Résolution de la problématique :

I- Circuit électrique :

1) Déterminons la résistance de charge R_c maximisant la puissance !

On sait que $P = UI$

or ici $U = RI$

d'où $P = RI^2$

et donc $P_c = R_c I^2$

or d'après la loi de Pouillet, $I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R}$

donc $I = \frac{E}{R_{out}+R_c}$

et donc $P_c = \frac{R_c E^2}{(R_{out}+R_c)^2}$

On a ainsi $P(R_c) = P_c = \frac{R_c E^2}{(R_{out}+R_c)^2}$

d'où $P'(R_c) = E^2 \times \frac{R_c'(R_{out}+R_c)^2 - R_c\left[\left((R_{out}+R_c)^2\right)'\right]}{(R_{out}+R_c)^4}$

$= E^2 \times \frac{(R_{out}+R_c)(R_{out}-R_c)}{(R_{out}+R_c)^4}$

$= \frac{E^2(R_{out}-R_c)}{(R_{out}+R_c)^3}$

de plus pour $P(R_c)$ maximale, $P'(R_c) = 0$

on a donc $P(R_c)$ max $\Leftrightarrow P'(R_c) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{E^2(R_{out}-R_c)}{(R_{out}+R_c)^3} = 0$

$\Leftrightarrow E^2(R_{out}-R_c) = 0$

$\Leftrightarrow R_{out} - R_c$ car $E^2 > 0$

$\Leftrightarrow R_{out} = R_c$

Tableau de variation de la fonction P

R_c	0		R_{out}		$+\infty$
$P'(R_c)$		$+$	0	$-$	
$P(R_c)$	0	$\nearrow$	$\frac{E^2}{4R_{out}}$	$\searrow$	0

d'où d'après ce qui précède $R_c = R_{out} = 50\,\Omega$

II- Signaux transmis

1) Écrivons les équations analytiques des signaux V_1, V_2 et V_3

* **Signal 1** : Il s'agit d'un signal sinusoïdal, donc son équation est de la forme

$$V_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

or $\varphi = 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

d'où on a $\boxed{V_1(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}$

* **Signal 2** : Il s'agit d'un signal parabolique, donc son équation est de la forme :

$$V_2(t) = ax^2 + bx + c$$

Étudions V_2 sur les intervalles donnés

- Sur $[0, \frac{T}{2}]$

Or les points $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}\frac{T}{4}\\A_2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}\frac{T}{2}\\0\end{pmatrix}$ appartiennent à la parabole. d'où le système

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a\left(\frac{T}{4}\right)^2 + b\left(\frac{T}{4}\right) + c = A_2 \\ a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(0)^2+b(0)+c=0 & (L_1) \\ a\left(\frac{T}{4}\right)^2+b\left(\frac{T}{4}\right)+c=A_2 & (L_2) \\ a\left(\frac{T}{2}\right)^2+b\left(\frac{T}{2}\right)+c=0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 & (L_1) \\ a\frac{T^2}{16}+b\frac{T}{4}+c=A_2 & (L_2) \\ a\frac{T^2}{4}+b\frac{T}{2}+c=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 & (L_1) \\ a\frac{T^2}{16}+b\frac{T}{4}=A_2 & (L_2) \\ a\frac{T^2}{4}+b\frac{T}{2}=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 & (L_1) \\ b=\frac{8A_2}{T} & (L'') \text{ : } (L') \text{ dans } (L_1) \\ a=-\frac{16A_2}{T^2} & (L') = -2(L_1)+(L_2) \end{cases}$$

d'où on a $\boxed{V_2(t) = -\frac{16A_2}{T^2}t^2 + \frac{8A_2}{T} \quad \text{sur } \left[0, \frac{T}{2}\right]}$

