به نام خدا

دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا — علیرضا توفیقی محمدی

تمرین : سری ۳

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

مسأله‌ی ۱

آ)

تعریف ۱ به زبانی مثل A، (x,y) معتدل گوییم هرگاه هر رشته مثل $w \in A$ دارای شرایط زیر باشد:

۱. w متشکل از x و y باشد.

۲. تعداد xها و yها در w برابر باشند.

۳. به ازای هر پیشوند از w تعداد xها بیشتر یا مساوی تعداد y ها باشد.

از مطالب داخل جزوه و کلاس می‌دانیم زبان‌های (x,y) متعادل مستقل از متن اند و گرامری به شکل زیر دارند:

$$S \to xSy|\epsilon|SS$$

تعریف ۲ به رشته‌ی w جذاب گوییم هرگاه $n_0(w) = n_1(w)$.

فرض کنید w رشته‌ای جذاب باشد و n بزرگترین عددی باشد که $w = w_1w_2...w_n$ باشد و w_iها جذاب باشند. چون n بزرگترین عدد است، w_iها باید $(0,1)$ معتدل یا $(1,0)$ معتدل باشند. (زیرا در غیر اینصورت l و rای موجود است که تعداد ۱ها در پیشوند به طول یکی از x و y ۰ها بیشتر و در دیگری کمتر باشد و در نتیجه xای بین l و r وجود دارد که تعداد ۰ها و یک‌ها در پیشوند به طول x از w_i برابر باشد و می‌توان w_i را به دو رشته‌ی جذاب تبدیل کرد و w را به $n+1$ رشته‌ی جذاب تقسیم کرد که تناقض است.)
پس هر w که جذاب باشد به صورت $(l+r)^*$ که l رشته‌ای $(0,1)$ متعادل و r رشته‌ای $(1,0)$ متعادل است.
همچنین عمل بستار و جمع را با گرامرها بلدیم و می‌توانیم زبان $L = \{w \in 0,1^* | n_0(w) = n_1(w)\}$ را به شکل زیر بسازیم:

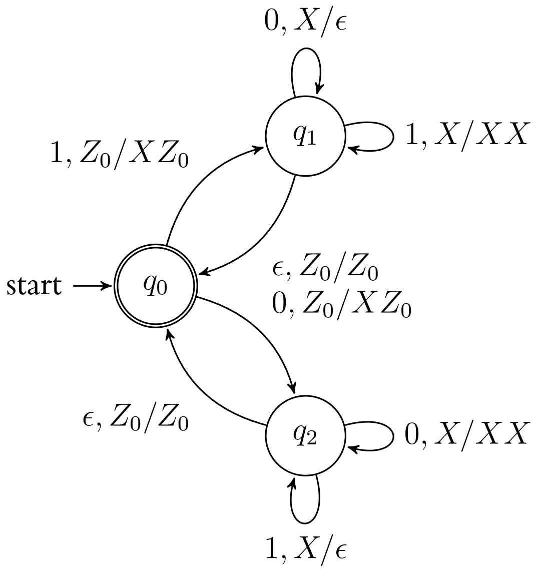
$$S \to AS|BS|\epsilon$$

$$A \to 0A1|AA|\epsilon$$

$$B \to 1B0|BB|\epsilon$$

ب) با توجه به توضیحات بند الف، می‌توان به همین نحو و با کمک ماشین پشته‌ای نیز این زبان را ساخت:

$$\Gamma = \{Z_0, X\}, F = \{q_0\}$$



که حالت بالا راست برای $(1,0)$ متعادل‌ها و حالت پایین برای $(0,1)$ متعادل هاست. به سادگی با کمک استقرا روی تعداد حداکثر nای که w را می‌توان به n رشته‌ی جذاب افراز کرد مسئله را حل کرد و همچنین استقرا روی تعداد دفعه‌هایی که PDA به حالت q_0 می‌رسد ثابت کرد ماشین پشته‌ای ساخته شده درست کار می‌کند.

