بسمه تعالی

پاسخ سری دوم تمرین‌ها ــ درس جبرخطی ۱ ــ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ سوال ۴

چون $< v_1, ..., v_{n+2} >$ زیرفضای از R^n است، پس بعد آن حداکثر n است پس حداقل ۲ تا از v_iها زائد بوده و می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از بقیه‌ی عناصر نوشت، فرض کنید این دو عضو v_{n+1} و v_{n+2} اند،پس داریم:

$$v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \rightarrow A = v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i v_i = 0 \qquad (1)$$

$$v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \rightarrow B = v_{n+2} - \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = 0 \qquad (2)$$

$$T = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$S = 1 - \sum_{i=1}^{n} s_i$$

اگر مجموع ضرایب عبارت (۱) را T و مجموع ضرایب عبارت (۲) را S می‌نامیم. اگر یکی از T و S برابر با صفر بود که همان عبارت جواب مسئله است زیرا مجموع ضرایب آن ۰ شده و ضریب جمله‌ی اول آن ناصفر(یک) است.

حال اگر $S \neq 0, T \neq 0$ در این داریم:

$$S \times A - T \times B = 0 \rightarrow S \times (v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i v_i) - T \times (v_{n+2} - \sum_{i=1}^{n} s_i v_i) = 0$$

$$\rightarrow -T \times v_{n+2} + S \times v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (T s_i - S t_i) v_i = 0$$

که در ترکیب خطی بالا مجموع ضرایب برابر است با:

$$-T + S + \sum_{i=1}^{n} T.s_i - S.t_i = -T(1 - \sum_{i=1}^{n} s_i) + S(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i) = -T \times S + S \times T = 0$$

مجموع ضرایب ترکیب خطی نیز ۰ شد و همچنین ضریب v_{n+1} برابر با $S \neq 0$ است پس این ترکیب خطی شرایط مسئله را دارد و حکم ثابت شد.

۲ سوال ۵

طبق ۴، اعداد حقیقی $a_1, ..., a_{n+2}$ وجود دارند که بعضی از آن‌ها ناصفر بوده و

$$a_1 + \cdots + a_{n+2} = 0 \text{ و } a_1.u_1 + \cdots + a_{n+2}.u_{n+2} = 0$$

حال عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1.u_1 + \cdots + a_{n+2}.u_{n+2} = 0$$

چون مجموع ضرایب این ترکیب خطی صفر است، پس مجموع ضرایب مثبت با مجموع ضرایب منفی برابر است، این مجموع را s در نظر بگیرید، همچنین بردارهایی که ضریب آن‌ها منفی است را به سمت چپ تساوی منتقل کنید و سپس دو طرف معادله را در $\frac{1}{s}$ ضرب کنید. هر طرف تمام ضرایب مثبت و مجموع ضرایب هر طرف برابر با $\frac{s}{s} = 1$ است، پس هر طرف یک نقطه از یک پوش محدب است پس دو پوش محدب پیدا کردیم که باهم اشتراک دارند.

۳ سوال ۶

شرط لازم و کافی برای اینکه بردار $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ باید داشته باشد تا $S = \{v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_n\}$ یک پایه برای V باشد این است که $a_i \neq 0$.

برای اینکار ثابت می‌کنیم اگر $a_i = 0$ باشد، $\{v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_n\}$ پایه‌ای برای V نیست و همچنین اگر $a_i \neq 0$ آنگاه $\{v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_n\}$ پایه‌ای برای V است.

اگر $a_i = 0$ باشد، در این صورت v را می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از بقیه‌ی عناصر S است پس S مستقل خطی نیست پس نمی‌تواند یک پایه برای V باشد. (همچنین حتی S مولدی برای V نیز نیست!)

