تمرین

۱.فرض کنید V فضای برداری تولید شده توسط سطرهای ماتریس زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲۱ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۱ & ۷ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۴ & ۰ & ۶ & ۱ \\ ۶ & ۴۲ & -۱ & ۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف. پایه‌ای برای V بیابید.

ب. کدام یک از بردارهای $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ داخل V هستند.

پ. اگر بدانیم که بردار $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ در V قرار دارد نمایش آن در پایه‌ای که برای V در قسمت الف بدست آوردید چیست.

۲. اگر A ماتریسی بالا مثلثی باشد آنگاه ستون‌های آن مستقل خطی اند اگر و تنها اگر درایه‌های روی قطر آن ناصفر باشند.

۳. آیا برای هر سه زیرفضای $W_۱$، $W_۲$ و $W_۳$، رابطه‌ای بین بعد $W_۱ + W_۲ + W_۳$ و بعدهای زیرفضاهای W_i و اشتراک‌های آنها وجود دارد؟ مثلاً آیا همیشه رابطه زیر برقرار است؟

$$\begin{aligned} \dim(W_۱ + W_۲ + W_۳) = {} & \dim W_۱ + \dim W_۱ + \dim W_۱ \\ & - \dim W_۱ \cap W_۲ - \dim W_۲ \cap W_۳ - \dim W_۳ \cap W_۱ \\ & + \dim W_۱ \cap W_۲ \cap W_۳ \end{aligned}$$

۴. فرض کنید $v_۱, \dots, v_{n+۲}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید اعداد حقیقی $a_۱, \dots, a_n$ وجود دارند که بعضی از آنها ناصفر اند و

$$a_۱ + \cdots + a_{n+۲} = ۰ \qquad \text{و} \qquad a_۱ v_۱ + \cdots + a_{n+۲} v_{n+۲} = ۰$$

۵. منظور از پوش محدب $u_۱, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ مجموعه زیر است.

$$\{t_۱ u_۱ + \cdots + t_k u_k : ۰ \leq t_۱, \dots, t_k, t_۱ + \cdots t_k = ۱\}$$

نشان دهید هر مجموعه $n + ۲$ عضوی $u_۱, \dots, u_{n+۲} \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به دو مجموعه مجزا تقسیم کرد که پوش محدب آنها با هم اشتراک داشته باشند.

۶. فرض کنید $\{v_۱, \dots, v_n\}$ یک پایه برای زیر فضای V است. بردار $v = a_۱ v_۱ + \cdots + a_n v_n$ چه شرطی باید داشته باشد که برای هر i مجموعه $\{v_۱, \dots, v_{i-۱}, v, v_{i+۱}, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد.

۷. فرض کنید $\{v_۱, \dots, v_n\}$ یک پایه برای زیر فضای V است. شرط لازم و کافی برای $v \in V$ را بیابید که مجموعه $\{v_۱ - v, \dots, v_n - v\}$ نیز یک پایه برای V باشد. بیان هندسی این شرط چیست؟

۸. آیا رابطه $\langle S_۱ \cap S_۲ \rangle = \langle S_۱ \rangle \cap \langle S_۲ \rangle$ همیشه درست است؟

۹. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ باشند. در چه مواردی $W_۱ \cup W_۲$ نیز زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است؟ $W_۱^c$ چطور؟

۱۰. فرض کنید $V = W_۱ \oplus W_۲$ و W زیر فضایی از V است که شامل یکی از دو زیر فضای $W_۱$ یا $W_۲$ است. نشان دهید

$$W = (W \cap W_۱) \oplus (W \cap W_۲)$$

اگر W شامل یکی از دو زیر فضای $W_۱$ یا $W_۲$ نباشد چه‌طور؟

تمرین ۲

۱.آیا $\{x^۳+۲x^۲+۱,۲x-۲,۴x^۲-x-۱\}$ یک پایه برای فضای چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر یا مساوی سه است؟

۲. یک پایه برای ماتریس‌های بالا مثلثی بیابید.

۳. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $\{v,u,w\}$ یک پایه برای آن باشد. آیا همیشه $\{v+u,u+w,w+v\}$ نیز پایه‌ای برای V است. این موضوع را برای پایه استاندارد $F^۳$ زمانی که $F=\mathbb{Z}_۲$ است بررسی کنید.

۴. نشان دهید که اگر p یک چند جمله‌ای با درجه n باشد آنگاه خودش و مشتقات تا مرتبه nام اش پایه‌ای برای فضای چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر یا مساوی n تشکیل می‌دهند.

۵. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ دو زیر فضای V اند. شرط لازم وکافی برای $\dim(W_۱\cap W_۲)=\dim W_۱$ بیابید.

۶. نشان دهید مجموعه همه توابع حقیقی روی مجموعه S با جمع و ضرب طبیعی روی آنها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

۷. فرض کنید $D\subset S$. آیا فضای توابع حقیقی روی D زیر فضای توابع حقیقی روی S است؟ آیا فضای توابع حقیقی روی S زیر فضای توابع حقیقی روی D است؟

۸. تابع f_a با رابطه $f_a(x)=e^{ax}$ تابعی حقیقی روی $\mathbb{R}$ است و می‌توان آن را به عنوان تابع روی هر بازه دلخواه (s,t) نیز در نظر گرفت. نشان دهید مجموعه $\{f_a:a\in\mathbb{R}\}$ یک مجموعه مستقل خطی در فضای توابع حقیقی روی بازه (s,t) است. مجموعه‌های $\{\sin ax:a\in\mathbb{R}^+\}$ و $\{\cos ax:a\in\mathbb{R}^+\}$ و $\{\tan ax:a\in\mathbb{R}^+\}$ نیز مجموعه‌هایی مستقل خطی در این فضا اند.
نشان دهید مجموعه‌های زیر در فضاهای برداری مشخص شده مستقل خطی اند.

۹. اگر ماتریس‌های $A_۱,\ldots,A_k\in M_{m\times n}(F)$ مستقل خطی باشند آنگاه $A_۱^t,\ldots,A_k^t\in M_{n\times m}(F)$ نیز مستقل خطی اند.

۱۰. اگر A ماتریسی بالا مثلثی باشد آنگاه ستون‌های آن مستقل خطی اند اگر و تنها اگر درایه‌های روی قطر آن ناصفر باشند.

۱۱. آیا برای هر سه زیرفضای $W_۱$، $W_۲$ و $W_۳$، رابطه‌ای بین بعد $W_۱+W_۲+W_۳$ و بعدهای زیرفضاهای W_i و اشتراک‌های آنها وجود دارد؟ مثلاً آیا همیشه رابطه زیر برقرار است؟

$$\begin{aligned}\dim(W_۱+W_۲+W_۳)=&\dim W_۱+\dim W_۱+\dim W_۱\\&-\dim W_۱\cap W_۲-\dim W_۱\cap W_۳-\dim W_۳\cap W_۱\\&+\dim W_۱\cap W_۲\cap W_۳\end{aligned}$$

۱۲. $V=\{۰\}$ یک فضای برداری روی هر میدانی است.

۱۳. فرض کنید $v\in V$ بردار ناصفری باشد.

الف. نشان دهید $rv=۰$ اگر و تنها اگر $r=۰$.

ب. هر فضای برداری ناصفر روی یک میدان نامتناهی، نامتناهی عضو دارد.

۱۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر با جمع برداری و ضرب اسکالر معرفی شده یک فضای برداری است.

$V=\mathbb{R}^۲$ و $F=\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,b_۱+b_۲), && r.(a,b)=(ra,b)\\
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,b_۱+b_۲), && r.(a,b)=(ra,۰)\\
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,b_۱+b_۲), && r.(a,b)=\begin{cases}(۰,۰) & r=۰\\ (ra,b\,/\,r) & r\neq ۰\end{cases}\\
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,۰), && r.(a,b)=(ra,۰)\\
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,b_۱b_۲), && r.(a,b)=(ra,b)\\
&(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱-a_۲,b_۱-b_۲), && r.(a,b)=(ra,rb)
\end{aligned}$$

$V=\mathbb{R}^+$ و $F=\mathbb{R}$

$$a+b=ab,\quad r\bullet a=a^r$$

$F=\mathbb{R}$ و $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ f'+2f=0\}$ با جمع و ضرب معمولی.