مسأله‌ی ۲

آ) برهان خلف می‌زنیم، فرض کنید $DPDA$ای مانند $D = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ وجود دارد که

$$L(D) = \{0^n 1^n \cup 0^n 1^{2n} | n \geq 1\}$$

(بدون خدشه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم پشته‌ی این ماشین هیچ‌گاه خالی نمی‌شود. (با ساختن یک حالت اولیه جدید که ϵ از رشته و Z_0 از پشته را می‌خواند و به حالت اولیه قبل رفته و $Z_0\#$ که $\#$ یک حرف جدید است را به پشته اضافه می‌کند.)) حال با کمک D یک ماشین پشته‌ای دیگر مثل D' می‌سازیم که $L(D') = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\}$ باشد و به تناقض می‌رسیم.
برای این کار

$$D' = (Q', \{0,1,2\}, \Gamma, \delta', (0, q_0), Z_0, F')$$

در نظر بگیرید که

$$Q' = \{(x,q)|x \in \{0,1\}, q \in Q\}$$

$$F' = \{(1,q)|q \in F\}$$

$$\forall X \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, q \in Q - F : \delta'((0,q),a,X) = \{((0,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,a,X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma, a \in \Sigma, q \in F : \delta'((0,q),a,X) = \{((0,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,a,X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma, q \in F : \delta'((0,q),\epsilon,X) = \{((0,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,\epsilon,X)\} \cup \{((1,q),X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma, q \in Q : \delta'((2,q),\epsilon,X) = \{((2,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,\epsilon,X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma, q \in Q : \delta'((2,q),0,X) = \{((2,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,0,X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma, q \in Q : \delta'((2,q),2,X) = \{((2,p),\gamma)|(p,\gamma) \in \delta(q,1,X)\}$$

(در واقع یک کپی از ماشین پشته‌ای ساختیم و در ماشین پشته‌ای جدید به جای یک، دو گذاشته و حالت‌های نهایی ماشین اول را با خواندن ϵ به حالت نهایی متناظر در ماشین دوم وصل می‌کنیم و حالت‌های نهایی را حالت‌های نهایی کپی‌شده می‌گذاریم.)

به سادگی می‌توان دید زبان ماشین دوم به صورت $L' = \{w|w = 0^n1^n \vee w = 0^n1^{2n} \vee w = 0^n1^n2^n, n \geq 1\}$ است.

حال چون L' توسط یک ماشین پشته‌ای پذیرفته شده است، لم تزریق برای آن برقرار است و عددی مثل n وجود دارد که هررشته مثل w که $w \in L', |w| \geq n$ باشد را می‌توان به شکل شرایط لم تزریق نوشت، این رشته را $w = 0^{2n}1^{2n}2^{2n}$ در نظر بگیرید، طبق لم تزریق داریم:

۱. $w = abcde$

۲. $bcd \leq n$

۳. $|bd| \geq 1$

۴. $\forall i ab^icd^ie \in L'$

که چون $w = 0^{2n}1^{2n}2^{2n}$ است، bcd یا ۰ را شامل نمی‌شود یا ۱ را شامل نمی‌شود، در نتیجه رشته‌ی ace دارای تعداد نامساوی از ۰ و ۱ و ۲ است و از هر کدام حداقل یکی دارد، پس نمی‌تواند در L' باشد که تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مسأله‌ی ۳

مسأله‌ی ۴

مسأله‌ی ۵

آ)

$$S \rightarrow a|aSa|aSb|bSa|bSb$$

اگر زبان گرامر بالا را G و زبان همه‌ی کلمات به طول فرد که حرف وسط آن‌ها a است را L در نظر بگیریم، باید ثابت کنیم

$$L = G \iff L \subseteq G \wedge G \subseteq L$$

اثبات $L \subseteq G$
فرض کنید $w \in L$ باشد، با استقرا روی طول w ثابت می‌کنیم $w \in G$.
پایه: اگر $|w| = 1$ آنگاه $w = a$ که واضح است در G است.
حال فرض کنید برای همه‌ی wهایی که $|w| < n$ است، w توسط متغیر S ساخته شود.
حال wای که $|w| = n$ در نظر بگیرید و فرض کنید $w = w_1w_2...w_n$ و $n > 2$، حال رشته‌ی $w' = w_2w_3...w_{n-1}$ را در نظر بگیرید، w' نیز رشته‌ای به طول فرد است که وسط آن حرف a است، پس طبق فرض استقرا توسط S تولید می‌شود.
حال چون در قواعد تولید به ازای هر $x, y \in \Sigma$، قاعده‌ی $S \rightarrow xSy$ را در قواعد تولید داریم، پس با کمک قاعده‌ی $S \rightarrow w_1Sw_n$ و تولید شدن w' از S طبق استنتاج بازگشتی S رشته‌ی $w = w_1w'w_n$ را نیز تولید می‌کند و مسئله حل شد.
اثبات $G \subseteq L$
برای اثبات فرض کنید رشته‌ی w از روی متغیر S استنتاج شده‌باشد، با استقرا روی تعداد مراحل استنتاج ثابت می‌کنیم $w \in L$.
پایه: اگر تعداد مراحل استنتاج یک باشد در این صورت فقط رشته‌ی a را می‌توانیم بسازیم که در زبان است.
حال فرض کنید هر رشته‌ای با حداکثر k مرحله استنتاج ساخته شود در L باشد، حال رشته‌ی w را در نظر بگیرید که با $k+1$ مرحله استنتاج ساخته شده‌باشد، این رشته در آخرین مرحله‌ی استنتاج بازگشتی از یکی از قوانین تولید استفاده کرده، چون قوانین تولیدی که سمت راستشان متغیر است، همه دارای تک متغیر S اند و این S باید با حداکثر k مرحله استنتاج ساخته شده‌باشد، طبق فرض استقرا رشته‌ای با طول فرد است که حرف وسط آن a است، حال با توجه به قواعد تولید دوطرف این S یک حرف قرار می‌دهیم که رشته‌ی جدید نیز در L است، پس گام استقرا نیز ثابت شد.
پس حکم ثابت شد و $L = G$.
ب)

