

# **Progetto Robotica Aerospaziale: “Missione su Io”**

Carlo Cosentino

Marco Ferreri

Filippo Frassinetti

Luca Ricci

18 Febbraio 2021

## • Introduzione

L'obiettivo del progetto è quello di elaborare una missione interplanetaria che porti una sonda orbitante a 200km dalla superficie terrestre su un'orbita di almeno 100 km dalla superficie di Io, il più interno dei quattro satelliti *Medicei* di Giove.

Nel calcolo della traiettoria verso Io, è necessario introdurre almeno un “flyby” attorno ad un pianeta, ossia una manovra che sfrutta il contributo gravitazionale del pianeta per aumentare l'energia cinetica della sonda. Nella realtà delle missioni interplanetarie tale manovra, denominata anche “gravity assist” o “fionda gravitazionale”, è molto utilizzata per ridurre il consumo di carburante che rappresenta uno dei principali limiti tecnologici alle esplorazioni spaziali.

Il target di ottimalità fissato dalla consegna richiede che la traiettoria trovata necessiti di un  $\Delta v_{tot}$  inferiore a quello richiesto da un *trasferimento alla Hohmann* con stessi punti di partenza e di arrivo.

Il *trasferimento o manovra alla Hohmann*, rappresenta la traiettoria “ottima”, ossia quella che richiede il minimo valore di  $\Delta v_{tot}$ , per trasferire una sonda tra due orbite circolari complanari. Essa rappresenta lo standard ottimo di riferimento per la classe di trasferimenti “a due impulsi”. Questo tipo di trasferimento consiste in due manovre impulsive applicate al pericentro e all'apocentro dell'orbita di partenza e di arrivo, eseguite in direzione parallela ai vettori velocità iniziale e finale.

Il seguente elaborato è suddiviso in varie parti, dove ci soffermeremo su argomenti specifici, cercando di toccare tutti i temi richiesti dalla consegna.

Nella prima parte, relativa alla *creazione del sistema solare* e alla *generazione delle orbite dei pianeti*, abbiamo spiegato l'approccio teorico e implementativo che ci ha permesso di ricreare una rappresentazione più o meno verosimile del sistema solare. In particolare ci siamo soffermati sulla natura delle varie approssimazioni utilizzate, cercando di mettere in evidenza eventuali differenze tra un genere e l'altro. Come spiegato successivamente, in questa parte abbiamo utilizzato un approccio ideato dall'astronomo matematico statunitense *E. M. Standish* sia per il calcolo meno approssimato dei parametri orbitali del sistema solare, che per la messa in moto dei singoli pianeti.

Nella seconda parte, relativa al *calcolo dell'orbita di trasferimento*, abbiamo utilizzato l'approccio delle “*patched conics*” (metodo delle coniche raccordate) suddividendo il volo verso Io come somma di traiettorie coniche.

Attraverso la soluzione del “*problema di Lambert*” siamo riusciti a implementare un metodo che permette il tracciamento dei vari “*patch*” di traiettoria, la cui somma costituisce la traiettoria finale di trasferimento. In particolare ci siamo soffermati sulla distinzione tra traiettoria esterna e interna alla sfera di influenza dei pianeti (SOI), spiegando i differenti criteri utilizzati per il calcolo.

Nella terza parte, relativa al *calcolo dei  $\Delta v$  necessari alla navicella per compiere la traiettoria definita*, abbiamo effettuato un'analisi dei valori trovati. In particolare abbiamo comparato il  $\Delta v_{tot}$  sia con quello richiesto per il *trasferimento alla Hohmann*, in modo da verificare il raggiungimento del target stabilito, sia con quello della traiettoria ottima studiata nella tesi dall'ingegner A. Caruso.

Nell'ultima parte, abbiamo trattato le *considerazioni finali* che analizzano con criticità le varie assunzioni e metodi adottati per lo svolgimento del progetto.

## • Creazione del sistema solare

Nella prima parte del progetto ci siamo soffermati sulla creazione del sistema solare, poiché per il calcolo della traiettoria della sonda è necessario conoscere le posizioni dei pianeti istante per istante. In questa fase preliminare di progettazione, per tracciare le orbite dei singoli pianeti abbiamo utilizzato l'approssimazione *kepleriana dei due corpi*, considerando ogni pianeta come un elemento di massa puntiforme sottoposto alla sola influenza gravitazionale del medesimo attrattore, il Sole.

Per prima cosa abbiamo introdotto un sistema di riferimento fisso inerziale eliocentrico (origine nel centro di massa del sole) con asse Z perpendicolare al piano dell'eclittica, asse X in direzione del punto "vernale" e asse Y in modo tale da ottenere una terna levogira. Denominiamo tale sistema di riferimento "*frame sun*".

Come ben noto, per identificare univocamente la posizione di un corpo celeste nel sistema solare è sufficiente conoscere i "6 parametri orbitali" e nella nostra trattazione abbiamo usato come riferimento lo standard "J2000".

Lo standard J2000 scandisce l'epoca astronomica attuale, ossia un intervallo di tempo in cui i parametri orbitali assumono un determinato valore costante.

In particolare, lo standard J2000 si riferisce ai valori calcolati al 1° gennaio del 2000 alle ore 12:00. Tale standard venne adottato a partire dal 1984 quando sostituì il precedente formato "B1950". Da quel momento la comunità scientifica considera il J2000 come "epoca standard" per i dati variabili nel tempo.

I parametri orbitali utilizzati nella trattazione sono:

- $[a]$  Lunghezza del semiasse maggiore [AU]
- $[e]$  Eccentricità orbitale
- $[i]$  Inclinazione dell'orbita [degrees]
- $[\Omega]$  Longitudine del nodo ascendente [degrees]
- $[\omega]$  Argomento del periasse [degrees]
- $[L]$  Longitudine media [degrees]

I valori dei parametri orbitali forniscono le informazioni per ogni pianeta su: forma, dimensione e postura dell'orbita oltre alla posizione angolare che esso occupa. Se analizziamo nel dettaglio i primi 5 parametri, le informazioni del semiasse maggiore ed eccentricità permettono di tracciare un'orbita 2D, mentre quelle legate all'inclinazione, alla longitudine del nodo ascendente e all'argomento del periasse, servono per definire come è orientata tale orbita in 3D rispetto al sistema di riferimento fisso inerziale "*sun*".

Vogliamo far notare che esistono diverse configurazioni possibili del vettore di stato dei parametri orbitali e in base alla "nazionalità" della letteratura possiamo trovare come sesto parametro anche l'*anomalia vera*  $\theta$  o l'*anomalia media*  $M$ . Naturalmente le forme sono equivalenti e la loro relazione è definita da:

$$\begin{cases} M(t) = E(t) - e \sin E(t) \\ \tan\left(\frac{E(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \end{cases}$$

Nella nostra trattazione, utilizzeremo come sesto parametro la *longitudine media*  $L$ , legata all'*anomalia media*  $M$  dalla seguente relazione:

$$M = L - \omega$$

Lo standard J2000, in altre parole, costituisce l'informazione iniziale necessaria per la costruzione del sistema solare, dato che rappresenta una sua "fotografia" al 1° gennaio del 2000.

Naturalmente queste tavole presentano degli errori, in primis di approssimazione dato dal numero limitato di cifre dei valori di ogni parametro e successivamente legato all'intervallo temporale adottato. Infatti queste tavole sono "valide", ossia presentano un errore accettabile, se impiegate in un determinato intervallo di tempo. Nel nostro caso, abbiamo usato tavole adatte per un intervallo temporale compreso tra l'anno 1800 e il 2050 del calendario gregoriano.

La ragione della dipendenza esplicita dal tempo è dovuta ad una serie di fenomeni fisici che noi non considereremo nella trattazione, tra i quali:

- *Decadimento dell'orbita*: Fenomeno dovuto alla resistenza fluidodinamica dell'atmosfera del pianeta orbitante che causa ad una riduzione graduale del suo contenuto energetico. Con lo scorrere del tempo, tale fenomeno provoca una riduzione dell'eccentricità dell'orbita, rendendola sempre più circolare.
- *Schiacciamento di un corpo sferico*: Fenomeno dovuto al moto di rotazione del pianeta attorno al proprio asse. Nella realtà i pianeti che orbitano attorno al Sole non sono delle sfere perfette di densità uniforme e tale mancanza di uniformità causa lo schiacciamento dei poli rispetto all'equatore con conseguente distorsione del campo gravitazionale.
- *Presenza di perturbazioni radiali, dirette e trasversali*: Nella nostra trattazione, con l'ipotesi di problema dei due corpi, consideriamo che ogni pianeta sia soggetto solo alla forza gravitazionale del Sole, trascurando qualunque altra interazione che può avvenire con altri corpi.

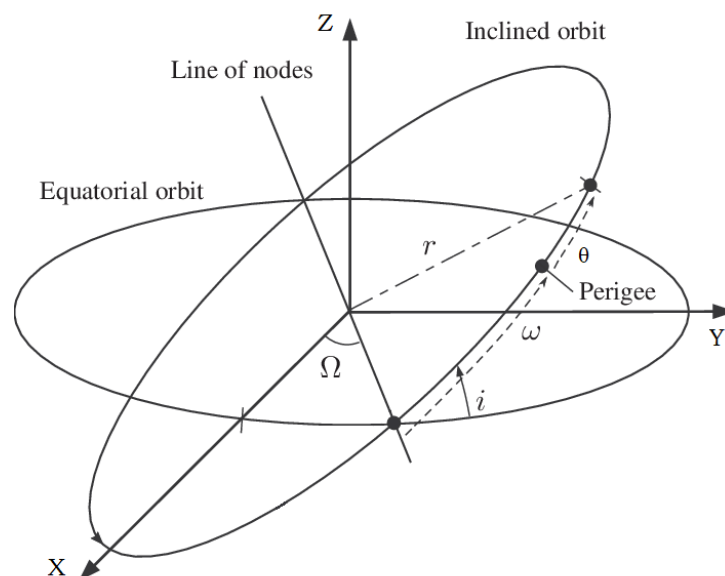


Figura 1: Rappresentazione grafica dei parametri orbitali

Nella realtà, quindi, i parametri orbitali cambiano continuamente nel tempo a causa dei fenomeni fisici riportati sopra. Per rendere questa approssimazione meno “grezza” abbiamo implementato un algoritmo ideato dall’astronomo matematico statunitense *Erland Myles Standish* nel paper “*Keplerian Elements for Approximate Position of Major Planet*” della NASA.

Nell’elaborato del professore, la tabella dei parametri orbitali presenta l’aggiunta di quelli relativi alle derivate temporali del primo ordine. Con questo dato è possibile per ogni parametro andare a ricavare il suo valore nel tempo mediante una legge lineare derivante dallo sviluppo di Taylor al primo ordine.

Chiamando il generico parametro orbitale  $x$ , il suo valore nel tempo è dato dalla legge oraria  $x(T) = x_0 + \dot{x} \cdot T$  dove  $T$  rappresenta il secolo giuliano rispetto al 1° gennaio del 2000 e  $x_0$  è il valore iniziale assunto nello standard J2000.

$$T = \frac{(T_{eph} - 2451545.0)}{36525}$$

dove 2451545.0 corrisponde al 1° gennaio del 2000,  $T_{eph}$  rappresenta la data rispetto alla quale vogliamo calcolare i parametri orbitali e 36525 è il valore in giorni del secolo giuliano (ogni anno sono 365.25 giorni).

Analogamente ai parametri orbitali, anche i valori delle loro derivate temporali (“rate”) presentano una dipendenza diretta dal tempo. Questo permette di identificare un intervallo temporale in cui il modello lineare presenta un errore accettabile. Nel nostro caso, le tavole hanno validità se utilizzate tra l’anno 1800 e l’anno 2050.

## • Generazione delle orbite dei pianeti

Prima di andare a descrivere la procedura del tracciamento delle orbite, definiamo un sistema di riferimento “*locale*” solidale ad ognuna di esse con origine nel centro di massa del Sole, asse  $x$  in direzione del perielio, asse  $z$  perpendicolare al piano dell’orbita e asse  $y$  posizionato in modo tale che la terna sia levogira. Seguendo l’approccio descritto nel “*Keplerian Elements for Approximate Position of Major Planet*” si evidenziano i seguenti passi:

1. Si calcola il valore dell’anomalia media ( $M$ ) come  $M = L - \omega$ , dove  $L$  e  $\omega$  sono ricavati secondo la relazione lineare:

$$L = L_0 + \dot{L} \cdot T ; \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} \cdot T$$

2. Sfruttando l’“equazione di Keplero per le orbite ellittiche” si ricava il valore dell’anomalia eccentrica  $E$  mediante un algoritmo ricorsivo.

$$M(T) = E(T) - e^* \cdot \sin(E(T))$$

Infatti nota la  $M$ , data la natura trascendentale dell’equazione, è possibile ricavare il valore della  $E$  solo mediante un algoritmo numerico. Si ricorda che  $e^*$  non è altro che l’eccentricità con applicato un fattore di conversione radianti/gradi:  $e^* = \frac{180}{\pi} e$ .

L’algoritmo numerico iterativo consiste in un *ciclo for* dove l’indice  $i$  rappresenta il contatore che, partendo da  $i = 0$ , di volta in volta viene incrementato fino a quando non si verifica la condizione di uscita  $|\Delta E| < 10^{-6} \text{deg}$ :

- Si calcola  $\Delta M = M - (E_i - e^* \sin E_i)$  dove  $E_i$  è il valore di  $E$  all’istante  $i$
- Si calcola  $\Delta E = \frac{\Delta M}{(1 - e \cos E_i)}$
- Si calcola  $E_{i+1} = E_i + \Delta E$

Tale algoritmo è stato implementato nella funzione matlab *eccentric\_anomaly.m*.

