

Microéconomie 2

Elias Bouacida Antoine Terracol

2021-12-01

Table des matières

1	Microéconomie 2	5
1.1	Thèmes	5
1.2	Bibliographie	5
1.3	Plan du cours	6
2	Rappels : le marché en concurrence pure et parfaite	7
2.1	Les hypothèses de la concurrence pure et parfaite (CPP)	7
2.2	Le producteur	8
2.3	L'équilibre de marché	12
2.4	Perception par les agents isolés	14
3	Le monopole	17
3.1	Recette et recette marginale	18
3.2	Décision de production du monopole	21
3.3	Régulation du monopole	29
3.4	Le monopole naturel	33
3.5	Le monopole discriminant	36
4	Oligopoles	41
4.1	Duopole à la Cournot	42
4.2	Duopole à la Stackelberg	48
4.3	Cartels et collusions	50
4.4	Oligopoles	53
5	Exercices	57
5.1	Concurrence pure et parfaite	57
5.2	Exercices sur le comportement monopole	63
5.3	Le monopole naturel	72
5.4	Politique tarifaire du monopole	85
5.5	Oligopoles	93
A	Résolution des problèmes	109
B	Calcul des surplus	111

Chapitre 1

Microéconomie 2

Cours de microéconomie 2 en licence 2 à l'université Paris 8, donné par Antoine Terracol et Elias Bouacida.

Ce dépôt contient les notes de cours ainsi que les corrigés des exercices.

1.1 Thèmes

Les principaux thèmes abordés dans ce cours sont les suivants :

- structures de marché
- pouvoir de marché
- principes de tarification
- comportements stratégiques
- problèmes d'information

L'idée générale est de dépasser le cadre de la concurrence pure et parfaite et de se rapprocher un peu du *monde réel* en levant certaines hypothèses de la concurrence pure et parfaite.

1.2 Bibliographie

Le cours ne nécessite pas de se référer à un manuel. Néanmoins, pour ceux qui souhaitent des éclairages différents sur les notions abordés, voici quelques références utiles :

- Varian and Thiry [2015] *Introduction à la microéconomie*
- Varian et al. [2008] *Analyse Microéconomique*
- Pindyck et al. [2012] *Microéconomie*
- Jeleva and Etner [2014] *Microéconomie*

Et enfin une référence avancée, pour ceux qui cherchent les fondements mathématiques (en anglais) :

— Mas-Colell et al. [1995] *Microeconomic Theory*

1.3 Plan du cours

1. Rappels sur la concurrence pure et parfaite
2. Monopoles
 - Monopoles simples
 - Monopoles discriminants
 - Pouvoir de marché et principes de tarification
3. Oligopoles
 - Duopoles à la Cournot
 - Duopoles à la Stackelberg
 - Collusion

Chapitre 2

Rappels : le marché en concurrence pure et parfaite

2.1 Les hypothèses de la concurrence pure et parfaite (CPP)

Il y a 5 hypothèses qui définissent la concurrence pure et parfaite :

1. Atomicité des agents
2. Information parfaite
3. Mobilité parfaite des facteurs de production
4. Homogénéité des biens
5. Libre entrée et sortie du marché

Hypothèse 2.1 (Atomicité des agents). L'hypothèse d'atomicité des agents implique que personne n'a d'influence *individuellement* sur les prix. En d'autres termes, chaque acteur est petit face au marché et considère le prix du marché comme une *donnée* qu'il ne peut pas influencer. On dit que les agents sont *price-taker* sur le marché.

Hypothèse 2.2 (Information parfaite). L'hypothèse d'information parfaite signifie que tous les acteurs disposent de toutes les informations pertinentes pour prendre leurs décisions. Il n'y a, par exemple, pas de coût de recherche d'information.

Hypothèse 2.3 (Mobilité parfaite des facteurs de production). L'hypothèse de mobilité parfaite des facteurs de production garantit l'homogénéité spatiale du prix des facteurs. Les facteurs de production se déplacent où ils sont le mieux rémunérés. Les différences de coûts entre producteurs ne peuvent donc être dus

qu'au différence technologique entre ceux-ci, et non à une différence de coût des facteurs de production.

Hypothèse 2.4 (Homogénéité des biens). L'homogénéité des biens signifie que tous les biens vendus sur un marché sont parfaitement substituables. Sur un marché donné, tous les biens ont la même qualité. Le consommateur est donc indifférent entre tous les biens vendus. Il n'y a aussi pas d'effet des marques.

Hypothèse 2.5 (Libre entrée et sortie du marché). L'hypothèse de libre entrée et sortie du marché signifie qu'il n'y a pas de barrière à l'entrée dans le marché. Concrètement, cela implique qu'il est impossible de faire du bénéfice sur la dernière unité vendue en concurrence pure et parfaite, sinon un concurrent pourrait entrer sur le marché et faire des bénéfices.

La violation d'une de ces hypothèses nous fait sortir du cadre de la CPP et confère un *pouvoir de marché* aux producteurs en place.

2.2 Le producteur

2.2.1 Fonctions de coût

En général, un producteur est caractérisé par une fonction de production, c'est-à-dire une fonction qui donne les quantités produites de biens en fonction des facteurs de productions. À l'aide de cette fonction de production, il est possible de construire une fonction de coût.

Définition 2.1 (Fonction de coût total). La fonction de coût total, notée C ou CT donne le coût total de production de q unités de bien. Elle peut se décomposer en un *coût fixe* CF (qui ne dépend pas de q) et un *coût variable* CV qui dépend de q :

$$CT(q) = CF + CV(q)$$

Définition 2.2 (Coût moyen). Le coût moyen est le coût de production moyen d'une unité, noté C_M :

$$C_M(q) = \frac{CT(q)}{q}$$

On peut décomposer le coût moyen en un *coût fixe moyen* CFM :

$$CFM(q) = \frac{CF}{q}$$

Et un *coût variable moyen* CVM :

$$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q}$$

On a alors :

$$C_M(q) = CFM(q) + CVM(q) \quad (2.1)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 C_M(q) &= \frac{CT(q)}{q} \\
 &= \frac{CF + CV(q)}{q} \\
 &= \frac{CF}{q} + \frac{CV(q)}{q} \\
 &= CFM(q) + CVM(q)
 \end{aligned}$$

□

Définition 2.3 (Coût marginal). Le coût marginal, noté C_m , est l'augmentation du coût lié à la production d'une unité supplémentaire :

$$C_m(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{CT(q + \Delta q) - CT(q)}{\Delta q} = CT'(q)$$

Autrement dit, le coût marginal est la variation de coût total quand la production varie "un tout petit peu" (infiniment peu en fait).

Propriétés 2.1 (Forme de courbes de coût). *Le coût marginal diminue d'abord, puis augmente par la suite, car la productivité marginale est d'abord croissante, puis décroissante, en général.*

Le coût variable moyen est d'abord décroissant, puis croissant, pour la même raison.

Le coût fixe moyen est toujours décroissant, car le coût fixe ne dépend pas des quantités produites et $CFM = CF/q$ est donc une fonction inverse.

La décomposition donnée par l'équation (2.1) implique que le coût moyen est d'abord décroissant, puis croissant.

Propriétés 2.2 (Relation entre les coûts). *Lorsque le coût marginal est inférieur au coût (variable) moyen ($C_m(q) < C_M(q)$), le coût moyen diminue. Lorsque le coût marginal est supérieur au coût (variable) moyen ($C_m(q) > C_M(q)$), le coût moyen augmente. La courbe de coût marginal coupe donc la courbe de coût (variable) moyen à son minimum.*

L'intuition de ce résultat est simple : si le coût marginal d'une unité supplémentaire est supérieur au coût moyen, alors l'unité supplémentaire produite sera plus chère que la moyenne du coût des unités précédentes produites, augmentant de ce fait le coût moyen.

Démonstration. En son minimum, le coût moyen est tel que $C'_M(q) = 0$.

$$\begin{aligned}
 C'_M(q) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{CT(q)}{q} \right)' &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{CT'(q)q - CT(q)}{q^2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{C_m(q)q - CT(q)}{q^2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow C_m(q)q - CT(q) &= 0 \\
 \Leftrightarrow C_m(q) &= \frac{CT(q)}{q} \\
 \Leftrightarrow C_m(q) &= C_M(q)
 \end{aligned}$$

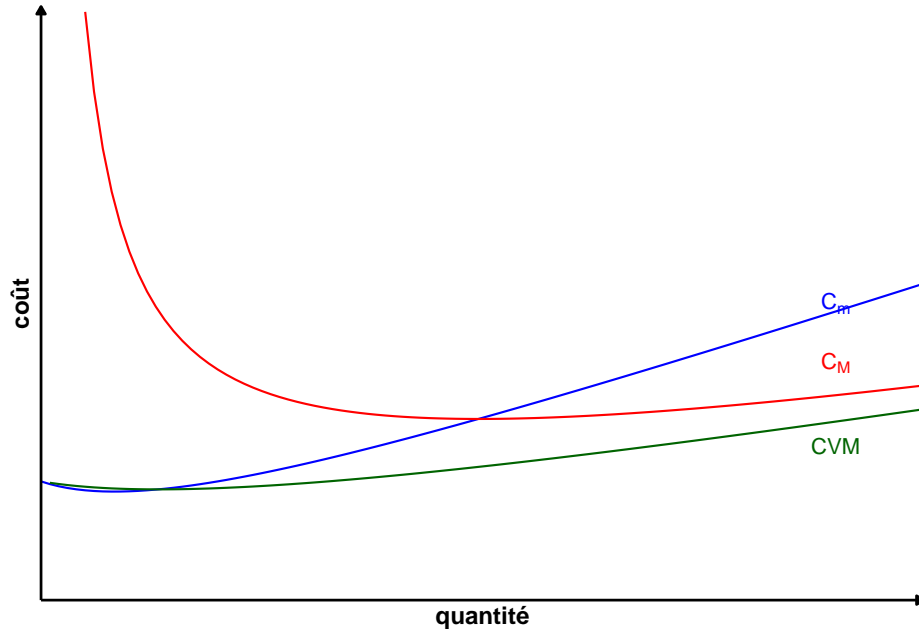
CQFD. □

FIGURE 2.1 – Exemples de fonctions de coût.

2.2.2 L'offre du producteur

Définition 2.4 (Recette totale). La recette totale, notée RT , est le produit de la vente des unités de biens. Pour q unités de bien vendus, le producteur gagne $RT(q)$, autrement dit, c'est le chiffre d'affaire du producteur (pour ce bien).

Définition 2.5 (Recette marginale). La recette marginale, notée R_m est la recette rapportée par une unité supplémentaire de bien.

$$R_m(q) = RT'(q)$$

Définition 2.6 (Profit). Le profit, noté π est la différence entre la recette totale et le coût total de production :

$$\pi(q) = RT(q) - CT(q)$$

Le producteur choisit la quantité produite de manière à maximiser son profit.

Définition 2.7 (Programme du producteur). Le programme du producteur est :

$$\max_q \pi(q) = \max_q RT(q) - CT(q)$$

Théorème 2.1 (Offre du producteur). *En concurrence pure et parfaite, le programme du producteur est tel que la quantité produite q égalise coût marginal et recette marginale. À l'optimum :*

$$R_m(q) = c_m(q) \quad (2.2)$$

Démonstration. Le programme du producteur est de maximiser son profit :

$$\max_q \pi(q) = \max_q RT(q) - CT(q)$$

À l'optimum, et à condition que les fonctions de coût et de recette soient dérivables (ce qui sera toujours le cas ici), cela signifie que l'on doit avoir la condition du premier ordre :

$$\pi'(q) = 0 \Leftrightarrow RT'(q) - CT'(q) = 0 \Leftrightarrow R_m(q) = C_m(q)$$

On obtient donc bien l'équation (2.2) □

L'intuition pour ce résultat est assez simple. Si on a $R_m(q) > C_m(q)$, alors augmenter la quantité produite rapporte plus que cela ne coûte, et donc augmente le profit. À l'inverse, si $R_m(q) < C_m(q)$, diminuer la quantité produite diminue plus le coût que la recette du producteur, et donc augmente le profit. La situation s'équilibre donc pour $R_m(q) = C_m(q)$. Si cette égalité n'est pas vérifiée, le producteur peut en effet augmenter son profit en jouant sur la quantité produite.

En concurrence pure et parfaite, le producteur est *price-taker*. Le prix sur le marché est unique et donné, il vaut p et ne dépend pas des quantités produites par un producteur. Le producteur vend son bien au prix défini par le marché. La recette totale devient donc $RT(q) = p \times q$, avec p fixé. La recette marginale est donc $R_m(q) = RT'(q) = p$. En réécrivant l'équation (2.2), on obtient en concurrence pure et parfaite :

$$p = C_m(q)$$

Propriétés 2.3 (Courbe d'offre en CPP). *En concurrence pure et parfaite, la courbe d'offre du producteur est la courbe de coût marginal.*

$$p = C_m(q)$$

Le profit du producteur s'écrit alors :

$$\pi(q) = RT(q) - CT(q) = pq - CT(q) = pq - C_M(q)q = q(p - C_M(q))$$

Autrement dit, le profit d'un producteur en concurrence pure et parfaite est la différence entre le prix de vente et le coût moyen de production multiplié par le nombre d'unités vendues. Si ce prix est inférieur au coût moyen de toutes les unités vendues, le profit sera négatif.

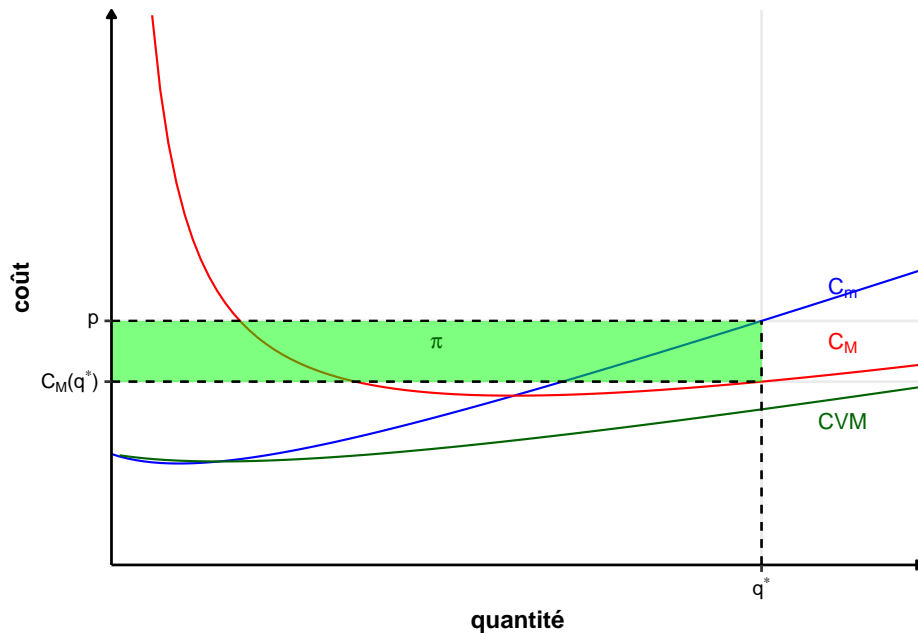


FIGURE 2.2 – Profit d'un producteur en concurrence pure et parfaite.

2.3 L'équilibre de marché

Définition 2.8 (Demande agrégée (D)). La *demande agrégée* (D) est la somme des demandes individuelles pour chaque niveau de prix.

Définition 2.9 (Offre agrégée (S)). L'*offre agrégée* (S) est la somme des offres individuelles pour chaque niveau de prix.

L'équilibre de marché se fait à l'intersection entre S et D (quand $S=D$).

La courbe de demande correspond à la suite des prix de réserve des individus, c'est-à-dire aux prix maximal que chaque individu est prêt à payer pour obtenir une unité *supplémentaire* du bien.

La courbe d'offre correspond à la série des coûts marginaux de production, c'est-à-dire les prix minimaux auxquels les producteurs souhaitent vendre une unité supplémentaire du bien.

La vente de toutes les unités jusqu'à la quantité d'équilibre q^* au prix p^* procure un *surplus* aux agents économiques.

Définition 2.10 (Surplus des consommateurs). Le surplus des consommateurs est la somme des différences entre le prix de réserve des consommateurs et le prix payé par le consommateur pour obtenir les biens. Sur le graphique quantité prix (q, p) , c'est l'aire comprise entre la courbe de demande et la droite horizontale

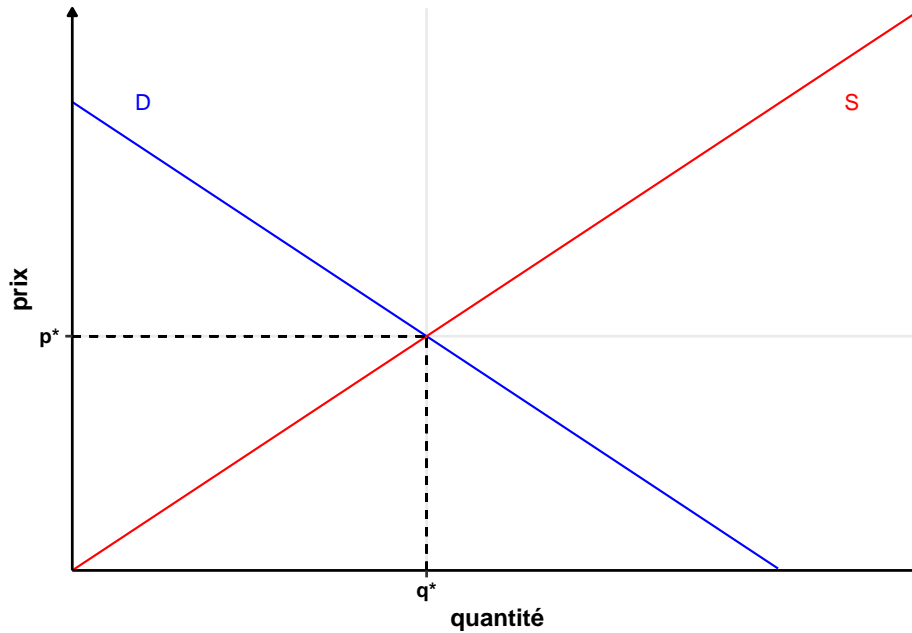


FIGURE 2.3 – Equilibre de marché.

dont l'ordonnée est le prix d'échange. Formellement :

$$S_c = \int_0^{q^*} P(q) - p^* dq$$

Remarque. Seule la dernière unité de bien achetée par les consommateur l'est au prix de réserve. Il n'y a pas de gain à l'échange pour cette unité, mais pour toutes les autres, il y en a, ce qui explique pourquoi il y a un surplus à l'échange, et pourquoi celui-ci à lieu.

Définition 2.11 (Surplus des producteurs). Le surplus des producteurs est la somme des différences entre le prix auquel les producteurs vendent le bien et la courbe de coût marginal, qui représente le coût d'une unité supplémentaire produite. Sur le graphique quantité prix (q, p) , c'est l'aire compris entre le prix de vente et la courbe de coût marginal. Formellement :

$$S_p = \int_0^{q^*} p^* - S(q) dq$$

En pratique, on utilisera jamais la formule avec des intégrales, mais on calculera l'aire du triangle (ou trapèze) concerné.

Propriétés 2.4 (Propriétés de l'équilibre en concurrence pure et parfaite). *L'équilibre en CPP est celui qui **maximise** le surplus total. Tout autre couple*

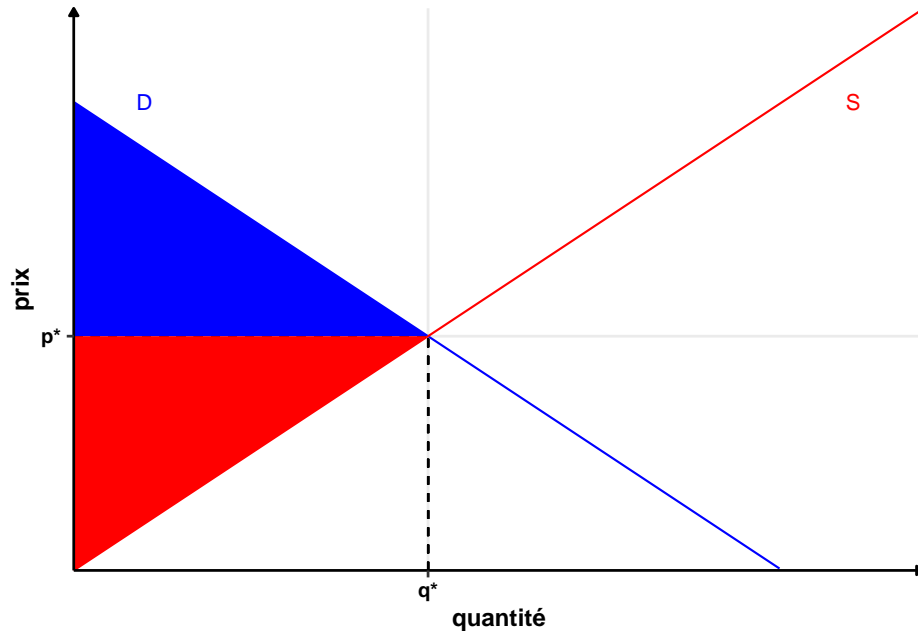


FIGURE 2.4 – Surplus des consommateurs et des producteurs.

prix/quantité abouti à un surplus total plus faible.

L'équilibre de CPP est Pareto-optimal, i.e., il est impossible d'améliorer la situation d'un agent sans détériorer celle d'un autre. C'est ce qu'on appelle le premier théorème du bien-être.

Ces propriétés font de la CPP une “référence” par rapport à laquelle on peut comparer les résultats des autres structures de marché.

2.4 Perception par les agents isolés

L'hypothèse d'atomicité indique que les agents individuels sont isolés au sein d'un très grand nombre d'autres agents. Ainsi, aucun agent n'a d'influence sur le prix s'il modifie son comportement. Une conséquence directe est que le comportement des autres agents est perçu comme étant infiniment élastique. C'est-à-dire qu'un producteur sait qu'au prix de marché, il pourra vendre toute sa production, mais que s'il pratique un prix même légèrement plus élevé, il ne vendra **rien**. Il perçoit ainsi une demande infiniment élastique au prix, au niveau du prix p^* .

Dans ce graphique, q^* représente la production optimale de ce producteur quand il est seul.

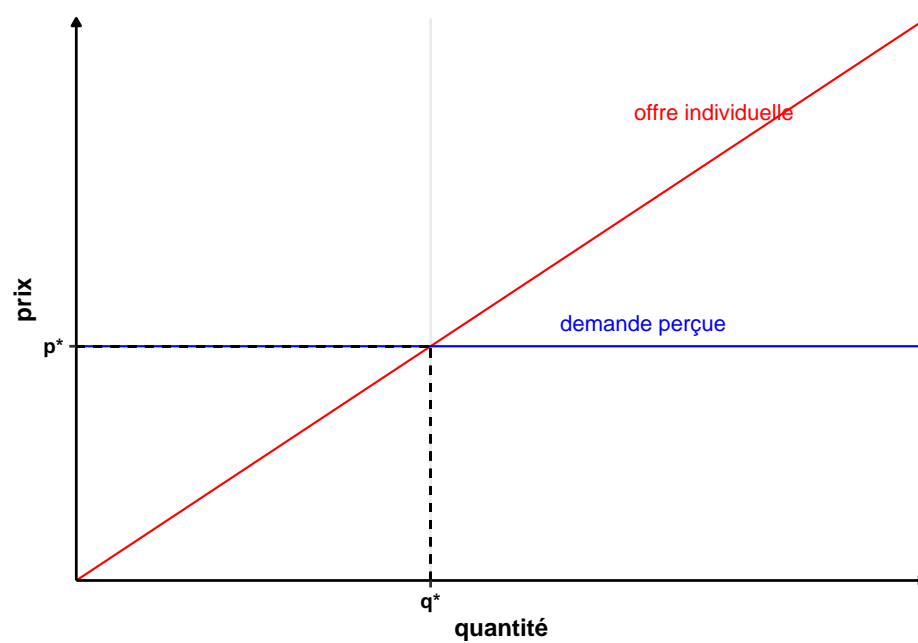


FIGURE 2.5 – Perception de la demande globale par un producteur isolé.

Chapitre 3

Le monopole

Définition 3.1 (Monopole). Un *monopole* est sur un marché donné l'unique entreprise qui produit le bien.

C'est le cas extrême opposé à la concurrence pure et parfaite, du côté du producteur. Il est intéressant à étudier car il nous renseigne sur les principaux aspects du comportement des entreprises dans les cas intermédiaires.

Il y a de nombreuses raisons qui aboutissent à l'existence de monopoles. Les principales sont :

- Légales, à cause de réglementation particulières. C'est ce qu'on appelle en général des professions réglementées, comme les avocats, les bureaux de tabac, les taxis...
- Légales, à cause des brevets sur une technologie données (industrie pharmaceutique...);
- Historique, le premier arrivé;
- Monopoles *naturels* : en présence d'économies d'échelles, produire une quantité donnée revient moins cher avec un seul producteur qu'avec plusieurs. C'est notamment les cas des industries où il faut installer des réseaux (chemins de fer, électricité, téléphone, etc). Plus généralement, les industries avec des coûts fixes / coûts d'entrées très élevées aboutissent à des formes proches du monopole naturel (sidérurgie, automobile...);
- Exclusivité sur la production de certaines matières premières (cuivre au Chili, terres rares en Chine,...);
- Coalitions créant un cartel;
- ...

3.1 Recette et recette marginale

3.1.1 Définition

À la différence du cas de la concurrence pure et parfaite, le monopole perçoit la courbe de demande agrégée, et non plus celle avec une élasticité infinie. Le choix de la quantité qu'il met sur le marché modifie le prix auquel il pourra vendre sa production, et il le sait.

Il va choisir **un** des paramètres du couple $(q, P(q))$, et l'autre en découlera, à travers la demande inverse $P(q)$. Autrement dit, s'il choisit q , $P(q)$ sera déterminé par la demande (inverse). Si, au contraire, il choisit P , q sera déterminé par la demande.

En CPP, la recette totale du producteur individuel était $R(q) = q \cdot P(q^*)$, où q est sa production individuel, q^* la quantité d'équilibre sur le marché (résultat de la production de *toutes* les entreprises présentes sur le marché) et $P(q^*) = p^*$ est le prix d'équilibre.

En monopole, le prix dépend de la production du monopole (ou l'inverse, peu importe) :

$$R(q) = q \cdot P(q)$$

3.1.2 Recette marginale et courbe de demande

Comme la courbe de demande est décroissante (l'élasticité prix de la demande est négative $\varepsilon_{q/p} < 0$), $P(q)$ et q ont une relation inverse. Autrement dit, si q augmente, alors p baisse, et réciproquement.

Cela implique que la recette totale va augmenter ou baisser suivant les propriétés de la courbe de demande.

Quel est le paramètre important de la courbe de demande qui détermine si le revenu R augmente ou diminue (c'est-à-dire si R_m est positive ou négative) ?

$$\begin{aligned} R(q) &= qP(q) \\ R_m(q) &= R'(q) \\ &= (qP(q))' \\ &= P(q) + qP'(q) \\ &= P(q) \left(1 + \frac{q}{P(q)} P'(q) \right) \\ &= P(q) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{q/p}(q)} \right) \end{aligned}$$

Remarque (Élasticité prix de la demande). L'élasticité prix de la demande $\varepsilon_{q/p}$

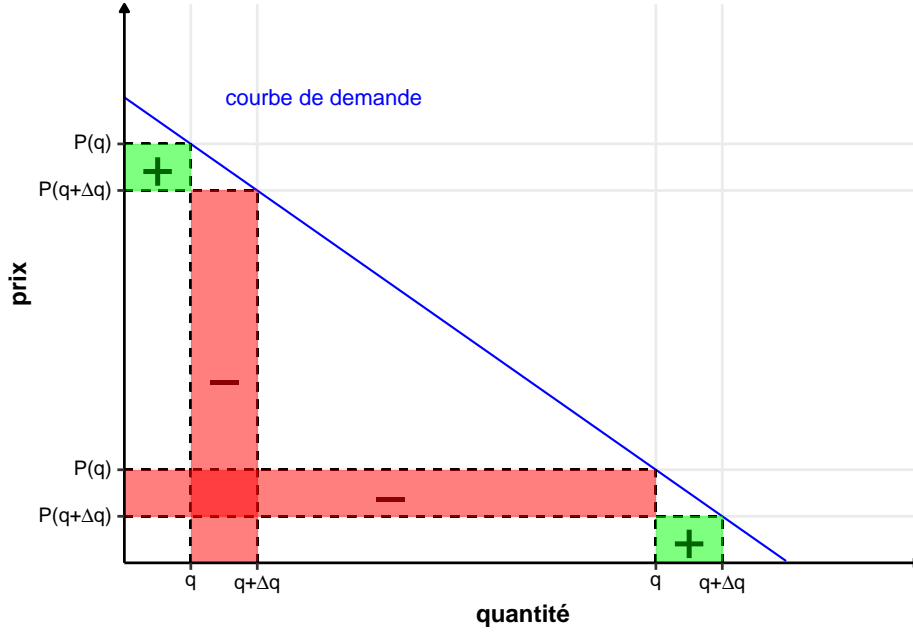


FIGURE 3.1 – Recette marginale d'un monopole.

s'écrit :

$$\varepsilon_{q/p}(p) = \frac{p}{D(p)} D'(p) < 0$$

Où D est la fonction de demande. Elle est toujours négative, car la demande diminue quand le prix augmente. On peut la réécrire à l'aide de la fonction de demande inverse P . Comme D et P sont les fonctions réciproques l'une de l'autre, on a $D(P(q)) = q$. En dérivant à gauche et à droite, on obtient :

$$P'(q)D'(P(q)) = 1$$

On obtient donc :

$$P'(q) = \frac{1}{D'(p)}$$

Et l'élasticité prix de la demande peut aussi s'écrire :

$$\varepsilon_{q/p}(q) = \frac{P(q)}{q} \frac{1}{P'(q)}$$

On peut donc écrire :

$$R_m(q) = P(q) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q)|} \right) \quad (3.1)$$

De l'équation (3.1), on observe que le signe de la recette marginale R_m dépend de l'élasticité prix de la demande.

1. Si la demande est élastique ($|\varepsilon_{q/p}(q)| > 1$), alors $R_m(q) > 0$, donc si la quantité augmente, le revenu augmente.
2. Si la demande est inélastique ($|\varepsilon_{q/p}(q)| < 1$), alors $R_m(q) < 0$, donc si la quantité augmente, le revenu diminue.

Une représentation graphique de l'allure générale est donnée dans la figure 3.2

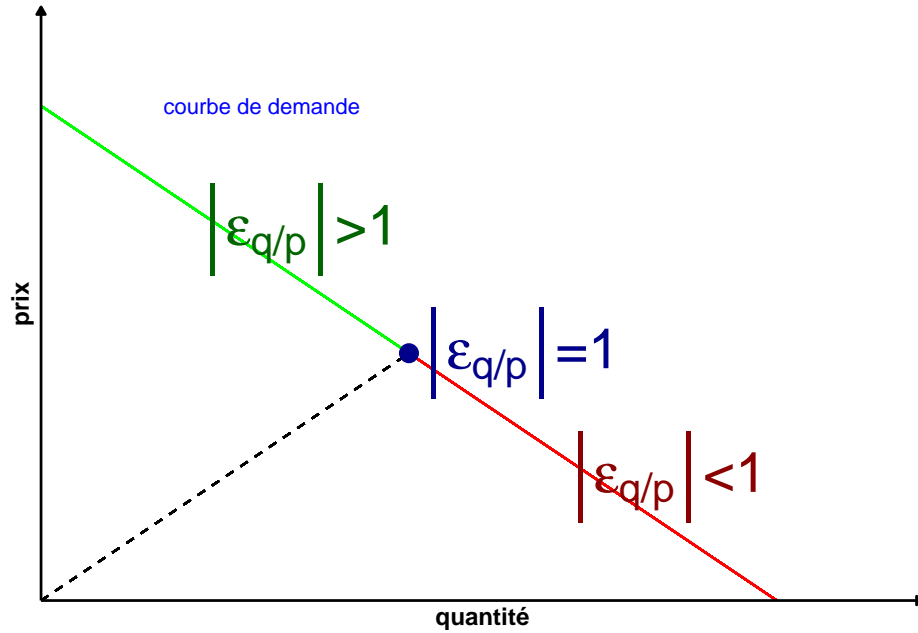


FIGURE 3.2 – La recette marginale est maximale lorsque l'élasticité prix de la demande est égale à -1.