$$S \rightarrow a|baAa|bBbA \rightarrow a|aAa|aAb|bAa|bAbB \rightarrow b|aBa|aBb|bBa|bBb$$

طبق توضیحات بالا و با توجه به مشابه بودن گرامر با گرامر قسمت الف، زبان تولید شده از متغیر A تمام رشته‌های

فرد حرفی اند که حرف وسط آن‌ها a است و زبان تولید شده از متغیر B تمام رشته‌های فرد حرفی‌اند که حرف وسط آن‌ها b است.
حال یک رشته ۲ حالت دارد، حرف وسط و اول و آخر آن a باشد که در این صورت به شکل aAa یا a است و یا حرف وسط، اول و آخر آن b است که به شکل bBb یا b است که متغیر S تنها به این دو حالت را می‌سازد پس گرامر تولیدشده درست است.

مسأله‌ی ۶

مسأله‌ی ۷

همه‌ی متغیرها پوچ سازند پس:

$$S \to A|B|C|AB|AC|BC|ABC$$

$$A \to B|A|BA|C|BC|a$$

$$B \to A|C|AB|B|CB|b$$

$$C \to B|C|BC|A|AB|c$$

مسأله‌ی ۸

ابتدا قواعد تولید ϵ را از گرامر حذف می‌کنیم:

$$S \to S(S)|(S)|S()|()$$

حال متغیرهای غیر مولد و غیرقابل درسترس را حذف می‌کنیم که متغیری نداریم.
سپس با تعریف متغیرهای جدید گرامر را به فرم نرمال تبدیل می‌کنیم:

$$S \to SX|AY|SZ|AB$$

$$X \to AY$$

$$Y \to SB$$

$$A \to ($$

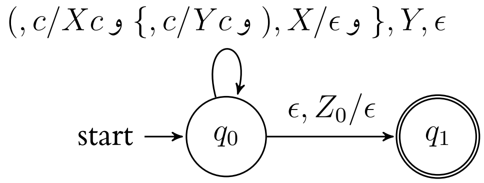
$$B \to)$$

مسأله‌ی ۹

آ)

(در ماشین کشیده شده c به معنی یک حرف پشته‌ی دلخواه است.)

$$\Gamma = \{Z_0, X, Y\}, F = \{q_1\}$$



ب)

مسأله‌ی ۱۰

چون تعداد دنباله‌های به طول حداکثر k از حروف Γ متناهی است پس یک ϵ-NFAمی‌سازیم که حالت‌هایش دوتایی از حالت‌های ماشین پشته‌ای و دنباله‌ای به طول حداکثر k از Γ باشد. یعنی اگر $P = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, F)$ ماشین پشته‌ای باشد یک ϵ-NFAمثل E به شکل زیر ارائه می‌دهیم:

$$E = (\Sigma, Q', q'_0, \delta', F')$$

$$Q' = \{(q, y) | q \in Q \land y = X_1 ... X_l, l \leq k, X_i \in \Gamma\}$$

$$q'_0 = (q_0, Z_0)$$

$$\delta'((q, X_1 ... X_l), x) = \{(p, X_1 ... X_{l-1}\gamma) | x \in \Sigma \cup \epsilon \land p \in Q \land \gamma \in \Gamma^* \land (p, \gamma) \in \delta(q, x, X_l)\}$$

$$F' = \{(q, X_1 ... X_l) | q \in F \land X_i \in \Gamma \land l \leq k\}$$

حال ادعا می‌کنیم $L(E) = L(P)$. که اثبات آن با توجه به فرض مسئله و ویژگی‌های اتوماتای ساخته‌شده نسبتا واضح است زیرا متناظر هر حالت و هر حالت از پشته یک حالت در ϵ-NFAداریم و حرکت‌های روی PDA دقیقا متناظر با حرکت‌های روی ϵ-NFAاست.

