه يحويهما.

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

إذا كان:

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$C \in (X)$$



$$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$$

فإن:

(ب) المستوى الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.

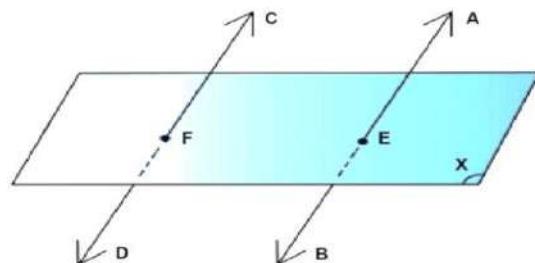
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

إذا كان:

$$E \text{ يقطع } (X) \text{ في } \overleftrightarrow{AB}$$

$$F \text{ يقطع } (X) \text{ في } \overleftrightarrow{CD}$$

فإن:



(ج) إذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في أحدهما يوازي الآخر.

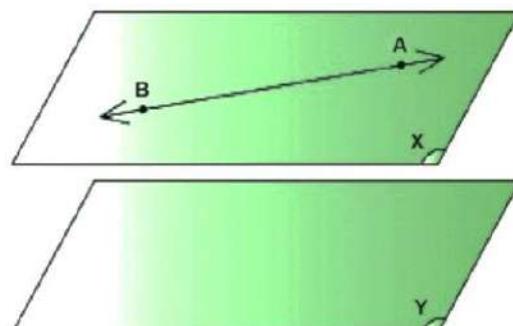
$$(X) \parallel (Y)$$

إذا كان:

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$$

فإن:



(د) إذا واجز ضلعاً زاوية ضلعاً زاوية أخرى تساوى قياسهما أو تكاملتا وتوازى مستويهما.

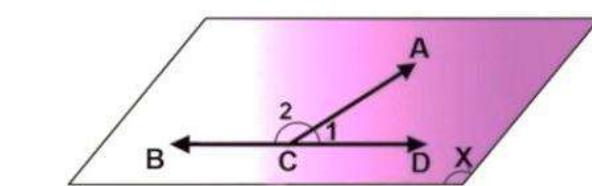
$$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$$

إذا كان:

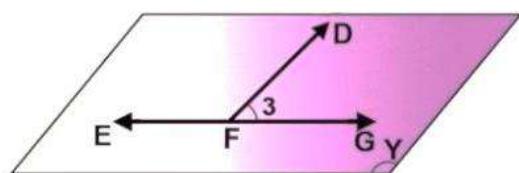
$$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$$

$$m\angle 1 = m\angle 3$$

فإن:

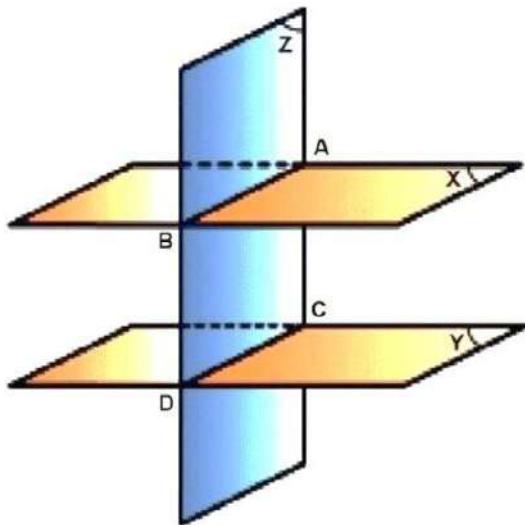


$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ, (X) \parallel (Y)$$



Theorem : (1-3) مبرهنة

خط تقاطع مستويين متوازيين بمستوى ثالث متوازيين



المعطيات:

$$(X) \parallel (Y)$$

$$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$$

$$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

البرهان:

$$\text{(معطى)} \quad \begin{cases} (X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB} \\ (Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD} \end{cases}$$

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتتقاطعين) $\begin{cases} \overleftrightarrow{AB} \subset (X), \overleftrightarrow{AB} \subset (Z) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \subset (Z) \end{cases} \therefore$

في (Z) إذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ فسوف يقطعه في نقطة مثل E

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتتقاطعين) $\begin{cases} E \in \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \Rightarrow E \in (X) \\ E \in \overleftrightarrow{CD} \subset (Y) \Rightarrow E \in (Y) \end{cases} \therefore$

(E) لا يشتركا في نقطة $E \in (X) \cap (Y) \therefore$

وهذا خلاف الفرض حيث $(X) \parallel (Y)$

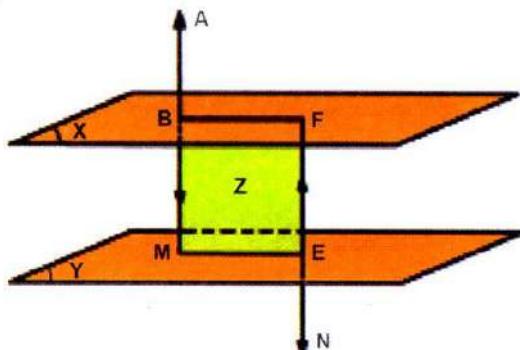
إذن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(يتوازى المستقيمان إذا وقعوا في مستوى واحد) $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