3.1.3 Représentation graphique

La courbe de recette marginale est toujours située en-dessous de la courbe de demande :

$$R_m(q) = P(q) + qP'(q) < P(q)$$

et $P'(q)$ est négative (la demande inverse est décroissante).

3.1.3.1 Exemple avec une courbe de demande linéaire

Prenons maintenant l'exemple d'une courbe de demande inverse linéaire quelconque $P(q) = a - bq$ (a et b sont des paramètres quelconques). On obtient alors $R_m(q) = a - 2bq$ (et $R(q) = aq - bq^2$).

Dans le cas linéaire, le revenu marginal est une droite de pente deux fois plus élevée que la demande, et ayant la même ordonnée à l'origine. La recette marginale divise en deux tout segment horizontal entre l'axe des ordonnées et la courbe de demande inverse. On peut ainsi représenter graphiquement, comme dans la figure 3.3 la demande, la recette marginale et la recette totale.

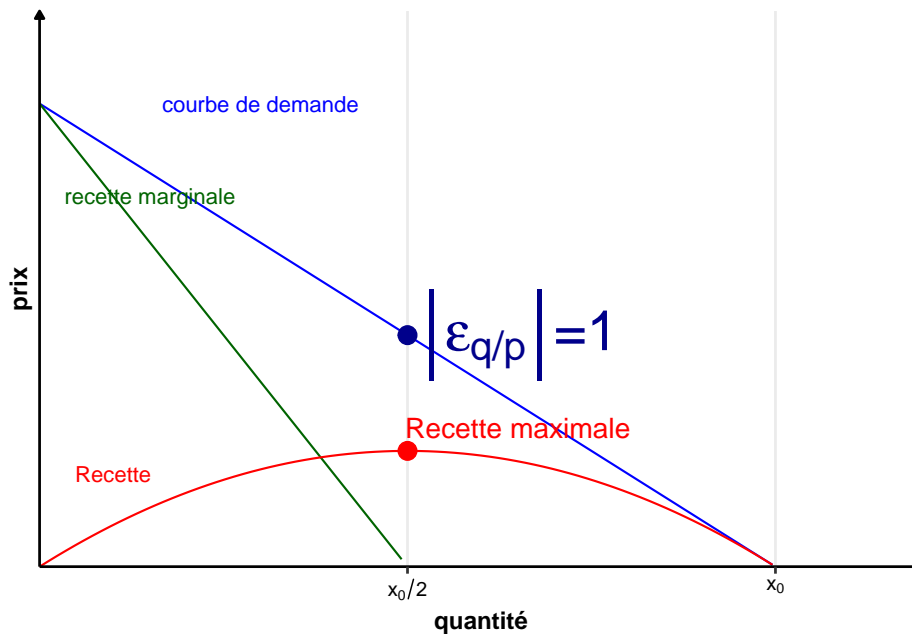


FIGURE 3.3 – Elasticité et recette.

La recette maximale est atteinte lorsque la valeur absolue de l'élasticité prix de la demande est égale à 1 ($|\varepsilon_{q/p}(q)| = 1$).

Sur la figure 3.4, on voit qu'il est possible de calculer la recette totale de deux manières :

1. En utilisant l'aire du trapèze vert (intégrale de la recette marginale entre 0 et la quantité échangée q^*) ;
2. En utilisant l'aire du rectangle rouge ($\pi = p^* q^*$).

Le résultat donne l'égalité d'aire entre le triangle vert et le triangle rouge.

3.2 Décision de production du monopole

3.2.1 Maximisation du profit

Comme dans le cas de la CPP, on suppose que le monopole cherche à maximiser son profit $\pi(q) = R(q) - C(q)$, où $C(q)$ est la fonction de coût (total) du

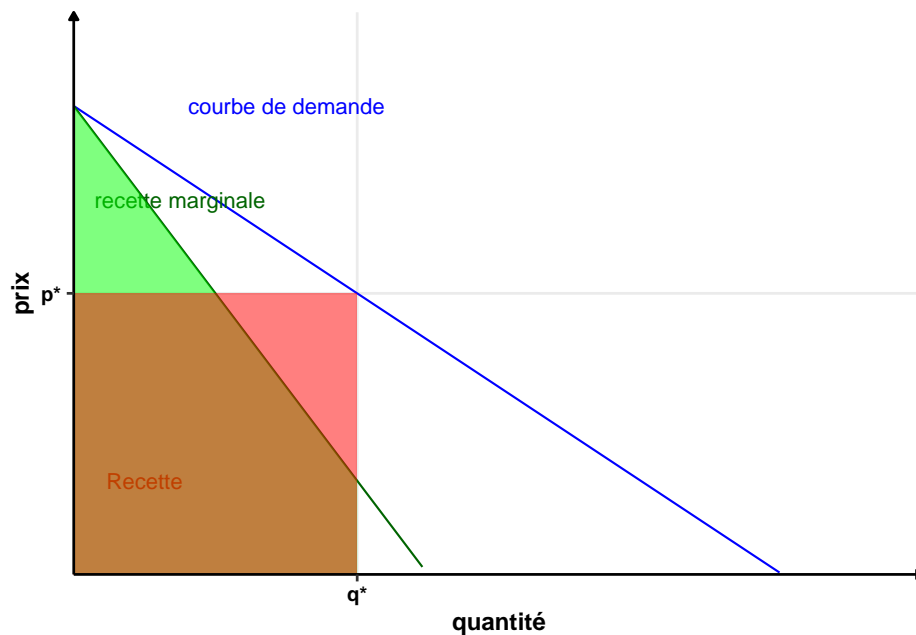


FIGURE 3.4 – Recette maximale.

monopole.

Il y a 2 conditions d'optimalités, les conditions de premier (la dérivée du profit à l'optimum est nulle : $\pi'(q^*) = 0$) et de second ordre (la dérivée seconde du profit à l'optimum est strictement négative $\pi''(q^*) < 0$), ainsi qu'une contrainte, que le profit à l'optimum soit positif ($\pi(q^*) > 0$).

La condition de premier ordre s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned}\pi'(q^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow R'(q^*) - C'(q^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow R_m(q^*) &= C_m(q^*)\end{aligned}$$

À l'optimum, le monopole égalise le coût marginal et le revenu marginal.

La condition du second ordre s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned}\pi''(q^*) &< 0 \\ \Leftrightarrow R'_m(q^*) - C'_m(q^*) &< 0 \\ \Leftrightarrow R'_m(q^*) &< C'_m(q^*)\end{aligned}$$

La dérivée de la recette marginale doit être inférieure à la dérivée du coût marginal. Autrement dit, la recette marginale doit croître moins vite que le coût marginal. Cette condition est en particulier vérifiée si la recette marginale est décroissante et le coût marginal croissant.

Finalement, il faut vérifier que le profit à l'optimum est positif ($\pi(q^*) > 0$). Dans le cas contraire, le marché n'existerait tout simplement pas, car le monopole ne voudrait pas produire le bien.

Théorème 3.1 (Optimum du du monopole). *À l'optimum, le monopole égalise le coût marginal et le revenu marginal. Ce n'est un maximum que si la dérivée de la recette marginale est inférieure à la dérivée du coût marginal et que le profit est positif.*

$$R_m(q^*) = C_m(q^*) \quad (3.2)$$

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*) \quad (3.3)$$

$$\pi(q^*) > 0 \quad (3.4)$$

On peut comprendre graphiquement pourquoi il faut que le coût marginal et la recette marginale soient égaux (figure 3.5). Si le monopole produit plus que q_m^* , alors chaque unité produite en plus lui coûte plus chère qu'elle ne lui rapporte. A l'inverse, s'il produit moins, produire des unités en plus lui rapporterait plus que cela ne lui coûte.

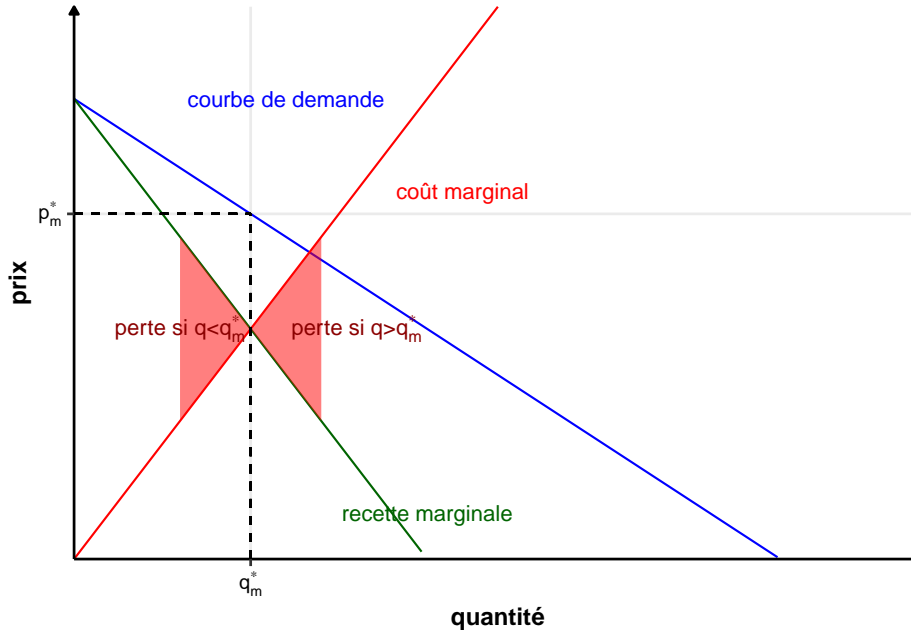


FIGURE 3.5 – Production optimale du monopole.

Le prix est lu et obtenu sur la courbe de **demande**.

Exemple 3.1 (Maximisation du monopole). Prenons un monopole avec une fonction de coût $C(q) = 50 + q^2$. Le monopole fait face à une demande inverse $P(q) = 40 - q$.

Le coût marginal est :

$$C_m(q) = C'(q) = 2q$$

La recette totale est :

$$R(q) = qP(q) = q(40 - q) = 40q - q^2$$

La recette marginale est donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 40 - 2q$$

Le profit vaut :

$$\pi(q) = R(q) - C(q)$$

Conformément à l'équation (3.2), il est maximal lorsque :

$$\begin{aligned} R_m(q^*) &= C_m(q^*) \\ \Leftrightarrow 40 - 2q &= 2q \\ \Leftrightarrow q^* &= 10 \end{aligned}$$

La condition de second ordre de l'équation (3.3) est bien vérifiée, car $-2 < 2$.

Le prix de vente vaut :

$$P(q^*) = P(10) = 40 - 10 = 30$$

La recette vaut 300, le coût 150. On a donc un profit de **150**, qui est bien positif (condition de l'équation (3.4)).

3.2.2 Propriétés de la solution de la maximisation du monopole

On avait dans l'équation (3.1) :

$$R_m(q) = P(q) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q)|} \right)$$

Comme à l'optimum, d'après l'équation (3.2), on doit avoir $R_m(q^*) = C_m(q^*)$, on a :

$$R_m(q^*) = P(q^*) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \right) = C_m(q^*)$$

On observe ici un lien avec la solution en CPP. En effet, en CPP, l'élasticité de la demande au prix est perçue comme infinie, on aura donc bien $P(q^*) = C_m(q^*)$, la solution obtenue en CPP. Dès lors que l'élasticité de la demande au prix n'est plus infinie en revanche, on obtient :

$$P(q^*) = \frac{C_m(q^*)}{1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|}} > C_m(q^*)$$

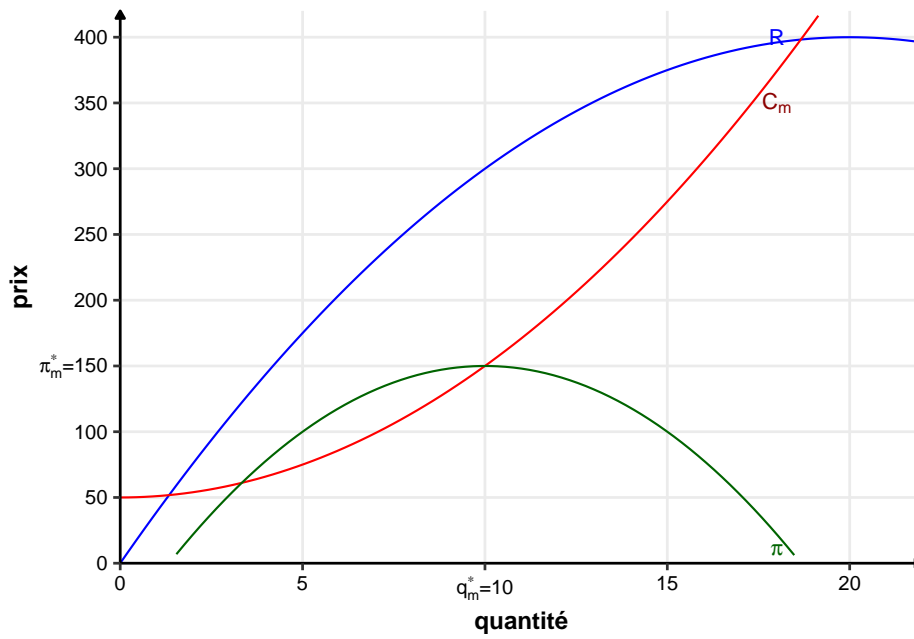


FIGURE 3.6 – Recette, coût et profit dans l'exemple 3.1.

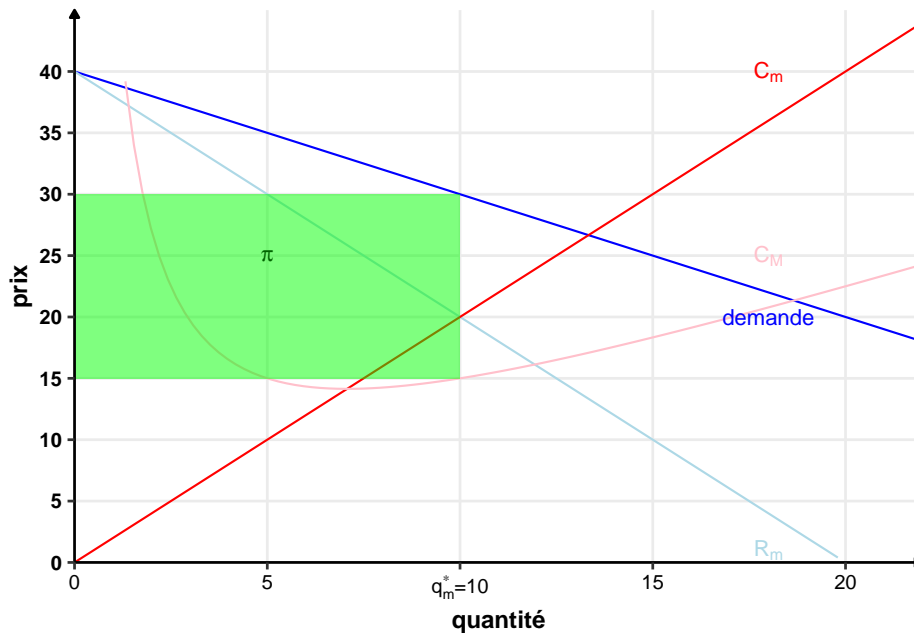


FIGURE 3.7 – Demande, prix, coûts et profits dans l'exemple 3.1.

Question : Dans quelle zone d'élasticité le monopole va-t-il opérer ?

On voit que si $|\varepsilon_{q/p}(q^*)| < 1$, c'est-à-dire que si la demande est inélastique, alors $1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} < 0$, ce qui implique que la recette marginale R_m est négative, et donc impossible à égaliser avec le coût marginal C_m .

On peut voir la réponse d'une autre façon. Si la pente est inélastique, alors le revenu R augmente quand la quantité q baisse. Le coût total C baisse aussi quand la quantité baisse. Le monopole aurait donc tout intérêt à réduire sa production lorsque la demande est inélastique.

Corollaire 3.1. *Le monopole opère donc nécessairement dans la zone élastique de la courbe de demande : $|\varepsilon_{q/p}(q^*)| > 1$.*

3.2.3 Indice de pouvoir du monopole

La capacité du monopole à vendre à un prix supérieur au coût marginal dépend de la plus ou moins grande élasticité de la demande au prix. Cela permet de construire un indice du *pouvoir de monopole* à partir de l'élasticité du prix à la demande à l'équilibre. On a, d'après l'équation (3.2.2) :

$$R_m(q^*) = P(q^*) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \right) = C_m(q^*)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} C_m(q^*) &= P(q^*) - \frac{P(q^*)}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \\ \Leftrightarrow P(q^*) - C_m(q^*) &= \frac{P(q^*)}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \end{aligned}$$

Définition 3.2 (Indice de Lerner). On définit l'indice de Lerner L par :

$$L = \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} = \frac{P(q^*) - C_m(q^*)}{P(q^*)}$$

L'indice de Lerner est donc inversement proportionnel à l'élasticité prix de la demande. Il est aussi égal à la capacité du monopole à vendre au-dessus de son coût marginal, en pourcentage du prix total.

On peut construire à partir de l'équation précédente le *markup pricing*.

Définition 3.3 (Markup pricing).

$$P(q^*) = \frac{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)| - 1} C_m(q^*)$$

3.2.4 Variation de la demande

Les décisions de production du monopole et la fixation de son prix dépendent de la demande à laquelle il fait face et du coût marginal. Le monopole n'a **pas de courbe d'offre** au sens où il n'y a pas de relation univoque entre prix et quantité produite, à la différence des producteurs en CPP. En monopole, si la demande change, le monopole s'adapte, soit en changeant sa production, mais pas son prix (figure 3.9), ou l'inverse (figure 3.8).

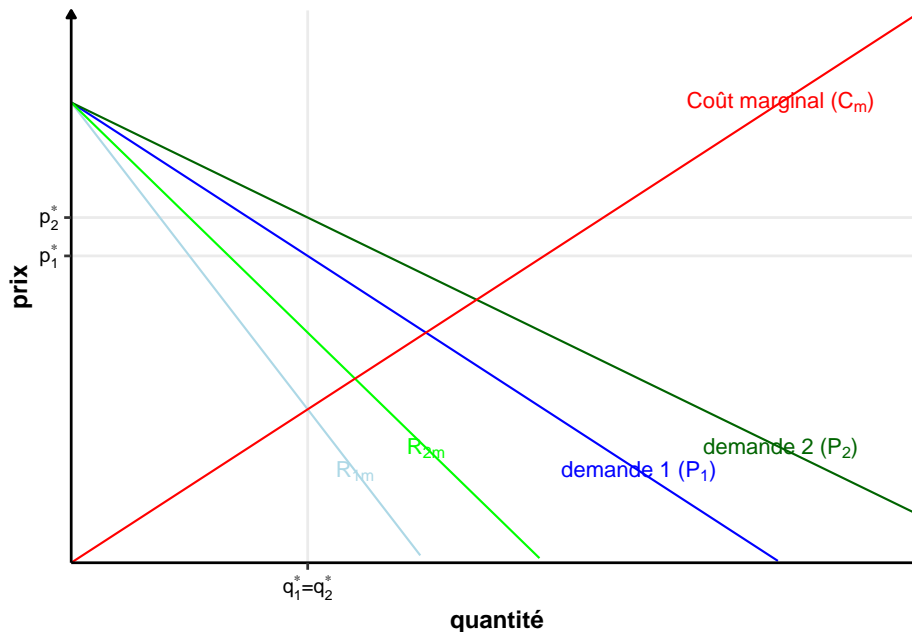


FIGURE 3.8 – Exemple de réaction du monopole à un changement de demande : changement de prix.

En CPP, un changement de demande, si elle implique un changement du prix d'équilibre, entraîne forcément un changement dans la quantité produite par un producteur individuel.

3.2.5 L'inefficience du monopole

La production du monopole est inférieure à la production en CPP et le prix est supérieur au prix de CPP.

Cela signifie que le surplus du producteur (son profit) est plus élevé en monopole qu'en CPP, et que le surplus des consommateurs est plus faible. Il y a globalement une perte sèche de surplus total. **Le monopole est inefficace au sens de Pareto.** Il existe des consommateurs prêts à acheter à un prix supérieur au coût marginal (dans le triangle de la perte sèche). Il est donc possible d'avoir

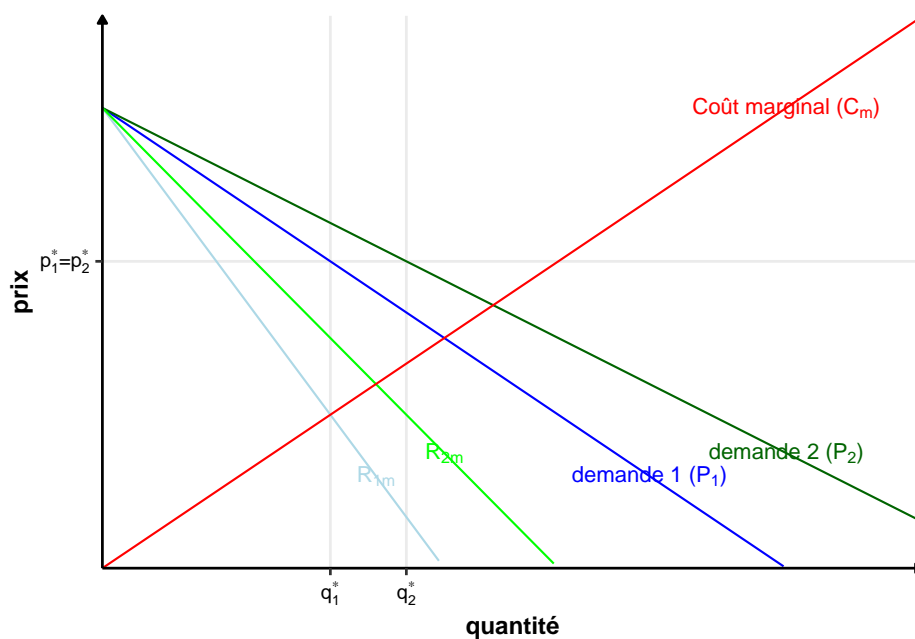


FIGURE 3.9 – Exemple de réaction du monopole à un changement de demande : changement de quantité.

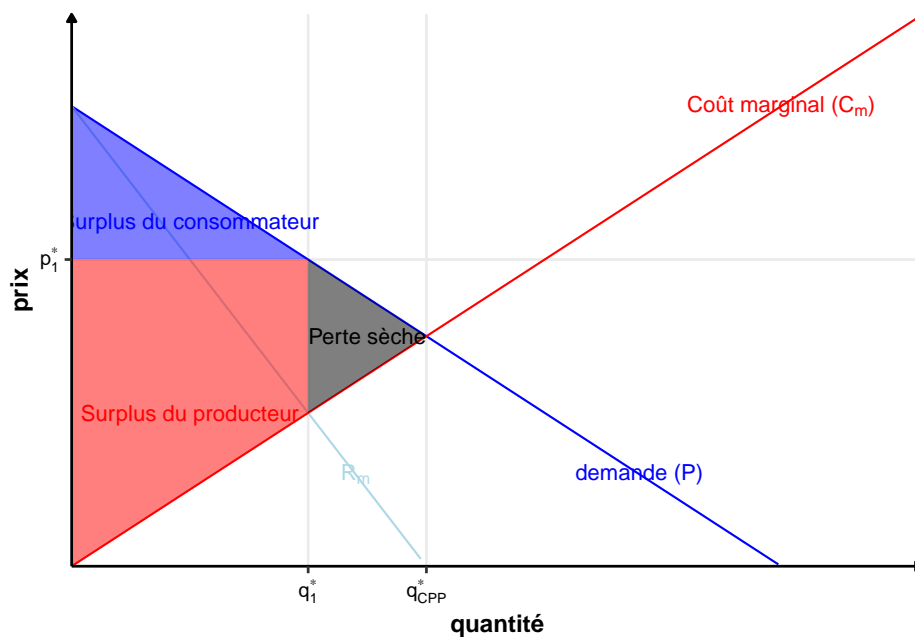


FIGURE 3.10 – Surplus quand le producteur est en monopole.

une amélioration parétienne qui améliore à la fois la situation des consommateurs et du monopole. Il suffirait pour cela que le monopole produise une unité supplémentaire du bien à un prix supérieur au coût marginal, sans rien changer d'autre pour obtenir cette amélioration.

3.3 Régulation du monopole

Cette partie va traiter de la manière dont un gouvernement peut inciter un monopole à modifier son comportement.

3.3.1 Taxe unitaire

Un gouvernement impose une taxe de t unités monétaire par unité de bien produite. On a donc :

$$\pi(q) = R(q) - C(q) - tq$$

La condition de première ordre de la maximisation du producteur de l'équation (3.2) devient alors :

$$\begin{aligned} & (R(q) - C(q) - tq)'(q^*) = 0 \\ \Leftrightarrow & R_m(q^*) - C_m(q^*) - t = 0 \\ \Leftrightarrow & R_m(q^*) = C_m(q^*) + t \end{aligned}$$

Le problème est exactement le même que précédemment, en intégrant la taxe dans le coût marginal. Pour le monopole, c'est comme si l'état ajoutait un coût t à chaque unité produite, ce qui est effectivement ce que l'État fait.

Cela entraîne une diminution de la quantité produite et une augmentation du prix. Le surplus des consommateurs baisse, ainsi que celui du monopole.

Une vue **alternative** à l'augmentation du coût marginal est de considérer que la taxe diminue la recette marginale de t :

$$R_m(q^*) - t = C_m(q^*)$$

Si le gouvernement utilise une taxe négative (= une subvention), alors le gouvernement peut augmenter la production et de diminuer le prix.

3.3.2 Taxe forfaitaire

Avec une taxe forfaitaire, l'état prélève un montant T indépendant de la quantité produite sur le profit du producteur.

$$\pi(q) = R(q) - C(q) - T$$

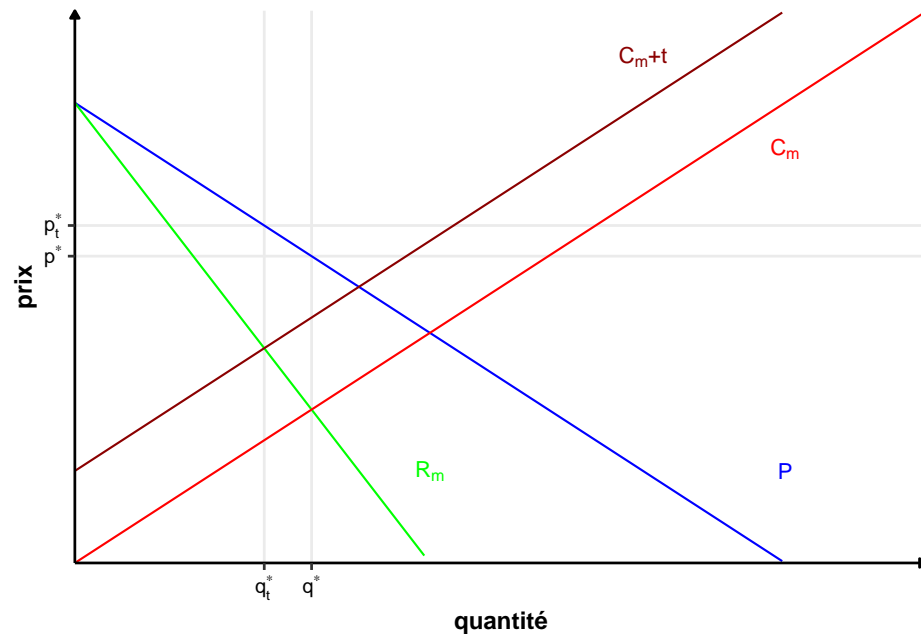


FIGURE 3.11 – Impact d’une taxe unitaire : augmentation du coût marginal.

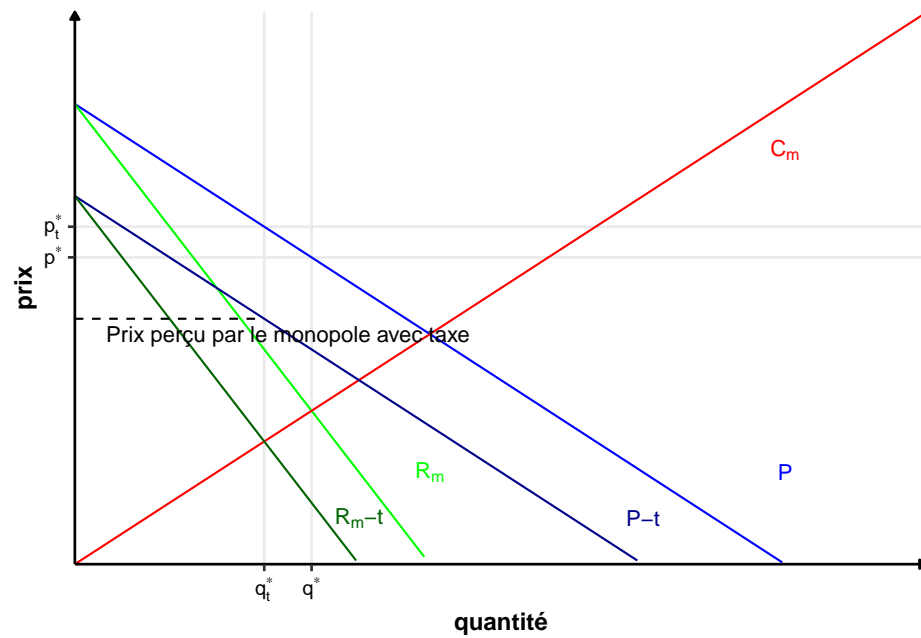


FIGURE 3.12 – Impact d’une taxe unitaire : diminution de recette marginale.

La condition du premier ordre de l'équation (3.2) devient alors :

$$\begin{aligned} & (R(q) - C(q) - T)'(q^*) = 0 \\ \Leftrightarrow & R_m(q^*) - C_m(q^*) = 0 \\ \Leftrightarrow & R_m(q^*) = C_m(q^*) \end{aligned}$$

On retrouve exactement la même condition d'optimalité qu'en l'absence de taxe. Si elle n'est pas trop élevée, une taxe forfaitaire n'a *aucune* influence sur la quantité produite et prix. Si la taxe forfaitaire est très élevée, supérieure au profit $R(q^*) - C(q^*) < T$, le monopole préfère ne rien produire et le surplus social est nul.

On peut donc envisager de combiner une subvention unitaire au monopole combinée à une taxe forfaitaire pour augmenter le surplus total.

3.3.3 Impôt sur profit

Au lieu de taxer chaque unité produite, on peut taxer le niveau de profit à un taux t . Le profit devient alors

$$\pi(q) = R(q) - C(q) - t(R(q) - C(q)) = (1 - t)(R(q) - C(q))$$

La condition du premier ordre de l'équation (3.2) devient alors :

$$\begin{aligned} & ((1 - t)(R(q) - C(q)))'(q^*) = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 - t)(R_m(q^*) - C_m(q^*)) = 0 \\ \Leftrightarrow & R_m(q^*) = C_m(q^*) \end{aligned}$$

Comme pour la taxe forfaitaire, le comportement du monopole n'est pas modifié par une taxe sur le profit. On peut donc aussi envisager une subvention à la production et une taxe proportionnelle sur le profit.

3.3.4 Fixation d'un prix maximum

Le gouvernement interdit de vendre au-dessus d'un prix maximum p^{max}

Le gouvernement modifie ainsi la demande perçue par le producteur.

Si le prix maximum est inférieur au prix de concurrence pure et parfaite, les quantités produites peuvent devenir sous-optimales. Le gouvernement peut maximiser le surplus social en prenant le prix concurrentiel comme prix maximum. *Rappel* : En CPP, on obtient le prix à l'aide de la courbe de coût marginal. L'équilibre a lieu quand le coût marginal et la demande se croisent.

Avec un prix maximum égal au prix de concurrence pure et parfaite, le revenu marginal coupe la courbe de coût marginal au point d'équilibre de la concurrence pure et parfaite.

