# Jordan标准型

## Jordan矩阵

$$\text{矩阵中, 形如}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{r\times r}\text{的一块称为}r\text{阶Jordan块, 特征值为}\lambda\text{, 记为}J(\lambda)$$

每个分块都是Jordan块的分块对角矩阵称为Jordan矩阵

$\forall$方阵$\mathbf{A}$, $\exists$可逆矩阵$\mathbf{P}$, 使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{J}_A$, 其中$\mathbf{J}_A$为Jordan矩阵称为$A$的Jordan标准型

若$n$阶方阵$\mathbf{A}$有$s$个不同的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 其代数重数分别为$k_1,\cdots,k_s$:

则某一个(顺序可交换)$\mathbf{J_A}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_s\end{bmatrix}$, 其中$\mathbf{J}_i$为$k_i$阶Jordan矩阵(不一定是Jordan块)

因此$\mathbf{P}$可以记为$[\mathbf{P}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{P}_s]$, 其中$\mathbf{P}_i$为$n\times k_i$阶矩阵, 且$\mathbf{A}\mathbf{P}_i=\mathbf{P}_i\mathbf{J}_i$

其中$\mathbf{J}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{i1}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{it}(\lambda_i)\end{bmatrix}$, $\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$为Jordan块, 总块数$t=\dim V_{\lambda_i}$(几何重数), 总阶数为$k_i$(代数重数)

$\dim V_{\lambda_i}=n-r(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})=$解中自由变量的个数

**每块的阶数可以自由分配,并且每块分别分配一个特征向量,** 不同块的特征向量必须线性无关(因为要确保$\mathbf{P}$可逆)

分配后, 进一步记$\mathbf{P}_i=[\mathbf{P}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{i2}]$, $\mathbf{P}_{ij}$的行数即$\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$被分配到的阶数，且$\mathbf{A}\mathbf{P}_{ij}=\mathbf{P}_{ij}\mathbf{J}_{ij}(\lambda_i)$

$\mathbf{P}_{ij}$的第一个列向量必然是被分配到的特征向量, 进而求剩余的若干个列向量

- 矩阵必须满足某些条件才与某个对角矩阵相似，而所有矩阵均与某个Jordan矩阵相似
- Jordan标准型中，每个Jordan块的阶数分配得比较均匀时，变换矩阵P容易求
- Jordan标准型由**s(不同特征值个数)**个Jordan矩阵组成，每个Jordan矩阵的阶数为**k(特征值的代数重数)**，其中Jordan块个数为**t(特征值的几何重数)**
  - t=k时，**每个Jordan块都是1阶，变换矩阵中对应的一个列向量就是特征向量**
  - t<k时，超出的阶数可自由分配，**2阶及以上的Jordan块，变换矩阵中对应的列向量中只有第一个是特征向量，其余为广义特征向量（Jordan链）**

## 题型：求Jordan标准型

1.求矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$的Jordan标准型及变换矩阵$\mathbf{P}$:

$f(\lambda)=(\lambda-1)^4\Rightarrow\lambda=1$为四重特征值

解$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{0}$得: $\mathbf{X}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$ Jordan标准型由两个Jordan块构成

因此$\mathbf{A}$的一个Jordan标准型$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$(每个Jordan块分到两阶, 相对容易计算)

# 矩阵三角分解

## LR分解

$$\begin{aligned}&\text{LR分解}:\mathbf{A}_{n\times n}=\mathbf{LR},\text{其中}\mathbf{L}\text{为下三角矩阵},\mathbf{R}\text{为上三角矩阵}\\&\text{LDR分解}:\mathbf{A}_{n\times n}=\mathbf{LDR},\text{其中}\mathbf{D}\text{为对角矩阵},\mathbf{L}\text{和}\mathbf{R}\text{必须是单位上/下三角矩阵}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{LR分解存在}\Leftrightarrow\mathbf{A}_k\neq0\quad(k=1,2,\cdots,r(\mathbf{A}))\\&\text{LDR分解唯一}\Leftrightarrow\mathbf{A}_k\neq0\quad(k=1,2,\cdots,\textbf{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{若LR分解存在,一定有}:[\mathbf{A}][\mathbf{I}]\xrightarrow{\text{行初等变换}}[\mathbf{R}][\mathbf{P}]\quad(\text{不可进行行交换})\\&\text{其中}\mathbf{P}\text{为可逆上三角矩阵},\mathbf{PA}=\mathbf{R},\text{令}\mathbf{L}=\mathbf{P}^{-1},\text{则}\mathbf{A}=\mathbf{LR}\end{aligned}$$

