بسمه تعالی

پاسخ تمرین تحویلی چهارم ــ درس ریاضی‌نویسی ــ دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا توفیقی محمدی ــ رشته علوم کامپیوتر ــ شماره‌دانشجویی: ۹۶۱۰۰۳۶۳

پرسش

یک صفحه‌ی شطرنج $n \times n$ داریم، تعدادی مهره‌ی رخ در آن قرار گرفته است به طوری که هر خانه‌ی خالی توسط حداقل n رخ تهدید می‌شود.
ثابت کنید تعداد رخ‌ها حداقل $\frac{n^2}{4}$ است.

پاسخ

برای اثبات از بین سطرها و ستون‌ها آن‌را که کمترین تعداد مهره‌ی رخ را در نظر می‌گیریم، بدون خدشه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم این سطر یا ستون، یک سطر باشد و کمترین تعداد مهره‌های رخ قرار گرفته در آن برابر با m باشد و این سطر را R می‌نامیم.
اگر $m \geq \frac{n}{2}$ باشد آنگاه در هر سطر لاآقل $\frac{n}{2}$ مهره قرار گرفته پس در مجموع لاآقل $n \times \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$ مهره در صفحه قرار گرفته و حکم ثابت می‌شود.
حال اگر $m < \frac{n}{2}$ باشد؛ خانه‌های خالی سطر R را در نظر بگیرید، هر ستون از این خانه‌ها توسط m مهره به صورت افقی تهدید می‌شود، پس باید توسط حداقل $n-m$ مهره به صورت عمودی تهدید شود تا تعداد تهدیدهای آن به حداقل $n-m+m=n$ برسد، پس هر ستون از خانه‌های خالی سطر R حداقل $n-m$ مهره دارد، همچنین سطر R دارای m مهره بود، پس دارای $n-m$ خانه‌ی خالی است پس تعداد مهره‌های آن ستون‌ها درمجموع حداقل $(n-m)^2$ است. همچنین برای بقیه‌ی ستون‌ها طبق فرض حداقل m خانه دارند و تعداد ستون‌های باقی‌مانده برابر با m است، پس در این ستون‌ها حداقل m^2 مهره قرار گرفته است.
پس در مجموع تعداد مهره‌های صفحه برابر با مجموع تعداد مهره‌های ستون‌های آن است که حداقل برابر با $(n-m)^2+m^2$ است.
ادعا می‌کنیم $(n-m)^2+m^2 \geq \frac{n^2}{2}$ است.

$$(n-m)^2+m^2 = n^2+m^2-2nm+m^2 = m^2-2nm+2n^2$$

که $f(x) = 2m^2-2nm+n^2$ خود معادله‌ی یک سهمی بر حسب m با نقطه می‌نیمم

$$f(\frac{n}{2}) = 2 * \frac{n^2}{4} - 2 \times n \times \frac{n}{2} + n^2 = \frac{n^2}{2} - n^2 + n^2 = \frac{n^2}{2}$$

است، پس $f(x) \geq \frac{n^2}{2} \to (n-m)^2+m^2 \geq \frac{n^2}{2}$ است و ادعای ما ثابت شد. پس تعداد مهره‌های صفحه حداقل $(n-m)^2+m^2$ بود که این خود از $\frac{n^2}{2}$ بیشتر یا مساوی بود و حکم ما ثابت شد.