1-3-7 نتیجة:

المستقيم الذي يقطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر أيضاً



المعطيات:

$$(X) \parallel (Y)$$

\overleftrightarrow{AB} يقطع (X) في B

المطلوب إثباته:

\overleftrightarrow{AB} يقطع (Y)

البرهان:

لتكن $E \in (Y)$

نرسم \overleftrightarrow{EN} (يمكن رسم مستقيم مواز لآخر من نقطة لا تنتهي اليه)

نعين (Z) بالمستقيمين \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{EF} (يتعين مستوى وحيد بمستقيمين متوازيين)

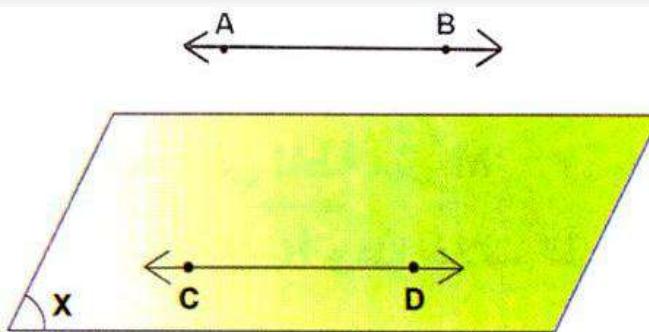
(خط تقاطع مستويين متوازيين بمستوى ثالث متوازيين) $\overleftrightarrow{EM} \parallel \overleftrightarrow{FB}$

إذن \overleftrightarrow{AB} يقطع (Y) في M

و.هـ.

4-7 مبرهنة (2) Theorem :

إذا توأمت مستقيمان فالمستوى الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر



المعطيات:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$$

البرهان:

إذا كان \overleftrightarrow{AB} لا يوازي (X) فيقطعه بنقطة مثل E

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X) (المستوى الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

وهذا خلاف الفرض لأن (X)

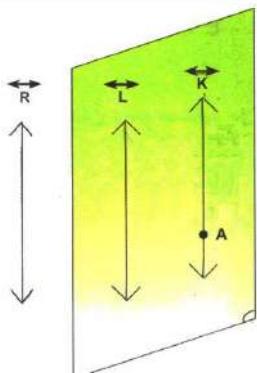
$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع (X)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

و.هـ.م

Theorem : (3) مبرهنة 5-7

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان



المعطيات:

$$\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{R}, \quad \overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{R}$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$$

البرهان:

لتكن $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم L ونقطة A نعين (X) (يتعين مستوى وحيد بمستقيم ونقطة لا تنتهي اليه)

إن لم يكن $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فسوف يقطعه في A

$\therefore \overleftrightarrow{R}$ يقطع (X) وهذا مستحيل (المستوى الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

$\therefore \overleftrightarrow{K} \subset (X)$

في (X) إن لم يكن $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$ ، فيقطعه في نقطة مثل M

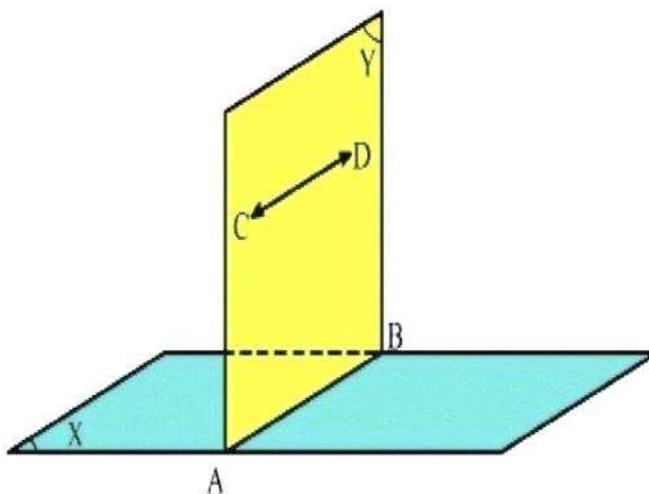
ينتج وجود مستقيمين مرسومين من M يوازيان \overleftrightarrow{R} وهذا خلاف الفرض (عبارة التوازي)

$\therefore \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

و.هـ.م $\therefore \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

Theorem : (4) مبرهنة 6-7

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر

المعطيات:

$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

البرهان:

$$\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X) \quad (\text{معطى})$$

في (Y) لو كان \overleftrightarrow{CD} يقطع \overleftrightarrow{AB} لنتج أن \overleftrightarrow{CD} يقطع (X)

