行列式

行列式：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11} \quad (n=1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ia}A_{ia} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{bj}A_{bj} \quad (n>1, 1 \le a, b \le n) \end{cases}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

M_{ij}：第i行j列的余子式，相当于原行列式去掉第i行和第j列得到的行列式　A_{ij}：代数余子式

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$　任意一行所有元素与另一行所有元素的代数余子式依次相乘并相加，和必然为0

主子式：取出行列式的某些行及某些列，**覆盖的列序号与行序号相同**，得到的行列式即主子式

顺序主子式：取出行列式的$1 \sim i$行和$1 \sim i$列得到的行列式(i从1增大到n)

行列式性质(行和列具有对称性，故只说明行的性质)：

$D = D^T$

$kD = D[kr_i]$　行列式乘k，其值等于对任意一行乘k

$D = -D[r_i \leftrightarrow r_j]$　交换行列式两行，值变为相反数

$r_j * k(k可为0) \Rightarrow D = 0$　若行列式中两行成比例，行列式的值为0

$D = D[r_i + = kr_j]$　把任意一行的k倍加到另一行上，行列式值不变

题型：行列式计算

$$D=\begin{vmatrix}x_1 & a & a & a\\ a & x_2 & a & a\\ a & a & x_3 & a\\ a & a & a & x_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & a & a & a\\ a-x_1 & x_2-a & 0 & 0\\ a-x_1 & 0 & x_3-a & 0\\ a-x_1 & 0 & 0 & x_4-a\end{vmatrix}\quad \text{行列式}\rightarrow\text{爪形行列式}\rightarrow\text{上三角行列式}$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & & & & \\ b & a & b & & & \\ & b & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b & a & b\\ & & & & b & a\end{vmatrix}\Rightarrow D_n=2aD_{n-1}-b^2D_{n-2}$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix},\text{求}M_{31}+M_{33}+M_{34}:$$

$$\text{原式}=A_{31}+A_{33}-A_{34}=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}\quad(\text{一定要注意区分代数余子式和余子式})$$

$$\text{三阶矩阵}\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3],|\mathbf{A}|=3,\mathbf{B}=[\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3+2\mathbf{a}_1],\text{求}|\mathbf{B}|:$$
$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}|\mathbf{A}|=-33$$

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix},\text{求}\sum_{i=1}^{n}A_{ki}:$$
$$\text{原式}=\frac{(-1)^{n-1}}{k}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ k & k & \cdots & k & k\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{vmatrix}(n-1\text{次列交换})=\frac{(-1)^{n-1}}{k}D(\text{化为上三角行列式})=\frac{(-1)^{n-1}n!}{k}$$

- 利用初等变换，构造0较多或元素全部相同的行/列，然后按该行/列展开；或构造上三角矩阵；或构造已知矩阵
- 求递归式；数学归纳法
- 利用特征值的性质

行列式与线性方程组

$$\text{线性方程组可表示为}:\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}\quad \mathbf{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$$
$$\text{齐次线性方程组}:\mathbf{b}=\mathbf{0}\text{的方程组}$$
$$\mathbf{A}:\text{系数(矩阵)}\quad \mathbf{X}:\text{解(列矩阵)}\quad \mathbf{b}:\text{常数项(列矩阵)}\quad m:\text{方程个数}\quad n:\text{未知数个数}$$
$$\text{未知数和方程数相同时},\mathbf{A}\text{行数列数相同},\text{记对应的行列式为}D;D\neq 0\text{时},\text{方程组有唯一解},x_j=\frac{D_j}{D}$$
$$D_j:\text{将}D\text{中的第}i\text{列替换为}\mathbf{b}\text{得到的行列式}$$

$$\text{实质上},D\neq 0\text{时},\mathbf{A}\text{为可逆矩阵},\mathbf{AX}=\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{D_1}{D}\\ \frac{D_2}{D}\\ \vdots\\ \frac{D_n}{D}\end{bmatrix}$$

矩阵

概念

下标先行再列,m-p-p-n

$$m\times n\text{矩阵}:\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}=[\mathbf{A}^1\quad\mathbf{A}^2\quad\cdots\quad\mathbf{A}^n]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \cdots\\ \mathbf{A}_m\end{bmatrix}$$
$$\text{零矩阵}:\text{记为}\mathbf{O}\quad n\text{阶矩阵}:n\times n\text{矩阵}\quad \text{单位矩阵}:\text{主对角线全为}1,\text{其他全为}0\text{的方阵},\text{记为}\mathbf{I}$$
$$\text{对角矩阵}:\text{除了主对角线上元素},\text{其他均为}0\text{的方阵},\text{记为}\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$\text{加法}:\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{C}_{m\times n},\text{其中}c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$
$$\text{乘法}:\mathbf{A}_{m\times p}+\mathbf{B}_{p\times n}=\mathbf{C}_{m\times n}\quad(\mathbf{m\text{-}p\text{-}p\text{-}n})\quad,\text{其中}c_{ij}=\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{B}^j(i\text{行与}j\text{列的内积})$$
$$\text{数乘}:k\mathbf{A}=\mathbf{C},\text{其中}c_{ij}=ka_{ij}$$
$$\text{对应行列式的值}:|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=|\mathbf{AB}|\quad |k\mathbf{A}_{n\times n}|=k^n|\mathbf{A}_{n\times n}|$$

- 矩阵可视为向量，其每一个分量仍为向量；矩阵作被乘数/被乘数时，被分解成多个行向量/列向量
- 只有方阵才有对角线的概念
- **矩阵乘法不满足交换律、等式两边相同的式子不能相消、非零矩阵相乘也可能得到零矩阵**

分块矩阵

$$\text{分块矩阵}:\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{kl}]_{s\times t}$$
$$\text{分块矩阵的加法、数乘不需要说明}$$
$$\text{分块矩阵转置}:\text{将整体转置},\text{然后在每个分块内再进行转置}$$
$$\text{分块矩阵乘法}:\text{将每个分块视为数字},\text{相乘},\text{然后计算分块间乘法}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{A}_2&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{A}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}_2&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{B}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\end{bmatrix}\quad\text{同形分块对角矩阵相乘时},\text{对角线直接相乘}$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{A}_2&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{A}_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^{-1}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{A}_2^{-1}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{A}_3^{-1}\end{bmatrix}\quad\text{每个分块可逆的对角分块矩阵可逆}$$
$$\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{B}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{C}\end{vmatrix}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}|\quad\text{注意:只有分块对角矩阵能分块计算行列式的值}$$

矩阵初等变换

初等矩阵：单位矩阵经过一次矩阵初等变换得到的矩阵

初等矩阵必然为方阵(注意行初等矩阵和列初等矩阵的大小未必相同)

行初等变换相当于左乘行初等矩阵, 列初等变换相当于右乘列初等矩阵, 即：$\mathbf{B}=\mathbf{P}_m...\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1...\mathbf{Q}_n$(注意顺序)

可以简写成：$\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{P}_{n\times n}\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Q}_{m\times m}\quad\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$必定为可逆矩阵

$\forall$初等矩阵$\mathbf{P}_m$, 有$\mathbf{P}_m^2=\mathbf{I},(\mathbf{P}_m)^{-1}=\mathbf{P}_m\quad$(行/列变换初等矩阵只是在表达式中的位置不同, 它们的种类完全相同)

等价矩阵：$\mathbf{A}$经过若干初等变换变为$\mathbf{B}$, 则$\mathbf{A}\Leftrightarrow\mathbf{B}$. 等价矩阵的标准形相同

行阶梯形：如$\begin{bmatrix}4&2&0&1\\0&3&1&2\\0&1&0&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

行标准形：如$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&2\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

标准形：$\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$

初等矩阵与矩阵初等变换对应(不完全一一对应), 且可用于求逆矩阵, 以三阶方阵为例：

$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$表示交换1、3行或交换1、3列, 其逆操作为其本身, 故逆矩阵为矩阵本身

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$表示将第2列的2倍加到第3列上, 其逆操作为将第2列的-2倍加到第3列上, 故逆矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

- 初等变换包括：**交换两行/列，一行/列所有元素乘k，将某一行/列的k倍加到另一行/列上**
- 所有矩阵，经过若干次行初等变换，都能化为行阶梯形、行标准形、标准形（不需要列初等变换）
- 行初等变换不会影响对应方程组的结果，列初等变换则会影响