Globalement, si le prix maximal est entre le prix de monopole et le prix de concurrence pure et parfaite, alors la quantité produite augmente quand le prix

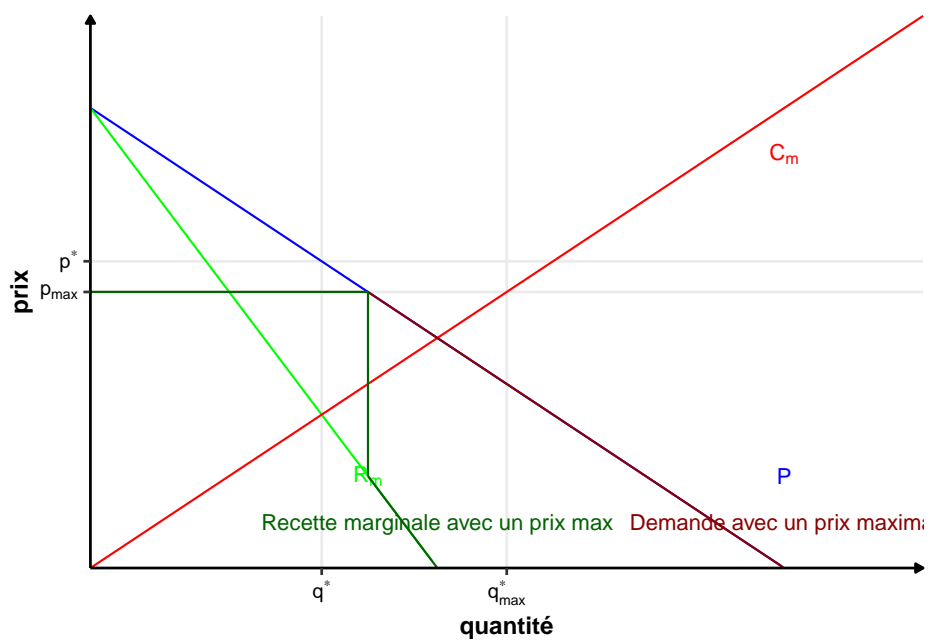


FIGURE 3.13 – Fixation d'un prix maximal supérieur au prix de CPP.

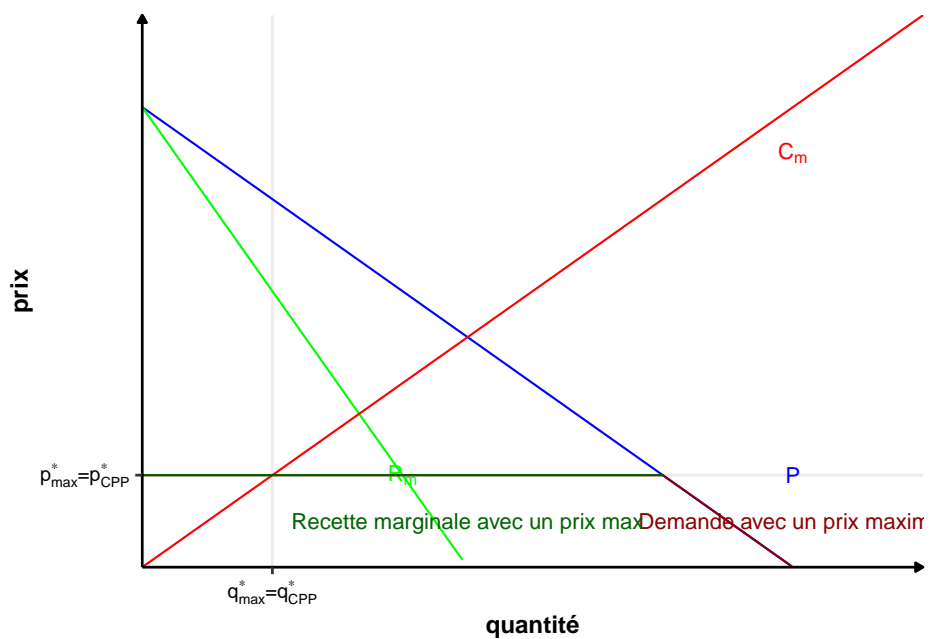


FIGURE 3.14 – Fixation d'un prix maximal inférieur au prix de CPP.

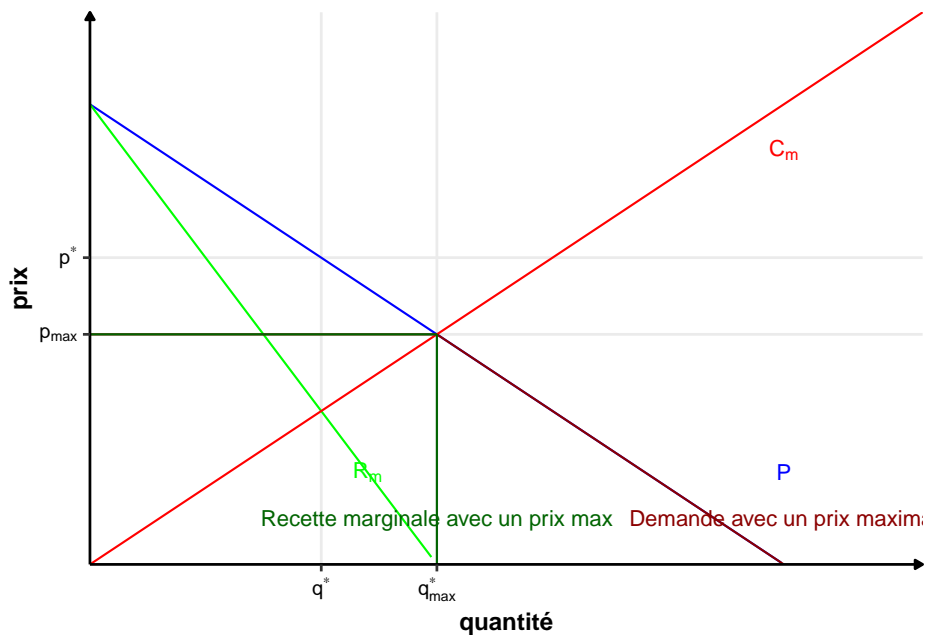


FIGURE 3.15 – Fixation d'un prix maximal égal au prix de CPP.

maximal diminue. Si au contraire le prix maximal est inférieur au prix de CPP (et donc de monopole), alors la quantité produite diminue quand le prix maximal augmente.

3.4 Le monopole naturel

Une situation de monopole naturel émerge à cause d'une structure particulière de la technologie de production et des coûts, plutôt qu'à cause d'une disposition légale.

Définition 3.4 (Monopole naturel). Un monopole naturel émerge en présence d'une technologie dotée de rendements d'échelles *croissants* dans la zone de production optimale.

Les rendements d'échelles sont croissants lorsque la technologie de production f est telle que :

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n) > \lambda f(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

où les z_i sont les facteurs de productions. En mots : une entreprise utilisant λ fois plus de facteurs de productions qu'une petite entreprise produit plus que λ petites entreprises réunies.

En général, un monopole naturel émerge à cause de coûts fixes élevés. Par exemple, lorsqu'il faut investir dans un réseau (ferrés, téléphone, électricité,

etc).

Une conséquence des rendements d'échelle croissants est que le coût moyen est décroissant :

$$C_M(f(\lambda z)) = \frac{\lambda z \cdot w_z}{f(\lambda z)} < C_M(\lambda f(z)) = \frac{\lambda z \cdot w_z}{\lambda f(z)}$$

car $f(\lambda z) > \lambda f(z)$. Cela signifie qu'une seule entreprise qui produit $f(\lambda z)$ est plus efficace que λ entreprises qui produisent $\lambda f(z)$. Il y a ici des économies d'échelle.

Définition 3.5 (Économie d'échelle). Il y a des *économies d'échelle* quand une unité de bien produite en plus revient moins chère que l'unité précédente. Cela signifie que le *coût moyen* baisse quand le producteur produit plus d'unités.

De manière générale, il y a presque toujours une zone où le coût moyen est décroissant, mais elle est rarement très étendue. Dans le graphique 3.16, la demande inverse 1 coupe la courbe de coût marginal à un endroit où les économies d'échelle sont décroissantes. La demande 2, en revanche, la coupe à un endroit où les économies d'échelle sont croissantes.

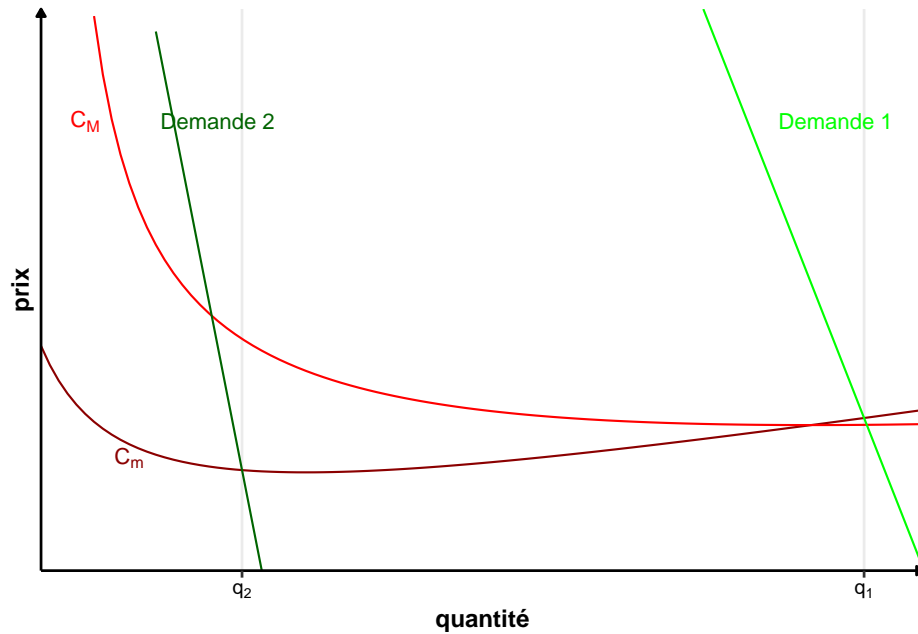


FIGURE 3.16 – Fonction de coût et demande avec et sans économies d'échelle.

Remarque (Lien entre coût marginal et coût moyen en monopole naturel.). Lorsque le coût moyen est décroissant, c'est que le coût marginal est inférieur au coût moyen.

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$$

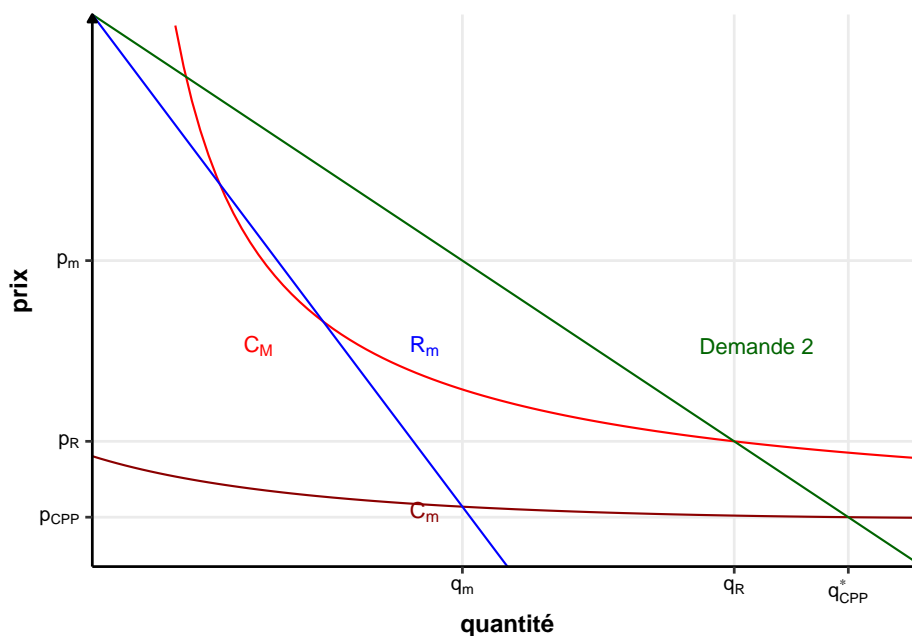
$$C'_M(q) = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2} = \frac{C_m(q) - C_M(q)}{q}$$

Or $C'_M(q) < 0$, comme le coût marginal est décroissant. On en déduit donc que

$$C_m(q) - C_M(q) < 0 \Leftrightarrow C_m(q) < C_M(q)$$

Remarque (Rendements d'échelle et économies d'échelle). Il ne faut pas confondre les rendements d'échelle, qui mettent en relation les **quantités** de facteurs de productions et les quantités de biens produites et économies d'échelle, qui est une notion liée au **coût** de production des unités de biens produites.

Question : Que se passe-t-il quand la fonction de demande inverse coupe la courbe de coût marginal dans la partie où le coût marginal est inférieur au coût moyen (où $C_m < C_M$) ?



Si on impose une tarification au coût marginal, alors le monopole fait des pertes, car le prix est inférieur au coût moyen. La régulation “optimale” généralement utilisée impose *un prix au coût moyen* et une obligation de satisfaire toute la demande. Le monopole fait alors un profit nul.

Une solution alternative est un prix égal au coût moyen assorti de subventions pour couvrir les pertes.

3.5 Le monopole discriminant

Un monopole discriminant pratique un prix différent pour chaque (groupe de) consommateurs. Pour cela, il doit pouvoir identifier l'appartenance de chaque consommateur à un groupe et les marchés entre les consommateurs doivent être hermétiques. En particulier, il ne faut pas qu'un consommateur puisse revendre son unité de bien à un autre consommateur.

Il existe 3 types de discriminations par les prix, les discrimination du premier, deuxième et troisième degrés. On ne traitera que les discriminations du premier et troisième degrés dans ce cours.

3.5.1 Discrimination au premier degré (discrimination parfaite)

Dans une discrimination parfaite, le monopole connaît la valorisation (prix de réserve) de chaque individu et lui fait payer le prix maximum qu'il est prêt à payer (son prix de réserve donc). Le consommateur ne retient alors aucun surplus, la *totalité* du surplus est capturé par le producteur.

Question : Quel va être le niveau de production du monopole ?

Comme le monopole fait payer chaque unité à la valorisation du consommateur, la première unité est vendue au prix $P(1)$, la deuxième au prix $P(2)$, etc. La recette totale est donc :

$$R(q) = \int_0^q P(x)dx$$

Notons le coût total $C(q)$. Le profit est :

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = \int_0^q P(x)dx - C(q)$$

La condition du premier ordre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(q^*)}{dq} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d \int_0^{q^*} P(x)dx - C(q^*)}{dq} &= 0 \\ \Leftrightarrow P(q^*) - C'_m(q^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow P(q^*) &= C'_m(q^*) \end{aligned}$$

La recette marginale est ici confondue avec la courbe de demande. L'optimum se trouve donc au point où la courbe de coût marginal coupe la courbe de demande (inverse). C'est la même condition qu'en CPP. Le monopole parfaitement discriminant produit donc la quantité de concurrence pure et parfaite. Le prix de la dernière unité vendue par le monopole est égal au prix de la concurrence pure et parfaite, même si les prix des autres unités vendues sont supérieurs au prix de la CPP.

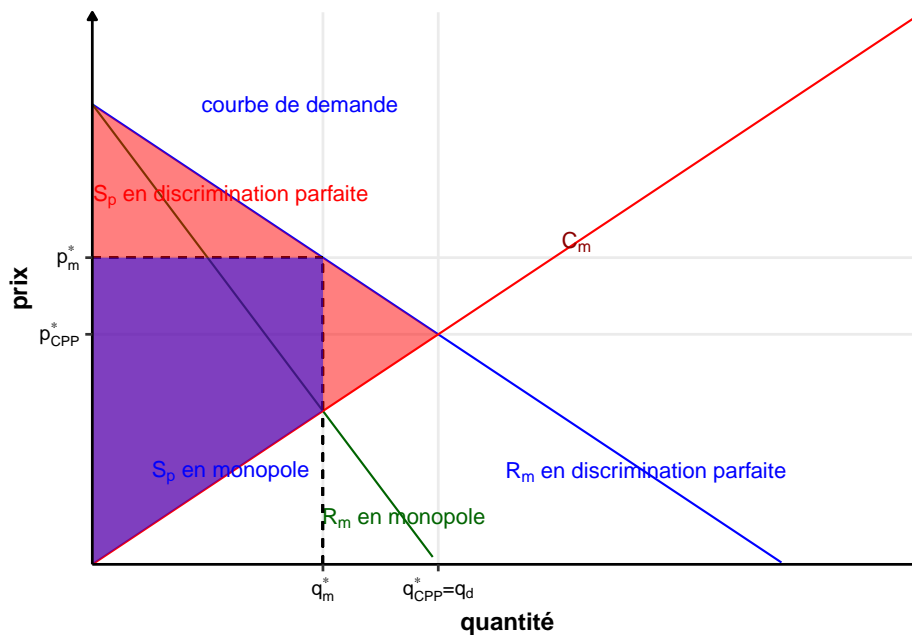


FIGURE 3.17 – Surplus du monopole en discrimination parfaite (aire rouge et bleue).

La situation de discrimination parfaite est un optimum de Pareto. En effet, le surplus social est maximal (mais capturé entièrement par le monopole).

En pratique, il est très difficile de faire de la discrimination parfaite. Les entreprises essaient de s'en approcher le plus possible.

Un exemple existe, lors d'une vente de bons du trésors des Etats-Unis. Chaque ménage intéressé soumettait une offre (prix, quantité) au gouvernement. Le gouvernement triait les offres par ordre décroissant de prix et les satisfait jusqu'à épuisement des bons à vendre.

3.5.2 Discrimination du deuxième degré

Définition 3.6 (Discrimination du deuxième degré). La discrimination du deuxième degré a lieu lorsque les prix de ventes dépendent des quantités achetées.

Par exemple, si les 10 premières unités vendues le sont à 5€, et les suivantes à 2€. Les prix de ventes sont nécessairement *décroissants* avec la quantité vendue.

Le monopole ajuste les quantités seuils afin de maximiser son profit. Il y a un nombre fini de seuils de dégressivité. Plus il y a de seuils, plus on s'approche d'une situation de discrimination parfaite.

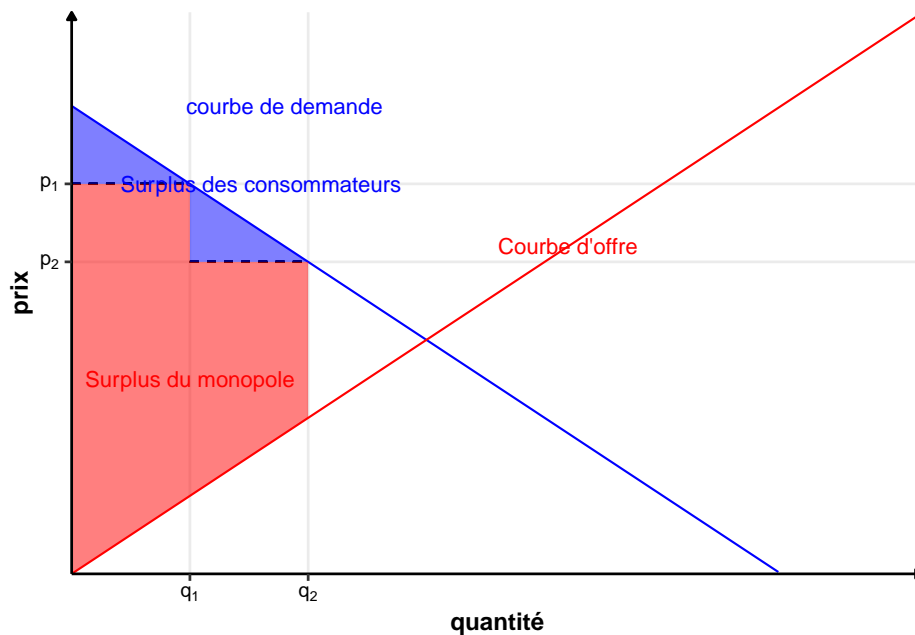


FIGURE 3.18 – Graphique avec une discrimination du deuxième degré. Les quantités inférieures à q_1 sont vendues au prix p_1 , les suivantes au prix p_2 .

3.5.3 Discrimination du troisième degré

Il s'agit de faire payer un prix différent à chaque groupe de consommateur, en fonction des caractéristiques de leurs fonctions de demande. Tous les membres d'un groupe payent donc le même prix, contrairement à la discrimination au premier degré. Les groupes sont en général caractérisés par des propensions à payer différentes. Il s'agit d'une segmentation des consommateurs.

Exemple 3.2 (Discrimination au troisième degré). Les tarifs jeunes de la SNCF, les tarifs familles. Il est important de pouvoir identifier les groupes.

Question : Comment répartir la production entre les différents groupes ?

1. Quelle production totale ?
2. Quelle répartition ?

Méthode : On résout d'abord 2 en supposant que 1 est déjà résolu. On obtient alors la répartition en fonction de la production totale. Puis on résout 1 à l'aide de la solution de 2.

On modélise le problème de la manière suivante :

- 2 groupes A et B ;
- Avec des fonctions de demande inverses $P_A(q_A)$ et $P_B(q_B)$;

- Une quantité q totale a été produite, qu'il faut répartir entre les 2 groupes : $q = q_A + q_B$

Le problème du monopole s'écrit :

$$\max_{q_A, q_B} \pi(q_A, q_B) = q_A P_A(q_A) + q_B P_B(q_B) - C(q)$$

La quantité totale q est fixée, donc le coût total l'est aussi et peut être supprimé du problème de maximisation. On cherche donc juste à maximiser la recette totale :

$$\max_{q_A, q_B} q_A P_A(q_A) + q_B P_B(q_B)$$

Avec $q = q_A + q_B$, donc $q_B = q - q_A$, le problème devient :

$$\begin{aligned} & \max_{q_A, 0 \leq q_A \leq q} q_A P_A(q_A) + (q - q_A) P_B(q - q_A) \\ \Leftrightarrow & \max_{q_A, 0 \leq q_A \leq q} R_A(q_A) + R_B(q - q_A) \end{aligned}$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{dR_A(q_A) + R_B(q - q_A)}{dq_A} = 0 \\ \Leftrightarrow & R_{mA}(q_A) - R_{mB}(q - q_A) = 0 \\ \Leftrightarrow & R_{mA}(q_A) = R_{mB}(q_B) \end{aligned}$$

L'équation (3.5.3) nous dit que le monopole répartit la quantité totale produite de manière égaliser les recettes marginales entre les deux groupes.

Intuitivement, si la recette marginale issue du groupe A est supérieure à celle issue du groupe B ($R_{mA}(q_A) > R_{mB}(q_B)$), alors en diminuant la quantité q_B dans le groupe B et en la transférant au groupe A, le monopole perd $R_{mB}(q_B)$ et gagne $R_{mA}(q_A)$, donc la recette totale augmente et le profit aussi. Inversement dans le cas opposé. Il n'est donc pas intéressant de transférer la production d'un groupe vers un autre lorsque $R_{mA}(q_A) = R_{mB}(q_B)$ (et seulement dans ce cas).

Maintenant que la répartition est résolue, il faut trouver la quantité totale produite. Le problème devient maintenant :

$$\max_{q_A, q_B} \pi(q_A, q_B) = q_A P_A(q_A) + q_B P_B(q_B) - C(q_A + q_B)$$

La condition du premier ordre s'obtient maintenant en dérivant suivant q_A et q_B séparément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(q_A, q_B)}{\partial q_A} = 0 & \Leftrightarrow R_{mA}(q_A^*) = C_m(q_A^* + q_B^*) \\ \frac{\partial \pi(q_A, q_B)}{\partial q_B} = 0 & \Leftrightarrow R_{mB}(q_B^*) = C_m(q_A^* + q_B^*) \end{aligned}$$

Le monopole doit faire en sorte que le coût marginal de sa production totale soit égale à la recette marginale sur chacun des marchés.

Intuition : Le monopole doit égaliser la recette marginale sur les deux marchés. Or le coût marginal dépend de la quantité *totale* produite, pas de la répartition

entre les marchés. Si on est dans la situation telle que $C_m(q) < R_{mA}(q_A)$, alors il y a la possibilité de faire du profit sur le marché A (et le marché B par conséquent). Inversement, si $C_m(q) > R_{mA}(q_A)$, alors le monopole fait des pertes.

Remarque. On utilise bien $C_m(q_A + q_B)$ et non $C_m(q_A)$ ou $C_m(q_B)$ car c'est bien la variation du coût total lorsqu'on augmente "un peu" q_A et q_B reste fixe.

D'après l'équation (3.1), on peut écrire :

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} R_{mA}(q_A^*) &= R_{mB}(q_B^*) \\ P_A(q_A^*) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p_A}(q_A^*)|}\right) &= P_B(q_B^*) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p_B}(q_B^*)|}\right) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_A(q_A^*) > P_B(q_B^*)$. On obtient alors que :

$$1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p_A}(q_A^*)|} < 1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q/p_B}(q_B^*)|}$$

Autrement dit

$$|\varepsilon_{q/p_B}(q_B^*)| > |\varepsilon_{q/p_A}(q_A^*)|$$

Le prix est donc plus faible pour le groupe où l'élasticité prix de la demande est plus élevée. Le prix est plus élevé pour le groupe avec l'élasticité la plus faible, les moins réactifs au prix.

Exemple 3.3. Les tarifs "professionnels" dans les transports (avion, train, etc). Les professionnels sont moins sensibles au prix car leurs dates de voyage sont moins flexibles que celles des particuliers. Leur élasticité prix est donc plus faible et leur prix plus élevés.

Des fonctions de demande inverse différentes associées à des élasticités prix de la demande différentes aboutissent à des prix différents.

Chapitre 4

Oligopoles

On a vu jusqu'à présent deux cas extrêmes :

- La concurrence pure et parfaite : il y a une infinité d'entreprise infinitésimales sur un marché donné.
- Le monopole : il y a une seule entreprise sur un marché donné.

Dans les deux cas, l'entreprise ou les entreprises n'ont pas à se préoccuper des autres entreprises. Dans le cas du monopole, parce qu'il n'y en a pas. Dans le cas de la CPP, l'entreprise observe le prix du marché et prend sa décision en fonction de ce prix, et uniquement de ce prix. Les actions des autres entreprises ne l'influencent pas.

On considère maintenant la situation où il n'y a plus une seule ou une infinité d'entreprises, mais plusieurs, qui sont en situation d'*interactions stratégiques*. Les décisions de chaque acteur dépendent des décisions des autres acteurs (ou des anticipations de ces décisions).

On parle de *duopole* dans le cas où le marché compte deux entreprises et d'*oligopole* dans le cas où il compte plus que deux entreprises.

Les entreprises peuvent se faire concurrence de différentes manières :

- En quantité, concurrence dite à la *Cournot* ;
- En prix, concurrence à la *Bertrand* ;
- En prenant une situation de leader ou de follower, à la *Stackelberg* ;
- En format une entente, dans un *cartel* ;
- Dans une concurrence spatiale, à la *Hotelling*.

Nous verrons dans ce cours les concurrences à la Cournot et à la Stackelberg, ainsi que les cartels.

4.1 Duopole à la Cournot

4.1.1 Introduction

On considère deux entreprises sur le même marché qui doivent choisir les quantités à produire, sans connaître la quantité choisie par l'autre (= décision simultanée).¹ Le prix est déterminé par la quantité *totale* produite par les deux entreprises et la fonction de demande sur le marché.

Chaque entreprise est caractérisée par une quantité produite et un coût :

- Entreprise 1 : quantité q_1 produite au coût $C_1(q_1)$;
- Entreprise 2 : quantité q_2 produite au coût $C_2(q_2)$.

Les fonctions de coût sont **différentes** entre les deux entreprises, contrairement au cas du monopole discriminant au troisième degré, où l'on considérerait $C(q_1 + q_2)$.

La fonction de demande inverse sur le marché est $P(q_1 + q_2)$. C'est différent du monopole discriminant où il y avait une fonction de demande par segment.

On a donc les fonctions de profit :

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, q_2) &= P(q_1 + q_2) \cdot q_1 - C_1(q_1) \\ \pi_2(q_1, q_2) &= P(q_1 + q_2) \cdot q_2 - C_2(q_2)\end{aligned}$$

L'action d'une entreprise a des conséquences sur le profit réalisé par l'autre entreprise, même si celle-ci ne fait rien. En particulier, si q_1 augmente, alors le prix du marché diminue, au travers de la fonction de demande inverse P , et donc le profit de l'entreprise 2, π_2 , diminue, et réciproquement si q_2 augmente. Il y a donc un conflit d'intérêt entre les producteurs. Chaque entreprise doit anticiper l'action de l'autre et réagir à cette anticipation le mieux possible.

Question : Peut-il y avoir un équilibre dans cette situation ?

4.1.2 Formalisation du problème

4.1.2.1 Expression des profits

On a des profits :

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, q_2) &= P(q_1 + q_2) \cdot q_1 - C_1(q_1) \\ \pi_2(q_1, q_2) &= P(q_1 + q_2) \cdot q_2 - C_2(q_2)\end{aligned}$$

Supposons que l'entreprise 1 *croit* que l'entreprise 2 va produire q_2^a . Quelle est sa production optimale ? Son problème de maximisation est :

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2^a) = q_1 P(q_1 + q_2^a) - C_1(q_1)$$

1. Même marché : bien unique et prix unique.

On peut déduire de ce problème d'optimisation la *fonction de réaction* $q_1(q_2^a) = f_1(q_2^a)$ qui maximise $\pi_1(q_1)$ en fonction de la production anticipée q_2^a de l'entreprise 2.² La fonction de réaction $f_1(q_2^a)$ donne la valeur de q_1 qui maximise le profit quand l'entreprise 2 produit q_2^a .

De la même manière, l'entreprise 2 cherche à maximiser π_2 en fonction de la production anticipée q_1^a de l'entreprise 1. Son programme est :

$$\max_{q_2} \pi_2(q_1^a, q_2) = q_1 P(q_1^a + q_2) - C_2(q_2)$$

Elle aura également une fonction de réaction $q_2(q_1^a) = f_2(q_1^a)$.

4.1.2.2 Forme des fonctions de réaction

Si l'entreprise i pense que l'entreprise j ne va rien produire, alors elle se trouve dans une situation de monopole et se comporte comme tel. Elle produit de manière à égaliser coût marginal et recette marginale ($R_{im} = C_{im}$).

Si l'entreprise i pense que l'entreprise j va produire $q_j^a > 0$, alors elle est en monopole sur le **reste** de la demande. Cette dernière correspond à la demande totale décalée de $q_j^a > 0$ vers la gauche. Le croisement entre recette marginale et coût marginal se fait donc à un niveau plus faible qu'auparavant.

Plus l'entreprise i pense que l'entreprise j va produire une grande quantité, plus elle aura intérêt à réduire son offre. q_i est décroissante en q_j^a .

4.1.2.3 Caractérisation de l'équilibre

Un équilibre (q_1^a, q_2^a) doit être tel qu'aucune des deux entreprises n'ait intérêt à dévier unilatéralement :

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1^a, q_2^a) &\geq \pi_1(q_1, q_2^a) \quad \forall q_1 \\ \pi_2(q_1^a, q_2^a) &\geq \pi_2(q_1^a, q_2) \quad \forall q_2 \end{aligned}$$

Au point q_1^a et q_2^a , aucune entreprise n'a intérêt à dévier unilatéralement de l'équilibre. Les décisions prises sont mutuellement compatibles. Chaque entreprise donne sa meilleure réponse à la meilleure réponse de l'autre. C'est ce qu'on appelle un **équilibre de Nash** : un équilibre où personne n'a intérêt à dévier unilatéralement.