3. Calcolato il valore di  $E$ , notiamo che esso dipende dal valore di  $M$  ed  $e$ . Possiamo riportare la posizione del pianeta nel sistema di riferimento locale, attraverso la relazione:

$$\begin{cases} x = a(\cos E - e) \\ y = a\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \\ z = 0 \end{cases}$$

4. Noti i valori delle coordinate del pianeta nel “*frame local*”, per facilitare la lettura delle posizioni spaziali, riportiamo le coordinate nel sistema di riferimento fisso inerziale “*frame sun*”.

Per effettuare questa operazione abbiamo utilizzato una trasformazione di Eulero “ZZZ” con angoli di rotazione corrispondenti ai valori angolari del vettore dei parametri orbitali.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{sun} = [R(-\Omega)]^Z \cdot [R(-i)]^X \cdot [R(-\omega)]^Z \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{orbit} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{sun} = [T(\Omega, i, \omega)]_{orbit}^{sun} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{orbit}$$

Assemblando le rotazioni elementari, otteniamo la seguente matrice di trasformazione ZZX, implementata nella funzione matlab *Tzxz.m*.

$$[T(\Omega, i, \omega)] = \begin{bmatrix} c(\omega)c(\Omega) - s(\omega)s(\Omega)c(i) & -c(\Omega)s(\omega) + c(\omega)s(\Omega)c(i) & -s(\omega)s(i) \\ c(\omega)s(\Omega) + s(\omega)c(\Omega)c(i) & -s(\omega)s(\Omega) + c(\omega)c(\Omega)c(i) & s(i)c(\omega) \\ s(\omega)s(i) & -s(i)c(\omega) & c(i) \end{bmatrix}$$

dove  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$  e  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ .

Nel codice del progetto, i passi 3) e 4) sono stati condensati in un'unica funzione denominata *advance.m* che noto in ingresso il pianeta e l'istante nel quale vogliamo calcolare la sua posizione ( $T_{eph}$ ), fornisce in output un vettore contenente le coordinate cartesiane scritte rispetto al sistema di riferimento “*sun*”.

Per implementare la posizione di ogni pianeta nel tempo abbiamo inserito tale funzione in un *ciclo for* in cui si fa variare il valore  $T_{eph}$  dall'istante iniziale desiderato a quello finale. L'output del ciclo è una matrice di 3 righe, pari al numero delle coordinate spaziali del pianeta, per un numero di colonne corrispondenti al valore dell'intervallo temporale desiderato ( $T_{eph\_iniziale} - T_{eph\_finale}$ ). Le colonne di tale matrice non sono altro che le coordinate spaziali, scritte nel sistema di riferimento “*sun*”, che ogni pianeta occupa nei vari giorni giuliani dell'intervallo temporale scelto.

Se avessimo applicato l'algoritmo del professor *E. M. Standish* nella sua interezza, avremmo dovuto considerare che le orbite si modificano nel tempo e a seconda della lunghezza dell'intervallo temporale lo scostamento rispetto a J2000 avrebbe assunto valori considerevoli. Per evitare ciò, abbiamo effettuato l'ipotesi semplificativa comunemente adottata, in cui i parametri kepleriani di ogni orbita si considerano fissi ai valori di J2000.

Nonostante l'adozione dell'ipotesi semplificativa, utilizziamo l'algoritmo per andare a tracciare la posizione dei pianeti nel tempo. Infatti, il valore della anomalia vera  $E$  coincide con la posizione angolare del pianeta nel cerchio unitario, come mostrato in figura 2.

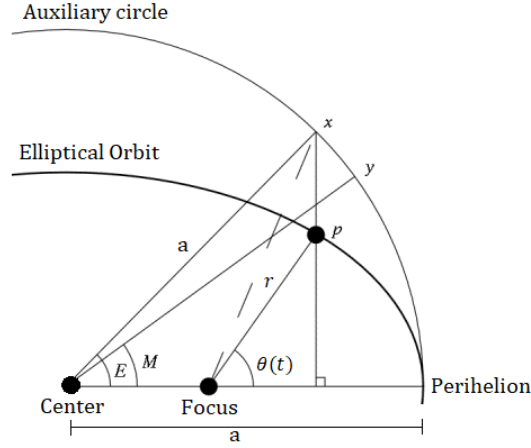


Figura 2: Rappresentazione grafica del cerchio ausiliario

Di conseguenza, se vogliamo conoscere la posizione che occupano i pianeti nel tempo è necessario conoscere il valore di  $E(T)$ , che può essere facilmente ricondotto al valore dell'anomalia vera  $\theta(T)$  attraverso la relazione:

$$\tan\left(\frac{E(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

Per implementare questa soluzione, dobbiamo considerare fissi, ossia con valore di “rate” nullo, tutti i parametri orbitali che descrivono la forma, dimensione e postura dell'orbita.

$$\begin{cases} a = a_0 \\ e = e_0 \\ i = i_0 \\ \omega = \omega_0 \\ \Omega = \Omega_0 \\ L = L_0 + \dot{L} \cdot T \end{cases}$$

Quindi considerando solamente la legge oraria  $L = L_0 + \dot{L} \cdot T$ , possiamo ricavare quella dell'anomalia media  $M$  attraverso la relazione:

$$M = L_0 + \dot{L} \cdot T - \omega_0$$

Conoscendo la legge oraria di  $M$ , attraverso l'algoritmo iterativo numerico implementato nella funzione matlab *eccentric\_anomaly.m.*, arriviamo a risolvere l'equazione di Keplero ottenendo una legge oraria di  $E(T)$ .

Come al punto 3), dalla legge oraria di  $E(t)$  si ricava la posizione del pianeta nel sistema di riferimento locale attraverso la relazione:

$$\begin{cases} x = a(\cos E - e) \\ y = a\sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \\ z = 0 \end{cases}$$

Nota la posizione nel “*frame local*”, essa è facilmente riconducibile a quella nel “*frame sun*” attraverso la funzione matlab *Tzxz.m.*

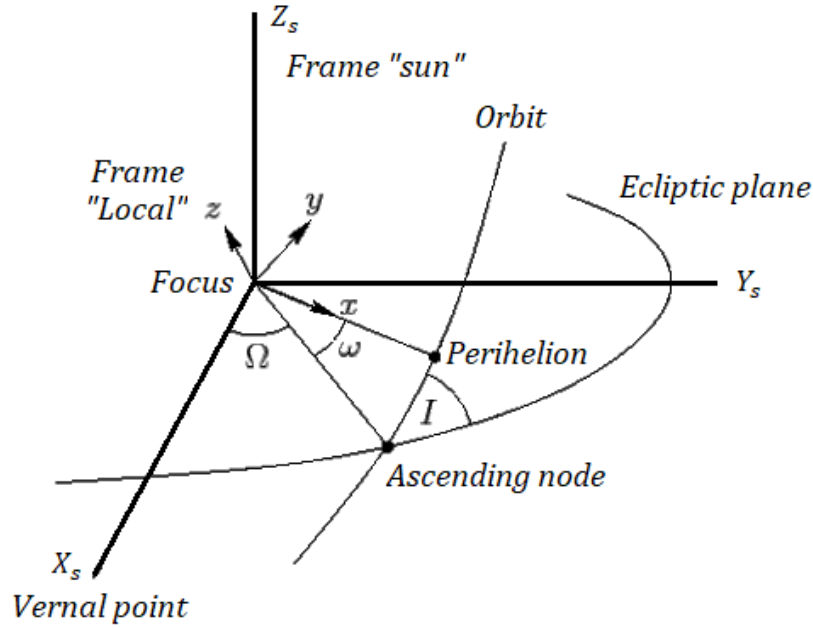


Figura 3: Rappresentazione grafica del frame “local” e del frame “sun”

In conclusione, adottando l'approssimazione dei parametri orbitali a J2000 e partendo dalla conoscenza del valore del *semiasse maggiore* ( $a$ ) ed *eccentricità dell'orbita* ( $e$ ), abbiamo applicato direttamente la soluzione *del problema kepleriano dei due corpi* per le orbite ellittiche:

$$\begin{cases} p = a(1 - e) \\ r(\theta(t)) = \frac{p}{1 + \cos(\theta(t))} \end{cases}$$

dove  $p$  rappresenta il “semilato retto” dell'orbita ellittica,  $\theta(t)$  l'anomalia vera in funzione del tempo e  $r(\theta(t))$  il modulo del vettore distanza del pianeta dall'attrattore, posizionato nel fuoco dell'orbita ellittica.

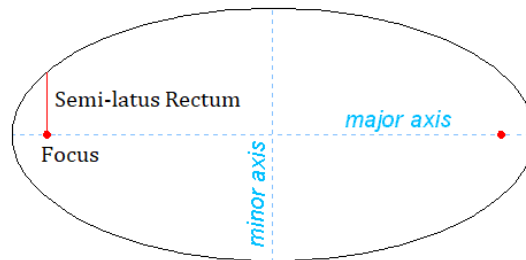


Figura 4: Rappresentazione del semilato retto di un'orbita ellittica

Nota legge di  $r(\theta)$ , il tracciamento dell'orbita avviene per congiunzione dei punti del vettore distanza dal fuoco, facendo variare l'anomalia vera  $\theta$  tra  $-\pi$  e  $\pi$ .

Tale operazione viene svolta nello script dalla funzione “*plot\_orbit.m*”.

Inoltre, per ogni orbita andiamo ad evidenziare la posizione di alcuni “punti notevoli” attraverso dei marker opportunamente spiegati nella legenda.

I punti notevoli evidenziati sono:

- *Perielio*
- *Apoelio*
- *Nodo ascendente*
- *Nodo discendente*



Una volta tracciate tutte le orbite dei pianeti, dobbiamo solamente aggiungere la posizione che essi occupano all'istante iniziale J2000, corrispondente all'anomalia vera. Tale informazione è ricavata come precedentemente spiegato dalla *longitudine media*  $L$ . Plottando tutto attraverso la funzione matlab “*solar\_system.m*” otteniamo il seguente risultato:

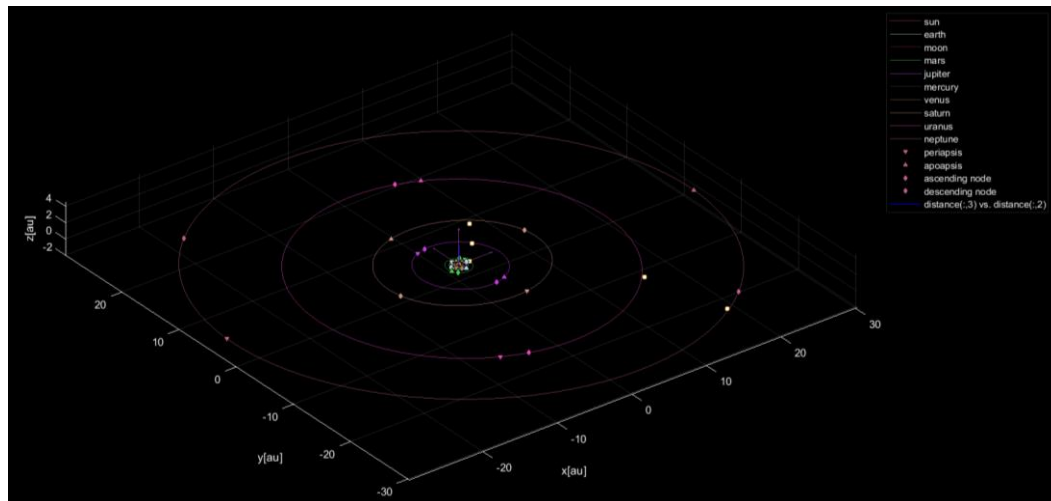


Figura 5: *Rappresentazione grafica del sistema solare a J2000*

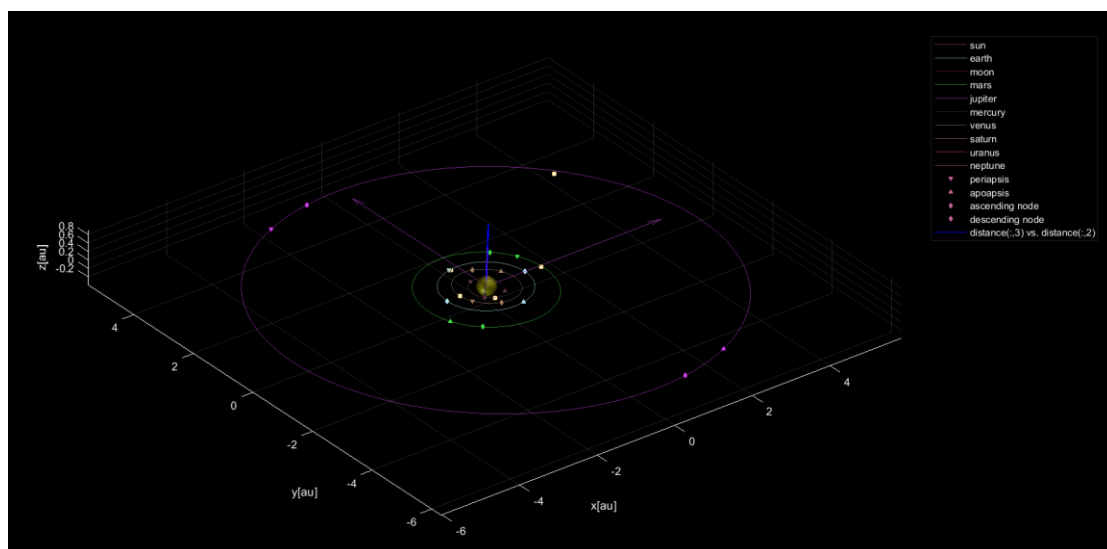


Figura 6: *Sistema solare a J2000 con zoom sull'orbita di Giove*

Vogliamo far notare che nella figura 6, in aggiunta alle orbite e alla posizione dei pianeti, sono ben visibili gli assi del sistema di riferimento eliocentrico stazionario fisso denominato “*frame sun*”.