矩阵的秩

矩阵的秩：非**0**子式的最大阶数, 也等于**行阶梯型的行数,列阶梯型的列数**, 记为$r(\mathbf{A})$

$r(\mathbf{A})=0\Leftrightarrow\mathbf{A}=\mathbf{O}$

若有矩阵$\mathbf{A}_{m\times p},\mathbf{B}_{p\times n}$：

①$r(\mathbf{AB})\le\min\{r(\mathbf{B}),r(\mathbf{A})\}\quad(\mathbf{A},\mathbf{B}$中至少一个为向量时, $r(\mathbf{AB})\le1)$

②$r(\mathbf{AB})\ge r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-p$

③若$\mathbf{AB}=\mathbf{O},r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le p$

若有可逆矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$：

①$r(\mathbf{A})=n$

②$r(\mathbf{AX})=r(\mathbf{XA})=r(\mathbf{X})$

$$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases}n & r(\mathbf{A})=n\\1 & r(\mathbf{A})=n-1\\0 & r(\mathbf{A})<n-1\end{cases}\quad(\mathbf{A}\text{不需要为可逆矩阵})$$

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$$

题型：矩阵的秩

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A},\mathbf{A}\text{为}n\text{阶方阵},\text{证明}:r(\mathbf{I}-\mathbf{A})+r(\mathbf{A})=n$$
$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\Rightarrow(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{A}=\mathbf{O}\Rightarrow r(\mathbf{O})\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{I}-\mathbf{A})-n\Rightarrow r(\mathbf{A})+r(\mathbf{I}-\mathbf{A})\leq n$$
$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{A}=\mathbf{O}\Rightarrow r(\mathbf{A})+r(\mathbf{I}-\mathbf{A})\leq n$$
$$\text{综上},r(\mathbf{A})+r(\mathbf{I}-\mathbf{A})=n$$

$$\text{证明}:r(\mathbf{A})=1\Leftrightarrow\exists\text{非零列向量}\mathbf{a},\mathbf{b},s.t.\,\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^T$$
$$\text{若}\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^T,\text{则}\mathbf{A}=[\mathbf{a}b_1,\mathbf{a}b_2,\cdots,\mathbf{a}b_n],\text{显然},\mathbf{A}\text{的列向量组的秩为}1\Rightarrow r(\mathbf{A})=1$$
$$\text{若}r(\mathbf{A})=1,\text{则}\mathbf{A}\text{的列向量组的秩为}1\quad\text{记}\mathbf{A}\text{的第}i\text{个列向量为}\mathbf{a}_i,\text{则}\forall\mathbf{a}_i,\exists k_i,s.t.\,\mathbf{a}_i=k\mathbf{a}_1$$
$$\text{令}\mathbf{b}=[k_1,k_2,\cdots,k_n],\text{则}\mathbf{A}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}^T,\mathbf{a}_1,\mathbf{b}\text{均为列向量}$$
$$\text{综上},r(\mathbf{A})=1\Leftrightarrow\exists\text{列向量}\mathbf{a},\mathbf{b},s.t.\,\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^T$$

$$r(\mathbf{A}_{3\times3})=2,r(\mathbf{AB})=1,\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3&a\\-1&-2&1\\2&6&-1\end{bmatrix},\text{求}a:$$
$$r(\mathbf{AB})\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-3\Rightarrow r(\mathbf{B})\leq 2$$
$$\text{易得}:B\text{的行阶梯形为}\begin{bmatrix}1&3&a\\0&1&a+1\\0&0&-2a-1\end{bmatrix}\Rightarrow -2a-1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

- 通常需要变形和夹逼定理
- 矩阵不完全未知时，利用行阶梯型

对称矩阵

$$\text{对称矩阵}:\mathbf{A}=\mathbf{A}^T\quad\text{反对称矩阵}:\mathbf{A}=-\mathbf{A}^T$$
$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

可逆矩阵

$$\text{可逆矩阵}:\text{若}\mathbf{AB}=\mathbf{I},\text{则}\mathbf{A},\mathbf{B}\text{互为可逆矩阵},\text{记为}\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$$
$$\text{对于方阵},\text{记}\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}(\text{注意是转置过的}),\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}\quad(\mathbf{A}\text{不必为可逆矩阵})$$
$$\text{方阵}\mathbf{A}\text{可逆}\Leftrightarrow|\mathbf{A}|\neq0$$
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\quad(\text{主对调,副变号,配系数})$$

$$\text{可逆矩阵}\mathbf{A}\text{满足}:$$
$$①\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$
$$②\text{求逆、转置、求伴随运算可交换}$$
$$③\text{若}\mathbf{B}\text{也可逆},(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$
$$④\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1},|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1},(\mathbf{A}^*)^*=|\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$$
$$(\mathbf{AB})^*=\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$$

$$\text{可逆矩阵必然可以表示成若干初等矩阵的积,可逆矩阵的标准形必然为单位矩阵}:$$
$$\mathbf{I}=\mathbf{PAQ}\Leftrightarrow\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1},\text{其中}\mathbf{P}\text{为若干行初等矩阵相乘},\mathbf{Q}\text{为若干列初等矩阵相乘}$$
$$\text{特别地},\mathbf{I}=\mathbf{PA}\text{时},\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P}=\mathbf{PI}.\text{即}[\mathbf{A}|\mathbf{I}]\xrightarrow{\text{行初等变换}}[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

题型：求逆矩阵

求$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$的可逆矩阵：

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1/2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{即}\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- 行数不超过3的可直接求
- 通常通过初等变换法求（**要么只使用行初等变换，要么只使用列初等变换**）
- **可逆上/下三角矩阵的逆矩阵必然仍为上/下三角矩阵**
- 要求对角矩阵的逆矩阵，将对角线上所有元素取倒数即可；**要求分块对角矩阵的逆矩阵，分别求对角线上每个分块的逆矩阵即可**

题型：矩阵运算

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\text{为列向量},(\mathbf{a},\mathbf{b})=3,\mathbf{ab}^T=\mathbf{A},\text{求}\mathbf{A}^n(\text{用}\mathbf{A}\text{和}n\text{表示})：$$
$$\mathbf{ab}^T=\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{A}^2=\mathbf{ab}^T\mathbf{ab}^T=\mathbf{a}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{b}^T=3\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{A}^n=3^{n-1}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\text{求}\mathbf{A}^{10}：$$
$$\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{I}\quad(\mathbf{A}\text{不可相似对角化}),\text{其中}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{A}^{10}=\sum_{i=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{i}\mathbf{B}^i$$
$$\text{易得}：n\geq 3\text{时},\mathbf{B}=\mathbf{O}\Rightarrow\mathbf{A}^{10}=\mathbf{I}+10\mathbf{B}+45\mathbf{B}^2$$

$$\text{记}\mathbf{A}_{n\times n}\text{的第}i\text{行对应的向量为}\mathbf{a}^i,|\mathbf{A}|=c,\text{求}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}^*(\mathbf{a}^i)^T：$$
$$\mathbf{A}^*(\mathbf{a}^i)^T=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\c\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}(\text{代数余子式的性质})\quad\text{故}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}^*(\mathbf{a}^i)^T=\begin{bmatrix}c\\\vdots\\c\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{bmatrix},\text{且}\mathbf{AX}+|\mathbf{A}|\mathbf{I}=\mathbf{A}^*+\mathbf{X},\text{求}\mathbf{X}：$$
$$\mathbf{AX}+|\mathbf{A}|\mathbf{I}=\mathbf{A}^*+\mathbf{X}\Rightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}^*-\mathbf{AA}^*=-(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{A}^*$$
$$\text{易得}：\mathbf{A}-\mathbf{I}\text{可逆}\Rightarrow\mathbf{X}=-\mathbf{A}^*\Rightarrow\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-2&-1&-4\\-2&-1&2\\4&-1&4\end{bmatrix}$$

- 求矩阵的幂的方法：
  - **秩为1的矩阵必然可表示为两个向量的积，进而简化幂运算**
  - **递推法/数学归纳法**
  - **相似对角化（未必能相似对角化）**
  - **转化为二项式展开**

线性空间

线性表示

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\ldots+k_n\mathbf{a}_n,\text{则称}\mathbf{b}\text{可以由}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\ldots\}\text{线性表示}$$
$$\text{可表示为}:\mathbf{b}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\cdots\mathbf{a}_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\mathbf{Ak}$$
$$\text{若}\mathbf{b}_i=\mathbf{A}\mathbf{k}_i(1\le i\le n),\text{则}\left[\mathbf{b}_1\quad\mathbf{b}_2\quad\cdots\mathbf{b}_n\right]=\mathbf{A}\left[\mathbf{k}_1\quad\mathbf{k}_2\quad\cdots\mathbf{k}_n\right]$$

