Курс математической логики по Штукенбергу Д.Г.

Daniyar Itegulov, Ignat Lolkutov

23 января 2015 г.

Содержание

Mykhail Volkhov, 2538, 2014Sep-2015Jan

Я не отвечаю за верность написанного - много информации я придумал сам, много достал из недостоверных источников.

1. Базовые понятия

1.1. Формальные системы и модели

Сделано мной для меня самого, be careful

Мы работаем с формальными системами. Формальная система определяется сигнатурой, грамматикой, набором аксиом и набором правил вывода.

1. Сигнатура ФС – это (Pr, F, C, Links, Misc, arity):
   - Pr – описывает предикаты (число + заглавная буква латинского алфавита)
   - F – множество функций (заглавные буквы латинского алфавита)
   - C – описывает константы
   - Links – множество связок ({«$\rightarrow$», «$\cup$», «пробел»})
   - Misc – дополнительные элементы ({«(», «)», «пробел»})
   - arity: $\mathrm{Foo} \cup \mathrm{Pr} \cup \mathrm{C} \rightarrow \mathbb{N}$ возвращает арность
2. Грамматика описывает то, как мы можем строить выражения в соответствии с нашей сигнатурой.
3. Аксиомы – выражения в нашей грамматике.
4. Правила вывода – пары вида (List, List), где List – список утверждений. Первый элемент – посылки, второй – то, что из них следует.

Иногда нам хочется что-то посчитать и мы прикручиваем к формальной системе модель – корректную структуру с оценкой. Структура – это сигнатура с интерпретацией и носителем.

1. Сигнатура структуры – (R, F, C, arity):
   - Pr – множество символов для предикатов
   - F – функциональных символов
   - C – символов констант
   - arity – функция, определяющая арность $\mathsf{Pr} \cup \mathsf{F} \rightarrow \mathbb{N}$.
2. Интерпретация – это приписывание символам значения и правил действия (отображения из $\mathsf{Pr} \cup \mathsf{F} \cup \mathsf{C}$ в носитель)
3. Носитель – это объединение множеств, в котором обязательно присутствует V – множество истинностных значений. Если же мы рассматриваем только нульместные предикаты, на этом можно остановится, otherwise часто вводится P – предметное множество, в которое отображаются элементы из F, C.

TODO Эта реализация структуры не определяет ничего в районе аксиоматики, но аксиоматически заданные структуры существуют – например в ФА есть Пеано.

Если все аксиомы тавтологии, то структура корректна. В таком случае она называется моделью.

Оценку иногда определяют раньше/позже чем модель, мне удобно думать о ней, как об отдельной сущности, потому что она связывает модель с ФС.

Оценка – это функция оценки и функция тавтологии.

1. Функция оценки – отображение из (множества всех формул, сгенеренных грамматикой) x (какие-нибудь допаргументы) в V модели. Дополнительные аргументы – например оценки элементов связки.

2. Функция тавтологии – отображение из множества формул грамматики в $\{0, 1\}$ – является ли формула тавтологией. Тавтология использует функцию оценки. Например, тавтология – это выражение, оценка которого на любых аргументах возвращает $\sigma \in V$ – какой-то элемент V.

Когда говорится «сигнатура модели» – имеется в виду ровно она. Когда говорится «сигнатура ФС» – имеется в виду скорее всего объединение сигнатур, а может только сигнатура самой ФС. Первый вариант тут предпочтительней.

2. Определения (нужно знать идеально)

Определения тут зачастую дублируют то, что написано в самом конспекте, поэтому удаление этого блока сэкономит бумагу при печати.

2.1. ИВ

Формальная система с алгеброй Яськовского J_0 в качестве модели, множество истинностных значений $\{0, 1\}$. Формальная теория нулевого порядка, кванторов нету, предикаты – это пропозициональные переменные. Аксиомы:

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma \to \beta)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

2.2. Общезначимость, доказуемость, выводимость

- Общезначимость формулы – ее свойство в теории с моделью. Общезначимость можно определить как угодно, в принципе. Например в ИВ общезначимость - это что оценка формулы на любых значениях свободных переменных отображает в 1. В модели крипке – существование формулы во всех мирах и т.д.

- Доказуемость – свойство формулы в теории, значащее, что существует доказательство для этой формулы. Доказательство для теории тоже определяется по разному (последовательность утверждений, каждое из которых есть аксиома или следует по правилу вывода из предыдущих в ИВ, дерево с выводами в S_∞)

- Выводимость – в общем случае часто используется как аналог доказуемости, в ИВ это доказуемость из всего, что и ранее + из посылок.

