

۱. تعریف مفاهیم زیر را بیان کنید (۱۵ نمره)

نگاشت خطی، مولد فضای برداری، نگاشت خطی پوچ توان، فضای دوگان، ترانهاده یک عملگر خطی

۲. نشان دهید V_1, \dots, V_k زیرفضاهایی مستقل خطی با بعد متناهی اند اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد (۱۵ نمره)

$$\dim(V_1 + \dots + V_k) = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$$

۳. منظور از پوش محدب $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ مجموعه $\{t_1 u_1 + \dots + t_k u_k : 0 \leq t_1, \dots, t_k, t_1 + \dots + t_k = 1\}$

است. نشان دهید هر مجموعه $n+2$ عضو $u_1, \dots, u_{n+2} \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به دو مجموعه مجزا تقسیم کرد که پوش محدب آنها با هم اشتراک داشته باشند. (۱۰ نمره)

۴. نشان دهید یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F نمی‌تواند اجتماع تعدادی کمتر از $|F|$ زیرفضای اکید خود باشد. (۱۰ نمره)

۵. فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای برداری V و $\alpha = \{v, T(v), \dots, T^k(v)\}$ یک پایه مرتب برای V است. $[T]_\alpha^\alpha$ را بدست آورید. (۱۰ نمره)

۶. فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی V است به گونه‌ای که $T^2 = -I$. نشان دهید V را با همان جمع برداری، می‌توان به صورت یک فضای برداری مختلط در نظر گرفت. (۱۰ نمره)

۷. فرض کنید p_1, \dots, p_m چند جمله‌ای‌هایی با درجه کمتر از m روی میدان F باشند به گونه‌ای که $p_1(1) = \dots = p_m(1) = 0$. نشان دهید p_i ها وابسته خطی‌اند. اگر این چند جمله‌ای‌ها در رابطه $p_1(1) = \dots = p_m(1) = 1$ صدق کنند آیا می‌توانند مستقل خطی باشند؟ (۱۰ نمره)

موفق باشید