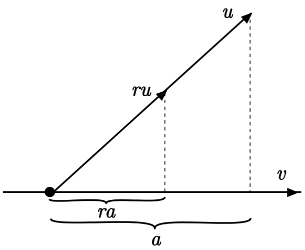
۱. ضرب داخلی

مقدمه

طول و زاویه

در این بخش می‌خواهیم مفاهیم ابتدایی هندسه معمولی مانند طول و زاویه را که در صفحه و فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ با آنها آشنا هستیم برای فضاهای برداری تعمیم دهیم. برای این کار لازم است ارتباط این مفاهیم را با ساختار جبری صفحه و فضا بررسی کنیم.
با توجه به هندسه روی صفحه و فضا، طول یک بردار و زاویه بین دو بردار معنی دار است. اگر چه طول بردارها چندان رابطه مناسبی با ساختار جبری صفحه و فضا ندارد، طول جهت دار تصویر عمودی بردارها روی یک خط جهت دار یک نگاشت خطی است.



اگر این خط جهت دار با بردار v معرفی شود و زاویه بین u و v برابر θ باشد آنگاه طول جهت دار تصویر عمودی u روی این خط برابر است با $|u|\cos\theta$.
بنابراین تابع $f(u,v) = |u|\cos\theta$ که به دو بردار u و v طول جهت دار تصویر u روی خط تولید شده با v را نسبت می‌دهد یک نگاشتی است که نسبت به u خطی است و به طول u و زاویه بین u و v ارتباط دارد. این نگاشت نسبت به v خطی نیست اما با تغییر اندکی می‌توانیم تابعی به دست آوریم که نسبت به بردارهای u و v متقارن باشد. تابع

$$f(u,v) = |u||v|\cos\theta$$

نسبت به بردارهای u و v متقارن است و طبق مطالب بالا نسبت به u خطی است. بنابراین نسبت به v هم خطی است.
با داشتن مقادیر این تابع روی بردارها می‌توانیم طول بردارها و زاویه بین آنها را با روابط زیر بدست آوریم.

$$|u|^۲ = f(u,u), \qquad \theta = \mathrm{ArcCos}\frac{f(u,v)}{|u||v|} = \mathrm{ArcCos}\frac{f(v,u)}{|u||v|} \qquad (*)$$

مثال. فرض کنید $f(u,u) = ۱$ و $f(v,v) = ۴$ و $f(u,v) = f(v,u) = ۱$. در این صورت داریم

$$|u| = \sqrt{f(u,u)} = ۱, \quad |v| = \sqrt{f(v,v)} = ۲, \quad \theta = \mathrm{ArcCos}\frac{f(u,v)}{|u||v|} = \mathrm{ArcCos}\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۳}$$

در اینجا این سوال مطرح می‌شود که آیا ویژگی‌های جبری تابع f که امکان بدست آوردن طول و زاویه را فراهم می‌کند برای تعمیم مفهوم طول و زاویه بردارها روی فضاهای برداری دلخواه مناسب است. فرض کنید V یک فضای برداری دلخواه روی میدان F و $f : V \times V \to F$ تابعی باشد که نسبت به هر مولفه خطی است. اگر بخواهیم به کمک روابط $(*)$ طول بردارهای فضای V را بدست آوریم لازم است برای هر $u \in V$، $f(u,u)$ عددی حقیقی و نامنفی باشد و این مقدار تنها زمانی صفر شود که $u = ۰$. همچنین برای اینکه بتوانیم به کمک روابط $(*)$

زاویه بین بردارها را در فضای V بدست آوریم لازم است که برای هر دو بردار u و v در V مقدار $f(u,v)$ نیز عددی حقیقی و بین $|u||v|$ و $-|u||v|$ باشد. به علاوه چون

در نتیجه با این روش نمی‌توانیم مفاهیم طول و زاویه را برای هر فضای برداری تعریف کنیم، بلکه باید دید خود را به فضاهای برداری روی زیر میدان‌های $\mathbb{R}$ محدود کنیم. بعلاوه باید این شرط را روی f قبول کنیم که برای هر $u \in V, f(u,u) \geq 0$ و تساوی تنها برای بردار $u = 0$ اتفاق می‌افتد. ولی با پذیرفتن این محدودیت‌ها شرط دیگر $|f(u,v)| \leq |u||v|$ نتیجه می‌شود.

نامساوی کوشی- شوارتز. فرض کنید F یک زیر میدانی از $\mathbb{R}$، V فضایی برداری روی F و $f : V \times V \to F$ تابعی باشد که در سه شرط زیر صدق کند.

۱. **(متقارن بودن) برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم** $f(u,v) = f(v,u)$.

۲. **(خطی بودن) برای هر $u, v_1, v_2 \in V$ و $r \in F$ داشته باشیم**

$$\begin{aligned} f(u, v_1 + rv_2) &= f(u,v_1) + rf(u,v_2) \\ &\Rightarrow f(v_1 + rv_2, u) = f(v_1,u) + rf(v_2,u) \end{aligned}$$

۳. **(مثبت بودن) برای هر $u \in V$، $f(u,u) \geq 0$ و تساوی تنها برای $u = 0$ برقرار باشد.**

در این صورت برای هر دو بردار $u, v \in V$ داریم $f(u,v)^2 \leq f(u,u) \cdot f(v,v)$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که u و v وابسته خطی باشند.

اثبات. اگر $v = 0$ باشد رابطه بالا واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم $v \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 \leq f(u+tv, u+tv) &= f(u,u) + tf(u,v) + tf(v,u) + t^2 f(v,v) \\ &= f(u,u) + 2tf(u,v) + t^2 f(v,v) = p(t) \end{aligned}$$

کمترین مقدار یک چند جمله‌ای درجه دو که ضریب t^2 در آن مثبت است، در نقطه‌ایی اتفاق می‌افتد که مشتق آن در آن نقطه صفر است. اما $p'(t) = 2\ tf(v,v) + f(u,v)$. در نتیجه کمترین مقدار $p(t)$ در $t = -\dfrac{f(u,v)}{f(v,v)}$ کسب می‌شود. با گذاشتن این مقدار درعبارت بالا خواهیم داشت

$$0 \leq f(u,u) - \frac{2f(u,v)^2}{f(v,v)} + \frac{f(u,v)^2}{f(v,v)} f(v,v) = f(u,u) - \frac{f(u,v)^2}{f(v,v)}$$

با ضرب کردن دو طرف نامساوی در عدد مثبت $f(v,v)$ خواهیم داشت

$$0 \leq f(u,u)f(v,v) - f(u,v)^2$$

زمانی نامساوی بالا به تساوی تبدیل می‌شود که به ازای مقادیری برای t، $f(u+tv, u+tv) = 0$. در نتیجه بنابر شرط سوم $u + tv = 0$. یعنی در این حالت u و v وابسته خطی اند.

به این ترتیب با داشتن تابعی مانند f که در شرایط قضیه بالا صدق کند، می‌توانیم طول و زاویه بین بردارهای فضای V را تعریف کنیم. به چنین تابعی *ضرب داخلی* روی فضای V می‌گوییم. توجه داشته باشید که این ساختار را برای فضاهای برداری حقیقی یا فضاهای برداری روی زیر میدان‌های اعداد حقیقی می‌توان تعریف کرد.

مثال. فرض کنید X و Y دو بردار ستونی در $\mathbb{R}^n$ باشند. تابع زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ است که به آن ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌گوییم.

$$f(X,Y) = Y^t X = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

طول بردارهای پایه استاندارد با این ضرب داخلی برابر یک و زاویه بین هر دو بردار متمایز پایه استاندارد برابر $\frac{\pi}{2}$ است زیرا $f(e_i,e_j)=\delta_{ij}$. به عبارت دیگر این بردارها دو به دو برهم عمودند.

در مثال بالا زمانی که مقدار n، برابر ۱ است، فضای برداری در واقع خود $\mathbb{R}$ است و ضرب داخلی استاندارد روی آن نیز همان ضرب معمولی اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر در این حالت $f(x,y)=xy$.

به کمک این ضرب داخلی می‌توان طول یا قدر مطلق هر عدد حقیقی را با رابطه $|u|^2=f(u,u)$ بدست آورد. اما در این حالت زاویه بین بردارها چندان کاربردی ندارد زیرا همه آنها در یک راستا هستند (یعنی زاویه بین آنها یا صفر است و یا π)

طول یا قدر مطلق اعداد مختلط نیز به صورت مشابه با رابطه $|z|^2=\bar{z}z$ معرفی می‌شود. ولی تابع $f(z_1,z_2)=\bar{z}_2z_1$ نسبت به z_2 خطی نیست.

$$f(w,z_1+az_2)=\overline{(z_1+az_2)}w=\bar{z}_1w+\bar{a}\bar{z}_2w=f(w,z_1)+\bar{a}f(w,z_2)$$

همچنین f متقارن نیز نیست زیرا $f(z_1,z_2)=\bar{z}_2z_1=\overline{\bar{z}_1z_2}=\overline{f(z_2,z_1)}$. ولی ویژگی سوم برای آن برقرار است. یعنی برای هر z مختلط $f(z,z)=\bar{z}z$ همیشه حقیقی و نا منفی است. به‌علاوه $f(z,z)$ تنها زمانی صفر می‌شود که z برابر صفر باشد. به این ترتیب می‌توانیم برای معرفی طول روی فضاهای برداری مختلط مفهوم ضرب داخلی را به صورت زیر گسترش دهیم.

تعریف. فرض کنید F میدان اعداد مختلط یا زیر میدانی از آن و V فضایی برداری روی F است. به تابع $f:V\times V\to F$ *ضرب داخلی روی* V گوییم هرگاه

۱. **برای هر** $u,v\in V$، $f(u,v)=\overline{f(v,u)}$.

۲. f **نسبت به متغیر اول خطی باشد. یعنی** $f(v_1+\alpha v_2,u)=f(v_1,u)+\alpha f(v_2,u)$.

۳. **برای هر** $u\in V$، $f(u,u)$ **عددی حقیقی و نامنفی باشد و به‌علاوه تساوی تنها برای** $u=0$ **برقرار باشد.**

فضای برداری V به همراه ضرب داخلی روی آن *فضای ضرب داخلی* نامیده می‌شود.

تذکر. توجه کنید که از شرط $f(u,v)=\overline{f(v,u)}$ نتیجه می‌شود که $f(u,u)$ حقیقی است و شرط سوم بیان می‌کند که این مقدار نا منفی است.

تذکر. اگر F اعداد حقیقی یا زیر میدانی از آن باشد، شرط اول به شرط تقارن تبدیل می‌شود و در این حالت f نسبت به هر دو مؤلفه نیز خطی خواهد بود. بنابراین این شرایط تعمیمی از شرایط معرفی شده برای ضرب داخلی فضاهای حقیقی است.
تذکر. باداشتن ضرب داخلی طول بردارها با رابطه $|u|^2=f(u,u)$ معرفی می‌شوند. در یک فضای ضرب داخلی می‌توانیم ضرب داخلی هر دو بردار را به برحسب طول بردارها محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}|u-v|^2&=(u-v,u-v)=(u,u)+(v,v)+(u,v)+(v,u)\\&=|u|^2+|v|^2+2\operatorname{Re}(u,v)\end{aligned}$$

در حالت حقیقی رابطه بالا ضرب داخلی دو بردار u و v را برحسب طول بردارهای u، v و $u-v$ بدست می‌دهد. در حالت مختلط خواهیم داشت

$$\operatorname{Re}(iu,v)=\operatorname{Re}i(u,v)=\operatorname{Im}(u,v)$$

تذکر. زمانی که $F=\mathbb{C}$، به کمک f طول بردارها را با رابطه $|u|^2=f(u,u)$ می‌توان معرفی کرد. اما زاویه بین بردارها معنی ندارد زیرا $\frac{f(u,v)}{|u||v|}$ ممکن است مختلط باشد. در عین حال نامساوی کوشی-شوارتز همچنان به شکل زیر برقرار است.

