矩阵论

线性空间

$W_1+W_2=\{\xi|\xi=\xi_1+\xi_2,\xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2\}$

$W_1\oplus W_2(\text{直和}):\xi=\xi_1+\xi_2\text{中的}\xi_1\text{和}\xi_2\text{唯一},\text{此时}W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\},\dim(W_1\cap W_2)=0$

$\dim(W_1\cap W_2)+\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2\quad(\text{例}:W_1,W_2\text{为相交平面})$

$T(\mathbf{a})=\mathbf{b},T\text{为线性变换}\mathbf{a}\text{为原像},\mathbf{b}\text{为像}$

$\text{有}V_1\text{的一组基}\mathbf{A},V_2\text{的一组基}\mathbf{B},V_1\text{到}V_2\text{的线性变换}T,\text{则有}\mathbf{TA}=\mathbf{BK},\mathbf{K}\text{为}T\text{在基偶}\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}\text{下的矩阵}$

$\text{有}V\text{的一组基}\mathbf{A},V\text{到自身的线性变换}T,\text{则有}\mathbf{TA}=\mathbf{AK},\mathbf{K}\text{为}T\text{在基}\mathbf{A}\text{下的矩阵}$

$\text{基变换矩阵}:\mathbf{AC}=\mathbf{B},\mathbf{X}=\mathbf{CY}\quad(\mathbf{A},\mathbf{B}\text{为基},\mathbf{X},\mathbf{Y}\text{为坐标})$

$V^3=\mathrm{Sp}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\},\text{有线性变换}T,\text{将}\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\text{映射为}\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,-\mathbf{a}_3,2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\text{求}T\text{在基下的矩阵}K:$

$\text{记}\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3],\mathbf{B}=[\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\quad-\mathbf{a}_3\quad2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2]$

$\text{易得}:\mathbf{AC}=\mathbf{B},\text{其中}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$

$\text{由题意得}\mathbf{TA}=\mathbf{B},\mathbf{TA}=\mathbf{AK}\Rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{AK}\Rightarrow\mathbf{K}=\mathbf{C}$

$R^3\text{的两组基构成的矩阵}\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\text{求}\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2\text{下坐标相同的所有向量}:$

$\text{记}\mathbf{B}_1\text{到}\mathbf{B}_2\text{的过渡矩阵为}\mathbf{C},\text{则}\mathbf{B}_1\mathbf{C}=\mathbf{B}_2\Rightarrow\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\text{设某向量在}\mathbf{B}_1\text{和}\mathbf{B}_2\text{中的坐标为}\mathbf{X},\text{则}\mathbf{X}=\mathbf{CX}\Rightarrow(\mathbf{C}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}$

$\text{解得}:\mathbf{X}=k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\text{故坐标相同的所有向量为}\mathbf{B}_1\mathbf{X}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

特征值

$\text{零化多项式}:\text{若}|P(\mathbf{A})|\equiv0\quad\text{特征多项式}(\lambda\text{替换成}\mathbf{A})\text{一定是零化多项式}$

$\text{最小多项式}:\text{零化多项式中次数最低且首系数为1的}$

$\mathbf{A}\text{有特征值}\lambda_0,V_{\lambda_0}\text{为}\lambda_0\text{的所有特征向量和}\mathbf{0}\text{构成的空间(特征子空间)}$

$\text{几何重数}=\dim V_{\lambda_0}=n-r(\lambda_0\mathbf{I}-\mathbf{A})=\text{最小多项式中}(\lambda-\lambda_0)\text{的次数}=\text{求解特征向量得到的自由变量个数}$

$\text{代数重数}=\text{特征多项式中}(\lambda-\lambda_0)\text{的次数}=\text{线性无关特征向量数}$

$$\text{求}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}\text{的最小多项式}:$$

$$f(\lambda)=\lambda(\lambda-3)^3$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2=\mathbf{O}\Rightarrow\text{最小多项式}m(\lambda)=\lambda(\lambda-3)^2$$

Jordan标准型

- Jordan标准型由**s(不同特征值个数)**个Jordan矩阵组成，每个Jordan矩阵的阶数为**k(特征值的代数重数)**，其中Jordan块个数为**t(特征值的几何重数)**
  - t=k时，**每个Jordan块都是1阶，变换矩阵中对应的一个列向量就是特征向量**
  - t<k时，超出的阶数可自由分配，**2阶及以上的Jordan块，变换矩阵中对应的列向量中只有第一个是特征向量，其余为广义特征向量（Jordan链）**