Implementando l'algoritmo che traccia la posizione nel tempo dei pianeti, otteniamo la seguente animazione:

→ [Animazione traiettoria pianeti sistema solare.mp4](#)

Tuttavia vogliamo far notare la discrepanza che si viene a creare se consideriamo i parametri orbitali secondo la loro legge oraria. Infatti come è facilmente intuibile, i pianeti non andranno a coincidere con le orbite fisse tracciate, poiché esse sono calcolate a J2000 mentre il moto dei pianeti varia in base all'istante considerato.

## • Calcolo della traiettoria di trasferimento

### Introduzione

Per calcolare la traiettoria della sonda abbiamo considerato l'approccio delle *"patched conics"* o metodo delle coniche raccordate. L'idea utilizzata consiste nell'andare ad assemblare la traiettoria finale utilizzando spezzoni di curve coniche (ellissi, iperbole, parabole o circonferenze) sovrapponendo la posizione finale di una con quella iniziale della successiva.

Nella scelta della traiettoria abbiamo utilizzato come riferimento i risultati della tesi magistrale di ingegneria aerospaziale dell'ingegner *Andrea Caruso* sull'*"Ottimizzazione delle traiettorie interplanetarie"* (relatore professor *G. Mengali*). Nell'elaborato, oltre alla parte di studio e analisi dei vari algoritmi di ottimizzazione, sono presenti alcuni esempi di viaggi interplanetari, tra cui quello che porta una sonda dall'orbita della Terra fino a Giove.

L'ingegner Caruso, sfruttando l'algoritmo genetico (GA), trova la traiettoria per andare su Giove che richiede il minor  $\Delta v$  possibile in una finestra temporale data, effettuando 2 *fly-by*: il primo su Venere e il secondo sulla Terra. Ovviamente per la nostra trattazione non è richiesto uno studio di ottimizzazione, tuttavia prendendo come punto di partenza i risultati della tesi, siamo andati a cercare mediante il software della NASA *"NASA's Eyes"* di ricreare la configurazione planetaria più simile a quella proposta nell'elaborato. Per tale motivo la traiettoria che vogliamo imporre alla sonda per arrivare su Io, partendo da un'orbita di 200 km dalla superficie terrestre, richiede 2 *fly-by*: il primo su Venere e il secondo sulla Terra.

Nel calcolo della traiettoria, abbiamo effettuato l'ipotesi in cui la sonda, se all'interno della sfera di influenza di un pianeta (SOI), risente esclusivamente della forza gravitazionale del pianeta stesso, trascurando l'interazione con il Sole. Facendo ciò, semplifichiamo molto i calcoli riconducendo il problema allo studio del moto dei due corpi, in accordo con le ipotesi effettuate all'inizio della trattazione.

Nella parte seguente andremo a differenziare queste due situazioni, approfondendo prima la parte esterna alla sfera di influenza e successivamente sposteremo la nostra attenzione per descrivere il moto dei corpi all'interno di essa.

### Analisi della traiettoria

#### 1. Trasferimento interplanetario (esterno alla SOI)

In questa prima parte, chiamata *"fase eliocentrica"* andremo a considerare come unico attrattore per la navicella il Sole, posizionato nell'origine del sistema di riferimento *"frame sun"*. Inoltre, nel calcolo della traiettoria e in particolare nella definizione dei vettori posizione, per motivi legati alla lunghezza del viaggio interplanetario, considereremo i pianeti con dimensione trascurabile e identificati solamente dalla posizione del relativo centro di massa.

Il problema fondamentale di questa parte è andare a calcolare, per ogni tratto di conica, la velocità necessaria alla navicella per far sì che si trovi nel punto prefissato al momento prefissato. Una volta ricavata la velocità, potremo calcolare di conseguenza anche la traiettoria per andare dal punto iniziale al punto finale nel tempo stabilito. Questo non è altro che il *"Problema di Lambert"*.

Il problema risolto da *Johann Heinrich Lambert* consiste nel trovare la traiettoria conica di trasferimento che collega due punti generici nello spazio, conoscendo solamente il tempo di volo e la posizione dei due punti.

Inoltre, il matematico svizzero ha dimostrato, nel suo omonimo teorema, che “il tempo di volo necessario ad un corpo per spostarsi tra due punti lungo una traiettoria conica è funzione solamente delle distanze dei due punti dall'origine della forza attrattiva, della distanza lineare tra essi e dal semiasse maggiore della conica.”

In particolare Lambert fornisce la soluzione in forma chiusa del problema per due particolari tipi di orbite: *ellittica* e *iperbolica*.

$$\begin{cases} (t_2 - t_1) = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\alpha - \beta - (\sin(\alpha) - \sin(\beta))] & \text{Orbita di trasferimento ellittica} \\ (t_2 - t_1) = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\sinh(\alpha) - \sinh(\beta) - (\alpha - \beta)] & \text{Orbita di trasferimento iperbolica} \end{cases}$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore e  $\mu$  il parametro gravitazionale dell'attrattore.

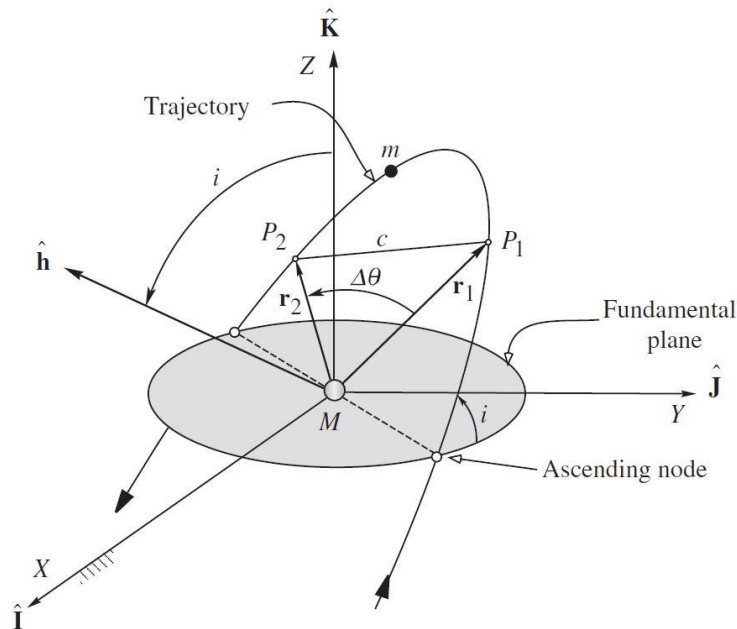


Figura 7: Problema di Lambert per una generica orbita

Nelle equazioni che risolvono il problema di Lambert si identificano i seguenti parametri:

$$\begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + c}{4a}} \\ \sin \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - c}{4a}} \end{cases} \quad \text{Caso orbita di trasferimento ellittica}$$

$$\begin{cases} \sinh \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + c}{4a}} \\ \sinh \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - c}{4a}} \end{cases} \quad \text{Caso orbita di trasferimento iperbolica}$$

dove per entrambi i casi, i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  si ricavano come:

$$\begin{cases} \alpha \triangleq \xi + E_M \\ \beta \triangleq \xi - E_M \end{cases} \text{ con } \xi \text{ derivante dalla relazione trigonometrica } \cos(\xi) = e \cdot \cos(E_p)$$

$$E_P \triangleq \frac{E_2 + E_1}{2}; E_M \triangleq \frac{E_2 - E_1}{2}$$

con  $E_1$  anomalia eccentrica del punto  $P_1$  e  $E_2$  anomalia eccentrica del punto  $P_2$ .

Data la natura trascendente della soluzione, essa è calcolabile solo in forma numerica. Inoltre, facendo l'esempio del caso ellittico, la soluzione non è unica, dato che il secondo fuoco è vacante, come mostrato nella figura 8.

Tuttavia, l'ambiguità della soluzione è intrinseca nel problema, perciò è presente anche nel caso di orbita di trasferimento iperbolica.

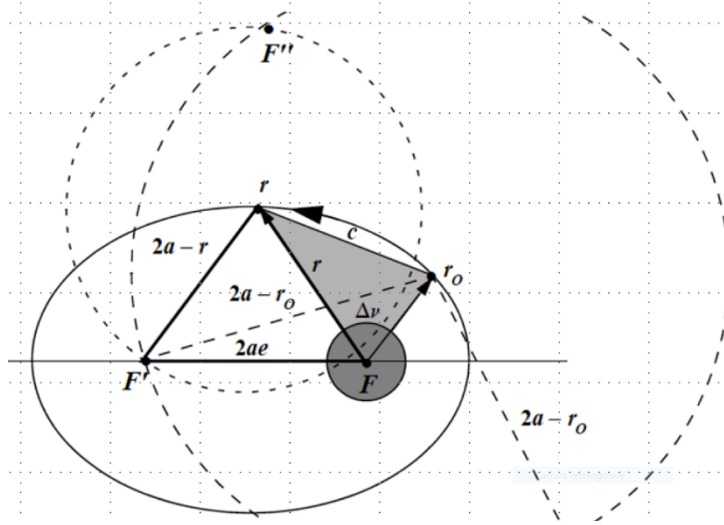


Figura 8: Ambiguità della soluzione del problema di Lambert

Sempre per il caso ellittico, inoltre è possibile ricavare direttamente le espressioni della velocità radiale e tangenziale della navicella che percorre l'orbita ellittica:

$$\begin{cases} V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \cdot \sin\theta \\ V_t = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot (1 + e \cdot \cos\theta) \end{cases}$$

dove  $\mu$  è il parametro gravitazionale del pianeta attrattore,  $p$  è il semilato retto dell'orbita ellittica di trasferimento,  $e$  è l'eccentricità dell'orbita e  $\theta$  rappresenta l'anomalia vera della navicella.

Si ricorda che l'orbita derivante dalla soluzione del *problema Lambertiano* presenta come fuoco la posizione dell'attrattore. Di conseguenza l'anomalia vera è definita rispetto all'asse passante per il fuoco e per il pericentro dell'orbita di trasferimento. Tale asse è denominato *periasse dell'orbita*.

Nel codice abbiamo implementato questa soluzione attraverso la funzione *lamert.m* presa dalla libreria matlab del testo “*Orbital Mechanics for Engineering students*” di Howard. D. Curtis.

La funzione *lambert.m* prende in ingresso:

- Posizione iniziale della navicella nel sistema di riferimento ( $P_1$ )
- Posizione finale della navicella nel sistema di riferimento ( $P_2$ )
- Tempo di volo necessario per andare dalla posizione iniziale a quella finale
- Il parametro gravitazionale del pianeta attrattore ( $\mu$ )

e restituisce in uscita:

- Vettore velocità di ingresso nel punto iniziale ( $v_1$ )
- Vettore velocità di uscita nel punto finale ( $v_2$ )

L'algoritmo risolutivo implementato nella funzione *lambert.m* si basa sull'andare a ricavare numericamente le funzioni  $f$  e  $g$  denominate "lagrangiane" tali che:

$$\begin{cases} r_2 = f r_1 + g v_1 \\ v_2 = \dot{f} r_1 + \dot{g} v_1 \end{cases}$$

dove  $r_1, r_2$  rappresentano le posizioni rispettivamente del punto iniziale e finale, mentre  $v_1, v_2$  sono le velocità.

Una volta note  $f$  e  $g$ , la funzione restituisce in uscita  $v_1$  e  $v_2$ .

Arrivati a questo punto, per poter tracciare la traiettoria di trasferimento della sonda note le velocità iniziali e finali, è necessario risolvere il sistema di equazioni differenziali del primo ordine che ha per incognita la traiettoria stessa.

Infatti, la traiettoria non è altro che la posizione della navicella nel tempo ed è ricavabile dalla conoscenza della velocità attraverso l'operazione di integrazione. Per fare ciò, abbiamo utilizzato il metodo di "Runge-Kutta-Fehlberg" implementato dalla funzione *rkf45.m* presente nella libreria del testo di *H. D. Curtis*.

In particolare, la funzione *rkf45.m* è presente all'interno di un'altra funzione chiamata *intpl\_orbit.m*. Quest'ultima è determinante per il tracciamento della traiettoria, poiché presi in ingresso il tempo di volo, la posizione e velocità iniziali, restituisce una matrice di 3 righe per  $t$  colonne, dove  $t$  è pari al tempo di volo del trasferimento. Le colonne della matrice non sono altro che le coordinate dei vari punti della traiettoria, scritte nel sistema di riferimento "frame sun".

Note le coordinate dei vari punti della traiettoria, analogamente al metodo usato per il tracciamento delle orbite statiche dei pianeti del sistema solare, si plottano i vari punti di essa congiungendoli con un segmento.

## 2. Iperbole di fuga e di cattura (interno alla SOI)

Prima di andare a definire il concetto di iperbole di fuga e di cattura, dobbiamo introdurre quello della sfera di influenza (SOI).

Essa rappresenta la porzione di spazio in cui il moto della sonda può essere considerato kepleriano anche nel problema di  $n$ -corpi. Infatti, *la sfera di influenza delimita la regione in cui la forza di attrazione gravitazionale di uno degli  $n$ -corpi prevale rispetto alle altre*. Per calcolare il raggio di influenza del pianeta abbiamo utilizzato la seguente formula:

$$r_{SOI\_pianeta} = d_{media\_dal\_Sole} \cdot \left( \frac{m_{pianeta}}{m_{Sole}} \right)^{\frac{2}{5}}$$

dove  $d_{media\_dal\_Sole}$  rappresenta la distanza media del pianeta dal Sole.

