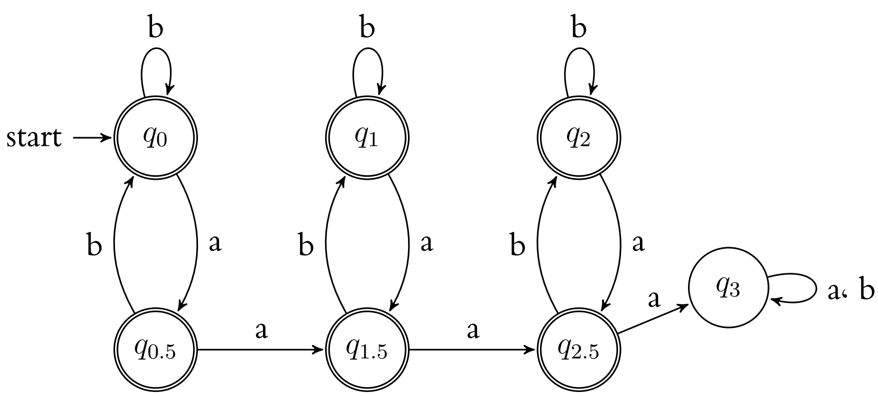
به نام خدا

دانشکده‌ی علوم ریاضی

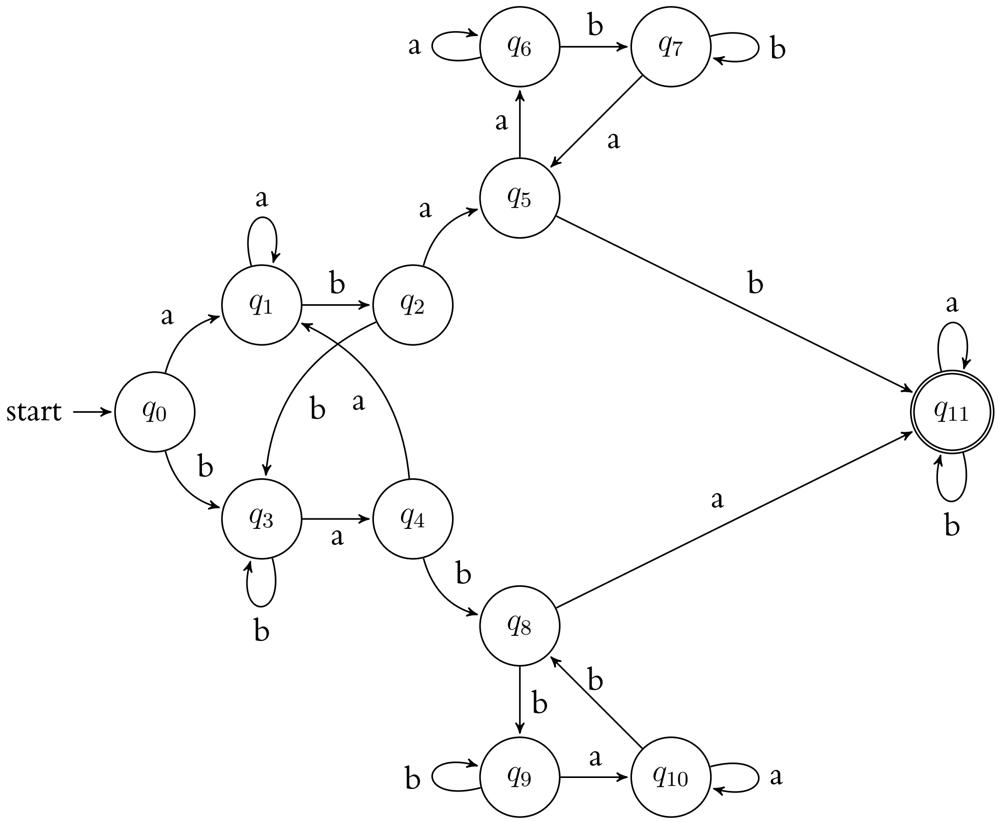
نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا	دانشجو: علیرضا توفیقی محمدی
تمرین : سری ۱	
مدرّس: دکتر شهرام خزائی	شماره‌ی دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