- Sur $\left[\frac{T}{2}, T\right]$

soient les points $D\begin{pmatrix}\frac{T}{2}\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}\frac{3T}{4}\\-A_2\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}$ appartenant à la parabole d'où le système

$$\begin{cases} a\left(\frac{T}{2}\right)^2+b\left(\frac{T}{2}\right)+c=0 \\ a\left(\frac{3T}{4}\right)^2+b\left(\frac{3T}{4}\right)+c=-A_2 \\ a(T)^2+b(T)+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\left(\frac{T}{2}\right)^2+b\left(\frac{T}{2}\right)+c=0 \\ a\left(\frac{3T}{4}\right)^2+b\left(\frac{3T}{4}\right)+c=A_2 \\ a(T)^2+b(T)+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\frac{T^2}{4}+b\frac{T}{2}+c=0 & (L_1) \\ a\frac{9T^2}{16}+b\frac{3T}{4}+c=-A_2 & (L_2) \\ aT^2+bT+c=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\frac{T^2}{4}+b\frac{T}{2}+c=0 & (L_1) \\ -5aT^2-4bT=16A_2 & (L_2') \\ a=\frac{16A_2}{T^2} & (L_3'')=2(L_2')+(L_3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{16A_2}{T^2} \\ b=-\frac{24A_2}{T} \\ c=8A_2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

d'où on a $\boxed{V_2(t) = \frac{16A_2}{T^2}t^2 - \frac{24A_2}{T}t + 8A_2 \text{ sur } \left[\frac{T}{2}; T\right]}$

On a donc $\boxed{V_2(t) = \begin{cases} -\frac{16A_2}{T^2}t^2 + \frac{8A_2}{T}t & \text{sur } \left[0; \frac{T}{2}\right] \\ \frac{16A_2}{T^2}t^2 - \frac{24A_2}{T}t + 8A_2 & \text{sur } \left[\frac{T}{2}; T\right] \end{cases}}$

* Signal 3 : Il s'agit d'un signal triangulaire, donc son équation est de la forme $V_3(t) = ax + b$

Etudions le signal V_3 sur les intervalles donnés

- Sur $\left[0, \frac{T}{4}\right]$

On a $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}\frac{T}{4}\\A_3\end{pmatrix}$ deux points qui vérifient la droite

d'où le système $\begin{cases} a(0) + b = 0 \\ a\left(\frac{T}{4}\right) + b = A_3 \end{cases}$

$\begin{cases} a(0) + b = 0 \\ a\left(\frac{T}{4}\right) + b = A_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{4A_3}{T} \end{cases}$

d'où on a $\boxed{V_3(t) = \frac{4A_3}{T}t \text{ sur } \left[0; \frac{T}{4}\right]}$

- Sur $\left[\frac{T}{4}; \frac{3T}{4}\right]$

On a $B\begin{pmatrix}\frac{T}{4}\\A_3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}\frac{3T}{4}\\-A_3\end{pmatrix}$ deux points qui vérifient la droite

d'où le système : $\begin{cases} a\left(\frac{T}{4}\right) + b = A_3 \\ a\left(\frac{3T}{4}\right) + b = -A_3 \end{cases}$

$\begin{cases} a\frac{T}{4} + b = A_3 \\ a\frac{3T}{4} + b = -A_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4A_3}{T} \\ b = 2A_3 \end{cases}$

d'où on a $\boxed{V_3(t) = -\frac{4A_3}{T}t + 2A_3 \text{ sur } \left[\frac{T}{4}; \frac{3T}{4}\right]}$

- Sur $\left[\frac{3T}{4}; T\right]$

On a $C\begin{pmatrix}\frac{3T}{4}\\-A_3\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}$ deux points qui vérifient la droite d'où le système $\begin{cases} a\left(\frac{3T}{4}\right) + b = A_3 \\ a(T) + b = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a\frac{3T}{4} + b = A_3 \\ aT + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4A_3}{T} \\ b = 4A_3 \end{cases}$$

d'où on a $V_3(t) = -\frac{4A_3}{T}t + 4A_3$ sur $\left[\frac{3T}{4}, T\right]$

On a donc

$$V_3(t) = \begin{cases} \frac{4A_3}{T}t & \text{sur } \left[0, \frac{T}{4}\right] \\ -\frac{4A_3}{T}t + 2A_3 & \text{sur } \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \\ \frac{4A_3}{T}t - 4A_3 & \text{sur } \left[\frac{3T}{4}, T\right] \end{cases}$$