In altre parole, la SOI delimita la fase della traiettoria che denomineremo "planetocentrica", in cui si considera come unico attrattore il pianeta designato e non il Sole.

Nella fase planetocentrica si differenziano due traiettorie rilevanti, l'*iperbole di fuga* e quella di *cattura*. Esse dal punto di vista geometrico sono identiche, ma differiscono nel verso. Infatti la prima è utilizzata per abbandonare l'orbita di parcheggio di un pianeta ed uscire dalla sua sfera di influenza (SOI), mentre la seconda viene eseguita per entrare nella sfera di influenza e collocarsi in un'orbita di parcheggio.

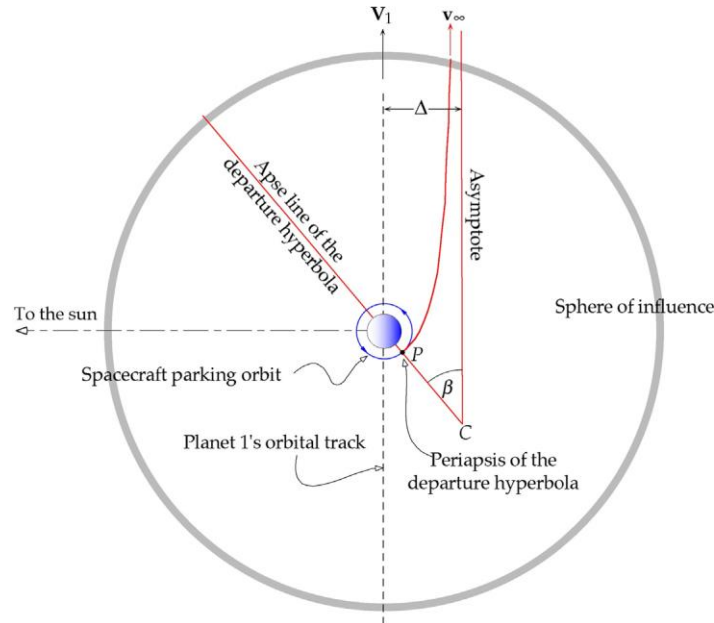


Figura 9: *Iperbole di fuga da un'orbita di parcheggio di un pianeta*

Sfruttando la definizione di sfera di influenza, riprendiamo l'equazione orbitale derivante dalla soluzione del problema Kepleriano dei due corpi:

$$r(\theta) = \frac{h^2}{\mu(1 + e\cos(\theta))}$$

Dato che l'orbita di parcheggio è circolare possiamo porre l'eccentricità  $e = 0$ , ottenendo la seguente relazione, in cui il raggio è indipendente da  $\theta$ :

$$r = \frac{h^2}{\mu}$$

Dalla relazione che lega il momento angolare alla velocità  $h = rv_{\perp}$ , ricaviamo l'espressione della velocità tangenziale  $v_{\perp}$  per orbite circolari:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Il calcolo della velocità dell'iperbole di fuga si basa solamente sulla conservazione dell'energia meccanica.

Chiamiamo con  $r_p$  il raggio del periasse, pari a quello dell'orbita di parcheggio circolare di partenza e coincidente con quello dell'iperbole.

Riprendendo l'equazione per l'orbita iperbolica ( $e > 1$ ):

$$r_p = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e}$$

dove  $h$  è il momento angolare,  $\mu$  il parametro gravitazione del pianeta ed  $e$  l'eccentricità dell'iperbole di fuga.

La velocità della sonda per percorrere la traiettoria iperbolica è data da:

$$v_{iperbole} = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r_p}}$$

dove  $v_{\infty}$  è la velocità della sonda all'esterno della sfera di influenza del pianeta, denominata anche “*velocità di eccesso iperbolico*”.

La velocità assunta della sonda quando percorre la traiettoria di parcheggio circolare è data da:

$$v_{circolare} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}$$

Di conseguenza, la variazione di velocità  $\Delta v$  necessaria alla sonda per agganciarsi alla traiettoria iperbolica di fuga dal pianeta, è pari a:

$$\Delta v = v_{iperbole} - v_{circolare} = v_{circolare} \cdot \left( \sqrt{2 + \left( \frac{v_{\infty}}{v_{circolare}} \right)^2} - 1 \right)$$

Inoltre possiamo calcolare anche l'angolo  $\beta$  tra l'asintoto dell'iperbole e il periasse:

$$\beta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{1}{1 + \frac{r_p \cdot v_{\infty}^2}{\mu}} \right)$$

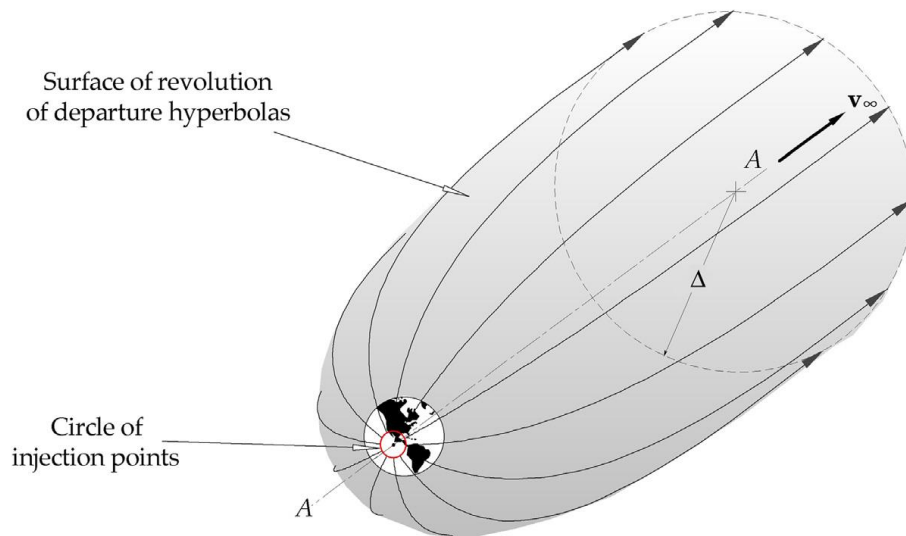


Figura 10: *Luogo delle iperboli di fuga noti  $r_p$  e  $v_{\infty}$*

Per quanto riguarda l'iperbole di cattura, si seguono gli stessi passaggi utilizzati per quella di fuga, ottenendo però un  $\Delta v$  di segno opposto.

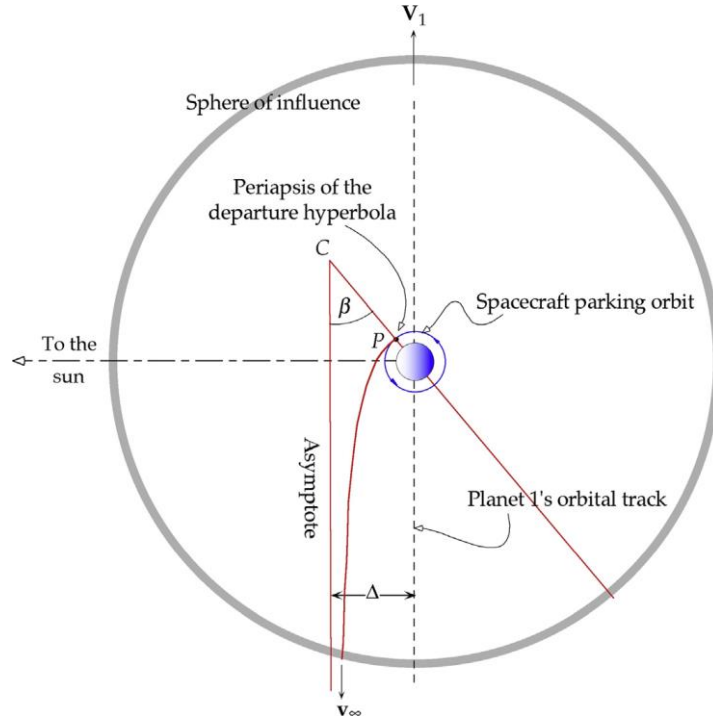


Figura 11: *Iperbole di per un'orbita di parcheggio di un pianeta*

La causa della differenza di segno tra le due manovre è collegata alla variazione di energia meccanica richiesta. Per l'iperbole di fuga è necessario un aumento di energia per allontanarsi dalla traiettoria di parcheggio, di conseguenza il  $\Delta v$  è positivo. Mentre per l'iperbole di cattura è necessaria una riduzione di energia e perciò il  $\Delta v$  è negativo.

### 3. Fly-by (interno alla SOI)

La manovra a “fionda gravitazionale”, come accennato nell'introduzione dell'elaborato, consiste nell'avvicinamento alla superficie di un corpo celeste per sfruttare la sua attrazione gravitazionale con il fine di aumentare la velocità relativa della sonda rispetto al “*frame sun*”, senza l'ausilio del propellente.

Dato che il raggio della sfera di influenza è molto maggiore rispetto al raggio del pianeta, è ragionevole considerare che l'ingresso della sonda nella SOI avvenga ad una distanza infinita dal centro di massa del pianeta

Definiamo la velocità relativa della sonda rispetto al pianeta come:

$$v_{rel} = v_{se} - v_p$$

dove  $v_{se}$  è la velocità eliocentrica del veicolo spaziale e  $v_p$  è la velocità del pianeta rispetto al Sole.

Nella fase di ingresso nella sfera di influenza possiamo considerare la velocità eliocentrica della sonda  $v_{se_i}$  pari alla velocità di eccesso iperbolico in ingresso  $v_{\infty_i}$ . Con l'ipotesi di moto kepleriano, all'interno della sfera di influenza possiamo definire la traiettoria assunta della sonda rispetto al pianeta come un'iperbole con semiasse maggiore pari a:

$$a_{iperbole} = -\frac{\mu}{v_{\infty_i}^2}$$

dove  $\mu$  è il parametro gravitazionale del pianeta.



Dato che la sonda, almeno in linea teorica, non subisce accelerazioni, per la legge di conservazione dell'energia meccanica specifica, il modulo della velocità relativa in ingresso alla sfera di influenza deve essere uguale a quello di uscita. Tuttavia, a livello vettoriale, il passaggio ravvicinato con il pianeta provoca una rotazione di angolo  $\delta$  detto di “*svolta*” nel vettore velocità relativa, come mostrato in figura 12.

$$\|v_{\infty_i}\| = \|v_{\infty_u}\|$$

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e_{iperbole}} \rightarrow \delta = 2\arcsin\left(\frac{1}{1 + r_p \frac{v_{\infty_i}^2}{\mu}}\right)$$

dove  $r_p$  è il raggio del pericentro dell'iperbole e  $\mu$  il parametro gravitazionale del pianeta attorno al quale si effettua la manovra di fionda gravitazionale.

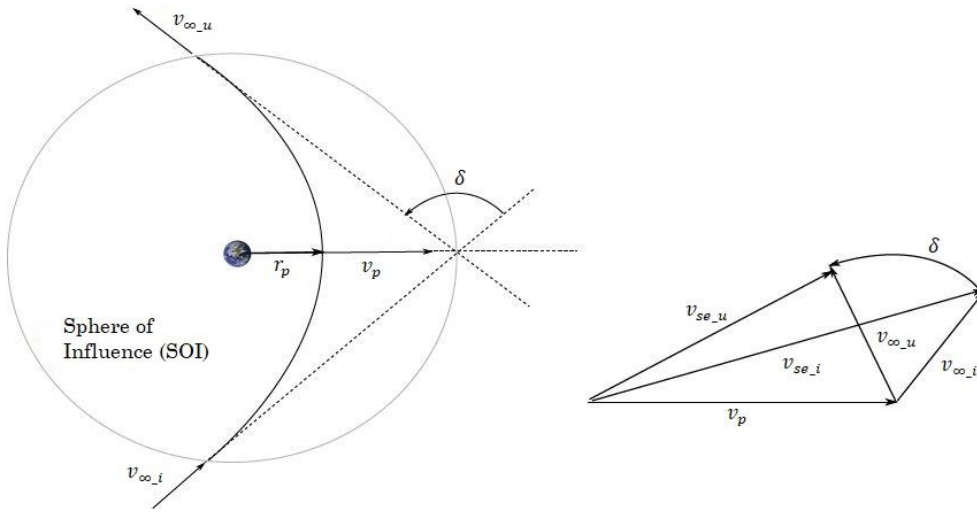


Figura 12: *Manovra a fionda gravitazionale*

Questa manovra può essere effettuata sia per accelerare che per diminuire la velocità della sonda. Il fattore discriminante è dato dal verso del vettore velocità di ingresso  $v_{\infty_i}$  e del vettore velocità del pianeta  $v_p$ . Nel caso in cui essi sono concordi, il fly-by provoca una diminuzione di velocità della sonda, mentre se avviene il contrario esso ne provoca un aumento.

In linea teorica questa manovra necessita di una variazione di velocità nulla, tuttavia all'atto pratico per ottenere una manovra controllata viene spesa una piccola quota di energia.