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

وهذا خلاف الفرض حيث

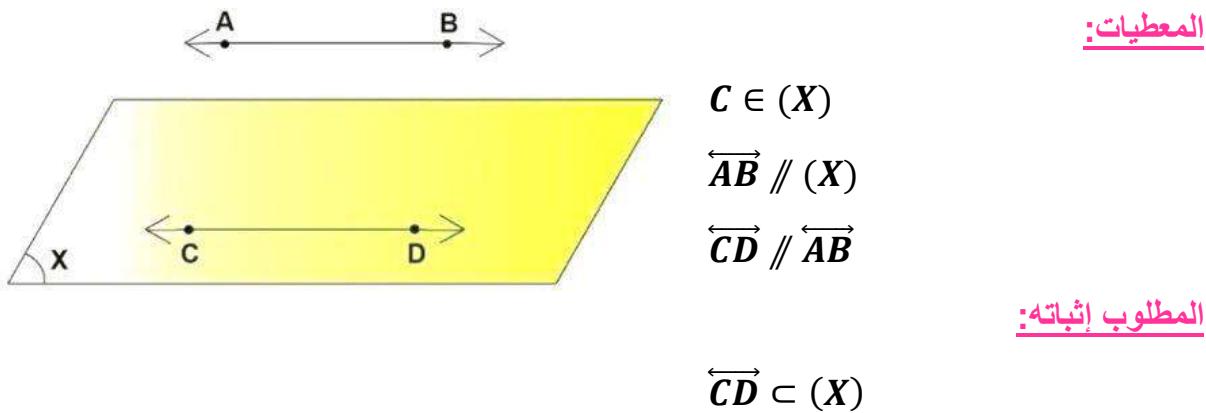
$$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \therefore$$

و.هـ.م

1-6-7 نتیجة

إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوى موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوى



البرهان:

إذا لم يكن $(X) \subset \overleftrightarrow{CD}$ فيكون قاطعاً له في نقطة C
 $\therefore \overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) (المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

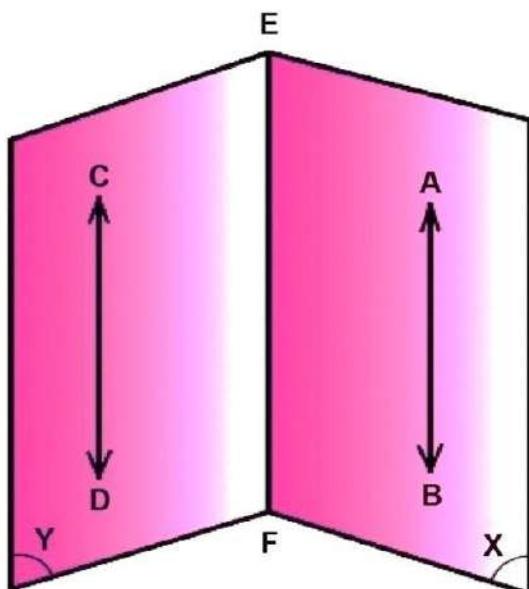
وهذا خلاف الفرض حيث $(X) \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ لا يقطع (X) بل محتوى فيه

و.هـ

مثال

إذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على أحد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلًا من المستقيمين المتوازيين



المعطيات:

$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB} \text{ ، } \overleftrightarrow{CD}$$

البرهان:

$$(\text{معطى}) \quad \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

(إذا توازى مستقيمان فال المستوى الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر) $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$

$$(\text{معطى}) \quad \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \quad \therefore$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \quad \therefore$$

(مبرهنة 4- مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر)

(المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان) $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

و.هـ.

تمارين (1-7)

1. أي من العبارات الآتية خاطئة أي منها صائبة وبين السبب:

(a) إذا كان $(X) \subset \overleftrightarrow{AB}$ فيوجد مستقيم وحيد يوازي \overleftrightarrow{AB} ومحتوٍ في (X) .

(b) يوجد مستوىٌ وحيد موازٍ لمستوى معلوم.

(c) المستقيمان الموازيان لمستوى واحد متوازيان.

(d) إذا وازى ضلعان من مثلث مستوىً معلوماً كان ضلعاً الثالث موازياً للمستوى المعلوم.

(e) المستقيمان المخالفان لمستقيم ثالث متخالفان.

(f) إذا كان (X) ، (Y) مستويين غير متوازيين فإنهما يتقاطعان بنقطة واحدة.

(g) إذا كانت $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{A, B\}$ فإن $A, B \in (X)$

(h) كل مستقيم يمكن أن يمر به عدد غير منتهٍ من المستويات.

(i) عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة هو (3) مستويات.

(j) يوجد مستوىٌ وحيد يحوي مستقيمين متخالفين.

