۱. <u>نگاشت خطی</u>: تابعی مانند $T:V\to W$ روی فضاهای برداری (با میدان مشترک) که

$\forall v_1,v_2\in V: \ T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$, $\forall v\in V, \forall r\in F: \ T(rv)=rT(v)$

<u>مولد فضای برداری</u>: $S\subset V$ یک مولد فضای برداری V گوییم هرگاه تنها زیرفضای شامل S همان V باشد
یا (کوچکترین زیرفضای شامل S همان V باشد)

<u>نگاشت خطی پوچ‌توان</u>: نگاشت خطی $T:V\to V$ (یک عملگر خطی) که برای $n\in\mathbb{N}$ ای داشته باشیم $T^n=0$.

<u>فضای دوگان</u>: اگر V یک فضای برداری (با بعد متناهی) روی میدان F باشد آنگاه فضای برداری زیر را فضای دوگان V گوییم:

$$V^*=\{f:V\to F \ : \ f \text{ خطی است}\}=L(V,F)$$

<u>ترانهاده یک نگاشت خطی</u>: فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی باشد.
ترانهاده آن تابع $T^t:W^*\to V^*$ است که با $T^t(f)=f\circ T$ تعریف می‌شود

۲. فرض کنید B_i پایه‌ای مرتب برای V_i باشد. بنابراین $|B_i| = \dim V_i$.

توجه کنید که $(B_1, \dots, B_k)$ مجموعه‌ای مرتب است که $V_1+\dots+V_k$ را تولید می‌کند. زیرا هر عضو این فضا به صورت $v_1+\dots+v_k$ است و هر کدام از v_iها به صورت ترکیب خطی اعضای B_i اند) بنابراین:

$(B_1,\dots,B_k)$ مستقل خطی $\iff$ $(B_1,\dots,B_k)$ پایه‌ای برای $V_1+\dots+V_k$ $\iff$ $\dim(V_1+\dots+V_k)=\dim V_1+\dots+\dim V_k$

چون $(B_1,\dots,B_k)$ مولد $V_1+\dots+V_k$ است

بنابراین کافی است نشان دهیم: $V_1,\dots,V_k$ مستقل خطی $\underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}}$ $(B_1,\dots,B_k)$ مستقل خطی

(1) فرض کنید $B_i=(v_1^i,\dots,v_{d_i}^i)$ و یک ترکیب خطی از این اعضا صفر شده است:

$$a_1^1v_1^1+\dots+a_{d_1}^1v_{d_1}^1 + a_1^2v_1^2+\dots+a_{d_2}^2v_{d_2}^2+\dots+a_1^kv_1^k+\dots+a_{d_k}^kv_{d_k}^k=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1^1v_1^1+\dots+a_{d_1}^1v_{d_1}^1)}_{v_1\in V_1} + \underbrace{(a_1^2v_1^2+\dots+a_{d_2}^2v_{d_2}^2)}_{v_2\in V_2}+\dots+\underbrace{(a_1^kv_1^k+\dots+a_{d_k}^kv_{d_k}^k)}_{v_k\in V_k}=0$$

$\Rightarrow v_1=\dots=v_k=0$ (به خاطر مستقل خطی بودن V_iها)

$\forall i:\ a_1^i=\dots=a_{d_i}^i=0$ (به خاطر مستقل خطی بودن B_i) است

بنابراین همه ضرایب ترکیب باید صفر باشد و این نشان می‌دهد $(B_1,\dots,B_k)$ مستقل خطی

(2) فرض کنید $v_i\in V_i$ و $v_1+\dots+v_k=0$. چون $v_i\in V_i$ پس $v_i=a_1^iv_1^i+\dots+a_{d_i}^iv_{d_i}^i$

بنابراین

$$(a_1^1v_1^1+\dots+a_{d_1}^1v_{d_1}^1)+(a_1^2v_1^2+\dots+a_{d_2}^2v_{d_2}^2)+\dots+(a_1^kv_1^k+\dots+a_{d_k}^kv_{d_k}^k)=0$$

$\Rightarrow a_1^1=\dots=a_{d_1}^1=a_1^2=\dots=a_{d_2}^2=\dots=a_1^k=\dots=a_{d_k}^k=0$ (به خاطر مستقل خطی بودن $(B_1,\dots,B_k)$)

این نتیجه می‌دهد که $v_1=\dots=v_k=0$.

