به نام خدا

دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا دانشجو: علیرضا توفیقی محمدی

تمرین : سری ۲

مدرّس: دکتر شهرام خزائی شماره‌ی دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

مسأله‌ی ۱

مسأله‌ی ۲

آ)

منظم نیست، فرض کنید منظم است، پس طبق لم تزریق n ای وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی با طول بیشتر یا مساوی n مثل w می‌توان w را به صورت xyz نوشت که $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ که به ازای هر k، xy^kw عضو زبان است.
حال $w = 0^n1^n2^n$ را در نظر بگیرید، طبق لم بالا $w = xyz$ ای است که $|xy| \leq n, |y| > 0$ پس x, y تنها از ۰ تشکیل شده اند و باید رشته‌ی xz نیز جز زبان باشد که چون اندازه‌ی y حداقل یک است و فقط از ۰ تشکیل شده، در این حالت دیگر تعداد ۰ ها و ۱ ها و ۲ ها در این کلمه مساوی نیستند و نباید عضو زبان باشد که این تناقض است. پس زبان منظم نیست پس نامنظم است.

ب)

منظم نیست، فرض کنید منظم است، پس طبق لم تزریق n ای وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی با طول بیشتر یا مساوی n مثل w می‌توان w را به صورت xyz نوشت که $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ که به ازای هر k، xy^kw عضو زبان است.
حال $w = 0^n1^{2n}2^n$ را در نظر بگیرید، طبق لم بالا $w = xyz$ ای است که $|xy| \leq n, |y| > 0$ پس x, y تنها از ۰ تشکیل شده اند و باید رشته‌ی xz نیز جز زبان باشد که چون اندازه‌ی y حداقل یک است و فقط از ۰ تشکیل شده، در این حالت دیگر تعداد یک ها برابر با مجموع تعداد ۰ ها و ۱ ها نیست و نباید عضو زبان باشد که این تناقض است. پس زبان منظم نیست پس نامنظم است.

ج)

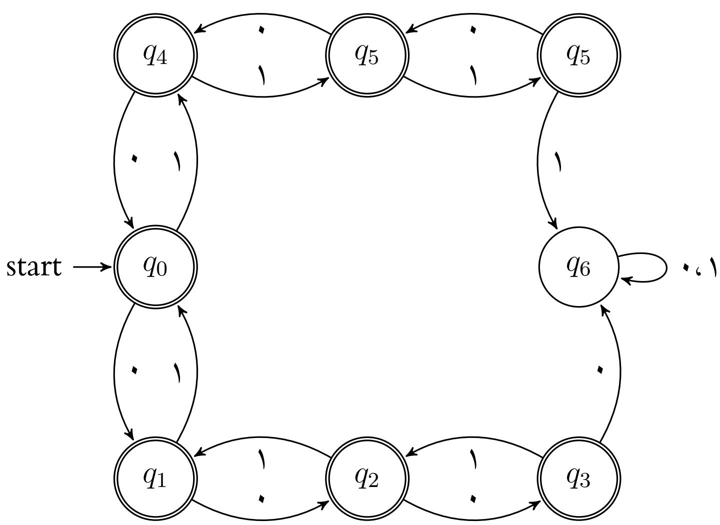
منظم نیست، فرض کنید منظم است، پس طبق لم تزریق n ای وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی با طول بیشتر یا مساوی n مثل w می‌توان w را به صورت xyz نوشت که $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ که به ازای هر k، xy^kw عضو زبان است.
حال $w = 0^n1^{2n+1}$ را در نظر بگیرید، طبق لم بالا $w = xyz$ ای است که $|xy| \leq n, |y| > 0$ پس x, y تنها از ۰ تشکیل شده اند و باید رشته‌ی $xy^{100n+10}z$ نیز جز زبان باشد که چون اندازه‌ی y حداقل یک است و فقط از ۰ تشکیل شده، در این حالت تعداد ۰ها حداقل $100n + 10$ است در حالی که تعداد یک‌ها تغییر نکرده و $2n + 1$ باقی مانده است. اما چون $100n + 10 < 2 \times (2n + 1)$ نیست، این رشته نباید عضو زبان باشد. که این تناقض است. پس زبان منظم نیست.

د)

منظم نیست، فرض کنید منظم است، پس طبق لم تزریق n ای وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی با طول بیشتر یا مساوی n مثل w می‌توان w را به صورت xyz نوشت که $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ که به ازای هر k، xy^kw عضو زبان است.
حال $w = 0^n110^n$ را در نظر بگیرید، طبق لم بالا $w = xyz$ ای است که $|xy| \leq n, |y| > 0$ پس x, y تنها از ۰ تشکیل شده اند و باید رشته‌ی xy^2z نیز جز زبان باشد که چون اندازه‌ی y حداقل یک است و فقط از ۰ تشکیل شده، در این حالت تعداد صفرهای قبل از دوتا یک زیاد تر از تعداد صفرهای بعد از دوتا یک است، پس این رشته را نمی‌توان به شکل ww^R نشان داد پس نباید عضو زبان باشد که این تناقض است. پس زبان منظم نیست.

ه)

منظم است در زیر DFA ای برای آن ارائه شده‌است.