مسأله‌ی ۱۱

مسأله‌ی ۱۲

آ) اگر زبان مستقل از متن باشد پس n ای وجود دارد که برای هر رشته با طول بیشتریا مساوی n در زبان، لم‌تزریق برقرار باشد.

حال $m = \max(n, 10)$ در نظر بگیرید و رشته‌ی $w = a^{2^m}$ در نظر بگیرید، چون $|w| \geq n$ پس $w = uvxyz$ است که $|uxy| \leq n$ و $|uy| > 0$ و uxz نیز در زبان است.

از طرفی $2^m > |uxz| \geq 2^m - n > 2^{m-1}$

پس نمی‌تواند در زبان باشد و این تناقض است.
پس فرض خلف باطل و زبان مستقل از متن نیست.
ب) اگر زبان مستقل از متن باشد پس n ای وجود دارد که برای هر رشته با طول بیشتریا مساوی n در زبان، لم‌تزریق برقرار باشد.
حال رشته‌ی $w = a^n b^{2n} a^n$ در نظر بگیرید، چون $|w| \geq n$ پس $w = uvxyz$ است که $|uxy| \leq n$ و $|uy| > 0$ و uxz نیز در زبان است.
چون تعداد bهای وسط بیشتر از n تاست، uxy رشته‌های aهای چپ یا راست یا شامل نمی‌شود. پس رشته‌ی uxz یا دارای تعداد aهای نابرابر در دو طرف یا bهای نابرابر با تعداد کل a هاست، پس در زبان تیست.
پس فرض خلف باطل و زبان مستقل از متن نیست.
پ) اگر زبان مستقل از متن باشد پس n ای وجود دارد که برای هر رشته با طول بیشتریا مساوی n در زبان، لم‌تزریق برقرار باشد.
حال رشته‌ی $w = a^n b^{n-1} c^n$ در نظر بگیرید، چون $|w| \geq n$ پس $w = uvxyz$ است که $|uxy| \leq n$ و $|uy| > 0$ و uxz نیز در زبان است.
چون تعداد bهای وسط کمتر از n تاست، uy حتما شامل a یا c است، از طرفی نمی‌تواند شامل هردو باشد، پس در رشته‌ی uxz دقیقا تعداد یکی از a و c کمتر از n است و دیگری برابر با n است که در نتیجه uxz در زبان نیست که این تناقض است.
پس فرض خلف باطل و زبان مستقل از متن نیست.

مسأله‌ی ۱۳

برای اثبات از تمرین سری یک زیر به عنوان یک لم بدون اثبات استفاده می‌کنیم. (اثبات آن را در سری یک نوشتم و از تکرار پرهیز می‌کنم:)

لم ۱ اگر $L \subseteq a^*$ برابر با اجتماع متناهی تصاعد حسابی باشد، آنگاه L منظم است.

با توجه به با توجه به لم تنها کافی است ثابت کنیم L شامل متناهی تصاعد حسابی است، برای اینکار از لم تزریق استفاده می‌کنیم فرض کنید n عدد لم تزریق باشد، فرض کنید رشته‌ی w به طول r عضو L باشد که $r \geq n$ در این صورت $w = uvxyz$ است ک همه‌ی رشته‌های به شکل $uv^i xy^i z$ نیز عضو L اند، یعنی اگر طول vy برابر با p باشد، همه‌ي رشته‌ها به طول $r - p + kp = r' + kp$ نیز عضو زبان اند.
به ازای هر رشته دوتایی (r', p) را تشکیل داده و مجموعه‌ی همه‌ی این دوتایی‌ها را S می‌نامیم و ثابت می‌کنیم این دوتایی‌ها تعداد متناهی دنباله را می‌سازند پس کل زبان از تعداد متناهی دنباله حسابی تشکیل شده‌است.
برای این‌کار اولا می‌دانیم $1 \leq p \leq n$.
حال به ازای pای بین ۱ تا n و عددی مثل x بین ۰ تا $p - 1$، مجموعه‌ی

$$A = \{w | (w, p) \in S, w \mod p = x\}$$

را در نظر بگیرید.