$F=\mathbb{R}$ و $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ f'+2f=1\}$ با جمع و ضرب معمولی.

$F=\mathbb{R}$ و $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ f(1)=0\}$ با جمع و ضرب معمولی.

$F=\mathbb{R}$ و $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ f(x^2)=f(x)^2\}$ با جمع و ضرب معمولی.

مجموعه توابع مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی.

۱. نشان دهید $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1\}$ با جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. آیا این فضای برداری زیر فضای برداری $\mathbb{R}^3$ است؟

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2,z_1+z_2)$$
$$r(x,y,z)=(rx-r+1,ry,rz)$$

۱۵. آیا $\mathbb{Q}$ می‌تواند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد؟(اعداد گویا کوچک‌تر از اعداد حقیقی اند.)

۱۶. آیا $\mathbb{R}$ با جمع معمولی خود می‌تواند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد؟ ($\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ با جمع معمولی خود در واقع یک فضای برداری روی $\mathbb{Q}$. با بعد برابر تعداد اعضای $\mathbb{R}$.اند. بنابراین این دو مجموعه با جمع معمولی خود یکسان اند. یعنی نگاشت یک به یک و پوشایی بین آنها وجود دارد که جمع را حفظ می‌کند. به کمک این نگاشت ضرب اسکالر یک عدد مختلط در $\mathbb{C}$ را می‌توان به ضرب آن عدد در $\mathbb{R}$ متناظر کرد. به این ترتیب $\mathbb{R}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ می‌شود. در واقع این فضای برداری همان فضای برداری یک بعدی $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{C}$ است.)

۱۷. آیا $\mathbb{R}$ با جمع معمولی خود می‌تواند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{Q}$ باشد در حالی که ضرب اسکالر آن با ضرب معمولی اعداد گویا در اعداد حقیقی متفاوت باشد؟ $\mathbb{R}$ روی میدان $\mathbb{R}$ چطور؟

می‌توان ضرب اسکالر یک عضو میدان F را در بردارهای فضای برداری V به صورت یک نگاشت از V به V تصور کرد. بنابراین برای هر $r\in F$ نگاشت زیر را روی V داریم.

$$T_r:V\to V;\qquad v\mapsto rv$$

این نگاشت در ویژگی زیر صدق می‌کند.

$$T_r(v+u)=T_r(v)+T_r(u)$$

بنابراین T_rها در واقع نگاشت‌هایی از V به V اند که ساختار جمع آن را حفظ می‌کنند. به مجموعه چنین نگاشت‌هایی مجموعه هومورفیسم‌های V می‌گوییم. اعضای این مجموعه را می توان با هم جمع کرد و با این جمع این مجموعه یک گروه جابجایی می‌شود. همچنین می‌توان آنها را با هم ترکیب کرد (ضرب دو تا از این اعضا!). با این نگاه گروه آبلی V یک فضای برداری روی میدان F است اگر و تنها اگر نگاشت نابدیهی $T:F\to Hom(V)$ وجود داشته باشد که ساختار جمع و ضرب را حفظ کند. یعنی

$$T:F\to Hom(V);\quad r\mapsto T_r\quad T_{r+s}=T_r+T_s\quad T_{rs}=T_r.T_s\quad T_1=I_V$$

$\mathbb{R}$ با جمع خود در واقع یک فضای برداری روی $\mathbb{Q}$ است. هومورفیسم‌های آن نیز در واقع عملگرهای خطی این فضای برداری اند. بنابراین $\mathbb{R}$ روی یک میدان F فضای برداری خواهد بود اگر نسخه‌ای از آن میدان در فضای $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ وجود داشته‌باشد.

در مورد سوال اول چون $\mathbb{Q}$ خود یک فضای برداری یک بعدی روی خودش است پس نسخه آن در $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ نیز یک زیر فضای یک بعدی خواهد بود که نگاشت همانی را هم شامل شودو. بنابراین این زیر فضا به صورت یکتا مشخص می‌شود. یعنی جواب قسمت اول منفی است. (این موضوع را می‌توانستیم به صورت مستقیم نیز بدست آوریم) در مورد سوال دوم فرض کنید که فضای برداری معمولی $\mathbb{R}$ روی

خودش متناظر نگاشت $r \mapsto T_r$ از میدان $\mathbb{R}$ به فضای $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ باشد. توجه کنید که مجموعه این نگاشت‌ها یک زیر فضای با بعد ناشمارا در $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ است. بنابراین همه آنها مضرب نگاشت همانی نیستند. به این ترتیب نگاشت خطی وارون پذیر $U \in L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ وجود دارد که با یکی از T_rها جابجا نمی‌شود. به کمک این U یک نسخه دیگری از میدان $\mathbb{R}$ در $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ ارائه می‌کنیم.

$$S : \mathbb{R} \to L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q})); \quad r \mapsto S_r = U^{-۱}T_rU$$
$$S_{r+s} = U^{-۱}T_{r+s}U = U^{-۱}(T_r + T_s)U = U^{-۱}T_rU + U^{-۱}T_sU = S_r + S_s$$
$$S_{rs} = U^{-۱}T_{rs}U = U^{-۱}T_rT_sU = U^{-۱}T_rUU^{-۱}T_sUT_{rs} = S_rS_s$$
$$S_۱ = U^{-۱}T_۱U = U^{-۱}IU = I$$

بنابراین نسخه‌های بسیاری از $\mathbb{R}$ در $L((\mathbb{R};\mathbb{Q}),(\mathbb{R};\mathbb{Q}))$ قرار دارد و به این ترتیب جواب سوال دوم مثبت است.

۱۸. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. نشان دهید مجموعه $Z = V \times W$ با اعمال زیر نیز یک فضای برداری روی F است.

$$(v_۱, u_۱),\, (v_۲, u_۲) \in Z, \quad r \in F$$
$$(v_۱, u_۱) + (v_۲, u_۲) = (v_۱ + v_۲, u_۱ + u_۲), \quad r(v_۱, u_۱) = (r.v_۱, r.v_۲)$$

مجموعه‌های $\tilde{V} = V \times \{۰\}$ و $\tilde{W} = \{۰\} \times W$ زیرفضاهای Z اند و داریم $V = \tilde{W} + \tilde{V}$.

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. آیا فضای برداری تولید شده توسط $\{I, A, A^۲, ...\}$ می‌تواند $M_{n\times n}$ شود؟ (راهنمایی: نشان دهید هر دو عضو از این فضا با هم جابجا می‌شوند!)

۲۰. نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$ مانند A، چند جمله‌ای ناصفر $p(x)$ وجود دارد که $p(A) = ۰$. برای درجه p چه کرانی می‌توانید ارائه دهید.

۲۱. به روش زیر ثابت کنید که ماتریس‌های A و B حقیقی وجود ندارند که $AB - BA = I$.

الف. فرض کنید $AB - BA = I$. نشان دهید برای هر n داریم $A^nB - BA^n = nA^{n-۱}$.

ب. با فرض بالا نشان دهید که مجموعه $\{I, A, A^۲, ...\}$ باید مستقل خطی باشد.

ج. با توجه به مسئله قبل نتیجه بگیرید که فرض اول $AB - BA = I$ نمی‌تواند برقرار باشد. (این استدلال برای چه میدان‌هایی درست است؟)

۲۲. آیا رابطه $\langle S_۱ \cap S_۲ \rangle = \langle S_۱ \rangle \cap \langle S_۲ \rangle$ همیشه درست است؟

۲۳. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ دو زیر فضای برداری V باشند. در چه مواردی $W_۱ \cup W_۲$ نیز زیر فضای V است؟ $W_۱^c$ چطور؟

۲۴. فرض کنید W زیر فضای V است و Z زیر فضای V است. آیا Z زیر فضای V خواهد بود؟

۲۵. فرض کنید W زیر فضایی از V است. نشان دهید

الف. مجموعه $S \subset W$ در فضای W مستقل خطی است اگر و تنها اگر این مجموعه در V مستقل خطی باشد.