مسأله‌ی ۱

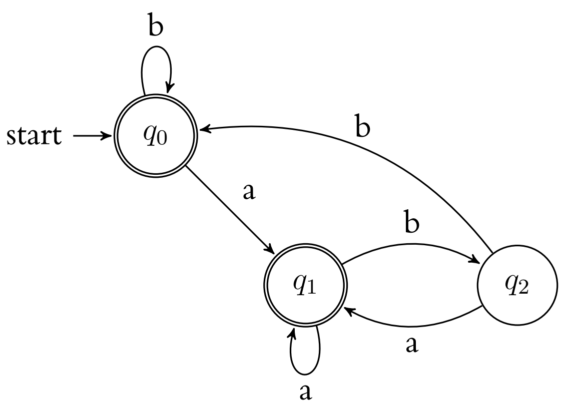
آ)



ب)



ج)



مسأله‌ی ۲

آ)

همه‌ی کلمه‌هایی که شامل زیررشته‌ی $aaba$ باشند.

ب)

همه‌ی کلمه‌هایی که به رشته‌ی $aaba$ ختم شوند.

مسأله‌ی ۳

آ)

برای اثبات حالت بندی می‌کنیم.

$m = |S \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}|$ **متنهای باشد**

که در این صورت چون $|A| \leq m$ و برای هر زبان متناهی عضوی یک DFA‌ داریم که آن‌را بپذیرد پس DFAای برای A داریم. (برای اثبات این گزاره کافی‌است یک DFAبه شکل درخت با $|\Sigma|^{\max\{|w||w \in A\}} + 2$ حالت رسم کنیم که هر حالت متناظر با یک کلمه‌ی حداکثر $\max\{|w||w \in A\}$ حرفی و یک حالت برای کلمات با حرف‌های بیشتر باشد و حالت‌های کلمات متناظر را نهایی بگذاریم)

$|S \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}|$ **متناهی نباشد**

که در این صورت ادعا می‌کنیم اعداد n' صحیح و نامنفی و p' صحیح و مثبت موجود اند که

$$S \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{n' + ip' | i \geq 0\}$$

در $S = \{n + ip | i \geq 0\}$ باید $p > 0$ باشد، زیرا در غیر اینصورت $n = \max S$ و S متناهی می‌شد، . همچنین چون $S \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ نامتناهی عضوی است، پس تهی نیست و طبق اصل خوش‌ترتیبی در اعداد طبیعی S مینیمم دارد.
حال $n' = \min(S \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\})$ و $p' = p$ اختیار می‌کنیم.
حال $Q = \{q_0, ..., q_{n'+p'}\}$ در نظر بگیرید و تابع δ را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\delta(q_i, a) = \begin{cases} q_{i+1} & \text{if } i < n' + p' \\ q_n & \text{if } i = n' + p' \end{cases}$$

حال DFAی D را به شکل زیر تعریف کنید: $D = (Q, a, \delta, q_0, \{q_n\})$ نسبتا واضح است که $L(D) = A$ پس DFAای وجود دارد که A را بپذیرد.

ب)