- **广义特征向量可通过解方程组求出（解不唯一，任取一个即可）**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\-5&6&1\end{bmatrix},\text{求}\mathbf{A}\text{的Jordan标准型}\mathbf{J}\text{及}\mathbf{P},\text{使}\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}:$$

$$f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$$\text{特征值1对应的特征向量为}k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\text{特征值3对应的特征向量为}k\begin{bmatrix}-\frac{2}{11}\\\frac{2}{11}\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{故特征值1的代数重数为2, 几何重数为1; 特征值3的代数重数和几何重数为1}$$

$$\text{故}\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\text{记}\mathbf{P}=[\mathbf{P}_1\quad\mathbf{P}_2\quad\mathbf{P}_3],\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{P}_3=\begin{bmatrix}-\frac{2}{11}\\\frac{2}{11}\\1\end{bmatrix},\text{设}\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\-5&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&x\\0&y\\1&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&x\\0&y\\1&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow x=y$$

$$\text{取}x=y=1,z=0,\text{则}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&-\frac{2}{11}\\0&1&\frac{2}{11}\\1&0&1\end{bmatrix}$$

三角分解

$$\text{LU分解}:[\mathbf{A}][\mathbf{I}]\xrightarrow{\text{行初等变换}}[\mathbf{U}][\mathbf{P}]\quad(\text{不可行交换}),\text{则}\mathbf{A}=\mathbf{LU},\mathbf{L}=\mathbf{P}^{-1}\quad\mathbf{UX}=\mathbf{Pb}$$

$$\text{QU分解}:\mathbf{A}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\mathbf{A}'(\text{列向量正交})\xrightarrow{\text{单位化}}\mathbf{Q},\text{则}\mathbf{A}=\mathbf{QU},\mathbf{U}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}$$

- **上/下三角矩阵的对角线可以直接提取出来，得到单位上/下三角矩阵**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&2&0\\2&4&1\\0&1&4\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix},\text{通过LU分解求解}\mathbf{AX}=\mathbf{b}:$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{I}]\xrightarrow{\text{行初等变换}}[\mathbf{U}][\mathbf{P}],\mathbf{U}=\begin{bmatrix}4&2&0\\0&3&1\\0&0&\frac{11}{3}\end{bmatrix},\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix},\mathbf{A}=\mathbf{LU}$$

$$\Rightarrow\mathbf{LUX}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{UX}=\mathbf{Pb}=\begin{bmatrix}2\\1\\\frac{11}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$$

奇异值分解

$$\text{奇异值分解}:\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{UEV}^H,\mathbf{U}_m,\mathbf{V}_n\text{为酉矩阵},\mathbf{E}_{m\times n}\text{左上为奇异值对角矩阵}$$

$$\mathbf{V}\text{的列向量}\mathbf{v}_i\text{为}\mathbf{A}^H\mathbf{A}\text{的}n\text{个特征向量(标准正交化,按特征值从大到小排)}$$

$$\mathbf{U}\text{的列向量}\mathbf{u}_i=\frac{\mathbf{Av}_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\text{若}m>n,\text{补上}m-n\text{个与其他}\mathbf{u}_i\text{正交的任意单位向量})$$

求矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$的奇异值分解：

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$, 特征值$\lambda_1=4,\lambda_2=2$, 对应正交特征向量$\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

取$\mathbf{u}_i=\frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, 则$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$, 取$\mathbf{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

故$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{E}\mathbf{V}^H$, 其中$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \sqrt{2}\\0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix},\mathbf{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

矩阵广义逆

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_L^{-1}=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{A}_L^{-1}=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$$
$$\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{A}_R^{-1}=\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$$

数值分析

p-范数诱导的矩阵范数

$$||\mathbf{A}||_1=\max_j\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\quad(\text{求各列的和, 取最大})$$
$$||\mathbf{A}||_2=\max_i\sqrt{\lambda_i}\quad(\text{最大特征值的平方根, 即第1个奇异值})$$
$$||\mathbf{A}||_\infty=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\quad(\text{求各行的和, 取最大})$$
$$\text{cond}_1(\mathbf{A})=||\mathbf{A}||_1\cdot||\mathbf{A}^{-1}||_1$$