ب. فضای تولید شده توسط مجموعه $S \subset W$ در فضای W برابر است با فضای تولید شده توسط این مجموعه در فضای V.

۲۶. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{Z}_p$ است.

الف. نشان دهید V دارای p^n عضو است.

ب. نشان دهید که تعداد زیرفضاهای $k+۱$ بعدی شامل یک زیر فضای k بعدی در V برابر است با $\dfrac{p^{n-k} - ۱}{p - ۱}$.

ج. تعداد زیر فضاهای k بعدی در V را بدست آورید.

۲۷. آیا هر گروه آبلی p^n عضوی می‌تواند یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ باشد.

---

۲۸. نشان دهید که در یک میدان متناهی عدد طبیعی nای وجود دارد که مجموع n تا یک برابر صفر می‌شود. نشان دهید این n باید اول باشد و این میدان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_n$ است. نتیجه بگیرید که یک میدان متناهی p^k عضو دارد که p عددی اول است.

۲۹. فرض کنید V_iها تعدادی زیر فضای k بعدی اند که اشتراک هر دو تای آنها یک زیر فضای $k-1$ بعدی است. نشان دهید یا تمام V_iها در یک زیرفضای $k+1$ بعدی قرار دارند یا اشتراک آنها یک زیر فضای $k-1$ بعدی است.

۳۰. نشان دهید یک فضای برداری روی یک میدان نامتناهی نمی‌تواند اجتماع متناهی (یا تعدادی کمتر از تعداد اعضای آن میدان) زیرفضای اکید خود باشد.

۳۱. نشان دهید که اگر F نامتناهی باشد می‌توان یک ماتریس $n \times \infty$ با درایه‌های در F ساخت که هر n ستون آن مستقل خطی باشد.

۳۲. فرض کنید V مجموعه همه دنباله‌های اعداد حقیقی اند و جمع و ضرب اسکالر روی آنها به صورت مولفه‌ای تعریف شده است. قرار دهید

$$W = \{(a_1, a_2, \ldots) \in V \mid \lim_{i\to\infty} a_i = 0\} \quad U = \{(a_1, a_2, \ldots) \in V \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$$

الف. نشان دهید V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

ب. نشان دهید W زیر فضای V است.

ج. نشان دهید U نیز زیر فضایی از V است که در W هم قرار دارد. (بنابراین زیر فضای W هم هست)

۳۳. اثبات یا رد کنید. فرض کنید W_1، W_2 و U زیر فضاهای V باشند و $W_1 + U = W_2 + U$. آیا همیشه رابطه $W_1 = W_2$ برقرار است؟ اگر بدانیم $W_1 \oplus U = W_2 \oplus U$ است جواب این پرسش چه خواهد بود.

تمرین ۳

در بسیاری از تمرین‌های زیر اگر ویژگی‌ای در مورد نگاشت‌های خطی بیان شده متناظر آن ویژگی برای ماتریس‌ها نیز قابل بیان است و برعکس. به عنوان یک تمرین خوب بیان متناظر را در هر مسئله ارائه دهید.

۱. نگاشت T روی $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$T(x,y,z) = (۳x+z, -۲x+y, -x+۲y+۴z)$$

نشان دهید که این نگاشت خطی است و نمایش آن را یک بار در پایه استاندارد و یک بار در پایه مرتب $\alpha = \{v_۱,.v_۲,v_۳\}$ بدست آورید که در آن $v_۱ = (۱,۰,۱), v_۲ = (-۱,۲,۱), v_۳ = (۲,۱,۱)$. (یعنی نمایش‌های $[T]_{\varepsilon_۳}^{\varepsilon_۳}$ و $[T]_\alpha^\alpha$ را بدست آورید)

۲. فرض کنید V یک فضای برداری دو بعدی روی میدان F و α پایه مرتبی برای آن است. اگر ماتریس زیر نمایش نگاشت خطی T در پایه α باشد آنگاه نشان دهید $T^۲ - (a+d)T + (ad-bc) = ۰$.

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $\alpha = \{v_۱,\dots,v_n\}$ یک پایه مرتب برای آن باشد. نمایش عملگر T با رابطه زیر را در پایه α بنویسید.

$$T(v_۱) = ۰, \quad T(v_۲) = v_۱, \quad \dots \quad T(v_n) = v_{n-۱}$$

نشان دهید $T^n = ۰$ در حالی که $T^{n-۱} \neq ۰$.

۴. فرض کنید b یک ماتریس $n \times n$ است. نشان دهید نگاشت $T: M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F); \quad T(A) = AB - BA$ یک نگاشت خطی است.

۵. نشان دهید حاصل ضرب دو ماتریس قطری (بالا مثلثی، پایین مثلثی) یک ماتریس قطری (بالا مثلثی، پایین مثلثی) است.

۶. فرض کنید که A ماتریسی $m \times n$ با رتبه r است. نشان دهید که ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q یافت می‌شوند که

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۷. نشان دهید برای هر ماتریس مربعی A ماتریس B وجود دارد که $ABA = A$.

۸. A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $p \times n$ است به‌گونه‌ای که برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ که $AX = ۰$ داریم $BX = ۰$. نشان دهید ماتریس C وجود دارد که $B = CA$.

۹. اگر نگاشت‌های خطی $T_۱,\dots,T_k \in L(V;W)$ مستقل خطی باشند آنگاه $T_۱^t,\dots,T_k^t \in L(W^*;V^*)$ نیز مستقل خطی اند.

۱۰. اگر ماتریس‌های $A_۱,\dots,A_k \in M_{m\times n}(F)$ مستقل خطی باشند آنگاه $A_۱^t,\dots,A_k^t \in M_{n\times m}(F)$ نیز مستقل خطی اند.

۱۱. فرض کنید که A یک ماتریس پوچ‌توان $n \times n$ است. نشان دهید $A^n = ۰$.

۱۲. فرض کنید که A و B دو ماتریس $n \times n$ اند که $AB = B$. نشان دهید اگر A پوچ‌توان باشد آنگاه $B = ۰$.

۱۳. فرض کنید که A یک ماتریس پوچ‌توان باشد. نشان دهید $A - I$ وارون‌پذیر است.

۱۴. فرض کنید T عملگری است که برای آن داریم $rank\, T = rank\, T^۲$. نشان دهید $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{۰\}$.

---

۱۵. برای عملگر T روی فضای n بعدی نشان دهید $T^2 = T$ اگر و تنها اگر $rank\, T + rank\,(I-T) = n$. به صورت کلی‌تر فرض کنید T و U دو عملگر روی یک فضای n بعدی اند که $T+U$ وارون‌پذیر است. نشان دهید $UT = TU = 0$ اگر و تنها اگر $rank\, T + rank\, U = n$.

۱۶. نشان دهید

$$rank\, A + rank\, B - n \leq rank\, AB \leq \min\{rank\, A, rank\, B\}$$
$$rank\, AB + rank\, BC \leq rank\, ABC + rank\, B$$
$$rank\,(A+B) \leq rank\, A + rank\, B$$

۱۷. برای دو عملگر T و U نشان دهید $rank(T+U) = rank\, T + rank\, U$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} U = \{0\}$

۱۸. اگر $BA^t = 0$ یا $B^tA = 0$ آنگاه $rank(A+B) = rankA + rankB$

۱۹. اگر A دارای n ستون باشد و $AB = 0$ آنگاه $rankA + rankB \leq n$.

