Invariance des groupes d'homologie par subdivision barycentrique et conjecture sur le temps de calcul

RAVELOJOELITAFIKA Tommy Alan

April 27, 2025

Abstract

Ce rapport présente une étude expérimentale de l'invariance des groupes d'homologie d'un complexe simplicial après subdivisions barycentriques successives. Les résultats confirment que les groupes d'homologie restent inchangés, conformément à la théorie. Une analyse des temps d'exécution permet de formuler une conjecture sur la complexité algorithmique du calcul des groupes d'homologie après la n-ième subdivision barycentrique.

1 Introduction

1.1 Contexte théorique

En topologie algébrique, les groupes d'homologie sont des invariants fondamentaux qui capturent les propriétés topologiques d'un espace. La subdivision barycentrique est une transformation géométrique qui subdivise un simplexe en simplexe plus petit pour ainsi sans en altérer la topologie en théorie. Théoriquement, les groupes d'homologie devraient donc rester invariants après subdivision.

1.2 Objectif

Ce rapport vise à :

- Vérifier expérimentalement l'invariance des groupes d'homologie après subdivisions barycentriques.
- Analyser le temps de calcul des groupes d'homologie pour formuler une conjecture sur la complexité algorithmique.

2 Méthodologie

2.1 Description de l'expérience

Un complexe simplicial (non spécifié) a été subdivisé barycentriquement à plusieurs reprises. Les groupes d'homologie H_0, H_1, et H_2 ont été calculés à chaque étape à l'aide d'un algorithme standard (e.g., réduction de matrice de bord). Les temps d'exécution ont été mesurés pour $n = 0, 1, 2$ subdivisions.

3 Résultats

3.1 Groupes d'homologie

Les groupes d'homologie restent inchangés après chaque subdivision :

$$H = \{0 : \mathbb{Z},\ 1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ 2 : \mathbb{Z}\}$$

Ce résultat confirme l'invariance théorique.

3.2 Temps de calcul

Les temps d'exécution mesurés sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Subdivisions (n)	Temps (s)	Facteur multiplicateur
0	0.4257	-
1	21.5199	$\times 50.6$
2	2392.0713	$\times 111.1$

4 Analyse

4.1 Invariance des groupes d'homologie

La stabilité des groupes H_0, H_1, H_2 démontre expérimentalement que la subdivision barycentrique préserve la structure homologique. Ce résultat est cohérent avec le théorème d'isomorphisme de invariance homologique par subdivision.

4.2 Complexité algorithmique

D'après les résultas expérimental l'augmentation du temps de calcul est exponentiel. Soient les observations :

$$\begin{cases} T(0) \approx 0.43 \text{ s} \\ T(1) \approx T(0) \times 50.6 \\ T(2) \approx T(1) \times 111.1 \end{cases}$$

Les facteurs de croissance entre $T(1)$ et $T(2)$ semble indiquer un multiplication par un facteur $50 \cdot C$ compris entre 2 et 3 .Une modélisation possible est une complexité exponentielle de la forme :

$$T(n) \approx T(0) \cdot 50^n \cdot 3^{n-1}$$

Nous conjecturons donc que :

$$T(n) = o(150^n)$$

où k et C dépendent de la taille et de la dimension du complexe initial.

5 Conclusion

Les résultats expérimentaux valident l'invariance homologique par subdivision barycentrique. La croissance rapide des temps de calcul suggère une complexité algorithmique exponentielle,probabelment lié à la division des des simplexes en 3 et à la géométrie du tore.