Dans le cas du duopole à la Cournot, chaque entreprise doit choisir la quantité qui maximise son profit étant donné le choix de l'autre entreprise. Chaque entreprise est donc sur sa fonction de réaction. L'équilibre est donc à l'intersection des fonctions de réactions des deux entreprises :

$$\begin{aligned} q_1^a &= f_1(q_2^a) \\ q_2^a &= f_2(q_1^a) \end{aligned}$$

2. La fonction de réaction est parfois aussi connue sous le nom de *fonction de meilleure réponse*.

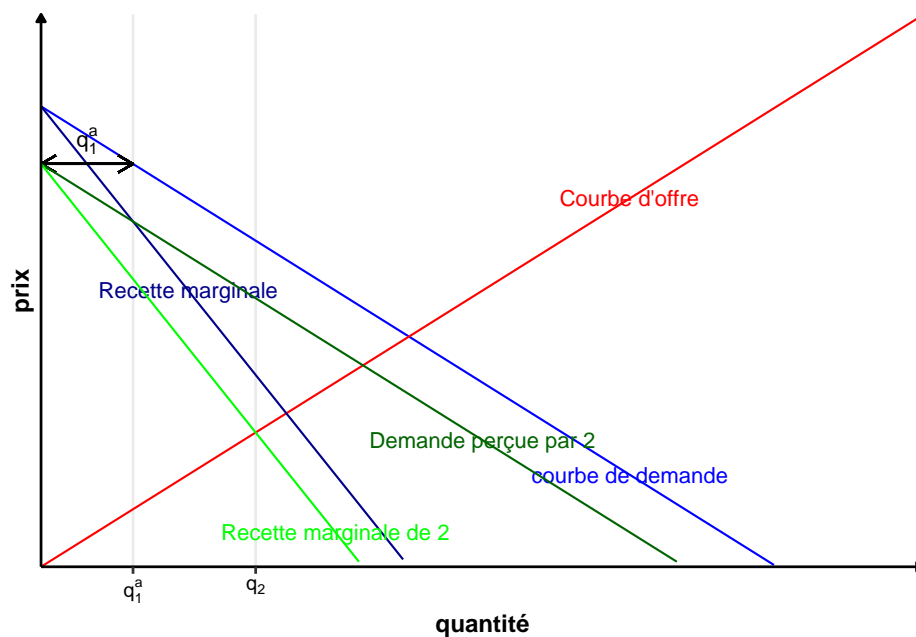


FIGURE 4.1 – Représentation de la demande perçue par l'entreprise 2 anticipant une offre q_1^a par l'entreprise 1.

L'équilibre n'est pas nécessairement stable. La stabilité dépend de la pente des fonctions de réactions.

4.1.3 Exemple

4.1.3.1 Données du problème

Prenons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} P(q_1 + q_2) &= a - b(q_1 + q_2) \\ C_1(q_1) &= cq_1^2 \\ C_2(q_2) &= cq_2^2 \end{aligned}$$

4.1.3.2 Profits

On en déduit les profits :

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1^2 \\ \pi_2(q_1, q_2) &= (a - b(q_1 + q_2))q_2 - cq_2^2 \end{aligned}$$

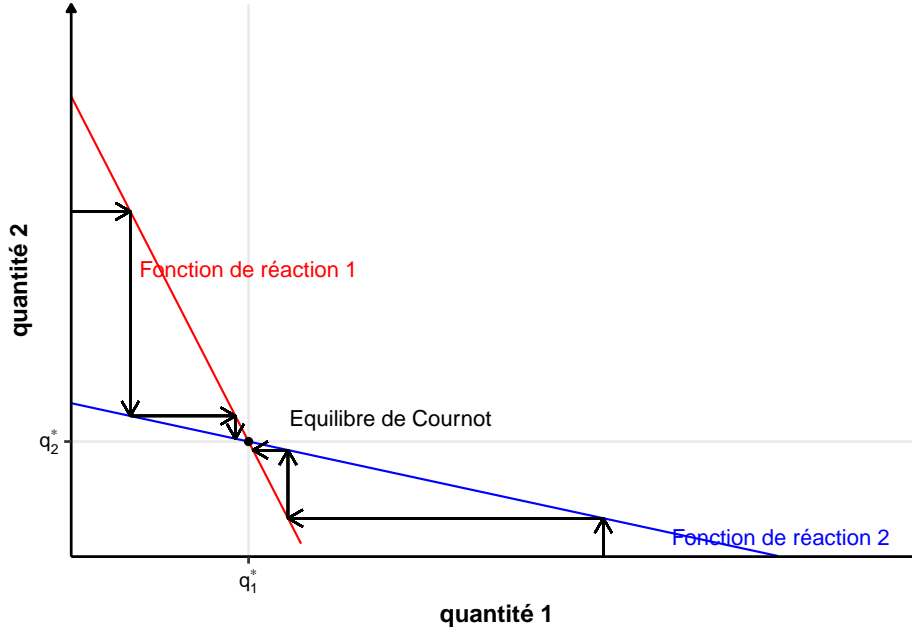


FIGURE 4.2 – Représentation d'un équilibre de Cournot où les fonctions de réaction convergent vers le point d'équilibre.

4.1.3.3 Fonctions de réaction

Calculons la fonction de réaction de l'entreprise 1. Son profit est :

$$\pi_1(q_1, q_2^a) = aq_1 - bq_1^2 - bq_2^a q_1 - cq_1^2 = (a - bq_2^a)q_1 - (b + c)q_1^2$$

La condition du premier ordre suivant q_1 s'écrit (ici q_2^a est considéré comme une donnée par l'entreprise 1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - bq_2^a) - 2(b + c)q_1^* &= 0 \\ \Leftrightarrow q_1^* &= \frac{(a - bq_2^a)}{2(b + c)} \end{aligned}$$

On calcule de la même manière (i.e., en utilisant la condition du premier ordre sur les profits de l'entreprise 2) la fonction de réaction de l'entreprise 2 et on obtient par symétrie du problème une légère réécriture de l'équation (4.1.3.3) :

$$q_2^* = \frac{(a - bq_1^a)}{2(b + c)}$$

La symétrie du problème provient du fait que les deux entreprises ont exactement la même fonction de coût. Ce *n'est pas le cas en général*. Si dans un pro-

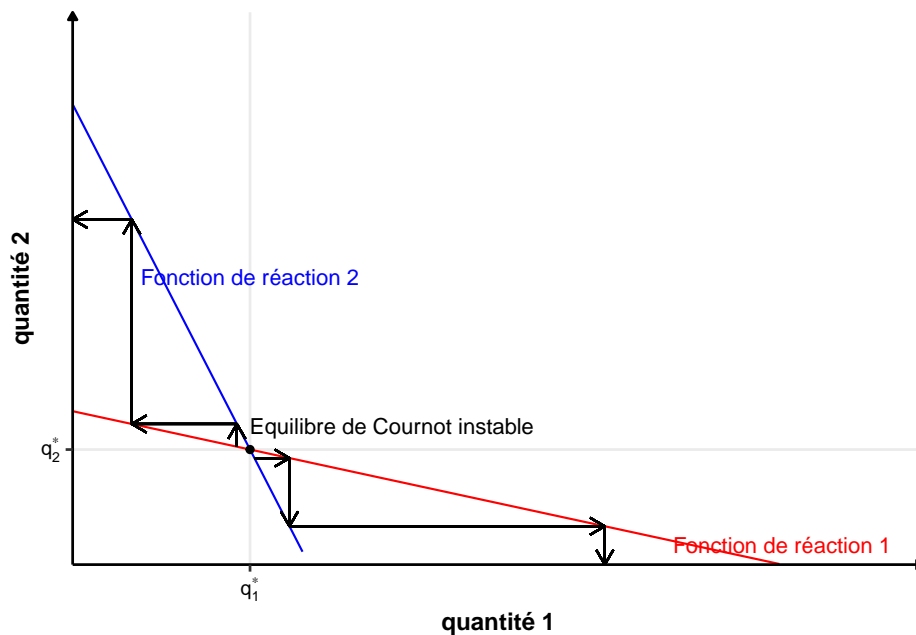


FIGURE 4.3 – Représentation d'un équilibre de Cournot où les fonctions de réaction divergent du point d'équilibre. Equilibre instable

blème les fonctions de coût sont identiques, alors vous pouvez faire les calculs pour une seule entreprise et déduire simplement les résultats pour la seconde.

4.1.3.4 Equilibre de Cournot

Quel est alors l'équilibre de Cournot ?

On doit avoir :

$$\begin{aligned} f_1(q_2^*) &= q_1^* \\ f_2(q_1^*) &= q_2^* \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{(a - bq_2^*)}{2(b+c)} \\ q_2^* &= \frac{(a - bq_1^*)}{2(b+c)} \end{aligned}$$

On résout le système et on obtient :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a}{3b + 2c}$$

Quand le problème est symétrique, les deux entreprises en compétition à la Cournot produisent la même quantité de bien.

4.1.4 Une intuition graphique : les courbes d'isoprofit

On peut aussi aborder le problème à l'aide d'une intuition graphique. Il s'agit de tracer les courbes d'*isoprofit* des entreprises.

Définition 4.1 (Courbe d'isoprofit). Les courbes d'isoprofit est l'ensemble des couples de quantités (q_1, q_2) qui permettent à une entreprise d'atteindre un niveau de profit donné.

Reprenons l'expression générale des profits de l'équation (4.1.2.1).

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, q_2) &= q_1 P(q_1 + q_2) - C_1(q_1) \\ \pi_2(q_1, q_2) &= q_2 P(q_1 + q_2) - C_2(q_2)\end{aligned}$$

La courbe d'isoprofit pour une valeur π_1 **donnée et fixe** est :

$$\pi_1 = q_1 P(q_1 + q_2) - C_1(q_1)$$

L'équation ci-dessus définit implicitement une fonction $q_1 = I_\pi(q_1, \pi_1)$ qui permet de représenter la courbe d'isoprofit dans un graphique (q_1, q_2) , tout comme la fonction de réaction définit une fonction courbe $q_2(q_1)$ pour l'entreprise 1. La courbe de la fonction de réaction de 1 coupe la courbe d'isoprofit de 1 en son maximum.

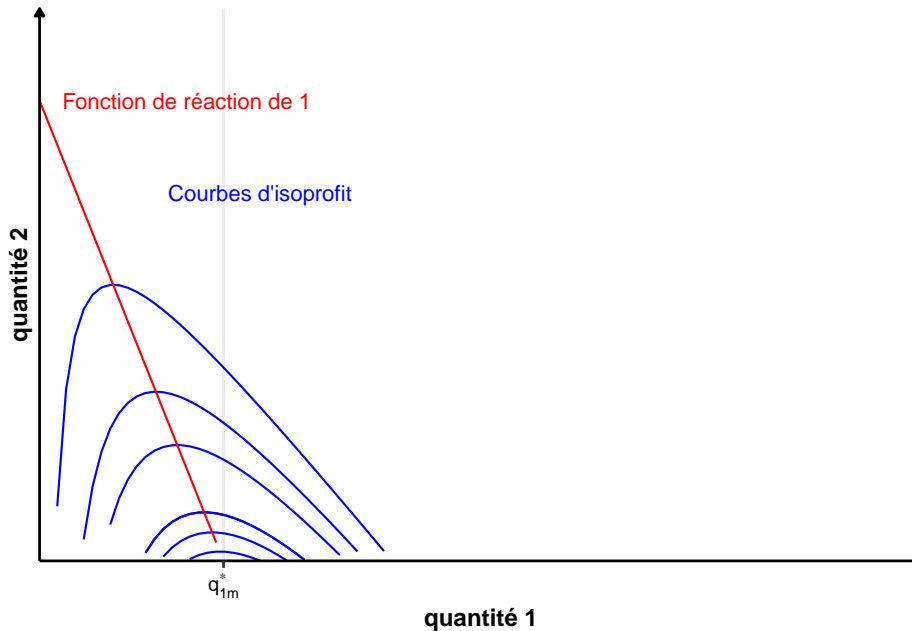


FIGURE 4.4 – Courbes d'isoprofit et fonction de réaction de l'entreprise 1

Sur la figure 4.4, le profit est croissant en descendant vers le bas sur les courbes d'isoprofit, autrement dit, les courbes d'isoprofit les plus basses représentent les

profits les plus élevés. Le maximum du profit est atteint lorsque l'entreprise 1 est en monopole. La quantité produite est alors q_m^* est le profit π_m^* .

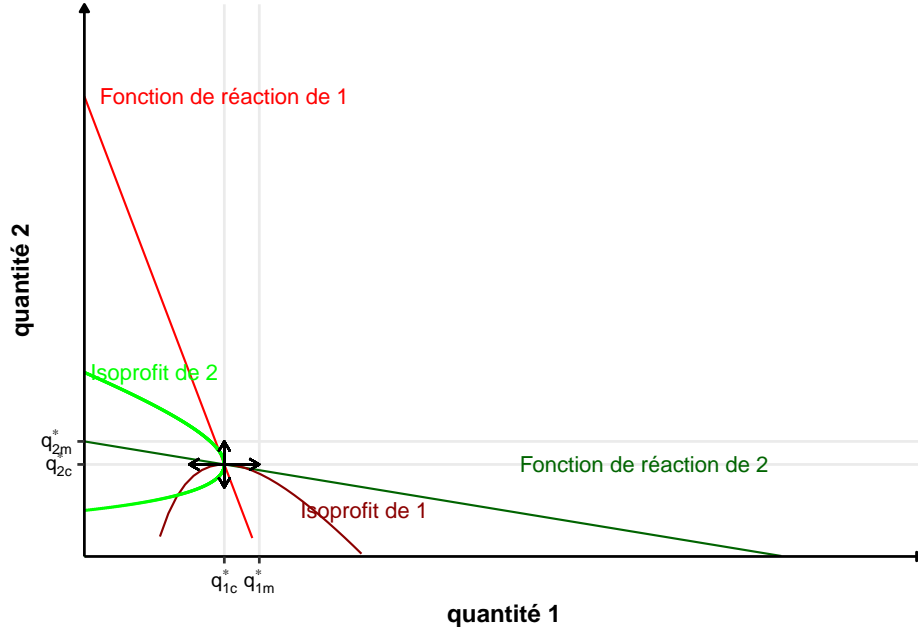


FIGURE 4.5 – Courbes d'isoprofit et fonctions de réactions des entreprises en équilibre de Cournot Nash.

4.2 Duopole à la Stackelberg

4.2.1 Introduction

Il n'y a plus de symétrie des entreprises dans un duopole à la Stackelberg. Une entreprise, dite *leader*, prend ses décisions avant l'entreprise dite *follower*. L'entreprise leader connaît les caractéristiques de l'entreprise follower et peut ainsi calculer sa fonction de réaction. Elle va donc en tenir compte dans ses décisions. On considère ici qu'il n'y a que deux périodes de décisions.

4.2.2 Résolution graphique

Le leader doit choisir sa quantité q_1 de façon à être sur la courbe d'isoprofit la plus basse possible compatible avec la fonction de réaction de l'entreprise follower. Il va donc se placer sur la courbe d'isoprofit tangente à la fonction de réaction du follower.

Sur la figure 4.6, on voit que le profit du leader est plus important en Stackelberg qu'en Cournot (et l'inverse pour le follower). Les quantités produites par

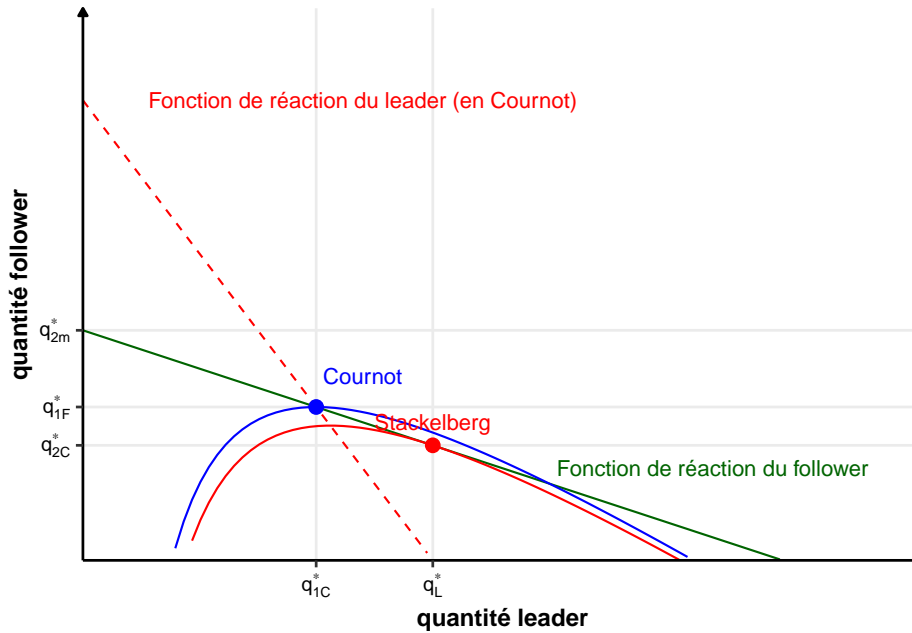


FIGURE 4.6 – Courbes d’isoprofits du leader et fonctions de réactions des entreprises en équilibre de Stackelberg.

l’entreprise leader sont plus importantes en Stackelberg qu’en Cournot, mais celles du follower sont plus faibles. La somme des deux est plus importante ($q_{1C}^* + q_{2C}^* < q_L^* + q_F^*$). Le prix sera donc plus faible pour les consommateurs.

4.2.3 Exemple

4.2.3.1 Données du problèmes

Notons les variables et fonctions du leader avec un indice L et celles du follower avec un indice F .

Gardons une fonction de demande linéaire.

$$P(q_L + q_F) = a - b(q_L + q_F)$$

Supposons, afin de simplifier les calculs, que les coûts marginaux sont nuls.

4.2.3.2 Profits

On en déduit les profits :

$$\begin{aligned}\pi_L(q_L, q_F) &= (a - b(q_L + q_F)) q_L \\ \pi_F(q_L, q_F) &= (a - b(q_L + q_F)) q_F\end{aligned}$$

4.2.3.3 Fonction de réaction de l'entreprise follower

Calculons la fonction de réaction de l'entreprise follower. La condition du premier ordre suivant q_F s'écrit (ici q_L est considéré comme une donnée par l'entreprise 1) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_F}{\partial q_F} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - bq_L) - 2bq_F^* &= 0 \\ \Leftrightarrow q_F^* &= \frac{a - bq_L}{2b}\end{aligned}$$

4.2.3.4 Maximisation de l'entreprise leader

Comme l'entreprise leader connaît la fonction de réaction de l'entreprise follower (donnée par l'équation (4.2.3.3)), elle peut l'intégrer à sa propre fonction de profit :

$$\begin{aligned}\pi_L(q_L, q_F^*) &= (a - b(q_L + q_F^*(q_L))) q_L \\ &= \left(a - b\left(q_L + \frac{a - bq_L}{2b}\right)\right) q_L \\ &= \frac{a}{2} q_L - \frac{b}{2} q_L^2\end{aligned}$$

La condition de premier ordre du leader est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} - bq_L^* &= 0 \\ \Leftrightarrow q_L^* &= \frac{a}{2b}\end{aligned}$$

On en déduit qu'à l'équilibre de Stackelberg, le follower produit :

$$q_F^* = \frac{a}{4b}$$

L'entreprise leader produit plus que l'entreprise follower. Elle profite de son pouvoir sur la seconde entreprise pour cela. Si on calcule le profit, on verra que le profit de l'entreprise leader est plus important que celui de l'entreprise follower si elles sont exactement symétriques, en dehors de leur prises de décisions.

4.3 Cartels et collusions

4.3.1 Introduction

En duopoles / oligopoles de Cournot ou de Stackelberg, les entreprises ne co-opèrent pas entre elles :

- Elles sont en concurrence ;
- Elles agissent indépendamment les unes des autres.

Question :

Que se passe-t-il si elles peuvent s'entendre ? Par exemple, que se passe-t-il si elle peuvent passer un accord sur la quantité à produire.

Résultats :

Les quantités mises sur le marché vont diminuer, et le prix du marché va augmenter. C'est donc néfaste pour les consommateurs. La raison est que le cartel se comporte exactement comme un monopole, puis partage les bénéfices.

4.3.2 Raisonnement graphique

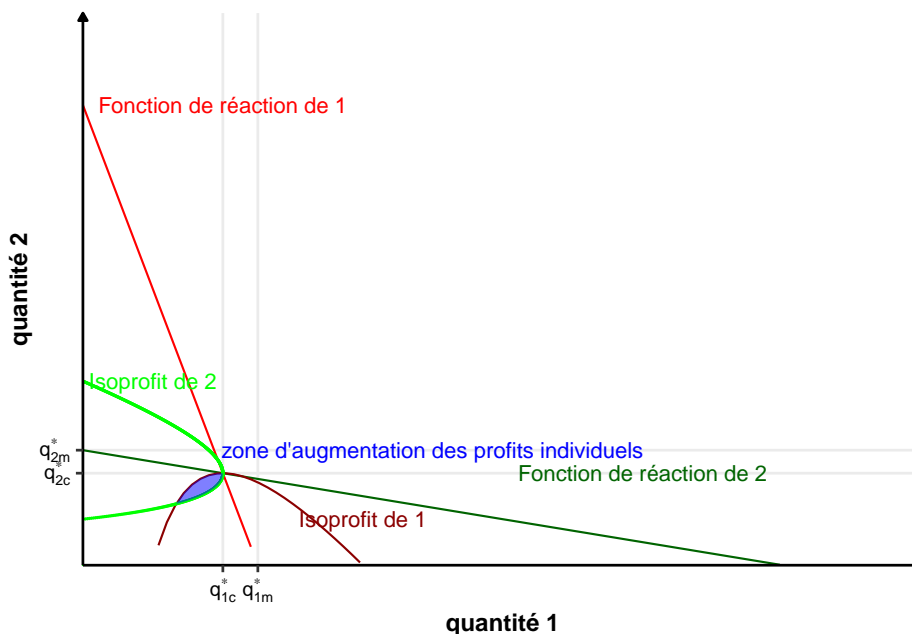


FIGURE 4.7 – Zone d'amélioration mutuellement bénéfique.

4.3.3 Résolution analytique

4.3.3.1 Idée

L'idée derrière la résolution analytique du problème du cartel est de considérer que le cartel se comporte comme un monopole avec 2 centres de productions. Le cartel choisit la quantité globale produite et la répartition entre les entreprises. C'est un raisonnement très similaire à un monopole discriminant au troisième degré.

4.3.3.2 Profits

Le profit global du cartel s'écrit :

$$\pi_c = qP(q) - C_A(q_A) - C_B(q_B) = (q_A + q_B)P(q_A + q_B) - C_A(q_A) - C_B(q_B)$$

Où $q = q_A + q_B$. Le profit est maximisé lorsque les dérivées partielles suivant chacune des quantités sont nulles (condition du premier ordre), c'est-à-dire lorsque $\frac{\partial \pi_c}{\partial q_A} = 0$ et $\frac{\partial \pi_c}{\partial q_B} = 0$.

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial q_A} = P(q) + q \frac{\partial P}{\partial q}(q_A) - \frac{\partial C_A}{\partial q_A}(q_A)$$

On a $P(q) + q \frac{\partial P}{\partial q} = R_m(q)$ est la recette marginale totale du cartel. $\frac{\partial C_A}{\partial q_A} = C_{mA}$ est le coût marginal de l'entreprise A.

On peut réécrire la dérivée du profit total suivant la quantité produite par l'entreprise A :

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial q_A} = R_m(q) - C_{mA}(q_A)$$

En utilisant le même raisonnement, on a pour l'entreprise B :

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial q_B} = R_m(q) - C_{mB}(q_B)$$

4.3.3.3 Optimalité pour le cartel

A l'optimum pour le cartel, on a donc :

$$R_m(q) = C_{mA}(q_A) = C_{mB}(q_B)$$

Le cartel égalise la recette marginale *totale* aux coûts marginaux de chacune des deux entreprises.

Remarque : Le cartel ne va pas forcément donner à produire la même quantité à chaque entreprise. La répartition dépend des coûts marginaux respectifs. Si les coûts marginaux sont identiques, les productions seront identiques.

Intuition : Supposons que la quantité totale produite est fixée. Supposons aussi que $C_{mA}(q_A) > C_{mB}(q_B)$.

Alors, en transférant la production d'une unité de l'entreprise A vers l'entreprise B, le coût diminue de $C_{mA}(q_A)$ et augmente de $C_{mB}(q_B)$. Il diminue donc au total, tout en maintenant la même quantité totale produite.

Autrement dit, tant que $C_{mA}(q_A) \neq C_{mB}(q_B)$, il est possible de diminuer le coût total de production d'une quantité donnée en répartissant celle-ci différemment entre les entreprises.

4.3.3.4 Optimalité pour une entreprise

Question : Prenons l'entreprise A, a-t-elle intérêt à rester dans le cartel (et à respecter la répartition donnée par celui-ci) ?

Le profit de l'entreprise A s'écrit :

$$\pi_A = q_A P(q) - C_A(q_A) = q_A P(q_A + q_B) - C_A(q_A)$$

La dérivée du profit s'écrit donc :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A}(q_A) = P(q_A + q_B) + q_A \frac{\partial P}{\partial q}(q_A) - C_{mA}(q_A)$$

La condition d'optimalité du cartel suivant q_A donne :

$$\begin{aligned} P(q_A^* + q_B^*) + (q_A^* + q_B^*) \frac{\partial P}{\partial q}(q_A^*) - \frac{\partial C_A}{\partial q_A}(q_A^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow P(q_A^* + q_B^*) + q_A^* \frac{\partial P}{\partial q}(q_A^*) - \frac{\partial C_A}{\partial q_A}(q_A^*) &= -q_B^* \frac{\partial P}{\partial q}(q_A^*) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \pi_A}{\partial q_A}(q_A^*) &= -q_B^* \frac{\partial P}{\partial q}(q_A^*) \end{aligned}$$

Or on sait que la fonction de demande inverse $P(q)$ est décroissante avec les quantités produites, ou que la fonction de demande est décroissante avec le prix, ce qui revient au même. Donc $\frac{\partial P}{\partial q}(q_A) < 0$. On en déduit donc que $\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A}(q_A^*) > 0$: l'entreprise A a intérêt à augmenter sa production si elle pense que l'entreprise B va respecter l'accord du cartel (et réciproquement).

En conclusion, les accords de cartel ne sont pas "naturellement" stable, ils ont besoin d'un mécanisme qui maintient l'accord, par exemple en punissant une entreprise déviant de l'accord.

4.4 Oligopoles

On étend l'analyse à N entreprises qui produisent un bien *homogène*. Comme ce bien est homogène, le prix est unique sur le marché. Chaque entreprise i choisit une quantité $q_i \geq 0$ et les produit à un coût de production $C_i(q_i)$. La production totale sur le marché est $q = \sum_i q_i$. La fonction de demande inverse sur le marché $P(q)$ dépend de la production *globale* q .

Le profit de chaque entreprise s'écrit :

$$\pi(q_i, q) = q_i P(q) - C_i(q_i)$$

Remarque (Quantité globale). Attention, ici q , la quantité globale, dépend de la quantité q_i produite par i . Implicitement, on a ainsi défini une fonction $q(q_i)$, ce qui est important dans la dérivation des résultats.

Le programme de maximisation d'une entreprise i s'écrit :

$$\max_{q_i} \pi(q_i, q) = q_i P(q) - C_i(q_i)$$

La condition du premier ordre est telle que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q(q_i^*)) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial(q_i P(q) - C_i(q_i))}{\partial q_i}(q_i^*, q(q_i^*)) = 0 \\
\Leftrightarrow & P(q^*) + q_i^* P'(q^*) - C_{im}(q_i^*) = 0 \\
\Leftrightarrow & P(q^*) - C_{im}(q_i^*) = -q_i^* P'(q^*) \\
\Leftrightarrow & \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} = -\frac{q_i^*}{P(q^*)} P'(q^*) \\
\Leftrightarrow & \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} = -\frac{q_i^*}{P(q^*)} P'(q^*) \frac{q_i^*}{q^*} \\
\Leftrightarrow & \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} = S_i \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|}
\end{aligned}$$

(La dérivée de la fonction de demande suivant le prix est négative).

Définition 4.2 (Part de marché). La part de marché détenue par une entreprise i est la part de la quantité totale produite qui l'est par cette entreprise. On la note S_i :

$$S_i = \frac{q_i}{q}$$

On obtient le *markup-pricing* que peut appliquer un producteur en situation d'oligopole à la Cournot.

$$\frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} = \frac{S_i}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|}$$

La possibilité de fixer un prix au-dessus du coût marginal dépend de la part de marché de l'entreprise.

Remarque. En monopole, $S_i = 1$, on retrouve alors bien :

$$\frac{P(q) - C_{im}(q)}{P(q)} = \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q)|}$$

En concurrence pure et parfaite $S_i \rightarrow 0$, donc $\frac{P(q) - C_{im}(q_i)}{P(q)} \rightarrow 0$, ce qui implique bien que $C_{mi}(q_i) \rightarrow P(q)$. On retrouve ainsi le résultat $P(q^*) = C_m(q^*)$.

4.4.1 Indice de Lerner

Rappel : En monopole, l'indice de Lerner est :

$$L = \frac{P(q_m^*) - C_m(q_m^*)}{P(q_m^*)} = \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q_m^*)|}$$

Définition 4.3 (Indice de Lerner d'un producteur i). On définit l'indice de Lerner pour un producteur i , noté L_i , comme son taux de marge :

$$L_i = \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)}$$

On peut exprimer cette indice de Lerner ainsi, grâce à la condition du premier ordre trouvée plus haut :

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q_i, q_{-i})|} \\ &= S_i \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Définition 4.4 (Indice de Lerner du marché). En oligopole à la Cournot avec N producteurs, on définit l'indice de Lerner du marché par :

$$L = \sum_{i=1}^N S_i L_i$$

où $S_i = q_i/q$ est la *part de marché* du producteur i et L_i est l'indice de Lerner d'un producteur i .

En utilisant l'expression obtenue pour l'indice de Lerner d'un producteur à l'équation (4.1), on peut réécrire l'indice de Lerner du marché uniquement en fonction de l'élasticité de la demande à l'équilibre et des parts de marchés de chaque producteur :

$$L = \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \sum_{i=1}^N S_i^2$$

4.4.2 Indice de concentration du marché

Définition 4.5 (Indice de Hirschman-Herfindahl (HHI)). L'indice de Hirschman-Herfindahl est la somme des carrés des part de marchés.

$$HHI = \sum_{i=1}^N S_i^2$$

C'est aussi la différence moyenne entre le coût marginal de production et le prix, multiplié par l'élasticité prix de la demande à l'optimum. Autrement dit, la moyenne des L_i pondéré par les parts de marché.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{P(q^*) - C_{im}(q_i^*)}{P(q^*)} S_i &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} S_i \\ &= \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \sum_{i=1}^N S_i^2 \\ &= \frac{HHI}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|} \end{aligned}$$

Interprétation :

Imaginons que toutes les N producteurs sont identiques (ils ont la même fonction de coût). Ils produisent alors la même quantité optimale à l'équilibre. Leur part

de marché est donc $S_i = 1/N$. Le HHI vaut :

$$\begin{aligned} HHI &= \sum_{i=1}^N S_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \\ &= \frac{N}{N^2} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Le HHI correspond à l'inverse du nombre de producteurs qui seraient identiques sur le marché et donneraient le même écart moyen entre coût marginal et prix. Plus le HHI est proche de 1, plus on se rapproche du monopole. Plus le HHI est proche de 0, plus on se rapproche de la concurrence pure et parfaite.

Le HHI est utilisé par les autorités de la concurrence pour évaluer les effets sur les prix de fusions d'entreprises. Elles peuvent interdire des fusions qui augmenteraient trop fortement le HHI.

Chapitre 5

Exercices

5.1 Concurrence pure et parfaite

Exercice 5.1. On considère un consommateur dont la fonction de demande optimale pour un bien est donnée par :

$$Q(p) = 10 - p$$

où p est le prix du bien.

1. Donnez la fonction de demande inverse correspondante. Représentez la graphiquement.
2. Quel est le prix maximum que le consommateur est prêt à payer pour la première unité de bien ? Et pour la cinquième ?
3. Calculez le surplus du consommateur lorsque le prix est de $p = 2$. Interpretez la valeur obtenue.

Solution (Exercice 5.1). La fonction de demande inverse est la fonction inverse de la fonction de demande. Autrement dit, elle exprime le prix P en fonction de la quantité q plutôt que la quantité Q en fonction du prix p . Ici on $q = 10 - p$, ce qui équivaut à $p = 10 - q$. La fonction de demande inverse est donc $P(q) = 10 - q$. Graphiquement, on obtient :

2. Pour la première unité de bien, on utilise la fonction de demande inverse. Le prix que le consommateur est prêt à payer pour la première unité est $P(q = 1) = 9$. Pour la cinquième unité, c'est $P(q = 5) = 5$. Dans les deux cas, ce sont le prix maximal que les consommateurs sont prêts à payer pour l'unité supplémentaire du bien. Rappelez-vous que la courbe de demande inverse représente l'ensemble des prix maximaux que les consommateurs sont prêts à payer pour une unité supplémentaire du bien.