۳. $u_1,\dots,u_{n+2}\in\mathbb{R}^n \Longrightarrow \begin{bmatrix}u_1\\1\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}u_{n+2}\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}$

چون $\mathbb{R}^{n+1}$، $(n+1)$ بعدی است پس $(n+2)$ عضو بالا وابسته خطی اند یعنی ضرایب $a_1,\dots,a_{n+2}\in\mathbb{R}$ که برخی از آنها ناصفر است وجود دارند که

$$a_1\begin{bmatrix}u_1\\1\end{bmatrix}+\dots+a_{n+2}\begin{bmatrix}u_{n+2}\\1\end{bmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{array}{l} a_1u_1+\dots+a_{n+2}u_{n+2}=0\\ a_1+\dots+a_{n+2}=0\end{array}$$

فرض کنید I مجموعه اندیس‌هایی باشد که برای آن $a_i>0$. (توجه کنید که به خاطر ناصفر بودن a_iها و اینکه جمع آنها صفر می‌شود I ناتهی است). بقیه جمله‌ها را در تساوی‌های بالا به سمت دیگر تساوی می‌بریم. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i\in I}a_iu_i=\sum_{j\notin I}(-a_j)u_j\\ S=\sum_{i\in I}a_i=\sum_{j\notin I}(-a_j)>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \sum_{i\in I}\left(\frac{a_i}{S}\right)u_i=\sum_{j\notin I}\left(\frac{-a_j}{S}\right)u_j \qquad (*)$$

حال کافی است دقت کنید که برای $i\in I$، $0\leq\frac{a_i}{S}\leq 1$ و برای $j\notin I$، $0\leq\frac{-a_j}{S}\leq 1$ و

$$\sum_{i\in I}\left(\frac{a_i}{S}\right)=\sum_{j\notin I}\left(\frac{-a_j}{S}\right)=1$$

بنابراین سمت راست تساوی بالا در پوش محدب $\{u_j: j\notin I\}$ قرار دارد و سمت چپ آن در پوش محدب $\{u_i: i\in I\}$ قرار دارد.

۴. فرض کنید $\{V_\alpha \subset V : \alpha \in I\}$ مجموعه‌ای از زیرفضاهای اکید V باشند که $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = V$.

حکم را با استقرا روی بعد V ثابت می‌کنیم:

اگر $\dim V = 1$ آنگاه تنها زیرفضای اکید V زیرفضای $\{0\}$ است که با اجتماع هر تعداد از آن کل V بدست نمی‌آید!

فرض کنید حکم برای فضاهای $(n-1)$ بعدی درست است و $\dim V = n$. با بزرگ کردن V_α در صورت نیاز و حذف V_α های تکراری می‌توان فرض کرد که

$$\forall \alpha \in I : \dim V_\alpha = n-1 \quad , \quad \alpha \neq \alpha' \Rightarrow V_\alpha \neq V_{\alpha'} \quad \text{و} \quad \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = V$$

حال به یکی از زیرفضاها مانند V_{α_0} توجه می‌کنیم:

$$\forall \alpha \in I - \{\alpha_0\} : \left.\begin{array}{l} \dim V_\alpha = \dim V_{\alpha_0} = n-1 \\ V_\alpha \neq V_{\alpha_0} \ \text{و}\ V_\alpha , V_{\alpha_0} \subset V \\ \dim V = n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V_\alpha \cap V_{\alpha_0} = n-2$$

حال اگر $\bigcup_{\alpha\in I-\{\alpha_0\}} (V_\alpha \cap V_{\alpha_0}) = V_{\alpha_0}$ طبق فرض استقرا تعداد اعضای $I-\{\alpha_0\}$ نمی‌تواند از $|F|$ کمتر باشد

و این حکم را نتیجه می‌دهد. اگر $\bigcup_{\alpha\in I-\{\alpha_0\}} (V_\alpha \cap V_{\alpha_0}) \neq V_{\alpha_0}$ آنگاه $v_1 \in V_{\alpha_0}$ ای یافت می‌شود که

برای هر $\alpha \in I - \{\alpha_0\}$ داریم $v_1 \notin V_\alpha$. همچنین چون $V_{\alpha_0} \subsetneq V$ پس $v_0 \in V$ ای هست که

$v_0 \notin V_{\alpha_0}$. بنابراین داریم

↓

$$\begin{cases} v_0 \in V, & v_0 \notin V_{\alpha_0} \\ v_1 \in V_{\alpha_0}, & \forall \alpha \in I - \{\alpha_0\} : \ v_1 \notin V_\alpha \end{cases}$$

حال به هر عضو میدان F مانند r بردار $u_r = v_1 + r v_0 \in V$ را نسبت می‌دهیم. توجه کنید که هیچ دوتایی از u_r ها داخل یک V_α نمی‌توانند باشند زیرا اگر $\alpha \neq \alpha_0$ و $r_1 \neq r_2$ ای باشد که $u_{r_1}, u_{r_2} \in V_\alpha$ آنگاه

$$u_{r_1} - u_{r_2} = (r_1 - r_2) v_0 \in V_\alpha \implies v_0 \in V_\alpha \quad \text{!}$$

و اگر $\alpha = \alpha_0$ و $r \neq 0$ ای باشد که $u_r \in V_{\alpha_0}$ آنگاه:

$$v_1 + r v_0 \in V_{\alpha_0} \implies r v_0 \in V_{\alpha_0} \implies v_0 \in V_{\alpha_0} \quad \text{!}$$

بنابراین به هر عضو میدان مانند r، یک زیرفضای یکتا مانند V_{α_r} وجود دارد که $u_r \in V_{\alpha_r}$. این نشان می‌دهد تعداد این زیرفضاها از $|F|$ نمی‌تواند بیشتر باشد.

