



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه زبان‌ها و اتوماتا

مهلت اصلی: ۲۳ آذر

تمرین سری ۳

مدرس: دکتر شهرام خزائی

مهلت نهایی: ۷ دی

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- سوالات خود پیرامون این تمرین‌ها را با rafiei.mahdi98@gmail.com مطرح نمایید.
- از مجموع ۲۷۰ نمره سوالات زیر کافی است به ۱۰۰ نمره پاسخ دهید.
- با نوشتن تمرینات به کمک نرم افزار \LaTeX می‌توانید تا ۱۰ نمره‌ی بیشتر دریافت کنید.

مسأله‌ی ۱ (۱۵ نمره)

زبان $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x)\}$ را در نظر بگیرید.

(آ) (۵ نمره) گرامر مستقل از متن برای آن بسازید و ثابت کنید زبان L را به درستی تولید می‌کند.

(ب) (۱۰ نمره) یک ماشین پشته‌ای قطعی برای L بسازید و ثابت کنید که زبان را به درستی می‌پذیرد.

مسأله‌ی ۲ (۲۰ نمره)

ثابت کنید زبان‌های زیر نمی‌توانند توسط ماشین پشته‌ای قطعی پذیرفته شوند.
(اگر $w = 1011$ داریم $w^r = 1101$)

I. (10 pts) $\{0^n 1^n \cup 0^n 1^{2n} \mid n \geq 1\}$

II. (10 pts) $\{ww^r \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

مسأله‌ی ۳ (۳۰ نمره)

زبان خطی زبانی است که توسط یک گرامر خطی تولید شود. گرامر خطی گرامر مستقل از متنی است که در سمت راست هر قانونش تنها یک متغیر حضور داشته باشد.

زبانی قطعی است که توسط یک ماشین پشته‌ای قطعی پذیرفته شود.

زبانی نامعین است که توسط هیچ ماشین پشته‌ای قطعی پذیرفته نشود.

زبانی نامبهم است که توسط یک گرامر مستقل از متن بدون ابهام تولید شود.

در هر قسمت زبان مستقل از متنی ارائه کنید که ویژگی‌های مذکور را داشته باشد.

(آ) (۵ نمره) غیر خطی و قطعی باشد.

(ب) (۵ نمره) خطی، نامعین و نامبهم باشد.

(پ) (۱۰ نمره) خطی، نامعین و مبهم باشد.

(ت) (۱۰ نمره) غیر خطی، نامعین و نامبهم باشد.

مسأله‌ی ۴ (۲۵ نمره)

زبان تولید شده توسط گرامرهای زیر را با ارائه مجموعه توصیف کنید و توصیف خود را اثبات کنید.

I. (5 pts) $S \rightarrow TT \quad T \rightarrow aT \mid Ta \mid b$

II. (10 pts) $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa \quad A \rightarrow aAa \mid bAb \mid a \mid b \mid \epsilon$

III. (10 pts) $S \rightarrow ST \mid \epsilon \quad T \rightarrow aS \mid bT \mid b$

مسأله‌ی ۵ (۱۵ نمره)

برای زبان‌های توصیف شده گرامر مستقل از متن بسازید و ثابت کنید گرامر مناسب را ساخته‌اید.

(آ) (۵ نمره) مجموعه کلمات با طول فرد از $\{a, b\}^*$ که حرف وسط آن‌ها a باشد.

(ب) (۱۰ نمره) مجموعه کلمات با طول فرد از $\{a, b\}^*$ که حرف اول و آخر و وسط آن‌ها یکی باشد.

مسأله‌ی ۶ (۲۵ نمره)

نشان دهید گرامرهای مستقل از متن داده شده مبهم هستند. سپس آن‌ها را رفع ابهام کنید. یعنی گرامر مستقل از متن دیگری ارائه کنید که زبان آن برابر با زبان گرامر داده شده باشد و ابهام نداشته باشد. توجه کنید که باید اثبات کنید دو گرامر معادلند و گرامری که ارائه می‌دهید مبهم نیست.

I. (10 pts) $S \rightarrow SS \mid a \mid b$

II. (15 pts) $S \rightarrow aSb \mid aaSb \mid \epsilon$

مسأله‌ی ۷ (۱۰ نمره)

قوانین تولید ϵ را از گرامر زیر حذف کنید. زبان گرامر حاصل می‌تواند شامل کلمه ϵ نباشد.

$$S \rightarrow AB \mid ABC$$

$$A \rightarrow BA \mid BC \mid \epsilon \mid a$$

$$B \rightarrow AC \mid CB \mid \epsilon \mid b$$

$$C \rightarrow BC \mid AB \mid A \mid c$$

مسأله‌ی ۸ (۱۰ نمره)

گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$$S \rightarrow S(S) \mid \epsilon$$

مسأله‌ی ۹ (۱۵ نمره)

برای زبان‌های زیر ماشین پشته‌ای بسازید.

(آ) (۵ نمره) همه رشته‌هایی از $\{ (,) \}^*$ که متعادل باشد.

(ب) (۱۰ نمره) $\{ x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) < n_b(x) < 2n_a(x) \}$

مسأله‌ی ۱۰ (۱۵ نمره)

ثابت کنید اگر ماشین پشته‌ای M ، برای همه ورودی‌های ممکن و دنباله حرکت‌های ممکن حداکثر از k خانه حافظه استفاده کند، زبان M منظم است.

مسأله‌ی ۱۱ (۱۰ نمره)

ماشین شمارنده، نوعی ماشین پشته‌ای است که الفبای پشته آن تنها یک عضو دارد. ماشین شمارنده‌ای بسازید که زبان زیر را بپذیرد.

$$\{ x \in \{ \circ, 1 \}^* \mid n_a(x) = 2n_b(x) \}$$

مسأله‌ی ۱۲ (۲۰ نمره)

با استفاده از لم تزریق ثابت کنید زبان‌های زیر مستقل از متن نیستند.

I. (5 pts) $\{ a^{2^n} \mid n \geq 0 \}$

II. (5 pts) $\{ a^n b^{2^n} a^n \mid n \geq 0 \}$

III. (10 pts) $\{ x \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(x) = \max\{n_b(x), n_c(x)\} \}$

مسأله‌ی ۱۳ (۲۰ نمره)

فرض کنید زبان $L \subseteq \{a\}^*$ مستقل از متن باشد. نشان دهید L منظم است.

مسأله‌ی ۱۴ (۲۰ نمره)

فرض کنید L یک زبان مستقل از متن باشد. ثابت کنید مجموعه همه پیشوندهای کلمات L نیز زبانی مستقل از متن است. پیشوند یک کلمه یعنی زیر رشته‌ای از آن کلمه که شروع آن مطابق با شروع کلمه باشد.

مسأله‌ی ۱۵ (۲۰ نمره)

برای زبان توصیف شده گرامر مستقل از متن بسازید و ثابت کنید گرامر مناسب را ساخته‌اید.

$$\{a^i b^j \mid \frac{i}{2} \leq j \leq \frac{3i}{2}\}$$