

بسمه تعالی

پاسخ تمرین تحویلی سوم - درس ریاضی نویسی - دانشگاه صنعتی شریف
علیرضا توفیقی محمدی - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

پرسش

یک جدول $n \times n$ داریم که در هر خانه از آن عددی طبیعی قرار گرفته، در هر مرحله می‌توانیم یک سطر را انتخاب کرده و همگی اعداد آن را دو برابر کرده یا یک ستون را انتخاب کرده و از همگی اعداد آن یک واحد کم کنیم. ثابت کنید می‌توان با انجام تعدادی مرحله همگی خانه‌های جدول را ۰ کرد.

پاسخ

برای حل سوال ابتدا الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که همگی خانه‌های یک جدول $n \times 1$ که با اعداد طبیعی پر شده است را ۰ کند؛ سپس به کمک آن کل جدول را ۰ می‌کنیم. چنین الگوریتمی را در ادامه ستون صفر کن می‌نامیم.

الگوریتم ستون صفر کن:

فرض کنید یک جدول $n \times 1$ از اعداد طبیعی داریم، n بار فرایند زیر را روی آن انجام می‌دهیم:
در i امین فرایند، تا زمانی که مقدار خانه‌ی i ام برابر با ۱ نشده، همگی سطرها به غیر از سطر i ام را انتخاب کرده و دو برابر می‌کنیم و سپس ستون را در نظر گرفته و مقدار همگی خانه‌های آن را منهای یک می‌کنیم. (چون هر دفعه یک واحد از مقدار خانه‌ی i ام کم می‌شود و در ابتدا طبیعی بود، پس این فرایند پایان پذیر است.)

ادعا: بعد از انجام i امین فرایند، همگی خانه‌های ۱ تا i برابر با ۱ و خانه‌های $i + 1$ تا n عددی طبیعی اند.

اثبات: برای اثبات از استقرا استفاده می‌کنیم، بعد از انجام اولین فرایند، خانه‌ی اول برابر با ۱ است زیرا در غیر اینصورت بازهم باید عمل داخل فرایند یکم را تکرار می‌کردیم.
فرض کنید قبل از اجرای فرایند i ام (در پایان فرایند $i - 1$ ام) همگی خانه‌های ۱ تا $i - 1$ برابر با یک و بقیه‌ی خانه‌ها طبیعی باشند، در هر دفعه تمام خانه‌ها غیر از i ام را دو برابر می‌کنیم و مقدار کل خانه‌ها را منهای یک می‌کنیم، در این عمل خانه‌ی ۱ تا $i - 1$ ابتدا دو برابر شده و برابر با ۲ می‌شوند و سپس یک واحد از آن‌ها کم شده و برابر با ۱ می‌شوند، همچنین خانه‌های $i + 1$ تا n ام طبیعی بوده‌اند، پس دو برابر آنها حداقل ۲ است و منهای یک بازهم طبیعی است. پس در پایان هر دفعه اجرای فرایند i ام مقادیر خانه‌های ۱ تا $i - 1$ برابر با یک و $i + 1$ تا n طبیعی باقی می‌مانند. همچنین شرط پایان تکرار فرایند i ام برابر با ۱ شدن خانه‌ی i ام است، پس خانه‌ی i ام نیز برابر با یک می‌شود و گام استقرا ثابت و ادعای ما ثابت شد.

پس بعد از انجام فرایند n ام همگی خانه‌ها برابر با ۱ هستند.
حال اگر این ستون را منهای یک کنیم، همگی خانه‌ها ۰ می‌شوند و الگوریتم ستون صفر کن ساخته شد.

لم:

اگر جدولی $n \times n$ از اعداد حسابی داشته باشیم که ستونی از اعداد طبیعی داشته باشد و الگوریتم ستون صفر کن را برای خانه‌های آن ستون انجام دهیم، به جدولی می‌رسیم که اعداد آن ستون صفر بوده و دیگری اعداد طبیعی جدول طبیعی باقی مانده و اعداد \bullet جدول نیز \bullet باقی می‌مانند.

اثبات: اثبات به سادگی امکان پذیر است، طبق الگوریتم ستون جمع کن، همه‌ی خانه‌های آن ستون \bullet می‌شوند، همچنین چون فقط عمل منهای یک برای آن ستون انجام می‌شود تنها عملی که روی خانه‌های دیگر ستون‌ها انجام می‌شود ضربدر ۲ است، که ضربدر ۲، اعداد طبیعی را طبیعی و اعداد \bullet را \bullet نگه می‌دارد.

حل مسئله

جدول $n \times n$ از اعداد طبیعی داریم، حال فرایند زیر را n بار انجام می‌دهیم.

در مرحله‌ی i ام برای ستون i ام الگوریتم ستون صفر کن را اجرا می‌کنیم.

طبق لم اعداد ستون‌های $i + 1$ ام تا n ام طبیعی باقی می‌ماند و اعداد ستون‌های نخست تا $i - 1$ صفر باقی می‌ماند و اعداد ستون i ام هم که در الگوریتم ستون صفر کن، صفر شدند پس در پایان فرایند i ام خانه‌های ستون‌های ۱ تا i برابر با \bullet می‌شوند پس در پایان فرایند n ام تمام خانه‌های جدول \bullet می‌شوند و حکم ثابت می‌شود.