- **上/下三角矩阵乘对角矩阵总是得到上/下三角矩阵，上/下三角矩阵的逆矩阵（若存在）仍是上/下三角矩阵**
- **LDR分解和LR分解总是可以相互转化**

## 满秩分解

$$\text{满秩分解}:\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times r}\mathbf{C}_{r\times n},\text{其中}r=r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=r(\mathbf{C})$$

$$\begin{aligned}&[\mathbf{A}_{m\times n}]\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{r\times n}\\\mathbf{O}_{(n-r)\times n}\end{bmatrix},\text{其中}\mathbf{C}\text{为行最简型},\text{则}:\\&\mathbf{A}=\mathbf{BC}\quad(\mathbf{B}\text{为}\mathbf{A}\text{的}r\text{个线性无关列向量},\text{与}\mathbf{C}\text{的行最简型中仅有1的}r\text{列相对应})\end{aligned}$$

- **任何非零矩阵都有满秩分解**

## 题型：满秩分解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&5&6\\0&2&0&0&0&14\\2&-1&2&-4&0&1\\-2&1&-2&2&10&25\end{bmatrix}:$$

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{行标准变换}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-10&-29\\0&1&0&0&0&-7\\0&0&0&1&-5&-13\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{A}=\mathbf{BC},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&2&0\\2&-1&-4\\-2&1&2\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&-10&-29\\0&1&0&0&0&-7\\0&0&0&1&-5&-13\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

## QR分解

$$\text{QR分解}:\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{Q}_{m\times n}\mathbf{R}_{n\times n},\text{其中}\mathbf{Q}\text{的列向量两两正交},\mathbf{R}\text{为上三角矩阵}$$

$$\text{给定矩阵}\mathbf{A}_{m\times n},\text{通过列初等变换将其}\textbf{各列向量正交化}\text{即得到}\mathbf{Q}_{m\times n},\mathbf{R}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}$$

# 共轭转置矩阵

## 概念

$$\begin{aligned}&\text{将矩阵}\mathbf{A}\text{中的所有元素改为其共轭复数},\text{即得到}\mathbf{A}\text{的}\textbf{共轭矩阵},\text{记为}\overline{\mathbf{A}}\\&\text{将}\overline{\mathbf{A}}\text{转置},\text{即得到}\mathbf{A}\text{的}\textbf{共轭转置矩阵},\text{记为}\mathbf{A}^H\end{aligned}$$

- 矩阵中的元素均为实数时，其共轭矩阵与自身相同，共轭转置矩阵与转置矩阵相同

# Hermit矩阵

若$\mathbf{A}=\mathbf{A}^H$, 称$\mathbf{A}$为Hermit矩阵

Hermit矩阵$\mathbf{A}$满足：
①$\mathbf{A}$主对角线的元素均为实数
②$\mathbf{A}$的特征值均为实数
③$\mathbf{A}$的来自任意两个不同特征值的特征向量正交

任意矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$满足：
①$\mathbf{A}\mathbf{A}^H$和$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$必然是Hermit矩阵
②$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)=r(\mathbf{A}^H\mathbf{A})$
③若$r(\mathbf{A})=r$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$和$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$必然有同样的$\mathbf{r}$个正特征值(多重特征值算多个), 零特征值数量不相等(除非$m=n$), 没有负特征值

若$\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{I}$(即$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^H$), 称$\mathbf{A}$为酉矩阵

- 若矩阵元素均为实数，则Hermit矩阵退化为**实对称矩阵**，酉矩阵退化为**正交矩阵**

# Hermit矩阵的正定性

$$\begin{gathered}\text{有Hermit矩阵}\mathbf{A},\text{复向量}\mathbf{X}, f=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}:\\ \text{若}\forall\mathbf{X}, f\geq 0,\text{则称}\mathbf{A}\text{为半正定矩阵}\\ \text{若}\forall\mathbf{X}\neq\mathbf{0}, \mathbf{A}>0,\text{则称}\mathbf{A}\text{为正定矩阵}\end{gathered}$$