2.3. Теорема о дедукции для ИВ

Теорема, утверждающая, что из $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ следует $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ и наоборот.
Доказывается вправо поформульным преобразованием, влево добавлением 1 формулы. Работает в ИВ, ИИВ, предикатах.

2.4. Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема 2.1 (о полноте исчисления высказываний)**.** Исчисление предикатов полно. Общий ход д-ва: строим док-ва для конкретных наборов перменных, 2^n, где n – количество возможных переменных. Потом их мерджим.

2.5. ИИВ

Берем ИВ, выкидываем 10 аксиому, добавляем $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$.
Она доказывается и в ИВ:

Лемма 2.2. $\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

(1)	α	Допущение
(2)	$\neg\alpha$	Допущение
(3)	$\alpha \to \neg\beta \to \alpha$	Сх. акс. 1
(4)	$\neg\beta \to \alpha$	М.Р. 1,3
(5)	$\neg\alpha \to \neg\beta \to \neg\alpha$	Сх. акс. 1
(6)	$\neg\beta \to \neg\alpha$	М.Р. 2,5
(7)	$(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\beta)$	Сх. акс. 9
(8)	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\beta)$	М.Р. 4,7
(9)	$\neg\neg\beta$	М.Р. 6,8
(10)	$\neg\neg\beta \to \beta$	Сх. акс. 10
(11)	β	М.Р. 9,10

А еще в ИИВ главная фишка – недоказуемо $\alpha \vee \neg\alpha$ (можно подобрать такую модель).

2.6. Теорема Гливенко

Теорема 2.3. Гливенко Если в ИВ доказуемо α, то в ИИВ доказуемо $\neg\neg\alpha$

Общий ход д-ва: говорим, что если в ИИВ доказуема δ_i, то в ней же доказуема $\neg\neg\delta_i$. Доказываем руками двойное отрицание 10 аксиомы и то же самое для МР.

2.7. Порядки

Определение. Частичный порядок – рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение.

Определение. Частично упор. мн-во – множество с частичным порядком на элементах.

Определение. Линейно упорядоч. мн-во – множество с частичным порядком, в котором два любых элемента сравнимы.

Определение. Фундированное мн-во – частично упорядоч. множество, в котором каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент.

Определение. Вполне упорядоченное множество – фундированное множество с линейным порядком.

2.8. Решетки (все свойства)

- Просто Решетка – это $(L, +, *)$ в алгебраическом смысле и $(L, \leqslant)$ в порядковом. Решетку можно определить как алгебраическую структуру через аксиомы: коммутативность, ассоциативность, поглощение. Решетку можно определить как упорядоченное множество через множество с частичным порядком на нем, тогда операции +, * определяются как sup и inf:

$$\sup p = \min\{u \mid u \geqslant alls \in p\}$$
$$\inf p = \max\{u \mid u \leqslant alls \in p\}$$
$$a + b = \sup\{a, b\}$$
$$a * b = \inf\{a, b\}$$

  Если для двух элементов всегда можно определить $a + b$ и $a * b$, то такое множество назывется решеткой.

- Дистрибутивная решетка – решетка, в которой работает дистрибутивность: $a * (b + c) = (a * b) + (b * c)$

- Импликативная решетка – всегда существует псевдодополнение b ($b \to a$) $a \to b = \max\{c | c \times a \leqslant b\}$ Имеет свойства, что в ней всегда есть максимальный элемент $a \to a$ и что она дистрибутивна.

2.9. Булевы/псевдобулевы алгебры

- Булева алгебра можно определить так:

  1. $(L, +, *, -, 0, 1)$ с выполненными аксиомами – коммутативность, ассоциативность, поглощение, две дистрибутивности и $a * -a = 0$, $a + -a = 1$.
  2. Импликативная решетка над фундированным множеством. Тогда мы в ней определим 1 как $a \to a$ (традиционно для импликативной), отрицание как $-a = a \to 0$, и тогда последняя аксиома из предыдущего определения будет свойством:

$$a * -a = a * (a \to 0) = a * (\max c : c * a \leqslant 0) = a * 0 = 0$$

     Насчет второй аксиомы – должно быть 1. То есть лучше как-то через аксиомы определять, видимо.

$$a + -a = a + (a \to 0) = a + (maxc : c * a \leqslant 0) = a + 0 = a$$

     // не 1

- Псевдобулева алгебра – это импликативная решетка над фундированным множеством с $\neg a = (a \to 0)$