۲۰. فرض کنید J ماتریس $n \times n$ای است که همه درایه‌های آن برابر ۱ هستند. برای هر a رتبه ماتریس $J - aI$ را بدست آورید. آیا رتبه این ماتریس‌ها برای میدان‌های مختلف متفاوت است؟

۲۱. فرض کنید $a_1, \ldots, a_m$ و $b_1, \ldots, b_n$ اعدادی دلخواه در F باشند. رتبه ماتریس $A \in M_{m\times n}(F)$ را که برای آن داریم $A_{ij} = a_i b_j$ بدست آورید. اگر $m = n$ آیا جمع k تا از این ماتریس‌ها می‌تواند وارون‌پذیر باشد؟ نشان دهید که اگر $n \geq 3$ آنگاه ماتریس $[\sin(a_i + b_j)]_{n\times n}$ نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد.

۲۲. تمام ماتریس‌هایی را که رتبه آنها برابر یک است بیابید.

۲۳. فرض کنید T یک عملگر روی V و $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای این فضا باشد. نشان دهید که $[T]_\alpha^\alpha$ بالا مثلثی است اگر و تنها اگر برای هر i داشته باشیم $T(\langle v_1, \ldots, v_i\rangle) \subseteq \langle v_1, \ldots, v_i\rangle$.

۲۴. نشان دهید اگر A یک ماتریس وارون پذیر بالا مثلثی باشد آنگاه وارون آن نیز بالا مثلثی است.

۲۵. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. آیا فضای برداری تولید شده توسط $\{I, A, A^2, \ldots\}$ می‌تواند تمام ماتریس‌های $n \times n$ شود؟

۲۶. به روش زیر ثابت کنید که ماتریس‌های A و B وجود ندارند که $AB - BA = I$.

الف. فرض کنید $AB - BA = I$. نشان دهید برای هر n داریم $A^nB - BA^n = nA^{n-1}$.

ب. با فرض بالا نشان دهید که مجموعه $\{I, A, A^2, \ldots\}$ باید مستقل خطی باشد.

ج. با توجه به مسئله قبل نتیجه بگیرید که فرض اول $AB - BA = I$ نمی‌تواند برقرار باشد.

۲۷. نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$ مانند A، چند جمله‌ای ناصفر $p(x)$ وجود دارد که $p(A) = 0$. برای درجه p چه کرانی می‌توانید ارائه دهید.

۲۸. اگر T و U دو نگاشت وارون‌پذیر باشند و TU معنی داشته باشد آنگاه TU نیز وارون‌پذیر است و $(TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1}$.

۲۹. فرض کنید $T, U : V \to V$ دو عملگر روی V اند که TU وارون‌پذیر است. نشان دهید T و U نیز وارون‌پذیر اند.

۳۰. فرض کنید $T : V \to W$ و $U : W \to Z$ نگاشت‌هایی خطی اند و $UT : V \to Z$ نگاشتی وارون‌پذیر است. آیا U و T باید وارون‌پذیر باشند؟

۳۱. نشان دهید تنها عملگرهای خطی‌ای روی V که با همه عملگرهای خطی دیگر روی V جابجا می‌شوند مضارب عملگر همانی اند.

۳۲. فرض کنید $U : W \to Z$ نگاشتی خطی باشد. نشان دهید نگاشت $L_U : L(V,W) \to L(V,Z); \quad L_U(T) = UT$ خطی است.

۳۳. اگر $T : V \to V$ عملگری خطی باشد آنگاه نگاشت $\varphi_T : L(V) \to L(V); \quad \varphi_T(U) = T^{-1}UT$ نگاشتی خطی است که ساختار ضرب عملگرها را نیز حفظ می‌کند، یعنی $\varphi_T(U_1U_2) = \varphi_T(U_1)\varphi_T(U_2)$.

۳۴. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n$ اعداد مختلفی در میدان F اند. نشان دهید نگاشت $p(x) \mapsto (p(a_1), \ldots, p(a_n))$ یک یکسانی بین F^n و مجموعه چندجمله‌ای های با درجه کمتر از n روی F است. آیا نگاشت $p(x) \mapsto (p(a), p'(a), \ldots, p^{(n-1)}(a))$ نیز یک یکسانی بین این دو فضا است.

۳۵. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و $T : V \to V$، عملگری باشد که $\operatorname{Im} T = \ker T$. نشان دهید که $T^2 = 0$ و n عددی زوج است.

۳۶.فرض کنید V یک فضای فرد بعدی است و T و U دو عملگر روی آن اند که $T^2 = U^2 = I_V$. نشان دهید که یک زیر فضای یک بعدی یا دو بعدی وجود دارد که توسط هر دو نگاشت T و U به خودش نگاشته می‌شود (به عبارت دیگر تحت این دو نگاشت ناوردا است).

۳۷. فرض کنید برای هر i,j,s,t، A_{ij} و B_{st} ماتریس هایی هستند که حاصل‌ضرب‌های $A_{ik}B_{kj}$ معنی‌دار باشد. در این صورت

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mp} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

توجه کنید که در بالا ترتیب ضرب ماتریس‌ها باید به همین صورت باشد؛ زیرا ضرب ماتریس‌ها جابجایی نیست.

*۳۸. نشان دهید اگر $\dim V > 1$ آنگاه مجموعه همه عملگرهای خطی وارون‌پذیر روی V زیر فضایی از $L(V)$ نیست. فرض کنید W زیر فضایی از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ باشد که همه اعضای آن وارون‌پذیر اند. نشان دهید $\dim W \leq n$. آیا این موضوع برای میدان‌های دیگر نیز درست است؟

۳۹. فرض کنید $x \in F$ یک عدد ناصفر، A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید $AB - xI$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $BA - xI$ وارون‌پذیر باشد. راهنمایی: $(BA - xI)^{-1} = B(AB - xI)^{-1}A - xI$.

۴۰. نشان دهید برای هر n بزرگتر از یک ماتریس $n \times n$ای وجود دارد که مربع هیچ ماتریس دیگری نیست.

۴۱. فرض کنید $T \in L(V)$. اگر برای هر $v \in V$ بردارهای $v, T(v), \ldots, T^k(v)$ وابسته خطی باشند نشان دهید مجموعه $\{I, T, \ldots, T^k\}$ نیز وابسته خطی است و برعکس.

۴۲. نشان دهید هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت. آیا این نمایش یکتا است؟

۴۳. هر ماتریس مربعی مختلط برابر مجموع دو ماتریس وارون‌پذیر است.

۴۴. اگر A و B هر دو متقارن (یا پاد متقارن) باشند آیا AB نیز متقارن خواهد بود؟ نشان دهید $AB + BA$ متقارن و $AB - BA$ پاد متقارن است.

۴۵. اگر یکی از ماتریس‌های A و B متقارن و دیگری پاد متقارن باشد آیا AB پادمتقارن خواهد بود؟ نشان دهید $AB + BA$ پاد متقارن و $AB - BA$ متقارن است.

۴۶. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ اند و $A + \lambda B$ به ازای $n + 1$ مقدار متمایز λ ماتریسی پوچ‌توان است. نشان دهید A و B نیز باید پوچ‌توان باشند.

۴۷. نشان دهید برای هر n ماتریس حقیقی $n \times n$ای وجود دارد که برابر توان دوم هیچ ماتریسی نیست. آیا این مسئله برای ماتریس‌های مختلط هم درست است؟ برای یک میدان دلخواه چطور؟

تمرین ۴

۱. فرض کنید $\alpha = \{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایه برای V و $\alpha^* = \{v_1^*,\ldots,v_n^*\}$ دوگان آن باشد. دوگان پایه‌های زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \{v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n\} & \\ \{rv_1, v_2, \ldots, v_n\} & (r \neq 0) \\ \{v_1 + rv_2, v_2, \ldots, v_n\} & \\ \{t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, v_2, \ldots, v_n\} & (t_1 \neq 0) \\ \{a_1 v_1 + a_2 v_2, b_1 v_1 + b_2 v_2, v_3, \ldots, v_n\} & (a_1 b_2 \neq a_2 b_1) \end{array}$$

توجه کنید که شرط‌های داخل از این جهت لازم اند که مجموعه‌های معرفی شده پایه باشند.

