Ejercicios Tema 6 - Variables aleatorias muldidimensionales

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Variables aleatorias multidimensionales discretas

1. Una urna contiene una bola negra y dos bolas blancas. Se sacan tres bolas de la urna. Sea la variable I_k que vale 1 si el resultado de la extracción k-ésima es la bola negra y vale 0 en caso contrario. Definimos las siguientes tres variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= I_1 + I_2 + I_3, \\ Y &= \min\{I_1, I_2, I_3\}, \\ Z &= \max\{I_1, I_2, I_3\}. \end{aligned}$$

   - Especificar el rango de valores de la variable 3 dimensional (X, Y, Z) si las extracciones son con reposición. Hallar la función de probabilidad conjunta P_{XYZ}.
   - ¿Son las variables X, Y y Z independientes? ¿Son las variables X e Y independientes?
   - Repetir el primer apartado suponiendo ahora que las extracciones son sin reposición.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables binarias aleatorias que toman valores 0 o 1 para indicar si un altavoz está en silencio (0) o activo (1). Si un altavoz está en silencio, permanece inactivo en el siguiente intervalo de tiempo con probabilidad 3/4, y un altavoz activo permanece activo con probabilidad 1/2. Hallar la función de probabilidad conjunta $P_{X_1X_2X_3}$ y la función de probabilidad marginal de X_3. Suponga que el altavoz empieza en el estado silencioso.

3. Un experimento aleatorio tiene cuatro resultados posibles. Supongamos que el experimento se repite n veces de forma independiente y sea X_k el número de veces que se produce el resultado k-ésimo. La función de probabilidad conjunta de la variable 3-dimensional (X_1, X_2, X_3), $P_{X_1X_2X_3}$ es la siguiente:

$$P_{X_1X_2X_3}(k_1, k_2, k_3) = \frac{n!3!}{(n+3)!} = \binom{n+3}{3}^{-1}, \text{ para } k_i \geq 0, \text{ y } k_1 + k_2 + k_3 \leq n.$$

   - Hallar la función de probabilidad marginal de la variable bidimensional (X_1, X_2).
   - Hallar la función de probabilidad marginal de la variable X_1.
   - Hallar la función de probabilidad condicional de la variable (X_2, X_3) dado $X_1 = m$, para $0 \leq m \leq n$.

Variables aleatorias multidimensionales continuas

1. El punto $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ se distribuye uniformemente dentro de una esfera de radio 1 alrededor del origen. Hallar la probabilidad de los siguientes eventos:
   - $\mathbf{X}$ está dentro de una esfera de radio r, $r > 0$.
   - $\mathbf{X}$ está dentro de un cubo de longitud $2/\sqrt{3}$ centrado alrededor del origen.
   - Todos los componentes de $\mathbf{X}$ son positivos.
   - Z es negativo.
   - Hallar la distribución marginal de Y y Z.
   - Hallar la distribución marginal de Y.
   - Hallar la distribución condicional de X e Y dada Z.
   - ¿Son independientes las variables X, Y y Z?

2. Sea la variable 3 dimensional (X, Y, Z) con función de densidad conjunta:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} k(x+y+z), & \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Hallar k.
- Hallar $f_X(x)$, $f_Y(y)$ y $f_Z(z)$.

3. Una señal sinusoidal aleatoria viene dada por $X(t) = Asin(t)$ donde A es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Sea $\mathbf{X} = (X(t_1), X(t_2), X(t_3))$ muestras de la señal tomada en los tiempos t_1, t_2 y t_3.
   - Hallar la función de densidad conjunta de la variable 3 dimensional $\mathbf{X}$ en términos de la función de densidad conjunta de A si $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$ y $t_3 = \pi$. ¿Son independientes $X(t_1)$, $X(t_2)$ y $X(t_3)$?
   - Hallar la función densidad conjunta de $\mathbf{X}$ para $t_1 = \pi/6$, $t_2 = t_1 + \pi/2$, y $t_3 = t_1 + \pi$.

Independencia de variables aleatorias

1. Supongamos que las variables aleatorias X, Y y Z son independientes. Hallar las probabilidades siguientes en términos de F_X, F_Y y F_Z:
   - $P(|X| < 5,\ Y < 4,\ Z^3 > 8)$.
   - $P(X = 5,\ Y > 0,\ Z > 1)$.
   - $P(\min(X, Y, Z) < 2)$.
   - $P(\max(X, Y, Z) > 6)$.

Momentos

1. Hallar los valores esperados y la matriz de covarianzas para los problemas 1, 2 y 3 de la sección de variables aleatorias multidimensionales continuas.

Variable aleatoria normal multidimensional

1. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ una variable normal 3-dimensional con vector de medias y matriz de covarianzas dadas por:
$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M_X} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$
   - Hallar la función de densidad conjunta para la variable $\mathbf{X}$.
   - Hallar las distribuciones marginales de las variables X_1, X_2 y X_3.
   - Hallar una transformación lineal $\mathbf{A}$ tal que la variable aleatoria 3-dimensional $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ consiste en variables normales independientes.
   - Hallar la función de densidad conjunta para la variable $\mathbf{Y}$.

2. Supongamos que X_1, X_2, X_3 y X_4 son variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza 1 que se procesan de la siguiente manera:

$$Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = X_2 + X_3,\ Y_3 = X_3 + X_4.$$

   - Hallar la matriz de covarianzas de la variable 3-dimensional $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$.
   - Hallar la función de densidad conjunta para la variable $\mathbf{Y}$.
   - Hallar la función de densidad conjunta para Y_1 e Y_2 y para Y_1 e Y_3.
   - Hallar una transformación $\mathbf{A}$ tal que el vector $\mathbf{Z} = \mathbf{AY}$ consista en variables aleatorias normales independientes.