线性方程组数值解

$$\text{Jaccobi迭代法：}\begin{cases}x_1=f_1(x_2,x_3)\\x_2=f_2(x_1,x_3)\\x_3=f_3(x_1,x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{k+1}=f_1(x_2^k,x_3^k)\\x_2^{k+1}=f_2(x_1^k,x_3^k)\\x_3^{k+1}=f_3(x_1^k,x_2^k)\end{cases}$$

$$\text{Gauss}-\text{Seidel迭代法：}\begin{cases}x_1=f_1(x_2,x_3)\\x_2=f_2(x_1,x_3)\\x_3=f_3(x_1,x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{k+1}=f_1(x_2^k,x_3^k)\\x_2^{k+1}=f_2(x_1^{k+1},x_3^k)\\x_3^{k+1}=f_3(x_1^{k+1},x_2^{k+1})\end{cases}$$

$\mathbf{A}$是严格对角占优阵 $\Rightarrow$ 两种迭代法收敛

非线性方程组数值解

简单迭代法：$f(x)=0\Rightarrow x=\phi(x)\quad x_{k+1}=\phi(x^k),\phi(x)$合适时, x^k逼近x^*

误差：$E_k=x_k-x^*$, 若$\lim_{k\to\infty}|\frac{E_{k+1}}{E_k^p}|=C>0$, 则称该迭代式**p**阶收敛

Newton法：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Newton法改进：$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(\lambda>0)\quad$(在某个多重根附近, λ取根重数)

若$[a,b]$上$\phi(x)\in[a,b]$, 且$|\phi'(x)|\le L<1$：

则对于初值$x_0\in[a,b]$, $x_{k+1}=\phi(x_k)$收敛, 且$|E_k|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

对于初值$x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, 判断迭代式$x_{k+1} = e^{2x_k} + \frac{1}{2}$是否收敛：

$\phi(x) = e^{-2x} + \frac{1}{2}$, 为减函数, $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$, $\phi(1) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}$

$\phi'(x) = -2e^{-2x}$, 为增函数, $\phi'(\frac{1}{2}) = \frac{-2}{e}$, $\phi'(1) = \frac{-2}{e^2}$

故$[\frac{1}{2}, 1]$上$\frac{1}{2} < \phi(x) < 1, |\phi'(x)| \le \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$ 迭代式收敛

对于初值$x \in [1, 2]$, 有迭代式$x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{x_k + 4}}$, 要求误差小于$\varepsilon = 10^{-5}$, 求最小迭代次数：

$\phi(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}, \phi'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{(x+4)^3}}$, 为增函数

故$[1, 2]$上$|\phi'(x)| \le |\phi'(1)| = \frac{1}{5\sqrt{2}} = L$

$|x_1 - x_0| = |\sqrt{\frac{10}{x+4}} - x| \le 2 - \sqrt{\frac{5}{3}}$

$|E_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \le \frac{1}{(5\sqrt{2})^k(1 - 5\sqrt{2})}(2 - \sqrt{\frac{5}{3}}) \approx \frac{0.826}{7.07^k}$

$\frac{0.826}{7.07^k} \le 10^{-5} \Rightarrow k_{min} = 6$

有方程$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 2x = 0$, 证明：Newton法在$x^* = 1$附近线性收敛

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 2x$, 迭代式：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

记$t = x - 1$, 易得：$f(t) = (t+1)t^3(t-1), f'(t) = t^2(5t^2 - 7)$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(t+1)t(t-1)}{5t^2 - 7} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{7}$

$E_k = 1 - x_k, E_{k+1} = 1 - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\lim\limits_{x_k \to 1} \left| \frac{E_{k+1}}{E_k} \right| = \lim\limits_{t \to 0} \left| \frac{-t + \frac{t}{7}}{-t} \right| = \frac{6}{7} \Rightarrow$ Newton法收敛