2. صحق ما تراه خطأ في العبارات الآتية:

(a) إذا كان $\{A\} = A \in (X)$ ، $\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{K} = \{A\}$ فإن $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ حيث

(b) يتقاطع المستويان المختلفان في مستوى.

(c) إذا كان تقاطع المستقيم \overleftrightarrow{L} والمستوى (X) يساوي \emptyset فإن $(X) \parallel \overleftrightarrow{L}$.

(d) إذا كان المستقيم $(X) \parallel \overleftrightarrow{L}$ فإن $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ حيث

(e) إذا كان المستقيم $(X) \subset \overleftrightarrow{K}$ فإن $\overleftrightarrow{K} \cap (X) = \emptyset$

(f) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

(g) المستقيم المحتوٍ في أحد مستويين متوازيين يقطع المستوى الآخر.

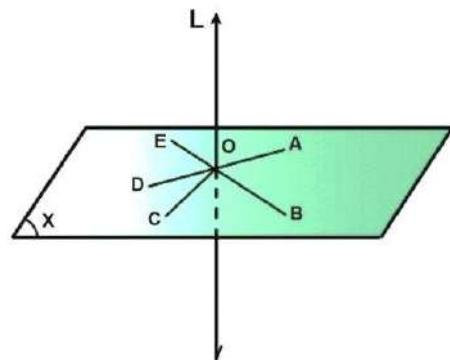
(h) إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوىٌ وتقاطع المستويان فإن مستقيم تقاطعهما يقطع كلاً المستقيمين.

(i) إذا قطع مستوىٌ كلاً من مستويين متوازيين فإن خطٍ تقاطعه تقاطعه معهما يكونان مختلفين.

7-7 تعايد المستقيمات والمستويات :

تعريف:

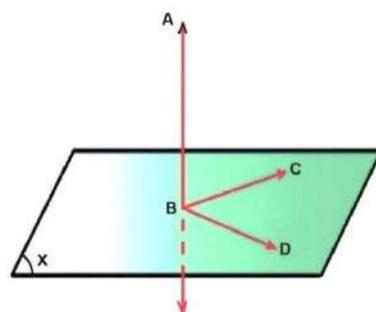
1. المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى.



$$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \dots \subset (X) , \quad L \perp (X)$$

$L \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \dots$ فيكون

2. المستقيم العمودي على مستقيمين متتقاطعين من نقطه تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها.



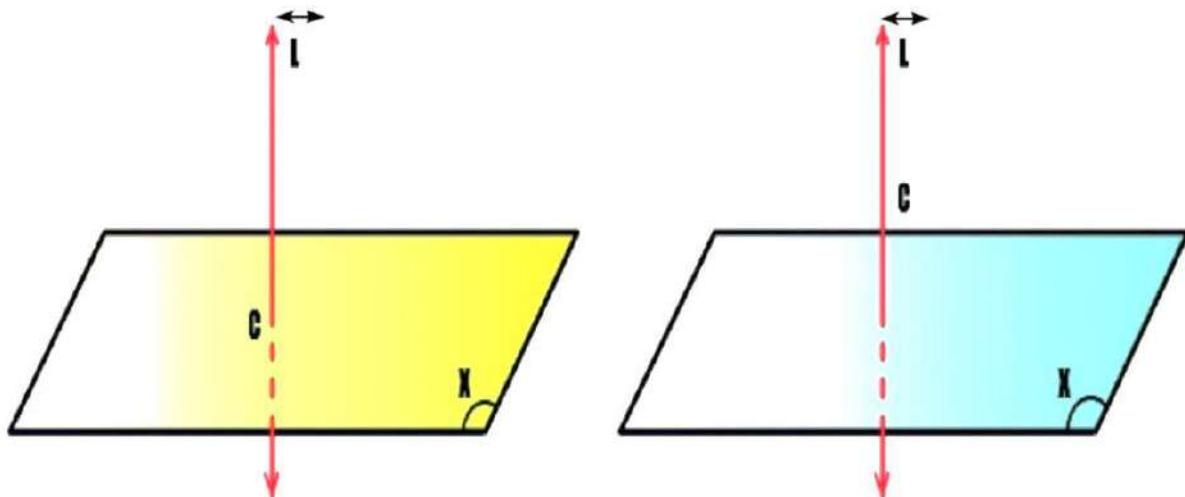
$$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ فيكون

وهو الشرط اللازم والكافي كي يكون المستقيم عمودي على المستوى.