- **用一系列向量表示矩阵时，可以将每个向量视为矩阵的一个分块，进行分块矩阵乘法**

线性无关

有一组向量$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}$,若**存在**一组不全为0的系数$k_1,k_2,\ldots k_m$,使$\sum_{i=1}^{m}k_i\mathbf{a}_i=0$,则称$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}$线性相关

线性无关 $\Leftrightarrow$ 一组中**任意**一个向量不能表示成其他向量的线性组合

一组中的部分向量线性相关 $\Rightarrow$ 线性相关　线性无关 $\Rightarrow$ 一组中的任意一部分向量线性无关

$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}\}$线性相关且$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}$线性无关 $\Rightarrow$ $\mathbf{b}$可以由$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}$**唯一**线性表示

向量组

若向量组T_1中的任意一个向量可以由向量组T_2线性表示,则称T_1可以由T_2**线性表示**;若T_1,T_2可相互线性表示,称T_1,T_2**等价**

T_1可由T_2线性表示,且T_1的元素多于T_2 $\Rightarrow$ T_1线性相关　T_1可由T_2线性表示,且T_1线性无关 $\Rightarrow$ T_1元素不多于T_2

$A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\},B=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$,则$A$与$B$等价 $\Leftrightarrow$ A与B可相互线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(B)=r(A\cup B)$

若S为T的一部分(或全部),S线性无关,且T可由S线性表示,则S是T的**极大线性无关组**(S不一定唯一,但S的元素个数一定唯一)

向量组的秩:极大线性无关组的元素个数;等价向量组的秩相等

任意$n+1$个n维向量一定线性相关

矩阵和向量组的关联(以下结论中,将行列互换依然成立,但习惯上将矩阵视为列向量组):

①矩阵的行初等变换不影响列向量组的线性相关性

②若矩阵$\mathbf{A}$的列向量组线性相关,则存在列向量$\mathbf{X}$,使$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$

③**矩阵的秩=列向量组的秩=行向量组的秩**

④$r(\mathbf{A}_{m\times n})=n\Leftrightarrow$ **$\mathbf{A}$的列向量组线性无关**

⑤$\mathbf{A}$的行列向量组均线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$是非奇异矩阵 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$是可逆矩阵

- 若两个向量组等价，其线性相关性不一定一致（因为可能有多余的向量）；若两向量组构成的矩阵等价，其线性相关性一致

题型：向量组

有线性无关向量组$A:\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_n\}$, 有向量组$B:\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots\mathbf{b}_n\}$, 其中$\mathbf{b}_i=\begin{cases}\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1} & i<n\\ \mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1 & i=n\end{cases}$

讨论A与B的线性相关性：

由题意得：$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2\cdots\mathbf{a}_n]\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n]$　第二个矩阵为$n\times n$矩阵, 将其记为$\mathbf{C}$

易得：$|\mathbf{C}|=1+(-1)^{1+n}=\begin{cases}2 & n\text{为奇数}\\0 & n\text{为偶数}\end{cases}\Rightarrow r(\mathbf{C})\begin{cases}=n & n\text{为奇数}\\<n & n\text{为偶数}\end{cases}$

$\mathbf{A}$线性无关 $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$可逆 $\Rightarrow r(\mathbf{C})=r(\mathbf{AC})=r(\mathbf{B})$

故n为奇数时, B线性无关; n为偶数时, B线性相关

$\mathbf{AB}$的列向量构成的向量组线性相关, 证明：$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量构成的向量组中至少一个线性相关

$\mathbf{AB}$线性相关 $\Rightarrow r(\mathbf{AB})<n$

假设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均线性无关, 则$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=n\Rightarrow\mathbf{A}$可逆 $\Rightarrow r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})=n$, 与之前推导的结论矛盾,

故$\mathbf{A},\mathbf{B}$均线性无关是假命题, 即$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$至少一个线性相关

$\mathbf{A}$为n阶矩阵, $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$为$n$维列向量, $\mathbf{a}_1\neq\mathbf{0},\mathbf{Aa}_1=\mathbf{a}_1,\mathbf{Aa}_2=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{Aa}_3=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, 证明：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关

$\mathbf{Aa}_1=\mathbf{a}_1,\mathbf{Aa}_2=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{Aa}_3=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\Rightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{a}_1=0,(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_1,(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2$

设$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+k_3\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$①, 两边左乘$\mathbf{A}-\mathbf{I}$得：$k_2\mathbf{a}_1+k_3\mathbf{a}_2=0$②

两边左乘$\mathbf{A}-\mathbf{I}$得：$k_3\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$, 又因为$\mathbf{a}_1\neq0$, 故$k_3=0$③

③依次代回②, ①, 得：$k_2=k_1=0$, 故$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关

$\mathbf{a}_1=(1,1,2,2),\mathbf{a}_2=(0,2,1,5),\mathbf{a}_3=(2,0,3,-1),\mathbf{a}_4=(1,3,3,7)$, 求它们的一个极大线性无关组：

设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1^T,\mathbf{a}_2^T,\mathbf{a}_3^T,\mathbf{a}_4^T]$, $\mathbf{A}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$ 显然, $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$是一个极大线性无关组(观察新矩阵的新列向量)

- 充分利用矩阵和向量组的关系（**列向量=基向量组×系数列向量，矩阵（视为列向量组）=基向量组×系数组**），线性相关性和矩阵的秩关系密切
- 无法利用矩阵的秩证明时，再通过线性相(无)关定义证明

线性空间

线性空间为满足以下条件的空间V：

①$\forall \mathbf{a} \in V, k \cdot \mathbf{a} \in V$

②$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$

其中$k \in F$(F即数域, 可以是实数域R或复数域C)

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$可以为实数,向量,含未知数的多项式

$\cdot$和$+$是满足以下条件的运算：

①$+$满足交换律, 结合律

②$\exists \mathbf{o} \in \mathbf{V}$, 使$\forall \mathbf{a}$, 有$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$, 这个唯一的$\mathbf{o}$称为零元

③$\forall \mathbf{a}, \exists \mathbf{b}$, 使$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{o}$, 此时$\mathbf{b}$记为$-\mathbf{a}$, 称为$\mathbf{a}$的负元

④$\cdot$满足分配律, 交换律, 结合律

⑤$\exists \mathbf{i} \in V$, 使$\forall \mathbf{a}$, 有$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}=\mathbf{a}$, 这个唯一的$\mathbf{i}$称为单位元

有变量x, 系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$：

记$P(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, 即$P(x)$表示任意多项式, 所有多项式线性空间

记$P_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_i x^i (a_n \neq 0)$, 即$P_n(x)$表示$\mathbf{n}$次多项式, 所有$n$次多项式构成线性空间

有线性空间V, W, 若V满足：

①$\forall \mathbf{a} \in W, \mathbf{a} \in V$ (包含关系)

②$\exists \mathbf{o} \in V$, 使$\forall a \in W$, 有$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$ (必须包含零元)

则称W为V的子空间, 记为$W \subseteq V$

若W为V的子空间：

①$\dim W \leq \dim V$, W的基一定是V的某组基的一部分

②必然$\exists X \subseteq V$, 使$W \oplus X$存在

有线性空间W_1, W_2, 则W_1+W_2为线性空间, $W_1+W_2=\{\xi \mid \xi=\xi_1+\xi_2, \xi_1 \in W_1, \xi_2 \in W_2\}$

维数定理：$\dim(W_1 \cap W_2)+\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$ (例：W_1, W_2为相交平面)

若$\forall \xi \in W_1+W_2, \xi=\xi_1+\xi_2$中的$\xi_1$和$\xi_2$唯一, 则把$W_1+W_2$记为$W_1 \oplus W_2$, 称为$W_1$和$W_2$的直和

$W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2=\{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)$

- **线性空间中的多项式、实数等元素也可以视为向量；线性空间也称为向量空间**
- **n维线性空间中的向量不一定是n维的（本质上是因为$+$, $\cdot$运算的定义不确定）**
- **典型n维线性空间就是包含所有n维向量的空间,其$+$为向量加法,其$\cdot$为向量数乘(如无特殊说明,以下线性空间指典型线性空间)**

题型：线性空间

$$W_1=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, W_2=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}, \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

求$W_1+W_2, W_1 \cap W_2$的维数和基：

$W_1+W_2=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, 易得：向量组$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$的秩为3

$\Rightarrow \dim(W_1+W_2), W_1+W_2=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

易得：$\dim W_1=\dim W_2=2$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2)=\dim W_1+\dim W_1-\dim(W_1+W_2)=1$