## Implementazione e tracciamento della traiettoria

### 1. Trasferimento interplanetario (esterno alla SOI)

In quest'ultima fase siamo andati a cercare le possibili date in cui si ricrea una configurazione planetaria simile a quella presente negli studi di ottimizzazione dell'ingegner Caruso. Attraverso l'ausilio del software della NASA "NASA's Eyes", abbiamo identificato le seguenti date:

- Partenza della sonda dall'orbita terrestre di parcheggio: 02/09/2029
- Arrivo su Venere e primo fly-by (considerato istantaneo): 15/09/2030
- Arrivo sulla Terra e secondo fly-by (considerato istantaneo): 15/04/2032
- Arrivo su Giove: 15/10/2034
- Partenza da Giove in direzione orbita di parcheggio su Io: 15/11/2034
- Arrivo su orbita di parcheggio su Io: 1/12/2034

Per ognuna delle prime quattro date, siamo andati a identificare la posizione che occupa il centro di massa di ogni pianeta nel "*frame sun*". Andando ad implementare i vari passi descritti precedentemente nella parte di "Analisi della traiettoria", come possiamo vedere nella figura 13, siamo riusciti ad ottenere la seguente sequenza di coniche, definendo la traiettoria interplanetaria della sonda.

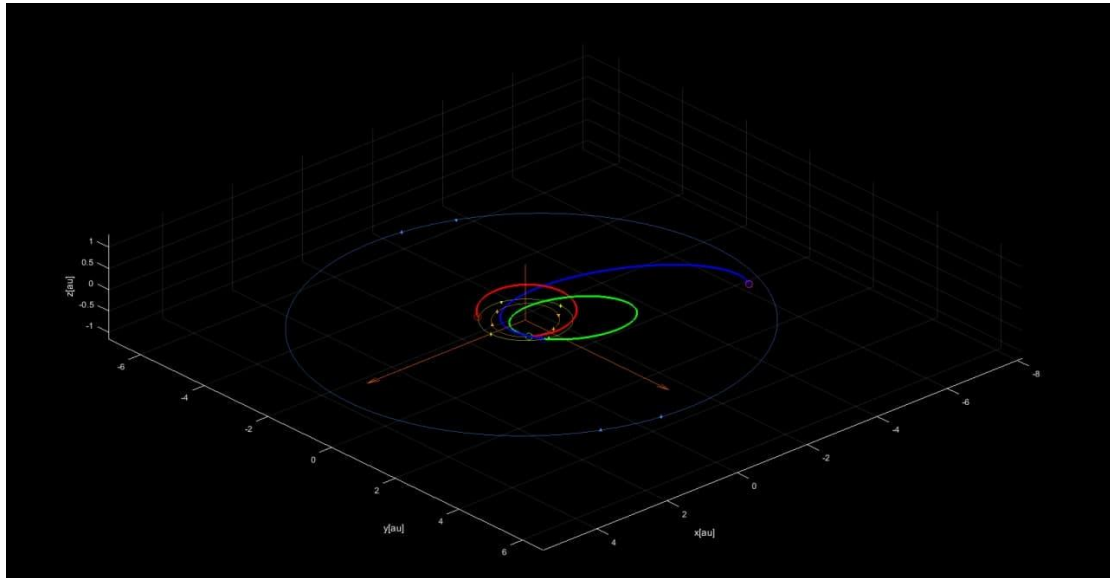


Figura 13: *Traiettoria interplanetaria della sonda in 3D*

Se osserviamo con attenzione la figura 13, noteremo che i vari "*patch*" di coniche sono orientati in 3D. Quindi nell'implementazione, abbiamo cercato di effettuare il minor numero di approssimazioni possibili, considerando il caso più vicino alla realtà di orbite dei pianeti in 3D.

Nell'immagine seguente, siamo andati ad effettuare una vista dall'alto delle traiettorie, aggiungendo le date per l'inizio e fine di ogni "*patch*".

Inoltre abbiamo plottato anche una tabella contenente tutte le informazioni di posizione, velocità e tempo di percorrenza per ogni tratto di traiettoria interplanetaria.

Vogliamo far notare che nella figura 14 la posizione di Giove non coincide con l'orbita ellittica a causa dell'approssimazione adottata nel tracciamento delle orbite fisse a J2000.

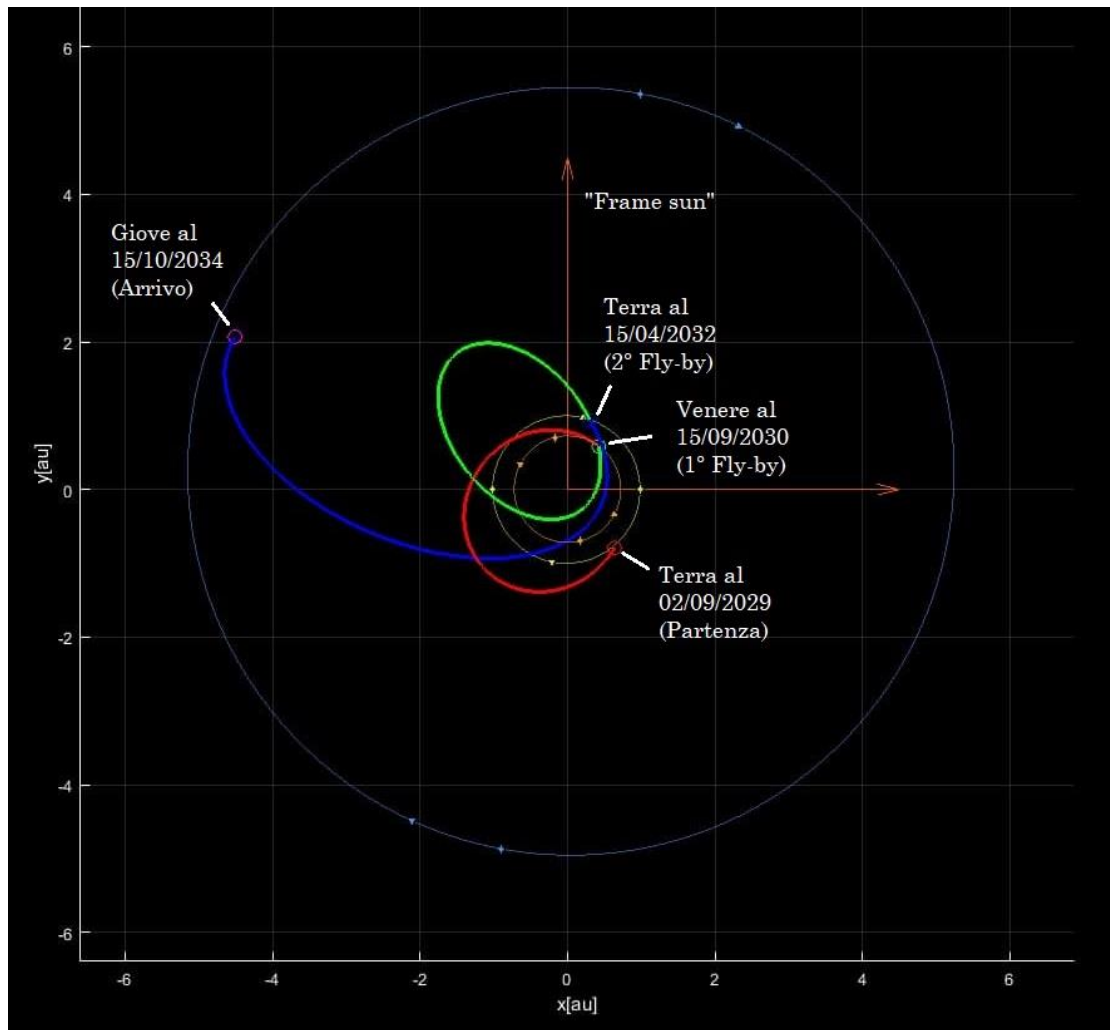


Figura 14: *Traiettoria interplanetaria della sonda in 2D*

trasferimento		posizione_iniziale			posizione_finale		
{'terral-vener1'}	}	0.63812	-0.78915	-2.1073e-07	0.4219	0.58518	-0.032305
{'venerel-terra2'}	}	0.4219	0.58518	-0.032305	0.30322	0.93767	2.5039e-07
{'terra2-giove1'}	}	0.30322	0.93767	2.5039e-07	0.63812	-0.78915	-2.1073e-07
{'terral-giove1 homann'}	}	0.63812	-0.78915	-2.1073e-07	-4.5096	2.0703	0.11001
{'terra2-giove1 homann'}	}	0.63812	-0.78915	-2.1073e-07	-4.5096	2.0703	0.11001

velocita_partenza			velocita_arrivo			giorni_impiegati
-15.681	-26.861	1.3499	32	-25.573	-0.40861	373
8.6919	-41.52	-3.0711	14.195	-30.65	-3.3471	567
19.692	-32.995	-0.64494	3.0475	4.9139	-0.030978	912.5
29.795	24.667	-1.9298	2.8688	-10.021	0.20309	1852.5
-13.676	36.86	0.5437	6.067	-8.1073	-0.18457	1852.5

Figura 15: *Informazioni di posizione, velocita e tempo di volo per ogni patch*

## 2. Iperbole di fuga e di cattura (interno alla SOI)

A livello implementativo abbiamo utilizzato questi concetti per andare a calcolare i  $\Delta v$  necessari a:

- Lasciare l'orbita di parcheggio terrestre di partenza
- Entrare in quella di Giove
- Approdare sull'orbita di parcheggio finale attorno al satellite gioviano Io.

Nello script, utilizzando i  $\Delta v$  calcolati, siamo andati a tracciare le traiettorie per i tre pianeti elencati sopra, ottenendo le seguenti immagini:

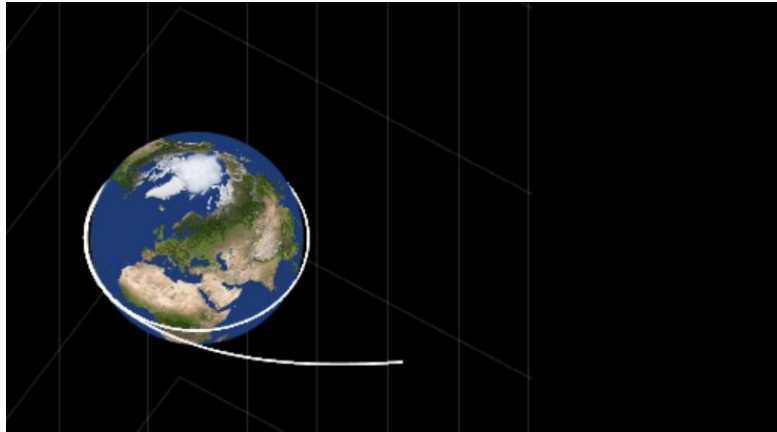


Figura 16: *Rappresentazione grafica iperbole di fuga dalla Terra 3D*

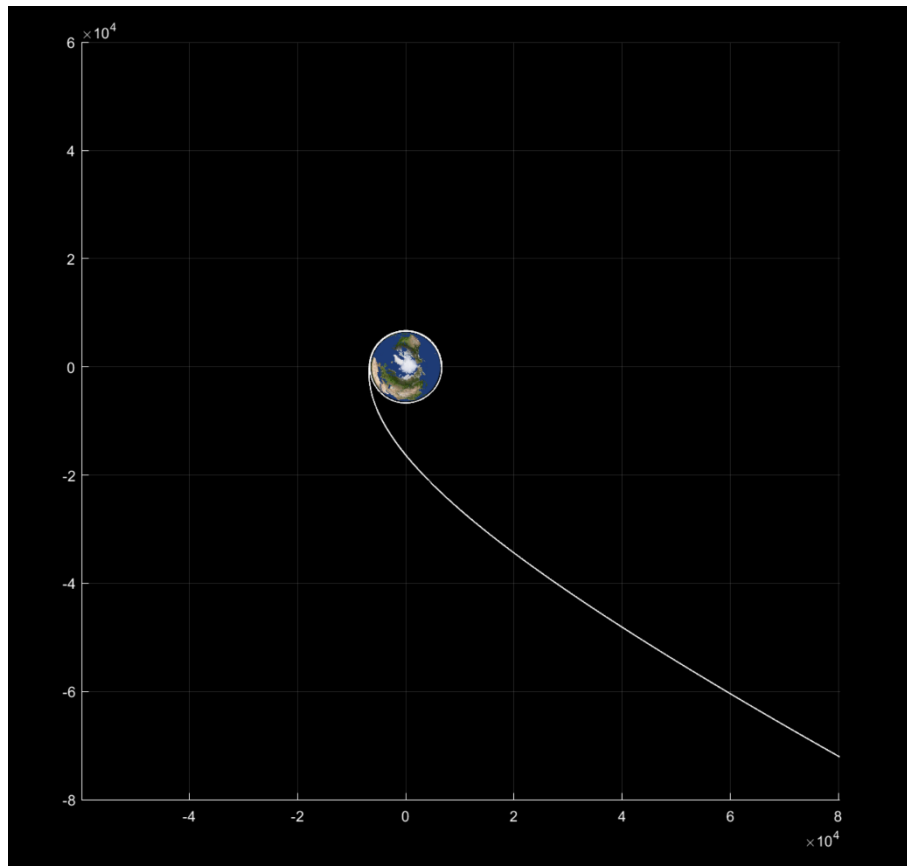


Figura 17: *Rappresentazione grafica iperbole di fuga dalla Terra 2D*

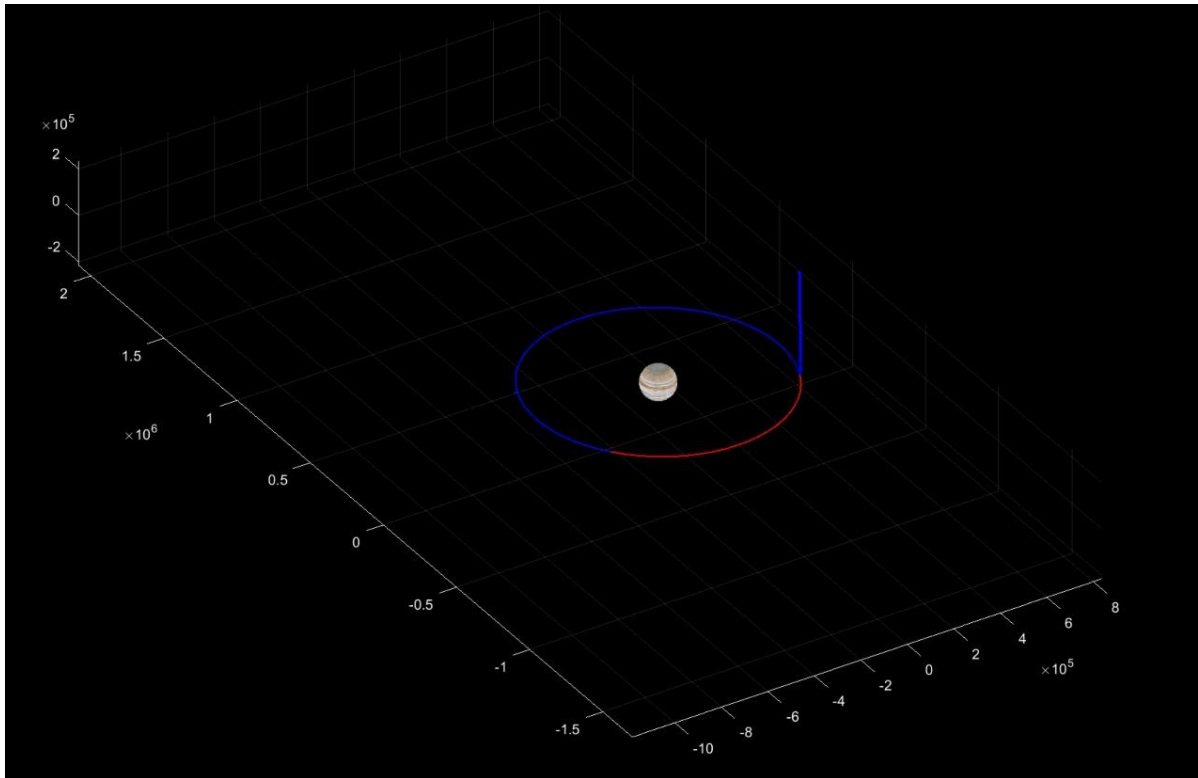


Figura 18: *Rappresentazione grafica iperbole di cattura Giove 3D*

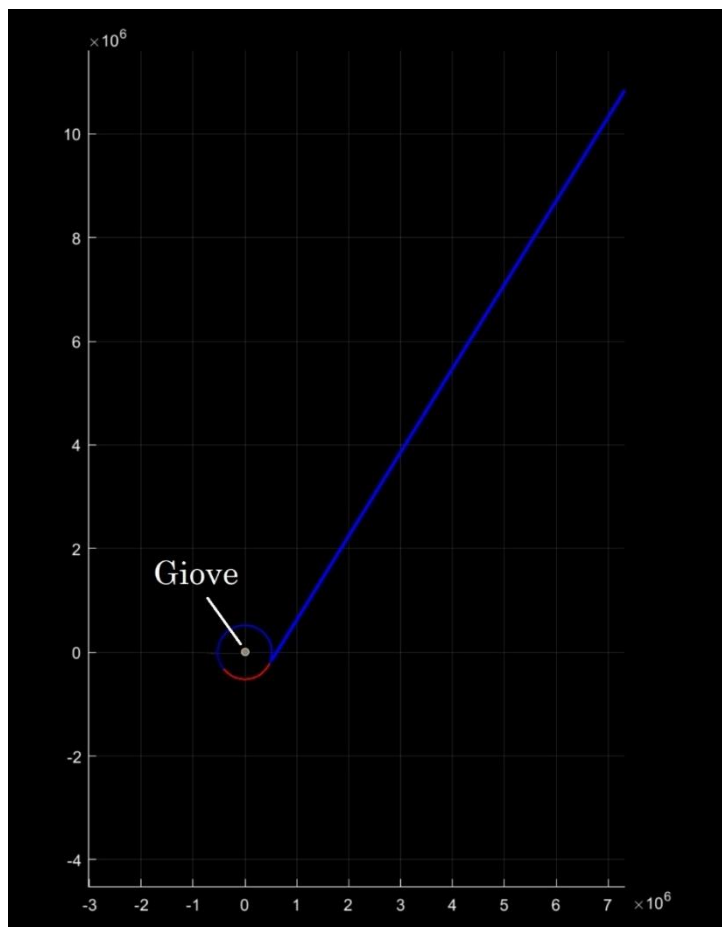


Figura 19: *Rappresentazione grafica iperbole di cattura Giove 2D*

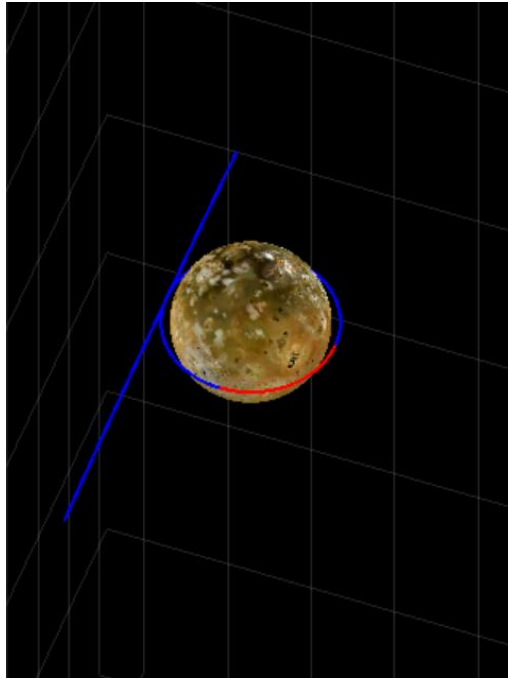


Figura 20: *Rappresentazione grafica iperbole di cattura Io 3D*

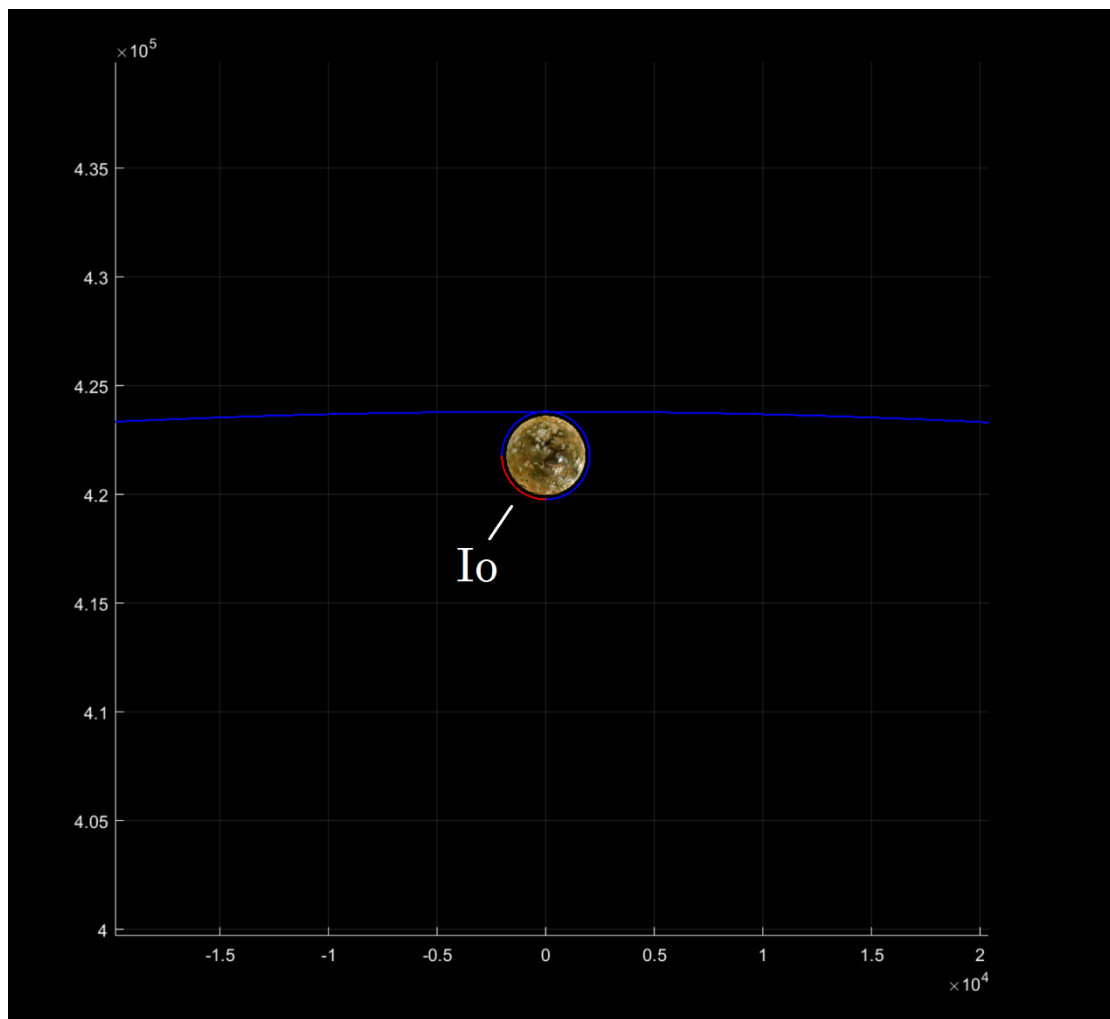


Figura 21: *Rappresentazione grafica iperbole di cattura Io 2D*

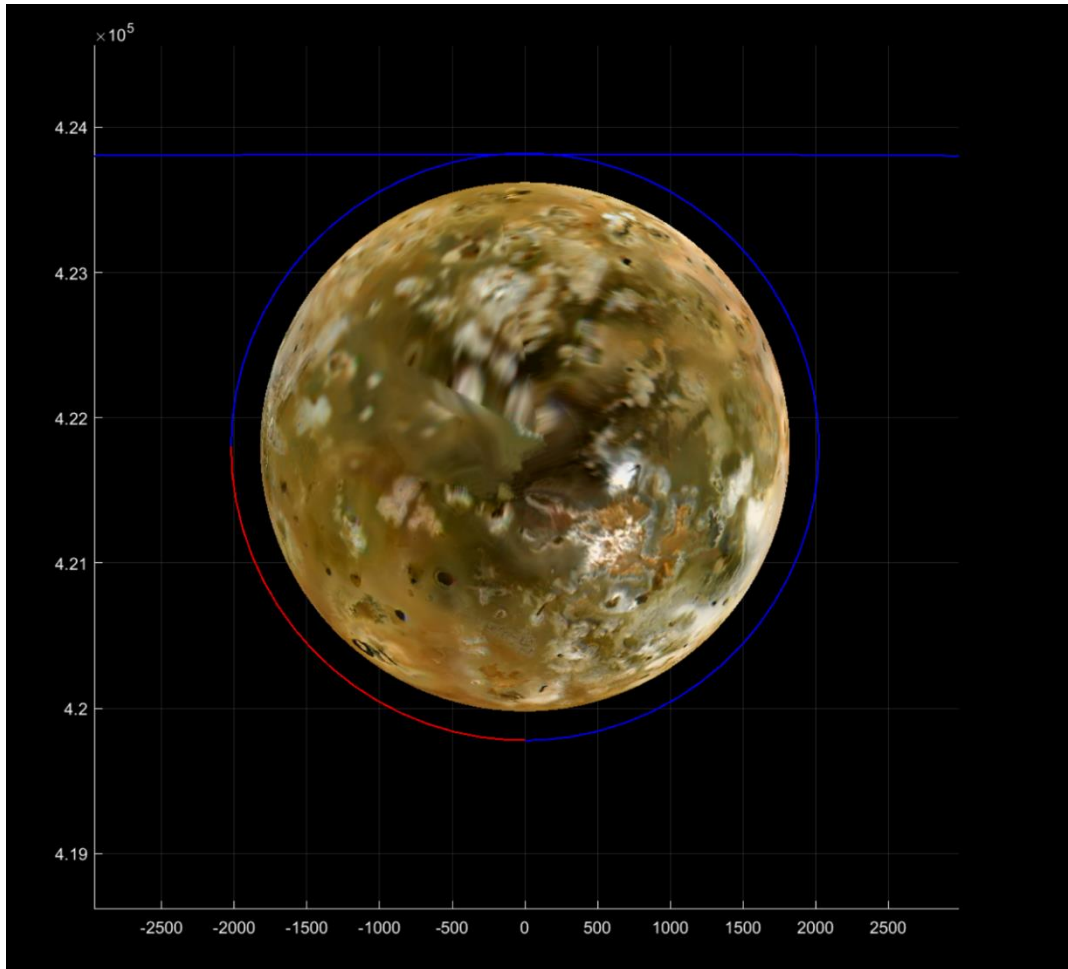


Figura 22: *Rappresentazione grafica orbita di parcheggio Io 2D*

I  $\Delta v$  necessari per eseguire le varie manovre all'interno della SOI, sono stati calcolati e sommati direttamente a quelli necessari per il trasferimento interplanetario. Tali valori sono presenti nella tabella a Figura 30.

### 3. Fly-by (interno alla SOI)

Nel codice abbiamo implementato questa manovra con l'omonima funzione matlab *flyby.m* presa dalla libreria del testo “*Orbital Mechanics for Engineering Students*”. Tale funzione prende in ingresso:

- Dimensione del pianeta e raggio della sua sfera di influenza (SOI)
- L'angolo  $\delta$  di svolta
- Raggio dell'iperbole  $r_p$ , che rappresenta la minima distanza della traiettoria dal pianeta.
- Data del fly-by, che nella trattazione viene considerato una manovra istantanea.

e restituisce il plot della manovra.