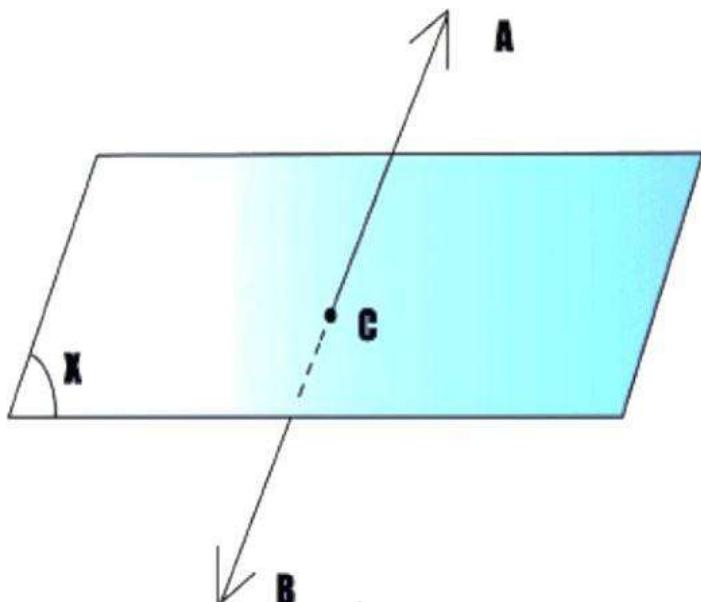
3. من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم.



نقطة أما $C \notin (X)$ أو $C \in (X)$

\therefore يوجد مستقيم وحيد مثل \vec{L} يمر من نقطة C بحيث $C \in (X)$.

4. يكون المستقيم \overrightarrow{AB} مائلًا على المستوى (X) إذا كان قاطعًا له وغير عمودي عليه.



$$\overrightarrow{AB} \cap (X) = \{C\}$$

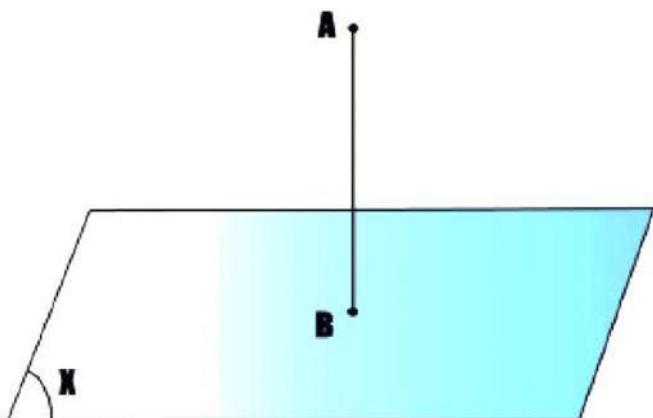
(X) غير عمودي \overrightarrow{AB}

(X) مائل على \overrightarrow{AB}

ملاحظة:

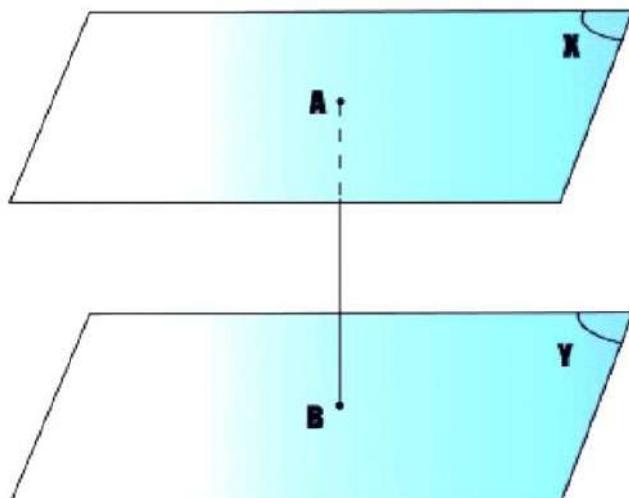
يكون \overleftrightarrow{AB} غير عمودي على (X) اذا كان مائلًا عليه أو موازيًّا له

5. يقال لطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة وأثر العمود النازل منها على المستوى المعلوم (بعد النقطة المعلومة عن المستوى).



(X) هو بعد النقطة A عن \overleftrightarrow{AB}
وهو أقصر مسافة بين النقطة A و(X).

6. يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين متوازيين والمحددة بهما (البعد بين المستويين المتوازيين).



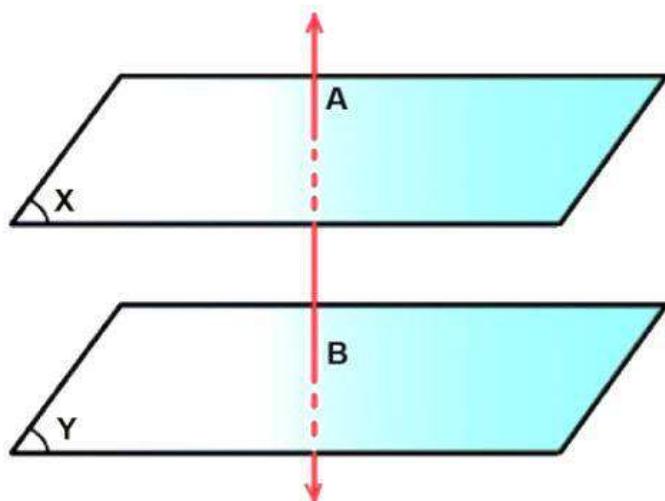
ملاحظة:

البعد بين مستويين متوازيين ثابت

إذا كان $(X) \parallel (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

\overleftrightarrow{AB} يمثل البعد بين (X) ، (Y)

7. المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.