نامساوی کوشی-شوارتز. فرض کنید $f(u,v)$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری V است. در این صورت

$$|f(u,v)| \leq |u||v|$$

اثبات. کاملاً شبیه حالت حقیقی است. با توجه به ویژگی‌های ضرب داخلی داریم

$$0 \leq f(u+tv, u+tv) = f(u,u) + tf(v,u) + \bar{t}f(u,v) + t\bar{t}f(v,v)$$

با قرار دادن $t = -\dfrac{f(u,v)}{f(v,v)}$ در رابطه بالا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(u,u) - \frac{f(u,v)f(v,u)}{f(v,v)} - \frac{f(v,u)f(u,v)}{f(v,v)} + \frac{f(u,v)f(v,u)}{f(v,v)^2}f(v,v) \\ &= f(u,u) - \frac{\left|f(u,v)\right|^2}{f(v,v)} \end{aligned}$$

بنابراین $|f(u,v)|^2 \leq f(u,u)f(v,v) = |u|^2|v|^2$.

اگر چه زاویه در حالت کلی به وسیله ضرب داخلی تعریف نمی‌شود ولی مفهوم مهم عمود بودن همیشه قابل تعریف است. در یک فضای ضرب داخلی دو بردار را *متعامد یا عمود برهم* گوییم هرگاه ضرب داخلی آنها برابر صفر باشد. یک مجموعه را *متعامد* گوییم هرگاه هر دو عضو آن بر هم عمود باشند. اگر اعضای یک مجموعه متعامد دارای طول واحد نیز باشند به آن مجموعه *متعامد و یکه* می‌گوییم.

مثال. فرض کنید X و Y دو بردار ستونی در $\mathbb{C}^n$ باشند. تابع زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^n$ است که به آن ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{C}^n$ می‌گوییم.

$$f(X,Y) = \bar{Y}^t X = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

مانند حالت حقیقی $f(e_i,e_j) = \delta_{ij}$. بنابراین با این ضرب داخلی پایه استاندارد یک مجموعه متعامد و یکه است.

مثال. فرض کنید X و Y دو بردار ستونی در $\mathbb{C}^n$ و $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ عداد حقیقی و مثبت دلخواهی باشند. تابع زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^n$ است.

$$f(X,Y) = \bar{Y}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} X = \lambda_1 x_1\bar{y}_1 + \cdots + \lambda_n x_n\bar{y}_n$$

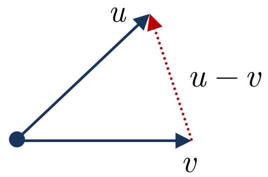
با توجه به رابطه بالا داریم $f(e_i,e_i) = \lambda_i$ و $f(e_i,e_j) = 0$. بنابراین با این ضرب داخلی پایه استاندارد یک مجموعه متعامد است ولی متعامد و یکه نیست.

به خاطر اهمیت زیاد فضاهای برداری روی میدان‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ معمولاً این موضوع تنها برای این حالت‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اعداد حقیقی یا اعداد مختلط

از این به بعد ضرب داخلی دو بردار u و v را به اختصار با (u,v) نمایش می‌دهیم و تنها فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ و یا $\mathbb{C}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند بررسی کند که کدام یک از ویژگی‌هایی که ذکر می‌شوند برای فضاهای ضرب داخلی روی دیگر زیر میدان‌های $\mathbb{C}$ نیز برقرار اند. اگر چنانچه با ضربهای داخلی متفاوت نیز مواجه بودیم آنها را به صورت $(u,v)_1$ و $(u,v)_2$ و … مشخص می‌کنیم.

مفهوم فاصله

بعد از این که طول بردارها به کمک ضرب داخلی معرفی شدند، *فاصله بین دو بردار* را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.



$d(u,v) = |u-v|$

این تابع ویژگی‌های طبیعی فاصله را داراست.

۱. فاصله دو بردار یک عدد حقیقی نامنفی است و تنها زمانی صفر می‌شود که آن دو بردار برابر باشند.

$$\begin{aligned}&d(u,v) = |u-v| \geq 0\\ &d(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad |u-v| = 0 \quad \Rightarrow \quad u-v=0 \quad \Rightarrow \quad u=v\end{aligned}$$

۲. فاصله بردارها تابعی متقارن است.

$$d(u,v) = |u-v| = |v-u| = d(v,u)$$

۳. نامساوی مثلث. برای هر سه بردار دلخواه u، v و w، فاصله دو بردار u و v کوچکتر یا مساوی است با مجموع فاصله‌های بردارهای u و v از بردار سوم w. به عبارت دیگر $d(u,v) \leq d(u,w) + d(v,w)$.

اثبات. باید نشان دهیم $|u-v| \leq |u-w| + |w-v|$. با قرار دادن $v_1 = u-w$ و $v_2 = w-v$ رابطه بالا چنین خواهد بود.

$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$

نشان می‌دهیم این رابطه برای هر دو بردار برقرار است. با توجه به اینکه طول بردارها نانفی است، کافی است نشان دهیم $|v_1+v_2|^2 \leq (|v_1| + |v_2|)^2$. به این صورت می‌توانیم از ضرب داخلی و ویژگی‌های آن استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}|v_1+v_2|^2 &= (v_1+v_2, v_1+v_2) = (v_1,v_1) + (v_2,v_2) + (v_1,v_2) + (v_2,v_1)\\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(v_1,v_2)\\ &\leq |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2\,|(v_1,v_2)|\\ &\leq |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2\,|v_1||v_2| = (|v_1| + |v_2|)^2\end{aligned}$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اکنون که فاصله دو بردار معنی دارد، می‌توانیم در بین مجموعه‌ای از بردارها به دنبال برداری باشیم که فاصله‌اش با بردار داده شده $v \in V$ از بقیه کمتر باشد. به چنین برداری *بهترین تقریب بردار v در بین بردارهای مجموعه داده شده* می‌گوییم. البته معلوم نیست که همیشه بهترین تقریب وجود داشته باشد. در این قسمت مجموعه‌هایی که بهترین تقریب بردار v را در آنها جستجو می‌کنیم زیرفضاهای V هستند.

تعریف. فرض کنید W زیرفضایی از فضای ضرب داخلی V باشد. *بهترین تقریب بردار* $v \in V$ *در زیرفضای* W، بردار $\tilde{v} \in W$ است که برای هر $w \in W$ داشته باشیم $d(v,w) \geq d(v,\tilde{v})$ و یا به عبارت دیگر $|v-w| \geq |v-\tilde{v}|$.

قضیه. $\tilde{v} \in W$ بهترین تقریب بردار $v \in V$ در زیرفضای W است اگر و تنها اگر $v - \tilde{v}$ بر همه اعضای W عمود باشد.

اثبات. فرض کنید w عضو دلخواهی در W باشد. در این صورت برای هر t، $\tilde{v} + tw$ نیز در W است و داریم

$$\begin{aligned}d(v, \tilde{v} + tw)^2 &= (v - \tilde{v} - tw, v - \tilde{v} - tw)\\ &= (v-\tilde{v}, v-\tilde{v}) - 2\,\mathrm{Re}\, t(v-\tilde{v}, w) + |t|^2\,(w,w)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{d(v,\tilde{v}+tw)^۲-d(v,\tilde{v})^۲}{|t|^۲}=-۲\,\mathrm{Re}\frac{۱}{t}(v-\tilde{v},w)+(w,w)$$

از رابطه بالا واضح است که اگر $(v-\tilde{v},w)=۰$ آنگاه $d(v,\tilde{v}+tw)^۲\geq d(v,\tilde{v})^۲$ و تساوی تنها برای $t=۰$ درست است. اگر $(v-\tilde{v},w)\neq ۰$ با انتخاب مناسب t می‌توان قسمت حقیقی $\frac{۱}{t}(v-\tilde{v},w)$ را به دلخواه بزرگ کرد به گونه‌ای که عبارت بالا منفی شود. یعنی اگر $(v-\tilde{v},w)\neq ۰$ آنگاه tای وجود دارد که $d(v,\tilde{v}+tw)<d(v,\tilde{v})$. به این ترتیب $\tilde{v}$ بهترین تقریب v در W است اگر و تنها اگر برای هر $w\in W$، $(v-\tilde{v},w)=۰$. اگر W زیرفضایی با بعد متناهی باشد می‌توان به روش زیر دنبال بهترین تقریب v در W گشت و نشان داد که در این حالت بهترین تقریب وجود دارد.

فرض کنید $\alpha=\{w_۱,\dots,w_m\}$ پایه‌ای برای W است. می‌خواهیم بردار $\tilde{v}\in W$ را به گونه‌ای بیابیم که $v-\tilde{v}$ بر $\{w_۱,\dots,w_m\}$ و در نتیجه بر W عمود باشد. اگر

$$\tilde{v}=x_۱w_۱+\cdots+x_mw_m$$

آنگاه برای هر $۱\leq i\leq m$ داریم

$$(v-\tilde{v},w_i)=۰\quad\Leftrightarrow\quad(v,w_i)=(\tilde{v},w_i)=x_۱(w_۱,w_i)+\cdots+x_m(w_m,w_i)$$

اگر دستگاه mمعادله و m مجهول بالا دارای جواب $x_۱,\dots,x_m$ باشد، $\tilde{v}$ بهترین تقریب v در W خواهد بود. ولی روشن نیست که دستگاه بالا دارای جواب است یا خیر. اگر پایه α متعامد باشد آنگاه دستگاه پیچیده بالا به شکل ساده زیر خواهد بود.

$$(v,w_i)=x_i(w_i,w_i)\qquad i=۱,\dots,m$$

بنابراین در این حالت واضح است که دستگاه جواب دارد و بهترین تقریب vدر W نیز به سادگی به دست می‌آید.

$$\tilde{v}=\frac{(v,w_۱)}{(w_۱,w_۱)}w_۱+\cdots+\frac{(v,w_m)}{(w_m,w_m)}w_m$$

اگر پایه α متعامد و یکه باشد نمایش بالا به نمایش ساده تر زیر تبدیل می‌شود.

$$\tilde{v}=(v,w_۱)w_۱+\cdots+(v,w_m)w_m$$

اما هنوز نمی‌دانیم که آیا هر فضای برداری دارای پایه متعامد یا پایه متعامد و یکه است یا خیر. به این ترتیب مساله وجود بهترین تقریب به مساله وجود پایه متعامد برای W تبدیل می‌شود. قبل از اثبات وجود پایه متعامد یا پایه متعامد و یکه، به چند ویژگی آنها اشاره می‌کنیم.

قضیه. اگر $\{w_۱,\dots,w_m\}$ پایه‌ای متعامد برای W و w عضوی دلخواه در W باشد آنگاه

$$w=\frac{(w,w_۱)}{(w_۱,w_۱)}w_۱+\cdots+\frac{(w,w_m)}{(w_m,w_m)}w_m$$

اگر پایه بالا متعامد و یکه باشد آنگاه

$$w=(w,w_۱)w_۱+\cdots+(w,w_m)w_m$$

اثبات. فرض کنید $w=t_۱w_۱+\cdots+t_mw_m$. در این صورت برای هر $۱\leq i\leq m$ داریم

$$\begin{aligned}(w,w_i)&=(t_۱w_۱+\cdots+t_mw_m,w_i)\\&=t_۱(w_۱,w_i)+\cdots+t_m(w_m,w_i)=t_i(w_i,w_i)\end{aligned}$$

در نتیجه $t_i = \dfrac{(w,w_i)}{(w_i,w_i)}$.

اگر $\{w_1,\ldots,w_m\}$ متعامد و یکه باشد برای آن داریم $(w_i,w_i)=1$. بنابراین قسمت دوم به راحتی از قسمت اول نتیجه می‌شود.

نتیجه: هر مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر در یک فضای ضرب داخلی مستقل خطی است. بخصوص هر مجموعه متعامد و یکه در یک فضای ضرب داخلی مستقل خطی است.

قضیه: هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی دارای پایه متعامد و یکه است.

اثبات. حکم را با استقرا روی بعد فضا ثابت می‌کنیم. اگر بعد فضا برابر صفر یا یک باشد حکم واضح است.

فرض کنید بعد فضای ضرب داخلی V برابر n است. و این حکم برای فضاهای با بعد کمتر از n درست است. یک زیرفضای با بعد $n-1$ آن را مانند W در نظر بگیرید. W با ضرب داخلی V خود یک فضای ضرب داخلی است. پس طبق فرض استقرا دارای پایه متعامد و یکه است. بنابراین بهترین تقریب هر بردار $v \in V$ در W وجود دارد. اگر v برداری باشد که در W نیست و $\tilde{v}$ بهترین تقریب آن در W باشد آنگاه $v-\tilde{v}$ برداری ناصفر است که بر W عمود است. بنابراین با اضافه کردن $\dfrac{v-\tilde{v}}{|v-\tilde{v}|}$ به پایه متعامد و یکه W، یک پایه متعامد و یکه برای V به دست می‌آید.

نتیجه: در یک فضای ضرب داخلی بهترین تقریب هر برداری در هر زیرفضای با بعد متناهی آن همیشه وجود دارد.

اثبات. چون هر زیرفضای با بعد متناهی دارای پایه متعامد و یکه است.

تعریف. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از فضای ضرب داخلی V است. مجموعه بردارهایی در V را که بر همه اعضای S عمودند مکمل عمود S می‌نامیم و آن را با $S^{\perp}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$$

قضیه. $S^{\perp}$ زیرفضایی از V است.

اثبات: اگر $v_1, v_2 \in S^{\perp}$ آنگاه برای هر $s \in S$ داریم

$$(v_1 + \alpha v_2, s) = (v_1, s) + \alpha (v_2, s) = 0$$

بنابراین $v_1 + \alpha v_2$ نیز در $S^{\perp}$ است.

قضیه: اگر $\langle S\rangle$ با بعد متناهی باشد آنگاه $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S\rangle$.

اثبات: طبق تعریف مکمل عمود واضح است که $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$. از طرفی $(S^{\perp})^{\perp}$ یک زیر فضای V نیز است. بنابراین $\langle S\rangle \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$. از آنجا که $\langle S\rangle$ فضایی با بعد متناهی است، بهترین تقریب هر برداری در $\langle S\rangle$ وجود دارد. فرض کنید v برداری در $(S^{\perp})^{\perp}$ و $\tilde{v}$ بهترین تقریب آن در $\langle S\rangle$ باشد. در این صورت $u = v - \tilde{v}$ بر $\langle S\rangle$ عمود است. بنابراین $(\tilde{v}, u) = 0$.

همچنین $u \in S^{\perp}$ و $v \in (S^{\perp})^{\perp}$ در نتیجه $(v,u) = 0$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود

$$0 = (v,u) = (\tilde{v},u) = (v-\tilde{v},u) = (u,u) \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

به عبارت دیگر هر بردار $(S^{\perp})^{\perp}$ در $\langle S\rangle$ است. بنابراین $(S^{\perp})^{\perp} \subseteq \langle S\rangle$، که نتیجه می‌دهد $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S\rangle$.

قضیه: اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^{\perp}$.

اثبات: فرض کنید v برداری دلخواه در V و $\tilde{v}$ بهترین تقریب آن در W باشد. در این صورت $v-\tilde{v} \perp W$، یعنی $v - \tilde{v} \in W^{\perp}$. از آنجا که $v = \tilde{v} + (v-\tilde{v})$ پس $v \in W + W^{\perp}$. این نتیجه می‌دهد $V = W + W^{\perp}$. اما واضح است که $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ زیرا برای $u \in W \cap W^{\perp}$ داریم

$$u \in W, u \in W^{\perp} \quad \Rightarrow \quad (u,u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

بنابراین $V = W \oplus W^{\perp}$.

عملگر تصویر روی مولفه اول در نمایش $V = W \oplus W^{\perp}$، به هر برداری بهترین تقریب آن را در W نسبت می‌دهد. به این عملگر، *تصویر متعامد روی* W می‌گوییم. بنابراین

قضیه. عملگر $P : V \to V$ تصویر متعامد است اگر وتنها اگر $P = P^{۲}$ و $\mathrm{Im}\, P \perp \ker P$.

تصویر هر بردار توسط عملگر تصویر متعامد، بهترین تقریب آن بردار در $\mathrm{Im}\, P$ است، زیرا اگر $P(v) = \tilde{v}$ آنگاه $\tilde{v}$ برداری در $\mathrm{Im}\, P$ است که برای آن داریم

$$P(v - \tilde{v}) = P(v) - P(\tilde{v}) = P(v) - P(P(v)) = P(v) - P(v) = ۰$$

بنابراین $v - \tilde{v} \in \ker P$ و در نتیجه $v - \tilde{v} \in (\mathrm{Im}\, P)^{\perp}$. توجه کنید که در بالا لازم نیست $\mathrm{Im}\, P$ با بعد متناهی باشد.

قضیه فیثاغورس

قضیه. اگر دو بردار u و v عمود بر هم باشند، آنگاه $|u + v|^{۲} = |u|^{۲} + |v|^{۲}$

اثبات.

$$\begin{aligned} |u+v|^{۲} &= (u+v, u+v) = (u,u) + (v,v) + (u,v) + (v,u) \\ &= (u,u) + (v,v) = |u|^{۲} + |v|^{۲} \end{aligned}$$

قضیه. اگر $\{v_{۱}, \ldots, v_n\}$ متعامد و یکه باشد آنگاه

$$|t_{۱}v_{۱} + \cdots + t_n v_n|^{۲} = |t_{۱}|^{۲} + \cdots + |t_n|^{۲}$$

قاعده متوازی الاضلاع

قضیه. برای هر دو بردار u و v داریم $|u+v|^{۲} + |u-v|^{۲} = ۲(|u|^{۲} + |v|^{۲})$.

اثبات.

$$\begin{aligned} \| u+v \|^{۲} &= (u,u) + (v,v) + (u,v) + (v,u) \\ \| u-v \|^{۲} &= (u,u) + (v,v) - (u,v) - (v,u) \end{aligned}$$

با جمع کردن دو رابطه بالا حکم قضیه نتیجه می‌شود.

ضرب داخلی و دوگانی

در این قسمت ما تنها به بررسی فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی روی اعداد حقیقی یا مختلط می‌پردازیم. برای خلاصه‌سازی دیگر این شرط طولانی را بیان نمی‌کنیم. به این ترتیب منظور از یک فضای ضرب داخلی در این قسمت فضای ضرب داخلی با بعد متناهی روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط است.

فرض کنید v برداری دلخواه در فضای ضرب داخلی V باشد. با توجه به اینکه ضرب داخلی نسبت به متغیر اول خود خطی است تابع

$$f_v : V \to F; \qquad f_v(u) \to (u, v)$$

یک تابعک خطی روی v است. به این ترتیب به هر $v \in V$، تابعک خطی $f_v \in V^*$ متناظر می‌شود.

این نگاشت را با φ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\varphi : V \to V^*; \qquad \varphi(v) = f_v$$

قضیه. نگاشت φ پادخطی است. یعنی برای هر $v_1, v_2 \in V$ و $c \in F$ داریم

$$\varphi(v_1 + cv_2) = \varphi(v_1) + \overline{c}\varphi(v_2)$$

تذکر. اگر $F = \mathbb{R}$ آنگاه نگاشت بالا در واقع یک نگاشت خطی است.

اثبات. برای هر $u \in V$ داریم

$$f_{v_1+cv_2}(u) = (u, v_1 + cv_2) = (u, v_1) + \overline{c}(u, v_2) = f_{v_1}(u) + \overline{c}f_{v_2}(u)$$

بنابرین

$$\varphi(v_1 + cv_2) = f_{v_1+cv_2} = f_{v_1} + \overline{c}f_{v_2} = \varphi(v_1) + \overline{c}\varphi(v_2)$$

نتیجه. بنابر قضیه بالا اگر $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = \overline{c}_1\varphi(v_1) + \cdots + \overline{c}_n\varphi(v_n)$$

قضیه. φ نگاشتی یک به یک است.

اثبات. فرض کنید $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$، در این صورت برای $u \in V$ داریم

$$f_{v_1}(u) = f_{v_2}(u) \Rightarrow (u, v_1) = (u, v_2) \Rightarrow (u, v_1 - v_2) = 0$$

تنها برداری که حاصل ضرب آن در تمام بردارها صفر می‌شود بردار صفر است. بنابراین $v_1 - v_2 = 0$، یعنی $v_1 = v_2$.

قضیه. φ پوشا است.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. نشان می‌دهیم $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی در V^* است و در نتیجه چون بعد V و V^* برابر است این مجموعه پایه‌ای برای V^* خواهد بود. با توجه به پاد خطی بودن و یک به یک بودن φ داریم

$$\begin{aligned} c_1\varphi(v_1) + \cdots + c_n\varphi(v_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(\overline{c}_1v_1 + \cdots + \overline{c}_nv_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \overline{c}_1v_1 + \cdots + \overline{c}_nv_n = 0 \end{aligned}$$

از مستقل خطی بودن $v_1, \ldots, v_n$ نتیجه می‌شود $\overline{c}_1 = \cdots = \overline{c}_n = 0$. بنابراین

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

به این ترتیب $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ یک پایه برای V^* است و هر تابعک خطی $f \in V^*$ به صورت ترکیب خطی اعضای آن است. بنابراین برای هر $f \in V^*$، اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n$ یافت می‌شوند که

$$f = c_1\varphi(v_1) + \cdots + c_n\varphi(v_n) = \varphi(\overline{c}_1v_1 + \cdots + \overline{c}_nv_n)$$

در نتیجه φ پوشا است.

بنابر قضیه بالا هر تابعک خطی روی فضای ضرب داخلی با بعد متناهی در واقع ضرب داخلی کردن در یک بردار آن فضا است. توجه داشته باشید که تناظر $\varphi : V \to V^*$ مستقل از پایه است و در نتیجه یک تناظر طبیعی است. در حالی که بدون وجود ضرب داخلی تناظری طبیعی بین V و V^* وجود نداشت.

به کمک این تناظر گزاره‌های مربوط به فضای دوگان به گزاره‌های مربوط به فضای ضرب داخلی ارتباط پیدا می‌کنند. در زیر به چند نمونه اشاره می‌کنیم.

۱. اگر W زیر فضایی سره از V باشد، آنگاه تابعک خطی ناصفر $f \in V^*$ وجود دارد که $W \subset \ker f$.

*۱. اگر W زیر فضایی سره از فضای ضرب داخلی V باشد، آنگاه بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد که $v \perp W$. به کمک این گزاره و با استقرا می‌توان اثبات دیگری برای وجود پایه متعامد و یکه در فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی بدست آورد.

۲. متناظر هر پایه $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ برای V، پایه یکتای $\alpha^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد که $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

*۲. متناظر هر پایه $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ برای V پایه $\tilde{\alpha} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ برای V وجود دارد که $(v_i, u_j) = \delta_{ij}$. اگر α متعامد و یکه باشد، آنگاه $\alpha = \tilde{\alpha}$. به عبارت دیگر خودش دوگان خودش است.

۳. برای هر مجموعه $S \subset V$، پوچساز آن S° زیر فضایی از V^* است. با تناظر طبیعی بین V و V^{**}، $(S^\circ)^\circ = \langle S \rangle$ به علاوه اگر W زیر فضایی از V باشد، آنگاه

$$\dim W^\circ + \dim W = \dim V$$

*۳. برای هر مجموعه $S \subset V$، مکمل عمود آن که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S^\perp = \{u \in V : u \perp S\} = \{u \in V : \forall v \in S, (u, v) = 0\}$$

زیر فضایی از V است و داریم $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$. به علاوه برای هر زیر فضای $W \subseteq V$ داریم

$$\dim W^\perp + \dim W = \dim V$$

۴. تابعک g در فضای تولید شده توسط تابعک‌های $f_1, \ldots, f_k$ قرار دارد اگر و تنها اگر هسته g شامل اشتراک هسته‌های $f_1, \ldots, f_k$ باشد.

*۴. بردار v در فضای تولید شده توسط بردارهای $v_1, \ldots, v_k$ قرار دارد اگر و تنها اگر هر بردار عمود بر $v_1, \ldots, v_k$ بر v نیز عمود باشد.

در بحث فضاهای دوگان ترانهاده یک نگاشت خطی نیز معرفی شد. فرض کنید V و W دو فضای ضرب داخلی و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. در این صورت نگاشت $T^t : W^* \to V^*$ که به هر $f \in W^*$ تابعک خطی $f \circ T \in V^*$ را نسبت می‌دهد، یک نگاشت خطی است که ترانهاده نگاشت خطی T نامیده می‌شود. با توجه به تناظر بین فضاهای ضرب داخلی و دوگان آنها، T^t متناظر با یک نگاشت $T^* : W \to V$ به شکل زیر خواهد بود.

$$T^* = \varphi_V^{-1} \circ T^t \circ \varphi_W$$

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\ \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\ W & \xrightarrow{T^*} & V \end{array}$$

از آنجا که نگاشت‌های φ_W و φ_V پادخطی اند نگاشت T^* نگاشتی خطی است. این نگاشت را به صورت ساده‌تری نیز می‌توان معرفی کرد. فرض کنید تابعک $f \in W^*$ متناظر بردار $w \in W$ باشد. با استفاده از نمودار بالا خواهیم داشت

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\ \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\ w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w) \end{array}$$

به عبارت دیگر تابعک $T^t(f)$ متناظر بردار $T^*(w)$ است. به این ترتیب برای هر $v \in V$ داریم

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) = f \circ T(v) = f(T(v)) = (T(v), w)$$

بنابراین $T^*(w)$ تنها برداری در V است که برای هر $v \in V$ در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

معمولاً T^* را *الحاقی نگاشت* T می‌نامند و معمولاً آن را با رابطه بالا تعریف می‌کنند. خطی بودن T^* نیز از این رابطه به سادگی بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}(v, T^*(w_1 + rw_2)) &= (T(v), w_1 + rw_2) = (T(v), w_1) + \bar{r}(T(v), w_2) \\ &= (v, T^*(w_1)) + \bar{r}(v, T^*(w_2)) = (v, T^*(w_1) + rT^*(w_2))\end{aligned}$$

از آنجا که این رابطه برای هر $v \in V$ درست است داریم

$$T^*(w_1 + rw_2) = T^*(w_1) + rT^*(w_2)$$

۵. فرض کنید $T, U : V \to W$ و $L : W \to Z$ نگاشت‌هایی خطی اند. برای هر $r \in F$ داریم

$$(T + rU)^t = T^t + rU^t, \quad (LT)^t = T^t L^t, \quad (T^t)^t = T, \quad {I_V}^t = I_{V^*}$$

*۵. فرض کنید $T, U : V \to W$ و $L : W \to Z$ نگاشت‌هایی خطی روی فضاهای ضرب داخلی V، W و Z اند. برای هر $r \in F$ داریم

$$(T + rU)^* = T^* + \bar{r}U^*, \qquad (LT)^* = T^* L^*, \qquad (T^*)^* = T, \quad {I_V}^* = I_V$$

تفاوت اندکی که بین دو گزاره بالا وجود دارد ناشی از پادخطی بودن نگاشت φ بین یک فضای ضرب داخلی و دوگان آن است. برای اطمینان بیشتر گزاره بالا را مستقیماً اثبات می‌کنیم.
اثبات. برای هر $v \in V$ و $w \in W$ داریم

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) = (T(v) + rU(v), w) \\ &= (T(v), w) + r(U(v), w) = (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\ &= (v, T^*(w) + \bar{r}U^*(w)) = (v, (T^* + \bar{r}U^*)(w))\end{aligned}$$

بنابراین $(T + rU)^* = T^* + \bar{r}U^*$.
برای هر $v \in V$ و $z \in Z$ داریم

$$(v, (LT)^*(w)) = ((LT)(v), w) = (L(T(v)), w) = (T(v), L^*(w)) = (v, (T^* L^*)(w))$$

بنابراین $(LT)^* = T^* L^*$
برای هر $u \in V$ و $w \in W$ داریم

$$(w,(T^*)^*(v)) = (T^*(w),v) = \overline{(v,T^*(w))} = \overline{(T(v),w)} = (w,T(v))$$

بنابراین $(T^*)^* = T$

برای هر $u,v \in V$ داریم $(I^*(u),v) = (u,I(v)) = (u,v) = (I(u),v)$. بنابراین $I^* = I$.

۶. فرض کنید $T: V \to W$ نگاشتی خطی و α و β پایه‌هایی برای V و W اند. در این صورت $[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = ([T]_\beta^\alpha)^t$. به عبارت دیگر برای هر i و j $([T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*})_{ij} = ([T]_\beta^\alpha)_{ji}$.

۶*. فرض کنید $T: V \to W$ نگاشتی خطی و α و β پایه‌هایی برای فضاهای ضرب داخلی V و W اند. در این صورت $[T^*]_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} = \overline{([T]_\beta^\alpha)^t}$. به عبارت دیگر برای هر i و j

$$([T^*]_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta})_{ij} = \overline{([T]_\beta^\alpha)}_{ji}$$

اگر α و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای V و W باشند، آنگاه $\tilde\alpha = \alpha$ و $\tilde\beta = \beta$ و در نتیجه $[T^*]_\alpha^\beta = \overline{([T]_\beta^\alpha)^t}$ و یا به عبارت دیگر برای هر i و j

$$([T^*]_\alpha^\beta)_{ij} = \overline{([T]_\beta^\alpha)}_{ji}$$

ماتریسی را که با ترانهاده کردن و مزدوج گرفتن از ماتریس مختلط (یا حقیقی !) A بدست می‌آید *الحاقی ماتریس* A می‌گویند و آن را با A^* نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر $A^* := \overline{A^t}$. با این تعریف رابطه بالا به شکل $[T^*]_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} = ([T]_\beta^\alpha)^*$ در می‌آید.

تفاوت اندک بین دو گزارهٔ بالا نیز به سبب پاد خطی بودن نگاشت φ است. برای اطمینان بیشتر این گزاره را نیز به صورت مستقیم اثبات می‌کنیم. برای اثبات این گزاره از لم زیر استفاده می‌کنیم که در بسیاری از موارد می‌تواند مفید باشد.

لم. فرض کنید $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ و $\bar\alpha = \{\tilde v_1,\dots,\tilde v_n\}$ پایه‌هایی دوگان برای فضای ضرب داخلی V و $\beta = \{w_1,\dots,w_n\}$ و $\bar\beta = \{\tilde w_1,\dots,\tilde w_n\}$ پایه‌هایی دوگان برای فضای ضرب داخلی W باشند. در این صورت برای هر عضو $v \in V$ و هر نگاشت خطی $T: V \to W$ داریم

$$v = (v,\tilde v_1)v_1 + \cdots + (v,\tilde v_n)v_n = (v,v_1)\tilde v_1 + \cdots + (v,v_n)\tilde v_n$$
$$([T]_\beta^\alpha)_{ij} = (T(v_j),\tilde w_i)$$

بنابر این اگر α و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای V و W باشند آنگاه برای هر عضو $v \in V$ و هر نگاشت خطی $T: V \to W$ داریم

$$v = (v,v_1)v_1 + \cdots + (v,v_n)v_n$$
$$([T]_\beta^\alpha)_{ij} = (T(v_j),w_i)$$

اثبات گزاره ۶*. با توجه به لم بالا داریم.

$$([T^*]_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta})_{ij} = (T^*(\tilde w_j),v_i) = (\tilde w_j,T(v_i)) = \overline{(T(v_i),\tilde w_j)} = \overline{([T]_\beta^\alpha)}_{ji}$$

۷. برای هر نگاشت خطی $T: V \to W$ داریم

$$(\ker T)^\circ = \operatorname{Im} T^t, \quad (\operatorname{Im} T)^\circ = \ker T^t, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^t$$

۷*. برای هر نگاشت خطی $T: V \to W$ بین فضاهای ضرب داخلی داریم

$$(\ker T)^{\perp} = \operatorname{Im} T^{*}, \quad (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \ker T^{*}, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^{*}$$

اثبات مستقیم این گزاره نیز بسیار ساده است.

$$\begin{aligned} w \in (\operatorname{Im} T)^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall v \in V : (T(v), w) = ۰ \quad &&\Leftrightarrow \quad \forall v \in V : (v, T^{*}(w)) = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad T^{*}(w) = ۰ &&\Leftrightarrow \quad w \in \ker T^{*} \end{aligned}$$

قسمت دوم نیز با توجه به اینکه $(T^{*})^{*} = T$ است به کمک قسمت اول بدست می‌آید.

$$(\operatorname{Im} T^{*})^{\perp} = \ker (T^{*})^{*} = \ker T \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} T^{*} = (\ker T)^{\perp}$$

نتیجه. $rankT = rankT^{*}$. **به‌علاوه تحدید T به زیر فضای $\operatorname{Im} T^{*}$ یک یکسانی بین $\operatorname{Im} T^{*}$ و $\operatorname{Im} T$ خواهد بود**

$$T : \operatorname{Im} T^{*} \leftrightarrow \operatorname{Im} T, \qquad T^{*} : \operatorname{Im} T \leftrightarrow \operatorname{Im} T^{*}$$

اثبات. با توجه به قضیه بعد داریم $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V$. از طرفی با توجه به قضیه قبل داریم $\dim \operatorname{Im} T^{*} + \dim \ker T = \dim V$. بنابراین $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^{*}$. تحدید T به زیر فضای $\operatorname{Im} T^{*}$ یک نگاشت خطی بین $\operatorname{Im} T^{*}$ و $\operatorname{Im} T$ است. چون این دو فضا هم بعد اند کافی است نشان دهیم این نگاشت خطی یک به یک است.

$$v \in \operatorname{Im} T^{*}, \ T(v) = ۰ \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Im} T^{*} \cap \ker T \quad \Rightarrow \quad v = \{۰\}$$

در بالا از این نکته استفاده شد که $\operatorname{Im} T^{*}$ بر $\ker T$ عمود است. قسمت دوم نیز به صورت مشابه بدست می‌آید.
تمرین. گزاره معادل این گزاره برای فضاهای دوگان به چه صورتی خواهد بود.

نتیجه.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \operatorname{Im}(TT^{*}) = \operatorname{Im}(TT^{*}T) = \cdots \\ \operatorname{Im}(T^{*}) &= \operatorname{Im}(T^{*}T) = \operatorname{Im}(T^{*}TT^{*}) = \cdots \\ \ker(T) &= \ker(TT^{*}) = \ker(TT^{*}T) = \cdots \\ \ker(T^{*}) &= \ker(T^{*}T) = \ker(T^{*}TT^{*}) = \cdots \end{aligned}$$

فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی، T عملگری خطی روی آن و W زیر فضایی T ناوردا باشد. در این صورت W نیز یک فضای ضرب داخلی است و T_W عملگری خطی روی آن است. می‌خواهیم رابطه بین الحاقی T_W و الحاقی T را بیابیم. برای هر u و v در W داریم

$$((T_W)^{*}(u), v) = (u, T_W(v)) = (u, T(v)) = (T^{*}(u), v)$$

توجه کنید که ممکن است W تحت T^{*} ناوردا نباشد. در نتیجه معلوم نیست که آیا $T^{*}(u)$ در W قرار دارد یا خیر. اگر چنین باشد بنابر رابطه بالا باید داشته باشیم $(T_W)^{*}(u) = T^{*}(u)$. اگر هم چنین نباشد باز رابطه بالا نشان می‌دهد که $(T_W)^{*}(u)$ بهترین تقریب بردار $T^{*}(u)$ در زیر فضای W است. به این ترتیب اگر تصویر عمودی روی W را با P_W نمایش دهیم خواهیم داشت $(T_W)^{*} = (P_W T^{*})_W$. توجه داشته باشید که اگر بدانیم W تحت T^{*} نیز ناوردا است خواهیم داشت $(T_W)^{*} = {T^{*}}_W$. به عنوان تمرین این متناظر این ویژگی‌ها را برای فضای دوگان بیابید (تمرین ؟؟؟).

جواب تعمیم یافته

فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی بین فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی V و W و $w\in W$ برداری دلخواه است. یادآوری می‌کنیم که معادله $T(v)=w$ همیشه دارای جواب نیست. این معادله زمانی دارای جواب است که $w\in \operatorname{Im} T$. با این حال با توجه به وجود مفهوم فاصله در فضاهای ضرب داخلی می‌توان به دنبال بردار $v\in V$ای بود که $T(v)$ نزدیکترین مقدار را به w داشته باشد. به عبارت دیگر باید بردار $v\in V$ای را یافت که $T(v)$ برابر تصویر متعامد w روی $\operatorname{Im} T$ باشد.

تعریف. بردار $v\in V$ را *جواب تعمیم یافته معادله* $T(v)=w$ می‌گوییم هرگاه برای هر $v'\in V$ داشته باشیم

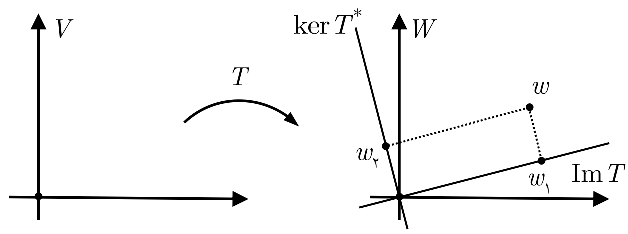
$$|T(v)-w|\le|T(v')-w|$$

توجه کنید که جواب تعمیم یافته همیشه وجود دارد و اگر $w\in \operatorname{Im} T$، جواب تعمیم یافته $T(v)=w$ همان جواب معادله $T(v)=w$ است.

با توجه به اینکه $(\operatorname{Im} T)^{\perp}=\ker T^*$ هر بردار $w\in W$ دارای نمایشی به صورت $w=w_1+w_2$ است که $w_1\in \operatorname{Im} T$ و $w_2\in \ker T^*$. w_1 همان تصویر متعامد w روی $\operatorname{Im} T$ است. بنابراین جواب تعمیم یافته معادله $T(v)=w$ همان جواب معادله $T(v)=w_1$ است. با توجه به اینکه $w_2\in \ker T^*$ و $T:\operatorname{Im} T\leftrightarrow \operatorname{Im} T^*$ تکریختی است داریم

$$\begin{aligned} T(v)=w_1 \quad &\Leftrightarrow \quad T^*T(v)=T^*(w_1)\\ &\Leftrightarrow \quad T^*T(v)=T^*(w_1)+T^*(w_2)=T^*(w) \end{aligned}$$

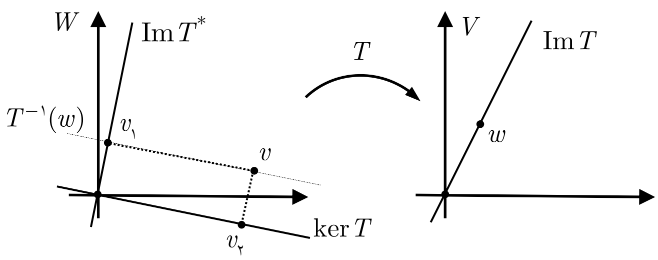
بنابراین جواب‌های تعمیم یافته $T(v)=w$ همان جواب‌های $T^*T(v)=T^*(w)$ اند. توجه داشته باشید که معادله اخیر همیشه دارای جواب است زیرا $\operatorname{Im}(T^*T)=\operatorname{Im} T^*$.



کوچکترین جواب

فرض کنید $w\in \operatorname{Im} T$ و بنابراین معادله $T(v)=w$ دارای جواب است. مجموعه جواب‌های این معادله انتقالی از $\ker T$ است و اگر $\ker T\neq\{0\}$ این معادله دارای جواب‌های زیادی خواهد بود. در بین همه این جواب‌ها یکی با کوچکترین طول وجود دارد. در واقع این جواب نزدیک‌ترین بردار به مبدأ و به عبارت دیگر پای عمود وارد از مبدأ روی سطح تراز $T^{-1}(w)$ است.

تعریف. کوچک‌ترین جواب معادله $T(v)=w$، جوابی از این معادله است که دارای کوچک‌ترین طول باشد.



از آنجا که $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{Im} T^*$، هر $v \in V$ نمایش یکتایی به صورت $v = v_1 + v_2$ دارد که $v_1 \in \operatorname{Im} T^*$ و $v_2 \in \ker T$ و $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$. از طرفی

$$T(v) = w \Leftrightarrow T(v_1 + v_2) = w \Leftrightarrow T(v_1) = w$$

چون $T : \operatorname{Im} T^* \to \operatorname{Im} T$ تکریختی است، دقیقاً یک $v_1 \in \operatorname{Im} T^*$ وجود دارد که $T(v_1) = w$ و این بردار کوچک‌ترین جواب معادله $T(v) = w$ است. زیرا هر جواب دیگر این معادله به شکل $v = v_1 + v_2$ است که $v_1 \in \operatorname{Im} T^*$ و $v_2 \in \ker T$ و در نتیجه $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 \geq |v_1|^2$. چون $v_1 \in \operatorname{Im} T^*$ است بردار $z \in W$ یافت می‌شود که $v_1 = T^*(z)$ و در نتیجه $TT^*(z) = T(v) = w$. بنابراین z جواب معادله $TT^*(z) = w$ است. این معادله جواب دارد زیرا $w \in \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} TT^*$ و برای هر جواب آن $T^*(z)$ تنها بردار $v_1 \in \operatorname{Im} T^*$ است که در رابطه $T(v_1) = w$ صدق می‌کند. به عبارت دیگر اگر $w \in \operatorname{Im} T$ باشد، آنگاه کوچک‌ترین جواب معادله $T(v) = w$ به شکل $T^*(z)$ است که z جواب دلخواهی از معادله $TT^*(z) = w$ است.

کوچک‌ترین جواب تعمیم یافته

با توجه به دو قسمت قبل می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که در بین جواب‌های تعمیم‌یافته معادله $T(v) = w$ ، کدام یک کوتاه‌ترین طول را دارد. به این جواب کوچک‌ترین جواب تعمیم یافته معادله $T(v) = w$ می‌گوییم. از آنجا که جواب‌های تعمیم یافته این معادله، جواب‌های $T^*T(v) = T^*(w)$ اند، کوچک‌ترین جواب تعمیم یافته $T(v) = w$ نیز کوچک‌ترین جواب معادله $T^*T(v) = T^*(w)$ است. با توجه به قسمت قبل تنها جواب این معادله در $\operatorname{Im}((T^*T)^*) = \operatorname{Im}(T^*T) = \operatorname{Im}(T^*)$ است. بنابراین کوچک‌ترین جواب تعمیم یافته معادله $T(v) = w$ برابر است با $T^*(z)$ که z جواب دلخواهی از معادله $T^*TT^*(z) = T^*(w)$ است.

جواب‌های تعمیم یافته و کوچک‌ترین جواب دستگاه‌های خطی

در این قسمت $\mathbb{F}^n$ و $\mathbb{F}^m$ را به عنوان فضاهای ضرب داخلی با ضرب داخلی استاندارد در نظر می‌گیریم. اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه

جواب‌های تعمیم یافته دستگاه $Ax = y$ همان جواب‌های دستگاه $A^*Ax = A^*y$ اند.

کوچک‌ترین جواب $Ax = y$ برابراست با A^*z که z جواب دلخواهی از دستگاه $AA^*z = y$ است.

کوچک‌ترین جواب تعمیم یافته $Ax = y$ برابر است با A^*z که z جواب دلخواهی از دستگاه $A^*AA^*z = A^*y$ است.

برای اثبات این گزاره‌ها کافی است توجه کنید که پایه‌های استاندارد پایه‌های متعامد و یکه برای فضاهای ضرب داخلی F^n و F^m با ضرب داخلی استاندارد هستند و نمایش L_A در این پایه‌ها برابر ماتریس A است. بنابراین نمایش $(L_A)^*$ نیز در این پایه‌ها برابر است با A^*.

تقریب کمترین مربعات

فرض کنید مقدار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقاط $x_1, \dots, x_k$ داده شده است که

$$y_1 = f(x_1), \dots, y_k = f(x_k).$$

بهترین چندجمله‌ای درجه یک که بتوان به عنوان تقریب f در نظر گرفت ، تابعی خطی است که فاصله آن با f، با توجه به اطلاعات بالا ، کمترین مقدار باشد. یک مفهوم مناسب برای فاصله در این مورد ، فاصله مربعی دو تابع در نقاط $x_1, \dots, x_k$ است. به عبارت دیگر

$$d(f,g) = \sqrt{(f(x_1) - g(x_1))^2 + \cdots + (f(x_k) - g(x_k))^2}$$

توجه داشته باشید که فاصله دو تابع که مقادیرشان در نقاط $x_1,\dots,x_k$ با هم برابر باشند صفر است. زیرا تنها اطلاعات ما از این دو تابع مقادیر آن دو تابع در این نقاط است. به این ترتیب مسأله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود.
ثابت‌های c و d را به گونه‌ای بیابید که فاصله مربعی دو تابع $g(x)=cx+d$ و $f(x)$ در نقاط $x_1,\dots,x_k$ کمترین مقدار ممکن باشد؛ یعنی

$$E=(y_1-cx_1-d)^2+\dots+(y_k-cx_k-d)^k$$

کمترین مقدار ممکن باشد. اگر قرار دهیم

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_k & 1\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}$$

خواهیم داشت $E=|Ax-y|^2$.
بنابراین مسأله بالا به یافتن جواب تعمیم یافته دستگاه $Ax=y$ تبدیل می‌شود. با توجه به مطالب قسمت قبل این جواب‌های تعمیم یافته همان جواب‌های دستگاه $A^*Ax=A^*y$ اند. یعنی c و d باید در رابطه زیر صدق کنند.

$$\begin{pmatrix} x_1^2+\cdots+x_k^2 & x_1+\cdots+x_k\\ x_1+\cdots+x_k & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1y_1+\cdots+x_ky_k\\ y_1+\cdots+y_k\end{pmatrix}$$

عملگرهای خاص روی فضای ضرب داخلی

عملگرهای نرمال

در فصل‌های گذشته در مورد عملگرهای قطری شدنی یا مثلثی شدنی روی یک فضای برداری مطالبی بیان شد. یک عملگر قطری شدنی عملگری است که دارای پایه‌ای از بردارهای ویژه باشد. به عبارت دیگر در یک دستگاه مختصات مناسب نمایش قطری داشته باشد. در فضاهای ضرب داخلی پایه‌های متعامد و یکه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار اند و دستگاه مختصات معرفی شده توسط آنها نیز مناسب‌ترین دستگاه‌های مختصات برای این فضاها اند. بنابراین طبیعی است عملگرهایی را که روی یک پایه متعامد و یکه دارای نمایش قطری هستند بررسی کنیم.
فرض کنید α پایه‌ای متعامد و یکه و $[T]_\alpha$ ماتریسی قطری باشد. $[T^*]_\alpha$ نیز باید قطری باشد زیرا $[T^*]_\alpha=[T]_\alpha^*$. از آنجا که هر دو ماتریس قطری جابجا می‌شوند داریم

$$[TT^*]_\alpha=[T]_\alpha.[T^*]_\alpha=[T^*]_\alpha[T]_\alpha=[T^*T]_\alpha$$

بنابراین هر عملگری که روی یک پایه متعامد قطری شود با الحاقی خودش جابجا می‌شود. توجه داشته باشید که چند جمله‌ای مشخصه یک عملگر قطری شدنی نیز باید به عوامل درجه یک شکافته شود. نشان می‌دهیم این دو شرط، شرط لازم و کافی برای قطری شدن یک عملگر روی یک پایه متعامد و یکه است.

تعریف. عملگر T روی فضای ضرب داخلی V *نرمال* نامیده می‌شود هرگاه $T^*T=TT^*$.

ابتدا چند ویژگی مهم عملگرهای نرمال را بررسی می‌کنیم.

قضیه. عملگر $T:V\to V$ نرمال است اگر و تنها اگر برای هر $v\in V$ داشته باشیم

$$|T(v)|=|T^*(v)|$$

اثبات. اگر T نرمال باشد آنگاه برای هر $v\in V$ داریم

$$|T(v)|^۲= (T(v),T(v)) = (v,T^*T(v)) = (v,TT^*(v)) = (T^*(v),T^*(v)) =|T^*(v)|^۲$$

حال فرض کنید T عملگری است که برای هر بردار $v \in V$ داریم $|T(v)|=|T^*(v)|$. اما

$$|T(v)|^۲= (T(v),T(v)) = (T^*T(v),v)$$
$$|T^*(v)|^۲= (T^*(v),T^*(v)) = (TT^*(v),v)$$

بنابراین برای هر $v \in V$ داریم $(T^*T(v),v) = (TT^*(v),v)$. با قرار دادن $v+u$ بجای v در این رابطه و باز کردن آن رابطه زیر برای هر دو بردار v و u در V بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&(T^*T(v),v) + (TT^*(u),u) + (T^*T(u),v) + (T^*T(v),u)\\ &= (T^*T(v),v) + (TT^*(u),u) + (TT^*(u),v) + (TT^*(v),u)\end{aligned}$$

بنابراین

$$(T^*T(u),v) + (T^*T(v),u) = (TT^*(u),v) + (TT^*(v),u)$$

اما توجه کنید که $(T^*T(u),v) = (T(u),T(v)) = (u,T^*T(v)) = \overline{(T^*T(v),u)}$. در نتیجه رابطه بالا به صورت زیر است.

$$۲\,\mathrm{Re}(T^*T(v),u) = ۲\,\mathrm{Re}(TT^*(v),u)$$

از آنجا که این رابطه برای هر دو بردار u و v برقرار است برای هر اسکالر $\mu \in F$ نیز داریم

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(T^*T(\mu v),u) = \mathrm{Re}(TT^*(\mu v),u)\\ \Rightarrow\quad &\mathrm{Re}\,\mu(T^*T(v),u) = \mathrm{Re}\,\mu(TT^*(v),u)\end{aligned}$$

چون این رابطه برای هر $\mu \in F$ برقرار است باید داشته باشیم $(T^*T(v),u) = (TT^*(v),u)$. این رابطه هم نشان می‌دهد $T^*T = TT^*$.

تبصره. اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم $|T(v)|\le|T^*(v)|$ آنگاه عملگر T نرمال است.

اثبات. اگر در قضیه بالا بجای فرض $|T(v)|=|T^*(v)|$ قرار دهیم $|T(v)|\le|T^*(v)|$ آنگاه همه تساوی‌ها در اثبات بالا به نامساوی تبدیل می‌شود. حال کافی است توجه کنید که اگر اعداد a و b در F به گونه‌ای باشند که برای هر $\mu \in F$ داشته باشیم $\mathrm{Re}\,\mu a \le \mathrm{Re}\,\mu b$ آنگاه این دو عدد برابرند. به این ترتیب اثبات بالا با فرض ضعیف‌تر $|T(v)|\le|T^*(v)|$ نیز نتیجه می‌دهد T نرمال است.

قضیه. فرض کنید T یک عملگر نرمال روی فضای ضرب داخلی V است. در این صورت

1. **$T-\lambda I$ نیز عملگری نرمال است.**
2. **اگر v بردار ویژه T متناظر مقدار ویژه λ باشد آنگاه v بردار ویژه T^* متناظر مقدار ویژه $\bar{\lambda}$ است.**
3. **اگر W یک زیر فضای T ناوردا باشد آنگاه $W^\perp$ نیز چنین است و تحدید T به این زیر فضاها نیز نرمال است. به علاوه W و $W^\perp$ تحت T^* نیز ناوردا اند و داریم $(T_W)^* = {T^*}_W$ و $(T_{W^\perp})^* = {T^*}_{W^\perp}$.**

اثبات.

(۱). توجه کنید که $(T-\lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I^* = T^* - \bar{\lambda} I$. بنابراین

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* &= (T-\lambda I)(T^*-\bar{\lambda} I)\\ &= TT^*-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}I\\ &= T^*T-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}I\\ &= (T^*-\bar{\lambda}I)(T-\lambda I)\\ &= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\end{aligned}$$

(۲). فرض کنید v بردار ویژه Tمتناظر مقدار ویژه λ باشد. بنابراین $(T-\lambda I)(v)=۰$. طبق (۱) عملگر $(T-\lambda I)$ نرمال است و طبق قضیه قبل داریم

$$۰=|(T-\lambda I)(v)|=|(T-\lambda I)^*(v)|=|(T^*-\bar{\lambda}I)(v)|$$

بنابراین $(T^*-\bar{\lambda}I)(v)=۰$. در نتیجه v بردار ویژه عملگر T^* متناظر مقدار ویژه $\bar{\lambda}$ است.

(۳). فرض کنید W تحت T ناوردا است. می‌دانیم که $(T_W)^*=P_W {T^*}_W$. بنابراین برای هر $u\in W$ داریم

$$|(T_W)^*(u)|=|P_W T^*(u)|\leq|T^*(u)|=|T(u)|$$

طبق تبصره قضیه قبل عملگر T_W باید نرمال باشد و در نتیجه برای هر $u\in W$ داریم $|(T_W)^*(u)|=|T_W(u)|=|T(u)|$. بنابراین در رابطه بالا باید نامساوی همیشه تساوی باشد. اما رابطه $|P_W T^*(u)|=|T^*(u)|$ نشان می‌دهد $T^*(u)$ در W قرار دارد. بنابراین W تحت T^* نیز ناوردا است. حال برای هر $u\in W$ و $v\in W^\perp$ داریم

$$\begin{aligned}(T^*(v),u)=(v,T(u))=۰\\ (T(v),u)=(v,T^*(u))=۰\end{aligned}$$

بنابراین $W^\perp$ نیز تحت T و T^* ناوردا است. در نتیجه $(T_W)^*={T^*}_W$ و $(T_{W^\perp})^*={T^*}_{W^\perp}$.

با توجه به این قضیه روشن است که

قضیه. عملگر T روی یک فضای ضرب داخلی دارای پایه متعامد از بردارهای ویژه است اگر و تنها اگر T نرمال باشد و چند جمله‌ای مشخصه آن به عوامل درجه یک شکافته شود.

اثبات. در ابتدای این بخش توضیح داده شد که شرط لازم برای قطری شدن T روی یک پایه متعامد و یکه نرمال بودن آن و شکافته شدن چند جمله‌ای مشخصه آن به عوامل درجه یک است. برای اثبات عکس این قضیه از استقرا روی بعد فضا استفاده می‌کنیم. در حالتی که $\dim V=۱$ چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید این حکم برای زیر فضاهای با بعد کمتر از n درست است و $\dim V=n$. چون چند جمله‌ای مشخصه T به عوامل درجه یک شکافته می‌شود، T دارای مقدار ویژه و در نتیجه دارای بردار ویژه است. فرض کنید v_n بردار ویژه یکه‌ای برای T است. $\langle v_n\rangle$ تحت T ناوردا است. بنابراین طبق قضیه قبل $\langle v_n\rangle^\perp$ نیز تحت T ناوردا است و تهدید T به آن یک عملگر نرمال روی آن است. چون چند جمله‌ای مشخصه عملگر $T_{\langle v_n\rangle^\perp}$ چند جمله‌ای مشخصه T را می‌شمارد، خود باید به عوامل درجه یک شکافته شود. طبق فرض استقرا پایه متعامد و یکه‌ای مانند $\{v_۱,\dots,v_{n-۱}\}$ برای $\langle v_n\rangle^\perp$ از بردارهای ویژه $T_{\langle v_n\rangle^\perp}$ وجود دارد. توجه کنید این بردارها بردار ویژه T اند و با اضافه کردن v_n به آنها یک پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه T در فضای V بدست می‌آید.

اگر V یک فضای ضرب داخلی روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، شرط شکافته شدن چند جمله‌ای مشخصه خودبخود برقرار است. بنابراین یک عملگر روی V دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه است اگر و تنها اگر نرمال باشد. اگر $F\neq\mathbb{C}$ آنگاه ممکن است چند جمله‌ای مشخصه عملگر T به عوامل درجه یک شکافته نشود. در این حالت T نمی‌تواند قطری شود.

تعریف. ماتریس A را *نرمال* گوییم هرگاه نمایش یک عملگر نرمال در پایه‌ای متعامد و یکه باشد.

بنابراین ماتریس A نرمال است اگر و تنها اگر $A^*A=AA^*$.

قضیه. ماتریس A دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه در F^n با ضرب داخلی استاندارد است، اگر و تنها اگر A نرمال باشد و چند جمله‌ای مشخصه آن در F به عوامل درجه یک شکافته شود.

اثبات. نتیجه مستقیم قضیه قبل.

بنابراین هر ماتریس مختلط نرمال $n\times n$ دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه در $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی استاندارد است. ماتریس‌های نرمال حقیقی ممکن است روی $\mathbb{R}^n$ قطری نشوند. ولی این ماتریس‌ها را می‌توان به عنوان ماتریس‌های مختلط نرمال در نظر گرفت و در نتیجه در $\mathbb{C}^n$ حتماً قطری می‌شوند!

مثال. ماتریس دوران به اندازه $\theta \neq k\pi$ در پایه استاندارد $\mathbb{R}^۲$ به شکل زیر است.

$$A = [R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $A^* = -A$. در نتیجه این ماتریس نرمال است ولی در $\mathbb{R}^۲$ قطری نمی‌شود. این در حالی است که A به عنوان ماتریسی مختلط، دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه است.

$$p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos-\lambda \end{bmatrix} = (\cos\theta-\lambda)^۲ + \sin^۲\theta = \lambda^۲ - ۲\cos\theta + ۱$$
$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^۲\theta - ۱} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^۲\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

بردارهای ویژه متناظر $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ به صورت زیر اند.

$$\begin{bmatrix} \cos-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_۱ = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} ۱ \\ -i \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه متناظر $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$ به صورت زیر اند.

$$\begin{bmatrix} \cos-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_۲ = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} ۱ \\ i \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه این ماتریس با ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{C}^۲$ برهم عمود اند.

$$(v_۱, v_۲) = a\bar{b}[۱ - i]\begin{bmatrix} ۱ \\ -i \end{bmatrix} = a\bar{b}(۱ + i^۲) = ۰$$

عملگرهای خودالحاق

تا کنون دیدیم که عملگرهای نرمالی که چند جمله‌ای مشخص آنها به عوامل درجه یک شکافته می‌شود دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه اند. در ادامه نشان می‌دهیم آن عملگرهایی که الحاقی آنها برابر خود آنها اند دسته‌ای مهم از عملگرهای نرمال هستند که چند جمله‌ای مشخصه آنها به عوامل درجه یک شکافته می‌شود. در نتیجه این عملگرها دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه هستند.

تعریف. عملگر T روی یک فضای ضرب داخلی را *هرمیتی* یا *خودالحاق* گوییم هرگاه $T^* = T$. ماتریس A را نیز *هرمیتی* یا *خودالحاق* گوییم هرگاه نمایش یک عملگر خود الحاق در پایه‌ای متعامد و یکه باشد.

واضح است هر عملگر یا ماتریس خودالحاقی نرمال نیز است و ماتریس A خود الحاق است اگر و تنها اگر $A^* = A$. قضیه زیر نشان می‌دهد که همیشه چند جمله‌ای مشخصه این عملگرها به عوامل درجه یک شکافته می‌شود.

قضیه. فرض کنید T یک عملگر خودالحاق روی فضای ضرب داخلی V است.

الف. مقادیر ویژه T حقیقی اند.

ب. همه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه T حقیقی اند.

ج. T دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه با مقادیر ویژه حقیقی است.

اثبات. (الف). فرض کنید v برداری ویژه متناظر مقدار ویژه λست. چون T نرمال است، v بردار ویژه T^* متناظر مقدار ویژه $\bar{\lambda}$ است. با توجه به اینکه $T^* = T$ داریم

$$\lambda v = T(v) = T^*(v) = \bar{\lambda} v$$

از آنجایی که $v \neq 0$ رابطه بالا نتیجه می‌دهد که $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ب). اگر $F = \mathbb{C}$ طبق قضیه قبل این عملگر دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه است. در حالت $F = \mathbb{R}$، فرض کنید α پایه‌ای متعامد و یکه برای V و A نمایش ماتریسی T در پایه α است. A ماتریسی حقیقی و خود الحاق است. ولی آن را می‌توان به عنوان یک ماتریس مختلط خود الحاق در نظر گرفت. چند جمله‌ای مشخصه A در $\mathbb{C}$ به عوامل درجه یک شکافته می‌شود. ولی چون A خود الحاق است طبق قسمت (الف) مقادیر ویژه آن حقیقی است. پس چند جمله‌ای مشخصه A در $\mathbb{R}$ نیز به عوامل درجه یک شکافته می‌شود. چند جمله‌ای مشخصه T برابر با چند جمله‌ای مشخصه A است. بنابراین همه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه T حقیقی اند.

(ج). توجه کنید که T عملگری نرمال است و طبق قسمت قبل همه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه آن حقیقی اند. بنابراین چند جمله‌ای مشخصه T به عوامل درجه یک شکافته می‌شود و در نتیجه T دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه با مقادیر ویژه حقیقی خواهد بود.

قضیه. عملگر T روی فضای ضرب داخلی V خودالحاق است اگر و تنها اگر نرمال باشد و همه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌اش حقیقی باشند.

اثبات. طبق قضایای قبل هر عملگر خودالحاق عملگری نرمال است که همه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌اش حقیقی اند. حال فرض کنید T عملگری نرمال باشد که همه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌اش حقیقی اند. در این صورت چون چند جمله‌ای مشخصه آن شکافته می‌شود این عملگر دارای پایه‌ای متعامد و یکه از بردارهای ویژه مانند α است. در این صورت نمایش عملگر T در پایه α ماتریسی قطری مانند D است که درایه‌های روی قطر آن همگی حقیقی اند. بنابراین

$$[T^*]_\alpha^\alpha = ([T]_\alpha^\alpha)^* = (D)^* = D = [T]_\alpha^\alpha$$

این نشان می‌دهد که $T^* = T$.

کمی در مورد عملگرهای مثبت.... و اینکه همیشه TT^* مثبت است.

عملگرهای یکانی

در این فصل به بررسی دسته‌ای خاص از عملگرهای نرمال می‌پردازیم که به صورت طبیعی در مطالعه فضاهای ضرب داخلی مطرح می‌شوند. این عملگرها، عملگرهایی هستند که ساختار ضرب داخلی فضا را حفظ می‌کنند.

تعریف. نگاشت خطی $T : V \to W$ بین فضاهای ضرب داخلی V و W را *حافظ ضرب داخلی* گوییم هرگاه برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم $(u,v) = (T(u), T(v))$.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی بین فضاهای ضرب داخلی V و W باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند.

۱. T حافظ ضرب داخلی است.

۲. T حافظ طول است. یعنی برای هر $v \in V$ داریم $|v| = |T(v)|$.

۳. تصویر هر پایه متعامد و یکه برای V توسط T، مجموعه‌ای متعامد و یکه در W است.

۴. تصویر یک پایه متعامد و یکه برای V توسط T، مجموعه‌ای متعامد و یکه در W است.

---

۵. $T^*T = I_V$.

اثبات. (۱) $\Leftrightarrow$ (۲). کافی است توجه کنیم که طول توسط ضرب داخلی مشخص می‌شود و با داشتن تابع طول ضرب داخلی متناظر نیز بدست می‌آید.

(۱) $\Leftarrow$ (۳) $\Leftarrow$ (۴) $\Leftarrow$ (۱). واضح است.

(۴) $\Leftarrow$ (۵). فرض کنید α پایه‌ای متعامد و یکه برای V باشد که تصویر آن مجموعه‌ای متعامد و یکه در W است. این مجموعه متعامد و یکه را به یک پایه متعامد و یکه برای W گسترش می‌دهیم و آن را β می‌نامیم. با توجه به تعریف این پایه‌ها داریم

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$[T^*T]_\alpha^\alpha = [T^*]_\alpha^\beta . [T]_\beta^\alpha = ([T]_\beta^\alpha)^* . [T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = I_n$$

بنابراین $T^*T = I_V$.

(۵) $\Leftarrow$ (۱). برای هر $u, v \in V$ داریم

$$\begin{aligned} T^*T = I_V \quad &\Rightarrow \quad v = T^*(T(v)) \\ &\Rightarrow \quad (u,v) = (u, T^*(T(v))) \quad \Rightarrow \quad (u,v) = (T(u), T(v)) \end{aligned}$$

نتیجه. نگاشت‌های خطی حافظ ضرب داخلی یک به یک هستند.

با توجه به قضیه بالا نگاشت‌های خطی حافظ ضرب داخلی، نگاشت‌های خطی‌ای هستند که طول بردارها را حفظ می‌کنند. به عبارت دیگر نگاشت‌هایی هستند که ساختار هندسی معرفی شده روی فضاهای برداری را حفظ می‌کنند. قضیه زیر نشان می‌دهد که همه نگاشت‌هایی که هندسه فضاهای ضرب داخلی را حفظ می‌کنند. تقریباً به همین شکل اند.

قضیه. تابع $f : V \to W$ بین دو فضای ضرب داخلی فاصله بین بردارها را تغییر نمی‌دهد اگر و تنها اگر f ترکیبی از یک نگاشت خطی حافظ ضرب داخلی با یک انتقال در W باشد.

اثبات. با توجه به قضیه قبل می‌دانیم که نگاشت‌های خطی حافظ ضرب داخلی طول بردارها و در نتیجه فاصله بین بردارها را تغییر نمی‌دهند. انتقال نیز واضح است که فاصله را تغییر نمی‌دهد. بنابراین ترکیب این دو نوع نگاشت، تابعی خواهد بود که فاصله را تغییر نمی‌دهد. پس تنها کافی است نشان دهیم هر تابعی که فاصله را حفظ می‌کند به این صورت است.

گام اول. برای هر $v \in V$ قرار دهید $T(v) = f(v) - f(0)$. نشان می‌دهیم که تابع $T : V \to W$ یک نگاشت خطی حافظ ضرب داخلی است. توجه کنید که تابع T خود حافظ فاصله است، زیرا

$$|u - v| = |f(u) - f(v)| = |f(u) - f(0) - (f(v) - f(0))| = |T(u) - T(v)|$$

گام دوم. T حافظ طول است. برای هر $u, v \in V$ داریم

$$|v| = |v - 0| = |f(v) - f(0)| = |T(v)|$$

به بیان دیگر از آنجا که طول یک بردار در واقع فاصله آن بردار تا صفر است و $T(0) = 0$، حافظ فاصله بودن T نتیجه می‌دهد T حافظ طول نیز است.

گام سوم. T حافظ ضرب داخلی است. برای هر $u, v \in V$ داریم

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(u,v) &= |u|^2 + |v|^2 - |u-v|^2 \\ &= |T(u)|^2 + |T(v)|^2 - |T(u)-T(v)|^2 = 2\operatorname{Re}(T(u),T(v)) \end{aligned}$$

در صورتی که فضای ضرب داخلی حقیقی باشد رابطه بالا نشان می‌دهد که T حافظ ضرب داخلی است. اگر فضای ضرب داخلی مختلط باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(u,v) &= -\operatorname{Re}(iu,v) = -\operatorname{Re}(T(iu),T(v)) \\ &= -\operatorname{Re}(iT(u),T(v)) = \operatorname{Im}(T(iu),T(v)) \end{aligned}$$

در نتیجه در این حالت نیز T حافظ ضرب داخلی است.

گام چهارم. T یک نگاشت خطی است. برای هر $u,v \in V$ و $r \in F$ داریم

$$\begin{aligned} &(T(u+rv)-T(u)-rT(v), T(u+rv)-T(u)-rT(v)) \\ &= (T(u+rv),T(u+rv)) + (T(u),T(u)) + (r)^2(T(v),T(v)) \\ &\quad - (T(u+rv),T(u)) - (T(u),T(u+rv)) \\ &\quad - \overline{r}(T(u+rv),T(v)) - r(T(v),T(u+rv)) \\ &\quad + \overline{r}(T(u),T(v)) + r(T(v),T(u)) \end{aligned}$$

هر یک از جملات موجود در مجموع سمت راست تساوی بالا به شکل $(T(.),T(.))$ است. از آنجا که T حافظ ضرب داخلی است، در همه این جمله‌ها می‌توان T را حذف کرد و عبارت بدست آمده برابر عبارت حاصل از حذف Tها در عبارت سمت چپ تساوی بالا یعنی $(T(u+rv)-T(u)-rT(v), T(u+rv)-T(u)-rT(v))$ است. بنابراین

$$|T(u+rv)-T(u)-rT(v)|^2 = |(u+rv)-u-rv|^2 = 0$$

و این نتیجه می‌دهد $T(u+rv) = T(u) + rT(v)$.

(اشاره به قضیه اساسی هندسه آفین)

معمولاً به عملگرهای حافظ ضرب داخلی روی یک فضای ضرب داخلی *عملگر یکانی* می‌گویند. در صورتی که فضای ضرب داخلی حقیقی نیز باشد، به این عملگرها، *عملگر متعامد* نیز گفته می‌شود.

با توجه به قضیه..... عملگر $T: V \to V$ یکانی است اگر و تنها اگر $T^*T = I$. بنابراین عملگرهای یکانی وارون‌پذیرند و وارون آنها نیز الحاقی خود آنها است. بنابراین این عملگرها، عملگرهایی نرمال هستند.

قضیه. عملگرهای یکانی $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی استاندارد یا دوران هستند و یا تقارن نسبت به یک خط. در واقع عملگرهای یکانی جهت نگهدار $\mathbb{R}^2$ دوران و عملگرهای یکانی جهت برگردان $\mathbb{R}^2$ تقارن نسبت به یک خط اند.

اثبات. فرض کنید $\{e_1,e_2\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^2$ باشد. $\{T(e_1),T(e_2)\}$ نیز پایه‌ای متعامد و یکه برای $\mathbb{R}^2$ خواهند بود. هر برداریکه در $\mathbb{R}^2$ نمایش یکتایی به صورت $\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ دارد. بنابراین

$$\left.\begin{aligned} T(e_1) &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ T(e_2) &= \cos\phi e_1 + \sin\phi e_2 \\ (T(e_1),T(e_2)) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta-\phi)$$

$$\Rightarrow \theta - \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

با توجه به روابط زیر

$$\cos(\theta-\frac{\pi}{۲})=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+\frac{\pi}{۲})=-\sin\theta$$
$$\sin(\theta+\frac{\pi}{۲})=\cos\theta,\qquad \sin(\theta-\frac{\pi}{۲})=-\cos\theta$$

$T(e_۲)$ یا بردار $-\sin\theta e_۱+\cos\theta e_۲$ است و یا $\sin\theta e_۱-\cos\theta e_۲$. در حالت اول نمایش عملگر T در پایه استاندارد به صورت زیر است.

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

این عملگر همان دوران به اندازه θ در صفحه $\mathbb{R}^۲$ است. توجه کنید که T در این حالت جهت نگهدار است، زیرا $\det T=۱$. در حالت دوم نمایش عملگر T در پایه استاندارد به صورت زیر است.

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

در این حالت T جهت برگردان است، زیرا $\det T=-۱$. همچنین T دارای دو مقدار ویژه $\lambda=\pm۱$ است، زیرا

$$\begin{aligned}p_T(\lambda)&=\det\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\\ &=\lambda^۲-\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=\lambda^۲-۱=(\lambda-۱)(\lambda+۱)\end{aligned}$$

چون T نرمال است، راستاهای ویژه آن بر هم عمود هستند. بنابراین T دارای یک راستای ثابت است و راستای عمود بر آن توسط T قرینه می‌شود. در نتیجه T یک تقارن نست به راستای ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda=۱$ است. در زیر این راستا را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-۱ & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=۰$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ x(\cos\theta-۱)+y\sin\theta=۰\\ &\Rightarrow\ x=t\sin\theta=t\sin ۲(\frac{\theta}{۲})=۲t\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}\\ &\Rightarrow\ y=t(۱-\cos\theta)=t(۱-\cos^۲\frac{\theta}{۲}-\sin^۲\frac{\theta}{۲}))=۲t\sin^۲\frac{\theta}{۲}\end{aligned}$$

بنابراین $(\cos\frac{\theta}{۲},\sin\frac{\theta}{۲})$ تحت T ناوردا است. این نشان می‌دهد که در این حالت T یک تقارن نسبت به خطی است که با محور xها زاویه $\frac{\theta}{۲}$ می‌سازد.

قضیه. فرض کنید $T:V\to V$ یک عملگر یکانی باشد در این صورت $|\det T|=۱$ و اگر λ مقدار ویژه‌ای برای آن باشد آنگاه $|\lambda|=۱$.

اثبات. با توجه به اینکه $T^*T=I$ داریم

$$۱=\det I=\det(T^*T)=\det(T^*).\det(T)=\overline{\det T}.\det T=|\det T|^۲$$

اگر v بردار ویژه‌ای برای T متناظر مقدار ویژه λ باشد در این صورت

$$(v,v)=(T(v),T(v))=(\lambda v,\lambda v)=|\lambda|^۲\ (v,v)$$

توجه کنید در حالت مختلط $\det T$ برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه T است. بنابراین دراین حالت قسمت اول قضیه بالا از قسمت دوم نتیجه می‌شود. در حالت حقیقی $\det T = \pm 1$ و هر مقدار ویژه نیز (در صورت وجود) برابر ± 1 است.

تعریف. ماتریس مربعی A را یکانی گوییم هرگاه نمایش یک عملگر یکانی در پایه‌ای متعامد و یکه باشد. به ماتریس یکانی حقیقی ماتریس متعامد نیز می‌گویند.

با توجه به ویژگی‌های عملگرهای یکانی، ماتریس مربعی A یکانی است اگر و تنها اگر $A^*A = I$. این شرط در واقع مناسب‌ترین و عملی‌ترین محک برای بررسی یکانی بودن یک ماتریس است.

قضیه. فرض کنید A ماتریسی یکانی باشد در این صورت $|\det A| = 1$ و اگر λ مقدار ویژه‌ای برای آن باشد آنگاه $|\lambda| = 1$. اگر A یک ماتریس یکانی حقیقی باشد می‌توان آن را به عنوان ماتریس یکانی مختلط نیز نگاه کرد. در این صورت مقادیر ویژه مختلط آن در زوج‌های $(\lambda, \bar{\lambda})$ ظاهر می‌شوند که $|\lambda| = 1$.

قضیه. فرض کنید α و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای فضای ضرب داخلی V باشند. در این صورت $[I_V]_\beta^\alpha$ یک ماتریس یکانی است. اگر A یک ماتریس یکانی $n \times n$ و V یک فضای ضرب داخلی n بعدی باشد آنگاه به ازای هر پایه متعامد و یکه α برای V، پایه‌های متعامد و یکه β و γ یافت می‌شوند که $[I]_\beta^\alpha = A$ و $[I]_\alpha^\gamma = A$.

اثبات. اگر α و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای فضای ضرب داخلی V باشند آنگاه

$$([I_V]_\beta^\alpha)^*([I_V]_\beta^\alpha) = [I_V^*]_\alpha^\beta . [I_V]_\beta^\alpha = [I_V]_\alpha^\beta . [I_V]_\beta^\alpha = [I_V I_V]_\alpha^\alpha = I$$

تجزیه مقادیر تکین

فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی و $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد به گونه‌ای که $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای $\ker T$ تشکیل دهد. در این صورت $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} T$ است و می‌توان آن را به پایه β برای W گسترش داد. در این حالت $[T]_\beta^\alpha$ ماتریسی به شکل $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ خواهد بود که D یک ماتریس $r \times r$ قطری است. بنابراین پایه‌های زیادی مانند α و β برای V و W وجود دارند که نمایش T در آنها به شکل ساده بالا باشد. زمانی که فضاهای V و W فضاهای ضرب داخلی هستند، پایه‌های متعامد و یکه از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و این سوال مطرح می‌شود که آیا پایه‌های متعامد یکه α و β برای V و W وجود دارند که نمایش T در آنها به صورت بالا باشد. جواب مثبت است ولی این پایه‌ها در حالت کلی صرف نظر از جابجایی اعضا یکتا خواهند بود.

قضیه تجزیه مقادیر تکین. فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی بین فضاهای ضرب داخلی V و W باشد. در این صورت پایه‌های متعامد و یکه $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ برای V و W و اعداد مثبت $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ وجود دارند که برای $1 \le i \le r$، $T(v_i) = \lambda_i w_i$ و برای $i > r$، $T(v_i) = 0$. به عبارت دیگر نمایش T در پایه‌های α و β به صورت زیر است.

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

اثبات. T^*T یک عملگر خودالحاق روی V است. بنابراین پایه متعامد و یکه $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای V وجود دارد که $T^*T(v_i) = \mu_i v_i$. توجه کنید که برای هر i داریم

$$\mu_i = \mu_i(v_i, v_i) = (\mu_i v_i, v_i) = (T^*(T(v_i)), v_i) = (T(v_i), T(v_i)) \ge 0$$

دقت کنید که ما می‌دانستیم مقادیر ویژه عملگرهای خودالحاق حقیقی اند و TT^* نیز خودالحاق است؛ رابطه بالا نشان می‌دهد که علاوه بر این هیچ یک از مقادیر ویژه TT^* منفی نیز نیستند.

در صورت لزوم با جابجایی اعضای پایه α می‌توان فرض کرد که $\mu_1,\dots,\mu_r$ مثبت و $\mu_{r+1},\dots,\mu_n$ صفر اند. برای هر $1 \le i \le r$ قرار دهید $\lambda_i = \mu_i^{1/2}$ و $w_i = \lambda_i^{-1} T(v_i)$. در این صورت

$$(w_i, w_j) = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}(T(v_i), T(v_j)) = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}(T^*(T(v_i)), v_j) = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}(\mu_i v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

بنابراین $\{w_1,\dots,w_r\}$ مجموعه‌ای متعامد و یکه در W است که می‌توان آن را به پایه متعامد و یکه β برای W گسترش داد. پایه‌های α و β دارای ویژگی مورد نظر در این قضیه هستند.

قضیه تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. **فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس‌های یکانی U_1 و U_2 و ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر وجود دارند که**

$$A = U_2 \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1$$

معمولا به $\mu_1^{\frac{1}{2}},\dots,\mu_n^{\frac{1}{2}}$ مقادیر تکین نگاشت T می‌گویند. بنابراین $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ مقادیر تکین ناصفر نگاشت T هستند. در صورتی که T دارای مقادیر تکین خیلی کوچک باشد، T طول‌ها را در راستاهای متناظر بسیار کوچک می‌کند و در صورتی که T دارای مقادیر خیلی بزرگ باشد، T طول‌ها را در راستاهای متناظر با آن مقادیر تکین، بسیار بزرگ می‌کند. بنابراین اگر نسبت بزرگترین مقدار تکین T به کوچک‌ترین مقدار تکین T به عدد ۱ نزدیک باشد، T شبیه یک تجانس عمل می‌کند. ولی اگر این نسبت با ۱ فاصله داشته باشد، T هندسه اشکال را تا حد زیادی تغییر خواهد داد.

اثبات. نگاشت خطی متناظر ماتریس A از F^n به F^m را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$L_A : F^n \to F^m : L_A(X) = AX$$

طبق قضیه تجزیه مقادیر تکین پایه‌های متعامد و یکه α و β برای F^n و F^m وجود دارد که

$$[L_A]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A = [L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} = [I_{F^m} L_A I_{F^n}]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} = [I_{F^m}]_{\varepsilon_m}^{\beta} [L_A]_\beta^\alpha [I_{F^n}]_\alpha^{\varepsilon_n}$$

چون ε_n و α پایه‌های متعامد و یکه برای F^n اند، $[I_{F^n}]_\alpha^{\varepsilon_n}$ ماتریسی یکانی است و چون ε_m و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای F^m اند، $[I_{F^m}]_{\varepsilon_m}^{\beta}$ نیز ماتریسی یکانی است. بنابراین حکم قضیه ثابت می‌شود.

تجزیه قطبی

هر ماتریس مختلط دارای نمایش یکتایی به صورت $A = B_1 + iB_2$ است که در آن B_1 و B_2 دو ماتریس حقیقی اند. در واقع B_1 قسمت حقیقی A و B_2 قسمت موهومی A است. در این نمایش B_1 و B_2 می‌توانند به اندازه دلخواه پیچیده باشند. نمایش مناسب دیگری نیز برای ماتریس‌های مختلط مربعی به شکل $A = H_1 + iH_2$ وجود دارد که در آن H_iها ماتریس‌های هرمیتی (یا خودالحاق) اند. نمایش فوق نیز یکتاست و H_1 و H_2 از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

در این نمایش H_iها ماتریس‌های ساده‌ای اند. در واقع هر یک از آنها روی یک پایه متعامد و یکه قطری می‌شود و مقادیر ویژه‌اش حقیقی است. این نمایش، نمایش طبیعی‌تری برای ماتریس‌ها است. زیرا مشابه این نمایش برای عملگرها نیز وجود دارد. هر عملگر T دارای نمایش یکتا به شکل $T = S_1 + iS_2$ است که در آن S_1 و S_2 عملگرهایی خودالحاق اند که با روابط زیر معرفی می‌شوند.

$$S_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \qquad S_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

این نمایش شباهت دیگری نیز به نمایش اعداد مختلط دارد. هر عدد مختلط را می‌توان از دوران یک عدد حقیقی نامنفی بدست آورد. به عبارت دیگر هر عدد مختلط نمایشی به صورت $z = u.r$ دارد که در آن $|u| = 1$ و r یک عدد حقیقی است. در اینجا ماتریس‌ها (یا عملگرهای) نامنفی ماتریس‌ها (یا عملگرهای) نرمالی اند که مقادیر ویژه آنها نامنفی است. همچنین ماتریس‌ها (یا عملگرهای) یکه، ماتریس‌ها (یا عملگرهای) نرمالی هستند که مقادیر ویژه آنها اعداد مختلط یکه اند. این عملگرها همان عملگرهای یکانی اند و نمایش قطبی اعداد مختلط برای ماتریس‌ها (یا عملگر ها) به صورت زیر خواهد بود.

قضیه: هر عملگر T روی فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط دارای نمایشی به صورت $T = U.R$ است که در آن U یک عملگر یکانی و R یک عملگر نامنفی است. به علاوه در نمایش بالا R یکتا است.

هر ماتریس A دارای نمایشی به صورت $A = U.R$ است که در آن U یک ماتریس یکانی و R یک ماتریس نامنفی است. به علاوه در نمایش بالا R یکتا است.

اثبات. طبق قضیه تجزیه مقادیر تکین پایه‌های متعامد و یکه

$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ و } \beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

و اعداد حقیقی نامنفی $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ وجود دارند که $T(v_i) = \lambda_i w_i$. عملگرهای U و R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R : V \to V; \quad R(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \ldots, n$$
$$U : V \to V; \quad U(v_i) = w_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

از آنجا که R دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه با مقادیر ویژه نامنفی است، R یک عملگر نامنفی روی V است. و چون U یک پایه متعامد و یکه را به یک پایه متعامد و یکه تبدیل کرده است، U یک عملگر یکانی است. برای هر i نیز داریم

$$UR(v_i) = U(\lambda_i v_i) = \lambda_i U(v_i) = \lambda_i w_i = T(v_i)$$

بنابراین $T = UR$.

توجه کنید که برای هر نمایش قطبی $T = UR$ داریم

$$T^*T = (UR)^*(UR) = R^*U^*UR = R^2$$

و چون T^*T عملگری نامنفی است، یکتایی R به کمک لم زیر بدست می‌آید.

لم. هر عملگر نامنفی، دارای جذر نامنفی یکتایی است. به عبارت دیگر اگر T عملگری نامنفی باشد، عملگر نامنفی یکتای R وجود دارد که $T = R^2$.

اثبات. چون عملگر T نامنفی است، دارای پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه مانند $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و مقادیر ویژه آن نیز نامنفی است. فرض کنید $T(v_i) = \mu_i v_i$. عملگر R را به صورت زیر تعریف کنید.

$$R(v_i) = \sqrt{\mu_i} v_i\,, \quad i = ۱,...,n$$

واضح است که برای هر i، $T(v_i) = R^۲(v_i)$. بنابراین $T = R^۲$. و چون α پایه‌ای متعامد و یکه است و $\sqrt{\mu_i}$ها نامنفی اند، R عملگری نامنفی است.

حال فرض کنید R عملگری نامنفی باشد که $T = R^۲$. اگر $\lambda_۱,...,\lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز R و $V_{\lambda_۱},...,V_{\lambda_k}$ فضاهای ویژه آن باشند آنگاه $V_{\lambda_۱},...,V_{\lambda_k}$ داخل فضاهای ویژه T متناظر مقادیر ویژه $\lambda_۱^۲,...,\lambda_k^۲$ خواهند بود. و چون $V = V_{\lambda_۱} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$ و $\lambda_۱^۲,...,\lambda_k^۲$ متمایز اند، $V_{\lambda_۱},...,V_{\lambda_k}$ دقیقاً فضاهای ویژه T متناظر مقادیر ویژه $\lambda_۱^۲,...,\lambda_k^۲$ اند. بنابراین فضاهای ویژه و مقادیر ویژه عملگر نامنفی R کاملاً از روی عملگر T مشخص می‌شوند. این نشان می‌دهد که عملگر R یکتا است.

کاملا به صورت مشابه می‌توان نشان داد که هر عملگر نامنفی دارای ریشه nام یکتا در بین عملگرهای نامنفی است. در واقع عملگرهای خودالحاق متعددی می‌توانند ریشه nام یک عملگر نامنفی باشند (در حالت حقیقی برای nهای زوج)، ولی در بین عملگرهای نامنفی این ریشه nام یکتا است.

توجه به ماتریس‌های خود الحاق !!!!!