- 类似于实对称矩阵，**正/负惯性指数就是正/负特征值的个数**；**负惯性指数为0时，必然为半正定或正定矩阵**

# 奇异值

$$\begin{aligned}&\text{有非零矩阵}\mathbf{A}_{m\times n}, r(\mathbf{A})=r:\\ &\mathbf{A}^H\mathbf{A}\text{的}\mathbf{r}\text{个正特征值(必须从大到小排)记为}\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\text{则}\mathbf{A}\text{的奇异值为}\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r}\\ \\ &\text{必然存在酉矩阵}\mathbf{U}_{m\times m},\mathbf{V}_{n\times n},\text{使}\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{E}\mathbf{V}^H,\text{称为}\mathbf{A}\text{的奇异值分解}\\ &\text{其中}\mathbf{E}_{m\times n}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}, \mathbf{D}\text{为}\mathbf{A}\text{的奇异值构成的对角矩阵}\\ &\mathbf{A}^H\mathbf{A}\text{的}n\text{个正交特征向量(和特征值顺序一致)}\mathbf{v}_1,\ldots,\text{则}\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1\quad\cdots\quad\mathbf{v}_n]\\ &\text{取}\mathbf{u}_i=\frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{\sqrt{\lambda_i}},\text{则}\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1\quad\cdots\quad\mathbf{u}_m]\quad(\text{若}m>n,\text{补上}m-n\text{个任意正交特征向量})\\ \\ &\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{E}\mathbf{V}^H\Leftrightarrow\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{U}\mathbf{E}\quad(\mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{I})\end{aligned}$$

- **任意非零矩阵都有奇异值分解**

# 题型：奇异值分解

$$\begin{aligned}&\text{求矩阵}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\text{的奇异值分解：}\\ &\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\text{特征值}\lambda_1=4,\lambda_2=2,\text{对应正交特征向量}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\\ &\text{取}\mathbf{u}_i=\frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{\sqrt{\lambda_i}},\text{则}\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\text{取}\mathbf{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\\ &\text{故}\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{E}\mathbf{V}^H,\text{其中}\mathbf{E}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix},\mathbf{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

# 矩阵广义逆

## 单侧逆

若$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times m}=\mathbf{I}_m$, 则称$\mathbf{A}$左可逆, $\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的左逆矩阵, 记为$\mathbf{A}_L^{-1}$
若$\mathbf{C}_{n\times m}\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{I}_n$, 则称$\mathbf{A}$右可逆, $\mathbf{C}$称为$\mathbf{A}$的右逆矩阵, 记为$\mathbf{A}_R^{-1}$
若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}_L^{-1}=\mathbf{A}_R^{-1}$

有矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$, 以下命题等价：
①$\mathbf{A}$左可逆
②$N(\mathbf{A})=\mathbf{0}\quad(\mathbf{AX}=\mathbf{0}$只有$\mathbf{0}$解, $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$有唯一解或无解$)$
③$\mathbf{A}$列满秩$\quad(r(\mathbf{A})=n)$
④$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$可逆$\quad($此时$(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$必然是$\mathbf{A}$的左逆矩阵$)$

以下命题等价：
①$\mathbf{A}$右可逆
②$R(\mathbf{A})=m\quad(r(\mathbf{A})=m)$
③$\mathbf{A}$行满秩$\quad(r(\mathbf{A})=m)$
④$\mathbf{A}\mathbf{A}^H$可逆$\quad($此时$\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$必然是$\mathbf{A}$的右逆矩阵$)$

若$\mathbf{A}$左可逆, 且$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$有唯一解, 则必然有$\mathbf{X}=\mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{b}\quad($不论取哪个$\mathbf{A}_L^{-1}$, 得到的$\mathbf{X}$均相同$)$
若$\mathbf{A}$右可逆, 且$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$有唯一解, 则必然有$\mathbf{X}=\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{b}\quad($不论取哪个$\mathbf{A}_R^{-1}$, 得到的$\mathbf{X}$均相同$)$

- **左逆矩阵和右逆矩阵的求解与线性方程组求解类似**

## 加号广义逆

若矩阵$\mathbf{A}_{m\times n},\mathbf{G}_{n\times m}$满足：$\mathbf{AGA}=\mathbf{A},\mathbf{GAG}=\mathbf{G},\mathbf{AG}$和$\mathbf{GA}$均为Hermit矩阵, 则称$\mathbf{G}$为$\mathbf{A}$的加号广义逆, 记为$\mathbf{A}^+$