2.10. Топологическая интерпретация ИИВ

Булеву алгебру и алгебру Гейтинга можно интерпретировать на множестве $\mathbb{R}^n$. Тогда заключения о общезначимости формулы можно делать более наглядно. Давайте возьмем в качестве множества алгебры все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Определим операции следующим образом:

1. $a + b => a \cup b$

2. $a * b => a \cap b$

3. $a \to b => \mathrm{Int}(a^c \cup b)$

4. $-a => \mathrm{Int}(a^c)$

5. $0 => \circledcirc$

6. $1 => \circledcirc\{-L\}$

2.11. Модель Крипке

$Var = \{P, Q, \dots\}$ Модель Крипке – это $< W, \leqslant, \nu >$, где

- W – множество «миров»
- $\leqslant$ – частичный порядок на W (отношение достижимости)
- ν: $W \times Var \to \{0, 1, \_\}$ – оценка перменных на W, монотонна (если $\nu(x, P) = 1$, $x \leqslant y$, то $\nu(y, P) = 1$ – формулу нельзя un'вынудить)

  Правила:

- $W, x \models P \Leftrightarrow \nu(x, P) = 1 P \in Var$
- $W, x \models (A \& B) \Leftrightarrow W, x \models A \& W, x \models B$
- $W, x \models (A \vee B) \Leftrightarrow W, x \models A \vee W, x \models B$
- $W, x \models (A \to B) \Leftrightarrow \forall y \geqslant x (W, y \models A \circledcirc W, y \models B)$
- $W, x \models \neg A \Leftrightarrow \forall y \in x (W, x \neg \models A)$

В мире разрешается быть не вынужденной переменной и ее отрицанию одновремеменно. Формула называется тавтологией в ИИВ с моделью Крипке, если она истинна (вынуждена) в любом мире любой модели Крипке.

2.12. Вложение Крипке в алгебры Гейтинга

Возьмем модель Крипке, возьмем какое-то объединение поддеревьев со всеми потомками, каждое такое объединение пусть будет входить в алгебру Гейтинга. $\leqslant$ – отношение «быть подмножеством». Определим 0 как $\emptyset$ (пустое объединение поддеревьев); Определим операции:

$$+ = \cup,$$
$$* = \cap,$$
$$a \to b = \cup\{z \in H \mid z \leqslant x^c \cup y\}$$

Так созданное множество с операциями является импликативной решеткой, в которой мы определим $-a = a \to 0$, получим булеву алгебру.

2.13. Полнота ИИВ в алгебрах Гейтинга и моделях Крипке

ИИВ полно относительно алгебр Гейтинга и моделей Крипке. Общий ход доказательства первого сводится к вложению в Гейтинга алгебры Линденбаума-Тарского, а второго - к построению дизъюнктивного множества всех доказуемых формул, являющегося миром Крипке.

2.14. Нетабличность ИИВ

Не существует полной модели, которая может быть выражена таблицей (конечной – алгебра Гейтинга и Крипке не табличны, так как и там и там связки определяются иначе). От противного соорудим табличную модель и покажем, что она не полна, привев пример большой дизъюнкции из импликаций, для которой можно построить модель Крипке в которой она не общезначима.

2.15. Предикаты

Теория первого порядка, расширяющая исчисление высказываний. Добавляются две новые аксиомы $\forall x.A \to A[x := \eta]$, где η свободна для подстановки в A $A[x := \eta] \to \exists x.A$, $-//-$

Правила вывода:

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x.B}$$

x не входит сводобно в A

$$\frac{A \to B}{\exists x.A \to B}$$

x не входит свободно в B

2.16. Теорема о дедукции в предикатах

Аналогично 1 теореме о дедукции в ИВ, но в доказательстве должны отсутствовать применения правил для кванторов по переменным входящих свободно в выражение γ $\Gamma, \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \gamma \to \alpha$

2.17. Теорема о полноте исчисления предикатов

Исчисление предикатов полно (заметим, что относительно любой модели). Суть в том, что если предикаты непротиворечивы, то у них есть модель. Если у них есть модель, то типа там можно по контрпозиции показать $\models \alpha$.

2.18. Теории первого порядка, определение структуры и модели

Теория первого порядка – это формальная система с кванторами по функциональным символам, но не по предикатам. Рукомахательное определение – это фс с логикой первого порядка в основе, в которой абстрактные предикаты и функциональные символы определяются точно (а может такое определение даже лучше).

Структура по ДГ: Структурой теории первого порядка мы назовем упорядоченную тройку $< D, F, P >$, где F — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. функций, и $P = P_0, P_1 \ldots$ — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. предикатов, D — предметное множество.

