

بسمه تعالی

پاسخ تمرین تحویلی دهم - درس ریاضی نویسی - دانشگاه صنعتی شریف  
علیرضا توفیقی محمدی - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳  
امیرحسین قربانی - رشته ریاضی - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۲۴۴  
علیرضا عظیمی نیا - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۴۵۸  
امیرحسین زارع - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۹۶  
امیرحسین ندیری - رشته علوم کامپیوتر - شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۰۵۳۳

## پاسخ

۱

۱,۲

در هر ماه افرادی که به تعداد بلیطداران اضافه می شوند ۴ برابر می شود، تعداد افراد اضافه شده در ماه صفرم ۱ نفر، ماه بعد ۴ نفر، ماه بعد ۱۶ نفر و ... است پس تعداد کل افرادی که در ماه  $n$  ام بلیط دارند برابر با:

$$\sum_{i=0}^n 4^i = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}$$

است، که باید اولین  $n$  ای که مقدار بالا از  $50 \times 10^6$  بیشتر شود را پیدا کنیم که این  $n = 13$  صادق است پس ۱۳ ماه یعنی یک سال و یک ماه طول می کشد تا همه ی متقاضیان صاحب بلیط شوند.

۱,۳

آخرین گروه دارای دوچرخه نیستند یعنی  $4^n$  نفر که  $n = 13$  بود یعنی ۶۷۱۰۸۸۶۴ نفر صاحب بلیط اند اما دوچرخه ندارند.

۱,۴

فقط افراد ماه آخر دارای دوچرخه نیستند پس افراد ماه یکی مانده به آخر دارای دوچرخه هستند ولی برخی معرفی شدگان آن ها صاحب دوچرخه نیستند یعنی  $4^{n-1} = 4^{12} = 16777216$  نفر.

۱,۵

همچون سوال ۱,۲ مسئله را حل می کنیم و  $n = 17$  به دست می آید.

۱,۵,۲

تعداد افرادی که بلیط دارند ولی دوچرخه ندارند  $4^n = 4^{17} = 17179869184$ .

۱,۵,۳

تعداد افرادی که دوچرخه دارند ولی برخی از معرفی شدگان آن ها دوچرخه ندارند:  $n = 4^{16} = 4294967296$

۱,۶

بله، زمان پیدا کردن مشتری برای همه‌ی افراد یکسان نیست و همچنین با گذر زمان این زمان به دلیل محدود شدن جامعه‌ی هدف افزایش می‌یابد.

۲

۲,۱

$$\bullet \quad n_0 \geq n_1$$

$$\bullet \quad n_0 \geq n_2$$

• بین  $n_0$  و  $n_1$  رابطه‌ای نیست.

۲,۲

تعداد افرادی که در هفته‌ی  $i$  ام عضو شرکت شده‌اند  $2^i$  نفر است پس از  $n$  هفته،  $2^{n+1} - 1$  نفر عضو سیستم می‌شوند.

عمق ۱ تا ۴ از پایین سرشان کلاه رفته که این تعداد  $2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3}$  نفرند پس جواب مسئله  $\frac{den 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3}}{2^{n+1} - 1}$  است.

۲,۳

افراد عمق ۵ از پایین جایزه می‌گیرند ولی زیرشاخه‌های آنها جایزه نمی‌گیرند پس  $2^{n-4}$  نفر جایزه گرفته‌اند ولی زیرشاخه‌ی مستقیمی دارند که سرش کلاه رفته پس  $\frac{2^{n-4}}{2^{n+1} - 1}$  جواب مسئله است.

۲,۴

تعداد کل افراد  $2^{n+1} - 1$  نفر است که از عمق ۵ ام از پایین به بالا صاحب جایزه می‌شوند که این افراد  $2^{n-3} - 1$  نفر است پس سود شرکت برابر با  $(2^{n-3} - 1) \times 10 - 1 - 2^{n+1}$  است.

۳,۱

اگر تعداد افرادی که بدون شاخه هستند را  $n_0$ ، تعداد افرادی که یک شاخه دارند را  $n_1$  و بقیه را  $n_2$  بنامیم. در هفته‌ی نخست:

$$n_0 = 1, n_1 = 0, n_2 = 0$$

است، هفته‌های بعد به صورت زیر است:

$$1 : n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 0$$

$$2 : n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 1$$

$$3 : n_0 = 2, n_1 = 1, n_2 = 2$$

$$4 : n_0 = 3, n_1 = 2, n_2 = 3$$

$$5 : n_0 = 5, n_1 = 3, n_2 = 5$$

$$6 : n_0 = 8, n_1 = 5, n_2 = 8$$

$$7 : n_0 = 13, n_1 = 8, n_2 = 13$$

...

اگر دقت کنیم می بینیم که  $n_0$  و  $n_1$  و  $n_2$  دنباله‌ی فیبوناچی است که اثبات آن هم راحت است و از اثبات صرف نظر می کنیم. پس در هفته‌ی ۲۰ ام این تعداد برابر با ۲۸۶۵۶ است.

۳,۲

با نوشتن جمله‌ی عمومی اعداد فیبوناچی نتیجه می گیریم که این تعداد هر هفته حدود  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  است.