线性空间的基

若线性空间V中的一个**线性无关**向量组$T=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n\}$满足，$V$中的任意向量都可以由$T$线性表示，则$T$为$V$的**基**，
记作$V=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n\}$
线性空间维数就是基向量组的元素个数，记为$\dim V$；特别地，$\dim V=0\Leftrightarrow V=\{\mathbf{0}\}$
n维线性空间记为V^n，V^n中任意n个线性无关向量构成的向量组是V的一组基

T为V^n到V^m的线性变换，V^n有，其构成的矩阵分别记为$\mathbf{A},\mathbf{B}$，

线性变换

有线性空间V^n,V^m，若变换T满足，$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in V^n,T(\mathbf{a}),T(\mathbf{b})\in V^m$：
①$T(\mathbf{a}+\mathbf{b})=T(\mathbf{a})+T(\mathbf{b})$
②$T(k\cdot\mathbf{a})=k\cdot T(\mathbf{a}),k\in R$
其中$\cdot$和$+$为V^n和V^m中共同定义的运算
则称T为V^n到V^m的**线性变换**，称$\mathbf{a},\mathbf{b}$为**原像**，称$T(\mathbf{a}),T(\mathbf{b})$为**像**
记$N(T)=\{\mathbf{a}|\mathbf{a}\in V^n,T(\mathbf{a})=\mathbf{0}\}$，称为$T$的**核**或**零空间**，其维数称为$T$的**零度**，记为$\mathrm{null}\ T$；特别地，$\mathrm{null}\ T=0\Leftrightarrow N(T)=\{\mathbf{0}\}$
记$R(T)=\{\mathbf{b}|\mathbf{b}\in V^m,\mathbf{b}=T(\mathbf{a}),\mathbf{a}\in V^n\}$，称为$T$的**值空间**，其维数称为$T$的**秩**，记为$\mathrm{rank}\ T$
T具有以下性质：
①$N(T)\subseteq V^n,\mathrm{null}\ T\le n$
②$R(T)\subseteq V^m,\mathrm{rank}\ T\le m$
③$\mathrm{null}\ T+\mathrm{rank}\ T=n$

T可以用矩阵$\mathbf{P}_{m\times n}$表示，即$T(\mathbf{a})=\mathbf{Pa}$
线性变换可逆$\Leftrightarrow$线性变换是非退化的$\Leftrightarrow\mathbf{P}$是可逆矩阵
线性变换正交$\Leftrightarrow\mathbf{P}$是正交矩阵$\Leftrightarrow\mathrm{null}\ T=0$

若V^n的一组基$A=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n\}$，$V^m$的一组基$B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots\mathbf{b}_m\}$，二者构成的矩阵分别记为$\mathbf{A},\mathbf{B}$：
取A中任意一个向量$\mathbf{a}$为原像，则其像可以由B线性表示，即$\mathbf{Pa}_i=\mathbf{Bk}_i$
$\Rightarrow\mathbf{PA}=\mathbf{BK}$，也可记为$T(\mathbf{A})=\mathbf{BK}$，此时称$\mathbf{K}$为$T$在**基偶**$\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$下的矩阵

若T是V(到自身)的线性变换：
$\mathbf{PA}=\mathbf{AK}$，也可记为$T(\mathbf{A})=\mathbf{AK}$，此时称$\mathbf{K}$为$T$在基$\mathbf{A}$下的矩阵
若$W\subseteq V$，且$\forall\mathbf{a}\in W$，有$T(\mathbf{a})\in W$，称W是T的**不变子空间**；$N(T)$和$R(T)$必然是T的不变子空间
不变子空间的**和**和**交**依然是不变子空间

- **线性空间到另一个线性空间的线性变换总是可以用向量与矩阵的乘法表示**（本质上是矩阵乘法的分配律）
- **线性变换后，空间维数只可能不变或缩小，而不可能增大；维数缩小意味着变换必然是不可逆的**
- 线性变换与线性表示形式相同，但含义不同。前者是**变换矩阵×变换前向量=变换后向量**，后者是**向量=基向量矩阵×系数向量**

题型：线性变换

求$P_n(t)$的线性变换$D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$在基$B=\{1,t,\ldots,t^n\}$下的矩阵：
由题意得：B可以用$n+1$阶单位矩阵$\mathbf{I}$表示
假设D可以用矩阵$\mathbf{P}$表示，则$\mathbf{PI}=\mathbf{IK}\Rightarrow\mathbf{K}=\mathbf{P}$
$D1=0,Dt=1,\cdots,Dt^n=nt^{n-1}$

$$\Rightarrow\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\quad(\text{每个列向量为系数列向量})$$

基变换

向量空间V^n有两组基$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_n\},\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots\mathbf{b}_n\}$, 其构成的矩阵分别记为$\mathbf{A},\mathbf{B}$,
若$\exists\mathbf{C}$, 使$\mathbf{AC}=\mathbf{B}$, 则称$\mathbf{C}$是A到B的**过渡矩阵(基变换矩阵)**
$\mathbf{C}$具有以下性质：
①$\mathbf{C}$必然为$n\times n$矩阵
②$\mathbf{C}$必然是可逆矩阵, $\mathbf{C}^{-1}$是B到A的过渡矩阵
③$\mathbf{C}$的每个列向量依次是$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots$用$A$表示的坐标
④若V^n中某向量以A,B为基的坐标分别为$\mathbf{X},\mathbf{Y}$, 则$\mathbf{X}=\mathbf{CY},\mathbf{Y}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}$

- 基变换是线性变换的特例（属于可逆线性变换）
- **C是A→B的过渡矩阵：AC=B，X=CY**

欧式空间

$$\text{内积：}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\Sigma a_ib_i$$
$$\text{投影：}\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{b}|}\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\quad\text{若}\mathbf{b}\text{为单位向量, 则}\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{b}$$
$$\text{长度：}|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$$
$$\text{夹角：}\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$
$$\text{Cauchy}-\text{Schwarz不等式：}(\mathbf{a},\mathbf{b})^2\le(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b})\Rightarrow(\Sigma a_ib_i)^2\le(\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$$

- 在向量空间的基础上，定义内积等概念，即得到欧氏空间

正交向量

正交：若$(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$, 则称$\mathbf{a},\mathbf{b}$正交
若向量组$A:\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_n\}$中的元素两两正交, 则称$A$为**正交向量组**; 若还满足, A中向量长度均为1, 则称A为**标准正交向量组**

$$A\text{为标准正交向量组}\Leftrightarrow(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$$

正交向量组必然为线性无关向量组

若向量空间的基为标准正交向量组, 则称其为**标准正交基**
若有标准正交基$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots\mathbf{e}_n)$和向量$\mathbf{b}$, 设$\mathbf{b}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\dots+x_n\mathbf{e}_n$, 则$x_1=(\mathbf{b},\mathbf{e}_1)$**(标准正交基下可以直接用内积算坐标)**

Schmidt正交化方法：已知线性无关向量组$A:\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_n\}$, 求向量组$B$, 使$B$为正交向量组, 且可以由$A$线性表示：

$$\text{设}B:\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots\mathbf{b}_n\},\text{则}\mathbf{b}_k=\begin{cases}\mathbf{a}_k & k=1\\ \mathbf{a}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{a}_i\bullet\mathbf{e}_i & k>1\end{cases}\quad\text{其中}\mathbf{e}_i=\frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|}$$

注意：计算过程中, 对于尚未使用的$\mathbf{a}_i$, 其顺序可任意交换, 但要注意保持对应关系

题型：向量空间

$A=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\},B=\{2\mathbf{a}_1+2c\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1+(c+1)\mathbf{a}_3\}$. $\exists$非零向量$\mathbf{X}$, $s.t.$ $\mathbf{X}$在两组基A,B下的坐标相同, 求c：

$$\text{易得：}A\text{到}B\text{的过渡矩阵}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\2c&0&c+1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{CX}=\mathbf{X}\text{有非零解}\Rightarrow(\mathbf{C}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}\text{有非零解}$$
$$\Rightarrow r(\mathbf{C})<3\Rightarrow c=0$$

线性方程组

概念

线性方程组可表示为：$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}\quad \mathbf{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$

齐次线性方程组：$\mathbf{b}=\mathbf{0}$的方程组

$\mathbf{A}$：系数(矩阵)　$\mathbf{X}$：解(列矩阵)　$\mathbf{b}$：常数项(列矩阵)　m：方程个数　n：未知数个数

增广矩阵：$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]_{m\times(n+1)}$; 增广矩阵经若干**行初等变换**后, 对应线性方程组的解不变

