بسمه تعالی

پاسخ سری ششم تمرین‌ها ــ درس جبرخطی ۱ ــ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌ی دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

۱ تمرین ۶ از بخش پنجم

چون مجموعه‌جواب‌های $AX = ۰$ و $A'X = ۰$ یکی هستند، پس طبق قضیه‌ی اثبات‌شده در جزوه این دو دستگاه هم‌ارز بوده و ماتریس A هم‌ارز سطری با ماتریس A' است و چون A و A' ماتریس‌های ساده‌سطری هستند طبق تمرین جزوه $A = A'$.

۲ تمرین ۱۰ از بخش پنجم

۱.۲ لم

اگر D_n تعداد جایگشت‌های پریش به طول n باشد، برای nهای زوج D_n فرد است.

از درس ریاضیات گسسته می‌دانیم برای $n > ۲$: $D_n = (n-۱)(D_{n-۱} + D_{n-۲})$. حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم D_n برای nهای فرد، زوج و برای nهای زوج فرد است.

پایه: برای $D_۱ = ۰$ و $D_۲ = ۱$ و حکم برقرار است.

حال فرض کنید حکم برای همه‌ی nهای کمتر از k برقرار باشد.

D_k را در نظر بگیرید، اگر k زوج بود آنگاه $k-۱$ فرد و $D_{k-۱}$ طبق فرض استقرا زوج و $D_{k-۲}$ طبق فرض استقرا فرد است. پس $(k-۱)(D_{k-۱} + D_{k-۲})$ فرد است پس D_k فرد است.

اگر k فرد بود آنگاه $k-۱$ زوج بوده و $(k-۱)(D_{k-۱} + D_{k-۲})$ نیز زوج خواهد بود و D_k زوج می‌شود.

پس گام استقرا نیز ثابت شد و لم ثابت شد.

۲.۲ مسئله‌ی اصلی

حال به کمک رابطه‌ی

$$\det A = \sum_{\sigma \in S^n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(۱)۱} \dots a_{\sigma(n)n}$$

سعی بر اثبات حکم می‌کنیم؛ تنها کافی است برای محاسبه‌ی دترمینان، جملات مثبت در سیگمای سمت راست را در نظر بگیریم و چون جملات روی قطر صفر است برای هر i مقدار $a_{ii} = ۰$ است. پس اگر برای i ای $\sigma(i) = i$ شود مقدار $\epsilon_\sigma a_{\sigma(۱)۱} \dots a_{\sigma(n)n}$ نیز برابر با ۰ می‌شود و در غیر

این‌صورت چون برای $i \neq j$ طبق صورت سوال $a_{ij} = \pm ۱$ است و $\epsilon_\sigma = \pm ۱$ پس حاصل ضرب آن‌ها نیز مثبت یا منفی یک است. پس $\det A$ برابر با جمع D_n تا $(n = ۲k)$ مثبت یا منفی یک است و اگر فضا را حقیقی یا مختلط در نظر بگیریم چون n زوج است طبق لم D_n فرد است و در نتیجه $\det A$ برابر با جمع تعداد فردی مثبت و منفی یک است و در فضای حقیقی و مختلط جمع تعداد فردی مثبت یا منفی یک نمی‌تواند صفر شود پس $\det A \neq ۰$ است و در نتیجه A وارون‌پذیر است.

اما اگر میدان ما $\mathbb{R}$ نباشد، حکم لزوما برقرار نیست، مثلا در $\mathbb{Z}_۳$

$$\det \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = ۰$$ است پس $$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$ وارون پذیر نیست.

۳ تمرین ۷ از بخش شش

۱.۳

$$\det X = \det \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D \end{bmatrix} = \det A . \det D$$:

برای اثبات از رابطه‌ی جایگشتی دترمینان یعنی

$$\det X = \sum_{\sigma \in S^n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(۱)۱} \dots a_{\sigma(n)n}$$

استفاده می‌کنیم، اندازه‌ی ماتریس X را $n \times n$ در نظر گرفتیم که برای اینکه رابطه معنی داشته باشد باید n زوج باشد مثلا $۲k$ باشد و ماتریس‌های A, B, D باید $k \times k$ باشند.