۵. قرار دهید

$$v_1 = v$$
$$v_2 = T(v)$$
$$\vdots$$
$$v_{k+1} = T^{k}(v)$$

بنابراین پایه α برابر است با $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$. حال توجه کنید که

$(i \leq k)$:

$$T(v_i) = T(T^{i+1}(v)) = T^{i+2}(v) = v_{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad [T(v_i)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow (i+1) \text{ ام}$$

و برای $i = k+1$ داریم:

$$T(v_{k+1}) \in V \Rightarrow T(v_{k+1}) = a_1 v_1 + \dots + a_{k+1} v_{k+1}$$

$$\Rightarrow [T(v_{k+1})]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_\alpha^\alpha = \left[[T(v_1)]_\alpha \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [T(v_{k+1})]_\alpha \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

ماتریسی که درایه‌های زیر قطر اصلی همگی 1 اند و ستون آخرش هم $a_1, \dots, a_{k+1}$ است و بقیه درایه‌هایش صفر است

۶. ضرب یک عدد مختلط را در بردار $v \in V$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a+ib)\cdot v := av + bT(v)$$

(توجه داشته باشید که a و b حقیقی‌اند و می‌توانیم آن‌ها را در بردارهای V ضرب کنیم زیرا این فضا یک فضای برداری حقیقی است)

حال باید شرایط فضای برداری را بررسی کنیم:

با توجه به اینکه جمع بردارها تغییری نکرده است پس V با عمل جمع یک گروه آبلی است.

تنها باید چهار خاصیت مربوط به ضرب اسکالر را بررسی کنیم

۱) $z_1\cdot(z_2\cdot v) = (z_1 z_2)\cdot v$:

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{و} \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$z_1\cdot(z_2\cdot v) = z_1\cdot\big(a_2 v + b_2 T(v)\big) = a_1\big(a_2 v + b_2 T(v)\big) + b_1 T\big(a_2 v + b_2 T(v)\big)$$

$$= a_1a_2 v + (a_1b_2 + b_2a_1)T(v) + b_1b_2 T^2(v) = (a_1a_2 - b_1b_2)v + (a_1b_2 + b_2a_1)T(v)$$

(تنها جایی که از $T^2=-I$ استفاده می‌شود)

$$= (z_1z_2)\cdot v$$

۲) $(z_1+z_2)\cdot v = z_1\cdot v + z_2\cdot v$

$$\big((a_1+a_2) + i(b_1+b_2)\big)\cdot v = (a_1+a_2)v + (b_1+b_2)T(v)$$

$$= \big[a_1 v + b_1 T(v)\big] + \big[a_2 v + b_2 T(v)\big] = z_1\cdot v + z_2\cdot v$$

٣) $z\circ(v_1+v_2)=z\circ v_1+z\circ v_2$

$$(a+bi)\circ(v_1+v_2) = a(v_1+v_2)+bT(v_1+v_2)$$

$$= [av_1+bT(v_1)]+[av_2+bT(v_2)] = z\circ v_1+z\circ v_2$$

٤) $1\circ v = v$

$$1\circ v=(1+0i)\circ v = 1\cdot v+0T(v)=v$$ (بدیهی است)

۷. کافی است توجه کنید که فضای چندجمله‌ای‌های با درجه کمتر از m ، m-بعدی است و چندجمله‌ای‌هایی که مقدارشان در ۱ (یا هر عضو دیگر میدان) صفر می‌شود یک زیرفضای با بعد $(m-1)$ خواهد بود (هسته تابع خطی ناصفر $f:P^m\to\mathbb{R}$: $f(p)=p(1)$)

بنابراین m عضو $p_1,\dots,p_m$ در این زیرفضا حتماً باید وابسته خطی باشند.

چون این زیرفضا $(m-1)$ بعدی است پس مجموعه مستقل خطی $(m-1)$ عضوی $p_1(x),\dots,p_{m-1}(x)$ در آن وجود دارد. چندجمله‌ای ثابت $p_0(x)\equiv 1$ نیز در آن زیرفضا قرار ندارد. بنابراین $\{p_0(x),p_1(x),\dots,p_{m-1}(x)\}$ یک پایه برای P^m است. این هم نتیجه می‌دهد $\{p_0(x),p_1(x)+p_0(x),\dots,p_{m-1}(x)+p_0(x)\}$ یک پایه برای P^m است که مقدار همه اعضایش در ۱ برابر ۱ است.