۱. فرض کنید P^n فضای چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n است. نشان دهید که تابعک‌های زیر یک پایه برای فضای دوگان P^n هستند و دوگان این پایه را در P^n بدست آورید.

$$f_0, \ldots, f_{n-1} : P^n \to F; \quad f_i(p) = p^{(i)}(x_0)$$

(در بالا $p^{(i)}$ مستق iام چند جمله‌ای p است.)

۲. فرض کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایه برای V و $\{f_1,\ldots,f_n\}$ پایه‌ای برای V^* باشد. نشان دهید عملگرهای زیر یک پایه برای $L(V)$ تشکیل می‌دهند.

$$T_{ij} : V \to V; \quad T_{ij}(v) = f_i(v) v_j \qquad (i,j = 1,\ldots,n)$$

دوگان این پایه را نیز بدست آورید. نشان دهید تابعک‌های خطی زیر یک پایه برای $L(V)^*$ تشکیل می‌دهند.

$$g_{ij} : L(V) \to F; \quad g_{ij}(U) = f_i(U(v_j)) \qquad (i,j = 1,\ldots,n)$$

(راهنمایی: پایه‌ای برای $L(V)$ بیابید که دوگانش مجموعه بالا باشد.)

۳. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی وارون‌پذیر، α یک پایه برای V و $\beta = T(\alpha)$ باشد. نشان دهید $T^t(\beta^*) = \alpha^*$.

۴. تابع $tr : M_{n\times n}(F) \to F$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1. نشان دهید tr یک نگاشت خطی است.
2. یک پایه برای $\ker tr$ معرفی کنید.
3. فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times m$ اند. نشان دهید $tr(AB) = tr(BA)$. (توجه کنید که AB ماتریسی $m\times m$ و BA ماتریسی $n\times n$ است و بنابراین تابع tr در دوطرف تساوی متفاوت اند. اما مقدارشان برابر است.)
4. فرض کنید A و B و C سه ماتریس اند که ABC و ACB معنی دارند و مربعی اند. آیا لزوماً رابطه $tr(ABC) = tr(ACB)$ درست است؟
5. اگر $F = \mathbb{R}$ نشان دهید که برای هرماتریس A داریم $tr(AA^t) \geq 0$ و تساوی تنها برای ماتریس صفر اتفاق می‌افتد.
6. فرض کنید f یک تابعک خطی روی $M_{n\times n}(F)$ است که برای هر دو ماتریس $n\times n$ A و B داریم $f(AB) = f(BA)$. نشان دهید f مضربی از tr است.

---

۷. فرض کنید f یک تابعک خطی روی $M_{n\times n}(F)$ است که برای هر ماتریس $n\times n$ A و هر ماتریس وارون‌پذیر B داریم $f(B^{-1}AB)=f(A)$. نشان دهید f مضربی از tr است.

۸. برای هر ماتریس $A\in M_{n\times n}(F)$ تابع $f_A(X)=tr(AX)$ یک تابعک خطی روی $M_{n\times n}$ است.

۹. تابعی که به هر $A\in M_{n\times n}$ تابعک f_A را نسبت می‌دهد یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا از $M_{n\times n}$ به $M^*_{n\times n}$ است.

۱۰. نشان دهید نگاشت خطی بالا یک به یک است و نتیجه بگیرید که این نگاشت یکسانی است. به عبارت دیگر:

الف. فرض کنید $A\in M_{n\times n}$ به گونه‌ای است که برای هر $X\in M_{n\times n}$ داریم $tr(AX)=0$. نشان دهید $A=0$.

ب. برای هر نابعک خطی f روی $M_{n\times n}$ ماتریس $A\in M_{n\times n}$ یافت می‌شود که $f(X)=tr(AX)$.

۱۱. فرض کنید $A\in M_{n\times n}$ به گونه‌ای است که برای هر $X\in M_{n\times n}$ که $trX=0$ داریم $tr(AX)=0$. نشان دهید $A=cI$.

۱۲. فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای n بعدی V است. نشان دهید مقدار $tr([T]^\alpha_\alpha)$ برای هر پایه α ثابت است. این مقدار را با $tr(T)$ نمایش می‌دهیم.

۱۳. فرض کنید $\alpha=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه دلخواه برای V و $\alpha^*=\{v^*_1,\dots,v^*_n\}$ دوگان آن باشد. طبق تمرین (؟) می‌دانیم که عملگرهای خطی زیر یک پایه برای $L(V)$ تشکیل می‌دهند.

$$T_{ij}:V\to V;\quad T_{ij}(v)=v^*_i(v)v_j\qquad (i,j=1,\dots,n)$$

نشان دهید که تابعک خطی $\psi\in L(V)^*$ که با رابطه $\psi(T_{ij})=\delta_{ij}$ معرفی می‌شود مستقل از پایه α است و در واقع همان تابعک tr است که در بالا روی نگاشت‌های خطی معرفی شد. این نشان می‌دهد که tr یک تابعک طبیعی روی عملگرهای خطی است.

۱۴. کدام یک از ویژگی‌های ذکر شده در بالا برای تابعک tr روی ماتریس‌های مربعی بیان ویژگی‌ای از تابعک tr روی عملگرهای خطی است؟

۱۵. نشان دهید برای هر ماتریس A و عملگر T داریم $tr(A^t)=tr(A)$ و $tr(T^t)=tr(T)$.

۱۶. به کمک ویژگی‌های tr نشان دهید زمانی که $\mathrm{char}F\neq n$ عملگرهای T و U نمی‌توانند وجود داشته باشند که $TU-UT=I$. در گذشته تمرینی داشتیم که نشان می‌داد این گزاره برای همه میدان‌ها درست است.

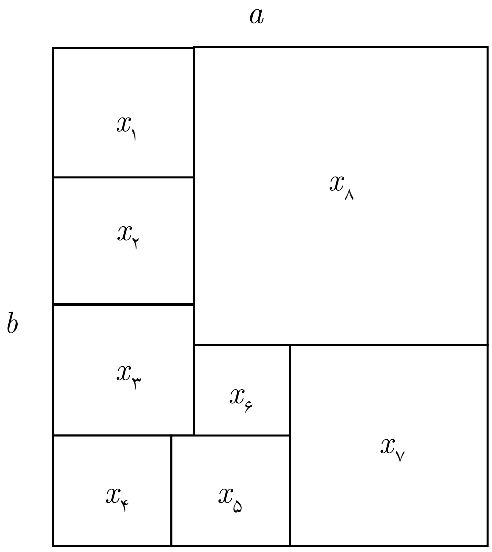
۱۷. اگر $rank\,A=1$ آنگاه $A^2=(trA)A$. بنابراین اگر $rank(BA-AB)=1$ آنگاه $(AB-BA)^2=0$.

۱۸. اگر A ماتریسی 2×2 باشد که $tr(A^2)=tr(A)=0$ آنگاه A پوچ‌توان است.

۵. فرض کنید $p_1,\dots,p_m$ چند جمله‌هایی با درجه کمتر از m روی میدان F باشند به گونه‌ای که $p_1(1)=\cdots=p_m(1)=0$. نشان دهید p_iها وابسته خطی اند. اگر این چند جمله‌ای‌ها در رابطه $p_1(1)=\cdots=p_m(1)=1$ صدق کنند آیا می‌توانند مستقل خطی باشند؟

تمرین ۵

۱. اگر مستطیل با اضلاع a و b به مربع‌هایی به ضلع $x_۱,\ldots,x_n$ افراز شده باشد آنگاه برای هر i داریم $\frac{x_i}{a},\frac{x_i}{b}\in\mathbb{Q}$. بنابراین این کار برای همه مستطیل‌ها امکان پذیر نیست. آیا شرط لازم و کافی برای امکان انجام این کار می‌توانید بیابید؟
(راهنمایی: از فضای برداری $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ استفاده کنید.)