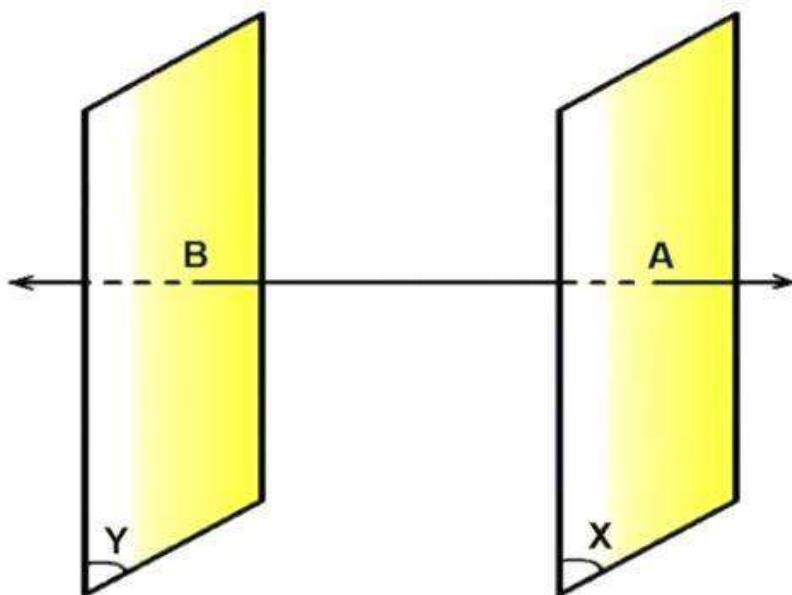


$(X) \parallel (Y)$ إذا كان

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$ فإن

8. المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان.



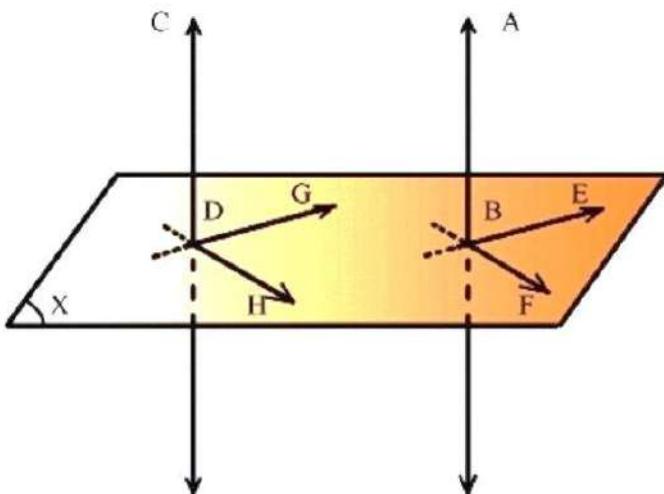
$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ إذا كان

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

$(X) \parallel (Y)$ فإن

Theorem (5) مبرهنة 8-7

المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



المعطيات:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

البرهان:

(المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر) $\overleftrightarrow{CD} \cap (X) = \{D\}$

في (X) نرسم $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$

ثم نرسم $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DH}$

(عبارة توازي) $\begin{cases} \overleftrightarrow{DG} \parallel \overleftrightarrow{BE} \\ \overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF} \end{cases}$

(إذا واجه ضلعاً زاوية ضلعاً زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستواهما) $\begin{cases} m\angle ABE = m\angle CDG \\ m\angle ABF = m\angle CDH \end{cases} \therefore$

(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

(العمود على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF} \therefore$

$$m\angle ABE = m\angle CDG = 90^\circ \therefore$$

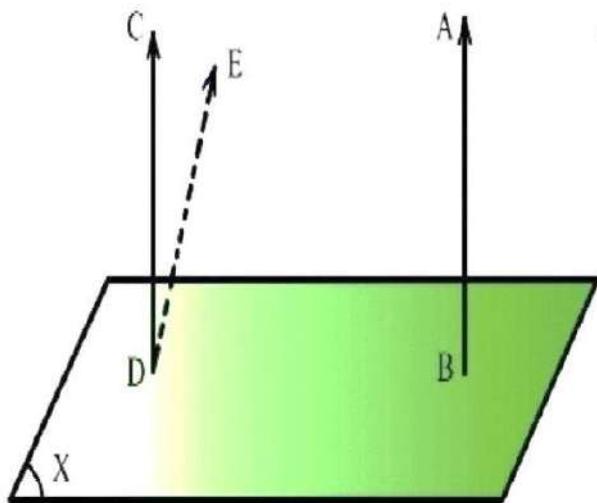
$$m\angle ABF = m\angle CDH = 90^\circ$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) $\overleftrightarrow{CD} \perp (X) \therefore$

