بسمه تعالی

پاسخ سری هفتم تمرین‌ها ـ درس جبرخطی ۱ ـ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ـ رشته علوم کامپیوتر ـ شماره‌ی دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ تمرین ۱۹ از بخش هشتم

۱.۱ ۷

ابتدا ثابت می‌کنیم $\ker p(T)$ زیر فضایی ناوردا از T است. برای اینکار عضو دلخواه $v \in \ker p(T)$ در نظر بگیرید.

$$p(T)(T(v)) = T(p(T)(v)) = T(۰) = ۰ \implies T(v) \in \ker p(T)$$

و قسمت اول ثابت شد.

حال چون $m_{T_{\ker p(T)}} | m_T$ پس $m_{T_{\ker p(T)}} = p(x)^k, k \leq b$

چون $T(\ker p(T)) \subseteq \ker p(T)$ پس $p(T_{\ker p(T)}) = ۰$ و در نتیجه $\implies m_{T_{\ker p(T)}} | p$

$k \leq ۱$ از طرفی $m_{T_{\ker p(T)}}$ نمی‌تواند اسکالر باشد پس $k = ۱$ و $m_{T_{\ker p(T)}}(x) = p(x)$

۲.۱ ۸

اگر $W_۱, ..., W_k$ مستقل خطی باشند،

$$\forall w_i \in W_i : w_۱ + ... + w_k = ۰ \implies w_۱ = ... = w_k = ۰$$

پس اگر عضوهای $v_i \in W_i \cap \ker p(T)$ در نظر بگیریم که $v_۱ + ... + v_k = ۰$ چون $v_i \in W_i$ است پس $v_۱ = ... = v_k = ۰$ و در نتیجه $W_۱ \cap \ker p(T), ..., W_k \cap \ker p(T)$ مستقل خطی است.

حال به طرف دیگر قضیه می‌پردازیم، با استقرا روی k تعداد زیرفضاهای Tـ دوری تلاش به اثبات این سمت می‌کنیم.

حکم: اگر T عملگری روی فضای برداری V باشد که $m_T(x) = p(x)^b$ و p یک چندجمله‌ای اول باشد و $W_۱, ..., W_k$ زیرفضاهای Tـ دوری در V باشند، آنگاه اگر $W_۱ \cap \ker p(T), ..., W_k \cap \ker p(T)$ مستقل خطی باشد نتیجه می‌شود $W_۱, ..., W_k$ مستقل خطی است.

پایه: حکم برای $k = ۱$ واضح است زیرا هر زیرفضا به شکل تنها یک مجموعه‌ی مستقل خطی از زیرفضاها را تشکیل می‌دهد.

فرض کنید حکم برای $k = n - ۱$ برقرار است و قرار می‌دهیم $n = k$، چون W_i ها Tـ دوری اند و $m_T(x) = p(x)^b$ پس $m_{W_i}(x) = p(x)^{q_i}$ است، $\max q_۱, ..., q_k = Q$ در نظر بگیرید و

بدون خدشه به کلیت مسئله فرض کنید $Q = q_۱$ است، چون p^{q_i} چندجمله‌ای مینیمال W_i است پس $p(T)(W_i)^{q_i - ۱} \neq ۰, p(T)(W_i)^{q_i} = ۰$. حال بردارهای $w_۱, ..., w_k$ را در نظر بگیرید که $w_i \in W_i$ و $w_۱ + ... + w_k = ۰$ باشد.

در این صورت چون W_i Tـ دوری است، $p(T)(W_i)^{Q-۱} \subseteq W_i$ و چون $p(T)(W_i)^Q = ۰$ است پس $\operatorname{Im} p(T)(W_i)^{Q-۱} \subseteq \ker p(T)$ پس اگر بردارهای $u_۱ = p(T)(w_۱)^{Q-۱}, ..., u_k = p(T)(w_k)^{Q-۱}$ را در نظر بگیریم داریم $u_۱ + ... + u_k = ۰$ و در نتیجه $u_۱ = ... = u_k = ۰$ پس

$$u_۱ = p(T)(w_۱)^{q_۱ - ۱} = ۰ \implies w_۱ = ۰$$

پس $w_۲ + ... + w_k = ۰$ و طبق فرض استقرا $W_۲, ..., W_k$ نیز مستقل خطی اند پس

$$w_۲ = ... = w_k = ۰$$

پس $W_۱, ..., W_k$ مستقل خطی اند.

۳.۱ ۹

می‌دانیم $m_{T_{\langle\langle v \rangle\rangle_T}} | m_T$ پس $a \leq b$ وجود دارد که $m_{T_{\langle\langle v \rangle\rangle_T}} = p(x)^a$ و به طریق مشابه $m_{T_{\langle\langle p(T)(v) \rangle\rangle_T}} = p(x)^b$ همچنین در کلاس ثابت شد (و همچنین تمرین ۱ همین قسمت) که بعد یک فضای Tـ دوری برابر با درجه‌ی چند جمله‌ای مینیمال آن است پس داریم:

$$\dim \langle\langle v \rangle\rangle_T = a \times \deg p$$

و

$$\dim \langle\langle p(T)(v) \rangle\rangle_T = b \times \deg p$$

پس تنها کافی‌ست ثابت کنیم

$$b \times \deg p + \deg p = a \times \deg b \iff b + ۱ = a$$

که این حکم نیز نسبتا واضح است، زیرا

$$\forall u \in \langle\langle v \rangle\rangle_T : p^{b+۱}(T)(u) = p^b(p(T)(u)) = ۰ \implies a \leq b + ۱$$

$$\forall u \in \langle\langle v \rangle\rangle_T : p^b(T)(u) = p^{b-۱}(p(T)(u)) \neq ۰ \implies a \geq b + ۱$$

پس $a = b + ۱$ و حکم ثابت شد.

۴.۱ ۱۰

حل نشد :(