و)

منظم نیست، فرض کنید منظم است، پس طبق لم تزریق n ای وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی با طول بیشتر یا مساوی n مثل w می‌توان w را به صورت xyz نوشت که $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ که به ازای هر k، xy^kw عضو زبان است.
حال $w = 0^n10^n$ را در نظر بگیرید، طبق لم بالا $w = xyz$ ای است که $|xy| \leq n, |y| > 0$ پس x, y تنها از ۰ تشکیل شده اند و باید رشته‌ی xy^2z نیز جز زبان باشد که چون اندازه‌ی y حداقل یک است و فقط از ۰ تشکیل شده، در این حالت تعداد صفرهای قبل از یک حداقل $n+1$ شده‌است، تعداد یک‌ها تغییری نکرده و یک عدد است. تعداد صفرهای بعد از ۱ نیز تغییری نکرده و n تا باقی مانده است. و چون n نمی‌تواند برابر با حاصل ضرب یک در عددی بزرگتر از n باشد، این رشته عضو زبان نیست که این تناقض است، پس فرض خلف باطل و زبان منظم نیست.

مسأله‌ی ۳

آ)

غلط است، سمت چپ ϵ را می‌پذیرد اما سمت راست نه.

ب)

غلط است، سمت چپ ϵ را می‌پذیرد اما سمت راست نه.

ج)

غلط است، سمت چپ 1 را می‌پذیرد اما سمت راست نه.

د)

صحیح است، زیرا از کلاس درس می‌دانیم $(a+b)^* = a^* + b^8$ و همچنین $(a^*)^* = a^*$. و با کمک این دو به سادگی اثبات می‌شود. همچنین زبان این دو برابر با تعداد رشته‌های زوج حرفی است که باهم برابر اند.

مسأله‌ی ۴

مسأله‌ی ۵

آ)

کافی است مجموعه‌ی $S = \{0^n | n \geq 0\}$ را در نظر بگیریم، این مجموعه تمایزگر است زیرا دو عضو دلخواه آن مثل 0^p و 0^q که $p \neq q$ است در نظر بگیرید، حال رشته‌ی 1^p را در نظر بگیرید، $0^p1^p \in L$ اما $0^q1^p \notin L$ پس این دو رشته تمایزپذیرند. پس هر دو عضو از این مجموعه تمایزپذیر بوده و مجموعه تمایزگر است.

ب)

با برهان خلف مسئله را حل می‌کنیم. فرض کنید $F = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ باشد و $D = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F')$ یک DFAبا کمتر از k حالت باشد.
تابع $\hat{\delta}$ برای این DFAرا در نظر بگیرید و حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\hat{\delta}(q_0, w_1), \hat{\delta}(q_0, w_2), ..., \hat{\delta}(q_0, w_k)$$

چون تعداد حالت‌ها کمتر از k است، پس طبق لانه‌کبوتری i, j ای وجود دارد که $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$
اما چون w_i, w_j تمایزپذیرند، w ای وجود دارد که $w_iw \in L(D)$ اما $w_jw \notin L(D)$ (یا برعکس که در این صورت جای i, j را باهم عوض می‌کنیم تا همین حالت پیش آید.)
پس:

$$\hat{\delta}(q_0, w_iw) \in F'$$

اما:

$$\hat{\delta}(q_0, w_iw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_i), w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_j), w) = \hat{\delta}(q_0, w_jw)$$

پس:

$$\hat{\delta}(q_0, w_jw) \in F' \implies w_jw \in L(D)$$

که این با $w_jw \notin L(D)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مسأله‌ی ۶

مسأله‌ی ۷

مسأله‌ی ۸

درست است،می‌دانیم هر زبان متناهی ای منظم است، حال $\Sigma = \{1\}$ و زبان همه‌ی رشته با طول کمتر یا مساوی k را در نظر بگیرید.ادعا می‌کنیم DFAبرای این زبان باید حداقل k حالت نهایی داشته باشد، فرض کنید تعداد حالت‌نهایی‌ها کمتر از k باشد، در این صورت دو رشته‌ی مثل 1^i و 1^j که $i, j \leq k$ وجود دارند که هر دو به یک حالت نهایی بروند. بدون خدشه به کلید مسئله فرض کنید $i < j$. پس:

$$q = \hat{\delta}(q_0, 1^j) = \hat{\delta}(q_0, 1^i) \in F$$

از طرفی:

$$q = \hat{\delta}(q_0, 1^j) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, 1^i), 1^{j-i}) = \hat{\delta}(q, 1^{j-i})$$

پس به ازای هر x،

$$\hat{\delta}(q, (1^{j-i})^x) = q$$

و در نتیجه

$$\hat{\delta}(q_0, 1^i(1^{j-i})^x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, 1^i), (1^{j-i})^x) = \hat{\delta}(q, (1^{j-i})^x) = q \implies 1^i(1^{j-i})^x \in L$$

اما چون $j - i > 0$، پس $1^i(1^{j-i})^x$ها نامتاهی‌تا هستند پس زبان باید نامتناهی باشد، درحالی که تنها شامل k عضو بود که این تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مسأله‌ی ۹