و.هـ.م

1-8-7 نتیجة

المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان



المعطيات:

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

البرهان:

$$\text{ان لم يكن } \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

من $D \in (X)$ نرسم $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد مواز لآخر من نقطة لا تنتهي اليه)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \quad (\text{معطى})$$

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) $\therefore \overrightarrow{DE} \perp (X)$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X) \quad (\text{معطى})$$

أصبح من نقطة D وجود مستقيمين عموديين على (X) وهذا غير ممكن

(من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم)

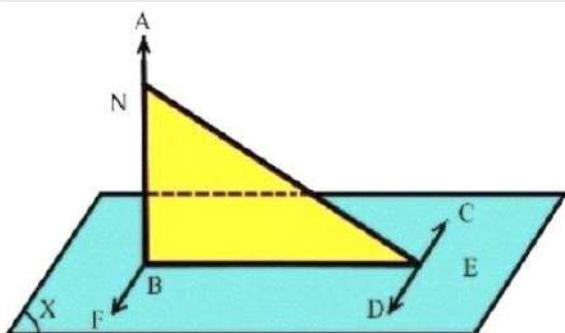
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} \therefore$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \therefore$$

و.هـ.

Theorem (6) مبرهنة 9-7

مبرهنة الأعمدة الثلاثة: إذا رسم من نقطة في مستوى مستقيمان أحدهما عمودي على المستوى الآخر عمودي على مستقيم معروف في المستوى فالمستقيم الواصل بين أيه نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوى ونقطة تلاقي المستقيمان يكون عمودياً على المستقيم المعروف في المستوى



المعطيات: $B \in (X)$, $\overrightarrow{CD} \subset (X)$

$\overrightarrow{AB} \perp (X)$, $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CD}$

المطلوب إثباته: $\forall N \in \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{NE} \perp \overrightarrow{CD}$

البرهان:

من نقطة B نرسم $\overrightarrow{BF} \parallel \overrightarrow{CD}$ (عبارة توازي)

$\therefore \overrightarrow{CD} \subset (X)$ (معطى)

\Rightarrow (إذا توازى مستقيمان فال المستوى الذي يحوي أحدهما ونقطة من الآخر يحتويها) $\Rightarrow \overrightarrow{BF} \subset (X)$

$\therefore \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CD}$ (معطى)

\Rightarrow (في المستوى الواحد المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) $\Rightarrow \overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

\Rightarrow (المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى) $\Rightarrow \overrightarrow{NB} \perp \overrightarrow{BF}$

\Rightarrow (المستقيم العمودي على مستقيمين متتقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) $\Rightarrow \overrightarrow{BF} \perp (NBE)$

\therefore (المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) $\Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp (NBE)$

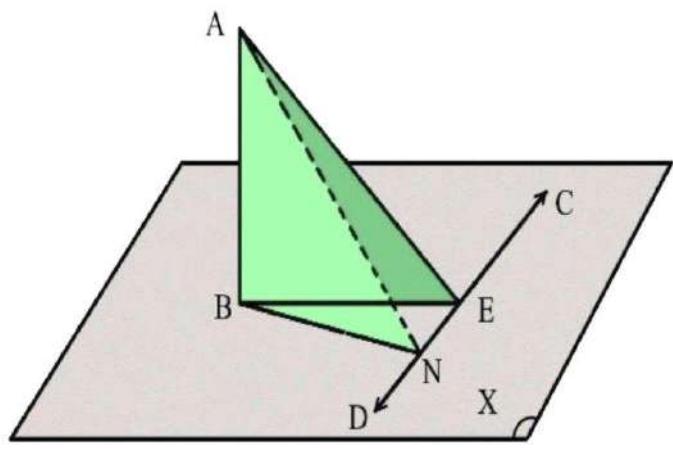
\Rightarrow (المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى) $\Rightarrow \overrightarrow{NE} \perp \overrightarrow{CD}$

وهذا شأن كل مستقيم يصل أيه نقطة من نقاط \overrightarrow{AB} بالنقطة E يكون عمودياً على \overrightarrow{CD}

و.هـ.م

7-9-1 نتیجة مبرهنة (6) الأعمدة الثلاثة

إذا رسم من نقطة لا تنتهي إلى مستوى معلوم مستقيمان أحدهما عمودي على المستوى والأخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوى. فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوى



المعطيات:

$$A \notin (X)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

$$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

المطلوب إثباته:

$$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

البرهان:

$$\text{إن لم يكن } \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

من نقطة B نرسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتهي له $\overrightarrow{NB} \perp \overrightarrow{CD}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتهي له)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

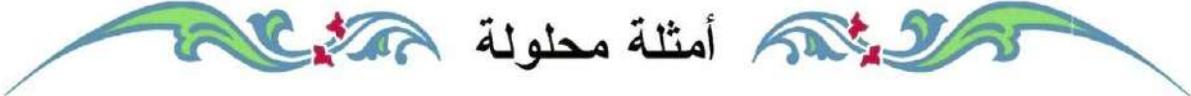
(يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتهي له) $\overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$:

$$\therefore N = E$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$$

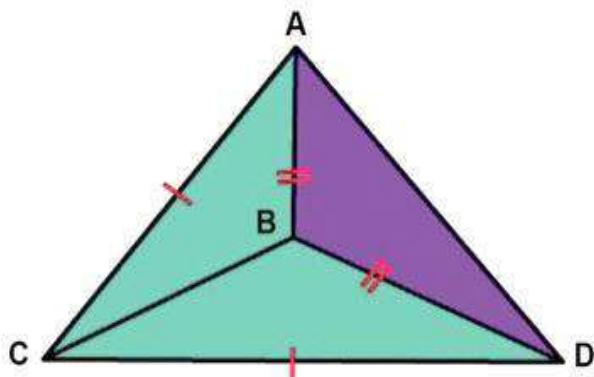
$$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

و.هـ.م


 أمثلة محلولة

1. مثلث BCD قائم الزاوية في B ، A نقطة ليست في مستوى هذا المثلث بحيث $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{BD}$

المعطيات:



المثلث BCD قائم الزاوية في B

$$A \notin (BCD)$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BD}$$

$$\overline{AC} = \overline{CD}$$

المطلوب إثباته:

$$\overline{BC} \perp (ABD)$$

البرهان:

المثلثان BCD ، ABC

(معطى) $\overline{AB} = \overline{BD}$

$$\overline{AC} = \overline{CD}$$

\overline{BC} مشترك

..
يتطابق المثلثان (تساوي ثلاثة أضلاع)

من التطابق ينتج

$$m\angle CBD = m\angle ABC = 90^\circ$$

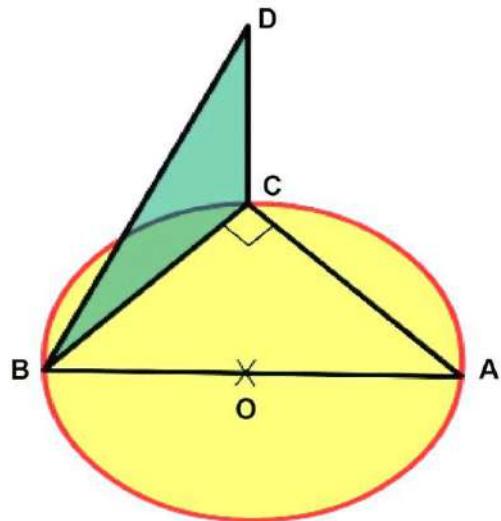
(معطى) $m\angle CBD = 90^\circ$ $\overline{BC} \perp \overline{BD}$..

(بالبرهان) $m\angle ABC = 90^\circ$ $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

..
 $\overline{BC} \perp (ABD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متتقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

2. قطر في دائرة من نقطة مثل C على الدائرة رسم \overline{CD} عمودي على مستوى الدائرة
برهن ان \overline{AC} عمودي على المستوى (BCD) .



المعطيات:

قطر دائرة \overline{AB}

نقطة على الدائرة C

عمود على مستوى الدائرة \overline{CD}

المطلوب إثباته:

$\overline{AC} \perp (BCD)$

البرهان:

\therefore قطر دائرة مركزها O (معطى)

$\therefore m\angle ACB = 90^\circ$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف قطر دائرة قائمة)

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$

أي أن $\overline{CD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{CD}$ (المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى)

$\therefore \overline{AC} \perp (BCD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متتقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستوىيهما)

و.هـ.م

تمارين (2-7)

1. $\overline{CD} \perp \overline{BC} = 3\text{ cm}$ ، $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ ، B في \overline{AD} جد طول $\overline{CD} = 12\text{ cm}$ بحيث (ABC)

2. برهن على أن المستقيمين العموديين على مستويين متتقاطعين لا يتوازيان.

3. في $\overline{AB} = 10\text{ cm}$ ، $\overline{BD} = 5\text{ cm}$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\angle A = 30^\circ$ ، ΔABC
إذا كان \overline{BH} عمودي على \overline{AC} ، جد $m\angle BHD$