Sfruttando le formule viste nella parte di analisi della traiettoria, consideriamo come  $v_{\infty_i}$  e  $v_{\infty_u}$  le velocità calcolate con la funzione *lambert.m* necessarie per compiere il “*patch*” della traiettoria interplanetaria. Dalla conoscenza di questi due valori, siamo in grado di ricavare tutti i dati di input della funzione ed ottenere la rappresentazione grafica della manovra.

Ricordiamo che nel nostro progetto la fionda gravitazionale viene eseguita su:

- Venere il 15/09/2030
- Terra il 15/04/2032

Applicando la funzione *flyby.m* per i pianeti di Venere e Terra otteniamo le seguenti figure:

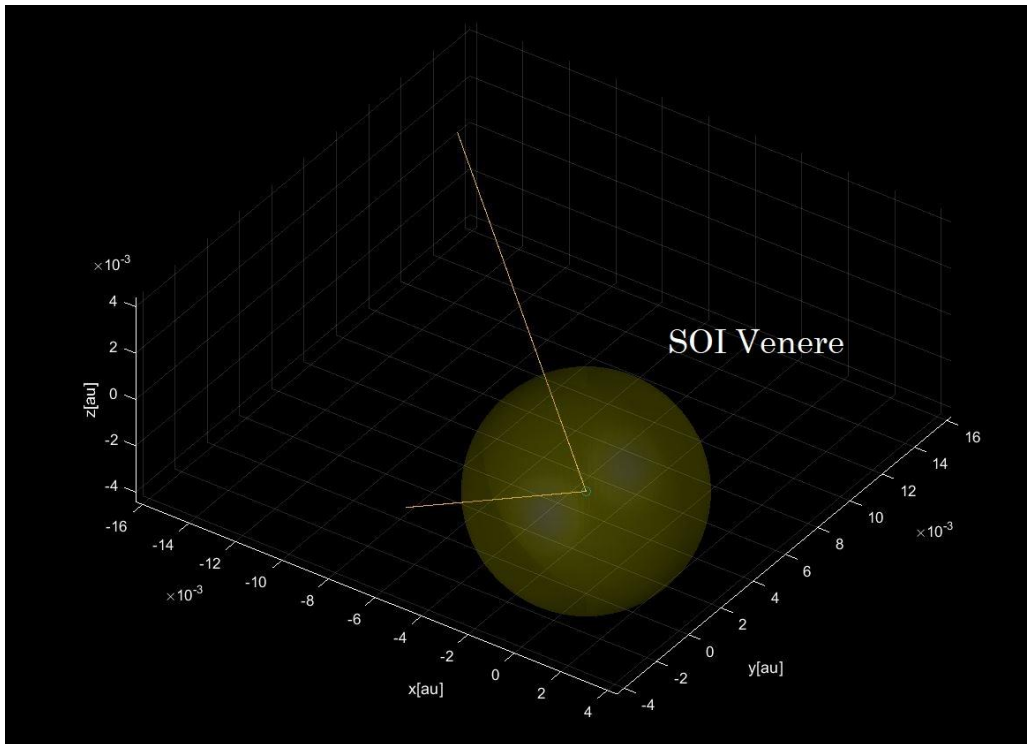


Figura 23: *Fly-by visto dall'esterno della sfera di influenza di Venere*

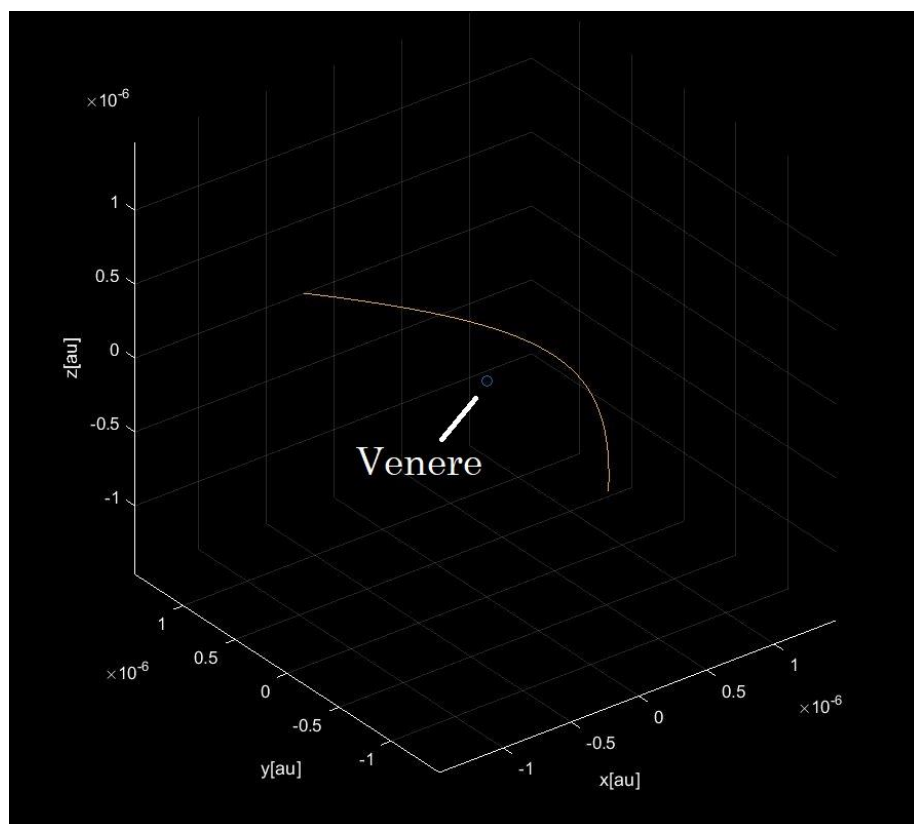


Figura 24: *Fly-by visto dall'interno della sfera di influenza di Venere*



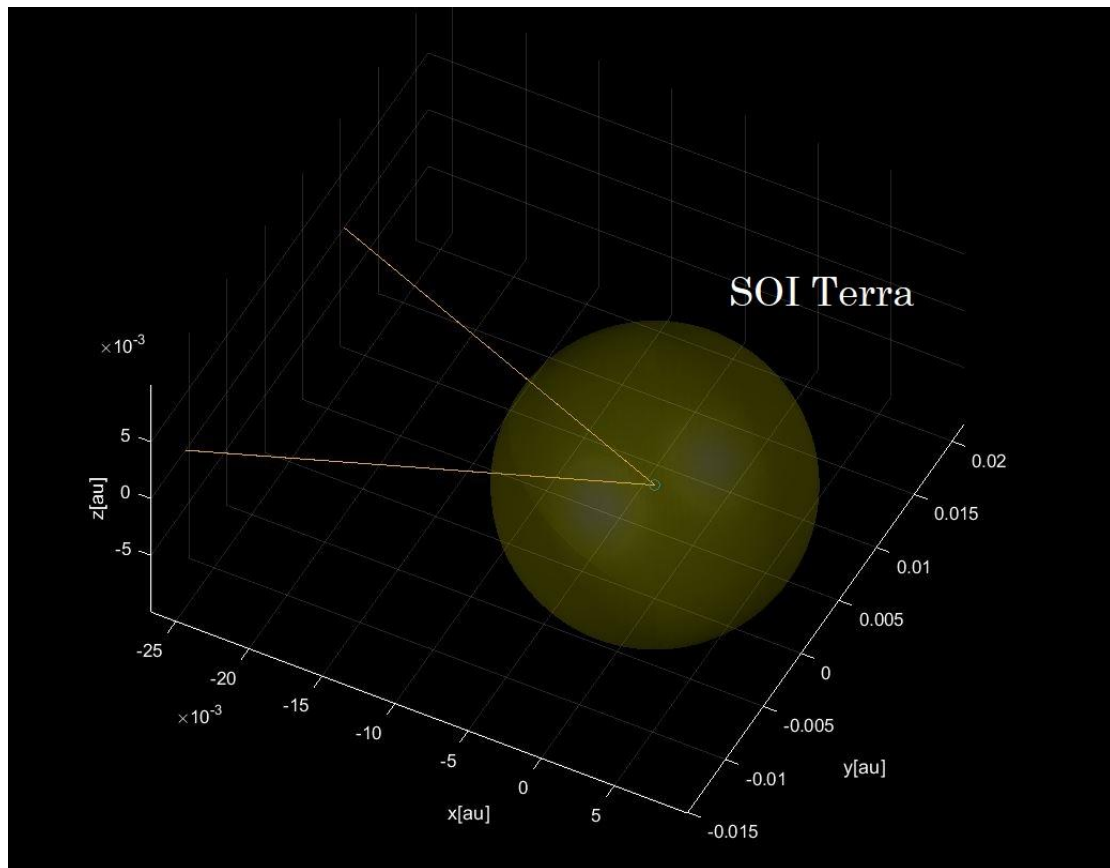


Figura 25: *Fly-by visto dall'esterno della sfera di influenza della Terra*

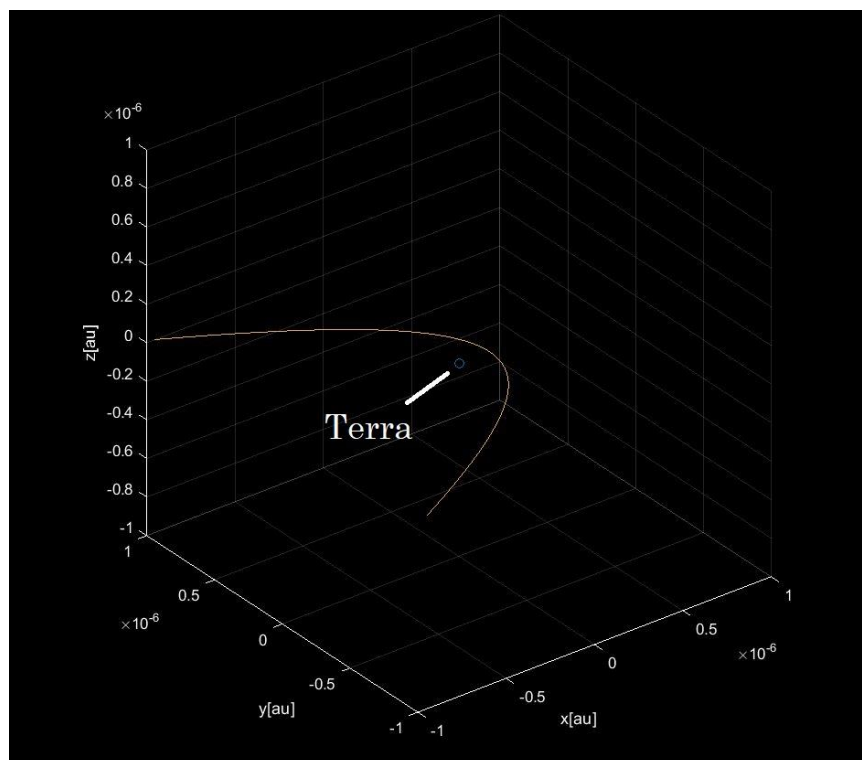


Figura 26: *Fly-by visto dall'interno della sfera di influenza della Terra*

#### 4. Rendez-vous su Io

L'ultima manovra che effettua la sonda è il *rendez-vous* per approdare nell'orbita di parcheggio che dista 200 km dalla superficie di Io.

Abbiamo deciso di compiere la manovra di avvicinamento al satellite attraverso un trasferimento alla *Hohmann*, dato che la sonda deve passare tra due orbite circolari complanari.

Prima di commentare i risultati ottenuti, vogliamo brevemente definire questa tipologia di trasferimento. Si tratta della manovra ottima dal punto di vista energetico per la classe di trasferimento ellittico a due impulsi, in cui si esegue solamente un  $\Delta v$  al momento della partenza dall'orbita di parcheggio terrestre e uno al momento di arrivo, in modo da sostare nell'orbita di parcheggio.

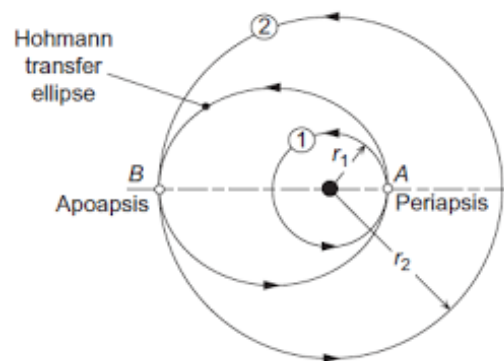


Figura 27: *Trasferimento alla Hohmann*

Per implementare l'operazione abbiamo utilizzato l'omonima funzione matlab, che oltre a calcolare i  $\Delta v$  necessari alla manovra esegue anche il plot della traiettoria.