۲. آیا ماتریس حقیقی زیر وارون‌پذیر است. اگر وارون‌پذیر است وارون آن را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس بالا را به عنوان ماتریسی با درایه‌های در $\mathbb{Z}_۳$ یا $\mathbb{Z}_۵$ در نظر بگیریم چطور؟

۳. ماتریس‌های ساده سطری هم‌ارز با ماتریس‌های داده شده زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ & ۵ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

۴. فرض کنید A یک ماتریس مربعی سه در سه باشد و $P=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. همچنین می‌دانیم که ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۲ & -۳ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ هم‌ارز سطری ماتریس $[A\mid P]$ است. $A^{-۱}$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید V فضای برداری تولید شده توسط سطرهای ماتریس زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲۱ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۱ & ۷ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۴ & ۰ & ۶ & ۱ \\ ۶ & ۴۲ & -۱ & ۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف. پایه‌ای برای V بیابید.

ب. کدام یک از بردارهای $(a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵)$ داخل V هستند.

پ. اگر بدانیم که بردار $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ در V قرار دارد نمایش آن در پایه‌ای که برای V در قسمت الف بدست آوردید چیست.
نشان دهید که دستگاه $AX = b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر ماتریس A با بعد فضای تولید شده توسط سطرهای ماتریس افزوده دستگاه برابر باشد.

۶. فرض کنید ماتریس‌های A و A' ساده سطری اند. اگر جواب‌های $AX = 0$ و $A'X = 0$ یکی باشند نشان دهید $A = A'$.

۷. فرض کنید که A ماتریسی $m \times n$ با رتبه r است. نشان دهید که ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q یافت می‌شوند که

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $p \times n$ است به گونه‌ای که برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ که $AX = 0$ داریم $BX = 0$. نشان دهید ماتریس C وجود دارد که $B = CA$.

۸. اگر ماتریس‌های $A_1, ..., A_k \in M_{m\times n}(F)$ مستقل خطی باشند آنگاه $A_1^t, ..., A_k^t \in M_{n\times m}(F)$ نیز مستقل خطی اند.

۹. اگر A ماتریسی بالا مثلثی باشد آنگاه ستون‌های آن مستقل خطی اند اگر و تنها اگر درایه‌های روی قطر آن ناصفر باشند.

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس $2k \times 2k$ باشد که همه درایه‌های روی قطر آن صفر و بقیه درایه‌های آن ± 1 اند. نشان دهید A به عنوان یک ماتریس حقیقی یا مختلط وارون‌پذیر است. آیا این موضوع برای میدان‌های دیگر نیز برقرار است؟

تمرین ۶

۱. آیا ماتریس حقیقی زیر وارون‌پذیر است. اگر وارون‌پذیر است وارون آن را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس بالا را به عنوان ماتریسی با درایه‌های در $\mathbb{Z}_۳$ یا $\mathbb{Z}_۵$ در نظر بگیریم چطور؟

۲. فرض کنید J ماتریس $n \times n$ای است که همه درایه‌های آن برابر ۱ است. برای هر اسکالر a دترمینان ماتریس $J - aI$ را بیابید. آیا مهم است که این ماتریس با درایه‌های در چه میدانی در نظر گرفته شده است؟ اگر مهم است این مسئله را زمانی که $F = \mathbb{R}$ و یا $F = \mathbb{Z}_p$ بررسی کنید.

۳. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(F)$ یک ماتریس پاد متقارن است($A^t = -A$) و $\mathrm{char} F \neq ۲$. نشان دهید اگر n فرد باشد آنگاه $\det A = ۰$. برای nهای زوج مثال نقض بزنید. مثال نقضی نیز برای زمانی که $\mathrm{char} F = ۲$ است بزنید.

۴. نشان دهید اگر به همه درایه‌های ماتریس پادمتقارن زوج‌تایی A عدد ثابتی اضافه شود دترمینان آن تغییری نمی‌کند. راهنمایی: تساوی زیر را ثابت کنید و از آن استفاده کنید.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & \cdots & ۱ \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس پادمتقارنی را به دست آورید که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر است.

۵. نشان دهید برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ داریم $\det \overline{A} = \overline{\det A}$. نشان دهید برای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ داریم $\det(A^۲ + I) \geq ۰$.

۶. منظور از یک زیر ماتریس A ماتریسی است که از حذف تعدادی سطر و ستون ماتریس A بدست می‌آید. نشان دهید اندازه بزرگ‌ترین زیر ماتریس وارون‌پذیر A برابر رتبه ماتریس A است.

۷. نشان دهید در صورتی که عبارت‌های زیر معنی داشته باشند درست هستند.

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D \end{bmatrix} = \det A . \det D$$

$$\det \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix} = \det E . \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C + EA & D + EB \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

۸. به همین صورت نشان دهید که اگر $A_۱, \ldots, A_k$ تعدادی ماتریس مربعی باشند آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} A_۱ & * & \cdots & * \\ ۰ & A_۲ & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_k \end{bmatrix} = \det A_۱ \det A_۲ \cdots \det A_k$$

---

۹. نشان دهید اگر در ماتریس زیر داشته باشیم $AC = CA$ آنگاه $\det M = \det(AD - CB)$.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

۱۰. (بسط دترمینان نسبت به چند سطر یا چند ستون) فرض کنید I و J دو زیر مجموعه از $\{۱,\dots,n\}$ اند. منظور از $A^{I;J}$ زیر ماتریس حاصل از حذف سطرهای با اندیس در I^c و ستون‌های با اندیس در J^c است. (اگر یک از این دو مجموعه تهی باشند ماتریس حاصل را تهی می‌نامیم و دترمینان آن را نیز برابر ۱ قرار می‌دهیم!). نشان دهید برای هر $I \subset \{۱,\dots,n\}$

$$\det A = \sum_{\substack{J \subset \{۱,\dots,n\} \\ |J|=|I|}} \varepsilon_{I;J} \det A^{I;J} \det A^{I^c;J^c}$$

که در آن $\varepsilon_{I,J} = \pm ۱$. علامت $\varepsilon_{I,J}$ را بر حسب مجموعه‌های I و J بدست آورید. با توجه به این رابطه، رابطه‌ای برای $\det(A+B)$ بیابید.

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشند. نشان دهید اگر $n < m$ آنگاه $\det AB = ۰$ و اگر $m \geq n$ آنگاه

$$\det AB = \sum_{\substack{I \subset \{۱,\dots,m\} \\ |I|=n}} \det A^{*;I} \det B^{I;*}$$

که در آن منظور از $A^{*;I}$ زیر ماتریس A با ستون‌های در مجموعه I و منظور از $B^{I;*}$ زیر ماتریس B با سطرهای در مجموعه I است.

۱۲. نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & x_n & x_۱^۲ & \cdots & x_n^{n-۱} \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & a_{n-۲} \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & a_{n-۱} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = (-۱)^n (\lambda^n - a_{n-۱}\lambda^{n-۱} - \cdots - a_۱\lambda - a_۰)$$

۱۳. نشان دهید اگر میدان F نامتناهی باشد آنگاه ماتریس $\infty \times \infty$ای وجود دارد که هر زیر ماتریس مربعی آن وارون‌پذیر است.

۱۴. دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

۱۵. فرض کنید $rank A = ۱$. نشان دهید $\det(A+I) = ۱ + tr(A)$.

۱۶. فرض کنید $B_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. نشان دهید $\det B = \det A$.

۱۷.

تمرین ۷

تمرین ۸

۱. دو ماتریس A و B مثال بزنید که AB با BA متشابه نباشد. آیا چند جمله‌ای مشخصه AB و BA همیشه برابرند؟

۲. فرض کنید A یک ماتریس قطری شونده با چند جمله‌ای مشخصه زیر باشد. نشانه دهید ماتریس‌هایی که با A جابجا می‌شوند یک فضای برداری با بعد $d_1^2 + \cdots + d_k^2$ تشکیل می‌دهند.