线性方程组解的结构

通解：能够表示线性方程组所有可能解的**表达式**

特解：能够作为线性方程组的解的一个特定向量

解空间：所有解构成的集合; $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的解空间记为$N(\mathbf{A})$; **线性齐次方程的解空间必然是向量空间,非齐次方程则必然不是**

基础解系：解空间的一个极大无关向量组

解基：基础解系中的一个向量

$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$有解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=r(\mathbf{A})\Leftrightarrow \mathbf{b}$可以由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示($\mathbf{0}$可以由任何向量组线性表示)

$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$有唯一解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=r(\mathbf{A})=n(\mathbf{A}$**的列数**$)\Leftrightarrow \mathbf{A}$的列向量组线性无关且$\mathbf{b}$可以由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示

矩阵 $\times$ 矩阵 $=$ 矩阵　**可视为若干个线性方程组**：

$\mathbf{AP}=\mathbf{S},\mathbf{s}_i=\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{p}_i$是$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的特解

$\mathbf{s}_i$：$\mathbf{S}$的第i列的向量　$\mathbf{p}_i$：$\mathbf{P}$的第i列的向量

对于$m\times n$矩阵$\mathbf{A}$：

$r(\mathbf{A})\le r(\mathbf{A}|\mathbf{b})\le \min\{m,n+1\}$

$r(\mathbf{A})=m\Rightarrow m\ge r(\mathbf{A}|\mathbf{b})\ge r(\mathbf{A})\Rightarrow r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=m=r(\mathbf{A})\Rightarrow \mathbf{AX}=0$有解

齐次线性方程组

对于齐次线性方程组$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}=\mathbf{0}$：

①$\mathbf{AX}=\mathbf{0},\mathbf{AY}=\mathbf{0}\Rightarrow \mathbf{A}(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})=0$

②通解总是可以表示成$\mathbf{X}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\ldots+k_r\mathbf{a}_p$, 其中$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_p\}$即基础解系, p(自由变量个数$)=n($列数$)-r(\mathbf{A})$

③若$r(\mathbf{A})=n$, **有唯一解**$\mathbf{X}=0$; 若$r(\mathbf{A})<n$, **有无数解**; 若$r(\mathbf{A})>n$, 无解

非齐次线性方程组

对于非齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{b}\quad(\mathbf{b}\neq\mathbf{0})$：

①$\mathbf{AX}=\mathbf{b},\mathbf{AY}=\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{A}(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})=(a+b)\mathbf{b}$

②通解总是可以表示成$\mathbf{X}=\mathbf{X}_c+\mathbf{X}^*$, 其中$\mathbf{X}_c$为对应齐次方程组的通解, $\mathbf{X}^*$为任何一个特解

③若$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$有无数解, $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$无解或有无数解; 若$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$有唯一解, $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$无解或有唯一解

④行标准形中, 含有系数全0、常数非0的行时, 方程组无解

⑤要确定是否有唯一解, 参见行列式

$r(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}=\mathbf{0}$**解的数量**	**自由变量数**	$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}=\mathbf{b}$**解的数量**
n	1	0	1$[r(\mathbf{A}|b)=n]$或0$[r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=n+1]$
=n=m	1	0	1[必定有$r(\mathbf{A}|b)=n$]
<n	∞	$n-r(\mathbf{A})$	$\infty[r(\mathbf{A}|b)=r(\mathbf{A})]$或0$[r(\mathbf{A}|\mathbf{b})>r(\mathbf{A})]$
≤m<n	∞	$n-r(\mathbf{A})$	∞[必定有$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=m<n$]

解基数=自由变量数≠线性无关解向量个数（特解不是解基，却是线性无关解向量，故非齐次比齐次方程的线性无关解向量多一个）

题型：线性方程组解的结构

$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3\quad\mathbf{a}_4],\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的通解为$\mathbf{X}=k[0\quad -1\quad 3\quad 0]^T$, 证明：$\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{0}$的一个基础解系为$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4\}$

$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的通解有一个自由变量$\Rightarrow r(\mathbf{A})=3\Rightarrow r(\mathbf{A}^*)=1\Rightarrow\mathbf{A}^*$的通解有三个自由变量

$r(\mathbf{A})=3\Rightarrow|\mathbf{A}|=0\Rightarrow\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{O}\Rightarrow\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$均为$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{0}$的解

$\mathbf{A}[0\quad -1\quad 3\quad 0]^T=\mathbf{0}\Rightarrow -\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3=0$, 又因为$r(\mathbf{A})=3$, 故$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4\}$线性无关

综上, $\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{0}$的一个基础解系为$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4\}$

$r(\mathbf{CA}+\mathbf{DB})=n,\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s\}$和$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_r\}$分别是$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$和$\mathbf{BX}=\mathbf{0}$的基础解系, 证明：$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_r\}$线性无关

$r(\mathbf{CA}+\mathbf{DB})=n\Rightarrow|\mathbf{CA}+\mathbf{DB}|\neq 0\Rightarrow|\mathbf{C}\quad\mathbf{D}|\begin{vmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow r(\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{bmatrix})=n$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{0}$只有0解$\Rightarrow\mathbf{AX}=\mathbf{0}$和$\mathbf{BX}=\mathbf{0}$没有公共非0解$\Rightarrow\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_r\}$线性无关　（重要推论）

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1+b & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2+b & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3+b\end{bmatrix}$, 讨论$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$基础解系的维数：

$|\mathbf{A}|=(b+\Sigma a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3\\ 1 & a_2+b & a_3\\ 1 & a_2 & a_3+b\end{vmatrix}=(b+\Sigma a_i)b^2$

①$b\neq 0$且$b+\Sigma a_i\neq 0$时, 仅有0解

②$b=0$时, 若a_1,a_2,a_3不全为0, 基础解系为2维; 若a_1,a_2,a_3全为0, 基础解系为3维

- 充分利用矩阵和向量组的关系（**可以线性表示，即等价于线性方程组有解**），线性相关性和矩阵的秩关系密切

题型：解线性方程组

Gauss消元法：

1.将增广矩阵($\mathbf{b}=\mathbf{0}$则不需要增广)化简，比行标准形更简，每行第一个非$\mathbf{0}$元素为$\mathbf{1}$，且同一列内其他元素必须为$\mathbf{0}$

2.确定解基数量，将相应数量的变量视作自由变量

3.写出$[x_1, x_2, x_3, \ldots]^T = ?$

解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$：

增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_4=2 \\ x_5=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} (k_1\text{即}x_2, k_2\text{即}x_3)$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}, r(\mathbf{A})=2$，求$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的通解：

易得：$t=1$　代入后解得：$\mathbf{X} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

注：本题中t不确定，$\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$中，任何两个都可能线性无关，那么各种假设都可以尝试，如果假设能成立，最终得到的解都相同

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{I}$为三阶单位矩阵，求满足$\mathbf{AB}=\mathbf{E}$的所有矩阵$\mathbf{B}$：

$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$　(求三个方程组的通解，并将其合并为一个矩阵)

- 方程组较简单时，可尝试不借助矩阵消元
- 两个一般矩阵的积，可以视为多组线性方程组（一并进行行初等变换更快）

特征值及相似矩阵

特征值

若$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}=\lambda\mathbf{X}(\mathbf{X}\neq\mathbf{0})$, 则称$\lambda$是$\mathbf{A}$的**特征值**, $\mathbf{X}$是$\mathbf{A}$对于λ的**特征向量**

n阶矩阵总是有n个特征值(k重特征值记为k个), 每个特征值对应无数个特征向量(0也可能是特征值)

方阵的迹：$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$(主对角线元素和) $\quad\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

$\mathbf{A}$不可逆 $\Leftrightarrow|\mathbf{A}|=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{A}$有特征值0

$\mathbf{A}_{n\times n}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$(可能含重根/复数)满足：

①$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\mathbf{A}|\quad\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0\Leftrightarrow\mathbf{A}$可逆

②$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$

如果方阵每行元素的和都等于t, 那么t是该方阵的一个特征值, 对应的特征向量为$k[1,1,1,\ldots,1]^T$

$\mathbf{A}$有特征值$\lambda\Rightarrow P(\mathbf{A})$有特征值$P(\lambda)$ $\quad$(以$\mathbf{A}$为自变量的多项式函数, 常数项为$k\mathbf{I}$)

$\mathbf{A}$有特征值λ, $\mathbf{A}$可逆 $\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}$有特征值$\dfrac{1}{\lambda}$且$\mathbf{A}^*$有特征值$\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$