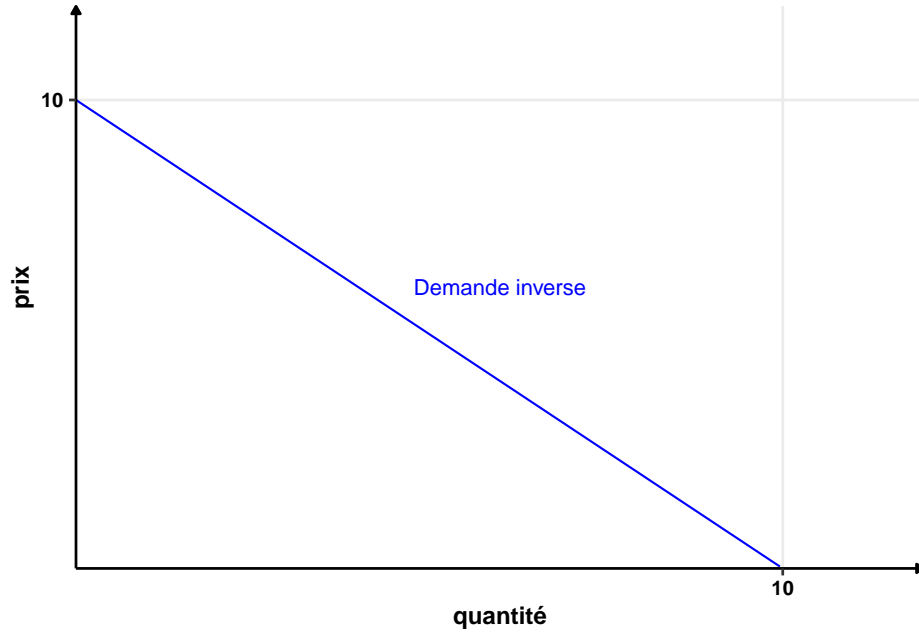


FIGURE 5.1 – Représentation graphique de la demande inverse.

3. Le surplus du consommateur est la somme des différences entre le prix maximal que chaque individu est prêt à payer et le prix auquel il paie effectivement le bien. Mathématiquement, le surplus du consommateur s'exprime toujours ainsi :

$$S_c = \int_0^{q^*} P(q) - p^* dq$$

Où p^* et q^* représente le prix sur le marché, et q^* la quantité échangée.

En général, comme on peut le voir sur la figure 5.2, il est possible de calculer le surplus en utiliser la formule donnant l'aire d'un triangle. Ici, on obtient :

$$S_c = \frac{1}{2}(10 - 2) \cdot (8 - 0) = 32$$

Les consommateurs “gagnent” donc 32 par rapport à la situation où ils devraient payer chacun leur prix de réserve.

Exercice 5.2. On considère une firme faisant face à la contrainte technologique donnée par la fonction de coût total :

$$C(q) = q^2 + 10q$$

1. Donnez la fonction de coût marginal correspondant.

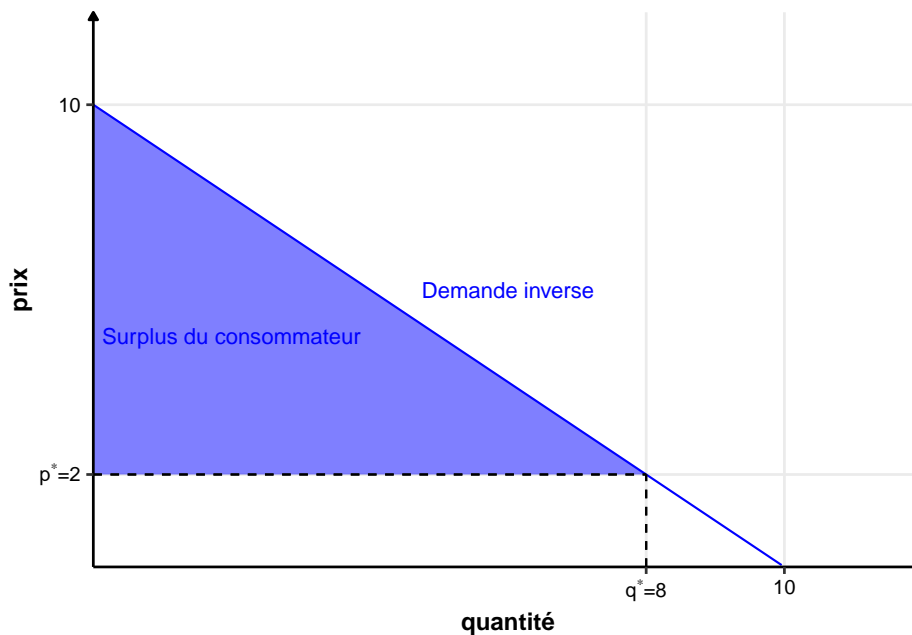


FIGURE 5.2 – Représentation graphique du surplus du consommateur.

2. Déterminez la fonction d'offre de cette firme. Représentez la graphiquement.
3. On suppose que la fonction de demande inverse du marché est donnée par :

$$P(q) = 100 - q$$

Déterminez le prix d'équilibre sur le marché, le surplus du producteur, le surplus du consommateur ainsi que le surplus total.

4. Supposons que l'État impose un prix $p = 80$. Quelle va être la quantité échangée ? Quel sera le surplus total ? Et si l'état impose un prix $p = 20$? Représentez graphiquement ces deux situations. En déduire que l'équilibre concurrentiel maximise le surplus total.

Solution (Exercice 5.2). La fonction de coût marginal est la dérivée de la fonction de coût total. La fonction de coût marginal donne le coût de production d'une unité de bien supplémentaire.

$$C_m(q) = C'(q) = 2q + 10$$

2. La fonction d'offre des producteurs en concurrence pure et parfaite est égale à la fonction de coût marginal. Si on la note S , $S(q) = C_m(q) = 2q + 10$. C'est le prix minimal auquel elle est prête à vendre une unité de bien supplémentaire.

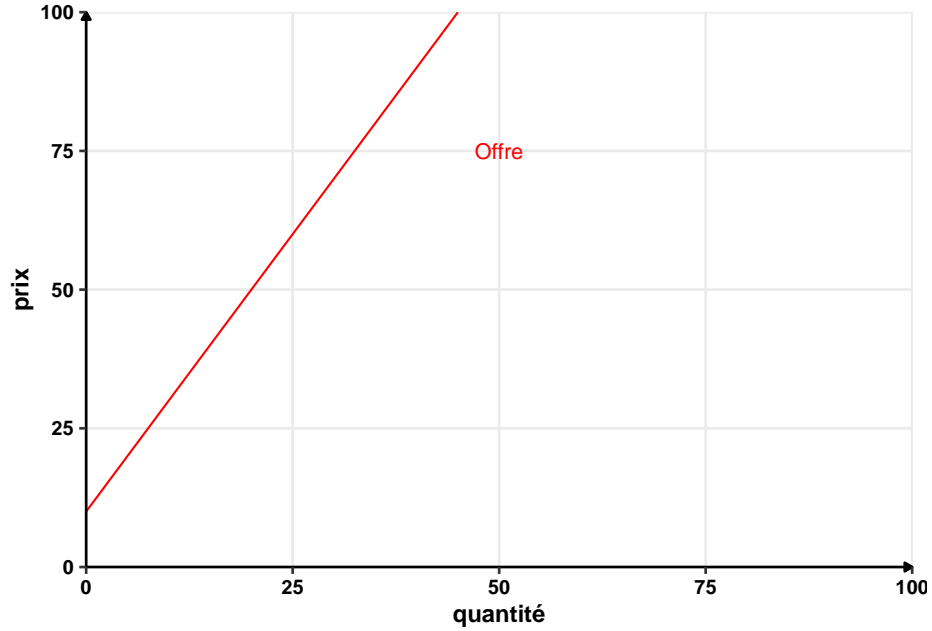


FIGURE 5.3 – Représentation graphique de la fonction d'offre.

3. A l'équilibre sur le marché, une quantité q^* de biens est échangée au prix p^* . Le marché vérifie alors les équations suivantes :

$$p^* = S(q^*) = P(q^*) \quad (5.1)$$

Commençons par la deuxième partie de l'équation (5.1) :

$$\begin{aligned} 2q^* + 10 &= 100 - q^* \\ \Leftrightarrow 3q^* &= 90 \\ \Leftrightarrow q^* &= 30 \end{aligned}$$

La quantité échangée à l'équilibre est donc de $q^* = 30$. A l'aide de la première partie de l'équation (5.1), on obtient

$$p^* = P(q^* = 30) = 100 - 30 = 70$$

Sur le marché, 30 unités de bien sont donc échangées au prix de 70. On peut alors représenter les surplus sur le marché, comme dans la figure 5.4. Le surplus des consommateurs est l'aire du triangle bleu, il vaut

$$S_c = \frac{1}{2}(100 - 70) \times (30 - 0) = 450$$

Le surplus des producteurs est l'aire du triangle rouge :

$$S_p = \frac{1}{2}(70 - 10) \times (30 - 0) = 900$$

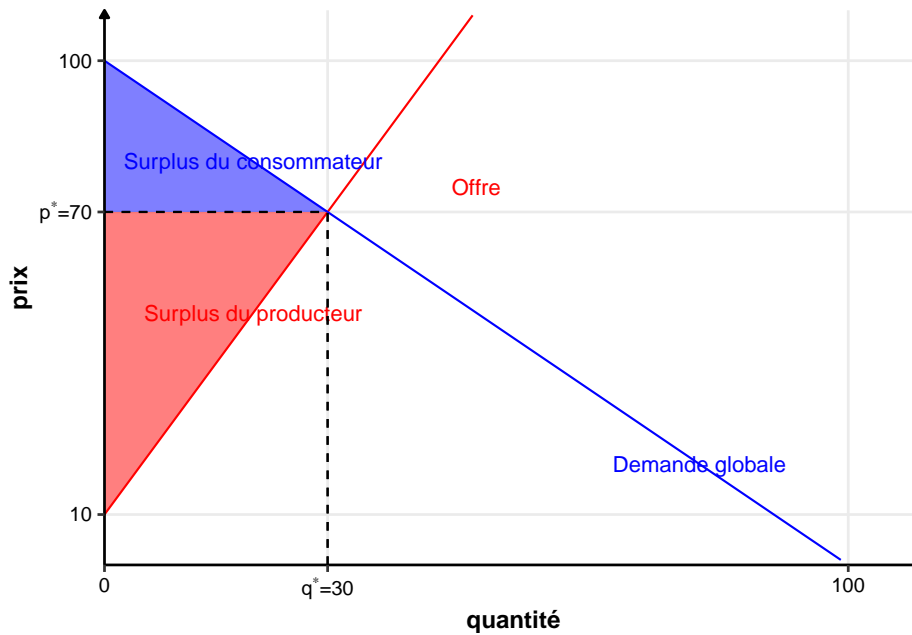
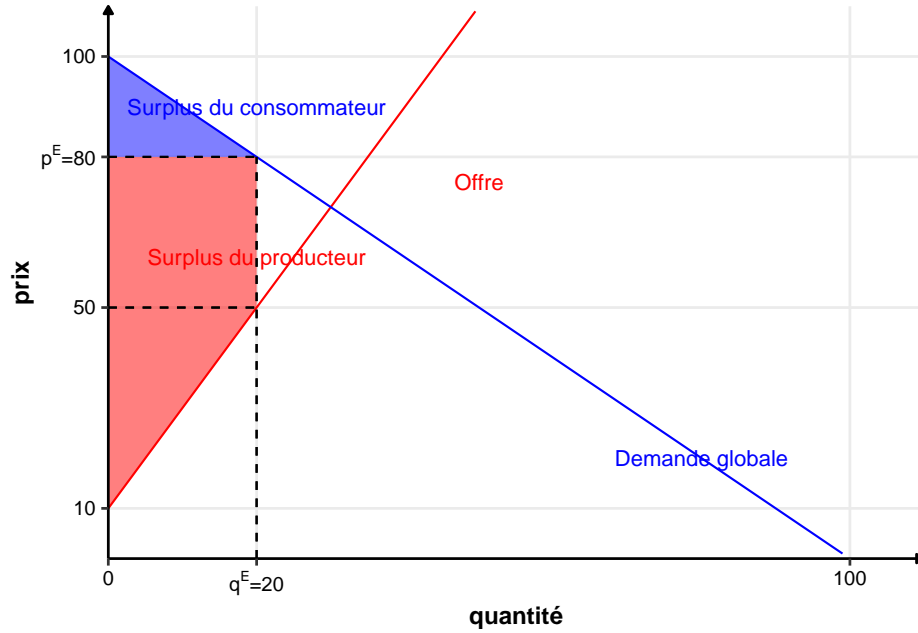


FIGURE 5.4 – Surplus en CPP.

Le surplus total est la somme des surplus des producteurs et des consommateurs :

$$S_t^{CPP} = S_c + S_p = 1350$$

4. On regarde maintenant le cas l'état impose un prix $p^E = 80$. La demande globale vaut alors de $Q(p^E) = 100 - p^E = 20$, que l'on l'obtient en inversant la demande inverse, autrement dit en trouvant la quantité q telle que $P(q) = p^E = 80$. L'offre globale vaut $S(p^E) = \frac{p^E - 10}{2} = 35$, que l'on obtient en inversant la fonction d'offre, autrement dit en trouvant la quantité q telle que $S(q) = p^E = 80$. La demande globale est plus faible que l'offre globale, c'est donc la demande globale qui fixera les quantités échangées. La quantité échangée vaut donc 20. Graphiquement, on obtient la figure ??.

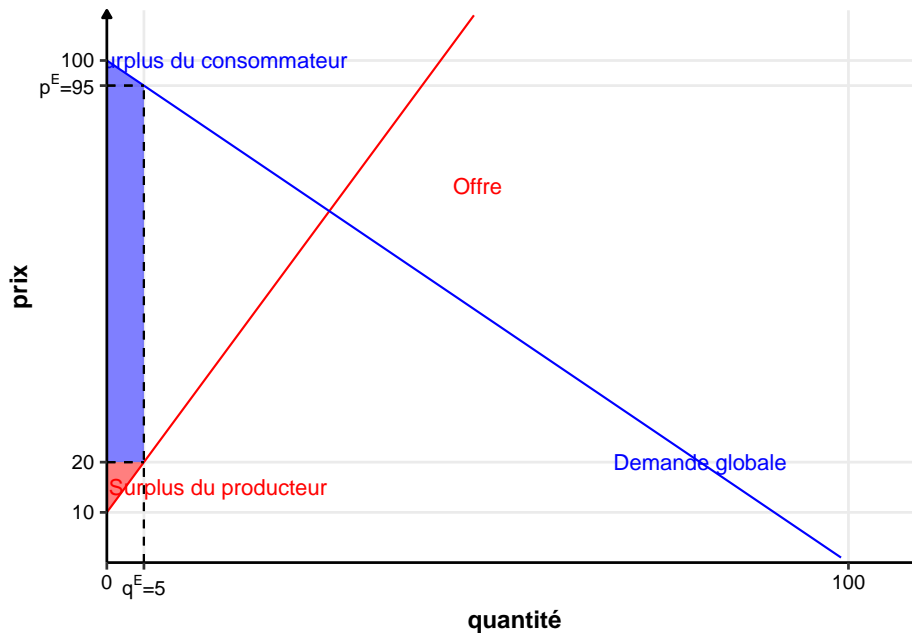


Le surplus total est dans ce cas l'aire du trapèze bleu et rouge. Il nous faut obtenir le point sur la courbe d'offre pour la quantité q^E . En ce point, le prix est $S(q^E) = 50$.

$$S_t = \frac{1}{2}(100 - 10 + 80 - 50) \times (20 - 0) = 1200 < S_t^{CPP}$$

Le surplus total est dans ce cas plus faible qu'en CPP.

On s'intéresse finalement au cas où l'état impose un prix $p^E = 20$. La demande globale vaut alors de $Q(p^E) = 100 - p^E = 80$, que l'on l'obtient en inversant la demande inverse, autrement dit en trouvant la quantité q telle que $P(q) = p^E = 20$. L'offre globale vaut $S(p^E) = \frac{p^E - 10}{2} = 5$, que l'on obtient en inversant la fonction d'offre, autrement dit en trouvant la quantité q telle que $S(q) = p^E = 20$. L'offre globale est plus faible que la demande globale, c'est donc l'offre globale qui fixera les quantités échangées. La quantité échangée vaut donc 20. Graphiquement, on obtient la figure ??.



Le surplus total est dans ce cas l'aire du trapèze bleu et rouge. Il nous faut obtenir le point sur la courbe d'offre pour la quantité q^E . En ce point, le prix est $S(q^E) = 20$.

$$S_t = \frac{1}{2}(100 - 10 + 95 - 20) \times (5 - 0) = \frac{825}{2} = 412.5 < S_t^{CPP}$$

Le surplus total est dans ce cas aussi plus faible qu'en CPP.

Ces deux situations illustrent les deux cas qui s'écartent de la CPP : un prix plus élevé ou un prix plus faible. Dans les deux cas, on voit que le surplus total est plus faible. Ce serait vrai pour n'importe quel prix différent du prix de la concurrence pure et parfaite. On illustre ainsi le fait que l'équilibre de CPP maximise le surplus total.

5.2 Exercices sur le comportement monopole

Exercice 5.3 (Questions de cours). Questions de cours :

1. Quand la demande de bien est inélastique, la recette marginale est-elle positive ?
2. Un monopole maximise son profit dans la zone où les quantités demandées sont élastiques au prix. Vrai ou faux ?
3. Dans quel cas un monopole se comportera-t-il comme s'il était en situation de concurrence pure et parfaite (sans intervention de l'État) ?
4. Une entreprise a un taux de marge (indice de Lerner) de 45%. Quelle est l'élasticité de la demande à laquelle elle fait face ?

Solution (Solution de l'exercice 5.3). Réponses :

1. Non, cf cours.
2. Vrai, cf cours.
3. Si l'élasticité prix de la demande est infini.
4. On a d'après la définition de l'indice de Lerner (3.2) :

$$L = \frac{P(q^*) - C_m(q^*)}{P(q^*)} = \frac{1}{|\varepsilon_{p/q}(q^*)|} = 0.45$$

$$\text{Donc } |\varepsilon_{p/q}(q^*)| = 1/0.45 = 20/9.$$

Exercice 5.4. On considère une entreprise en monopole sur son marché dont la fonction de coût est :

$$C(q) = \frac{1}{20}q^2 + 15q + 500$$

et qui fait face à la fonction de demande inverse :

$$P(q) = 45 - 0,2q$$

1. Déterminer le prix p_m^* et la quantité q_m^* d'équilibre du monopole.
2. Les représenter graphiquement.
3. Calculer l'élasticité prix de la demande au point d'équilibre. Interpréter le résultat.
4. Calculer le surplus des consommateurs et le profit du monopole.
5. Déterminer le prix et la quantité correspondant à l'optimum de Pareto (concurrence pure et parfaite). Montrer que dans cette situation le surplus des consommateurs et le surplus social sont plus élevés, et que le profit du producteur est plus faible.
6. Calculer la charge morte du monopole.

Solution (Solution de l'exercice 5.4). Réponses.

1. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$C_m(q^*) = \frac{1}{10}q + 15$$

Et :

$$R(q) = qP(q) = 45q - \frac{1}{5}q^2$$

Donc :

$$R_m(q) = 45 - \frac{2}{5}q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 45 - \frac{2}{5}q^* &= \frac{1}{10}q^* + 15 \\ \Leftrightarrow 30 &= \frac{1}{2}q^* \\ \Leftrightarrow q^* &= 60 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -\frac{2}{5}$$

$$C'_m(q) = \frac{1}{10} > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Finalement, le prix est $p^* = P(q^*) = 33$.

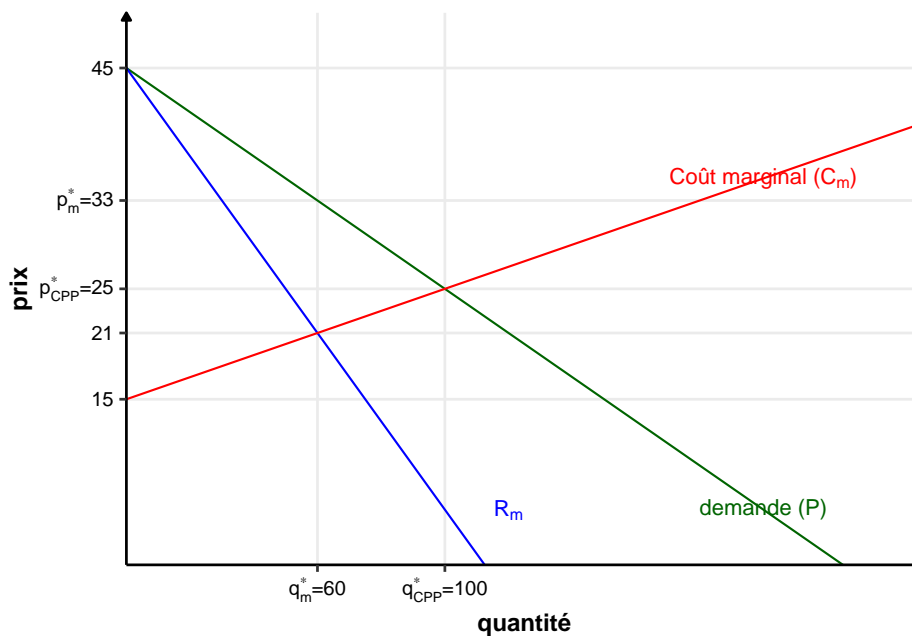


FIGURE 5.5 – Représentation graphique

3. On a l'élasticité prix de la demande à l'équilibre :

$$\varepsilon_{q/p}(q^*) = \frac{p^*}{q^*} \frac{1}{P'(q^*)} = \frac{33}{60} \frac{1}{-0.2} = -\frac{11}{4}$$

La valeur absolue est bien plus grande que 1, nous sommes bien dans la zone où la demande est élastique. On peut aussi la calculer à l'aide de :

$$\frac{p^* - C_m(q^*)}{p^*} = \frac{33 - 6 - 15}{33} = \frac{4}{11} = \frac{1}{|\varepsilon_{q/p}(q^*)|}$$

On calcule ainsi le pouvoir du monopole : sa capacité à imposer au consommateur un prix à l'équilibre supérieur à son coût marginal.

4. Commençons par la représentation graphique.

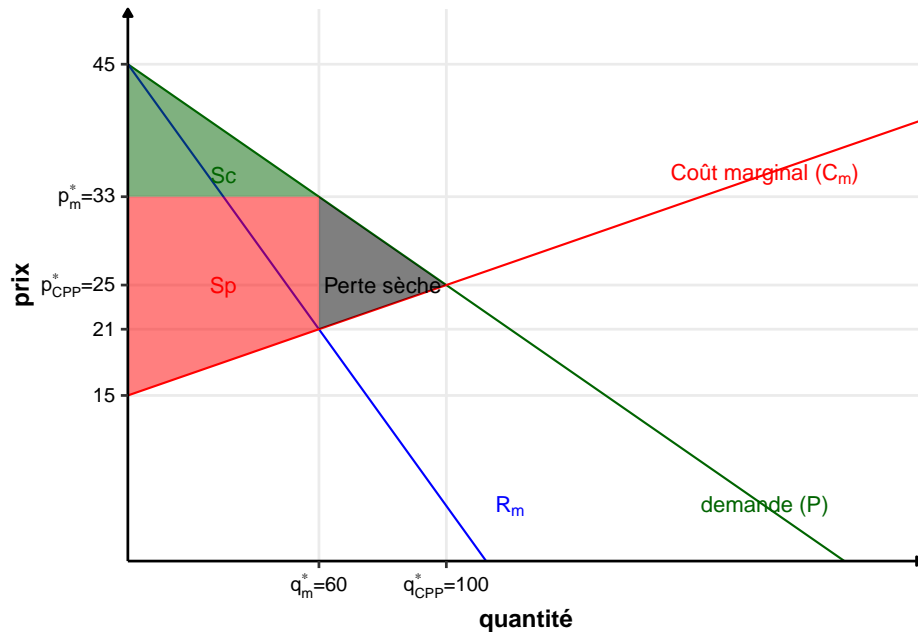


FIGURE 5.6 – Avec les surplus en monopole.

Le surplus des consommateurs se calcule en calculant l'aire du triangle vert dans la figure 5.6. On obtient :

$$S_c = \frac{(45 - 33)(60 - 0)}{2} = 360$$

Le surplus du producteur s'obtient en calculant l'aire du trapèze rouge :

$$S_p = \frac{(33 - 15 + 33 - 21)(60 - 0)}{2} = 900$$

Le profit du producteur est le surplus diminué du coût fixe, qui vaut ici 500. Le profit vaut donc 400. Le surplus total est la somme des surplus des consommateurs et du producteur, soit $S_T = 1260$.

5. En CPP, le prix est fixé par le marché et le prix est égal au coût marginal. On a (ici q^* et p^* sont différents des parties précédentes) :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

$$\frac{1}{10}q^* + 15 = 45 - \frac{1}{5}q^*$$

En résolvant l'équation, on obtient $q^* = 100$ et on peut en déduire $p^* = 25$. Pour calculer les surplus, on commence par la représentation graphique.

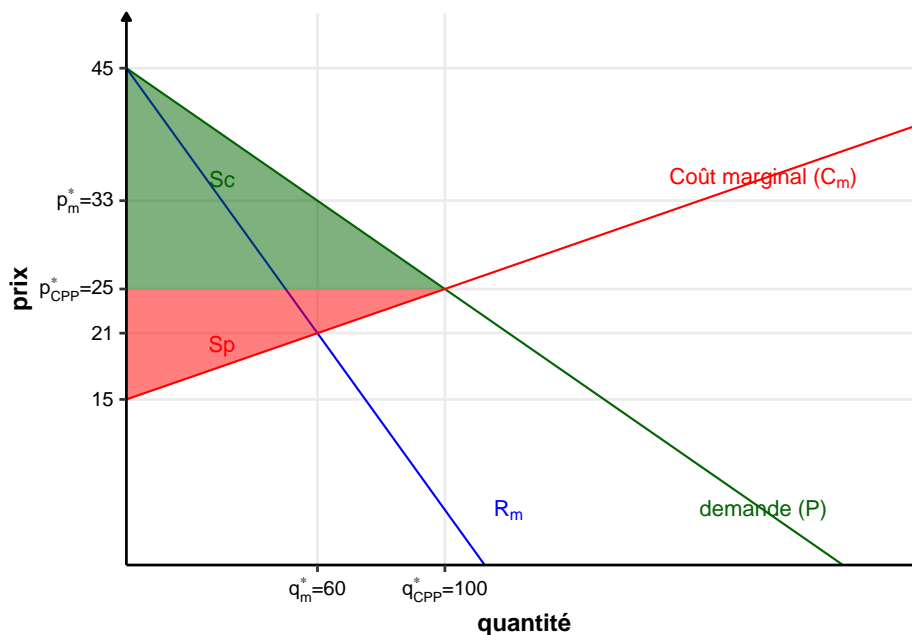


FIGURE 5.7 – Avec les surplus en CPP.

On calcule l'aire du triangle vert pour obtenir le surplus total des consommateurs. Il vaut 1000, ce qui est supérieur au surplus obtenu en monopole.

On calcule l'aire du triangle rouge pour obtenir le surplus total du producteur. Il vaut 500. Si maintenant on enlève le coût fixe pour obtenir le profit, on obtient un profit nul. Il est donc plus faible qu'en monopole.

Le surplus total en CPP vaudrait donc 1500, ce qui est supérieur au surplus total obtenu en monopole.

6. La charge morte du monopole est la différence entre le surplus total en CPP et en monopole, soit $1500 - 1260 = 240$. On peut aussi la calculer en utilisant l'aire du triangle noir sur la figure 5.6.

Exercice 5.5. Sur un marché dominé par un producteur unique, la fonction de demande inverse pour une quantité q de bien est :

$$P(q) = 250 - q$$

La fonction de coût total du monopole est :

$$C(q) = 4q^2 + 10q + 400$$

1. Quelle est la production d'équilibre du monopole ? Quel est le prix de vente ainsi que le profit du producteur ?
2. Comparez la solution précédente avec l'équilibre qui serait réalisé si l'entreprise se comportait comme en situation de concurrence pure et parfaite.
3. Dans chacun des cas ci-dessus, calculez le surplus du producteur, du consommateur, ainsi que le surplus total. Concluez sur l'impact de la présence d'un monopole sur le niveau de bien-être social.
4. Supposez que le producteur détienne un stock très important du bien (son coût marginal de production est nul). Donnez la solution du monopole dans une telle situation.

Solution (Solution de l'exercice 5.5.). Réponses :

1. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C'_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$C'_m(q^*) = C'(q) = 8q + 10$$

Et :

$$R(q) = qP(q) = 250q - q^2$$

Donc :

$$R'_m(q) = R'(q) = 250 - 2q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 250 - 2q^* &= 8q^* + 10 \\ \Leftrightarrow 240 &= 10q^* \\ \Leftrightarrow q^* &= 24 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -2$$

$$C'_m(q) = 8 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_M^* = P(q^*) = 226$. Finalement, on peut calculer le profit :

$$\pi^M(q^*) = R(q^*) - C(q^*) = p^*q^* - C(q^*) = 24 \times 226 - (4 \times 24^2 + 10 \times 24 + 400) = 2480 > 0$$

Le profit est bien positif, ce qui est la dernière condition à vérifier pour l'optimum.

A l'optimum, il y a 24 unités de bien échangées sur le marché, au prix de 226. Cela permet au monopole de faire un profit de 2480.

On représente graphiquement la situation obtenue sur la figure 5.8.

2. En CPP, le prix est fixé par le marché, le producteur le considère comme une donnée dans son optimisation. La courbe d'offre est égal à la courbe de coût marginal. À l'équilibre en CPP, l'offre est égale à la demande. On obtient (ici q^* et p^* sont différents des parties précédentes) :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

$$8q^* + 10 = 250 - q^*$$

En résolvant l'équation, on obtient $q_{CPP}^* = 80/3$ et on peut en déduire $p_{CPP}^* = 670/3$. On peut maintenant calculer le profit de la même manière que dans la question précédente, et on obtient $\pi^{CPP}(q_{CPP}^*) = 22000/9 < \pi^M$. Le profit du producteur en concurrence pure et parfaite est inférieur au profit en monopole. La quantité produite est supérieure et le prix du bien échangé inférieur.

3. Pour calculer les surplus en monopole, commençons par la représentation graphique (figure 5.9).

Le surplus des consommateurs se calcule en calculant l'aire du triangle vert dans la figure 5.9. On obtient :

$$S_c = \frac{(250 - 226)(24 - 0)}{2} = 288$$

Le surplus du producteur s'obtient en calculant l'aire du trapèze rouge, ou bien en ajoutant le coût fixe (400 ici) au profit calculé à la question 1 :

$$S_p = \pi^M + CF = 2480 + 400 = 2880$$

Le surplus total est la somme des surplus des consommateurs et du producteur, soit $S_t^M = 3168$.

Pour calculer les surplus en concurrence pure et parfaite, on commence par la représentation graphique (figure 5.10).

