بسمه تعالی

پاسخ سری پنجم تمرین‌ها ـ درس جبرخطی ۱ ـ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ـ رشته علوم کامپیوتر ـ شماره‌ی دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ تمرین ۱۶ سری سوم

۱.۱ $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB$

برای اثبات $\ker A$، $\ker B$ و $\ker AB$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم:

$$\dim(\ker AB) \leq \dim(\ker A) + \dim(\ker B)$$

زیرا

$$\ker AB = \ker B + \ker A|_{\operatorname{Im} B} \implies$$

$$\dim(\ker AB) = \dim(\ker B) + \dim(\ker A|_{\operatorname{Im} B}) - \dim(\ker A|_{\operatorname{Im} B} \cap \ker B)$$

$$= \dim(\ker B) + \dim(\ker A|_{\operatorname{Im} B}) \leq \dim(\ker B) + \dim(\ker A)$$

و چون $\dim \ker T + \operatorname{rank} T = n$ داریم:

$$n - \operatorname{rank} AB \leq n - \operatorname{rank} A + n - \operatorname{rank} B \implies \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB$$

۲.۱ $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$

اولا

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A|_{\operatorname{Im} B} \leq \operatorname{rank} A$$

ثانیا

$$\ker B \subseteq \ker AB \implies \dim \ker B \leq \dim \ker AB \implies$$

$$n - \operatorname{rank} B \leq n - \operatorname{rank} AB \implies \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

پس

$$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

و حکم ثابت شد.

۳.۱ $\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC \leq \operatorname{rank} ABC + \operatorname{rank} B$

برای اثبات ابتدا ادعا می‌کنیم

$$\operatorname{Im} AB = \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} B}$$

که تقریبا واضح است، زیرا:

$$v \in \operatorname{Im} AB \iff \exists u : AB(u) = v \iff A(B(u)) = v$$

$$\iff w = B(u) \in \operatorname{Im} B; A(w) = v \iff v \in \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} B}$$

همچنین می‌دانیم:

$$\dim \operatorname{Im} A|_X + \dim \ker A|_X = \dim X$$

پس

$$\operatorname{rank} A|_{\operatorname{Im} B} + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} = \dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rank} B$$

پس

$$\operatorname{rank} AB + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} = \operatorname{rank} B \qquad (۱)$$

همچنین می‌دانیم:

$$V \subseteq U \implies \dim \ker A|_V \leq \dim \ker A|_U$$

و همچنین می‌دانیم $\operatorname{Im} BC \subseteq \operatorname{Im} B$ پس:

$$\dim \ker A|_{\operatorname{Im} BC} \leq \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B}$$

حال از (۱) و نتیجه‌ی بالا استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} AB + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} \geq \operatorname{rank} AB + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} BC}$$

پس

$$\operatorname{rank} B - \dim \ker A|_{\operatorname{Im} BC} \geq \operatorname{rank} AB$$

حال $\operatorname{rank} BC$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$$\operatorname{rank} B - \dim \ker A|_{\operatorname{Im} BC} + \operatorname{rank} BC \geq \operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC$$

و طبق ادعای ابتدای این بخش (با قرار دهی BC به جای B در آن ادعا) داریم:

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} ABC \geq \operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC$$

۴.۱ $\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

داریم:

$$\operatorname{Im}(A+B) \subseteq \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$$

پس

$$\operatorname{rank}(A+B) \le \dim(\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - \dim(\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B)$$
$$\le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

یعنی

$$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

۲ تمرین ۱ سری چهارم

پاسخ هر قسمت را با $\{u_۱, ..., u_n\}$ نشان می‌دهیم.

۱.۲ $\{v_۲, v_۱, v_۳, ..., v_n\}$

برای $i > ۲$ مشخص است که $u_i^* = v_i^*$.

برای $u_۱$ داریم: $u_۱(v_۲) = ۱, u_۱(v_i) = ۰ (i \neq ۲)$ پس $u_۱ = v_۲^*$ و به طریق مشابه $u_۲ = v_۱^*$.

۲.۲ $\{rv_۱, v_۲, ..., v_n\}$

برای $i = ۱$ داریم: $u_۱(rv_۱) = ru_۱(v_۱) = ۱, u_۱(v_i) = ۰ (i \neq ۱)$ پس

$$u_۱(v_۱) = r^{-۱}, u_۱(v_i) = ۰ (i \neq ۱)$$

پس $u_۱ = r^{-۱} v_۱^*$.