Понятие структуры — развитие понятия оценки из исчисления предикатов. Но оно касается только нелогических составляющих теории; истинностные значения и оценки для связок по-прежнему определяются исчислением предикатов, лежащим в основе теории. Для получения оценки формулы нам нужно задать структуру, значения всех свободных индивидных переменных, и (естественным образом) вычислить результат.

Структура по-моему: Все то же самое определение из ИВ. Мы просто забиваем на предикаты в ИВ (не определям их), расширяем нашу сигнатуру (добавляя конкретные предикаты и функциональные символы), определяем для нее интерпретацию.

И как всегда,.. Модель – это корректная структура (любое доказуемое утверждение должно быть в ней общезначимо).

2.19. Аксиоматика Пеано

Множество N удовлетворяет аксиоматике Пеано, если:

1. $0 \in N$
2. $x \in N, succ(x) \in N$
3. $\nexists x \in N : (succ(x) = 0)$
4. $(succ(a) = c \& succ(b) = c) \rightarrow a = b$
5. $P(0) \& \forall n.(P(n) \rightarrow P(succ(n))) \rightarrow \forall n.P(n)$

2.20. Формальная арифметика – аксиомы

Формальная арифметика – это теория первого порядка, у которой сигнатура определена как: (циферки, логические связки, алгебр. связки, $'$), а интерпретацию сейчас будем определять. Интерпретация определяет два множества – V, P – истинностные и предметные значения. Пусть множество V = $\{0, 1\}$ по-прежнему. P = {всякие штуки, которые мы можем получать из логических связок и 0} Определим оценки логических связок естественным образом. Определим алгебраические связки так: $+(a, 0) = a$ $+(a, b') = (a + b)'$ $*(a, 0) = 0$ $*(a, b') = a * b + a$

2.20.1. Аксиомы

1. $a = b \rightarrow a' = b'$
2. $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
3. $a' = b' \rightarrow a = b$
4. $\neg(a' = 0)$
5. $a + b' = (a + b)'$

6. $a + 0 = a$

7. $a * 0 = 0$

8. $a * b' = a * b + a$

9. $\varphi[x := 0] \& \forall x.(\varphi \to \varphi[x := x']) \to \varphi$ // φ содержит св.п x

2.21. Рекурсивные функции

$Z(x) = 0$
$N(x) = x + 1$
$U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$
$S\langle f, g_1, \ldots, g_n\rangle(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1 \ldots x_m), \ldots g_n(x_1, \ldots, x_m))$
$R\langle f, g\rangle(x_1 \ldots x_n, n) = \begin{cases} f(x_1 \ldots x_n) & n = 0 \\ g(x_1 \ldots x_n, n, R\langle f, g\rangle(x_1 \ldots x_n, n-1)) & n > 0 \end{cases}$
$\mu\langle f\rangle(x_1, \ldots, x_n)$ – минимальное k, такое что $f(x_1 \ldots x_n, k) = 0$

2.22. Функция Аккермана

$$\begin{aligned} A(0, n) &= n + 1 \\ A(m, 0) &= A(m-1, 1) \\ A(m, n) &= A(m-1, A(m, n-1)) \end{aligned}$$

2.23. Существование рек.ф-й не явл. ф-ей Аккермана (определение конечной леммы)

Пусть $f(n_1, \ldots, n_k)$ – примитивная рекурсинвная функция, $k \geqslant 0$. $\exists J : f(n_1 \ldots n_k) < A(J, \sum(n_1, \ldots n_k))$
Доказывается индукцией по рекурсивным функциям.

2.24. Представимость

Функция $f : N^n \to N$ называется представимой в формальной арифметике, если существует отношение $a(x_1 \ldots x_{n+1})$, ее представляющее, причем выполнено следующее:

1. $f(a, b, \ldots) = x \Leftrightarrow \vdash a(a\text{~}, b\text{~}, \ldots x\text{~})$

2. $\exists! x. f(a, b, \ldots x)$ (вот это свойство вроде бы не обязательно, но ДГ его писал).