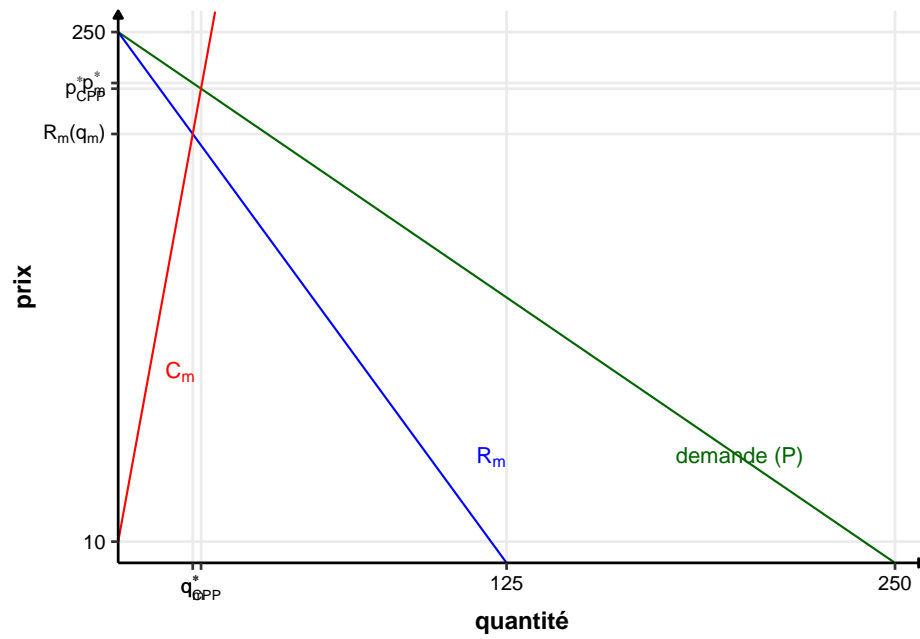


FIGURE 5.8 – Représentation graphique

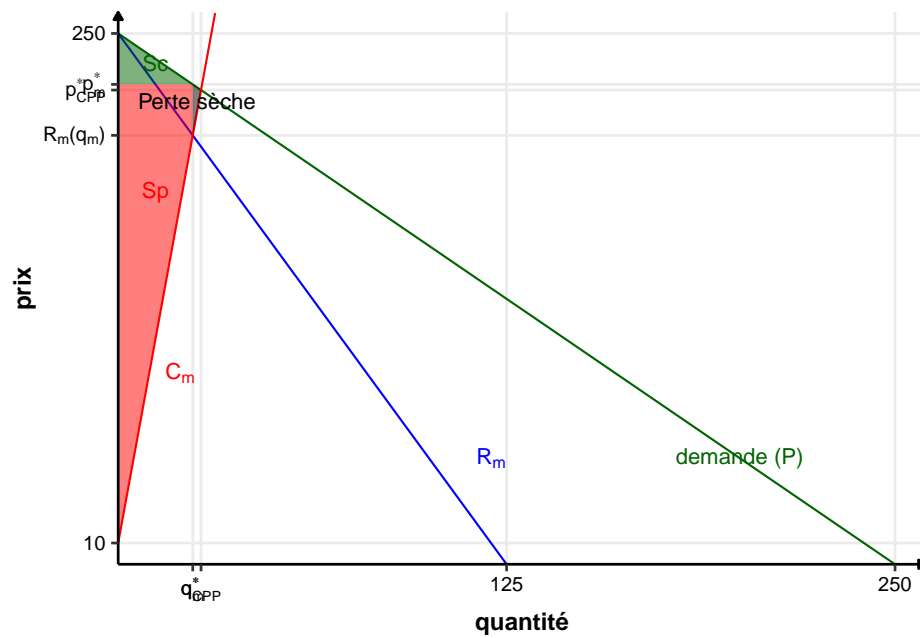


FIGURE 5.9 – Avec les surplus en monopole.

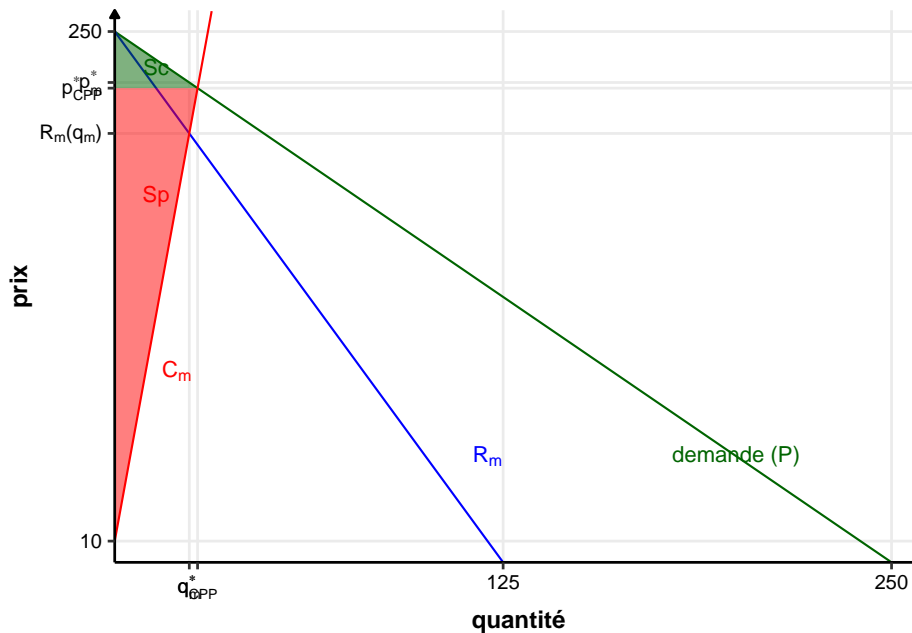


FIGURE 5.10 – Avec les surplus en CPP.

On calcule l'aire du triangle vert pour obtenir le surplus total des consommateurs. Il vaut $3200/9$, ce qui est supérieur au surplus obtenu en monopole.

On calcule l'aire du triangle rouge pour obtenir le surplus total du producteur, ou bien on ajoute le coût fixe (400 ici) au profit calculé à la question 2. Il vaut ici $25600/9$. Il est donc plus faible qu'en monopole.

Le surplus total en CPP vaudrait donc 3200, ce qui est supérieur au surplus total obtenu en monopole. Le monopole a un impact négatif sur le niveau de bien-être social. Il introduit une charge morte de 32.

4. À l'optimum, le monopole égalise recette marginale et coût marginal. Ici le coût marginal est nul, la recette marginale doit donc être nulle. On obtient donc l'équation :

$$0 = R_m(q^*) = 250 - 2q^*$$

On en déduit donc que $q^* = 125$. On peut alors calculer $p^* = P(q^*) = 125$. Quand le coût marginal du monopole est nul, il produit 125 unités de bien, vendues au prix 125.

5.3 Le monopole naturel

Exercice 5.6. On considère une entreprise en monopole sur son marché dont la fonction de coût est :

$$C(q) = \frac{5}{3}q^3 - 40q^2 + 340q$$

et qui fait face à la fonction de demande inverse :

$$P(q) = 500 - 50q$$

1. Calculer les grandeurs d'équilibre du monopole (p_m^*, q_m^*) .
2. Calculer le prix et la quantité d'équilibre de la concurrence pure et parfaite (p_{cpp}^*, q_{cpp}^*) .
3. Calculer le profit du monopole dans ces deux situations. Interpréter le résultat.
4. Représenter graphiquement le coût marginal, le coût moyen, la demande et la recette marginale. Représenter la variation du profit du monopole entre ces deux situations.
5. Calculer le prix et la quantité assurant l'équilibre des finances du monopole, (p_B, q_B) . Comparer cette situation à l'optimum de Pareto de la concurrence pure et parfaite. Conclure.

Solution (Solutions de l'exercice 5.6). Réponses :

1. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$C_m(q^*) = C'(q) = 5q^2 - 80q + 340$$

Et :

$$R(q) = qP(q) = 500q - 50q^2$$

Donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 500 - 100q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 500 - 100q^* &= 5q^{*2} - 80q^* + 340 \\ \Leftrightarrow 5q^{*2} + 20q^* - 160 &= 0 \\ \Leftrightarrow q^{*2} + 4q^* - 32 &= 0 \end{aligned}$$

On doit donc résoudre une équation du second degré pour obtenir le résultat. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-32) = 16 + 128 = 144 = 12^2$$

On en déduit que :

$$q^8 = \frac{-4 \pm 12}{2} = 4 \text{ ou } -8$$

La solution $q^* = -8$ est impossible, car les quantités sont forcément positives. La seule solution est donc $q_m^* = 4$. Remarquez qu'il est possible de "voir" sur l'équation du second degré que 4 était une racine et de se passer du calcul du discriminant. On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -100$$

$$C'_m(q) = 10q - 80$$

En évaluant la dérivée du coût marginal en q^* , on a $C'_m(q^*) = 10 \times 4 - 80 = -40 > R'_m(q^*)$. La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Nous calculerons le profit à la question 3, nous n'allons donc pas le faire ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 300$.

2. En CPP, le prix est fixé par le marché, le producteur le considère comme une donnée dans son optimisation. La courbe d'offre est égal à la courbe de coût marginal. À l'équilibre en CPP, l'offre est égale à la demande. On obtient (ici q^* et p^* sont différents de la partie précédente) :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

$$\begin{aligned} 500 - 50q^* &= 5q^{*2} - 80q^* + 340 \\ \Leftrightarrow 5q^{*2} - 30q^* - 160 &= 0q^* \\ \Leftrightarrow q^{*2} - 6q^* - 32 &= 0q^* \end{aligned}$$

On doit donc résoudre une équation du second degré pour obtenir le résultat. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (-6)^2 + 4 \times 32 = 36 + 128 = 164 = 4 \times 41$$

On en déduit que :

$$q^* = \frac{6 \pm \sqrt{41}}{2} = 3 + \sqrt{41} \text{ ou } 3 - \sqrt{41}$$

La solution $q^* = 3 - \sqrt{41} < 0$ est impossible, car les quantités sont forcément positives. La seule solution est donc $q_{CPP}^* = 3 + \sqrt{41} \approx 9.4$. On peut en déduire $p_{CPP}^* = 50(7 - \sqrt{41}) \approx 29.84$.

3. On calcule maintenant les profits. En monopole :

$$\pi(p_m^*, q_m^*) = p_m^* q_m^* - C(q_m^*) = 4 \times 300 - \frac{5}{3} 4^3 + 40 \times 4^2 - 340 \times 4 = \frac{1120}{3} \approx 373,33$$

En concurrence pure et parfaite :

$$\pi(p_{CPP}^*, q_{CPP}^*) = p_{CPP}^* q_{CPP}^* - C(q_{CPP}^*) \approx -765$$

Le profit des entreprises en concurrence pure et parfaite serait négatif. Le marché n'existerait donc pas, aucune entreprise ne souhaiterait produire pour faire des pertes. Cela signifie aussi qu'il ne serait pas possible pour l'État d'imposer au monopole une tarification au coût marginal. On est en fait dans une situation de monopole naturel, avec des coûts moyens décroissants. La tarification peut donc se faire au coût marginal, ce qu'on verra à la question 5.

4. Nous allons maintenant représenter graphiquement cette situation.

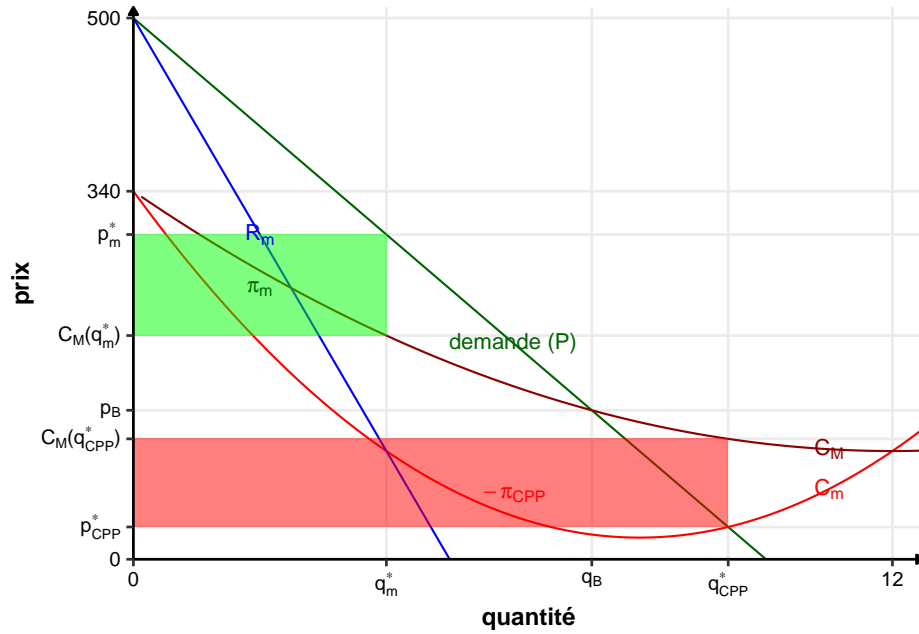


FIGURE 5.11 – Représentation graphique des équilibres

5. Assurer l'équilibre des finances du monopole signifie faire en sorte qu'il ne fasse ni profits, ni pertes. Autrement dit, $\pi(p_B, q_B) = 0$. Cela se traduit par :

$$\begin{aligned} p_B q_B - C(q_B) &= 0 \\ \Leftrightarrow p_B &= \frac{C(q_B)}{q_B} \\ \Leftrightarrow P(q_B) &= C_M(q_B) \end{aligned}$$

On oblige ainsi le monopole à fixer le prix à son coût moyen, ce qui est une manière de réguler un monopole naturel. On a $C_M(q) = \frac{5}{3}q^2 - 40q + 340$

On résout ainsi le problème :

$$\begin{aligned} 500 - 50q_B &= \frac{5}{3}q_B^2 - 40q_B + 340 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{3}q_B^2 + 10q_B - 160 &= 0 \\ \Leftrightarrow q_B^2 + 6q_B - 96 &= 0 \end{aligned}$$

On doit donc résoudre une équation du second degré pour obtenir le résultat. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 6^2 + 4 \times 96 = 36 + 384 = 164 = 4 \times 105$$

On en déduit que :

$$q_B = \frac{-6 \pm 2\sqrt{105}}{2} = -3 + \sqrt{105} \text{ ou } -3 - \sqrt{105}$$

La solution $q_B = -3 - \sqrt{105} < 0$ est impossible, car les quantités sont forcément positives. La seule solution est donc $q_B = -3 + \sqrt{105} \approx 7.25$. On peut en déduire $p_B = 50(13 - \sqrt{105}) \approx 137.65$.

On observe que $p_B > p_{CPP}^*$ et $q_B < q_{CPP}^*$, mais en échange, le monopole est à l'équilibre financier et produira. La situation n'est pas optimale au sens de Pareto, et il y aura une charge morte, mais l'optimum de Pareto est inatteignable sans subventionner le monopole. Il est impossible de le forcer à tarifier au coût marginal, en utilisant par exemple un prix maximal, car il ferait alors des pertes et ne produirait simplement pas. La solution de la tarification au coût moyen est en quelques sorte la deuxième meilleure solution possible, mais c'est la seule faisable.

Exercice 5.7. Une entreprise est en monopole sur un marché où la fonction de demande est :

$$Q(p) = 30 - p$$

La fonction de coût total du monopole est :

$$C(q) = 100 + \frac{q^2}{2}$$

1. Calculez le prix, la quantité d'équilibre et le profit. Représentez graphiquement cet équilibre et le surplus collectif.
2. L'État décide d'imposer au monopole une tarification au coût marginal. Expliquez cette décision. Représentez le nouvel équilibre et les surplus sur le précédent graphique. Commentez.
3. Calculez le surplus du consommateur et le surplus collectif sans et avec tarification au coût marginal.

Après une innovation technologique, la fonction de coût devient :

$$C(q) = 100 + \frac{q}{2}$$

4. L'État peut-il continuer à imposer une tarification au coût marginal ?
5. Quelle situation peut-il retenir ? Pourquoi ? Calculez et représentez le nouveau surplus collectif.

Solution (Solution de l'exercice 5.7). 1. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$C_m(q^*) = C'(q) = q$$

Et :

$$R(q) = qP(q) = 30q - q^2$$

La fonction qui nous est donnée est la demande Q et non la demande inverse P . On doit donc trouver la demande inverse, c'est à dire la fonction P telle que $Q(P(q)) = q$:

$$30 - P(q) = q \Leftrightarrow P(q) = 30 - q$$

La fonction de demande inverse P est donc $P(q) = 30 - q$. Donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 30 - 2q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 30 - 2q^* &= q^* \\ \Leftrightarrow q^* &= 10 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -2$$

$$C'_m(q) = 1 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 20$. Le profit est :

$$\pi(q_m^*, p_m^*) = p_m^* q_m^* - C(q_m^*) = 20 \times 10 - \left(100 + \frac{10^2}{2}\right) = 50 > 0$$

Le profit est bien positif. À l'optimum, 10 unités sont échangées sur ce marché, au prix de 20. Le monopole réalise alors un profit de 50.

2. La tarification au coût marginal du monopole a pour but d'obtenir l'équilibre de concurrence pure et parfaite, qui est un optimum de Pareto. L'État cherche en fait à augmenter le surplus collectif. Nous allons représenter ce nouvel équilibre comme étant l'équilibre de concurrence pure et parfaite.

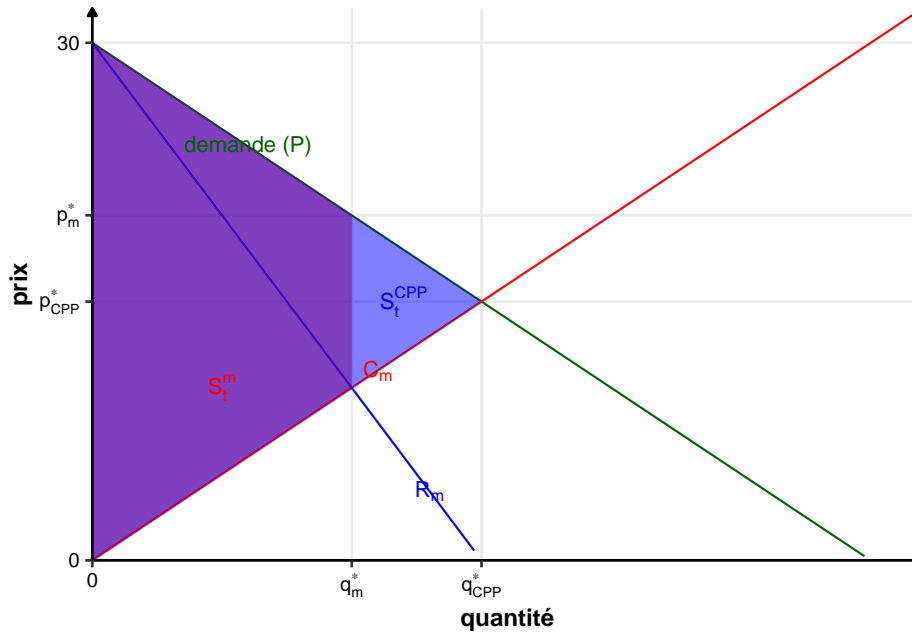


FIGURE 5.12 – Représentation graphique des équilibres

3. Le surplus des consommateurs dans la situation de monopole (question 1) est donné par :

$$S_c^m = \frac{1}{2}(30 - p_m^*) \times q_m^* = \frac{1}{2}(30 - 20) \times 10 = 50$$

Le surplus du monopole est donné par :

$$S_p^m = \pi^m + CF = 50 + 100 = 150$$

Car le coût fixe vaut 50. Le surplus collectif est donc de :

$$S_t^m = S_c^m + S_p^m = 150 + 50 = 200$$

Pour calculer les surplus avec la tarification au coût marginal, nous devons commencer par calculer les quantités et prix de l'échange. Nous avons l'équation suivante dans cette configuration :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

$$q^* = 30 - q^* \Leftrightarrow q_{CPP}^* = 15$$

Et :

$$p_{CPP}^* = P(q^*) = q^* = 15$$

En tarifiant au coût marginal, il y a donc 15 unités de biens échangées sur le marché, au prix de 15. Le surplus des consommateurs est alors :

$$S_c^{CPP} = \frac{1}{2}(30 - p_{CPP}^*) \times q_{CPP}^* = \frac{1}{2}(30 - 15) \times 15 = \frac{225}{2} > S_c^m$$

Le surplus du producteur est :

$$S_p^{CPP} = \frac{1}{2}(p_{CPP}^* - 0) \times q_{CPP}^* = \frac{1}{2}(30 - 15) \times 15 = \frac{225}{2} < S_p^m$$

On en déduit que le surplus total est :

$$S_t^{CPP} = S_c^{CPP} + S_p^{CPP} = \frac{225}{2} + \frac{225}{2} = 225 > S_t^m$$

Le surplus collectif est plus important quand l'État impose une tarification au coût marginal que quand il le laisse choisir sa quantité ou son prix.

4. Avec cette nouvelle fonction de coût, le coût marginal devient :

$$C_m(q) = \frac{1}{2}$$

La tarification au coût marginal donnerait donc un prix de l'échange de $p^* = 1/2$. On peut calculer le coût moyen d'une unité produite :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{100}{q} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = p^*$$

Le coût moyen d'une unité produite serait donc supérieur au prix de l'échange, et ce, quelque soit le nombre d'unités produites. Le producteur ferait donc systématiquement des pertes, à cause de ces coûts fixes, ce qui n'est pas une situation soutenable. Il se retirerait donc du marché.

Rappel : $\pi(q) = pq - C(q) = q(p - C(q)/q) = q(p - C_M(q))$.

5. L'État peut forcer le monopole à tarifier au coût moyen et à répondre à toute la demande. En l'obligeant à vendre à son coût moyen de production, il s'assure que le monopole ne fait ni bénéfices, ni pertes. On a alors la condition d'équilibre :

$$C_M(q^*) = P(q^*) = p^*$$

On résout l'équation de gauche :

$$\begin{aligned} C_M(q^*) &= P(q^*) \\ \Leftrightarrow \frac{100}{q^*} + \frac{1}{2} &= 30 - q^* \\ \Leftrightarrow 200 + q^* &= 60q^* - 2q^{*2} \\ \Leftrightarrow 2q^{*2} - 59q^* + 200 &= 0 \end{aligned}$$

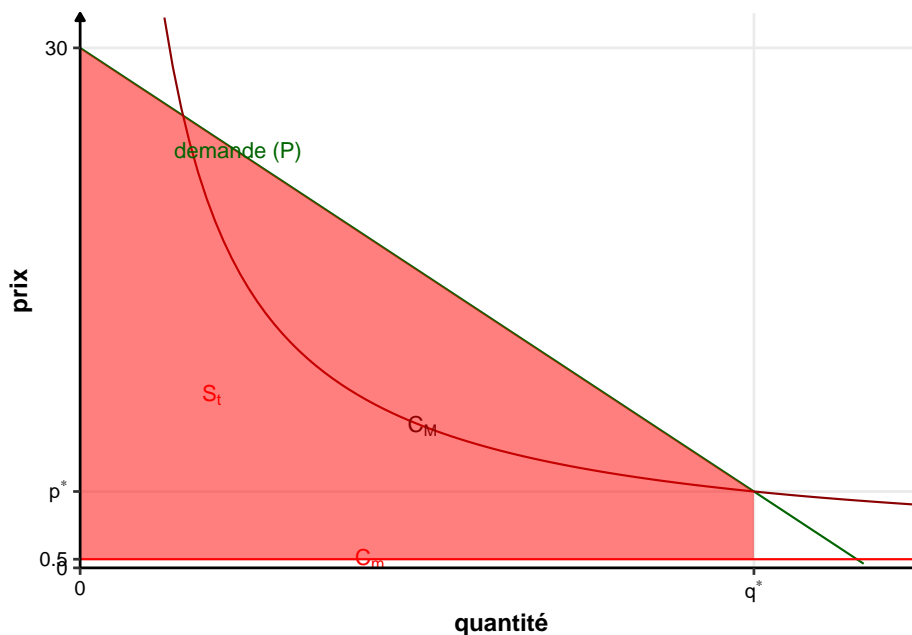
Pour trouver la solution, on doit donc résoudre une équation du second degré. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (-59)^2 - 4 \times 200 \times 2 = 3481 - 1600 = 1881 = 9 \times 209$$

On en déduit que :

$$q^* = \frac{59 \pm 3\sqrt{209}}{4}$$

Les deux racines sont positives, l'obligation de satisfaire toute la demande font que l'on prend la racine la plus grande. La solution est donc $q^* = \frac{59+3\sqrt{209}}{4} \approx 25.59$. On peut en déduire $p^* = \frac{61-3\sqrt{209}}{4} \approx 4.41$.



On représente graphiquement le surplus collectif sur la figure ???. On voit que le surplus collectif est un trapèze :

$$S_t = \left(30 - \frac{1}{2} + p^* - \frac{1}{2}\right) \times \frac{q^*}{2} = (29 - p^*) \times \frac{q^*}{2}$$

En calculant (à la calculatrice), on obtient $S_t \approx 314.69$.

Exercice 5.8. La demande d'un bien est donnée par :

$$Q(p) = 1000 - 50p$$

Le coût marginal et le coût moyen sont fixes à 10€ l'unité.

1. Quels sont les prix et les quantités d'équilibre en concurrence et en monopole ?

2. L'État impose une taxe de 2 euros par unité. Quels sont les nouveaux prix et quantités en concurrence et en monopole ?
3. Quelle est la part de l'augmentation des prix supportée par les consommateurs en monopole et en concurrence ?

Solution (Solution de l'exercice 5.7). En lisant les données, nous pouvons écrire les fonctions de coût marginal et de coût moyen :

$$C_m(q) = 10 \quad C_M(q) = 10$$

On peut en déduire que la fonction de coût total est $C(q) = 10q$. La fonction qui nous est donnée est la demande Q et non la demande inverse P . Pour résoudre l'exercice, nous avons besoin de la fonction de demande inverse, c'est à dire la fonction P telle que $Q(P(q)) = q$:

$$1000 - 50P(q) = q \Leftrightarrow P(q) = 20 - \frac{q}{50}$$

1. Nous allons commencer par résoudre le problème du monopole. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$R(q) = qP(q) = 20q - \frac{1}{50}q^2$$

Donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 20 - \frac{1}{25}q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 20 - \frac{1}{25}q_m^* &= 10 \\ \Leftrightarrow q_m^* &= 250 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -1/25$$

$$C'_m(q) = 10 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 15 > 10 = C_M(q)$. Le prix est supérieur au coût moyen, donc les profits seront positifs. À l'optimum, 250 unités sont échangées sur ce marché, au prix de 15€.

Résolvons maintenant le problème en concurrence pure et parfaite. La condition d'équilibre en concurrence pure et parfaite est :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

$$10 = 20 - \frac{1}{50}q_{CPP}^* \Leftrightarrow q_{CPP}^* = 500 > q_m^*$$

Et :

$$p_{CPP}^* = P(q^*) = 10 < p_m^*$$

En concurrence pure et parfaite, 500 unités de biens sont échangées sur le marché à un prix de 10€. Les quantités échangées sont plus importantes et le prix plus faible qu'en monopole.

Remarque : On peut procéder à une résolution alternative en CPP, sans utiliser la demande inverse. On a en effet la condition d'équilibre du marché : $C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$. Ici, $C_m(q^*)$ est constant et égal à 10, on a donc immédiatement $p^* = C_m(q^*) = 10$. On peut alors utiliser la fonction de demande $Q : q^* = Q(p^*) = 1000 - 50 \times 10 = 500$. On obtient bien les mêmes résultats qu'en utilisant la demande inverse. Dans cette exercice, on a néanmoins besoin de la demande inverse pour le monopole, s'en passer n'est donc pas possible.

2. L'imposition d'une taxe unitaire (une taxe sur chaque unité produite) revient à augmenter le coût marginal et le coût moyen du producteur de 2€. On a donc maintenant $C_m(q) = C_M(q) = 10 + 2 = 12$ (et $C(q) = 12q$). On résout maintenant le problème comme précédemment. Nous allons commencer par résoudre le problème du monopole. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$R(q) = qP(q) = 20q - \frac{1}{50}q^2$$

Donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 20 - \frac{1}{25}q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 20 - \frac{1}{25}q_m^* &= 12 \\ \Leftrightarrow q_m^* &= 200 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -1/25$$

$$C'_m(q) = 12 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 16 > 12 = C_M(q)$. Le prix est supérieur au coût moyen, donc les profits seront positifs. À l'optimum, 200 unités

sont échangées sur ce marché, au prix de 16€.

Résolvons maintenant le problème en concurrence pure et parfaite. La condition d'équilibre en concurrence pure et parfaite est :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*$$

Soit :

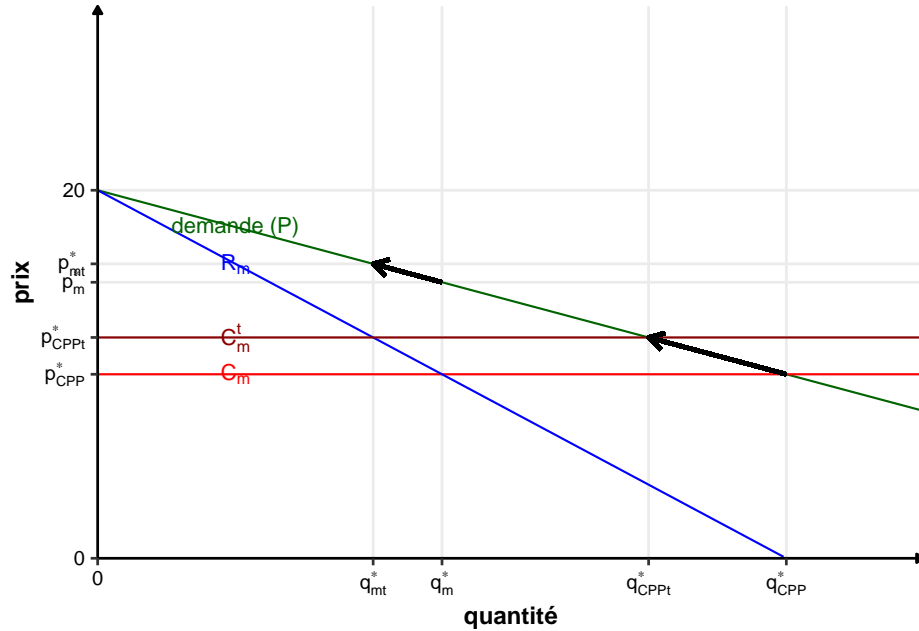
$$12 = 20 - \frac{1}{50}q_{CPP}^* \Leftrightarrow q_{CPP}^* = 400 > q_m^*$$

Et :

$$p_{CPP}^* = P(q^*) = 12 < p_m^*$$

En concurrence pure et parfaite, 400 unités de biens sont échangées sur le marché à un prix de 12€. Les quantités échangées sont plus importantes et le prix plus faible qu'en monopole.

3. En concurrence pure et parfaite, l'augmentation du prix liée à la taxe est entièrement supportée par les consommateurs, puisque le nouveau prix est supérieur de 2€ au précédent. En monopole, le nouveau prix est supérieur de 1€ au précédent. Les consommateurs absorbent donc la moitié de l'augmentation du prix, et le monopole en absorbe l'autre moitié.



Exercice 5.9. Une entreprise en monopole a une fonction de coût total de :

$$C(q) = 3q^2$$

La fonction de demande sur son marché est :

$$P(q) = 1200 - q$$

1. Donnez la quantité produite, le prix de vente ainsi que le profit à la solution du monopole.
2. Que fera l'entreprise si elle est confrontée à une taxe forfaitaire de 50 000€ ? Et si la taxe est de 100 000€ ?
3. L'État souhaite maximiser le surplus total en instaurant un prix plafond. À quel niveau doit-il le fixer ?
4. Que fera le monopole s'il doit payer une taxe de 40€ par unité ? Quels seront alors ses profits ?

Solution (Solutions de l'exercice 5.9). Réponses

1. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Ici, on a :

$$R(q) = qP(q) = 1200q - q^2$$

Et :

$$C_m(q) = C'(q) = 6q$$

Donc :

$$R_m(q) = R'(q) = 1200 - 2q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 1200 - 2q_m^* &= 6q_m^* \\ \Leftrightarrow q_m^* &= 150 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -2$$

$$C'_m(q) = 6 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 1050$. On calcule le profit :

$$\pi_m = p_m^* q_m^* - C(q_m^*) = 1050 \times 150 - 3 \times 150^2 = 90000 > 0$$

À l'optimum, 150 unités sont échangées sur ce marché, au prix de 1050€. Le monopole réalise alors un profit de 90 000€.

2. Une taxe forfaitaire ne change pas le comportement du monopole, sauf si la taxe forfaitaire transforme le profit du monopole en pertes. Le profit réalisé par le monopole devient avec la taxe forfaitaire T :

$$\pi_m = p_m^* q_m^* - C(q_m^*) - T = 1050 \times 150 - 3 \times 150^2 - T = 90000 - T$$

On en conclut que si la taxe forfaitaire est de 50 000€, le monopole continuera de produire normalement, mais si la taxe est de 100 000€, il arrêtera de produire et fermera.

