بسمه تعالی

پاسخ سری چهارم تمرین‌ها ــ درس ریاضیات گسسته ــ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ تمرین نهم

۱.۱ صورت سوال

چه تعداد جایگشت از حروف A تا P داریم که نتوان با حذف تعدادی از حروف آن کلمات BAD، DEAF و APE را ساخت؟ اگر کلمه‌ی LEADING نیز غیرمجاز بود چطور؟

۲.۱ پاسخ

برای حل این مسئله از اصل متمم و اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. A را مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های ممکن و A_i را مجموعه‌ی تمام جایگشت‌هایی که زیردنباله‌ای از حروف آن کلمه‌ی iام از کلمات صورت سوال را بسازد در نظر می‌گیریم.

$$\text{Answer} = |A\backslash(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$\rightarrow \text{Answer} = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + ... - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

از طرفی $|A| = 16!$ و $A_1 = \binom{16}{3} \times 13!, A_2 = \binom{16}{4} \times 12!, A_3 = \binom{16}{3} \times 13!$ همچنین چون در دو کلمه‌ای اول در اولی A قبل از D و در دومی D قبل از A آمده پس نمی‌توان جایگشتی را ساخت که هم شامل کلمه‌ی اول و هم شامل کلمه‌ی دوم باشد. به طریق مشابه همین استدلال می‌توان گفت جایگشتی که همزمان شامل کلمه‌ی دوم و سوم باشد نیز نداریم. و حال تنها کافی‌ست جایگشت‌هایی که شامل کلمه‌ی اول و سوم هستند را حساب کنیم. در این جایگشت‌ها باید B قبل از A بیاید، D بعد از A بیاید و وP E نیز بعد از A بیایند و P نیز قبل از E بیاید. که تعداد جایگشت‌ها برابر با $\binom{5}{16} \times 3 \times 11!$ است پس جواب مسئله برابر با

$$16! - \binom{16}{3} \times 13! - \binom{16}{4} \times 12! - \binom{16}{3} \times 13! + \binom{16}{5} \times 3 \times 11!$$

است.

حال به حل بخش دوم مسئله می‌پردازیم، مشابه بخش قبل جواب مسئله برابر با

$$\text{Answer} = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + |A_1 \cap A_2| + ... + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

در مورد کلمه‌ی چهارم؛ $A_4 = \binom{16}{7} \times 9!$ است، همچنین مشابه استدلال بخش قبل جایگشتی شامل کلمه‌ی چهارم و کلمه‌ی دوم یا سوم نداریم و تنها کافی‌ست $A_1 \cap A_4$ را شمارش کنیم، در این حالت نیز چون باید ترتیب هر دو حرف در این دو کلمه حفظ شود پسوند آن ADING بوده و پیشوند آن ۳ حالت (BLE، LBE، LEB) دارد، پس پاسخ مسئله برابر با

$$16! - \binom{16}{3} \times 13! - \binom{16}{4} \times 12! - \binom{16}{3} \times 13! - \binom{16}{7} \times 9! + \binom{16}{5} \times 3 \times 11! + \binom{16}{8} \times 3 \times 8!$$

است.

۲ تمرین دهم

۱.۲ صورت سوال

فرض کنید $n \geq 0$ عددی صحیح است، برای هر عدد حقیقی x ثابت کنید:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n = n!$$

۲.۲ پاسخ

تابع $f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n - n!$ را در نظر بگیرید، این تابع، یک چند جمله‌ای با درجه‌ی n است، پس اگر فقط برای x های بزرگتر از n و صحیح ثابت کنیم که مقدار $f(x) = 0$ است، چون بینهایت ریشه به‌دست آوردیم، پس برای همه‌ی نقاط باید تابع برابر با صفر باشد.
پس تنها کافی‌ست برای $x \geq n$ و صحیح ثابت کنیم

$$f(x) = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n = n!$$

است. برای اینکار ادعا می‌کنیم دو طرف معادله برابر با تعداد توابع از $\{1, 2, ..., n\}$ به $\{1, ..., x\}$ است که مجموعه‌ی $\{1, ..., n\}$ زیرمجموعه‌ی برد آن‌ها باشد.

از طرفی چون در دامنه n عضو داریم و برد باید شامل حداقل n عضو باشد، شامل دقیقا n عضو است و تعداد این توابع برابر با تعداد توابع پوشا از $\{1, ..., n\}$ به خودش است که برابر با $n!$ است.

از طرفی این تعداد را می‌توان با اصل شمول و عدم شمول محاسبه نمود؛ برای اینکار A را برابر با کل توابع و A_i را برابر با توابعی که شامل i نیستند تعریف می‌کنیم بدین صورت:

$$\text{Ans} = |A \backslash (A_1 \cup ... \cup A_n)| = |A| - |A_1 \cup ... \cup A_n|$$

است. که بنابر اصل شمول و عدم شمول برابر است با:

$$|A|-|A_1|-|A_2|-...-|A_n|+....+(-1)^n|A_1\cap...\cap A_n| = |A|+\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,...,n\}}(-1)^{|I|}\bigcap_{i\in I}A_i$$

$$= x^n - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(x-i)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(x-i)^n$$

که ثابت شد و حکم کلی نیز ثابت شد.