2) Trouvons les valeurs RMS des dérivées des signaux V_1, V_2 et V_3

→ Pour V_1

$V_1(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$\Rightarrow V_1'(t) = \frac{A_1 2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$$RMS(V_1'(t)) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{A_1 2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^2 dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{A_1^2 4\pi^2}{T^2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{A_1^2 4\pi^2}{T^3}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{A_1^2 4\pi^2}{2T^3}\left[\frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + t\right]_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{A_1^2 4\pi^2 T}{2T^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{A_1^2 4\pi^2}{2T^2}}$$

$$\boxed{RMS(V_1'(t)) = \frac{A_1 2\pi}{T\sqrt{2}}}$$

→ Pour V_2

$$V_2(t) = \begin{cases} -\frac{16A_2}{T^2}t^2 + \frac{8A_2}{T}t & \text{sur } \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{16A_2}{T^2}t^2 - \frac{24A_2}{T}t + 8A_2 & \text{sur } \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2'(t) = \begin{cases} -\frac{32A_2}{T^2}t + \frac{8A_2}{T} & \text{sur } \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{32A_2}{T^2}t - \frac{24A_2}{T} & \text{sur } \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

$$RMS(V_2'(t)) = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{32A_2}{T^2}t + \frac{8A_2}{T}\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T\left(\frac{32A_2}{T^2}t - \frac{24A_2}{T}\right)^2 dt\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{32^2A_2^2}{T^4}t^2 + \frac{8^2A_2^2}{T^2} - \frac{[illegible]A_2^2}{T^3}t\right)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T\left(\frac{32^2A_2^2}{T^4}t^2 + \frac{24^2A_2^2}{T^2} - \frac{[illegible]A_2^2}{T^3}t\right)dt\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\left[\frac{32^2A_2^2}{3T^4}t^3 + \frac{8^2A_2^2}{T^2}t - \frac{[illegible]A_2^2}{2T^3}t^2\right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{32^2A_2^2}{3T^4}t^3 + \frac{24^2A_2^2}{T^2}t - \frac{[illegible]A_2^2}{2T^3}t^2\right]_{\frac{T}{2}}^T\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{[illegible]}{3T}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{64A_2^2}{3T}}$$

$$= \sqrt{\frac{64A_2^2}{3T^2}}$$

$$\boxed{RMS(V_2'(t)) = \frac{8A_2}{T\sqrt{3}}}$$

→ Pour V_3

$$V_3(t) = \begin{cases} \frac{4A_3}{T}t & \text{sur } \left[0, \frac{T}{4}\right] \\ -\frac{4A_3}{T}t + 2A_3 & \text{sur } \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \\ \frac{4A_3}{T}t - 4A_3 & \text{sur } \left[\frac{3T}{4}, T\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_3'(t) = \begin{cases} \frac{4A_3}{T} & \text{sur } \left[0, \frac{T}{4}\right] \\ -\frac{4A_3}{T} & \text{sur } \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \\ \frac{4A_3}{T} & \text{sur } \left[\frac{3T}{4}, T\right] \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$RMS(V_3'(t)) = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4A_3}{T}\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(\frac{4A_3}{T}\right)^2 dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(\frac{4A_3}{T}\right)^2 dt\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16A_3^2}{T^2} dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \frac{16A_3^2}{T^2} dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \frac{16A_3^2}{4} dt\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{16A_3^2}{T^2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{16A_3^2 t}{T^2}\right]_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{16A_3^2}{T^2}}$$

$$\boxed{RMS(V_3'(t)) = \frac{4A_3}{T}}$$

3) Donnons les conditions sur les amplitudes pour avoir 1 ou 0 bit :

1er cas : $(A_1 : A_2)$

$$RMS(V_1'(t)) > RMS(V_2'(t))$$

$$\Rightarrow \frac{2A_1\pi}{T\sqrt{2}} > \frac{8A_2}{T\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A_1 > \frac{8A_2}{\pi\sqrt{6}}$$ ainsi on obtient 1 bit pour $A_1 > \frac{8A_2}{\pi\sqrt{6}}$

et 0 bit pour $A_1 < \frac{8A_2}{\pi\sqrt{6}}$

2ème cas : $(A_2 : A_1)$

$$RMS(V_2'(t)) > RMS(V_1'(t))$$

$$\Rightarrow \frac{8A_2}{T\sqrt{3}} > \frac{2A_1\pi}{T\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A_2 > \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{8}$$ ainsi on a 1 bit pour $A_2 > \frac{A_1\pi\sqrt{6}}{8}$

et 0 bit pour $A_2 < \frac{A_1\pi\sqrt{6}}{8}$

3ème cas : $(A_2 : A_3)$

Scanné avec CamScanner

$RMS(V_2'(t)) > RMS(V_3'(t))$

$\Rightarrow \frac{8A_2}{T\sqrt{3}} > \frac{4A_3}{T}$

$\Rightarrow A_2 > \frac{A_3\sqrt{3}}{2}$ ainsi on a 1 bit pour $A_2 > \frac{A_3\sqrt{3}}{2}$
et 0 bit pour $A_2 < \frac{A_3\sqrt{3}}{2}$

