座位号________ 专业________ 学院________ 学号 姓名________

（密封线内不答题） 密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何 》(A)试卷(16-17年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式：闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

一、 (15分) 填空题.

1. 设$\alpha_1=(2,-1,0,5)$, $\alpha_2=(-4,-2,3,0)$, $\alpha_3=(-1,0,1,k)$, $\alpha_4=(-1,0,2,1)$, 则当$k=$ ___ $-\frac{5}{13}$ ___时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

2. 设A为m阶方阵, B为n阶方阵, $|A|=a, |B|=b$, ,分块矩阵$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$, 则$|C|=$ $\underline{(-1)^{mn}ab}$.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n\geq 2$, 则$A^n-2A^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 此题难，大多数元素正确时酌情给分

4.设4阶方阵$A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, $B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$,其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为4维列向量,且$|A|=4, |B|=1$, 则$|A+B|=$ $\underline{40}$.

5. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$, 则二次型$f$为 正定时$k$的取值范围是 $\underline{-1<k<0}$.只算出-1<k 或 k<0 酌情给分

二、 (15分) 选择题:

1. 设A是2阶可逆方阵, 若$|\lambda A|=4|A|$, 则必有(D).

$(A)\lambda=\pm 1$, $(B)\lambda=4$, $(C)\lambda=\pm\sqrt{2}$, $(D)\lambda=\pm 2$

2. 矩阵A一个r级子式不为零, 且有一个$r+1$级子式等于零, 则$r(A)$一定(A).

$(A)\ \geq r$, $(B)\ <r$, $(C)\ =r$, $(D)\ =r+1$.

3. 设A为n可逆方阵, λ为A的一个特征值, 则A^*的特征值之一是(B).

$(A)\,\lambda^{-1}|A|^n,\qquad (B)\,\lambda^{-1}|A|,,\qquad (C)\,\lambda|A|,,\qquad (D)\,\lambda|A|^n,.$

4. 已知β_1,β_2是非齐次方程组$AX=b$的两个不同的解, α_1,α_2是齐次方程组$AX=0$的基础解系, 设k_1,k_2为数域P中的任意数, 则$AX=b$的通解为(B).

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$, (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$,

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$, (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$.

5. m阶可逆方阵P和n阶可逆方阵Q, 使得$A=PBQ$是A与B (C)的充分必要条件.

(A) 相似 (B) 合同 (C) 等价 (D) 正交相似

三、 (8分)计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (+4分)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \qquad (+4分)$$

四、 (15分)实数λ 取何值时，线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多个解? 若有唯一解求出解; 有无穷多个解时求出通解.

解

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1 & 1\\ \lambda+2 & \lambda & 1\\ \lambda+2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$ （+5分）

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

（1）当$D\neq 0$, 即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组有唯一解。

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda & 1\\ -2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=-2(\lambda-1)^2，D_2=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=-2(\lambda-1)^2$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -2\\ 1 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2(\lambda-1)^2,\quad 得\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-2}{\lambda+2}\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-2}{\lambda+2}\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-2}{\lambda+2}\end{cases}$$

此时的唯一解是:$(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{-2}{\lambda+2},\dfrac{-2}{\lambda+2},\dfrac{-2}{\lambda+2}\right)$ （+3分）

（2）当λ=-2时，

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right)$$

$r(A)<r(\tilde{A})$, 此时方程组无解 （+3分）

（3）当λ=1时，

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(\tilde{A})=1<3$, 此时方程组有无穷多个解。

由$x_1+x_2+x_3=-2$, 得$\begin{cases}x_1=-k_1-k_2-2\\ x_2=k_1\\ x_3=k_2\end{cases}$

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, k_1,k_2是任意常数 （+4分）

五、 (15 分) 在$\mathbb{R}^3$中, 求由基$\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,-1)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,1)$到基$\eta_1 = (1,1,0)$, $\eta_2 = (2,1,3)$, $\eta_3 = (0,1,-1)$的过渡矩阵, 并求向量$\xi = (3,5,0)$在基η_1, η_2, η_3下的坐标.

$$\left(\varepsilon_1^T \quad \varepsilon_2^T \quad \varepsilon_3^T \mid \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

过渡矩阵$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (8分)

令$\xi = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3$

$$\tilde{A} = \left(\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T \mid \xi^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ （7分）

得$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

ξ在η_1, η_2, η_3下的坐标是$(1,1,3)$

此题有不同的计算方法

六、 (10分) 求过点$(1,0,-1)$, 且平行于向量$\alpha = 2i + j + k$和$\beta = i - j$的平面方程.

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$ (+7分)

平面的点法式方程: $(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0$

即: $x+y-3z-4=0$ (+3分)

七、 (15 分) 设3阶实对称矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵A的特征值、特征向量; (2) 求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角形.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-6 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-7)^2(\lambda+2) \overset{令}{=} 0$$ (+5分)

A的特征值: $\lambda=-2$, $\lambda=7$ (2重)

对$\lambda=-2$:

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 得对应$\lambda=-2$的特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

对$\lambda=7$: (+5分)

$$7E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, 得对应$\lambda=7$的特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

对特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}$ 作施密特正交化：

（+3分）

$$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}-\frac{18}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

对 α_1，η_2，η_3 单位化：$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\|\eta_2\|}\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{\|\eta_3\|}\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

得到正交矩阵 $T=(\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，

正交矩阵T的答案有无穷多种，改卷时要注意

使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

（+2分）

八、(7 分) 证明: 与齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系等价的线性无关的向量组仍然是该齐次线性方程组的基础解系.

证：设 $AX=0$ 的基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，其中 $r=r(A)$.

又设线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 等价。

由于两个向量组均线性无关，所以 $s=n-r$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 可由基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表示，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 每个向量都是 $AX=0$ 的解。

对于 $AX=0$ 的任一解 η，η 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表示，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性表示，则 η 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性表示，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关，所以由基础解系的定义知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 也是基础解系。