ابتدا ادعا می‌کنیم زبان یک DFAبا مجموعه حالت‌های نهایی $F = \{f_1, ..., f_k\}$ برابر با اجتماع زبان kتا DFAبا مجموعه‌ی الفبا، حالت‌ها و حالت‌اولیه‌ی برابر با DFAاصلی و حالت نهایی iام برابر با $\{f_i\}$ است.
با توجه به واضح بودن اثبات گزاره‌ی بالا با کمک $\hat{\delta}$ از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم و به ادامه‌ی راه حل مسئله می‌پردازیم:
پس تنها کافی‌است گزاره‌ی مسئله را برای DFAای با یک حالت نهایی ثابت کنیم. (اگر DFAی ما حالت نهایی نداشته‌باشد، در این صورت A تهی بوده و با قراردادن $n = i = -1$ مسئله حل می‌شود.)
فرض کنید A توسط DFAی $D = (\{q_0, ..., q_m\}, a, \delta, q_0, \{q_m\})$ پذیرفته شده‌باشد. (بدون خدشه به کلیت مسئله فرض‌کردیم که $Q = \{q_1, ..., q_m\}$ و F تک عضوی و $F = \{q_m\}$ است.)
حال $\hat{\delta}$ را برای D می‌سازیم.
$x_0 = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$ و $x_i = \hat{\delta}(q_0, a^i)$ تعریف کنید. طبق اصل لانه‌کبوتری و اینکه $|Q| = m$ و $x_i \in Q$ در $x_0, ..., x_m$ حداقل یک عضو تکراری داریم. اولین i که $x_i \in \{x_0, ..., x_{i-1}\}$ را k بنامید و فرض کنید $x_k = x_j$ که $j < k$.
در این صورت داریم $x_{j+r(k-j)+f} = x_{j+f}$
حال اگر $q_m \notin \{x_0, ..., x_{k-1}\}$ که زبان تهی است و یک تصاعد حسابی تهی داریم که در بالا داده شد. و مسئله حل می‌شود.
اگر $q_m \in \{x_0, ..., x_{j-1}\}$ که آن‌گاه $q_m \notin \{x_j, ..., x_k\}$ (زیرا در غیر این‌صورت اولین عضو تکراری k نبود) و در نتیجه زبان تنها شامل یک کلمه است، فرض کنید $q_m = x_t$ و در نتیجه طبق تعریف x_t، $A = \{a^t\}$ و درنتیجه با قرار دادن $n = t, i = -n - 1$ یک تصاعد حسابی با تک عضو t ساخته‌شده و مسئله حل می‌شود.
حال اگر $q_m \in \{x_j, ..., x_{k-1}\}$ باشد؛ فرض کنید $q_m = x_t$ که $j \leq t < k$ همچنین با توجه به اولین تکرار بودن k، هیچ i دیگری که $j \leq i < k$ وجود ندارد که x_i برابر با q_m باشد. پس در این صورت مجموعه‌ی x_i هایی که برابر با q_m اند برابر با $\{t + (k-j)r | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ است، پس با قرار دادن $n = t$ و $i = (k - j)$ یک تصاعد حسابی به شکل $S = \{n + ir | r \in Z\}$ یافت می‌شود و مسئله در این حالت هم حل می‌شود.
پس در حالت یک حالت نهایی با توانستیم A را با یک تصاعد حسابی بسازیم پس در حالتی که k حالت نهایی داریم طبق گزاره‌ی ابتدایی می‌توانیم A را با اجتماع k تصاعد حسابی بسازیم.

مسأله‌ی ۴

فرض کنید $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ یک DFAباشد که L_1 را بپذیرد، در این صورت F' را به کمک $\hat{\delta}$ برای D به‌شکل زیر تعریف کنید:

$$F' = \{q | \exists w \in L_2 : \hat{\delta}(q, w) \in F\}$$

حال DFAی $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ را در نظر بگیرید.
با توجه به اینکه فقط حالت‌های نهایی در D و D' متفاوت است درنتیجه $\hat{\delta}_D = \hat{\delta}_{D'}$ است.
حال $L(D') = L_1/L_2$ زیرا:

$$x \in L(D') \iff \hat{\delta}_{D'}(q_0, x) \in F'$$

$$\iff \exists y \in L_2 : \hat{\delta}_D(\hat{\delta}_{D'}(q_0, x), y) \in F$$

$$\iff \exists y \in L_2 : \hat{\delta}_D(\hat{\delta}_D(q_0, x), y) \in F$$

$$\iff \exists y \in L_2 : \hat{\delta}_D(q_0, xy) \in F$$

$$\iff \exists y \in L_2 : xy \in L(D)$$

$$\iff \exists y \in L_2 : xy \in L_1$$

$$x \in L_1/L_2$$

پس D' زبان L_1/L_2 را می‌پذیرد و مسئله حل شد.

مسأله‌ی ۵

تعریف ۱ به کلمه‌ای از حروف a, b که هم تعداد aها و هم تعداد bها در آن فرد باشد جذاب می‌گوییم.

تعریف ۲ به کلمه‌ی جذاب w جدایی ناپذیر می‌گوییم اگر هیچ چندتایی از کلمات جذاب $v_1, ..., v_k$ وجود نداشته باشد که $w = v_1 v_2 ... v_k$ و در غیر این‌صورت آن‌را جدایی پذیر می‌نامیم.