对任何非零矩阵$\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+$存在且唯一：
若$\mathbf{A}=\mathbf{UEV}^H$(奇异值分解), $\mathbf{A}^+=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{D}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{U}^H\quad($可以大体上看成$\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{-1})$
若$\mathbf{A}=\mathbf{BC}$(满秩分解), $\mathbf{A}^+=\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+=\mathbf{C}_R^{-1}\mathbf{B}_L^{-1}=\mathbf{C}^H(\mathbf{CC}^H)^{-1}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H$

$\mathbf{A}^+$具有以下性质：
①$(\mathbf{A}^+)^+=\mathbf{A}$
②$(\mathbf{A}^+)^H=(\mathbf{A}^H)^+$
③$(k\mathbf{A})^+=k^{-1}\mathbf{A}^+(k\neq 0)$
④若$\mathbf{A}$列满秩, $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}_L^{-1}$, 若$\mathbf{A}$行满秩, $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}_R^{-1}$; 若$\mathbf{A}$可逆, $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{-1}$
⑤$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^+)=r(\mathbf{A}^+\mathbf{A})=r(\mathbf{AA}^+)$

## 题型：广义加号逆

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$,求$\mathbf{A}^+$：

易得：$\mathbf{A}$不是行满秩/列满秩矩阵

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&5&0\\2&0&4\end{bmatrix}$,特征值为$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=0$,特征向量$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

取$\mathbf{u}_i=\frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{\sqrt{\lambda_i}}$,则$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,取$\mathbf{u}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

故$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{E}\mathbf{V}^H$,其中$\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&\sqrt{5}&0\\2&0&1\end{bmatrix},\mathbf{E}=\sqrt{5}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{V}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0&1&-2\\1&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}$

故$\mathbf{A}^+=\mathbf{V}\mathbf{E}'\mathbf{U}^H=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}$

- **先看是否为可逆矩阵，再看是否为行满秩/列满秩矩阵，都不是再考虑奇异值分解，奇异值分解难以计算再考虑满秩分解**

## 线性方程组的最佳最小二乘解

有**无解**的线性方程$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$：

若$\mathbf{u}$满足$,\forall\mathbf{X},||\mathbf{Au}-\mathbf{b}||_2\le||\mathbf{AX}-\mathbf{b}||_2$,则称$\mathbf{u}$为$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的一个**最小二乘解**

若干个最小二乘解中,必然存在2-范数最小的一个,称为**最佳最小二乘解**,必然是$\mathbf{A}^+\mathbf{b}$

- 绝大多数情况下，系数矩阵都是列满秩矩阵，可以直接取$\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$

# 向量范数

## 概念

有**线性空间**$V$,如果一个$V$到**实数域**的映射$||\cdot||,\forall\mathbf{a}\in V$满足：

①正定性：$\mathbf{a}\ne\mathbf{0}$时$,||\mathbf{a}||>0,||\mathbf{a}||=0\Leftrightarrow\mathbf{a}=\mathbf{0}$

②齐次性：$\forall k\in R$,有$||k\mathbf{a}||=|k|\ ||\mathbf{a}||$

③三角不等式：$\forall b\in V,||\mathbf{a}\pm\mathbf{b}||\le||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||$

则称$||\cdot||$是$V$的一个**范数**(如,向量到模长的映射是一个范数)

有$\mathbf{X}\in V^n,\forall p>0$,定义$||\mathbf{X}||_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,称为向量$\mathbf{X}$的**p-范数**,其中$x_i$为$\mathbf{X}$的各个分量

如2-范数是向量的模长$,\infty$-范数是取各分量的最大值

记$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$,表示$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$间的**距离**(通常情况下用2-范数表示距离)

记$N(\mathbf{a}_0,r)=\{\mathbf{a}|d(\mathbf{a},\mathbf{a}_0)<r\}$,表示$\mathbf{a}_0$的**邻域**

- 范数没有下标时，不一定表示某个特定的p-范数，甚至不一定是p-范数
- **范数是一种泛函（以向量为自变量）**

## 极限/连续性/等价性

有向量序列$\{\mathbf{a}_i\}$, 若$\forall\varepsilon>0,\exists\mathbf{b},N$, 使$\forall n>N$时, 有$||\mathbf{a}-\mathbf{b}||_p<\varepsilon$, 则称$\mathbf{b}$是$\{\mathbf{a}_i\}$的极限, 记为$\mathbf{a}_i\xrightarrow{||\cdot||_p}\mathbf{b}$, 或$\lim\limits_{i\to\infty}\mathbf{a}_i=\mathbf{b}$