上述变形均不改变特征向量

$\mathbf{A}$有特征值$\lambda\Rightarrow\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$有特征值$\lambda$, $\mathbf{A}^T$有特征值λ

上述变形改变特征向量(见相似矩阵), $\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^T$的来自不同特征值的特征向量正交

特征多项式

$\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{X}\Rightarrow(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{0}$, 故$\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{X}$有非0解 $\Leftrightarrow|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$

记$f(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, $f(\lambda)=0$的所有解即为特征值(在复数域内必然有**n**个根，可能有重根)

$f(\lambda)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n$, 其中$b_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A}),b_n=(-1)^n|\mathbf{A}|$(其他项过于复杂)

$f(\lambda)$称为$\mathbf{A}$的**特征多项式**, 也记为$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$

Sylverster定理：有矩阵$\mathbf{A}_{m\times n},\mathbf{B}_{n\times m}(m\geq n)$, 则$f_{AB}(\lambda)=\lambda^{m-n}f_{BA}(\lambda)$

有方阵$\mathbf{A}$和多项式函数$P(\lambda)$：

若$P(\mathbf{A})=0$(把多项式中的λ替换为$\mathbf{A}$, 常数项c替换为$c\mathbf{I}$), 称$P(\lambda)$是$\mathbf{A}$的**零化多项式**

$f(\lambda)$必然是$\mathbf{A}$的零化多项式

$\mathbf{A}$的零化多项式中次数最低且最高项系数为1的称为$\mathbf{A}$的最小多项式, 记为$m(\lambda)$

$m(\lambda)$必然存在且唯一, 且其他所有零化多项式必然包含$m(\lambda)$这个因子(零化多项式与任意多项式的乘积显然仍是零化多项式)

题型：特征多项式

求$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{bmatrix}$的最小多项式：

易得：$f(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$

依次验证：$\mathbf{A}-3\mathbf{I}\neq\mathbf{O},\mathbf{A}-2\mathbf{I}\neq\mathbf{O},(\mathbf{A}-3\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\neq\mathbf{O},(\mathbf{A}-3\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2=\mathbf{O}$

故$\mathbf{A}$的最小多项式为$(\lambda-3)(\lambda-2)^2$

特征向量的结构

若n阶方阵$\mathbf{A}$有特征值λ_0, 则λ_0对应的所有特征向量, 加上$\mathbf{0}$构成V^n的子空间, 称为A关于λ_0的**特征子空间**, 记为V_{λ_0}

$\mathbf{A}_{n\times n}$的特征向量满足(不考虑复数特征值)：
①对于某个k_i重特征值λ_i, $\dim V_{\lambda_i} = n - r(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) \leq k_i$
②任意两个**同特征值**的特征向量的**非零**线性组合依然是特征向量
③在每个特征值对应的特征向量中分别取出一个线性无关向量组, 它们合并成的向量组依然线性无关
④若$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$有非$\mathbf{0}$解, 那么$\mathbf{A}$有特征值0, 且基础解系的维数即为特征值0的重数
④若$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$为$\mathbf{A}$的**来自不同特征值**的特征向量, 那么$k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2 (k_1, k_2 \neq 0)$必然不是$\mathbf{A}$的特征向量

题型：求特征值和特征向量

1.求$f(\lambda)$, 解$f(\lambda) = 0$, 得到特征值
2.将每个解依次代回$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$, 解线性方程组得到特征向量(注意排除$\mathbf{0}$)

求$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量：
$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda+2)^2(\lambda-4) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_4 = 4$
$\lambda = -2$时, $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$的解为：$\mathbf{X} = k_1[1,1,0]^T + k_2[-1,0,1]^T$
$\lambda = 4$时, $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$的解为：$\mathbf{X} = k_3[1,1,2]^T$
综上, $\mathbf{A}$的所有特征向量表示为$k_1[1,1,0]^T + k_2[-1,0,1]^T + k_3[1,1,2]^T$

$\mathbf{A}$为三阶矩阵, 特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 对应的线性无关特征向量为$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, $\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_3]$, 求$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{P}$：
$|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2 \Rightarrow \mathbf{A}$可逆 $\Rightarrow \mathbf{A}^*$有特征值$2, 2, 1$　记$\mathbf{Q} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$, 则$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$
设$\mathbf{P} = \mathbf{QK}$, 则$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　故原式 $= (\mathbf{QK})^{-1}\mathbf{A}^*(\mathbf{QK}) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{QK} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$均为三阶矩阵, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$, $r(\mathbf{B}) = 3$, $\mathbf{AB} = [\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1]$, 求$\mathbf{A}$的特征向量：
易得：$\mathbf{AB} = \mathbf{BC}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(构造$\mathbf{AP} = \mathbf{PT}$) $\Rightarrow \mathbf{A}$与$\mathbf{C}$相似
易得：$\mathbf{C}$的特征向量为$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}$的特征向量为$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2$　$(\mathbf{X} \to \mathbf{BX})$

- 对于未知矩阵，使用特征值的定义和性质求特征值

题型：特征值的性质

3阶矩阵$\mathbf{A}$有特征值$-1,2,3$,求$|\mathbf{A}+2\mathbf{A}^*|$：

易得：$2\mathbf{A}^*$有特征值$12,-6,-4 \Rightarrow |\mathbf{A}+2\mathbf{A}^*| = (-1+12)\times(2-6)\times(3-4) = 44$

$\mathbf{A}$为二阶矩阵,$|\mathbf{I}+\mathbf{A}|=0$,且$\mathbf{A}$每行元素的和为4,求$|2\mathbf{I}+\mathbf{A}^2|$：

$|\mathbf{I}+\mathbf{A}|=0 \Rightarrow |-\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0 \Rightarrow \mathbf{A}$有特征值$-1$

$\mathbf{A}$每行元素之和为$4 \Rightarrow \mathbf{A}$有特征值4

$\mathbf{A}$为二阶矩阵$\Rightarrow \mathbf{A}$有两个特征值$\Rightarrow \mathbf{A}$有-1和4两个单重特征值

$\Rightarrow 2\mathbf{I}+\mathbf{A}^2$有3和18两个单重特征值$\Rightarrow |2\mathbf{I}+\mathbf{A}^2| = 54$

$\mathbf{a},\mathbf{b}$为四维非$\mathbf{0}$列向量,且$\mathbf{a}\perp\mathbf{b},\mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{b}^T$,求$\mathbf{A}$的线性无关特征向量的个数：

易得：$r(\mathbf{A})=1,\mathbf{A}^2=\mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{a})\mathbf{b}^T=\mathbf{O}$

设$\mathbf{A}\mathbf{X}=\lambda\mathbf{X}$,则$\mathbf{A}^2\mathbf{X}=\lambda\mathbf{A}\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{O}=\lambda^2\mathbf{X} \Rightarrow \lambda=0$

$\Rightarrow \mathbf{A}$有唯一特征值0,对应线性无关特征向量个数$r=n-r(0\mathbf{I}-\mathbf{A})=4-r(\mathbf{A})=3$

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是三维线性无关列向量,$\mathbf{A}\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{A}\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{A}\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1$,求$|\mathbf{A}|$：

记$\mathbf{P}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$,则$\mathbf{A}\mathbf{P}=[\mathbf{A}\mathbf{a}_1,\mathbf{A}\mathbf{a}_2,\mathbf{A}\mathbf{a}_3]=[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1]=\mathbf{P}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&-2&a-3\\0&0&1\end{bmatrix}$,有三个线性无关的特征向量,求$a$：

易得：$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

则$\lambda=1$对应2个线性无关特征向量$\Rightarrow r(\mathbf{I}-\mathbf{A})=1 \Rightarrow a=4$

相似矩阵

有方阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$,若$\exists\mathbf{P},s.t.\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$,则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似　$(\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{B})$

若$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$相似,有：

①$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B}),|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|,\mathrm{t}r(\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{B})$

②$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的特征值、特征向量结构完全相同,$\mathbf{A}$的每个特征向量$\mathbf{a}$对应$\mathbf{B}$的一个特征向量$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{a}$

③如果$\mathbf{A}$能相似对角化,则$\mathbf{B}$也能相似对角化,且相似于同一个对角矩阵

④$\mathbf{A}^T\sim\mathbf{B}^T$

⑤$\mathbf{A}\sim\mathbf{B},\mathbf{A}^*\sim\mathbf{B}^*,\mathbf{A}^{-1}\sim\mathbf{B}^{-1},P(\mathbf{A})\sim P(\mathbf{B})$　(多项式函数)