4ème cas : $(A_3 ; A_2)$

$RMS(V_3'(t)) > RMS(V_2'(t))$

$\Rightarrow \frac{4A_3}{T} > \frac{8A_2}{T\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A_3 > \frac{2A_2}{\sqrt{3}}$ ainsi on a 1 bit pour $A_3 > \frac{2A_2}{\sqrt{3}}$
et 0 bit pour $A_3 < \frac{2A_2}{\sqrt{3}}$

5ème cas : $(A_3 ; A_1)$

$RMS(V_3'(t)) > RMS(V_1'(t))$

$\Rightarrow \frac{4A_3}{T} > \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{T}$

$\Rightarrow A_3 > \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{4}$ ainsi on a 1 bit pour $A_3 > \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{4}$ et 0 bit
pour $A_3 < \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{4}$

6ème cas : $(A_1 ; A_3)$

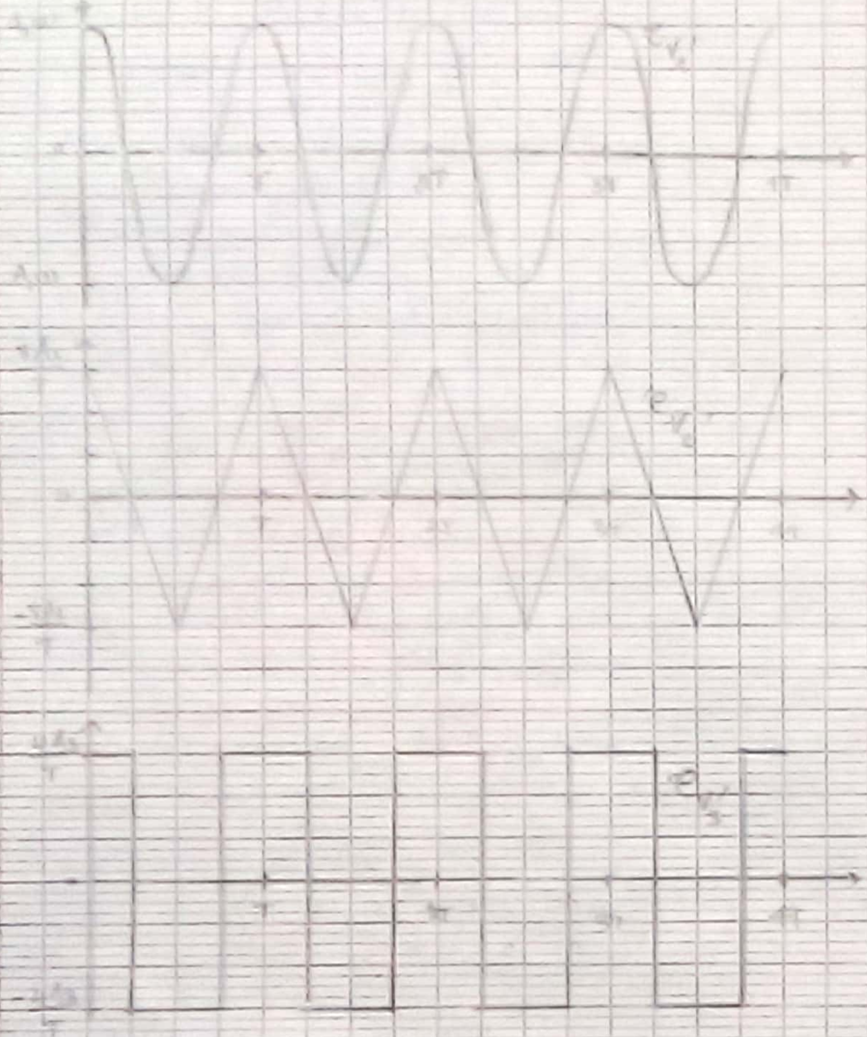
$RMS(V_1'(t)) > RMS(V_3'(t))$

$\Rightarrow \frac{A_1\pi\sqrt{2}}{T} > \frac{4A_3}{T}$

$\Rightarrow A_1 > \frac{4A_3}{\pi\sqrt{2}}$ ainsi on a 1 bit pour $A_1 > \frac{4A_3}{\pi\sqrt{2}}$ et 0 bit
pour $A_1 < \frac{4A_3}{\pi\sqrt{2}}$