همچنین برای $i > ۱$ داریم:

$$u_i(v_i) = ۱, u_i(v_j) = ۰ (j > ۱, j \neq i), u_i(rv_۱) = ru_i(v_۱) = ۰ \implies u_i(v_۱) = ۰$$

پس $u_i = v_i^*$

۳.۲ $\{v_1 + rv_2, v_2, v_3, ..., v_n\}$

برای $i > 2$ داریم $u_i = v_i^*$. کافی است قرار دهیم: $u_1 = v_1^*, u_2 = -rv_1^* + v_2^*$
در این صورت برای $i > 2$ داریم:

$$u_1(v_i) = u_2(v_i) = 0$$

و همچنین

$$u_1(v_1 + rv_2) = v_1^*(v_1 + rv_2) = v_1^*(v_1) + rv_1^*(v_2) = 1, u_1(v_2) = v_1^*(v_2) = 0$$

$$u_1(v_1+rv_2) = (-rv_1^*+v_2^*)(v_1+rv_2) = (-rv_1^*+v_2^*)(v_1)+r(-rv_1^*+v_2^*)(v_2) = -r+r = 0$$

$$(-rv_1^* + v_2^*)(v_2) = -rv_1^*(v_1) + v_2^*(v_2) = 0 + 1 = 1$$

پس شرایط را دارد.

۴.۲ $\{t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n, v_2, v_3, ..., v_n\}$

$u_1 = t_1^{-1}v_1^*$ و برای $i > 1$ $u_i = -t_it_1^{-1}v_1^* + v_i^*$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$u_1(t_1v_1) = (t_1^{-1}v_1^*)(t_1v_1) = t_1^{-1}t_1 = 1$$

$$i > 1 : u_1(v_i) = (t_1^{-1}v_1^*)(v_i) = t_1^{-1}v_1^*(v_i) = 0$$

$$i > 1 : u_i(t_1v_1 + ... + t_nv_n) = (-t_it_1^{-1}v_1^* + v_i^*)(t_1v_1 + ... + t_nv_n)$$

$$= -t_it_1^{-1}v_1^*(t_1v_1 + ... + t_nv_n) + v_i^*(t_1v_1 + ... + t_nv_n)$$

$$-t_it_1^{-1}t_1 + t_i = -t_i + t_i = 0$$

$$i, j > 1, j \neq i : u_i(v_j) = (-t_it_1^{-1}v_1^*+v_i^*)(v_j) = -t_it_1^{-1}v_1^*(v_j)+v_i^*(v_j) = -t_it_1^{-1}0+0 = 0$$

$$i > 1 : u_i(v_i) = (-t_it_1^{-1}v_1^*+v_i^*)(v_i) = -t_it_1^{-1}v_1^*(v_1)+v_i^*(v_i) = -t_it_1^{-1}0 + 1 = 1$$

۵.۲ $\{a_1v_1 + a_2v_2, b_1v_1 + b_2v_2, v_3, ..., v_n\}$

اگر یکی از a_1, a_2, b_1, b_2 صفر بود، مسئله به راحتی از طبق بخش‌های قبل حل می‌شود پس فرض می‌کنیم همه‌ی این متغیرها ناصفر اند. فرض کنید $u_1 = pv_1^* + qv_2^*, u_2 = cv_1^* + dv_2^*$ است. باید داشته باشیم:

$$u_1(a_1v_1 + a_2v_2) = 1, u_1(b_1v_1 + b_2v_2) = 0$$

$$u_2(a_1v_1 + a_2v_2) = 0, u_2(b_1v_1 + b_2v_2) = 1$$

با حل این معادله‌ها خواهیم داشت:

$$q = (-a_۱ b_۲ b_۱^{-۱} + a_۲)^{-۱}, p = -b_۲ b_۱^{-۱} q$$

و

$$d = (b_۱ a_۲ a_۱^{-۱} + b_۲)^{-۱}, c = a_۱^{-۱} a_۲ d$$

همچنین $-a_۱ b_۲ b_۱^{-۱} + a_۲ \neq ۰$ زیرا در غیر اینصورت:

$$-a_۱ b_۲ b_۱^{-۱} + a_۲ = ۰ \implies -a_۱ b_۲ + a_۲ b_۱ = ۰ \implies a_۱ b_۲ = a_۲ b_۱$$

و به طریق مشابه $b_۱ a_۲ a_۱^{-۱} + b_۲ \neq ۰$ پس متغیرها به درستی تعریف می‌شوندو همچنین اگر برای $i > ۲$ تعریف کنیم $u_i = v_i^*$ مسئله حل می‌شود.

۳ تمرین ۴ سری چهارم

۱.۳ قسمت ۷

برای اثبات دو لم (که یکی قسمت ۶ سوال است) استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۳ لم ۱

اگر f تابعکی خطری روی $M_{n\times n}(F)$ باشد که $\forall A, B \in M_{n\times n}(F) : f(AB) = f(BA)$ آنگاه f مضربی از tr است.