有方程$f(x) = (e^x - 1)x^2(x - 1)$, 改进Newton迭代式, 使其在$x^* = 0$处二阶收敛：

迭代式：$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, f'(x) = e^x(x^3 + 2x^2 - 2x) - 3x^2 + 2x$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x + \frac{x^2}{2})x^2(x-1)}{(1+x)(x^3 + 2x^2 - 2x) - 3x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^3 + \frac{x^4}{2}}{-3x^2 + 3x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6}$

取$\lambda = 3, \lim\limits_{x_k \to 1} \left| \frac{E_{k+1}}{E_k^2} \right| = \lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{-x + 3(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6})}{x^2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 迭代法二阶收敛

插值多项式

差商：$f[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, f[x_0,\ldots,x_n]=\dfrac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad(x_0<\xi<x_n)$

有函数$f(x)$和已知点$(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$

Lagrange插值多项式：$L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}y_il_i(x)\quad l_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\i\neq j}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & j=i\\0 & j\neq i\end{cases}\quad \sum\limits_{i=0}^{n}x^kl_i(x)\equiv x^k\quad(k\leq n)$

Newton插值多项式：$N_n(x)=f(x_0)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f[x_0,\ldots,x_i]\prod\limits_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right]$

插值余项$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\quad(a<\xi<b)$

截断误差函数$|R_n(x)|\leq\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$, 其中$M_{n+1}=\max\limits_{a<x<b}f^{(n+1)}(x)$

> $f(x)=5x^2(3x-2)(2x+1), x_i(i=0,1,2,3,4)$为$f(x)$的插值点, 求$f[x_0,\cdots,x_4]$和$\sum\limits_{i=0}^{4}f(x_i)l_i(1)$：
>
> $f(x)=N_4(x)=f(x_0)+\sum\limits_{i=1}^{4}\left[f[x_0,\ldots,x_4]\prod\limits_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right]$
>
> 由4次项系数相等知：$f[x_0,\cdots,x_4]=30$
>
> 记$g(x)=\sum\limits_{i=0}^{4}f(x_i)l_i(x)$
>
> $f^{(5)}(x)\equiv 0$, 故$g(x)=f(x)\Rightarrow$ 原式 $=g(1)=f(1)=15$

最佳平方逼近

内积：$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\quad(f,g)'=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

给定函数$f(x)$, 选取一个**线性无关**函数族$g_0(x),\ldots,g_m(x)$

假设逼近函数为$g(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ig_i(x)$, 记$I=\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$, 求使$I$最小的$a_0,\ldots,a_m$的值：

可以证明, 满足以下方程组时I取最小值：

$$\begin{bmatrix}(g_0,g_0) & (g_0,g_1) & \cdots & (g_0,g_m)\\(g_1,g_0) & (g_1,g_1) & \cdots & (g_1,g_m)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(g_m,g_0) & (g_m,g_1) & \cdots & (g_m,g_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(g_0,f)\\(g_1,f)\\\vdots\\(g_m,f)\end{bmatrix}$$

Legendre多项式：$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}, P_3(x)=\dfrac{5x^3-3x}{2}$

$(P_m,P_n)=\begin{cases}0 & m\neq n\\\frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$, $P_n(x)$与任何低于$\mathbf{n}$次的多项式正交

$f(x)=x^3$, 求不超过二次的多项式$P_2(x)$, 使$I=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$最小, 并求最小值：

记$g_0(x)=1, g_1(x)=x, g_2(x)=x^2$, 设$P_2(x)=a_0g_0(x)+a_1g_1(x)+a_2g_2(x)$

$(g_0,g_0)=2, (g_0,g_1)=0, (g_0,g_2)=\dfrac{2}{3}, (g_1,g_1)=0, (g_1,g_2)=0, (g_2,g_2)=\dfrac{2}{5}$

$(g_0,f)=0, (g_1,f)=\dfrac{2}{5}, (g_2,f)=0$

故$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{5}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ 0\end{bmatrix}$

故$P_2(x)=\dfrac{3}{5}x, I=\int_{-1}^{1}(x^3-\dfrac{3}{5}x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{8}{175}$

最小二乘拟合

有无解的线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$, 其最小二乘解为$\mathbf{A}^+\mathbf{b}$(通常, $\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$)

已知$y=f(x)$的5个点$(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,1),(2,0)$,

用$g(x)=a_0+a_1\cos\dfrac{\pi x}{2}+a_2\sin\dfrac{\pi x}{2}$最小二乘拟合$f(x)$, 求$g(x)$：