3. L'État doit fixer un prix plafond qui est égal au prix de la concurrence pure et parfaite pour maximiser le surplus total. Cherchons donc l'équilibre de concurrence pure et parfaite. La condition d'équilibre en concurrence pure et parfaite est :

$$C_m(q^*) = P(q^*) = p^*(= p_{max})$$

Soit :

$$6q_{CPP}^* = 1200 - q_{CPP}^* \Leftrightarrow q_{CPP}^* = \frac{1200}{7} > 150 = q_m^*$$

Et :

$$p_{max} = P(q^*) = \frac{7200}{7} < 1050 = p_m^*$$

L'État doit donc fixer un prix plafond de $\frac{7200}{7} \approx 3600\text{€}$ pour maximiser le surplus total.

4. Une taxe unitaire de 40€ revient donc à augmenter le coût de production par unité de 40€ pour le monopole. Le coût marginal du monopole devient donc $C_m(q) = 6q + 40$. À l'optimum, un monopole choisit la quantité telle que son coût marginal est égale à son revenu marginal :

$$R_m(q^*) = C_m(q^*)$$

Avec :

$$R_m(q) = 1200 - 2q$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} 1200 - 2q_m^* &= 6q_m^* + 40 \\ \Leftrightarrow q_m^* &= 145 \end{aligned}$$

On vérifie aussi la condition de second ordre (3.3) :

$$R'_m(q^*) < C'_m(q^*)$$

$$R'_m(q) = -2$$

$$C'_m(q) = 6 > R'_m(q)$$

La condition du second est bien vérifiée, nous avons bien un maximum ici. Le prix est $p_m^* = P(q_m^*) = 1055$. On calcule le profit :

$$\pi_m = p_m^* q_m^* - C(q_m^*) = 1055 \times 145 - (3 \times 145^2 + 40 \times 145) = 84100 > 0$$

À l'optimum avec une taxe unitaire de 40€, 145 unités sont échangées sur ce marché, au prix de 1055€. Le monopole réalise alors un profit de 84 100€. L'augmentation du prix est de 5€, cela signifie que 35€ de la taxe sera payée par le monopole. Nous sommes ici dans un cas où le monopole supportera l'essentiel du prix de la taxe.

5.4 Politique tarifaire du monopole

Exercice 5.10. Pour chacune des pratiques ci-dessous, dites s'il s'agit de discrimination au deuxième ou au troisième degré.

1. Un professeur de tennis fait payer les leçons 15 euros de l'heure pour un enfant de moins de 14 ans et 30 euros au-delà.
2. Un supermarché propose la promotion suivante sur des soupes : la deuxième achetée et toutes les suivantes sont à moitié prix.
3. Un médecin de campagne accepte d'être payé en nature par les paysans mais exige d'être payé en monnaie par les commerçants et les châtelains.
4. Pour trois articles achetés, le moins cher est offert.

Solution (Réponses aux questions). Discrimination du *deuxième degré* : discrimination sur les quantités achetées. Le prix unitaire des biens est décroissant avec la quantité achetée par le consommateur.

Discrimination du *troisième degré* : le monopole est capable de différencier les consommateurs et de vendre à des prix différents pour différents groupes de consommateurs.

1. 3^e degré
2. 2^e degré
3. 3^e degré
4. 2^e degré

Exercice 5.11 (Discrimination au deuxième degré). Un monopole fait face à la fonction de demande :

$$Q(p) = 100 - p$$

et à la fonction de coût :

$$C(q) = 25 + 10q.$$

Le monopole pratique la discrimination au deuxième degré : les q_1 premières unités sont vendues au prix $p_1 = P(q_1)$, où $P(\cdot)$ est la fonction de demande inverse. Les suivantes sont vendues au prix p_2 .

1. Déterminez le prix auquel les premières unités sont vendues et le prix auxquelles les suivantes sont vendues, la quantité q_1 et la quantité totale vendue.
2. Calculez le surplus du consommateur et le profit du producteur.
3. (facultatif) L'État impose au monopole une taxe de 6 euros par unité produite. Le revenu de la taxe est reversé aux consommateurs. Refaites les calculs précédents dans ce cas. Comparez aux résultats précédents et commentez.

Solution (Solution de l'exercice 5.11). On note dans la correction q_2 la quantité de bien vendue au prix p_2 . Ainsi, la quantité totale q est égale à $q_1 + q_2$. On

remarque que l'énoncé nous donne ici la fonction de demande $Q(p) = 100 - p$, alors que nous avons besoin de la fonction de demande inverse $P(q)$. En résolvant $Q(P(q)) = q$, on obtient $P(q) = 100 - q$.

1. On commence par écrire le profit du monopole discriminant :

$$\pi(q_1, q_2) = q_1 \times P(q_1) + p_2 \times q_2 - C(q_1 + q_2)$$

On commence par dériver suivant q_1 pour obtenir la condition du premier sur les premières unités vendues.

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = P'(q_1) \times q_1 + P(q_1) - C_m(q_1 + q_2)$$

On par ailleurs :

$$P'(q) = -1$$

$$C_m(q) = C'(q) = 10$$

On réécrit donc la dérivée partielle suivant q_1 :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = -q_1 + (100 - q_1) - 10$$

En utilisant condition du premier ordre $\frac{\partial \pi}{\partial q_1}(q_1^*) = 0$, cela donne donc :

$$-2q_1^* + 90 = 0 \Leftrightarrow q_1^* = 45$$

Et $p_1^* = P(q_1^*) = 100 - 45 = 55$. On peut maintenant étudier la maximisation sur le groupe 2, en calculant la dérivée partielle du profit suivant q_2 :

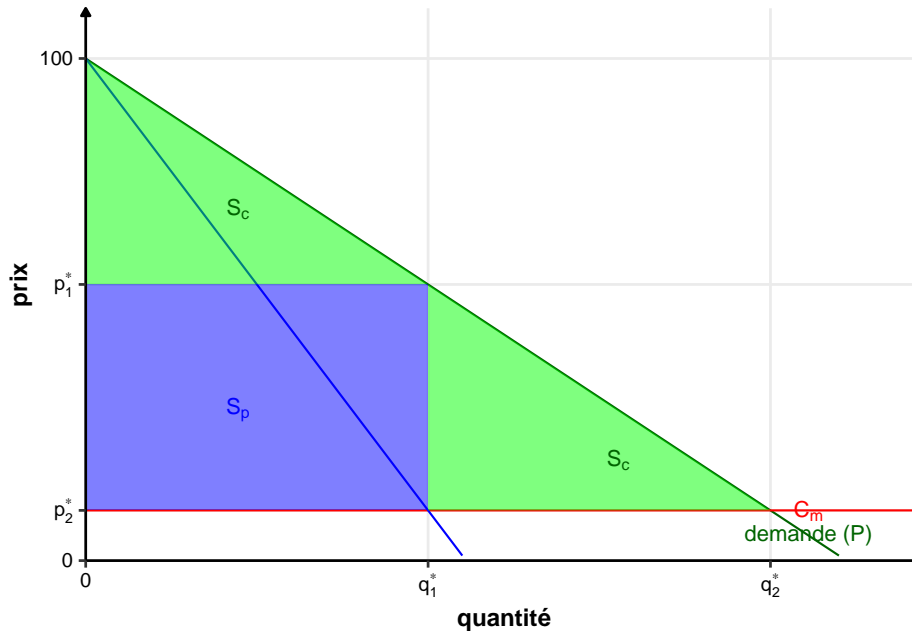
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - C_m(q_1 + q_2)$$

En utilisant la condition du premier ordre, $\frac{\partial \pi}{\partial q_2}(q_2^*) = 0$, on obtient :

$$p_2^* = 10$$

On peut en déduire la quantité *totale* achetée par les consommateurs : $q = Q(p_2^*) = 100 - p_2^* = 90$, et donc $q_2^* = 45$. Attention, $Q(p_2^*)$ nous donne bien la quantité totale achetée sur le marché, et pas la quantité achetée au prix p_2^* . En effet, les premières unités sont vendues au prix $p_1^* = P(q_1^*)$, et ensuite la deuxième partie des unités est vendue au prix p_2^* .

2. Représentons d'abord la situation.



Les quantités vendues au prix p_2^* par le producteur sont produites au coût marginal. Il n'en retire donc aucun surplus. Le seul surplus obtenu par le monopole discriminant l'est quand il vend les unités vendues au prix p_1^* . On remarque alors que le surplus obtenu est donné par un rectangle :

$$S_P = (p_1^* - p_2^*) \times (q_1^* - 0) = 45^2 = 2025$$

Le profit du producteur est donc $\pi = S_P - CF = 2000$, où CF est le coût fixe du monopole. Le surplus des consommateurs est divisé en deux. Le surplus obtenu grâce aux unités vendues au prix p_1^* et le surplus obtenu grâce aux unités vendues au prix p_2^* . On obtient ainsi l'aire de deux triangles :

$$S_c = \frac{1}{2} ((100 - p_1^*) \times (q_1^* - 0) + (q_2^* - q_1^*)(p_1^* - p_2^*)) = \frac{1}{2} (45^2 + 45^2) = 45^2 = 2025$$

3. Si l'État impose une taxe de $t = 6$ euros par unité produite, le coût du monopole devient alors :

$$C(q) = 25 + (10 + t)q = 25 + 16q$$

Le coût marginal devient donc $C_m(q) = 16$. Comme l'État reverse le produit de la taxe au consommateurs, leur capacité à payer (=pouvoir d'achat) augmente de t euros. Autrement dit, la demande inverse devient $P(q) = 100 + t - q = 106 - q$. En réutilisant les calculs de la question 1., et en particulier la dérivée partielle du profit suivant q_1 .

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = -q_1 + (106 - q_1) - 16 = -2q_1 + 90$$

On se rend compte qu'on obtient la même condition du premier ordre. On obtient aussi la même condition du premier ordre pour 2. La taxe et sa redistribution n'ont donc aucun effet.

Exercice 5.12. L'entreprise de surgelés Equus vend des lasagnes au cheval sur deux marchés : le marché standard et le marché du hard discount. Sur le premier marché les lasagnes sont directement vendues sous la marque Equus ; sur le second elles sont vendues moins chères sous la marque Fer-à-Cheval.

1. Question préliminaire. Soit une fonction de demande donnée par :

$$Q(p) = \frac{A}{p^\varepsilon},$$

avec $A > 0$ et $\varepsilon > 0$. Montrez que la valeur absolue de l'élasticité de Q par rapport au prix vaut ε . Ce résultat pourra être utilisé directement dans la suite. 2. Le prix de vente optimal des lasagnes de la marque Equus est de $p_E = 42$ euros le kg. D'après les recherches du département marketing, la demande pour les lasagnes de marque Equus est donnée par $Q_E(p_E) = \frac{10000}{p_E^2}$ et pour la marque Fer-à-Cheval par $Q_F(p_F) = \frac{10000}{p_F^4}$. a. Donnez la formule qui, à la solution du monopole discriminant, relie le rapport des prix $\frac{p_E}{p_F}$ aux élasticités-prix ε_E et ε_F sur les deux marchés. b. Déduisez-en le prix p_F qui maximise le profit du monopole discriminant. c. Déduisez-en également le coût marginal de production de la quantité totale $q_E + q_F$ maximisant le profit du monopole.

Solution (Réponses de l'exercice 5.12). *Rappel* : Élasticité prix de la demande

$$\varepsilon_{q/p} = \frac{p}{Q(p)} \frac{1}{Q'(p)}$$

1. Pour répondre à cette question, on doit donc dériver la fonction de demande (qui est une fonction puissance).

$$Q'(p) = \frac{A\varepsilon}{p^{\varepsilon+1}}$$

On a donc :

$$\varepsilon_{q/p} = \frac{p}{\frac{A}{p^\varepsilon}} \times \frac{A\varepsilon}{p^{\varepsilon+1}} = \varepsilon$$

Les puissances et les A se simplifient. On a donc bien le résultat demandé.

2. On remarque que les fonctions de demande donnée pour les consommateurs des deux marques ont la forme donnée dans la question 1., avec $A = 10000$ et $\varepsilon_E = 2$ et $\varepsilon_F = 4$.

- a. On a ici une discrimination du 3^e degré. Le producteur répartit la production entre les deux groupes de manière à égaliser les revenus marginaux des deux groupes :

$$R_{mE}(q_E^*) = R_{mF}(q_F^*)$$

Or par définition :

$$R_{mi}(q_i) = P_i(q_i) - q_i P'_i(q_i) = P_i(q_i) \left(1 + \frac{q_i}{P_i(q_i)} P'_i(q_i) \right)$$

On reconnaît à gauche l'expression de l'élasticité prix de la demande du groupe i , on a donc :

$$R_{mi}(q_i) = P_i(q_i) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q_i/p}(q_i)|} \right)$$

On peut donc en déduire qu'à l'équilibre :

$$\begin{aligned} R_{mE}(q_E^*) &= R_{mF}(q_F^*) \\ \Leftrightarrow p_E \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_E} \right) &= p_F \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_F} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{p_E}{p_F} &= \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon_F}}{1 - \frac{1}{\varepsilon_E}} \end{aligned}$$

- b. Dans l'expression précédente, on connaît le prix p_E et les élasticité prix de la demande. On peut donc les remplacer, on a alors :

$$\frac{42}{p_F} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$$

On en déduit donc $p_F = \frac{2}{3}42 = 28\text{€}/\text{kg}$.

- c. À l'équilibre du monopole discriminant, on a, en plus de l'égalité entre les revenus marginaux, que ceux-ci sont égaux au coût marginal total :

$$R_{mE}(q_E^*) = R_{mF}(q_F^*) = C_m(q_E^* + q_F^*)$$

Donc :

$$C_m(q^*) = R_{mE}(q_E^*) = p_E \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_E} \right) = 42 \frac{1}{2} = 21$$

Le coût marginal total à l'équilibre est de 21€/kg.

Exercice 5.13. La fonction de coût d'un monopole est donnée par :

$$C(q) = 30 - q + \frac{q^2}{2}$$

Il existe deux types de consommateurs (A et B) dont les fonctions de demande sont respectivement :

$$P_A(q_A) = 64 - 4q_A$$

et :

$$P_B(q_B) = 32 - 2q_B$$

1. Calculez la solution du monopole discriminant.
2. Répondez à nouveau à la question ci-dessus lorsque la demande de la population B devient

$$P_B(q_B) = 64 - 2q_B$$

et que la demande du marché A ne change pas.

Solution (Réponses de l'exercice 5.13). La propriété fondamentale à utiliser dans ce problème est l'égalité entre le revenu marginal sur chacun des marchés et le coût marginal total du monopole discriminant :

$$R_{mA}(q_A) = R_{mB}(q_B) = C_m(q_A + q_B) \quad (5.2)$$

1. D'après l'équation (5.2), on doit calculer le revenu marginal sur chacun des marchés et le coût marginal total. Le coût marginal total :

$$C_m(q) = C'(q) = -1 + 2q$$

Revenu sur les deux marchés :

$$\begin{aligned} R_A(q_A) &= q_A P(q_A) = 64q_A - 4q_A^2 \\ R_B(q_B) &= q_B P(q_B) = 32q_B - 2q_B^2 \end{aligned}$$

Revenu marginal sur les deux marchés :

$$\begin{aligned} R_{mA}(q_A) &= R'_A(q_A) = 64 - 8q_A \\ R_{mB}(q_B) &= R'_B(q_B) = 32 - 4q_B \end{aligned}$$

On a alors au moins deux méthodes pour résoudre le problème. La première est d'égaliser les deux recettes marginales (égalité gauche de l'équation (5.2)) pour connaître la quantité relative dans un marché par rapport à l'autre :

$$\begin{aligned} R_{mA}(q_A) &= R_{mB}(q_B) \\ \Leftrightarrow 64 - 8q_A &= 32 - 4q_B \\ \Leftrightarrow -16 + 2q_A &= -8 + q_B \\ \Leftrightarrow q_B &= 2q_A - 8 \end{aligned}$$

Nous avons donc une relation entre q_A et q_B . La deuxième étape est d'utiliser l'égalité entre le coût marginal total et un des revenu marginal. Ici, nous allons utiliser $R_{mA}(q_A) = C_m(q_A + q_B)$ et l'égalité trouvée avant pour remplacer q_B :

$$\begin{aligned} R_{mA}(q_A) &= C_m(q_A + q_B) \\ \Leftrightarrow 64 - 8q_A &= q_A + q_B - 1 \\ \Leftrightarrow 65 - 9q_A &= 2q_A - 8 \\ \Leftrightarrow 11q_A &= 73 \\ \Leftrightarrow q_A &= \frac{73}{11} \end{aligned}$$

Une fois q_A trouvée, on peut en déduire $q_B = 2 \times \frac{73}{11} - 8 = \frac{58}{11}$, et enfin calculer les prix :

$$p_A = P_A(q_A) = 64 - 4q_A = 64 - 4 \frac{73}{11} = \frac{412}{11}$$

$$p_B = P_B(q_B) = 32 - 2q_B = 32 - 2 \frac{58}{11} = \frac{236}{11}$$

On a ainsi trouvé les quantités et prix pour chaque groupe. 2. On a maintenant une nouvelle demande inverse pour le groupe B, on doit donc changer la recette et la recette marginale du groupe B.

$$\begin{aligned} R_B(q_B) &= q_B P(q_B) = 64q_B - 2q_B^2 \\ R_{mB}(q_B) &= R'_B(q_B) = 64 - 4q_B \end{aligned}$$

On doit donc recalculer la condition d'égalité entre les deux groupes :

$$\begin{aligned} R_{mA}(q_A) &= R_{mB}(q_B) \\ \Leftrightarrow 64 - 8q_A &= 64 - 4q_B \\ \Leftrightarrow q_B &= 2q_A \end{aligned}$$

On peut alors recalculer la deuxième condition :

$$\begin{aligned} R_{mA}(q_A) &= C_m(q_A + q_B) \\ \Leftrightarrow 64 - 8q_A &= q_A + q_B - 1 \\ \Leftrightarrow 65 - 9q_A &= 2q_A \\ \Leftrightarrow 11q_A &= 65 \\ \Leftrightarrow q_A &= \frac{65}{11} \end{aligned}$$

On peut donc en déduire $q_B = \frac{130}{11}$. On peut en déduire les prix pour chaque groupe :

$$p_A = P_A(q_A) = 64 - 4q_A = 64 - 4 \frac{65}{11} = \frac{444}{11}$$

$$p_B = P_B(q_B) = 64 - 2q_B = 64 - 2 \frac{130}{11} = \frac{444}{11}$$

Les prix sur les deux marchés sont égaux.

Exercice 5.14. Une entreprise en situation de monopole a réussi à percevoir une différence parmi les consommateurs. Elle est alors capable de séparer les consommateurs qui s'adressent à lui en deux marchés distincts. Sur le premier marché, la fonction de demande inverse est de :

$$P_1(q_1) = 60 - 5q_1$$

Sur le second marché, elle est de :

$$P_2(q_2) = 180 - 20q_2$$

1. Calculez les prix, les quantités d'équilibre et le profit sachant que la fonction de coût du monopole est la suivante :

$$C(q) = 50 + 20q$$

avec $q = q_1 + q_2$ la quantité totale produite.

2. Calculez $\left. \frac{p_i - C_m(q)}{p_i} \right|_{i=1,2}$, et montrez que $\frac{p_i - C_m(q)}{p_i} = \frac{1}{|\varepsilon_{q_i/p_i}|}$ à l'optimum du monopole.

Solution (Réponses à l'exercice 5.14). Nous sommes dans une situation de discrimination au troisième degré. 1. On veut utiliser l'équation (5.2) : à l'équilibre du monopole discriminant au 3^e degré, le coût marginal total est égal au revenu marginal obtenu de chacun des groupes. Le coût marginal total :

$$C_m(q) = C'(q) = 20$$

Revenu sur les deux marchés :

$$\begin{aligned} R_1(q_1) &= q_1 P(q_1) = 60q_1 - 5q_1^2 \\ R_2(q_2) &= q_2 P(q_2) = 180q_2 - 20q_2^2 \end{aligned}$$

Revenu marginal sur les deux marchés :

$$\begin{aligned} R_{m1}(q_1) &= R'_1(q_1) = 60 - 10q_1 \\ R_{m2}(q_2) &= R'_2(q_2) = 180 - 40q_2 \end{aligned}$$

Nous allons ici montrer la deuxième méthode pour résoudre le problème du monopole discriminant. Nous allons résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} R_{m1}(q_1^*) &= C_m(q_1^* + q_2^*) \Leftrightarrow 60 - 10q_1^* = 20 \Leftrightarrow q_1^* = 4 \\ R_{m2}(q_2^*) &= C_m(q_1^* + q_2^*) \Leftrightarrow 180 - 40q_2^* = 20 \Leftrightarrow q_2^* = 4 \end{aligned}$$

On peut alors grâce aux demandes inverse en déduire les prix :

$$\begin{aligned} p_1^* &= P_1(q_1^*) = 60 - 5 \times 4 = 40 \\ p_2^* &= P_2(q_2^*) = 180 - 20 \times 4 = 100 \end{aligned}$$

On peut finalement en déduire le profit :

$$\pi(q_1^*, q_2^*) = p_1^* q_1^* + p_2^* q_2^* - C(q_1^* + q_2^*) = 160 + 400 - (50 + 20 \times 8) = 350$$

2. On va commencer par calculer le taux de marge sur chaque marché. Sur le marché 1 :

$$\frac{p_1^* - C_m(q_1^* + q_2^*)}{p_1^*} = \frac{40 - 20}{40} = \frac{1}{2}$$

Sur le marché 2 :

$$\frac{p_2^* - C_m(q_1^* + q_2^*)}{p_2^*} = \frac{100 - 20}{100} = \frac{4}{5}$$

On calcule maintenant l'élasticité prix de la demande pour chacun des groupes :

$$|\varepsilon_{q_1/p_1}| = \left| \frac{p_1^*}{q_1^*} \frac{1}{P'(q_1^*)} \right| = \left| \frac{40}{4} \frac{1}{-5} \right| = 2$$

On a donc bien :

$$\frac{p_1^* - C_m(q_1^* + q_2^*)}{p_1^*} = \frac{1}{|\varepsilon_{q_1/p_1}|}$$

On peut faire un calcul similaire pour le groupe 2 :

$$|\varepsilon_{q_2/p_2}| = \left| \frac{p_2^*}{q_2^*} \frac{1}{P'(q_2^*)} \right| = \left| \frac{100}{4} \frac{1}{-20} \right| = \frac{5}{4}$$

On a donc bien :

$$\frac{p_2^* - C_m(q_1^* + q_2^*)}{p_2^*} = \frac{1}{|\varepsilon_{q_2/p_2}|}$$

5.5 Oligopoles

Exercice 5.15 (Questions de cours). Questions :

1. Dans un duopole à la Cournot, comme chaque entreprise cherche à maximiser son profit, l'équilibre est tel qu'aucune des deux firmes ne peut améliorer son profit sans réduire celui de l'autre. Vrai ou Faux ?
2. Lorsque deux firmes produisent un bien homogène, est-il plus avantageux, du point de vue des consommateurs, que la concurrence se fasse à la Cournot ou à la Stackelberg ?
3. Expliquez pourquoi la lutte contre les collusions fait partie des objectifs de nombreux gouvernements.

Solution. Réponses :

1. Faux, une situation de cartel est une situation où les deux entreprises peuvent améliorer leur profit par rapport au duopole de Cournot.
2. Il est plus avantageux d'être en Stackelberg, en effet la quantité échangée sur le marché sera plus importante et le prix plus faible. Le surplus des consommateurs sera donc plus élevé.
3. La collusion entre deux entreprises a pour effet de diminuer les quantités sur le marché et d'augmenter les prix. Cela diminue le surplus collectif.

5.5.1 Cournot

Exercice 5.16 (Duopole de Cournot). On suppose que la demande pour l'eau de source est donnée par la fonction de demande inverse :

$$P(q) = 1200 - q$$

On suppose également que le coût marginal de production d'une bouteille d'eau est égal à 300. Deux entreprises se partagent le marché de l'eau et se font concurrence en quantité. 1. Déterminez les quantités produites et le prix de vente à l'équilibre de Cournot-Nash. 2. Déterminez le taux de marge de chaque firme et l'indice de Lerner du marché.

Solution (Réponses à l'exercice 5.16). On peut lire ici que le coût marginal de production des deux entreprises est identiques et vaut 300. Elles sont donc parfaitement symétriques. On peut supposer le coût fixe constant, on a alors que le coût de production pour une entreprise est donné par $C(q) = 300q$.

1. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit en prenant la quantité produite par l'autre entreprise comme une donnée. On cherche d'abord à calculer les fonctions de réaction (qui seront identiques entre les deux entreprises, puisqu'elles sont symétriques). On commence par écrire le profit de l'entreprise A :

$$\pi_A(q_A, q_B) = q_A P(q_A + q_B) - C_A(q_A) = q_A(1200 - q_A - q_B) - 300q_A = (900 - q_B)q_A - q_A^2$$

L'entreprise A va maintenant anticiper que l'entreprise B va produire une quantité q_B^a et maximiser son profit. On obtient la dérivée partielle suivant q_A :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} = 900 - q_B^a - 2q_A$$

En utilisant la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A}(q_A^* + q_B^a) = 0$$

On obtient la fonction de réaction de A :

$$2q_A^* + q_B^a = 900 \Leftrightarrow q_A^* = 450 - \frac{1}{2}q_B^a$$

Comme le problème est symétrique, on peut en déduire la fonction de réaction de B :

$$q_B^* = 450 - \frac{1}{2}q_A^a$$

Pour calculer l'équilibre de Cournot, les anticipations de chacune des entreprises doit correspondre à ce que fait réellement l'autre entreprise. Autrement dit $q_A^a = q_A^*$ et $q_B^a = q_B^*$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} q_A^* &= 450 - \frac{1}{2}q_B^* \\ q_B^* &= 450 - \frac{1}{2}q_A^* \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, on peut, par exemple, remplacer dans la première expression q_B^* par son expression dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned} q_A^* &= 450 - \frac{1}{2} \left(450 - \frac{1}{2} q_A^* \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} q_A^* &= 450 - 225 \\ \Leftrightarrow q_A^* &= 300 \end{aligned}$$

Par symétrie des entreprises A et B, on obtient immédiatement que $q_B^* = 300$. On peut en déduire le prix sur le marché :

$$p^* = P(q_A^* + q_B^*) = 1200 - (q_A^* + q_B^*) = 600$$

À l'équilibre de Cournot, chaque entreprise produit donc 300 bouteilles, qui sont vendues à 600.

2. Le taux de marge d'une entreprise est aussi son indice de Lerner :

$$L_i = \frac{p^* - C_{mi}(q_i^*)}{p^*} = \frac{S_i}{|\varepsilon_{q/p} q^*|}$$

Les entreprises sont symétriques, elles auront donc le même indice de Lerner :

$$L_A = L_B = \frac{600 - 300}{600} = \frac{1}{2}$$

On peut trouver le même résultat en utilisant la propriété liant indice de Lerner et élasticité prix de la demande.

On calcule maintenant l'indice de Lerner du marché :

$$L = S_A L_A + S_B L_B$$

Ici, les parts de marché de chaque entreprise sont identiques et valent : $S_A = S_B = q_A^*/q^* = 1/2$. On a donc :

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

L'indice de Lerner du marché est de $\frac{1}{2}$.

Exercice 5.17. Supposons un marché sur lequel il n'y a que deux entreprises, A et B, qui vendent une marchandise homogène produite sans coûts. La demande sur ce marché est donnée par la fonction :

$$Q(p) = 240 - 10p$$

p étant le prix de la marchandise.

1. Dans cette question, on suppose que, chacune des deux entreprises, en déterminant sa production optimale, considère la production de l'autre comme donnée.

- a. Dans quel type de duopole se trouvent les deux firmes ?
 - b. Déterminez la meilleure réponse de la firme i à la quantité produite par la firme j , $i, j = A, B$.
 - c. Représentez graphiquement ces deux courbes et identifiez l'équilibre sur le graphique.
 - d. Calculez les quantités et le prix d'équilibre. Calculez le profit de chaque firme.
 - e. Comparez-les aux prix, quantités et profits qui prévaudraient si les firmes étaient en monopole et si elles étaient en concurrence parfaite.
 - f. Calculez le surplus social dans les situations de concurrence, de duopole et de monopole et comparez-les.
 - g. Que se passerait-il au niveau de la production et du prix d'équilibre de la branche si une troisième entreprise entrait ? Si $n - 2$ entreprises entraient, $n > 2$?
2. On suppose maintenant que le coût marginal de la firme A est c_A , alors que celui de la firme B est c_B . Les coûts fixes sont toujours nuls. Calculez à nouveau les quantités et le prix d'équilibre lorsqu'on se place dans le cadre de la question 1). Calculez les profits de chaque firme. Commentez.

Solution (Réponse à l'exercice 5.17). L'énoncé nous donne la fonction de demande, mais nous allons utiliser la fonction de demande inverse. On résout $Q(P(q)) = q$, soit :

$$240 - 10P(q) = q \Leftrightarrow P(q) = 24 - \frac{q}{10}$$

1. Les deux entreprises n'ont aucun coût de production. On a donc :

$$C_A(q_A) = C_B(q_B) = 0$$

La production de l'autre entreprise est considérée comme donnée.

- a. Les deux entreprises se trouvent en duopole de Cournot : elles se font concurrence en quantité et ne connaissent pas la quantité produite par l'autre entreprise. Comme leur coût de production est identique, ces deux entreprises sont symétriques, tout ce qu'on écrira pour l'une peut s'écrire pour l'autre en changeant ce qu'il faut changer.
- b. On commence par écrire le profit de l'entreprise A :

$$\pi_A(q_A, q_B) = q_A P(q_A + q_B) - C_A(q_A) = q_A P(q_A + q_B)$$

L'entreprise A va maintenant anticiper que l'entreprise B va produire une quantité q_B^a et maximiser son profit. On obtient la dérivée partielle suivant q_A :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} = q_A P'(q_A + q_B^a) + P(q_A + q_B^a) = q_A \frac{-1}{10} + (24 - \frac{1}{10}(q_A + q_B^a)) = -\frac{1}{10}(2q_A + q_B^a) + 24$$

En utilisant la condition du premier ordre :

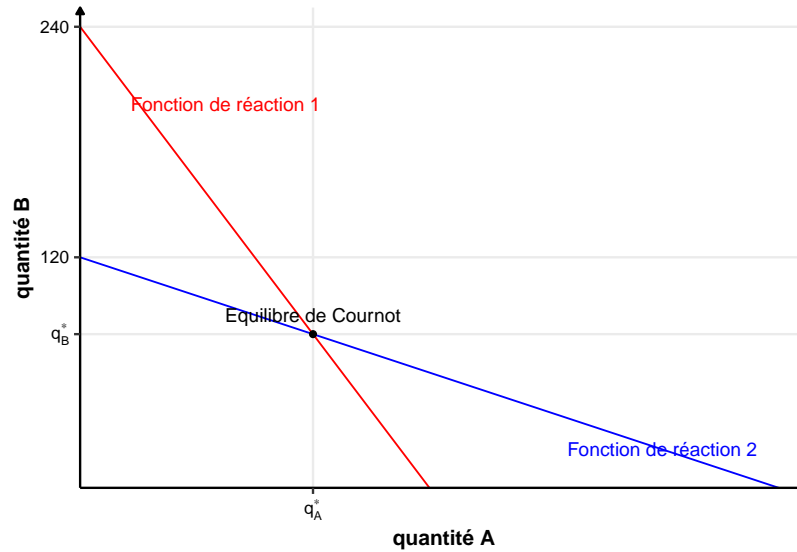
$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A}(q_A^* + q_B^a) = 0$$

On obtient la fonction de réaction de A :

$$2q_A^* + q_B^a = 240 \Leftrightarrow q_A^* = 120 - \frac{1}{2}q_B^a$$

Comme le problème est symétrique, on peut en déduire la fonction de réaction de B :

$$q_B^* = 120 - \frac{1}{2}q_A^a$$



- c.
- d. Pour calculer l'équilibre de Cournot, les anticipations de chacune des entreprises doit correspondre à ce que fait réellement l'autre entreprise. Autrement dit $q_A^a = q_A^*$ et $q_B^a = q_B^*$. On obtient donc :

$$q_A^* = 120 - \frac{1}{2}q_B^*$$

$$q_B^* = 120 - \frac{1}{2}q_A^*$$

Pour résoudre ce système, on peut, par exemple, remplacer dans la première expression q_B^* par son expression dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned} q_A^* &= 120 - \frac{1}{2} \left(120 - \frac{1}{2}q_A^* \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}q_A^* &= 120 - 60 \\ \Leftrightarrow q_A^* &= 80 \end{aligned}$$

Par symétrie des entreprises A et B, on obtient immédiatement que $q_B^* = 80$. On peut en déduire le prix sur le marché :

$$p^* = P(q_A^* + q_B^*) = 24 - \frac{1}{10}(q_A^* + q_B^*) = 24 - \frac{160}{10} = 8$$

Le profit de la firme A est alors :

$$\pi_A(q_A^*, q_B^*) = q_A^* \times p^* = 8 \times 80 = 640$$

Il en est de même pour l'entreprise B. Le profit total en duopole est donc 1280.