اگر $a_i \neq 0$ در این صورت اثبات می‌کنیم S مستقل خطی است. فرض کنید:

$$b_1v_1 + ... + b_{i-1}v_{i-1} + b_iv + b_{i+1}v_{i+1} + ... + b_nv_n = 0$$

اگر $b_i = 0$ باشد در این صورت:

$$b_1v_1 + ... + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + ... + b_nv_n = 0$$

که چون $\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n\}$ مستقل خطی است، پس

$$b_1 = ... = b_{i-1} = b_{i+1} = ... = b_n = 0$$

که در این حالت مسئله حل شد.
حال اگر $b_i \neq 0$

$$-b_i v = b_1 v_1 + ... + b_{i-1} v_{i-1} + b_{i+1} v_{i+1} + ... + b_n v_n$$
$$\rightarrow -b_i a_1 v_1 + ... + -b_i a_n v_n = b_1 v_1 + ... + b_{i-1} v_{i-1} + b_{i+1} v_{i+1} + ... + b_n v_n$$
$$\rightarrow -b_i a_i v_i = (b_1 + b_i a_1) v_1 + ... + (b_{i-1} + b_i a_{i-1}) v_{i-1} + (b_{i+1} + b_i a_{i+1}) v_{i+1} + ... + (b_n + b_i a_n) v_n$$

چون $b_i \neq 0, a_i \neq 0$

$$\rightarrow v_i = \frac{b_1 + b_i a_1}{-b_i a_i} v_1 + ... + \frac{b_{i-1} + b_i a_{i-1}}{-b_i a_i} v_{i-1} + \frac{b_{i+1} + b_i a_{i+1}}{-b_i a_i} v_{i+1} + ... + \frac{b_n + b_i a_n}{-b_i a_i} v_n$$

پس v_i را توانستیم به صورت ترکیب خطی‌ای از $v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n$ بنویسیم که این با پایه بودن $v_1, ..., v_n$ در تناقض است پس این حالت رخ نمی‌دهد.

۴ سوال ۷

برای اینکه ویژگی مورد نیاز برای v را پیدا کنیم، فرض کنید v ای دلخواه داریم، برای اینکه $S = \{v_1 - v, \cdots, v_n - v\}$ یک پایه برای V باشد، باید دو شرط زیر صدق کند:

۱. اولا S مولدی برای V باشد.

۲. ثانیا S مستقل خطی باشد.

با توجه به اینکه $< S > \subseteq V$ اگر شرط دوم برقرار باشد آنگاه $\dim(< S >) = \dim(V)$ و نتیجه می‌گیریم که $< S > = V$ است و شرط اول را نتیجه می‌دهد. پس تنها بررسی شرط دوم لازم است.

فرض کنید اعداد $t_1, ..., t_n$ موجود باشند به‌طوری که:

$$t_1(v_1 - v) + ... + t_n(v_n - v) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i v_i = (\sum_{i=1}^{n} t_i) v$$

حال دو حالت داریم:

۱. **اگر $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ باشد:**

$$\sum_{i=1}^{n} t_i v_i = 0$$

و چون $\{v_1, ..., v_n\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌گیریم $t_1 = t_2 = ... = t_n = 0$ و درنتیجه $\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$ مستقل خطی است.

۲. **اگر $\sum_{i=1}^{n} t_i \neq 0$ باشد:**
آنگاه

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

$$\to v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i, (s_i = \frac{t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \to \sum_{i=1}^{n} s_i = 1)$$

چون ما می‌خواهیم $\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$ مستقل خطی شوند، پس باید نتیجه‌ی این عبارت یعنی $v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i, \sum_{i=1}^{n} s_i = 1$ برقرار نشود. پس شرط $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ برای اینکه شرط مسئله برقرار شود این است که $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$ شود، همچنین هر $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ دلخواه که $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$ شود را در نظر بگیریم، چون حالت دوم در استقلال خطی $\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$ رخ نمی‌دهد، پس $\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$ حتما مستقل خطی بوده و همچنین اگر $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ ای داشتیم که $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ بود، $\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$ حتما وابسته‌ی خطی است زیرا:

$$a_1(v_1 - v) + ... + a_n(v_n - v) = a_1v_1 + ... + a_nv_n - (a_1 + ... + a_n)v = v - v = 0$$

در حالی که چون $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ بوده پس حداقل یکی از a_i ها ناصفر است و

$$\{v_1 - v, ..., v_n - v\}$$

وابسته‌ی خطی است.

پس شرط لازم و کافی برای $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ این است که $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$.
که این از نظر هندسی به این معنی است که v بر روی صفحه‌ی تعمیم‌یافته‌ی تشکیل شده از نقاط $v_1, ..., v_n$ نباشد.

