

بسمه تعالی

پاسخ تمرین تحویلی نهم - درس ریاضی نویسی - دانشگاه صنعتی شریف
علیرضا توفیقی محمدی - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

پرسش

n شکلات داریم، دو نفر به صورت نوبتی روی این شکلات بازی انجام می دهند، هر فرد می تواند از ۱ تا حداکثر نصف تعداد شکلات های باقی مانده را برداشته و بخورد. کسی که نتواند حرکتی کند بازنده ی این مسابقه ست. چه کسی برنده می شود؟

پاسخ

برای یک حالت بازی با n شکلات این حالت را حالت برد می گوییم و با W نشان می دهیم اگر شروع کننده ی آن حالت بتواند طوری بازی کند که برنده ی بازی شود و در غیر این صورت آن را با L نشان می دهیم. **تعریف:** به یک عدد جالب می گوییم اگر توانی از دو مانند 2^k وجود داشته باشد که یک واحد از این عدد بیشتر باشد.

به طور مثال ۱، ۳، ۷، ۱۵، چهار کوچکترین اعداد جالب طبیعی هستند.

تعریف: جالبی یک عدد را بزرگترین عدد جالب کوچکتر مساوی آن عدد تعریف می کنیم.

ادعا: اگر n جالب باشد حالت باخت و در غیر این صورت حالت برد است.

برای اثبات از استقرا استفاده می کنیم:

پایه

برای $n = 1$ عدد یک جالب است و همچنین حالت باخت است، زیرا شروع کننده ی بازی باید حداکثر ۰،۵ شکلات برداشته پس نمی تواند شکلاتی را بردارد و بازنده ی بازی می شود.

فرض

اگر $k < n$ باشد، آنگاه اگر n جالب باشد بازی با n شکلات حالت باخت و در غیر این صورت حالت برد است.

حکم

حال حکم بالا را برای $n = k$ ثابت می کنیم:
اگر جالبی عدد n را با $2^m - 1$ نشان دهیم

حالت ۱

اگر $n \neq 2^m - 1$ باشد:

پس در این صورت داریم $n = 2^m - 1 + r$ که $r > 0$ است، همچنین $r \leq 2^m - 1$

(زیرا اگر $r > 2^m - 1$ باشد در این صورت

$$n > 2^m - 1 + 2^m - 1 = 2^{m+1} - 2 \rightarrow n \geq 2^{m+1} \geq 2^{m+1} - 1$$

که عدد جالبی n باید حداقل $2^{m+1} - 1$ می شد که تناقض است.)

پس چون $r \leq 2^m - 1$ است، نتیجه می گیریم $r \leq \frac{n}{2}$ پس نفر اول می تواند r شکلات برداشته و بازی را به حالت $n - r = 2^m - 1$ شکلاته تبدیل کند، حال چون $n - r < n$ است و $n - r$ جالب است، طبق فرض استقرا این حالت، حالت باخت است پس نفر اول توانست بازی را به حالت باخت تبدیل کند پس این حالت حالت برد نفر اول بود.

حالت دوم

اگر $n = 2^m - 1$ باشد، آنگاه نفر اول می تواند این حالت را به تمام حالت های $n - 1, n - 2, \dots$ و همچنین عدد جالب قبل از $2^m - 1$ تبدیل کند، همچنین عدد جالب قبل از $2^m - 1$ است که از تمام اعداد بالا کوچک تر است، پس تمام حالات بالا چون حالت کمتری از n اند و همچنین عدد جالب نیستند پس طبق فرض استقرا حالت برد اند، پس نفر اول هرکاری کند به حالتی برد برای شروع کننده ی جدید بازی (نفر دوم) می رسد پس این حالت حالت باخت است.

پس هر دو حالت حل شد و حکم استقرا ثابت و گام استقرا ثابت و حکم برای تمام n های طبیعی ثابت شد.

پس اگر n برابر عددی به فرم $2^m - 1$ بود، چون حالت باخت است، نفر دوم استراتژی برد دارد و در غیر این صورت نفر اول استراتژی برد دارد و مسئله حل شد.