۳,۳

دادیم.

۳,۴

هر فرد باید ۶ هفته صبر کند تا به سود رسانی برسد زیرا هفته‌ی ۶ ام این تعداد بیشتر از ۱۵ است. همچنین طبق قسمت ۳,۲ افراد پس از هر هفته حدود  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  برابر می شوند پس اگر در هفته‌ی  $n - 6$  ام تعداد  $x$  نفر باشد، در هفته‌ی  $n$  ام تعداد  $x \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$  می شود که همه غیر از  $x$  نفر ضرر می کنند پس کسر

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6 - 1}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6}$$

از افراد ضرر می کنند.

۴

۴,۱

طبق نوشته‌ی متن، وقتی هنوز پدیده‌ی اشباع رخ نداده است، نمودار رشد یک نمودار نمایی است پس تابعی مانند  $y = a^{bx} \times c$  است. حال اگر از این نمودار لگاریتم بگیریم خواهیم داشت:

$$\log y = \log(a^{bx} \times c) \rightarrow \log y = bx \log a + \log c$$

که یک نمودار خطی است. پس قسمت اول نمودار دوم باید به صورت خطی باشد.

۴,۲

وقتی اشباع رخ می دهد که سرعت رشد اعضا کاهش شدید پیدا کند، این کاهش شدید در هفته‌ی ۳۵ ام رخ داده است پس زمان اشباع باید حدوداً هفته‌ی ۳۵ ام باشد.

۴,۳

می‌توان زمان اشباع را با کمک مشتق نمودار بیان کرد، در زمان اشباع سرعت افزایش اعضا کاهش شدید پیدا می‌کند پس می‌توان زمان اشباع را اولین زمانی دانست که مشتق نمودار کمتر از یک‌دهم تغییرات متوسط اعضا از ابتدا تا آن موقع باشد.

۴,۴

هرچه نرخ بیشتر باشد، سرعت رشد هم بیشتر است اما رابطه‌ای خطی بین آنها برقرار نیست.

۴,۵

برای کسی که به شرکت می‌پیوند زمان حداکثر سرعت رشد زمان باخت است، زیرا از این پس تقریباً نمی‌توان کسی را به شرکت اضافه کرد و پول داده‌شده پس داده نمی‌شود. برای شرکت این زمان زمانی است که دیگر نباید پولی به اعضا بدهد و البته دیگر سوددهی قابل توجهی نیز نخواهد داشت و باید به فکر کسب و کاری دیگر باشد.

۴,۶

اگر  $x$  نفر عضو شرکت باشند در یک جمعیت  $2n$  نفره احتمال اینکه یک نفر که عضو شرکتی نیست پیدا کنیم قبل از فرهنگ‌سازی برابر با  $\frac{2n-x}{2n}$  بود، حال این احتمال برابر با  $\frac{n-x}{2n}$  است که احتمال کمتر از یک‌دوم می‌شود، پس به همین ترتیب تعداد افراد در روز نیز کمتر از یک‌دوم می‌شود (چون تمام احتمال‌ها کمتر از یک‌دوم حالت قبل است پس تعداد افرادی هم که پیدا می‌شوند باید کمتر از یک‌دوم حالت قبل باشد) پس در روز اشباع حالت قبل، تعداد افراد حالت جدید کمتر از یک‌دوم حالت قبل است پس نمودار مربعی غلط و نمودار مثلی درست است.

۴,۷

در این مسئله فقط افراد بدون زیرشاخه با حداکثر مدت عضویت  $k$  هفته و با یک زیرشاخه با حداکثر مدت یک‌زیرشاخه‌دار شدن  $k$  هفته دست به تلاش برای عضو کردن دیگران می‌زنند. برای  $k = 1$  این مقدار حدود ۶۰۰۰۰۰ و برای  $k = 2$  این مقدار حدود ۹۰۰۰۰۰ و برای  $k \geq 35$  این مقدار همان ۱۰۰۰۰۰۰ است (چون در هفته‌ی ۳۵ ام جامعه اشباع می‌شود). حال تابع  $f(k) = n - \frac{n}{(k+1)(k+1)}$  تقریباً جوابی همچون ۳ داده‌ای که داریم می‌دهد.

۴,۸

اولاً طبق استدلال ۴,۶ زمان رسیدن به آستانه‌ی اعضا طولانی‌تر می‌شود. ثانياً آستانه‌ی اعضا بسیار کاهش می‌یابد.

۴,۹

در حالت واقعی‌تر افراد علاوه بر اینکه سعی می‌کنند برای خودشان شاخه پیدا کنند، سعی برای پیدا کردن زیرشاخه برای زیرشاخه‌هایشان نیز می‌کنند تا ضریب تعادل خود را ایجاد کنند. می‌توان این حالت را نیز به

مسئله اضافه کرد.

۴,۱۰

تأثیر تلوزیون به صورت ثابت و  $۱/۲$  جامعه در نظر گرفته شد ولی همچون رشد تعداد افراد متقاضی، تعداد افراد آگاه نیز رشد می‌کنند. همچنین می‌توان برای پول اولیه‌ی ثبت‌نام و جایزه نیز حالت‌های دیگری در نظر گرفت و رشد آن را بررسی کرد.