از سیگمای بالا تنها باید جملات ناصفر را در نظر بگیریم، پس تنها σهایی را در نظر می‌گیریم که برای $i \leq k$ داشته‌باشیم: $\sigma(i) \leq k$ و در نتیجه برای $i > k$ خواهیم داشت $\sigma(i) > k$. پس چنین تابع σ را می‌توانیم به با دو تابع $\sigma_۱, \sigma_۲ \in S^k$ نشان داد بدین صورت که:

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_۱(i) & i \leq k \\ \sigma_۲(i) + k & i > k \end{cases}$$

همچنین چون علامت جایگشت به زوجیت تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت ربط دارد و هیچ نابه‌جایی‌ای بین نیمه‌ی چپ و راست وجود ندارد می‌توان گفت $\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma_۱} \times \epsilon_{\sigma_۲}$. حال به بازنویسی عبارت دترمینان برمی‌گردیم:

$$\det X = \sum_{\sigma \in S^n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(۱)۱} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in S^k} \epsilon_{\sigma_1} \epsilon_{\sigma_2} a_{\sigma_1(1),1} \dots a_{\sigma_1(k),k} a_{(k+\sigma_2(1)),1} \dots a_{(k+\sigma_2(k)),k}$$

$$= \sum_{\sigma_1 \in S^k} \sum_{\sigma_2 \in S^k} \epsilon_{\sigma_1} \epsilon_{\sigma_2} a_{\sigma_1(1),1} \dots a_{\sigma_1(k),k} a_{(k+\sigma_2(1)),1} \dots a_{(k+\sigma_2(k)),k}$$

$$= \sum_{\sigma_1 \in S^k} \epsilon_{\sigma_1} a_{\sigma_1(1),1} \dots a_{\sigma_1(k),k} \sum_{\sigma_2 \in S^k} \epsilon_{\sigma_2} a_{(k+\sigma_2(1)),1} \dots a_{(k+\sigma_2(k)),k}$$

از طرفی

$$\det D = \sum_{\sigma_2 \in S^k} \epsilon_{\sigma_2} a_{(k+\sigma_2(1)),1} \dots a_{(k+\sigma_2(k)),k}$$

و

$$\det A = \sum_{\sigma_1 \in S^k} \epsilon_{\sigma_1} a_{\sigma_1(1),1} \dots a_{\sigma_1(k),k}$$

است پس:

$$\det X = \sum_{\sigma_1 \in S^k} \epsilon_{\sigma_1} a_{\sigma_1(1),1} \dots a_{\sigma_1(k),k} \det D = \det D . \det A = \det A . \det D$$

و حکم ثابت شد.

۲.۳

$$\det \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix} = \det E . \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برای اثبات تنها کافی‌است به دترمینان $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ نگاه کنیم. از طرفی با ضرب بلوکی ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix}$$

و از طرفی طبق قسمت قبل

$$\det \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det E . \det I = \det E$$

پس داریم:

$$\det \left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix}$$

و

$$\det\left(\begin{bmatrix}E & ۰\\ ۰ & I\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}E & ۰\\ ۰ & I\end{bmatrix}\times\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\det E.\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

پس

$$\det\begin{bmatrix}EA & EB\\ C & D\end{bmatrix}=\det E.\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

و حکم ثابت شد.

۳.۳

$$\det\begin{bmatrix}A & B\\ C+EA & D+EB\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

مشابه قسمت اول سوال می‌توان نشان داد $\det\begin{bmatrix}A & ۰\\ B & D\end{bmatrix}=\det A.\det B$.

حال به دترمینان ضرب زیر نگاه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}I & ۰\\ E & I\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

از طرفی

$$\begin{bmatrix}I & ۰\\ E & I\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C+EA & D+EB\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \det\left(\begin{bmatrix}I & ۰\\ E & I\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}A & B\\ C+EA & D+EB\end{bmatrix}$$

و از طرفی

$$\det\left(\begin{bmatrix}I & ۰\\ E & I\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}I & ۰\\ E & I\end{bmatrix}.\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

$$=\det I.\det I.\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=۱.\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

پس

$$\det\begin{bmatrix}A & B\\ C+EA & D+EB\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

و حکم ثابت شد.