اثبات: e_{ij} را ماتریس استاندارد با خانه‌ی i, j یک در نظر می‌گیریم. تنها کافی است ثابت کنیم $f(e_{ii}) = f(e_{jj})$ و $i \neq j : f(e_{ij}) = ۰$

می‌دانیم $e_{ij} = e_{ik} e_{kj}$ (به سادگی ضرب را انجام می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم.) پس:

$$f(e_{ii}) = f(e_{ij} e_{ji}) = f(e_{ji} e_{ij}) = f(e_{jj})$$

و همچنین برای $i \neq j$:

$$f(e_{ij}) = f(e_{ii} e_{ij}) = f(e_{ij} e_{ii}) = f(۰) = ۰$$

پس f مضربی از tr است.

۲.۱.۳ لم ۲

اگر A یک ماتریس باشد، ماتریس‌های وارون‌پذیر X و Y وجود دارند که $A = X + Y$

اثبات. حکم معادل این گزاره را برای نگاشت‌ها ثابت می‌کنیم. فرض کنید T یک علمگرخطی روی فضای n بعدی V باشد. $v_1, ..., v_m$ را پایه‌ای برای $\ker T$ در نظر بگیرید و آن را به پایه‌ای برای V مثل $v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n$ گسترش دهید. حال می‌دانیم $T(v_{m+1}), ..., T(v_n)$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} T$ است. فرض کنید این پایه را نیز به پایه برای V مثل

$$u_1, ..., u_m, u_{m+1} = T(v_{m+1}), ..., u_n = T(v_n)$$

گسترش می‌دهیم. حال با فرض $0 \neq 2$ نگاشت S را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall 1 \leq i \leq m : S(v_i) = u_i \times 2^{-1}, \forall m + 1 \leq i \leq n : S(v_i) = u_i$$

و همچنین نگاشت U را تعریف می‌کنیم:

$$\forall 1 \leq i \leq m : U(v_i) = u_i \times 2^{-1}, \forall m + 1 \leq i \leq n : U(v_i) = -u_i$$

که S و U هردو وارون پذیرند و $S + U = T$ و حکم معادل ثابت و حکم اصلی ثابت شد.

۳.۱.۳ مسئله اصلی

فرض کنید A, B دو ماتریس دلخواه اند و طبق لم ۲ $B = B_1 + B_2$ که B_1, B_2 ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند. داریم:

$$f(BA) = f((B_1 + B_2)A) = f(B_1A + B_2A) = f(B_1A) + f(B_2A)$$

$$= f(B_1^{-1}B_1AB_1) + f(B_2^{-1}B_2AB_2) = f(AB_1) + f(AB_2) = f(AB_1 + AB_2)$$
$$= f(A(B_1 + B_2)) = f(AB)$$

پس حکم لم ۱ برای این مسئله نیز برقرار است و در نتیجه f مضربی از tr است.

۲.۳ قسمت ۹

تنها کافی‌ست ثابت کنیم هسته‌ی این تابع صفر است. فرض کنید مقدار این تابع روی تابع A صفر شده‌است پس:

$$f_A = 0 \implies \forall X : f_A(X) = 0 \implies tr(AX) = 0$$

حال اگر به جای X ماتریس e_{ji} را قرار دهیم، Ae_{ji} ماتریسی است که فقط یک خانه از قطراصلی آن ناصفر است و مقدار آن خانه برابر با A_{ij} است (زیرا می‌توانیم A را به صورت $A = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} A_{ij}e_{ij}$ بنویسیم و ضرب را انجام دهیم.)پس

$$tr(Ae_{ji}) = ۰ \implies A_{ij} = ۰$$

پس همه‌ی خانه‌های A صفر است پس $A = ۰$ پس کرنل این نگاشت خطی ۰ است و چون بعد مبدا و مقصد یکسان است، یک‌به‌یک و پوشاست.

۳.۳ قسمت ۱۱

فرض کنید A ماتریس با ویژگی‌های مسئله باشد. اگر $i \neq j$ باشد می‌دانیم $tr(e_{ji}) = ۰$ است پس: (استدلالی برای ضرب پایین در قسمت قبل کردیم)

$$tr(Ae_{ji}) = ۰ \implies A_{ij} = ۰$$

همچنین برای $i \neq j$ ماتریس $X = e_{ii} - e_{jj}$ را در نظر بگیرید، $tr(X) = ۰$ است پس داریم:

$$tr(AX) = ۰ \implies tr(A(e_{ii}-e_{jj})) = ۰ \implies tr(Ae_{ii}) = tr(Ae_{jj}) \implies A_{ii} = A_{jj}$$

پس A مضربی از همانی است.