۵ سوال ۸

خیر، به طور مثال دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = e_1, ..., e_n$$

$$S_2 = 2e_1, ..., 2e_n$$

هردوی این مجموعه‌ها مولد R^n اند، پس داریم:

$$< S_1 > \cap < S_2 >= R^n \cap R^n = R^n$$

در حالی که

$$< S_1 \cap S_2 >=< \emptyset >= 0$$

پس اگر $n \neq 0$ باشد در مثال ما $< S_1 > \cap < S_2 > \neq < S_1 \cap S_2 >$

۶ سوال ۹

$W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای R^n است، اگر و تنها اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.
برای اثبات ادعای بالا اگر یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد آن‌گاه اجتماع این دو نیز برابر با زیرفضای بزرگتر می‌شود و در نتیجه خود یک زیرفضای برداری است.
حال فرض کنید $W_1 \nsubseteq W_2$ و $W_2 \nsubseteq W_1$ در این صورت

$$\exists v \in W_1 \land v \notin W_2, \exists u \in W_2 \land u \notin W_1$$

حال اگر $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای برداری باشد، آنگاه $< W_1 \cup W_2 >= W_1 \cup W_2$ همچنین از قبل می‌دانیم: $< W_1 \cup W_2 >= W_1 + W_2$ پس باید $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ همچنین چون $v \in W_1, u \in W_2$ است، نتیجه می‌گیریم: $v + u \in W_1 + W_2 = W_1 \cup W_2$ پس $v + u$ باید در یکی از W_1 یا W_2 باشد، بدون خدشه به کلیت مسئله فرض کنید در W_1 باشد پس چون W_1 یک زیرفضای برداری است داریم: $v+u \in W_1, v \in W_1 \to -v \in W_1 \to v+u-v = u \in W_1$ که این با $u \notin W_1$ در تناقض است و $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای برداری نیست.

همچنین در مورد W_1^c چون $0 \in W_1$ پس $0 \notin W_1^c$ پس W_1^c یک زیرفضای برداری نیست.

۷ سوال ۱۰

در قسمت نخست سوال فرض می‌کنیم $W_1 \subseteq W$ است و باید دو چیز را ثابت کنیم:
اول اینکه $W \cap W_1$ و $W \cap W_2$ مستقل خطی اند. که برای اثبات آن فرض کنید $v_1 \in W \cap W_1, v_2 \in W \cap W_2$ داریم به‌طوری که $v_1 + v_2 = 0$ است. چون $v_1 \in W \cap W_1$ بود نتیجه می‌گیریم $v_1 \in W_1$ و به طور مشابه نتیجه می‌گیریم $v_2 \in W_2$ است و از استقلال خطی W_1, W_2 نتیجه می‌گیریم $v_1 = v_2 = 0$ و ثابت شد $W \cap W_1$ و $W \cap W_2$ مستقل خطی اند.

دوم اینکه $W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)$ است.
برای اینکار ثابت می‌کنیم هر عضو طرف چپ در طرف راست و هر عضو طرف راست در طرف چپ است.
عضو دلخواه v از طرف راست را در نظر بگیرید داریم: $v = u+w, u \in W \cap W_1, w \in W \cap W_2$ پس $v = u + w, u, w \in W \to v \in W$ و ثابت شد هر عضو طرف راست در طرف چپ است.
حال عضو دلخواه w از طرف چپ را در نظر بگیرید:

$$w \in W \subseteq V \to w = v + u, v \in W_1, u \in W_2$$

از طرفی:

$$v \in W_1 \subseteq W \to v \in W \to v \in W \cap W_1$$

همچنین چون $u \in W_2$ بود داریم:

$$v \in W, v + u \in W \to u \in W \to u \in (W \cap W_2)$$

پس از دو عبارت قبل نتیجه می‌گیریم:

$$v + u \in (W \cap W_1) + (W \cap W_2) \to w \in (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)$$

و ثابت شد هر عضو طرف چپ نیز در سمت راست است و حکم ثابت شد.

حال اگر W شامل W_1, W_2 نباشد، مثال نقضی را در R^2 مطرح می‌کنیم که قابل تعمیم به R^n $(n > 1)$ است.
فرض کنید $W_1 =< e_1 >, W_2 =< e_2 >, V = W_1 \oplus W_2 = R^2$ است.
حال $W =< (1, 1) >$ در نظر بگیرید.

$$W \cap W_1 = 0, W \cap W_2 = 0 \to W \neq (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)$$

و مثال نقض درست است.