由题意得：$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$, 其中$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{X}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$为列满秩矩阵, 故$\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 6 & 1 & -4\\ 0 & -7 & 0 & 7 & 0\end{bmatrix}$

$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的最小二乘解$\mathbf{X}=\mathbf{A}^+\mathbf{b}=\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow g(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}+1$

数值积分

用S(含有$f(x)$但不含积分的表达式)近似$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 误差：$R[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S$

若$f(x)=1,x,\ldots x^n$均满足$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=S$, S的代数精度为n

$\mathrm{Newton-Cotes}$公式：

梯形公式：$S=(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\quad R[f]=-\dfrac{h^3}{12}f''(\xi)$

$\mathrm{Simpson}$公式：$S=(b-a)\dfrac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}\quad R[f]=-\dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Gauss求积公式：$S=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)$

①确定一个在$[a,b]$上与$x,x^2,\cdots,x^{n+1}$带权正交的首一$n+1$次多项式$P_{n+1}(x)$

②解$P_{n+1}=0$, 其$n+1$个解即为$A_0,\cdots,A_n$

③$A_0,\cdots,A_n$代入S, 并将$f(x)=1,x,\ldots x^{n+1}$代入$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=S$, 解出$x_0,\cdots,x_n$

$\rho(x)\equiv 1$时：

两点$\mathrm{Gauss-Legendre}$公式：$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\approx f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+f(\dfrac{1}{\sqrt{3}})\quad$(代数精度为3)

三点$\mathrm{Gauss-Legendre}$公式：$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\approx \dfrac{5f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+8f(0)+5f(\frac{\sqrt{15}}{5})}{9}\quad$(代数精度为5)

分别用梯形公式和Simpson公式计算$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$的近似值,并估计误差：

记$f(x)=e^{\frac{1}{x}}, f''(x)=(2x^{-3}+x^{-4})e^{\frac{1}{x}}, f^{(4)}(x)=(24x^{-5}+36x^{-6}+12x^{-7}+x^{-8})e^{\frac{1}{x}}$

梯形公式：$S=\dfrac{e+e^{\frac{1}{2}}}{2}\approx 2.1835$

代数精度为1, $R[f]=-\dfrac{h^3}{12}f''(\xi)<\dfrac{1}{12}f''(1)<0.6796$

Simpson公式：$S=\dfrac{e+4e^{\frac{1}{1.5}}+e^{\frac{1}{2}}}{6}\approx 2.0263$

代数精度为3, $R[f]=-\dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)<\dfrac{1}{2880}f^{(4)}(1)<0.0689$

求$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x$的两点型Gauss求积公式：

设$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$, 设$g(x)=x^2+bx+c$

$$\begin{cases}(1,g)=0\\(x,g)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_0^1\sqrt{x}(x^2+bx+c)\mathrm{d}x=0\\\int_0^1\sqrt{x}x(x^2+bx+c)\mathrm{d}x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{10}{9}\\c=\frac{5}{21}\end{cases}$$

$\Rightarrow g(x)=x^2-\dfrac{10}{9}x+\dfrac{5}{21}$

$g(x)$的两个零点为$x_0\approx 0.821, x_1\approx 0.290$

$$\begin{cases}\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=A_0x_0+A_1x_1\\\int_0^1\sqrt{x}x\mathrm{d}x=A_0x_0^2+A_1x_1^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_0\approx 0.389\\A_1\approx 0.278\end{cases}$$

故$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x\approx 0.389f(0.821)+0.278f(0.290)$

用两点Gauss求积公式计算$\int_0^1(x-\dfrac{1}{2})^4\mathrm{d}x$：

记$t=2x-1$, 则原式$=\dfrac{1}{32}\int_{-1}^1 t^4\mathrm{d}x$

记$f(t)=t^4$, 原式$\approx\dfrac{1}{32}[f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+f(\dfrac{1}{\sqrt{3}})]=\dfrac{1}{144}$

一阶常微分方程数值解

$y'(x)=f(x,y),y(x_0)=y_0,$ 求一系列特定$x(x_1,\dots,x_n)$对应的$y(y_1,\dots,y_n)$
注意：$y''(x)=f_1+y'(x)f_2=f_1+f(x,y)f_2$