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_k)^{d_k}$$

۳. فرض کنید میدان $\tilde{F}$ توسیعی از میدان F است و A و B دو ماتریس با درایه‌های در F اند. اگر A و B در $\tilde{F}$ متشابه باشند آنگاه در F نیز متشابه اند؛ یعنی اگر ماتریس وارون‌پذیر P با درایه‌های در $\tilde{F}$ وجود داشته باشد که $B = P^{-1}AP$ آنگاه ماتریس وارون‌پذیر با درایه‌های در F نیز با این ویژگی وجود دارد. (راهنمایی: یک پایه برای $\tilde{F}$ به عنوان فضای برداری روی F در نظر بگیرید و P را به نوعی در آن پایه نمایش دهید و از رابطه $PB = AP$ استفاده کنید.)

۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را برای حالت‌هایی که میدان $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ و $\mathbb{Z}_p$ است بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵. فرض کنید که دو ماتریس $n \times n$ دارای چند جمله‌ای‌های مشخصه و مینمال یکسان اند. نشان دهید که اگر $n \leq 3$ این دو ماتریس متشابه اند و اگر $n > 3$ ممکن است که متشابه نباشند.

۶. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که دارای n مقدار ویژه متمایز است و ماتریس B با A جابجا می‌شود. نشان دهید B یک چند جمله‌ای برحسب A است.

۷. نشان دهید برای هر $n > 1$ ماتریس $n \times n$ای وجود دارد که مربع ماتریس دیگری نیست. (آیا در این مسئله مهم است که ماتریس در چه میدانی درنظر گرفته می‌شود؟) آیا هر ماتریس وارون پذیر مربع یک ماتریس دیگر است؟ آیا در این مسئله میدان مهم است؟

۸. در هر یک از حالت‌های زیر ماتریس B را پیدا کنید و بررسی کنید که آیا جواب یکتا است؟

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B^4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۹. نشان دهید یک ماتریس 2×2 قطری نمی‌شود اگر و تنها اگر متشابه با ماتریس زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید مقادیر ویژه دو ماتریس AB و BA بجز احتمالاً صفر برابر هستند. اگر این دو ماتریس دارای فرم ژردان باشند آیا بین این دو فرم رابطه خوبی برقرار است؟

۱۱. در تمرین قبل نشان دهید اگر یکی از A یا B وارون‌پذیر باشند آنگاه AB و BA متشابه خواهند بود.

۱۲. فرض کنید چند جمله‌ای مشخصه A شکافته شود و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه (نه لزوماً متمایز) آن باشند.

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

نشان دهید

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n a_0 \quad tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -a_{n-1}$$

همچنین نشان دهید رابطه‌های $\det A = (-1)^n a_0$ و $tr(A) = -a_{n-1}$ برای هر ماتریسی (و هر عملگری) برقرار است.

۱۳. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ اند که برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $tr(A^i) = tr(B^i)$. نشان دهید چند جمله‌ای مشخصه A و B برابر اند.

۱۴. فرض کنید A یک ماتریس مختلط 2×2 باشد که $A^2 + I = 0$. نشان دهید A متشابه ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۵. عملگرهایی مانند T که تنها با $p(T)$ها جابجا می‌شوند کدامند؟

۱۶. نشان دهید چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه ماتریس‌های زیر (صرف نظر از یک ضریب ± 1) با هم برابر اند.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

آیا عملگرهایی که نمایشی به صورت بالا دارند می‌توانند دارای زیرفضای ناوردای غیر بدیهی باشند؟

۱۷. در بالا نشان دهید که دو ماتریس اول همیشه با هم متشابه اند. همچنین نشان دهید ماتریس اول با ماتریسی به شکل ماتریس سوم متشابه است و در این حالت مقادیر $a_0, \ldots, a_{n-1}$ را بدست آورید. آیا همیشه ماتریس سوم و ماتریس چهارم با هم متشابه اند؟

۱۸. فرض کنید چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه عملگر T (صرف نظر از یک ضریب ± 1) با هم برابر اند و هر دو توانی از یک عامل اول اند. نشان دهید T نمی‌تواند زیرفضای ناوردای غیر بدیهی داشته باشد. در مورد عملگرهایی که چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه برابر دارند (صرف نظر از یک ضریب ± 1) چه می‌توان گفت؟

۱۹. قضیه تجزیه دوری. معمولاً به کوچک‌ترین زیر فضای T-ناوردای شامل بردار v زیر فضای T-دوری تولید شده توسط v می‌گوییم و آن را با $\langle\langle v \rangle\rangle_T$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\langle\langle v \rangle\rangle_T = \langle v, T(v), T^2(v), \ldots \rangle$. در این تمرین طی چند مرحله نشان می‌دهیم که برای یک عملگر دلخواه T تجزیه $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ وجود دارد که در آن W_iها زیر فضاهای T-دوری اند. بعضی از مراحل زیر برای اثبات قضیه تجزیه دوری لازم نیستند اما به خاطر ارتباطشان با موضوع مطرح شده اند.

الف. (مطالعه زیرفضاهای T-دوری) فرض کنید $T: V \to V$ یک عملگر و $v \in V$ است.

۱. فرض کنید W یک زیر فضای T-ناوردا است. نشان دهید چند جمله‌ای مینیمال و مشخصه عملگر T_W برابر اند اگر و تنها اگر W یک زیرفضای T-دوری باشد. در این حالت بعد W برابر درجه چند جمله‌ای منیمال خواهد بود.

۲. فرض کنید $W = \langle\langle v \rangle\rangle_T$ و چند جمله‌ای مینیمال T_W برابر است با $m_{T_W}(x)$. همچنین فرض کنید $Q(x)$ یک چند جمله‌ای داخواهی است و $q(x)$ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $m_{T_W}(x)$ و $Q(x)$ است. نشان دهید

$$Z := \langle\langle Q(T)(v) \rangle\rangle_T = \langle\langle q(T)(v) \rangle\rangle_T$$
$$m_{T_Z} = \frac{m_{T_W}}{q}, \quad \dim Z = \deg m_{T_W}(x) - \deg q(x)$$
$$W \cap \ker(Q(T)) = \langle\langle m_{T_Z}(T)(v) \rangle\rangle_T$$

۳. نشان دهید زیرفضای T-دوری W برابر جمع مستقیم زیرفضاهای T-دوری کوچک‌تر است اگر و تنها اگر m_{T_W} دارای عوامل اول متمایز باشد.

ب. فرض کنید چند جمله‌ای مینیمال عملگر $T : V \to V$ به شکل $m_T(x) = p(x)$ باشد که در آن p اول است:

۴. فرض کنید $W_1,\dots,W_k$ تعدادی زیر فضای T-دوری مستقل خطی در V باشند. نشان دهید که اگر $v \notin W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ آنگاه اشتراک زیر فضای T-دوری تولید شده توسط v با $W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ برابر صفر است.

۵. نشان دهید V برابر جمع مستقیم تعدادی زیر فضای T-دوری است.

۶. نشان دهید بعد هر زیر فضای T-دوری در V برابر است با $\deg p$ و بعد V نیز مضربی از آن است.

ب. فرض کنید چند جمله‌ای مینیمال عملگر $T : V \to V$ به شکل $m_T(x) = p(x)^b$ باشد که در آن p اول است:

۷. نشان دهید $\ker p(T)$ زیر فضای T ناوردا است و $m_{T_{\ker p(T)}}(x) = p(x)$.

۸. نشان دهید زیر فضاهای T-دوری $W_1,\dots,W_k$ در V مستقل خطی اند اگر و تنها اگر اشتراک آنها با $\ker p(T)$ زیر فضاهایی مستقل خطی باشد.