اگر A تهی نبود، طبق اصل خوش‌ترتیبی در اعداد طبیعی مینیمم دارد، تعریف کنید $w_0 := \min(A)$. ادعا می‌کنیم همه‌ی دنباله‌ها با دوتایی (w,p) که $w \mod p = x$ است توسط دنباله با دوتایی (w_0,p) ساخته می‌شود. اثبات ادعا نیز واضح است زیرا این دنباله شامل همه‌ی اعداد بزرگتر یا مساوی w_0 که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر p برابر با x است، هست و بقیه‌ی دنباله‌ها برابر با مه‌ی اعداد بزرگتر یا مساوی w که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر p برابر با x است، هستند که در نتیجه زیرمجموعه‌ی دنباله‌ی اول اند.
پس با کمک حداقل n^2 دنباله توانتسیم کل دنباله‌های تولیدی با کمک رشته‌های با طول بزرگتریا مساوی n را تولید کنیم، همچنین هر رشته با طول کمتر از n خود یک تصاعد حسابی یک عضوی است. پس با کمک حداثل n^2+n تصاعد حسابی می‌توانیم زبان L را بسازیم، پس طبق لم L منظم است.

مسأله‌ی ۱۴

فرض کنید PDAای مانند $P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ وجود دارد که $L(D)=L$. (بدون خدشه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم پشته‌ی این ماشین هیچ‌گاه خالی نمی‌شود. (با ساختن یک حالت اولیه جدید که ϵ از رشته و Z_0 از پشته را می‌خواند و به حالت اولیه قبل رفته و $Z_0\#$ که $\#$ یک حرف جدید است را به پشته اضافه می‌کند.)) حال با کمک P یک ماشین پشته‌ای دیگر مثل P' می‌سازیم که زبان آن همه‌ی پیشوندهای L باشد.
برای این کار

$$P'=(Q',\Sigma,\Gamma,\delta',(0,q_0),Z_0,F')$$

در نظر بگیرید که

$$Q'=\{(x,q)|x\in\{0,1\},q\in Q\}$$

$$F'=\{(1,q)|q\in F\}$$

$$\forall q\in Q,w\in\Sigma,X\in\Gamma:\delta'((0,q),w,X)=\{((0,q),Y)|(q,Y)\in\delta(q,w,X)\}$$

$$\forall q\in Q,X\in\Gamma:\delta'((0,q),\epsilon,X)=\{((0,q),Y)|(q,Y)\in\delta(q,\epsilon,X)\}\cup\{((1,q),X)\}$$

$$\forall q\in Q,X\in\Gamma:\delta'((1,q),\epsilon,X)=\{((1,q),Y)|w\in\Sigma\cup\{\epsilon\},(q,Y)\in\delta(q,w,X)\}$$

$$F'=\{(1,q)|q\in F\}$$

(در واقع یک کپی از ماشین پشته‌ای ساختیم و در ماشین پشته‌ای جدید به جای همه‌ی حرف‌های الفبا، اپسیلون گذاشته و حالت‌های نهایی را برای ماشین دوم تعریف کرده و هر حالت ماشین اول را به حالت متناظر آن با در ماشین دوم بدون تغییر در پشته و حرف خوانده‌شده وصل کرده‌ایم.)
اولا به سادگی می‌توان دید اگر بتوان از توصیف سریع (q,w,γ) به توصیف سریع (q',ϵ,γ') در P رفت آن‌گاه در P' داریم:

۱. از $((0,q),w,\gamma)$ به $((0,q'),\epsilon,\gamma')$ رفت.

۲. از $((1,q),\epsilon,\gamma)$ به $((1,q'),\epsilon,\gamma')$ رفت.

و برعکس.
حال می‌توان به شکل متناظر عبارت زیر را گفت:
اگر بتوان از توصیف سریع (q, w, γ) به توصیف سریع (q', ϵ, γ') در P رفت آنگاه به ازای هر پیشوند w مثل w' در P' داریم:
از توصیف سریع $((0, q), w', \gamma)$ به توصیف سریع $((1, q'), \epsilon, \gamma')$ می‌توان رفت و برعکس.
که با کمک این به سادگی نتیجه می‌شود زبان P' با پذیرش حالت نهایی زبان همه‌ی پیشوندهای L است.

مسأله‌ی ۱۵