有泛函$f$, 若$\forall\varepsilon>0,\exists r>0$和$\mathbf{b}$, 使$\forall\mathbf{a}\in N(\mathbf{a}_0,r)$, 有$||f(\mathbf{a})-\mathbf{b}||_p<\varepsilon$, 则称$\mathbf{b}$是$f(\mathbf{a})$在$\mathbf{a}_0$的极限, 记为$\lim\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{a}_0}f(\mathbf{a})=\mathbf{b}$

若$f(\mathbf{a}_0)=\lim\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{a}_0}f(\mathbf{a})$, 则称$f$在$\mathbf{a}_0$处连续

有泛函$f,g$, 若$\forall\mathbf{a},\exists c_1,c_2>0$, 使$c_1f(\mathbf{a})\le g(\mathbf{a})\le c_2f(\mathbf{a})$, 则称$f$与$g$等价

- 两个泛函（范数）等价，是要求两个泛函（范数）的值始终同时为同阶无穷大/同阶无穷小/常数
- 所有范数都是连续泛函，任意一个有限维空间上的所有范数两两等价（并不局限于p-范数）

# 函数空间

- **函数可以视为无穷维向量**

## 函数范数

$$
\begin{aligned}
&\text{有}[a,b]\text{上的}\textbf{连续函数空间}C, \text{如果一个}C\text{到}\textbf{实数域}\text{映射}||\cdot||, \forall f(x)\in C\text{满足：}\\
&\text{①正定性：}f(x)\ne0\text{时}, ||f(x)||>0, ||f(x)||=0\Leftrightarrow f(x)=0\\
&\text{②齐次性：}\forall k\in R, \text{有}||kf(x)||=|k|\ ||f(x)||\\
&\text{③三角不等式：}\forall g(x)\in V, ||f(x)\pm g(x)||\le||f(x)||+||g(x)||\\
&\text{则称}||\cdot||\text{是}C\text{的一个}\textbf{范数}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{有}f(x)\in C,\forall p>0, \text{定义}||f(x)||_p=\left(\int_a^b|f(x)^p|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \text{称为函数}f(x)\text{的}\textbf{p-范数}\\
&\text{如}\mathbf{1}\text{-范数是函数在}[a,b]\text{内绝对值的积分}, \boldsymbol{\infty}\text{-范数是函数在}[a,b]\text{内的最大值}
\end{aligned}
$$

- $[a,b]$上的连续函数空间，即一切在$[a,b]$上连续的函数构成的空间

## 权函数

$$
\begin{aligned}
&\text{记}||f(x)||_p'=\left(\int_a^b\rho(x)|f(x)^p|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \text{其中}\rho(x)\text{称为}\textbf{权函数}\\
&\text{常见权函数：}1\quad\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad e^{-x}\quad e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

- **原函数的积分可能不存在（如过大），这种情况下需要引入权函数**
- 引入权函数显然不会破坏函数范数的齐次性；必须确保引入权函数不破坏正定性

## 内积空间

$$
\begin{aligned}
&\text{内积：}(f,g)=\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x\quad(f,g)'=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&\text{长度(欧式范数)：}||f||_2=\sqrt{(f,f)}\\
&\text{Cauchy}-\text{Schwarz不等式：}|(f,g)|\le||f||_2||g||_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{若}(f,g)=0, \text{称}f\text{与}g\text{正交}; \text{若}(f,g)'=0, \text{称}f\text{与}g\text{带权}\rho(x)\text{正交}\\
&\text{有函数族}\{f_i(x)\}(i=0,..,n), \text{若}(f_i(x),f_j(x))=\begin{cases}0&i\ne j\\a_k&i=j\end{cases}, \text{则称}\{f_i(x)\}\text{为正交函数族}\\
&\text{特别地, 若}a_k\equiv1, \text{称}\{f_i(x)\}\text{为标准正交函数族}\\
&\text{如}\{\sin ix\}\text{和}\{\cos ix\}\text{是}[0,\pi]\text{上的正交函数族}
\end{aligned}
$$