۹. نشان دهید برای هر بردار $v \in V$ داریم $\dim\langle\langle p(T)(v)\rangle\rangle_T + \deg p = \dim\langle\langle v\rangle\rangle_T$

۱۰. ثابت کنید V برابر جمع مستقیم زیر فضاهای T- دوری است (می‌توانید با استقرا روی b این موضوع را ثابت کنید. ایده‌های اثبات این نکته کاملاً شبیه ایده‌هایی است که برای نمایش یک عملکر پوچ‌توان استفاده می‌کردیم. در واقع $S = p(T)$ یک عملگر پوچ‌توان است).

۱۱. نشان دهید بعد هر زیر فضای T ناوردا مضربی از $\deg p$ است.

ج. قضیه تجزیه دوری را برای یک عملگر دلخواه ثابت کنید.

۲۰. عملگر T به گونه‌ای است که هر زیر فضای $\dim V - 1$ بعدی V توسط آن ناوردا است. نشان دهید این عملگر مضربی از عملگر همانی است.

۲۱. فرض کنید $m_T(x) = p(x)q(x)$ که در آن p و q نسبت به هم اول اند. نشان دهید $\operatorname{Im} p(T) = \ker q(T)$.

۲۲. در این تمرین رابطه عملگر خطی $T : V \to V$ با ترانهاده آن بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱. نشان دهید چند جمله‌ای‌های مشخصه و مینیمال عملگرهای T و T^t برابر اند.

۲. نشان دهید اگر W یک زیر فضای T ناوردا باشد آنگاه W^0 یک زیر فضای T^t ناوردا است.

۳. اگر $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ تجزیه‌ای به زیر فضاهای T ناوردا باشد آنگاه $V^* = \tilde{W}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{W}_k$ تجزیه‌ای به زیر فضاهای T^t ناوردا است که در آن $\tilde{W}_i = (W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i-1} \oplus W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k)^0$. نشان دهید در این تجزیه چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه عملگرهای T_{W_i} و ${T^t}_{\tilde{W}_i}$ برابر اند.

۴. نشان دهید اگر T دارای فرم ژردان باشد آنگاه T^t هم دارای فرم ژردان است و فرم‌های ژردان این دو عملگر یکسان اند.

۵. نشان دهید هر ماتریس مربعی با ترانهاده خود متشابه است. (می‌توانید از قضیه تجزیه دروی (تمرین ؟) استفاده کنید یا از توسیع شکافنده چند جمله‌ای‌ها مشخصه این دو عملگر بهره ببرید (تمرین ؟))

۲۳. نشان دهید اگر عملگر T دارای زیرفضای تاوردای k بعدی باشد آنگاه دارای یک زیر فضای ناوردای $n-k$ بعدی نیز است.

---

۴۷. فرض کنید $f: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ یک تابع وارون‌پذیر باشد که برای هر $A, B \in M_{n\times n}$ داریم $f(AB) = f(A)f(B)$. نشان دهید ماتریس وارون‌پذیر P یافت می‌شود که $f(A) = P^{-1}AP$.

اثبات پاراسولوف از $f(xI) = xI$ استفاده می‌کند که واضح نیست مگر اینکه f خطی باشد. که در این صورت اثبات بسیار ساده تری هم وجود دارد.

دو ماتریس که در یک میدان بزرگتر متشابه اند در میدان کوچکتر هم متشابه اند ولی اثبات راهنمایی تنها برای میدان های متناهی کار می‌کند.
دو ماتریس متشابه اند اگر و تنها اگر برای هر چند جمله‌ای p رتبه های $p(A)$ و $p(B)$ برابر باشند. (با کمک دید عملگری و تجزیه به زیر فضاهای ناوردا این موضوع براحتی بدست می‌آید)
نکته: عملگرهای $T_1, ..., T_k$ یک تجزیه برای V ارائه می‌دهند اگر و تنها اگر

۱. $T_1 + ... + T_k = I$
۲. $\operatorname{Im} T_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} T_k = V$

ماتریسهای $P_1, ..., P_k$ وجود دارند که چند جمله‌ای $\det(t_1P_1 + \cdots + t_kP_k)$ چند جمله‌ای ناصفری باشد ولی همه مقادیر آن صفر باشند!!!
برای مثال روی $\mathbb{Z}_2$ ماتریس های زیر کار می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} I_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_3} \end{bmatrix}$$

مسائل متفرقه

۱. $T : V \to V$ یک عملگر نرمال است. نشان دهید

$$\ker T^k = \ker T \quad \operatorname{Im} T^k = \operatorname{Im} T$$

راهنمایی: توجه کنید که اگر W یک زیرفضای ناوردا برای T باشد آنگاه $W^{\perp}$ نیز چنین است. کافی است قرار دهیم $W = \ker T$.

۲. فرض کنید در ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ داریم

a. برای هر $1 \le i \le n$، $a_{ii} > 0$.

b. اگر $i \neq j$ آنگاه $a_{ij} \le 0$.

c. برای هر $1 \le j \le n$، $a_{1j} + \cdots + a_{nj} > 0$.

نشان دهید $\det A > 0$.

راهنمایی: استفاده از اعمال سطری مقدماتی.

۳. نشان دهید $\left|\det[x_1 \mid \cdots \mid x_n]\right| \le |x_1| \cdots |x_1|$. (با نرم استاندارد)

۴. اگر A و B ماتریس‌هایی یکانی $n \times n$ باشند آنگاه $|\det(A+B)| \le 2^n$.

۵. قضیه تنون و نورتون در مدارهای الکتریکی. در یک مدار خطی با منابع DC یا AC (که ظاهراً لازم نیست با فرکانس یکسان باشند!) برای هر دو نقطه از این مدار می‌توان یک منبع و یک امپدانس جایگزین کرد که رفتار مشاهد شده در دو مدار هیچ تفاوتی نداشته باشند.

۶. تبدیل فوریه و ویولت‌ها

۷. زنجیر مارکوف

۸. معادلات دیفرانسیل و کنترل

۹. رمزنگاری (کودکانه است!)

۱۰. فشرده سازی تصویر (به کمک قضیه تجزیه تکین و یا ....) — پردازش تصویر به کمک قضیه تجزیه تکین.

۱۱. متامد سازی گرام اشمیت. هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک ماتریس یکانی و یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) نوشت. ترتیب این دو ماتریس نیز می‌توانند دالخواه باشند.

۱۲. اگر $AB + A + B = 0$ آنگاه $AB = BA$.

۱۳. $rank(I - AB) \le rank(I - A) + rank(I - N)$

ز روی کنجکاوی،توی google,search کردم تا ببینم کاربردهای جبر خطی واقعا چیه،چون هم سر کلاس شنیدیم که توی عکسبرداری به کار میره (که توی سایت هم مطالب ارزشمندی پست شده)،به چیزهای جالبی رسیدم،گفتم شاید به درد بخوره،مخصوصاً ۲ لینک آخری توجه خودمو که خیلی جلب کرد:!

www.siam.org/meetings/la۰۳/proceedings/narayanan.pdf

www.math.jmu.edu/~walton/JMM۰۸/JMM۰۸_PDF.pdf

www.math.uic.edu/~friedlan/booknfadv۲۲Aug۰۹.pdf

SVDیکی از روش های مهم در پردازش تصویر است که در آن از جبر خطی استفاده می شود. من این PDF را در این مورد داشتم که در اینجا قرار دادم:

la/sites/math-circle.ir.la/files/u۹۴/image٪۲۰processing٪۲۰for٪۲۰linear٪۲۰algebra.pdf

شفاهی

http://www.pragmaware.net/articles/matrices/index.php
http://www.math.ucdavis.edu/~daddel/linear_algebra_appl/Applications/applications.html
http://aix۱.uottawa.ca/~jkhoury/app.htm

latex

link

http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?mode=attach&id=۱۴۲۶۲

http://noodle.med.yale.edu/latex/essential.pdf

toolkit

http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi
