بسمه تعالی

**پاسخ تمرین تحویلی ششم ــ درس ریاضی‌نویسی ــ دانشگاه صنعتی شریف**

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

# پرسش

۱۳۹۶ آب‌نبات قرمز و ۲۰۱۷ آب‌نبات آبی داریم، دو رویکرد داریم:

۱. یک آب‌نبات از کیسه درآورده و می‌خوریم و به ۲ می‌رویم.

۲. یک آب‌نبات از کیسه در می‌آوریم.

- اگر همرنگ قبلی بود می‌خوریم و دوباره رویکرد ۲ را اجرا می‌کنیم.
- اگر همرنگ قبلی نبود، به کیسه برمی‌گردانیم و رویکرد ۱ را اجرا می‌کنیم.

در اولین گام رویکرد ۱ را اجرا کرده و تا زمانی که شکلاتی مانده‌است ادامه می‌دهیم. احتمال اینکه آخرین شکلات خورده شده قرمز باشد چقدر است؟

# پاسخ

به جای ارائه‌ی احتمال برای ۱۳۹۶ و ۲۰۱۷ برای $n$ شکلات آبی و $m$ شکلات قرمز که $n, m \geq 1$ اند مسئله را حل می‌کنیم.
همچنین گاها به جای آب‌نبات از واژه‌های شکلات یا مهره استفاده شده که منظور همان آب‌نبات است!
توابع $f, r, b$ را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم:

- $f(n, m)$ احتمال اینکه با $n$ شکلات آبی و $m$ شکلات قرمز رویکرد ۱ را اجرا کرده و آخرین شکلات خورده شده قرمز شود.
- $r(n, m)$ احتمال اینکه در حالتی با $n$ شکلات آبی و $m$ شکلات قرمز رویکرد ۲ را اجرا کنیم و فرضمان بر این باشد که شکلات قبلی قرمز بود و آخرین شکلات خورده شده قرمز شود.
- $b(n, m)$ احتمال اینکه در حالتی با $n$ شکلات آبی و $m$ شکلات قرمز رویکرد ۲ را اجرا کنیم و فرضمان بر این باشد که شکلات قبلی آبی بود و آخرین شکلات خورده شده قرمز شود.

با توجه به تعاریف داده شده می‌توان برای $f$ روابط زیر را گفت:

$$f(n, 0) = 0, (n \neq 0)$$

$$f(0, n) = 1, (n \neq 0)$$

$$f(n, m) = \frac{n}{n+m} b(n-1, m) + \frac{m}{n+m} g(n, m-1), (n, m > 0)$$

که رابطه‌ی اول در حالتی است که هیچ قرمزی نداریم و بدیهتا جواب ۰ است، حالت دوم حالتی است که فقط قرمز داریم و بدیهتا جواب ۱ است و حالت سوم حالتی است که هم قرمز و هم آبی داریم، اگر اولین برداشتنمان آبی باشد به احتمال $\frac{n}{n+m}$ آبی را برداشته ایم و احتمال اینکه آخرین آب‌نبات در ادامه‌ی مسیر

قرمز شود برابر با $b(n-1,m)$ است پس احتمال این حالت برابر با $\frac{n}{n+m}b(n-1,m)$ است. به طور مشابه مقدار $\frac{m}{n+m}g(n,m-1)$ برای اولین شکلات قرمز برداشتن نیز به دست می‌آید.
همچنین تابع $r$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(n,0)=0,(n\neq 0)$$

$$r(0,n)=1,(n\neq 0)$$

$$r(n,m)=\frac{n}{n+m}f(n,m)+\frac{m}{n+m}r(n,m-1),(n,m>0)$$

که دو پایه برای حالتی که هیچ آبی‌ای یا هیچ قرمزی نداریم اند و حالت سوم دو حالت داریم، یا مهره‌ای آبی بر می‌دارد که در این صورت مهره را برگردانده و به رویکرد یک می‌رود که احتمال آن برابر با $\frac{n}{n+m}f(n,m)$ و یا مهره‌ای قرمز برداشته که آن‌را می‌خورد و باز به رویکرد ۲ می‌شود که در این صورت احتمال آن برابر با $\frac{m}{n+m}r(n,m-1)$ است که چون «یا» است پس احتمال برابر با مجموع این دو احتمال است.
به طریق مشابه برای تابع $b$ داریم:

$$b(n,0)=0,(n\neq 0)$$

$$b(0,n)=1,(n\neq 0)$$

$$b(n,m)=\frac{m}{n+m}f(n,m)+\frac{n}{n+m}b(n-1,m),(n,m>0)$$

ابتدا با توجه به فرمول‌های به‌دست آمده می‌توانیم برای $n,m\leq 2$ مقادیر $f,r,b$ را محاسبه کنیم که به شرح زیر است:

$$f(0,1)=f(0,2)=1$$

$$f(1,0)=f(1,0)=0$$

$$f(1,1)=f(1,2)=f(2,1)=\frac{1}{2}$$

$$r(0,1)=r(0,2)=1$$

$$r(1,0)=r(1,0)=0$$

$$r(1,1)=\frac{1}{4},r(2,1)=\frac{2}{6}$$

$$r(1,2)=\frac{2}{6},r(2,2)=\frac{5}{12}$$

$$b(0,1)=b(0,2)=1$$

$$b(1,0)=b(1,0)=0$$

$$b(1,1)=\frac{3}{4},b(2,1)=\frac{4}{6}$$

$$b(1,2)=\frac{4}{6},b(2,2)=\frac{7}{12}$$

حال به حل سوال می‌پردازیم:

**لم ۱:** $b(n,m)=1-r(m,n)$

برای اثبات به تعریف $r$ و $b$ بر می‌گردیم، در تعریف $b$ گفتیم فرض ما این است که قبلا یک مهره که تعداد آنها پارامتر اول است خورده بودیم و حال می‌خواهیم احتمال اینکه آخرین مهره هم از نوع پارامتر دوم شود حساب کنیم، این احتمال برابر با ۱ منهای احتمال اینکه آخرین مهره از نوع پارامتر اول شود است، حال اگر قرمز و آبی را جابه جا ببینیم و تعداد آنها را نیز جا به جا کنیم، جواب هیچ تغییری نمی‌کند ولی احتمال برابر با ۱ منهای احتمال اینکه قبلا مهره از پارامتر دوم با تعداد پارامتر اول قدیم خورده بودیم و آخرین مهره پارامتر دوم شود است که این به معنی عبارت بالاست. پس لم ثابت شد.

**حل مسئله**

پس طبق لم برای $n,m>0$ داریم:

$$f(n,m)=\frac{n}{n+m}(1-r(m,n-1))+\frac{m}{n+m}r(n,m-1)$$

حال با استقرا بر روی $n+m$ ثابت می‌کنیم برای هر $n,m$ طبیعی ($n,m>0$) دو حکم زیر را داریم:

$$f(n,m)=\frac{1}{2}$$

$$r(n,m)=\frac{\binom{n+m}{m}-1}{2\times\binom{n+m}{m}}$$

که با ساده‌سازی $r(n,m)$ به عبارت زیر می‌رسیم:

$$r(n,m)=\frac{(n+m)!-n!m!}{2\times(n+m)!}$$

**پایه‌ی استقرا:** حکم برای $n+m=2$ برای $r(1,1)$ و $f(1,1)$ طبق محاسبات صفحه‌ی دوم درست است.
**فرض استقرا:** برای همه‌ی $n+m<k$ ها برابری‌های زیر صدق می‌کنند:

$$f(n,m)=\frac{1}{2}$$

$$r(n,m)=\frac{\binom{n+m}{m}-1}{2\times\binom{n+m}{m}}$$

**حکم استقرا:** حال باید ثابت کنیم با توجه به فرض استقرا حکم بالا برای $n+m=k$ نیز برقرار است.
برای این‌کار حالت بندی زیر را انجام می‌دهیم:

۱. **اگر $n=1$ باشد:**
در این صورت

$$f(1,m)=\frac{1}{1+m}(1-r(m,0))+\frac{m}{1+m}r(1,m-1)$$

حال طبق فرض استقرا و مقداردهی پایه‌ی $r$:

$$\rightarrow f(1,m)=\frac{1}{1+m}+\frac{m}{1+m}\times\frac{(m)!-(m-1)!}{2\times m!}$$

با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\to f(1,m) = \frac{2\times m! + m\times (m! - (m-1)!)}{2\times (m+1)!}$$

$$\to f(1,m) = \frac{2\times m! + m\times m! - m!}{2\times (m+1)!}$$

با فاکتورگیری از $m!$ داریم:

$$\to f(1,m) = \frac{m!(2+m-1)}{2\times (m+1)!}$$

$$\to f(1,m) = \frac{(m+1)!}{2\times (m+1)!}$$

که این برابر است با

$$\to f(1,m) = \frac{1}{2}$$

که $f$ به‌درستی حساب شد و به سراغ $r$ می‌رویم:

$$r(1,m) = \frac{1}{1+m} f(1,m) + \frac{m}{1+m} r(1,m-1)$$

که طبق اثبات بالا و فرض استقرا داریم:

$$\to r(1,m) = \frac{m! + m\times m! - m\times (m-1)!}{2\times (1+m)\times m!}$$

$$\to r(1,m) = \frac{m! + m!\times (m-1)}{2\times (m+1)!}$$

با اضافه و کم کردن $m!$ در صورت داریم:

$$\to r(1,m) = \frac{m! + m!\times (m-1) + m! - m!}{2\times (m+1)!}$$

پس با فاکتور گیری $m!$های مثبت در صورت داریم:

$$\to r(1,m) = \frac{(m+1)! - m!}{2\times (m+1)!}$$

که حکم برای $r$ نیز ثابت شد.