- e. En monopole, on aurait égalité de la recette marginale avec le coût marginal ($R_m(q) = C_m(q)$). Ici, le coût marginal est nul, on a donc $R_m(q) = 0$ sur ce marché. Avec $R(q) = qP(q) = 24q - \frac{1}{10}q^2$, donc $R_m(q) = 24 - \frac{1}{5}q$. On a donc à l'optimum du monopole :

$$24 - \frac{1}{5}q_m^* = 0 \Leftrightarrow q_m^* = 120$$

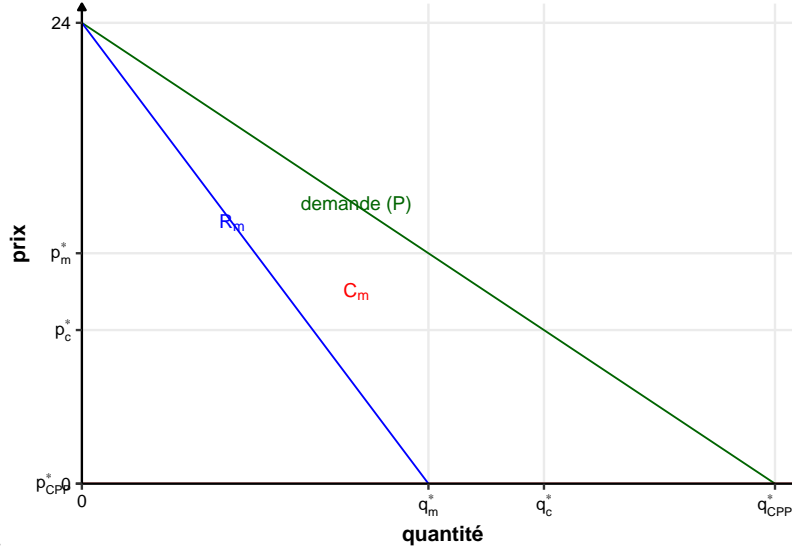
On en déduit le prix en monopole $p_m^* = 24 - \frac{1}{10}120 = 12$.

Et le profit en monopole $\pi_m = 12 \times 120 = 1440$.

En concurrence pure et parfaite, l'offre est égale à la demande et l'offre est donnée par le coût marginal. Celui-ci est nul ici. On a donc $P(q_{CPP}^*) = 0$, soit $24 - \frac{1}{10}q_{CPP}^* = 0$, donc $q_{CPP}^* = 240$, et $p_{CPP}^* = 0$. Le profit en CPP est donc nul.

On constate que la situation de duopole de Cournot est intermédiaire entre la concurrence pure et parfaite et le monopole. La quantité échangée est entre celle de monopole et de CPP, de même que le prix et le profit des producteurs.

- f. Il n'y a ici pas de coût fixe, on a donc déjà calculé le surplus des producteurs : ce sont exactement les profits. Représentons graphiquement



la situation pour le reste.

À l'aide du graphique, on peut calculer les différents surplus des consommateurs :

$$S_c^m = \frac{1}{2}(24 - p_m^*) \times q_m^* = \frac{1}{2}(24 - 12)120 = 720$$

$$S_c^c = \frac{1}{2}(24 - p_c^*) \times q_c^* = \frac{1}{2}(24 - 8)160 = 1280$$

$$S_c^{cpp} = \frac{1}{2}(24 - p_{cpp}^*) \times q_{cpp}^* = \frac{1}{2}(24 - 0)240 = 2880$$

On peut donc en déduire le surplus total dans chacun des cas :

$$S_t^m = S_c^m + S_p^m = 720 + 1440 = 2160$$

$$S_t^c = S_c^c + S_p^c = 1280 + 1280 = 2560$$

$$S_t^{CPP} = S_c^{CPP} + S_p^{CPP} = 2880 + 0 = 2880$$

Le surplus social est donc le plus élevé en situation de concurrence pure et parfaite. Dans les deux autres cas, il est possible d'améliorer la situation des producteurs et des consommateurs simultanément.

- g. Nous allons directement poser le problème comme si le marché contenait n entreprises (autrement dit, comme si $n-2$ entreprises entraient sur le marché). On peut écrire le profit de l'entreprise i :

$$\pi_i(q_i, q) = P(q)q_i - C_i(q_i)$$

Où $q = \sum_{i=1}^n q_i$ est la quantité totale produite, et $C_i(q_i) = 0$ ici. On cherche d'abord la fonction de réaction de l'entreprise i , en maximisant son profit et considérant les productions des autres entreprises comme données. Attention, dans cette maximisation, q dépend de q_i . On calcule donc la dérivée partielle suivant q_i :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = q_i P'(q) + P(q)$$

Avec la condition du premier ordre de l'entreprise i :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow q_i P'(q) + P(q) = 0$$

On peut remplacer $P(q)$ et $P'(q)$ par leur expression.

$$q_i^* \times \left(-\frac{1}{10}\right) + 24 - \frac{1}{10}q^* = 0$$

Les entreprises sont toutes identiques, elles produiront donc la même quantité à l'équilibre de Cournot. On peut en déduire que $q_i^* = \frac{q^*}{n}$. On peut alors réécrire l'équation d'équilibre :

$$-\frac{1}{10} \frac{q^*}{n} + 24 - \frac{1}{10}q^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10}q^* \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 24$$

Autrement dit :

$$q^* \frac{n+1}{n} = 240 \quad \Leftrightarrow \quad q^* = \frac{n}{n+1} 240$$

On en déduit le prix :

$$p^* = P(q^*) = 24 - \frac{1}{10} q^* = \frac{24}{n+1}$$

On constate que plus le nombre d'entreprise est élevée, plus la quantité échangée sur le marché est grande et se rapproche de celle de la concurrence pure et parfaite. A l'inverse, le prix diminue et se rapproche lui aussi du prix de la CPP.

2. Les deux entreprises ont maintenant des coût marginaux de production non nuls. On peut refaire les raisonnements de b. et d. avec des nouveaux profits : On commence par écrire le profit de l'entreprise A :

$$\pi_A(q_A, q_B) = q_A P(q_A + q_B) - C_A(q_A)$$

L'entreprise A va maintenant anticiper que l'entreprise B va produire une quantité q_B^a et maximiser son profit. On obtient la dérivée partielle suivant q_A :

$$\frac{\partial_A \pi}{\partial q_A} = q_A P'(q_A + q_B^a) + P(q_A + q_B^a) - C'_A(q_A) = q_A \frac{-1}{10} + (24 - \frac{1}{10}(q_A + q_B^a)) - c_A = -\frac{1}{10}(2q_A + q_B^a) + 24 - c_A$$

En utilisant la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial_A \pi}{\partial q_A}(q_A^* + q_B^a) = 0$$

On obtient la fonction de réaction de A :

$$2q_A^* + q_B^a = 240 - 10c_A \Leftrightarrow q_A^* = 120 - 5c_A - \frac{1}{2}q_B^a$$

Comme le problème est presque symétrique, on peut en déduire la fonction de réaction de B :

$$q_B^* = 120 - 5c_B - \frac{1}{2}q_A^a$$

Pour calculer l'équilibre de Cournot, les anticipations de chacune des entreprises doit correspondre à ce que fait réellement l'autre entreprise. Autrement dit $q_A^a = q_A^*$ et $q_B^a = q_B^*$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} q_A^* &= 120 - 5c_A - \frac{1}{2}q_B^* \\ q_B^* &= 120 - 5c_B - \frac{1}{2}q_A^* \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, on peut, par exemple, remplacer dans la première expression q_B^* par son expression dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned} q_A^* &= 120 - 5c_A - \frac{1}{2} \left(120 - c_B - \frac{1}{2} q_A^* \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} q_A^* &= 120 - 60 - 5c_A + \frac{5}{2} c_B \\ \Leftrightarrow q_A^* &= 80 - \frac{20}{3} c_A + \frac{10}{3} c_B \end{aligned}$$

Par symétrie des entreprises A et B, on obtient immédiatement que $q_B^* = 80 - \frac{20}{3} c_B + \frac{10}{3} c_A$. On peut en déduire le prix sur le marché :

$$p^* = P(q_A^* + q_B^*) = 24 - \frac{1}{10}(q_A^* + q_B^*) = 8 + \frac{1}{3}(c_A + c_B)$$

Le profit de la firme A est alors :

$$\pi_A(q_A^*, q_B^*) = q_A^* \times p^* - C_A(q_A^*) = 10 \left(8 + \frac{1}{3}(c_B - 2c_A) \right)^2$$

On en déduit le profit de l'entreprise B :

$$\pi_B(q_A^*, q_B^*) = 10 \left(8 + \frac{1}{3}(c_A - 2c_B) \right)^2$$

On constate que les quantités augmentent avec le coût marginal de l'autre entreprise et diminuent avec son propre coût marginal. Il en est de même pour les profits. Plus cela coûte cher de produire pour l'autre entreprise, plus je ferai de profits. On remarque que dans tous les cas, si on prend $c_A = c_B = 0$, on retombe sur les résultats de la question 1, ce qui est rassurant pour nos calculs.

5.5.2 Stackelberg

Exercice 5.18. On se place dans le cadre de l'exercice 5.17, mais on suppose que l'entreprise A entre d'abord sur le marché, suivi de la firme B.

1. On suppose maintenant que chaque firme détermine sa production juste après son entrée sur le marché, en tenant compte de la réaction de l'autre : A entre d'abord, choisit sa quantité et l'impose à B, qui se comporte en suiveuse.
 - a. Dans quel type de duopole sommes-nous ? A priori laquelle des deux firmes va être favorisée par la situation ?
 - b. Calculez la meilleure réponse de la firme B à la production de la firme A.
 - c. Déduisez-en la production de la firme A, le prix d'équilibre de la branche et les profits des deux firmes. Commentez.

- d. Comparez les profits des deux firmes à leurs profits dans la situation de la question 1) de l'exercice 3.3. Commentez.
2. On suppose maintenant que le coût marginal de la firme A est $c_A = 4$, alors que celui de la firme B est $c_B = 0$. Les coûts fixes sont toujours nuls. Calculez à nouveau les quantités et le prix d'équilibre lorsqu'on se place dans le cadre de la question 1). Calculez les profits de chaque firme. Que constatez-vous ? Commentez.

Solution (Solution de l'exercice 5.18). On va pouvoir reprendre une partie des calculs de l'exercice 5.17.

1. Ici, cela signifie donc que A est leader et B follower.
 - a. Duopole de Stackelberg.
 - b. La meilleure réponse a déjà été calculé à la question 1.B de l'exercice 5.17. Elle vaut :

$$q_B^* = 120 - \frac{1}{2}q_A^a$$

- c. La résolution est maintenant différente de la résolution de Cournot. Le producteur A peut *internaliser* la fonction de réaction du producteur B . Il sait comment B va réagir à sa production et en plus est le premier à entrer sur le marché et peut donc imposer sa quantité à B . On a donc le profit de A :

$$\pi_A(q_A, q_B(q_A)) = q_A P(q_A + q_B(q_A)) - C_A(q_A) = q_A P(q_A + q_B(q_A))$$

La maximisation du producteur A aboutit à la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} = 0$$

Ici, contrairement à précédemment, q_B dépend de q_A et B le sait, il va donc prendre en compte cette dépendance :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} &= P(q_A + q_B(q_A)) + q_A(1 + q'_B(q_A))P'(q_A + q_B(q_A)) \\ &= 24 - \frac{1}{10}(q_A + q_B(q_A)) + \frac{1}{2}q_A \frac{-1}{10} \\ &= 24 - \frac{1}{10}\left(q_A + 120 - \frac{1}{2}q_A\right) + \frac{1}{2}q_A \frac{-1}{10} \\ &= 24 - 12 - \frac{1}{20}q_A - \frac{1}{20}q_A \\ &= 12 - \frac{1}{10}q_A \end{aligned}$$

En utilisant la condition du premier ordre, on a donc :

$$12 - \frac{1}{10}q_A^* = 0 \Leftrightarrow q_A^* = 120$$

On en déduit $q_B^* = 120 - \frac{120}{2} = 60$, donc $q^* = 180$ et $p^* = 6$. Les profits sont donc :

$$\begin{aligned}\pi_A &= 120 \times 6 = 720 \\ \pi_B &= 60 \times 6 = 360\end{aligned}$$

- d. Le profit est plus élevé en Stackelberg pour A, mais plus faible pour B, malgré la totale symétrie de A et B en dehors de leur position sur le marché. Cette seule asymétrie profite à A, qui exploite son avantage afin d'augmenter son profit.
2. On peut reprendre une partie des calculs précédents. Comme la structure de coût de B n'a pas changé, sa fonction de réaction n'a pas non plus changé :

$$q_B^* = 120 - \frac{1}{2}q_A^a$$

Le programme de maximisation de A est le même, à un changement prêt :

$$\pi_A(q_A, q_B(q_A)) = q_A P(q_A + q_B(q_A)) - C_A(q_A)$$

Si on reprend les calculs de la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} &= P(q_A + q_B(q_A)) + q_A(1 + q_B'(q_A))P'(q_A + q_B(q_A)) - C_A'(q_A) \\ &= 24 - \frac{1}{10}(q_A + q_B(q_A)) + \frac{1}{2}q_A \frac{-1}{10} - c_A \\ &= 24 - \frac{1}{10}\left(q_A + 120 - \frac{1}{2}q_A\right) + \frac{1}{2}q_A \frac{-1}{10} - 4 \\ &= 8 - \frac{1}{10}q_A\end{aligned}$$

En utilisant la condition du premier ordre, on a donc :

$$8 - \frac{1}{10}q_A^* = 0 \Leftrightarrow q_A^* = 80$$

On en déduit que $q_B^* = 80$ et $q^* = 160$, donc $p^* = 8$. On en déduit les profits :

$$\begin{aligned}\pi_A &= 80 \times 8 - 4 \times 80 = 320 \\ \pi_B &= 80 \times 8 = 640\end{aligned}$$

L'entreprise B, qui est follower sur ce marché en Stackelberg, fait maintenant plus de profits que l'entreprise A. Elle produit en effet la même quantité, mais a un coût plus faible. Conclusion, ce n'est pas parce qu'une entreprise est leader qu'elle fera plus de profit. Cela dépend aussi de la structure de coût respective des deux entreprises.

Exercice 5.19 (Stackelberg, coûts fixes). Soit deux firmes seules sur un marché produisant un bien homogène pour lequel la demande est :

$$P(q) = a - bq$$

1. Chacune des deux firmes produit avec la fonction de coût suivante :

$$C(q_i) = cq_i + F.$$

a. L'existence de coûts fixes a-t-elle un impact sur les fonctions de meilleure réponse ? b. L'existence de coûts fixes a-t-elle un impact sur la décision de produire ? 2. La firme A est leader dans un duopole de Stackelberg, avec $c = 0$ et $F > 0$. La firme B est suiveuse avec $c = F = 0$. Quel est l'impact de F sur l'avantage de A ?

Solution (Réponses à l'exercice 5.18). Réponses.

1. On a ici une fonction de coût affine.

a. Intuitivement, la réponse est non. En effet, tous nos raisonnements sont marginaux, et le coût fixe disparaît dans ces cas-là. Nous pouvons vérifier cela. Commençons par écrire le profit de l'entreprise i :

$$\pi_i(q_i, q) = q_i P(q) - C_i(q_i) = q_i(a - bq) - cq_i - F = q_i(a - c) - bq_i q - F$$

Pour maximiser son profit, l'entreprise i doit vérifier la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_i P'(q) + P(q) - C'_i(q_i) = 0$$

Le coût n'entre qu'au travers de sa dérivée dans le calcul, donc le coût fixe disparaît : $C'_i(q_i) = c$. Un coût fixe ne modifie donc pas la fonction de meilleure réponse dans un oligopole.

b. La réponse est oui : en effet, dans le cas où les coût fixes seraient trop élevée, alors l'entreprise ferait des pertes et préférerait ne pas produire.

2. Calculons maintenant la fonction de meilleure réponse de B avec les paramètres qui nous sont donnés. On a $P'(q) = -b$, et $C'_B(q_B) = 0$. Donc on a d'après la CPO :

$$-bq_B + a - b(q_A + q_B) = 0 \Leftrightarrow b(q_A + 2q_B) = a \Leftrightarrow q_B = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - q_A \right)$$

On peut maintenant résoudre le problème de maximisation de A , en utilisant la fonction de réaction de B :

$$\pi_A(q_A, q_B) = aq_A - bq_A(q_A + q_B) - F = -bq_A^2 + q_A \left(a - b \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - q_A \right) \right) = \frac{1}{2} (a - bq_A) q_A - F$$

On peut maintenant calculer la condition du premier ordre de A en dérivant le profit :

$$\pi'_A(q_A) = 0 \Leftrightarrow a - bq_A^* - bq_A^* = 0 \Leftrightarrow q_A^* = \frac{a}{2b}$$

F n'est pas présent dans la quantité optimale produite par A. Néanmoins, le profit total de A à l'optimum est :

$$\pi_A(q_A^*) = \frac{1}{2}(a - bq_A^*)q_A^* - F = \frac{a^2}{8b} - F$$

Si F est trop grand (ici, supérieur à $\frac{a^2}{8b}$), alors l'entreprise A ne produira pas. Plus F est grand, plus le profit de A est faible. En revanche, F n'influence pas les quantités produites par A et en ce sens n'impacte pas son avantage informationnel.

5.5.3 Cartels

Exercice 5.20. On se place à nouveau dans le cadre de l'exercice 5.17.

1. Supposons que les entreprises signent un accord de cartel pour produire conjointement la quantité correspondant à la situation de monopole. Quelle est la quantité que devrait produire chaque firme si elle respectait cet accord et quel serait alors le prix d'équilibre ?
2. Si la première firme respecte l'accord, la seconde a-t-elle intérêt à le respecter ? Si non, combien produira-t-elle ? Quel conséquence cela a-t-il ?

Solution (Solution de l'exercice 5.20). On reprend dans cet exercice une partie des calculs de l'exercice 5.17.

1. Le cartel cherche à maximiser le profit joint des deux entreprises. On écrit ce profit :

$$\pi(q) = qP(q) - C_A(q_A) - c_B(q_B) \text{ avec } q = q_A + q_B$$

On a vu en cours à l'équilibre, le cartel cherche à égaliser la recette marginale totale avec le coût marginal de chacune des entreprises :

$$R_m(q^*) = C_{mA}(q_A^*) = C_{mB}(q_B^*)$$

Ici, les coûts, et donc les coûts marginaux, sont nuls. On a donc directement $R_m(q^*) = 0$. On avait trouvé que la demande inverse est $P(q) = 24 - \frac{1}{10}q$. Donc $R_m(q) = 24 - \frac{1}{5}q$. On obtient donc l'équation suivante pour l'optimum du cartel :

$$24 - \frac{1}{5}q^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q^* = 120$$

On peut en déduire $p^* = 12$. On retrouve bien la solution du monopole qu'on avait trouvée à la question 1.e de l'exercice 5.17. Ici, les coûts de production sont nuls dans les deux entreprises, la répartition entre les deux n'importe donc pas.

2. L'accord entre les deux entreprises doit être tel que $q_A + q_B = 120$. Or, on a la fonction de réaction trouvée en 1.b de l'exercice 5.17 :

$$q_A = 120 - \frac{q_B}{2} \Leftrightarrow q_A + \frac{1}{2}q_B = 120$$

Or la fonction de réaction représente la quantité optimale que produirait A pour une quantité q_B donnée. L'accord n'est *pas* sur la fonction de réaction (sauf si $q_B = 0$), donc A aurait intérêt à ne pas respecter l'accord. On voit avec la fonction de réaction que A souhaiterait produire plus que ce que l'accord de cartel lui dit de produire. En effet, l'accord lui dit de produire $q_A = 120 - q_B$, alors que A aurait envie de produire $120 - \frac{1}{2}q_B$. Cela entraînera une quantité plus importante sur le marché et un prix plus faible que ce que le cartel ferait.

Exercice 5.21 (Duopole et cartel). La demande pour le bien q est donnée par :

$$P(q) = 180 - 2q$$

Seules 2 firmes identiques produisent le bien, leur fonction de coût individuelle est :

$$C(q_i) = 100 + q_i^2$$

Dans chacun des cas suivants, donnez les quantités produites, les prix et les profits des deux firmes :

1. Les firmes mènent une concurrence à la Cournot ;
2. Les firmes mènent une concurrence à la Stackelberg ;
3. Elles coopèrent afin de former un cartel.

Exercice 5.22 (Duopole et cartel bis (exercice de révision)). On considère un marché de duopole caractérisé par la fonction de demande :

$$P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$

et où les fonctions de coût des deux entreprises sont :

$$C(q_1) = 5q_1$$

$$C(q_2) = 0.5q_2^2$$

1. À partir des équations de profit, déterminer les fonctions de réaction des deux entreprises et les représenter graphiquement. Déterminer l'équilibre de Cournot de ce marché en duopole.
2. En considérant successivement les deux cas suivants :

- entreprise I meneur et entreprise II suiveur ;
- entreprise II meneur et entreprise I suiveur ;

Déterminer les deux équilibres de Stackelberg correspondants. Que se passe-t-il dans le cas où chacune des entreprises, croyant avoir un avantage informationnel, après avoir calculé son profit en tant que meneur et suiveur, choisit le rôle qui lui procure le plus grand gain ? Ce qui résulte de telles décisions conduit-il à une situation de marché stable ? Pourquoi ?

3. Les deux entreprises reconnaissent leur situation d'interdépendance mutuelle et sont d'accord pour agir de manière coordonnée afin de maximiser le profit total du groupe. Elles constituent donc un cartel. Déterminer la solution maximisant le profit du cartel. Pourquoi dans cette solution le coût marginal doit-il être égal dans les deux entreprises ?
4. On suppose que les deux entreprises négocient la constitution du cartel à partir de l'équilibre de Cournot. Sur un graphique dont le système d'axes représente les profits des deux entreprises, porter la droite représentant les différentes répartitions possibles du profit du cartel entre les deux entreprises. A partir du point correspondant à l'équilibre de Cournot, préciser la région de marchandage et déterminer les profits des deux entreprises dans le cadre d'un accord conduisant à répartir de manière égale le surplus de profit résultant du cartel.

Annexe A

Résolution des problèmes

TABLE A.1 : Tableau comparatif concurrence pure et parfaite et monopole, résolution des problèmes

Rubrique	CPP	Monopole
Consommateurs	une infinité (atomiques)	une infinité (atomiques)
Producteurs	une infinité (atomiques)	un (<i>le</i> monopole)
Prix	fixé par le marché p	fixé par le producteur p
Demande	agrégée $P(q)$	agrégée $P(q)$
Recette	$R(q) = pq$	$R(q) = P(q)q$
Coût	$C(q)$	$C(q)$
Offre	coût marginal ($C_m(q)$)	coût marginal ($C_m(q)$)
Profit	$\pi(q) = qp - C(q)$	$\pi(q) = qP(q) - C(q)$
Conditions d'équilibre	Offre égale demande	Coût marginal égal recette marginale
Formellement	$p^* = P(q^*) = C_m(q^*)$	$C_m(q^*) = R_m(q^*),$ $p^* = P(q^*)$
Méthode	On résout d'abord $P(q^*) = C_m(q^*)$ puis on calcule p^*	On calcule $C_m(q^*) = R_m(q^*)$ puis on obtient p^*
Conditions supplémentaires		$C'_m(q^*) > R'_m(q^*)$ et $\pi(q^*) \geq 0$

La différence entre la concurrence pure et parfaite et le monopole est qu'en monopole il n'y a qu'un seul producteur, qui dispose du pouvoir de fixer les

prix. Cela lui permet de connaître la demande agrégée des consommateurs P et de l'utiliser dans sa maximisation du profit. Cela modifie ainsi la condition d'équilibre en monopole.

Annexe B

Calcul des surplus

Définition B.1 (Surplus des consommateurs.). Le surplus des consommateurs est la somme de la différence entre le prix maximum que les consommateurs étaient prêt à payer et le prix effectivement payé. Mathématiquement, c'est l'intégrale suivante :

$$S_c(q) = \int_0^q P(x) - p dx = \int_0^q P(x) dx - pq$$

Où p est le prix payé, q la quantité échangée et P la demande inverse.

L'intégrale signifie que c'est l'aire comprise entre la demande inverse (la fonction P), le prix payé par les consommateurs (le prix p), l'axe des ordonnées et la quantité échangée (q). Dans notre cours, ce sera l'aire d'un triangle ou d'un trapèze.

Définition B.2 (Surplus des producteurs). Le surplus des producteurs est la somme de la différence entre le prix reçu par les producteurs et le coût marginal de production. Mathématiquement, c'est l'intégrale suivante :

$$S_p(q) = \int_0^q p - C_m(x) dx = pq - \int_0^q C_m(x) dx$$

Où p est le prix reçu par le producteur, q la quantité vendue et C_m la coût marginal.

L'intégrale signifie que c'est l'aire comprise entre le prix reçu par les producteurs (p), le coût marginal (C_m), l'axe des ordonnées et la quantité échangée (q). Dans notre cours, ce sera l'aire d'un triangle ou d'un trapèze.

Remarque (Lien entre surplus et profit). Si on continue l'expression donnée par l'équation (B.2), on obtient :

$$S_p(q) = pq - [C(x)]_0^q = pq - C(q) + C(0) = \pi(q) + C(0)$$

Cela prouve la relation donnée informellement dans le cours entre surplus et profit. Le surplus est la somme du profit réalisé par les producteurs et des coûts fixes (des coût qui ne dépendent pas de la quantité).

Remarque (Aire d'un triangle). L'aire d'un triangle est donnée par la formule suivante :

$$\text{aire triangle} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$$

Remarque (Aire d'un trapèze). L'aire d'un trapèze est donnée par la formule suivante :

$$\text{aire trapèze} = \frac{1}{2} \times (\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}$$

On peut illustrer ces formules avec deux cas pratiques (sur les graphiques B.1 et B.2).

Les valeurs sur les graphiques sont obtenues de la manière suivante :

- q est connu ou p est connu ;
- Si q est connu, on obtient p grâce à la fonction de demande inverse : $p = P(q)$. Si p est connu, on obtient q avec la fonction de demande $q = Q(p)$ ou en résolvant l'équation $p = P(q)$.
- $p_3 = P(0)$;
- $p_1 = C_m(0)$;
- p_2 dépendra du cas.

Le premier cas est illustré sur le graphique B.1. Le prix de l'échange p est tel que le surplus des consommateurs est un triangle, et le surplus des producteurs est un trapèze. Dans ce cas, on obtient $p_2 = C_m(q)$. Le surplus des consommateurs est donné par :

$$S_c = \frac{1}{2} \times (p_3 - p) \times q$$

Et le surplus des producteurs par :

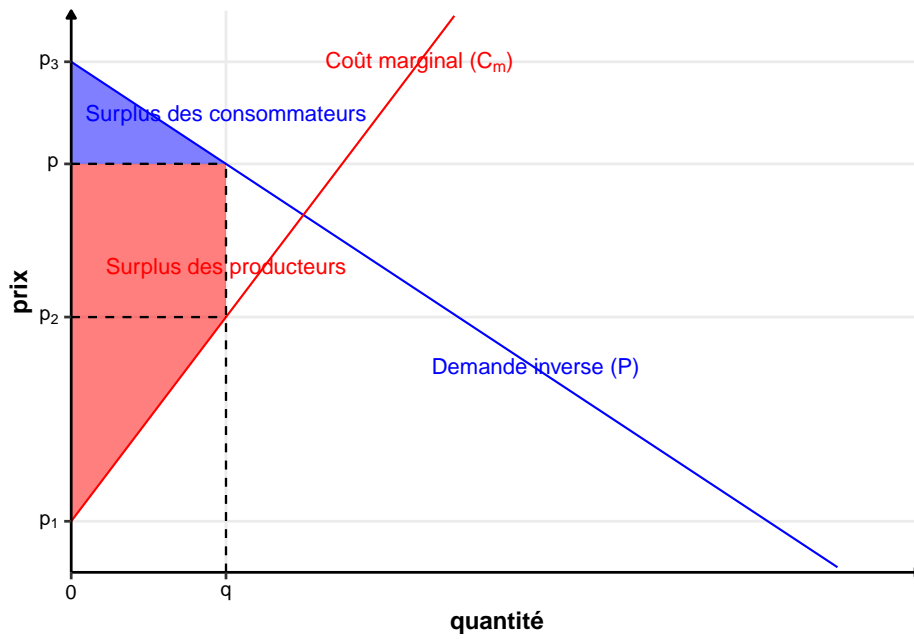
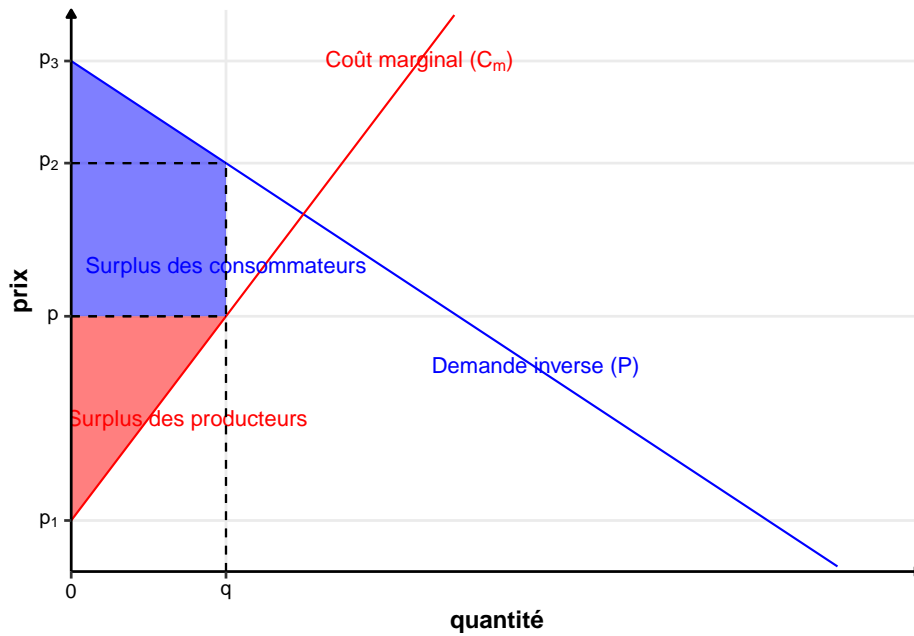
$$S_p = \frac{1}{2} \times (p - p_2 + p - p_1) \times q$$

Le second cas est illustré sur le graphique B.2. Le prix de l'échange p est tel que le surplus des consommateurs est un trapèze, et le surplus des producteurs est un triangle. Dans ce cas, on obtient $p_2 = P(q)$. Le surplus des consommateurs est donné par :

$$S_c = \frac{1}{2} \times (p_3 - p + p_2 - p) \times q$$

Et le surplus des producteurs par :

$$S_p = \frac{1}{2} \times (p - p_1) \times q$$

FIGURE B.1 – Surplus avec un prix de l'échange p .FIGURE B.2 – Surplus avec un prix de l'échange p .

Bibliographie

M. Jeleva and J. Etner. *Microéconomie*. Openbook. Dunod, 2014. ISBN 9782100714049.

Andreu Mas-Colell, Michael Dennis Whinston, and Jerry R Green. *Microeconomic theory*, volume 1. Oxford university press New York, 1995.

R. Pindyck, D. Rubinfeld, C. Sofer, and M. Sollogoub. *Microéconomie*. Pearson Education. Pearson, 2012. ISBN 9782744076015.

Hal R Varian and B. Thiry. *Introduction à la microéconomie*. Ouvertures économiques. De Boeck Supérieur, 2015. ISBN 9782804190224.

Hal R. Varian, J.M. Hommet, and B. Thiry. *Analyse microéconomique*. Ouvertures économiques. De Boeck Supérieur, 2008. ISBN 9782804158231.