注：⑤内部的多种矩阵线性组合后依然相似,但⑤与④线性组合后未必相似

相似对角化

若$\exists\mathbf{P}, s.t.\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{D}, \mathbf{D}$为对角矩阵, 则称$\mathbf{A}$**可相似对角化**

$\mathbf{A}_{n\times n}$的每个k重特征值均对应k个不同的**线性无关**特征向量 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$有n个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$可相似对角化

设$\mathbf{A}_{n\times n}$有m个特征值, λ_i为k_i重特征值, 则$r(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})\equiv n-k_i \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m}[n-r(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})]=n \Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$可相似对角化

(若$\mathbf{A}_{n\times n}$有n个不同的特征值, 则必然满足上述条件)

$\mathbf{A}$可相似对角化 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$的最小多项式没有重根

若$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{D}$：

①$\mathbf{P}$的每个列向量均为$\mathbf{A}$的一个特征向量, $\mathbf{D}$对角线上的元素均为$\mathbf{A}$的特征值(k重根出现k次), 与$\mathbf{P}$的列向量按位置一一对应

②$\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}\Rightarrow\mathbf{A}^n=\mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$

③$r(\mathbf{A})=$ 非0特征值的数量(多重根记多次)

④$\mathbf{P}$的任意列向量乘以非0常数(还是特征向量), 等式依然成立($\mathbf{D}$中元素不变)

若V的变换T可用$\mathbf{A}$表示, 则$\mathbf{A}$可相似对角化 $\Leftrightarrow$ T可相似对角化 $\Leftrightarrow$ $\exists V$的基$\mathbf{P}$, 使T在$\mathbf{P}$下的矩阵是对角矩阵(即$\mathbf{AP}=\mathbf{PD}$)

- **要相似对角化，求特征值和特征向量即可**
- **对角矩阵的对角线上可能有0元素**

正交矩阵

正交矩阵：行向量组和列向量组均为**正交向量组**的矩阵

$\mathbf{A}$为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{AA}^T=\mathbf{I}\Leftrightarrow\mathbf{A}^T$为正交矩阵

正交矩阵$\mathbf{A}$满足：

①$\mathbf{A}$可逆, $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$

②若$\mathbf{B}$也为正交矩阵 $\Rightarrow$ $\mathbf{AB}$为正交矩阵

③$|\mathbf{A}|=\pm1, \mathbf{A}$的**实特征值**的取值范围为$\{-1,1\}$

正交相似

若$\exists\mathbf{C}, s.t.\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}=\mathbf{D}, \mathbf{D}$为对角矩阵, $\mathbf{C}$为正交矩阵, 则称$\mathbf{A}$**正交相似于**$\mathbf{D}$

$\mathbf{A}$为**实对称矩阵** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$正交相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$有$\mathbf{n}$个**正交的特征向量**

若$\mathbf{A}$为实对称矩阵：

①$\mathbf{A}^*, \mathbf{A}^{-1}$为实对称矩阵

②$\mathbf{A}$的特征值均为实数

题型：相似矩阵

n阶方阵$\mathbf{A}$满足：$(\mathbf{A}-k_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-k_2\mathbf{I})=\mathbf{O},k_1\neq k_2$,证明：$\mathbf{A}$可以相似对角化

由题意得：$r(\mathbf{A}-k_1\mathbf{I})+r(\mathbf{A}-k_2\mathbf{I})=n,|\mathbf{A}-k_1\mathbf{I}||\mathbf{A}-k_2\mathbf{I}|=0\Rightarrow\mathbf{A}$的至少一个特征值为$k_1$或$k_2$

①若k_1,k_2均为特征值,则$\sum\limits_{i=1}^{2}n-r(k_i\mathbf{I}-\mathbf{A})=n\quad$(可以确定没有其他特征值)$\Rightarrow\mathbf{A}$可相似对角化

②若仅k_1为特征向量,则$|\mathbf{A}-k_2\mathbf{I}|\neq0\Rightarrow r(k_2\mathbf{I}-\mathbf{A})=n\Rightarrow r(k_1\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$

$\Rightarrow k_1$有n个线性无关特征向量(可以确定没有其他特征值)$\Rightarrow\mathbf{A}$可相似对角化

③若仅k_2为特征向量,同②得,$\mathbf{A}$可相似对角化

注意：$\mathbf{A}^2=k\mathbf{E},\mathbf{A}^2=k\mathbf{A},r(\mathbf{A})=1$与本题是特殊和一般的关系

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,证明：$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不相似：

易得：$\mathbf{A},\mathbf{B}$有特征值$3,r(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\neq r(3\mathbf{I}-\mathbf{B})\Rightarrow\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不相似

证明：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$不能相似对角化

显然,$\mathbf{A}$有特征值$1,2,2$

$2\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&a\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow r(2\mathbf{I}-\mathbf{A})=2\Rightarrow$特征值2仅有一个线性无关特征向量$\Rightarrow\mathbf{A}$不能相似对角化

- **判断能否相似对角化时，忽略单重特征值，看多重特征值及相应的矩阵**

Jordan标准型

Jordan矩阵

矩阵中,形如$\begin{bmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{bmatrix}_{r\times r}$的一块称为$r$阶Jordan块,特征值为$\lambda$,记为$J(\lambda)$

每个分块都是Jordan块的分块对角矩阵称为Jordan矩阵

$\forall$方阵$\mathbf{A},\exists$可逆矩阵$\mathbf{P}$,使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{J}_A$,其中$\mathbf{J}_A$为Jordan矩阵称为$A$的Jordan标准型

若n阶方阵$\mathbf{A}$有s个不同的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$,其重数分别为$k_1,\cdots,k_s$：

则某一个(顺序可交换)$\mathbf{J}_{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1&&\\&\ddots&\\&&\mathbf{J}_s\end{bmatrix}$,其中$\mathbf{J}_i$为$k_i$阶Jordan矩阵(不一定是Jordan块)

因此$\mathbf{P}$可以记为$[\mathbf{P}_1\quad\cdots\quad\mathbf{P}_s]$,其中$\mathbf{P}_i$为$n\times k_i$阶矩阵,且$\mathbf{AP}_i=\mathbf{P}_i\mathbf{J}_i$

其中$\mathbf{J}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{i1}(\lambda_i)&&\\&\ddots&\\&&\mathbf{J}_{it}(\lambda_i)\end{bmatrix}$,$\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$为Jordan块,总块数$t=\dim V_{\lambda_i}$,总阶数为$k_i(t_i\leq k_i)$

每块的阶数可以自由分配,并且每块分别分配一个特征向量,不同块的特征向量必须线性无关(因为要确保$\mathbf{P}$可逆)

分配后,进一步记$\mathbf{P}_i=[\mathbf{P}_{i1}\quad\cdots\quad\mathbf{P}_{i2}]$,$\mathbf{P}_{ij}$的行数即$\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$被分配到的阶数，且$\mathbf{AP}_{ij}=\mathbf{P}_{ij}\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$

$\mathbf{P}_{ij}$的第一个列向量必然是被分配到的特征向量,进而求剩余的若干个列向量

- 矩阵必须满足某些条件才与某个对角矩阵相似，而所有矩阵均与某个Jordan矩阵相似
- Jordan标准型中，每个Jordan块的阶数分配得比较均匀时，变换矩阵P容易求

题型：求Jordan标准型

$$\text{求矩阵}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\text{的Jordan标准型及变换矩阵}\mathbf{P}\text{：}$$

$$f(\lambda)=(\lambda-1)^4\Rightarrow\lambda=1\text{为四重特征值}$$
$$\text{解}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{0}\text{得：}\mathbf{X}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\text{Jordan标准型由两个Jordan块构成}$$
$$\text{因此}\mathbf{A}\text{的一个Jordan标准型}\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-2&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

二次型及其矩阵表示

合同矩阵

$$\text{若}\exists\text{可逆矩阵}\mathbf{P},s.t.\,\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B},\text{则}\mathbf{A}\text{与}\mathbf{B}\text{合同}$$
$$\text{若}\mathbf{A}\text{和}\mathbf{B}\text{为对称矩阵,则}\mathbf{A}\text{与}\mathbf{B}\text{合同}\Leftrightarrow\mathbf{A}\text{和}\mathbf{B}\text{的规范型相同}\Leftrightarrow\mathbf{A}\text{和}\mathbf{B}\text{的}\textbf{惯性指数}\text{相同}$$