فرض کنید w کلمه‌ای جذاب باشد، می‌توان کلمات جذاب و جدایی‌ناپذیر $v_1, ..., v_k$ را یافت که $w = v_1 v_2 ... v_k$. (اثبات به سادگی با افراز متوالی w به کلمات جذاب و با توجه به متناهی بودن طول w واضح است.)
حال واضح است k عددی فرد است زیرا در غیر این‌صورت تعداد aها و bها زوج می‌شد و w جذاب نبود. اگر R عبارتی منظم برای زبان کلمات جذاب جدایی‌ناپذیر باشد، زبان کلمات جذاب با توجه به گزاره‌های بالا، $R(RR)^*R$ است. (زیرا به تعداد فردی کلمه‌ی جذاب جدایی‌ناپذیر افراز می‌شوند و بالعکس از چسباندن تعداد فردی کلمه‌ی جذاب جدایی ناپذیر یک کلمه‌ی جذاب ساخته می‌شود.)
پس تنها کافی‌است R را بیابیم، در ادامه تلاش می‌کنیم کمی ویژگی برای کلمه‌ی جذاب جدایی‌ناپذیر پیدا کنیم و سپس با کمک آن R را بسازیم.
فرض کنید $v = x_1 x_2 ... x_n$ یک کلمه‌ی جذابِ جدایی‌ناپذیر است و k اولین عددی باشد که کلمه‌ی $x_1 x_2 ... x_k$ جذاب است، اولاً چون $x_1 x_2 ... x_n$ جذاب است، چنین k ای وجود دارد و چون یک کلمه‌ی جذاب حداقل ۲ حرف دارد (حداقل یک a و یک b)، پس $k \geq 2$، همچنین واضح است که k و n زوج‌اند زیرا کلمه‌ی جذاب فرد a و فرد b و در مجموع زوج حرف دارد.
حال سه ویژگی زیر برقرار است:

۱. $x_k \neq x_{k-1}$: زیرا در غیر این‌صورت $x_1x_2...x_{k-2}$ نیز جذاب بود و با کمینه‌بودن k در تناقض بود.

۲. $\forall i \in \mathbb{N}, k+2i \leq n : x_{k+2i-1} = x_{k+2i}$: فرض کنید این‌طور نباشد، اولین i ای که $x_{k+2i-1} \neq x_{k+2i}$ است در نظر بگیرید. حال کلمه‌ی $x_{k+1}x_{k+2}...x_{k+2i-1}x_{k+2i}$ را در نظر بگیرید؛ این کلمه جذاب است زیرا به غیر از دو حرف آخر حرف $2j$ ام و $2j-1$ ام باهم برابرند و تعداد زوجی a و b دارند. و دو حرف آخر یکی a و دیگری b است پس در کل تعداد فردی a و b دارد. از طرفی $x_1x_2...x_k$ نیز جذاب بود، و همچنین $x_1x_2...x_n$ نیز جذاب است. پس $x_{k+2i+1}...x_n$ نیز باید جذاب باشد و در نتیجه v جدایی پذیر شد و این تناقض است، پس فرض خلف باطل است و ویژگی دوم نیز ثابت شد.

۳. $\forall i \in \mathbb{N}, 2i < k : x_{2i-1} = x_{2i}$: فرض کنید این‌طور نباشد، اولین i ای که $x_{2i-1} \neq x_{2i}$ است در نظر بگیرید. حال کلمه‌ی $x_1x_2...x_{2i-1}x_{2i}$ را در نظر بگیرید؛ این کلمه جذاب است زیرا به غیر از دو حرف آخر حرف $2j$ ام و $2j-1$ ام باهم برابرند و تعداد زوجی a و b دارند. و دو حرف آخر یکی a و دیگری b است پس در کل تعداد فردی a و b دارد و از طرفی $2i < k$ که با کمینه بودن k در تناقض است.