4) Traçons les dérivées des signaux V_1, V_2 et V_3 :
d'après les dérivées des signaux V_1, V_2, V_3 on a :

Scanné avec CamScanner



III - Décryptage de l'image :

1) Equations de cryptage et de décryptage

* Equations de cryptage $Q_1 = E_1 \times Q_1'$

$Q_2 = E_2 \times Q_2'$

où E_1 est la matrice de cryptage pareil pour E_2.

* Equations de décryptage $Q_1' = E_1^{-1} \times Q_1$

$Q_2' = E_2^{-1} \times Q_2$

où E_1^{-1} est la matrice de décryptage pareil pour E_2^{-1}.

2-) Détermination des éléments de E_1 de cryptage des points A à G

1ère méthode: Cramer

On a $(E_1)\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -2\alpha + \beta + \delta = 0 \\ -2\beta + 2\gamma - \delta = -1 \end{cases}$

D'après Cramer,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

On a : $\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} -7 & +2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta\beta = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

Ainsi,

$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta_S} = \frac{4}{4}$, $\beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta_S} = \frac{20}{4}$, $\gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta_S} = \frac{12}{4}$, $\delta = \frac{\Delta\delta}{\Delta_S} = \frac{-12}{4}$

$\boxed{\alpha = 1}$ $\boxed{\beta = 5}$ $\boxed{\gamma = 3}$ $\boxed{\delta = -3}$

2ème méthode: Pivot de Gauss

4-) Décryptage des points A à G

$$E_1 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$E_1 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

D'après $E_1 I$, $\boxed{E_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}$

2e méthode

Déterminons E_1^{-1}

$$E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det E_1 = -3(-1) - 5(-1) + 5(-2)$$
$$= -2$$

- Déterminons ${}^{t}(\mathrm{com}\,E_1)$ et E_1^{-1}

* $\mathrm{Com}\,E_1$

$C_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1$

$C_{13} = (-1)^{1+3}(-2) = -2$

$C_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$

$C_{22} = (-1)^{2+2}(2) = 2$

$C_{23}\ (-1)^{2+3}(2) = -2$

$C_{31} = (-1)^{3+1}(5) = 5$

$C_{32} = (-1)^{3+2}(1) = -1$

$C_{33} = (-1)^{3+3}(4) = 4$

$$\mathrm{Com}\,E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$${}^{t}(\mathrm{com}\,E_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

* E_1^{-1}

$$E_1^{-1} = \frac{1}{\det E_1}\,{}^{t}(\mathrm{com}\,E_1)$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}$$

Décryptage des points A à G

$$Q_1' = E_1^{-1} \times Q_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -24 & 16 & 40 & 14 & 7 & 32 \\ 0 & 8 & -16 & -24 & -8 & -6 & -20 \\ 0 & -8 & 0 & 8 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q_1' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}}$$

5-) Décryptage des points H à M

$$E_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Déterminons E_2^{-1}

$1^{ère}$ méthode

$$E_2 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_2 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 \leftarrow -4L_3 + L_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

* $\det E_{22}$

$$E_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det E_{22} = 2(-6) + 3(0) + 2(6)$

$\boxed{\det E_{22} = 0}$

or nous savons que E_2^{-1} existe si et seulement si $\det E_2 \neq 0$.

D'où $E_2 = E_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

4-) Décryptage des points A à G

D'après ce qui précède, on a:

$Q_1' = Q_1 \times E_1^{-1}$

Déterminons E_1^{-1}

On sait que: $E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1ère méthode:

$$E_1 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_1 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 \leftarrow -L_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ -2\alpha + \beta + \delta = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ -2\beta + 2\gamma - \delta = -2 & L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ 11\alpha - 3\beta - \gamma = -7 & L_3 \\ -2\beta + 2\gamma - \delta = -2 & L_4 \leftarrow L_1 + 5L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ 11\alpha - 3\beta - \gamma = -7 & L_3 \\ \alpha - 8\beta + 9\gamma = -12 & L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ 11\alpha - 3\beta - \gamma = -7 & L_3 \leftarrow 11L_2 + L_3 \\ -7\beta + 8\gamma = -12 & L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ 8\beta - 12\gamma = 4 & L_3 \\ -7\beta + 8\gamma = -12 & L_4 \leftarrow 7L_3 + 8L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \\ 8\beta - 12\gamma = 4 & L_3 \leftarrow L_3 + 22L_4 \\ \gamma = 3 & L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 + L_4 \\ \beta = 5 & L_3 \\ \gamma = 3 & L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 5\delta = -7 & L_1 \leftarrow -L_2 - 2L_3 + L_4 \\ \alpha = 1 & L_2 \\ \beta = 5 & L_3 \\ \gamma = 3 & L_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \delta = -3 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 3 \end{cases}}$$

3-) Identification des éléments de E_2 de cryptage des points A à N

Calculons det E_{21} et det E_{22}

* det E_{21}

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det E_{21} = 2(-1) - 4(-1) - 1(1)$$

$$\boxed{\det E_{21} = 1}$$

Scanné avec CamScanner

5-) Décryptage des points H à M

Déterminons E_2^{-1}

1ère méthode

$$E_2 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] L_2 \leftarrow 2L_3 + L_2$$

$$E_2 I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

D'après $E_2 I$, $\boxed{E_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$

2e méthode:

Déterminons E_2^{-1}

$$E_2 = \begin{bmatrix} +2 & 4 & -1 \\ 1 & +3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(E_2) = +2(-1) - 4(-1) - 1(2)$$

$$\boxed{\det(E_2) = 2}$$

- Déterminons ${}^t(\text{com}\,E_2)$ et E_2^{-1}

* Com E_2

$C_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1$

$C_{13} = (-1)^{1+3}(1) = 1$

$C_{21} = (-1)^{2+1}(7) = -7$

$C_{22} = (-1)^{2+2}(4) = 4$

$C_{23} = (-1)^{2+3}(-2) = 2$

$C_{31} = (-1)^{3+1}(-5) = -5$

$C_{32} = (-1)^{3+2}(-3) = 3$

$C_{33} = (-1)^{3+3}(2) = 2$

$$\text{Com}(E_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^t\text{Com}(E_2) = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

* E_2^{-1}

$$E_2^{-1} = \frac{1}{\det E_2}\,{}^t(\text{com}\,E_2)$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$$

Décryptage des points H à M

$$Q_2' = E_2^{-1} \times Q_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 12 & 16 & 24 & 21 & 12 \\ 14 & 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ -21 & -3 & -4 & -11 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q_2' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} H & I & J & K & L & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 6 & 5 & 12 \end{bmatrix} \end{array}}$$

IV- Géométrie du bâtiment

1-) Equations des droites définissant les arêtes

Les arêtes du bâtiment pour l'étage le plus haut du bâtiment et le plancher du dernier étage sont : (MI), (MJ), (ML), (LI), (KJ), (LK), (JI), (MK).

* (MI)

M et I vérifient la droite (MI) d'où $\vec{MI}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Soit $Q(x\,;y\,,z)$

$Q \in (MI) \Rightarrow \vec{MI}$ colinéaire à $\vec{MQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \alpha \overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-22 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est :

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 4 \ (1) \\ y = -\alpha + 4 \ (2) \\ z = -6\alpha + 22 \ (3) \end{cases}$

Trouvons α dans (1)

$\alpha = -x + 4$

α dans (2) : $y = x - 4 + 4$

$\begin{cases} x = y \\ x - y = 0 \ (E_1) \end{cases}$

α dans (3) : $z = 6x - 24 + 12$

$\Rightarrow z = 6x - 12$

$\Rightarrow -6x + z + 12 = 0 \ (E_2)$

L'équation cartésienne est :

$\boxed{\begin{cases} x - y = 0 \\ -6x + z + 12 = 0 \end{cases}}$

* (MJ)

M et J vérifient la droite (MJ) d'où $\overrightarrow{MJ}$ est un vecteur directeur de cette droite

soit $Q'(x ; y ; z) \ni Q' \in (MJ) \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ'}$ colinéaire $\overrightarrow{MJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \alpha \overrightarrow{MJ}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

L'équation paramétrique est:

$$\begin{cases} x = \alpha + 4 & (1) \\ y = -\alpha + 4 & (2) \\ z = -5\alpha + 12 & (3) \end{cases}$$

Trouvons α dans (1)