局部截断误差：$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}\quad(y_{n+1}$中的$y_n$一律替换为$y(x_n))$
若某种算法的任意一步误差均满足$\mathrm{O}(h^p)$, 称其具有$p-1$阶精度

假设初始条件中存在误差$E_0=y_0-\overline{y_0}$, 后续误差$E_n=y_n-\overline{y_n}$
取$y'=\lambda y$, 若$\exists h$, 使$|E_{n+1}|\le|E_n|$, 则算法**绝对稳定**; 使算法稳定的所有h构成**绝对稳定区域**

显式Euler法：$y'(x_n)\approx\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\Rightarrow y_{n+1}\approx y_n+hf(x_n,y_n)$
$T_{n+1}=\dfrac{y''(x_n)}{2}h^2+\mathrm{O}(h^3)$, 具有1阶精度

隐式Euler法：$y_{n+1}\approx y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$
令$\begin{cases}y_{n+1}^0=y_n+hf(x_n,y_n)\quad(\text{显式})\\ y_{n+1}^{k+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}^k)\quad(\text{隐式})\end{cases}$, k足够大时, 认为$y_{n+1}\approx y_{n+1}^k$
$T_{n+1}=-\dfrac{y'''(x_n)}{12}h^3+\mathrm{O}(h^4)$, 具有2阶精度

梯形Euler法：$y_{n+1}\approx y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$
$T_{n+1}=-\dfrac{y'''(x_n)}{12}h^3+\mathrm{O}(h^4)$, 具有2阶精度

中点Euler法：$y_{n+1}\approx y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)\quad$(不是单步Euler法)

改进Euler法(预测 − 校正法)：$\overline{y_{n+1}}=y_n+hf(x_n,y_n)\quad$(显式)
$y_{n+1}\approx y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\overline{y_{n+1}})]\quad$(梯形)
类似梯形Euler法, 具有2阶精度

$y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$,求迭代法$\overline{y_{n+1}}=y_n+hf(x_n,y_n), y_{n+1}=y_n+h[\frac{1}{3}f(x_n,y_n)+\frac{2}{3}f(x_{n+1},\overline{y_{n+1}})]$的精度：

$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h[\frac{1}{3}f(x_n,y(x_n))+\frac{2}{3}f(x_{n+1},\overline{y_{n+1}})]$

$=y(x_n+h)-y(x_n)-h[\frac{1}{3}y'(x_n)+\frac{2}{3}f(x_n+h,\overline{y_{n+1}})]$

其中$y(x_n+h)=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2}h^2+O(h^3)\quad$(泰勒展开)

$\Rightarrow \overline{y_{n+1}}=y(x_n+h)+\frac{y''(x_n)}{2}h^2+O(h^3)$

故$T_{n+1}=y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2}h^2+O(h^3)-h[\frac{1}{3}y'(x_n)+\frac{2}{3}y'(x_n+h)+\frac{2}{3}O(h^2)f_2(x_n+h,y(x_n+h))]$

其中$y'(x_n+h)=y'(x_n)+y''(x_n)h+O(h^2)$

故$T_{n+1}=\frac{y''(x_n)}{2}h^2+O(h^3)-\frac{2}{3}h[y''(x_n)h+O(h^2)]=-\frac{y''(x_n)}{6}h^2+O(h^3)$

故迭代法有1阶精度

有微分方程$y'=-20y$,求迭代式$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$绝对稳定区域：

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[-20y_n-20(y_n-20hy_n)]=(1-20h+200h^2)y_n$

假设第n步存在误差$E_n=y_n-\overline{y_n}$,

则$E_{n+1}=y_{n+1}-\overline{y_{n+1}}=(1-20h+200h^2)E_n$

$|E_{n+1}|\le|E_n|\Rightarrow|1-20h+200h^2|\le 1\Rightarrow h\in[0,\frac{1}{10}]$

数理统计

统计量

$$样本方差：S^2=\frac{1}{\textbf{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{\textbf{n-1}}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$$

$$样本k阶原点矩：A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\quad 样本k阶中心矩：B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

$$注意：B_2=\frac{n-1}{n}S^2=A_2-A_1^2$$

$$E\overline{X}=EX\quad D\overline{X}=\frac{DX}{n}\quad ES^2=DX$$

点估计

$$矩估计：\begin{cases}EX=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\\ EX^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$$