- 在**某区间上的连续函数空间**的基础上定义内积等概念，即得到内积空间
- **函数内积和向量内积的性质类似（交换律，分配律，正定性）**

# 线性相关

有$[a,b]$上的函数族$\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$,若存在一组不全为0的系数$k_1,\dots,k_n$,使$\sum\limits_{i=1}^{n}k_if_i(x)\equiv 0$,则称$\{f_0(x),\dots,f_n(x)\}$线性相关

函数族的Cramer行列式$C=\begin{vmatrix}(f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \cdots & (f_1,f_n)\\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \cdots & (f_2,f_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \cdots & (f_n,f_n)\end{vmatrix}$

函数族线性无关 $\Leftrightarrow C\neq 0$

# Legendre多项式

$$\text{记}P_0(x)=1,P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)}{\mathrm{d}x^n},x\in[-1,1],\text{称为Legendre多项式}$$

$$\text{记}\widetilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)}{\mathrm{d}x^n},\text{称为首一的Legendre多项式}$$

$P_n(x)$具有以下性质：

$$①(P_m,P_n)=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

②$n$为奇数/偶数时,$P_n(x)$只含有奇次/偶次项

$$③(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

# 函数逼近

在$[a,b]$上,用函数$g(x)$逼近$f(x)$,常用的误差评判标准有：

$$||f(x)-g(x)||_\infty=\max_{a<x<b}|f(x)-g(x)|$$

$$||f(x)-g(x)||_2'^2=\int_a^b\rho(x)[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$$

# 插值多项式

$$\text{有函数}f(x),\text{若函数}p(x)\text{满足}p(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,\dots,n),\text{则称}p(x)\text{为}f(x)\text{的插值函数}$$

- 常用的函数逼近方式，只使用特定数量的点来进行函数逼近
- **若给定了n+1个特定点的取值，那么插值函数中也应当有n+1个自由变量（如果插值函数的自由变量数不足，则舍弃相应数量的特定点取值）**

## Lagrange插值多项式

有函数$y=f(x)$,若给定了函数的$n+1$个特定点$(x_i,y_i)$,必然存在一个$n$次插值多项式,

可以表示为$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad (\text{Lagrange插值多项式})$,其中$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

注意到,$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

可以证明:$\sum_{i=0}^{n} x^k l_i(x)\equiv x^k \quad (k\leq n)$

插值余项$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$

不妨设$a\leq x_0<\ldots<x_n\leq b$,若$[a,b]$上$f^n(x)$连续,$f^{(n+1)}(x)$存在,

可以证明:$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \quad (a<\xi<b)$

若$f(x)$为$n$次多项式,那么显然$R_n(x)=0$,故$L_n(x)\equiv f(x)$

截断误差函数$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$,其中$M_{n+1}=\max\limits_{a<x<b} f^{(n+1)}(x)$

- 对于给定的一组函数取值，Lagrange插值是唯一的
- 一次、两次的Lagrange插值多项式也被称为线性插值多项式、抛物线插值多项式
- **分段线性插值，相当于在每两个相邻点间独立地应用线性插值**

## Newton插值多项式

记$f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,称为$f(x)$在$[a,b]$上的差商,即平均变化率

不妨假设$x_0<\ldots<x_n$,规定$f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$,称为$f(x)$在$[x_0,x_n]$上的$n$阶差商

$f[x_0,\ldots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega(x_i)}$,其中$\omega(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)$

任意交换$f[x_0,\ldots,x_n]$中参数的位置,差商的值不变

可以证明:$f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (x_0<\xi<x_n)$

有函数$y=f(x)$,若给定了函数的$n+1$个特定点$(x_i,y_i)$,必然存在一个插值多项式,

可以表示为$N_n(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\left[f[x_0,\ldots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right] \quad (\text{Newton插值多项式})$

插值余项$R_n(x)=f(x)-N_n(x)$

- 对于给定的一组函数取值，Newton插值是唯一的
- **Newton插值多项式和Lagrange插值多项式的余项形式完全相同**

## 题型：插值多项式

假设$\sin 0.32, \sin 0.34, \sin 0.36$的值已知, 用抛物线插值计算$\sin 0.3367$, 并估计截断误差：

$f(x) = \sin x, f'''(x) = -\cos x$

$$L_2(0.3367) = \sin 0.32 \frac{(0.3367-0.34)(0.3367-0.36)}{(0.32-0.34)(0.32-0.36)} + \sin 0.34 \frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.36)}{(0.34-0.32)(0.34-0.36)}$$

$$+\sin 0.36 \frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)}{(0.36-0.34)(0.36-0.32)} \approx 0.330374$$