پس طبق ۳ ویژگی اثبات شده‌ی قبل، v به شکل یک ab یا ba ای است که حروف دو طرف آن به زیر رشته‌های aa و bb افراز می‌شوند.
پس عبارت منظم برای زبان کلمات جذاب جدایی ناپذیر برابر با

$$R = (aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*$$

است.
پس عبارت منظم زبان کلمات جذاب برابر با

$$((aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*(aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*)^*(aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*$$

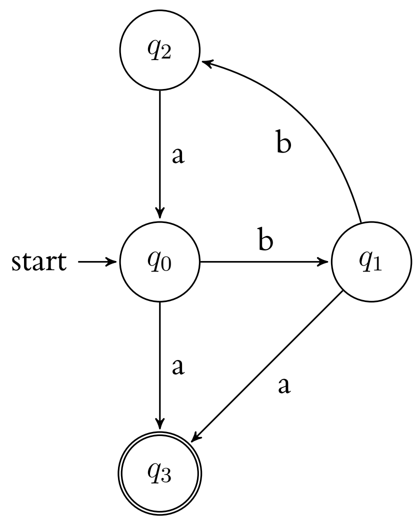
است که با کمی ساده‌سازی برابر با

$$((aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*(ab+ba)(aa+bb)^*)^*(ab+ba)(aa+bb)^*$$

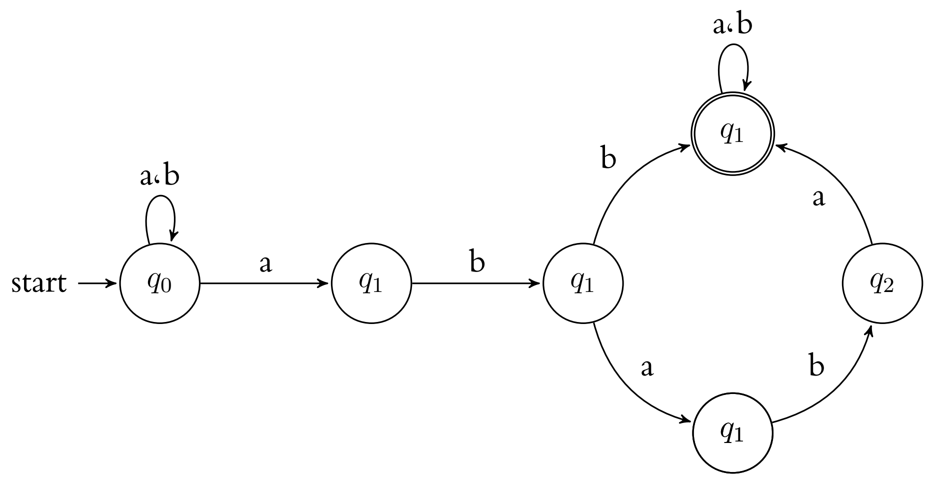
می‌شود.
حال به ساختن ϵ-NFA می‌رسیم...

مسأله‌ی ۶

آ)



ب)



مسأله‌ی ۷

کافی است به شکل بازگشتی عمل کنیم؛ دو طرف جمع و کانکت را جا به‌جا کنیم و سپس به شکل بازگشتی عملیات را روی عبارت‌های داخلی انجام دهیم.

$$abab(bba + ababb)^*$$

مسأله‌ی ۸

آ)

$$\lambda\lambda = \lambda \implies f(\lambda\lambda) = f(\lambda) \implies f(\lambda)f(\lambda) = f(\lambda) \implies f(\lambda) = \lambda$$

ب)

چون L منظم است پس عبارت منظمی مثل R وجود دارد که L را بپذیرد. حال تابع

$$g : \Sigma_1 \cup \{(,), +,^*, \emptyset\} \to \Sigma_2^* \cup \{(,), +,^*, \emptyset\}$$

را در نظر بگیرید که

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \Sigma_1 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال اگر $R = x_1x_2...x_n$ باشد، چون $x_i \in \Sigma_1 \cup \{(,), +,^*\}$، عبارت منظم $R' = g(x_1)g(x_2)...g(x_n)$ یک عبارت منظم روی Σ_2 است که ادعا می‌کنیم زبان آن $F(L)$ است، که اثبات آن به سادگی با کمک استقرا روی تعداد کاراکترهای $(,), +,^*, \emptyset$ در R به سادگی به دست می‌آید.

مسأله‌ی ۹

آ)

برای اثبات تنها کافی است ثابت کنیم:

$$L^k = L^{k+1} \iff L^k = L^*$$

برای این اثبات از لم‌های زیر استفاده می‌کنم.