极大似然估计：

$$离散型：L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)\quad(n为样本个数)$$

$$连续型：L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

两种估计均满足$\hat{\mu}=\overline{X}$(无偏), $\hat{\sigma^2}=B_2$(有偏)

有总体X和简单样本$\{X_n\}, f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}, \theta>-1$.分别求$\theta$的矩估计量和极大似然估计量：

矩估计：

$$\nu_1=EX=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}\quad A_1=\overline{X}$$

故$\dfrac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

极大似然估计：

$$L(\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^n X_i^\theta\Rightarrow\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln X_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\hat{\theta})}{\mathrm{d}\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i}$$

区间估计

待估参数	条件	统计量	置信区间
μ	σ已知	$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$	$-u_{\alpha/2}<U<u_{\alpha/2}$
μ		$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$	$-t_{\alpha/2}(n-1)<T<t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2		$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<T<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$-u_{\alpha/2}<U<u_{\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}S_w}\sim t(n_1+n_2-2)$	$-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)<T<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

假设检验

参数取值假设检验步骤：

1.根据待估参数和样本确定假设H_0, 并确定一个显著性水平α

2.根据待估参数的类型和所给条件, 构造合适的统计量Y

3.根据Y理论上应当符合的分布, 确定接受H_0的条件

4.将假设中规定的参数值代入Y, 根据求出的值判断是否接受H_0

α越小, 拒绝H_0越有说服力

拒绝H_0但H_0为真为第一类错误, 接受H_0但H_0为假为第二类错误

α就是犯第一类错误的概率, 犯第二类错误的概率与样本容量有关

假设中的参数	条件	统计量	理论上符合的分布
μ	σ已知	$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu')}{\sigma}$	$N(0,1)$
μ		$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu')}{S}$	$t(n-1)$
σ^2		$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma'^2}$	$\chi^2(n-1)$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1'+\mu_2'}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1'+\mu_2'}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}S_w}$	$t(n_1+n_2-2)$

中心极限定理：$S_n\overset{近似}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

H_0	**接受H_0的条件**
$\theta=\theta_0$	$Y_{1-\alpha/2}<Y<Y_{\alpha/2}$
$\theta>\theta_0$	$Y>Y_{1-\alpha}$
$\theta<\theta_0$	$Y<Y_\alpha$

- **如果样本表明$\theta>\theta_0$，应当令$H_0:\theta\le\theta_0$,并尝试拒绝H_0**（通常Y_α和$Y_{1-\alpha}$一正一负，如果Y为正，那么一定应当和Y_α比）

100人服用某种药物, 60人治愈; 对照组100人不服药, 有50人治愈, 能否认为这种药有效?$(\alpha=0.05)$

设治疗的成功率为p, 记100人中被治愈的人数为X

由中心极限定理知：$X\sim N(100n,100(p-p^2)^2)$

$H_0:p\le 0.5$

$$U=\frac{\overline{X}-100p'}{\sqrt{100(p'-p'^2)^2}}=2\quad(p'=0.5,\overline{X}=60)$$

$u_\alpha\approx 1.645$

$U<u_\alpha$不成立 $\Rightarrow$ 不接受H_0 $\Rightarrow p>0.5\Rightarrow$ 认为这种药有效

测得第一批学生的身高为$140,138,143,142,144,137,141$; 第二批学生的身高为$135,140,142,136,138,140$.两批学生身高均符合正态分布, 且方差相同. 能否认为第一批学生的身高高于第二批学生?$(\alpha=0.05)$

令X表示第一批中某个学生的身高, Y表示第二批中某个学生的身高, 其期望分别为μ_1,μ_2

$\overline{X}\approx 140,71,\overline{Y}=138.5\Rightarrow\overline{X}>\overline{Y}\quad$ 故$H_0:\mu_1-\mu_2\le 0$

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}S_w}}\approx 1.53$$

$t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.05}(11)\approx 1.80$

$T\le t_\alpha\Rightarrow$ 接受$H_0\Rightarrow$ 不认为第一批学生的身高高于第二批学生