$|R_2(0.3367)| \le \frac{M_3}{6}|(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)(0.3367-0.36)|$, 其中$M_3 = \cos 0.32$

则$|R_2(0.3367)| < 0.178 \times 10^{-6}$

## 最佳平方逼近

给定函数$f(x)$, 选取一个线性无关函数族$g_0(x), \dots, g_m(x)$

假设逼近函数为$g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i g_i(x)$, 记$I = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \mathrm{d}x$, 求使$I$最小的$a_0, \dots, a_m$的值：

可以证明, 满足以下方程组时$I$取极值：

$$\begin{bmatrix} (g_0,g_0) & (g_0,g_1) & \cdots & (g_0,g_m) \\ (g_1,g_0) & (g_1,g_1) & \cdots & (g_1,g_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m,g_0) & (g_m,g_1) & \cdots & (g_m,g_m) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (g_0,f) \\ (g_1,f) \\ \vdots \\ (g_n,f) \end{bmatrix}$$

- 如果$I$不存在，则需要引入合适的权函数

## 最小二乘拟合

给定了某未知函数的$n+1$个特定点$(x_i, y_i)$, 选取一个线性无关函数族$g_0(x), \dots, g_m(x) \quad (m < n+1)$

假设逼近函数为$g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i g_i(x)$, 记$I = \sum_{i=0}^{n} [y_i - g_i(x_i)]^2$, 求使$I$最小的$a_0, \dots, a_n$的值：

记$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}$为$\mathbf{X}$的系数矩阵, 则问题变为线性方程组$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$的最小二乘解问题

$\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^+ \mathbf{Y} \quad$ (通常$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$)

- 与最佳平方逼近类似，但不知道原函数，只知道离散点取值

# 数值积分

数值积分：有难以直接求的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 用与$f(x)$有关但不含积分的表达式$S$(计算后得到常数)来近似

记$R[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S$, 称为误差

$$S=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \quad a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

若$\forall P_n(x), a, b$, 有$S=\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x$, 且$\exists P_{n+1}(x), a, b$, 使$S \ne \int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x$,

则称$S$的**代数精度**为$n$($P_n(x)$为$n$阶多项式), 此时$S$具有以下性质：

①$S=\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$, 其中$L_n(x)$为$f(x)$的$n$次插值多项式(无论如何取插值点, 得到的$L_n(x)$一定相同)

②$A_i=l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ i\ne j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

③$R[f]=\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x \quad (a<\xi<b)$,

## Newton-Cotes公式

若$x_i=a+ih, h=\frac{b-a}{n}$　(在$[a,b]$上间隔均匀), 令$x=a+th$, 代入化简得：

$\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x=(b-a)C_i^n$, 其中$C_i^n=\frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!(n-i)!}\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(t-j)\mathrm{d}t$(由$i, n$决定的常数)

$\mathrm{Newton-Cotes}$公式：$S=(b-a)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)C_i^n$

特别地, **n为偶数时,** 公式的代数精度为**n+1**

$n=1,2,3$时：

梯形公式：$S=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad R[f]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$

Simpson公式：$S=(b-a)\frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6} \quad R[f]=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

$S=(b-a)\frac{f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)}{8} \quad R[f]=-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$

复化$\mathrm{Newton-Cotes}$公式：分段使用梯形公式近似求积分

可以证明：$R[f]=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$

## 题型：数值积分

分别用梯形公式和Simpson公式计算$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$的近似值, 并估计误差：

记$f(x)=e^{\frac{1}{x}}, f''(x)=(2x^{-3}+x^{-4})e^{\frac{1}{x}}, f^{(4)}(x)=(24x^{-5}+36x^{-6}+12x^{-7}+x^{-8})e^{\frac{1}{x}}$

梯形公式：$S=\frac{e+e^{\frac{1}{2}}}{2}\approx 2.1835$

代数精度为1, $R[f]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)<\frac{1}{12}f''(1)<0.6796$

Simpson公式：$S=\frac{e+4e^{\frac{1}{1.5}}+e^{\frac{1}{2}}}{6}\approx 2.0263$

代数精度为3, $R[f]=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)<\frac{1}{2880}f^{(4)}(1)<0.0689$