بسمه تعالی

پاسخ سری سوم تمرین‌ها ــ درس ریاضیات گسسته ــ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ تمرین ششم

۱.۰.۱ صورت سوال

برای اعداد طبیعی $m \leq n$ فرمول بسته‌ی $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$ را حساب کنید.

۲.۰.۱ پاسخ

به‌شکل ترکیبیاتی ثابت می‌کنیم

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m} \times 2^{n-m}$$

برای اینکار مسئله‌ی شمارشی زیر را مطرح می‌کنیم:
می‌خواهیم از مجموعه‌ی $\{1, ..., n\}$ یک زیرمجموعه انتخاب کرده و سپس دقیقا m تا از اعضایش را رنگی کنیم. برای اینکار چند حالت داریم.
از طرفی برای اینکار می‌توانیم ابتدا m عضو رنگی را انتخاب کرده که برای اینکار $\binom{n}{m}$ روش داریم، سپس از $n-m$ عضو دیگر، یک زیرمجموعه انتخاب کرده و با m عضو انتخاب‌شده‌ی قبل به عنوان مجموعه ارائه دهیم که برای اینکار نیز 2^{n-m} روش داریم پس در کل طبق اصل ضرب $\binom{n}{m}2^{n-m}$ روش داریم.
از طرف دیگر فرض کنید مجموعه‌ی ما k عضو داشته باشد $(k \in \{m, ..., n\})$. برای انتخاب مجموعه $\binom{n}{k}$ حالت و برای انتخاب اعضای رنگی آن $\binom{k}{m}$ حالت داریم پس با فرض ثابت بودن k برای این حالت $\binom{k}{m}\binom{n}{k}$ حالت داریم.
پس طبق اصل جمع کل حالت‌ها برابر با $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$ است.

۲ تمرین هفتم

۱.۲ قسمت الف

۱.۱.۲ صورت سوال

فرمول بسته‌ی $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m}\frac{1}{k}$ را حساب کنید.

۲.۱.۲ پاسخ

برای حل مسئله ابتدا سعی می‌کنیم $\binom{k}{m}\frac{1}{k}$ را به شکلی ساده‌تر بنویسیم:

$$\binom{k}{m}\frac{1}{k} = \frac{k!}{m!(k-m)!k} = \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!m} = \binom{k-1}{m-1}\frac{1}{m}$$

حال به حل مسئله‌ی اصلی می‌پردازیم:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{m-1}\frac{1}{m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m-1}}{m} = \frac{\binom{n}{m}}{m}$$

و مسئله حل شد.

۲.۲ قسمت ب

۱.۲.۲ صورت سوال

فرمول بسته‌ی $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}k$ را حساب کنید.

۲.۲.۲ پاسخ

با نوشتن عبارت بالا به صورت دو سیگمای تودرتو سعی بر حل عبارت می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}k = \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{i-1}\binom{k}{m}\right)$$

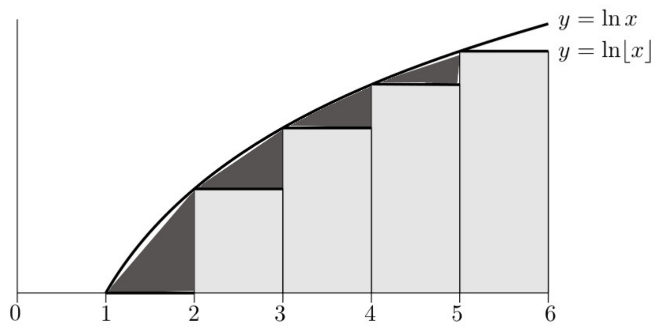
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+1}{m+1} - \binom{i}{m+1}\right) = n\binom{n+1}{m+1} - \binom{n+1}{m+1} + \binom{0}{m+1}$$

$$= (n-1)\binom{n+1}{m+1}$$

۳ تمرین هشتم

۱.۳ صورت سوال

ثابت کنید $n! \leq \sqrt{n}e\left(\frac{n}{e}\right)^n$



شکل ۱: نمودار $\ln x$ و مثلث‌هایی که باید از انتگرال‌ها کم کنیم

۲.۳ پاسخ

همانند اثبات قضیه پیش می‌رویم با این تفاوت که مقدار مثلث‌های رنگی شکل ۱ را نیز از انتگرال کم می‌کنیم: حال به محاسبه‌ی $\ln n!$ می‌پردازیم:

$$
\begin{aligned}
\ln n! = \sum_{i=1}^{n} \ln n &\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{i}^{i+1} \ln x dx - \frac{\ln(i+1) - \ln(i)}{2} \right) \right) + \ln n \\
&= \int_{i=1}^{n} \ln x dx - \frac{\ln(n)}{2} + \ln n = (n+1)\ln n - n + 1 - \frac{\ln n}{2} \\
&\rightarrow n! \leq \frac{n^{(n+1)} \times e}{e^{n} \times \sqrt{n}} = \sqrt{n} e \left(\frac{n}{e} \right)^{n}
\end{aligned}
$$

و حکم ثابت شد.