۲. **اگر $m=1$ باشد.** پس داریم:

$$f(n,1) = \frac{n}{n+1}(1 - r(1,n-1)) + \frac{1}{n+1} r(n,0)$$

که طبق پایه‌ی $r$ و فرض استقرا داریم:

$$\to f(n,1) = \frac{n\times 2\times n! - n\times (n! - (n-1)!)}{(n+1)\times 2\times n!}$$

$$\rightarrow f(n,1) = \frac{n \times 2 \times n! - n! \times (n-1)}{2 \times (n+1)!}$$

$$\rightarrow f(n,1) = \frac{n! \times (2 \times n - n + 1)}{2 \times (n+1)!} = \frac{(n+1)!}{2(n+1)!}$$

$$\rightarrow f(n,1) = \frac{1}{2}$$

که حکم برای $f$ ثابت شد. حال به سراغ $r$ می‌رویم، طبق تعریف داریم:

$$r(n,1) = \frac{n}{n+1} f(n,1) + \frac{1}{n+1} r(n,0)$$

که طبق پایه و حکم بالا داریم:

$$\rightarrow r(n,1) = \frac{n}{2 \times (n+1)} (*)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{(n+1)! - n!}{2 \times (n+1)!} = \frac{n!(n+1-1)}{2 \times (n+1)!} = \frac{n}{2 \times (n+1)} = r(n,1)$$

که حکم برای $r$ نیز ثابت شد.

۳. **اگر** $n, m > 1$ **باشند:**

در این صورت برای $f$ داریم:

$$f(n,m) = \frac{n}{n+m}(1 - r(m, n-1)) + \frac{m}{n+m} r(n, m-1)$$

طبق فرض استقرا برای $r$ داریم:

$$\rightarrow f(n,m) = \frac{n}{n+m}(1 - \frac{(n+m-1)! - (n-1)!m!}{2 \times (n+m-1)!}) + \frac{m}{n+m} \frac{(n+m-1)! - n!(m-1)!}{2 \times (n+m-1)!}$$

با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\rightarrow f(n,m) = \frac{n \times 2 \times (n+m-1)! - n \times (n+m-1)! + n!m! + m \times (n+m-1)! - n!m!}{(n+m) \times 2 \times (n+m-1)!}$$

$$\rightarrow f(n,m) = \frac{n \times 2 \times (n+m-1)! - n \times (n+m-1)! + m \times (n+m-1)!}{2 \times (n+m)!}$$

با فاکتورگیری از $(n+m-1)!$ در صورت داریم:

$$\rightarrow f(n,m) = \frac{(n+m-1)! \times (2n - n + m)}{2 \times (n+m)!} = \frac{(n+m-1)! \times (n+m)}{2 \times (n+m)!} = \frac{(n+m)!}{2 \times (n+m)!}$$

پس

$$f(n,m) = \frac{1}{2}$$

حال برای $r$ داریم:

$$r(n,m) = \frac{n}{n+m}f(n,m) + \frac{m}{n+m}r(n,m-1)$$

طبق اثبات بالا و فرض استقرا داریم:

$$\rightarrow r(n,m) = \frac{n}{n+m} \times \frac{1}{2} + \frac{m}{n+m}\frac{(n+m-1)! - n!(m-1)!}{2(n+m-1)!}$$

حال با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\rightarrow r(n,m) = \frac{n \times (n+m-1)! + m \times (n+m-1)! - n!m!}{2 \times (n+m)!}$$

حال با فاکتورگیری از $(n+m-1)!$ داریم:

$$\rightarrow r(n,m) = \frac{(n+m-1)! \times (n+m) - n!m!}{2 \times (n+m)!}$$

$$\rightarrow r(n,m) = \frac{(n+m)! - n!m!}{2 \times (n+m)!}$$

و حکم برای $r$ در این حالت نیز ثابت شد.

پس حکم استقرا برای هر ۳ حالت ثابت شد و حکم ثابت شد. پس $f(n,m) = \frac{1}{2}(n,m > 0)$ پس برای $n = 2017, m = 1396$ نیز حکم برقرار است و $f(2017,1396) = 0.5$ پس احتمال قرمز آمدن در آخرین مرحله برابر با $\frac{1}{2}$ است.