$x = \alpha + 4 \Rightarrow \alpha = x - 4$

α dans (2)

$y = -x + 4 + 4$

$\Rightarrow x + y - 8 = 0 \; (E_1)$

α dans (3)

$z = -5x + 20 + 12$

$\Rightarrow z = -5x + 32$

$\Rightarrow 5x + z - 32 = 0 \; (E_2)$

L'équation cartésienne est:

$$\boxed{\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ 5x + z - 32 = 0 \end{cases}}$$

* (ML)

M et L vérifient la droite (ML) d'où $\overrightarrow{ML}$ est un vecteur directeur de cette droite.

soit $M(x, y, z)$

$M \in (ML) \Leftrightarrow \vec{ML}$ colinéaire à $\vec{MM}$

$\Leftrightarrow \vec{MM} = \alpha \vec{ML}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est :

$\begin{cases} x = -\alpha + 4 \ (1) \\ y = \alpha + 4 \ (2) \\ z = -7\alpha + 12 \ (3) \end{cases}$

Trouvons α dans (1)

$\alpha = -x + 4$

α dans (2)

$y = -x + 4 + 4$

$\Rightarrow x + y - 8 = 0 \ (E_1)$

α dans (3)

$z = 7x - 28 + 12$

$\Rightarrow -7x + z + 14 = 0$

L'équation cartésienne est :

$\boxed{\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ -7x + z + 14 = 0 \end{cases}}$

* (LI)

L et I vérifient la droite (LI) d'où $\vec{LI}$ est un vecteur directeur de cette droite.

soit $M'(x, y, z)$

$M' \in (LI) \Leftrightarrow \vec{LI}$ colinéaire à $\vec{LM'}$

$\Leftrightarrow \vec{LM'} = \alpha \vec{LI}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est :

$\begin{cases} x = 3 \ (1) \\ y = -2\alpha + 5 \ (2) \\ z = \alpha + 5 \ (3) \end{cases}$

Trouvons α dans (2)

$\alpha = \frac{-y+5}{2}$

α dans (3) : $z = \frac{-y+5}{2} + 5$

$\Rightarrow z = \frac{-y+15}{2}$

$\Rightarrow y + 2z - 15 = 0$

L'équation cartésienne est

$\boxed{y + 2z - 15 = 0}$

* (KI)

K et I vérifient la droite (KI) d'où $\vec{KI}$ est un vecteur directeur de cette droite

soit $O(x, y, z)$

$O \in (KI) \Leftrightarrow \vec{KI}$ colinéaire à $\vec{KO}$

$\Leftrightarrow \vec{KO} = \alpha \vec{KI}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est:

$$\begin{cases} x = -2\alpha + 6 \quad (1) \\ y = 5 \quad (2) \\ z = -\alpha + 6 \quad (3) \end{cases}$$

Trouvons α dans (1)

$$\alpha = \frac{-x+5}{2}$$

α dans (3)

$$z = \frac{x-5}{2} + 6$$

$$\Rightarrow -x + 2z - 7 = 0$$

L'équation cartésienne est:

$$\boxed{-x + 2z - 7 = 0}$$

* (KJ)

K et J vérifient la droite (KJ) d'où $\overrightarrow{KJ}$ est un vecteur directeur de cette droite.

soit $D'(x, y, z)$

$D' \in (KJ) \Leftrightarrow \overrightarrow{KJ}$ colinéaire $\overrightarrow{KD'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KD'} = \alpha \overrightarrow{KJ}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'équation paramétrique est:

$$\begin{cases} x = 5 \quad (1) \\ y = -2\alpha + 5 \quad (2) \\ z = \alpha + 6 \quad (3) \end{cases}$$

Trouvons α dans (2)

$$\alpha = \frac{-y+5}{2}$$

α dans (3)

$$z = \frac{-y+5}{2} + 6$$

$$\Rightarrow y + 2z - 17 = 0$$

L'équation cartésienne est:

$$\boxed{y + 2z - 17 = 0}$$

* (JI)

J et I vérifient la droite (JI) d'où $\overrightarrow{JI}$ est un vecteur directeur de cette droite.

soit $P(x, y, z)$

$P \in (JI) \Leftrightarrow \overrightarrow{JI}$ colinéaire $\overrightarrow{JP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JP} = \alpha \overrightarrow{JI}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \\ z-7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est:

$\begin{cases} x = -2\alpha + 5 \quad (1) \\ y = 3 \quad (2) \\ z = -\alpha + 7 \quad (3) \end{cases}$

Trouvons α dans (1)

$\alpha = \frac{-x+5}{2}$

α dans (3)

$z = \frac{x-5}{2} + 7$

$\Rightarrow -x + 2z - 9 = 0$

L'équation cartésienne est:

$\boxed{-x + 2z - 9 = 0}$

* (MK)

M et K vérifient la droite (MK) d'où $\overrightarrow{MK}$ est un vecteur directeur de cette droite

soit $P'(x, y, z)$

$P' \in (MK) \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}$ colinéaire $\overrightarrow{MP'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP'} = \alpha \overrightarrow{MK}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

L'équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \alpha + 4 \quad (1) \\ y = \alpha + 4 \quad (2) \\ z = -6\alpha + 12 \quad (3) \end{cases}$$

Trouvons α dans (1)

$\alpha = x - 4$

α dans (2)

$y = x - 4 + 4$

$$\begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y - x = 0 \end{cases} \quad (E_1)$$

α dans (3)

$z = -6x + 24 + 12$

$\Rightarrow 6x + z - 36 = 0 \quad (E_2)$

L'équation cartésienne est :

$$\boxed{\begin{cases} y - x = 0 \\ 6x + z - 36 = 0 \end{cases}}$$

Scanné avec CamScanner

2-) Equations des plans définissant les planchers

Plancher EFGH

Considérons $\vec{n}$ un vecteur normal à $\vec{EF}$ et $\vec{EG}$ et $Z\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $Z \in P_{(E,F,G)}$, alors $\vec{n}$ est normal à $\vec{EZ}$

$\Rightarrow \vec{EZ}\cdot\vec{n} = 0$ avec $\vec{n} = \vec{EF}\wedge\vec{EG}$

$\Rightarrow \vec{EZ}\cdot(\vec{EF}\wedge\vec{EG}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{EZ}\cdot \left|\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{array}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \vec{EZ}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-4\\16\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-2\\z-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\-4\\16\end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -4x + 8 - 4y + 8 + 16z - 32 = 0$

$\Rightarrow -4x - 4y + 16z - 16 = 0$

$\Rightarrow \boxed{-x - y + 4z - 4 = 0 \ (P_1)}$

Plancher IJKL

Considérons $\vec{n'}$ un vecteur normal à $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ et $Q\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $Q \in P_{(I,J,K)}$, alors $\vec{n'}$ est normal à $\vec{IQ}$

$\vec{I\ell} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n} = \vec{IJ} \wedge \vec{IK}$

$\Rightarrow \vec{I\ell} \cdot (\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{I\ell} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ 3-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -2x + 6 + 2y - 6 + 4z - 24 = 0$

$\Rightarrow -2x + 2y + 4z - 24 = 0$

$\Rightarrow \boxed{-x + y + 2z - 12 = 0 \ (P_2)}$

3)

L'engin explosif n'est pas directement sur un des planchers car $d(M,(P_1)) \neq 0$ et $d(M,(P_2)) \neq 0$ avec M l'endroit où se trouve l'engin explosif.

Demonstration

$$d(M,(P_1)) = \left| \frac{-1\times4 + (-1)\times4 + 4\times4 - 6}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$\boxed{d(M,(P_1)) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}}$$

$$d(M,(P_2)) = \left| \frac{-1\times4 + 1\times4 + 2\times4 - 12}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2}} \right|$$

$$\boxed{d(M,(P_2)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

donc $d(M,(P_1)) \neq 0$ et $d(M,(P_2)) \neq 0$

Calcul de la distance normale au plancher le plus près

$$d(M,(P_{(E,F,G)})) = \left| \frac{-2\times4 + (-1)\times4 + 4\times4 - 4}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2}} \right|$$

$$\boxed{d(M,(P_{(E,F,G)})) = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$ car $d(M,(P_{(E,F,G)})) < d(M,(P_{(I,J,K)}))$

4-b) Explication des mots "Edifice mal au cœur"

D'après la figure que nous avons obtenu nous pouvons dire qu'on parle ici de l'Edifice mal au cœur par ce que l'on a détecteur la bombe en question au beau milieu de l'édifice depuis les plancher de cet édifice sont très tortables ce qui justifie donc le mot édifice mal au cœur.