二次型

$$\text{二次型：}f(x_1,x_2,\dots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\text{其中}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\mathbf{A}\text{为对称矩阵(矩阵对角线上的元素即平方项系数)}$$

$$\text{如：}f=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2=\begin{bmatrix}x_1&x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\text{是实对称矩阵}\Rightarrow\mathbf{A}\text{正交相似于对角矩阵}\Rightarrow\exists\text{正交矩阵}\mathbf{P},s.t.\,\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}(\lambda_i\text{为}\mathbf{A}\text{的特征值})$$

$$\text{令}\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{Y},\text{则}f=(\mathbf{P}\mathbf{Y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{Y})^T=\mathbf{Y}^T\mathbf{D}\mathbf{Y},\text{左式称为二次型的}\textbf{标准形}$$

$$\text{若}\mathbf{D}\text{满足：}\{\lambda_i\}\textbf{按照正数、负数、0的顺序排列},\text{则标准型可以化为规范型,记}g(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}&\lambda\neq0\\0&\lambda=0\end{cases}$$

$$\text{令}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}g(\lambda_1)&&&\\&g(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&g(\lambda_n)\end{bmatrix}(\text{显然}\mathbf{Q}\text{可逆}),\text{则}\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q}=\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&-1&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&0&\\&&&&&\ddots\end{bmatrix}$$

$$\text{令}\mathbf{Y}=\mathbf{Q}\mathbf{Z},\text{则}f=\mathbf{Z}^T\mathbf{S}\mathbf{Z},\text{左式称为二次型的}\textbf{规范型}$$

$$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{D})=r(\mathbf{Q})$$

- **正交矩阵的逆和转置相等，因此实对称矩阵必然有标准型**

题型：二次型化为标准型

- **本质上是对称矩阵对角化问题**
- **要求标准型或规范型时，写出表达式，而不是矩阵**
- **先尝试能否使用配方法或行列初等变换法，如果困难则使用正交变换法；结果和变换矩阵均不唯一**

配方法

$$\begin{aligned}&f=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2, a\text{为未知常数,求}f\text{的规范型：}\\&\text{记正,负惯性指数分别为}p,q\\&①a=2\text{时},r(\mathbf{A})=3\Rightarrow p+q=3\Rightarrow f=z_1^2+z_2^2+z_3^2\quad(\text{通过变换矩阵可逆亦可说明})\\&②a\neq 2\text{时},r(\mathbf{A})=2\Rightarrow p+q=2\Rightarrow f=z_1^2+z_2^2\quad(\text{显然非负})\end{aligned}$$

- **只需要求规范型时，可利用二次型的结论，配方法尤其适合**
- **当且仅当换元矩阵可逆时，能得到正确的标准型/规范型**

行列对称初等变换法

$$\text{有对称矩阵}\mathbf{A},\text{对角矩阵}\mathbf{D},\text{设}\begin{cases}\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}\\ \mathbf{I}\mathbf{P}=\mathbf{P}\end{cases}$$

$$\mathbf{P}^T\text{可视为一系列行初等变换},\mathbf{P}\text{可视为一系列列初等变换},\text{故}[\mathbf{A}|\mathbf{I}]\xrightarrow[\text{列初等变换}]{\text{行列对称初等变换}}[\mathbf{D}|\mathbf{P}]$$

$$\begin{aligned}&\text{将}f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3+2x_1x_3\text{化为标准型：}\\&\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{bmatrix},[\mathbf{A}|\mathbf{I}]\xrightarrow[\text{列初等变换}]{\text{行列对称初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\\&\text{故}f\xlongequal{\mathbf{X}=\mathbf{PY}}y_1^2+y_2^2,\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- **变换的目标不一定是标准型，也可以是一般二次型；但不能是非对称矩阵**
- **变换矩阵可逆，但不一定正交（$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B},\mathbf{P}$可逆；但未必满足$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$）**
- **对于同一个目标，变换矩阵不唯一**

正交变换法

$$\begin{aligned}&1.\text{求出对称矩阵}\mathbf{A}_{n\times n}\text{的所有特征值}\\&2.\text{遍历每个特征值：}\\&\quad ①\text{对于单重特征值,求出一个特征向量,然后单位化}\\&\quad ②\text{对于}t\text{重特征值,必然能求出}t\text{个特征向量,将它们}\text{Schmidt}\text{正交化}\\&3.\text{所有的}n\text{个线性无关特征向量作为列向量组,即构成正交矩阵}\mathbf{P}\\&4.\text{根据特征值写出变换后的表达式,特征值即变换后各项的系数}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{将}f=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X},\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix},\text{求}f=0\text{的解：}\\&\text{易得：}\mathbf{A}\text{有特征值}14,0,0,\text{对应正交向量为}\mathbf{a}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix}-3\\-6\\5\end{bmatrix}\\&\Rightarrow f=14y_1^2\Rightarrow y_1=0\quad(y_2,y_3\text{任意})\\&\Rightarrow\mathbf{x}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3]\begin{bmatrix}0\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- **只要求$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$，而不要求矩阵正交时，问题退化为相似矩阵问题（省略正交化这一步即可）**
- **只要求$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$，而不要求矩阵正交时，可以用前两种方法**

- **两个非对称矩阵也可能相似，这种情况下只能用正交变换法将其分别相似对角化，进而求变换矩阵**
- **简化运算的方法：**
    - **由于已经知道矩阵的秩，求解方程组时可以直接划掉矩阵的若干行**
    - **由于已经知道两两正交，最后一个特征向量可以直接根据之前的特征向量算出**
    - **如果事先知道矩阵有特征值0，求其他特征值时，可忽略常数项甚至一次项**

二次型的正定性

惯性定理：二次型化为标准型后，正项、负项的个数是固定的；正(负)项个数称为**正(负)惯性指数**，两个数组成的数对称为**惯性指数**

正定性：$f=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$若$\forall\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$，有$f>0$，则称$f$为正定二次型，$\mathbf{A}$为正定矩阵

若$\mathbf{A}$为实对称矩阵，则$\mathbf{A}$正定 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$的所有特征值 >0 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$的所有**顺序主子式** >0 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$正交相似于$\mathbf{I}$

$p+q=r\quad p$：正惯性指数 $\quad q$：负惯性指数 $\quad r$：矩阵的秩(**二次型的自由度**)

$q=0\Leftrightarrow$ 恒有$f\geq 0\quad p=r\Leftrightarrow$ 恒有$f>0\Leftrightarrow\mathbf{A}$正定

若$\mathbf{A}$正定：

①$|\mathbf{A}|>0$，$\mathbf{A}$所有主对角线元素 >0

②$\mathbf{A}^{-1},\mathbf{A}^*,\mathbf{A}^m$正定

题型：二次型的性质

$\mathbf{A}$为m阶正定矩阵，$\mathbf{B}$为$m\times n$实矩阵，证明：$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$正定的充要条件是$r(\mathbf{B})=n$

$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$为实对称矩阵

$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$正定 $\Leftrightarrow\forall\mathbf{X}\neq 0,\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{X}>0$

记$\mathbf{Y}=\mathbf{B}\mathbf{X}$，则$\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{X}=\mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}$，$\mathbf{Y}$为$m$维列向量 $\quad\mathbf{A}$正定 $\Rightarrow\mathbf{Y}\neq 0$时，$\mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}>0$

故$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$正定 $\Leftrightarrow\mathbf{X}\neq 0$时$\mathbf{B}\mathbf{X}\neq 0\Leftrightarrow\mathbf{B}\mathbf{X}=\mathbf{0}$没有非0解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{B})=n$

$f=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_2+4x_2x_3$的负惯性指数为1，求$a$的取值范围：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{bmatrix},\mathbf{A}_{11}=1,\mathbf{A}_{22}=-1,\mathbf{A}_{33}=a^2-4$$

故$a^2-4\geq 0\Rightarrow a\in[-2,2]$

- **非退化变换不改变正定性，但退化变换有可能（即变换矩阵是否可逆）**
- 遍历矩阵的所有顺序主子式（$\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22},\cdots$）的符号，可以求正(负)惯性指数：
    - 如果某主子式与上一个主子式**符号相同**，则正惯性指数+1（$\mathbf{A}_{00}$的符号总是视为正）
    - 如果某主子式与上一个主子式**符号相反**，则负惯性指数+1
    - 如果**值为0的主子式总数**不超过1个，将其直接从序列中去掉即可（超过1个则不应使用此方法）
- 根据配方式求正(负)惯性指数或规范型：
    1. 判断二次型自由度；**自由度未必等于自由变量数（如$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2$的自由度为3，而$f=x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2$的自由度为2）**
    2. 判断二次型是否可能取正数/负数，即可初步确定负/正惯性指数的取址范围