لم ۱ اگر $\lambda \in L$ **آنگاه** $L^k \subseteq L^{k+1}$.
اثبات نسبتا ساده است، زیرا چون $\lambda \in L$ پس $L = \lambda + L$ و در نتیجه:

$$L^{k+1} = L^kL = L^k(\lambda + L) = L^k\lambda + L^kL = L^k + L^kL$$

و در نتیجه $L^k \subseteq L^{k+1}$ و حکم ثابت شد.

لم ۲ اگر L یک زبان منظم ناتهی باشد و یکی از دو شرط $L^k = L^{k+1}$ یا $L^k = L^*$ برقرار باشد، آنگاه $\lambda \in L$.
برای اثبات چون L ناتهی است، پس کلمه‌ای با کمترین طول دارد، کمترین طول را l در نظر بگیرید. کمترین طول در L^k برابر با lk و در L^{k+1} برابر با $l(k+1)$ است و در L^* برابر با ۰ است.
اگر حکم اول برقرار باشد آنگاه $lk = l(k+1) \implies l = 0$ و اگر حکم دوم برقرار باشد $lk = 0 \implies l = 0$ (زیرا اگر k صفر باشد آنگاه L^* برابر با L^0 یعنی تک رشته‌ی λ می‌شود و چون L تهی نیست، مجبور است فقط λ را داشته باشد و کمترین طول آن ۰ می‌شود.) پس لم ثابت شد.

حال اگر $L = \emptyset$ که $k = 0$ هر دو حکم بالا برقرار می‌شود و این k کوچکترین است و گزاره ثابت می‌شود. در ادامه فرض می‌کنیم $L \neq \emptyset$.
اگر $L^k = L^{k+1}$
اولا واضح است که $L^k \subseteq L^*$. طبق دیگر را ثابت می‌کنیم: در این صورت برای هر i نامنفی داریم $L^{k+i} \subseteq L^{k+i+1}$ و در نتیجه $L^k = L^{k+i}$ همچنین طبق لم۲، $\lambda \in L$ و در نتیجه طبق لم۱ داریم:

$$L^0 \subseteq L^1$$

$$L^1 \subseteq L^2$$

$$L^2 \subseteq L^3$$

...

$$L^{k-1} \subseteq L^k$$

و در نتیجه

$$L^0 \cup L^1 \cup ... \cup L^k \subseteq L^k$$

و در نتیجه

$$L^0 \cup L^1 \cup ... \cup L^k \cup L^k \cup ... \cup L^k \subseteq L^k$$

و در نتیجه

$$L^0 \cup L^1 \cup ... \subseteq L^k$$

و در نتیجه

$$L^* \subseteq L^k$$

پس $L^* = L^k$.

حال اگر $L^k = L^*$.
اولا که چون $L^{k+1} \subseteq L^*$ طبق فرض $L^{k+1} \subseteq L^*$
از طرفی طبق لم ۲، $\lambda \in L$ و درنتیجه طبق لم ۱، $L^k \subseteq L^{k+1}$
در نتیجه $L^k = L^{k+1}$.

ب)

برای پیدا کردن رتبه کافی است $L^0, L^1, ..., L^4$ را در این حالت خاص محاسبه کنیم.

$$L^0 = \{a^k | k = 0\}$$

$$L^1 = \{a^k | (k = 0) \vee (k \mod 3 = 2)\}$$

$$L^2 = \{a^k | (k = 0) \vee (k \mod 3 = 2) \vee (k > 3 \wedge k \mod 3 = 1)\}$$

$$L^3 = \{a^k | (k = 0) \vee (k \mod 3 = 2) \vee (k > 3)\}$$

$$L^4 = \{a^k | (k = 0) \vee (k \mod 3 = 2) \vee (k > 3)\}$$

پس اولین k ای که $L^k = L^{k+1}$ است، $k = 3$ است و رتبه‌ی این زبان ۳ است.

مسأله‌ی ۱۰

آ)

ب)

$$(a+b)a^* + (a+b)a^*b(aa*b + b(a+b)a*b)^*(aa* + b(a+b)a^)$$

ج)

$$(a+b)(((a+b)(a+b)b)^*(\epsilon + (a+b)(a+b)a(a+b)))^*(\epsilon + (a+b))$$

د)

$$(b + a(ba^*bb)^*(a + ba^*ba))^*$$