Lanciando la funzione matlab *Hohmann.m* otteniamo le seguenti immagini:

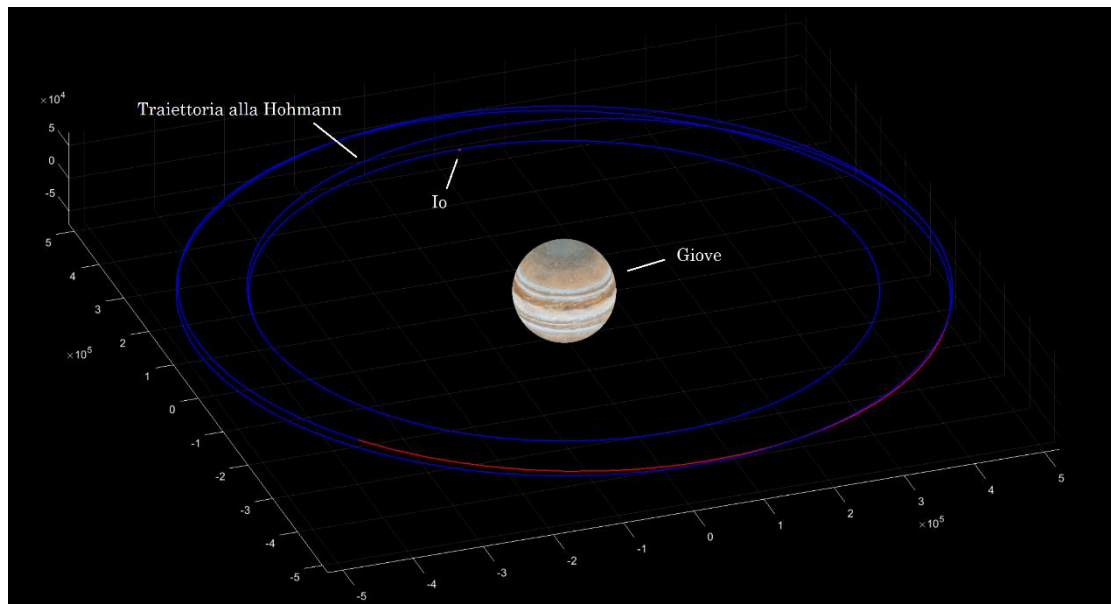


Figura 28: *Rappresentazione grafica manovra di Hohmann per arrivare su Io 3D*

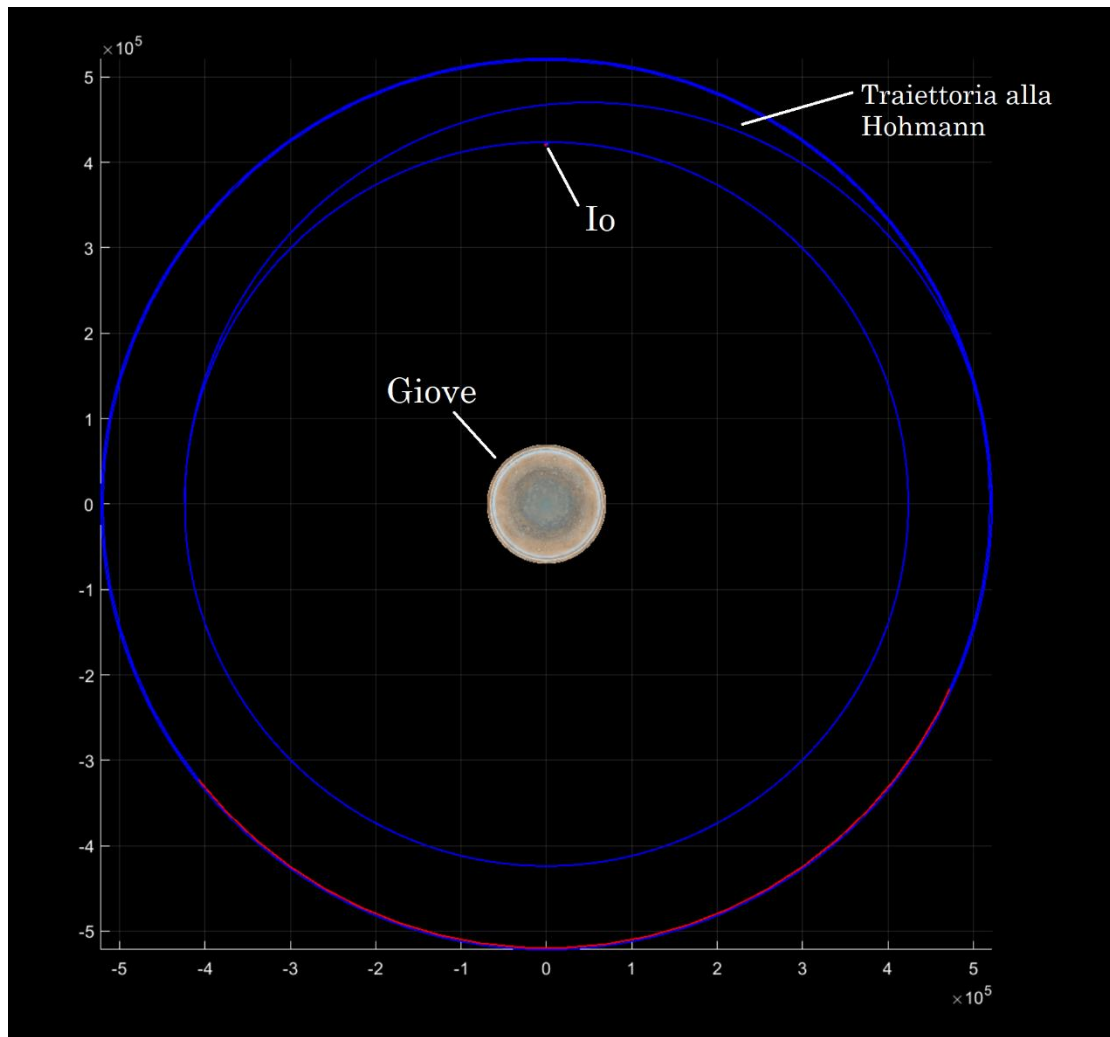


Figura 29: *Rappresentazione grafica manovra di Hohmann per arrivare su Io 2D*

## • Calcolo dei $\Delta v$ per l'orbita di trasferimento

Una delle richieste nella consegna del progetto è quella di comparare il  $\Delta v_{tot}$  della missione con quello necessario per un *trasferimento alla Hohmann*.

Per soddisfare la richiesta, abbiamo richiamato la funzione matlab precedentemente utilizzata per effettuare il rendez-vous su Io, dove in questo caso abbiamo inserito le coordinate del pianeta Terra al momento del lancio e di Giove al momento di arrivo.

I risultati ottenuti sono:

trasferimento	deltaV
{'1° Patch Terra1 - Venerel compreso $\Delta v$ fuga dalla Terra '}	3.6321
{' $\Delta v$ per 1° fly-by su Venerel '}	0.33134
{' $\Delta v$ per 2° fly-by su Terra2 '}	0.3297
{' $\Delta v$ Trasferimento alla Hohmann Terra1-Giove1 '}	11.729
{' $\Delta v$ Trasferimento Terra2-Giove1 "retrogrado" '}	69.319
{' Terra2 - Io (compresi $\Delta v$ interni alla SOI) '}	6.18
{' Totale $\Delta v$ per missione su Io '}	10.473

Figura 30: Tabella riassuntiva dei  $\Delta v$  necessari per la missione

Comparando i valori alle voci *Totale  $\Delta v$  per missione su Io* e  *$\Delta v$  Trasferimento alla Hohmann Terra1-Giove1* notiamo che il  $\Delta v_{tot}$  ottenuto attraverso la traiettoria studiata è inferiore rispetto a quello necessario per il trasferimento alla Hohmann. Possiamo considerare questa specifica soddisfatta.

In aggiunta, nella tabella è presente la voce  *$\Delta v$  Trasferimento Terra2-Giove1 "retrogrado"* che calcola il  $\Delta v$  necessario alla navicella per compiere l'ultima patch di conica con una traiettoria "retrograda". Il risultato ottenuto è coerente con la teoria, poiché a parità di distanza percorsa, una traiettoria retrograda necessita di un  $\Delta v$  superiore rispetto ad una traiettoria prograda.

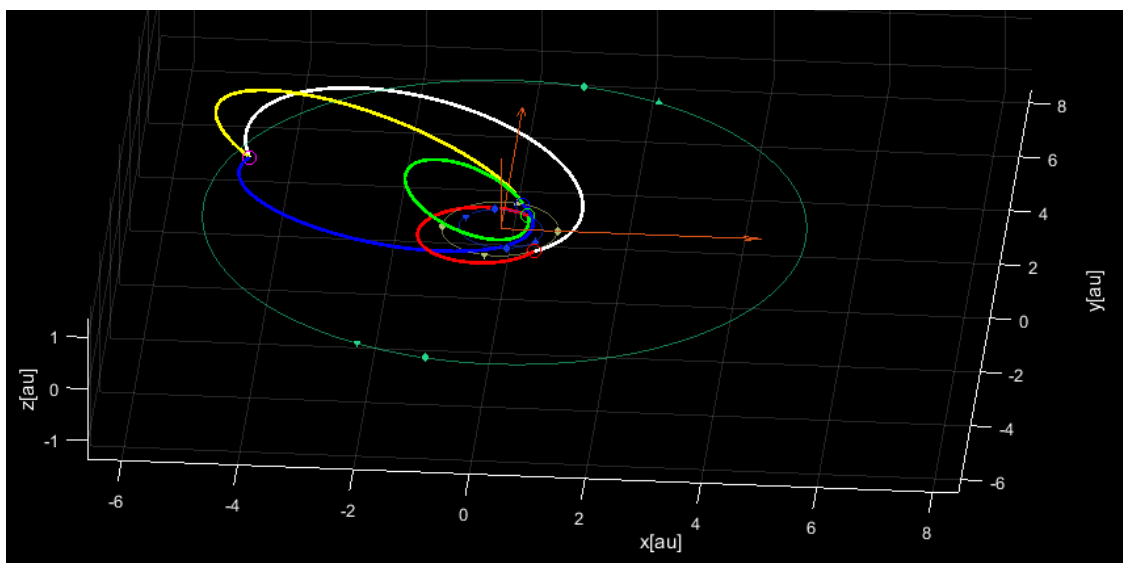


Figura 31: Rappresentazione grafica delle traiettorie presenti nella tabella

Nella Figura 31 sono rappresentate, in aggiunta alle *patch* della traiettoria della missione, il trasferimento alla Hohmann che porta la sonda dalla posizione di partenza a Giove in bianco e in giallo la *patch* “*Terra2-Giove1 retrograda*”.

Per validare ulteriormente il nostro progetto, abbiamo confrontato la tabella dei  $\Delta v$  ottenuti con quella della tesi dell’ingegner *Andrea Caruso*, ottenendo un buon riscontro dei valori.

Variabili di Disegno	Soluzione
$t_{0jd}$	6085.954 (29 Agosto 2016 22:53:35)
$\Delta v_p$	3.1604 km/s
$T_1$	373.2178 giorni
$e_{11}$	0
$e_{12}$	0.1197
Data DSM	13 Ottobre 2016 14:51:28
$\Delta v_{DSM}$	0.3147 km/s
Data Fly-By di Venere	7 Settembre 2017 04:07:12
$\Delta v_{pf1}$	$2.03 \times 10^{-5}$ km/s
$T_2$	567.6479 giorni
$e_{21}, e_{22}$	0
Data Fly-By della Terra	28 Marzo 2019 19:40:12
$\Delta v_{pf2}$	0.3338 km/s
$e_{31}, e_{32}$	0
$t_{ajd}$	7934.265 (21 Settembre 2021 06:21:37)
$\Delta v_a$	6.1808 km/s
$\Delta v_{tot}$	9.9898 km/s

Figura 32: *Tabella  $\Delta v$  ottenuta da un algoritmo di ottimizzazione delle traiettorie*

Nel seguente collegamento è presente un’animazione che mostra il viaggio completo eseguito dalla sonda per raggiungere Giove:

→ [Animazione traiettoria sonda missione.mp4](#)

## • Considerazioni finali

In conclusione, facendo arrivare la sonda su Io il 1/12/2034, abbiamo, con le dovute approssimazioni, portato a termine la missione spaziale assegnataci. Tuttavia volevamo porre l’attenzione su alcuni aspetti legati proprio alle approssimazioni effettuate nella trattazione.

La prima considerazione è quella legata all’approssimazione effettuata ad inizio del progetto, dove abbiamo considerato il moto di ogni corpo come “*kepleriano*”.

Tale condizione rende molto più agevoli i calcoli anche se in alcuni casi sarebbe necessario andare a studiare il moto in condizioni più realistiche, come il caso a *n-corpi*. La soluzione del problema per un numero di corpi superiore a due non esiste in forma chiusa ed è ottenibile solo mediante algoritmi numerici.

La seconda considerazione è quella legata all’approssimazione che si effettua nei parametri orbitali, considerando una situazione orbitale “statica” a J2000. Tale standard, anche se riconosciuto dalla comunità scientifica come marker di un’Era astronomica, rappresenta un’approssimazione “forte”, che può essere significativa specialmente per i viaggi interplanetari molto lunghi.

La terza considerazione è quella legata alla difficoltà di reperimento di dati riguardanti il satellite gioviano Io. In rete abbiamo trovato solamente informazioni superficiali che ci hanno costretto ad effettuare approssimazioni riguardanti la sua orbita. Infatti, per comodità di calcolo abbiamo considerato che compia un’orbita circolare di raggio medio noto con inclinazione nulla rispetto al piano dell’eclittica.

## • Fonti e riferimenti

- Appunti del corso
- Orbital Mechanics for Engineering Students, Howard D. Curtis, 3° Edition  
<http://www.nssc.ac.cn/wxzygx/weixin/201607/P020160718380095698873.pdf>
- Keplerian Element for Approximate Position of the Major Planets, E.M. Standish, Solar System Dynamics Group  
[https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx\\_pos\\_planets.pdf](https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf)
- Software NASA <https://eyes.nasa.gov/>
- Tesi Ottimizzazione delle traiettorie interplanetarie dell'ing. Caruso Andrea  
<https://etd.adm.unipi.it/t/etd-05202016-105223/>