2.25. Выразимость

Отношение n называется выразимым, если существует предикат N его выражающий, такой что

1. $n(x_1 \ldots x_n) \Rightarrow \vdash N(x_1\text{~}, \ldots x_n\text{~})$

2. $n(x_1 \ldots x_n) \Rightarrow \vdash \neg N(x_1\text{~}, \ldots x_n\text{~})$

2.26. Лемма о связи представимости и выразимости

Если n выразимо, то C_n представимо. C_n = 1 если n, и нулю если !n

2.27. Бета-функция Гёделя, Г-последовательность

β(b, c, i) = k_i Функция, отображающая конечную последовательность из N (a_i) в k_i. Работает через магию, математику, простые числа и Гёделеву последовательность, которая подходит под условия китайской теоремы об остатках. β(b, c, i) = b % ((i + 1) * c + 1)

2.28. Представимость рек.ф-й в ФА (знать формулы для самых простых)

Рекурсивные функции представимы в ФА

1. $z(a, b) = (a = a)\&(b = 0)$
2. $n(a, b) = (a = b')$
3. $u_i^n = (x_1 = x_1)\&\dots\&(x_n = x_n)\&(x_{n+1} = x_i)$
4. $s(a_1 \dots a_m, b) = \exists b_1 \dots \exists b_n(G_1(a_1 \dots a_n, b_1)\&\dots\&Gn(a_1 \dots a_m, b_n)$
5. $r(x_1, \dots, x_n, k, a) =$
$$\begin{aligned}&\exists b\exists c(\exists k(\beta(b, c, 0, k)\&\varphi(x_1, \dots, x_n, k))\&\\&\quad B(b, c, x_{n+1}, a)\&\\&\quad \forall k(k < x_{n+1} \to \exists d\exists e(B(b, c, k, d)\&B(b, c, k', e)\&G(x_1 \dots x_n, k, d, e))))\end{aligned}$$
6. $m\langle F\rangle(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, 0)\&\forall y((y < x_{n+1}) \to \neg F(x_1, \dots, x_n, y, 0))$

2.29. Гёделева нумерация (точно)

a	$\ulcorner a \urcorner$	описание
(	3	
)	5	
,	7	
$\neg$	9	
$\to$	11	
$\vee$	13	
&	15	
$\forall$	17	
$\exists$	19	
x_k	$21 + 6 \cdot k$	переменные
f_k^n	$23 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	n-местные функцион. символы (′, +, *)
P_k^n	$25 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	n-местные предикаты (=)

2.30. Выводимость и рекурсивные функции (че там с Тьюрингом)

Основные тезисы по вопросу:

- $Emulate(input, prog) = plog(R < f, g > (< `S, input, 0 >, , pb, pc, tb, tc, steps(-//-)), 1) == F$
- $Proof(term, proof) = Emulate(proof, MY_PROOFCHECKER)\&\&(plog(proof, len(proof)) = term)$
- Любая представимая в ФА ф-я является рекурсивной $f(x_1 \dots x_n) = plog(\langle S\langle G_\varphi, U_{n+1,1}, \dots, U_{n+1,n},$ G_φ тут принимает $n + 2$ аргумента: $x_1 \dots x_n, p, b$ и возвращает 0 если p – доказательство $\varphi(x_1 \dots x, p)$, представляющего f.

2.31. Непротиворечивость

Теория непротиворечива, если в ней нельзя одновременно вывести a и $\neg a$. Одновременная выводимость $\neg a$ и a эквивалентна выводимости $a\&\neg a$

2.32. ω-непротиворечивость

Теория ω-непротиворечива, если из $\forall \varphi(x) \vdash \varphi(x\sim)$ следует $\nvdash \exists p \neg\varphi(p)$. Проще говоря, если мы взяли формулу, то невозможно вывести одновременно $\exists x \neg A(x)$ и $A(0), A(1), \dots$

2.33. Первая теорема Гёделя о неполноте

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(`\sigma\ )$
2. Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то недоказуемо $\neg\sigma(`\sigma\sim)$

2.34. Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней найдется такая формула φ, что $\nvdash \varphi$ и $\nvdash \neg\varphi$

2.35. Consis

Consis – утверждение, формально доказывающее непротиворечивость ФА То есть $\vdash Consis =>$ непротиворечива

2.36. Условия Г-Б (наизусть)

Пусть πg(x, p) выражает Proof(x, p). $(x) = \exists t.g(x, t)$ действительно показывает, что выражение доказуемо, если

1. $\vdash a => \vdash (`a\sim)$
2. $\vdash \pi(`a\sim) \to \pi(`\pi(`a\sim)\sim)$
3. $\vdash \pi(`a\sim) \to \pi(`(a \to b)\sim) \to \pi(`b\sim)$

2.37. Лемма о самоприменении

$a(x)$ – формула, тогда $\exists b$ такой что

1. $\vdash a(`b\sim) \to b$
2. $\vdash \beta \to a(`b\sim)$

2.38. Вторая теорема Гёделя о неполноте ФА

Если теория непротиворечива, в ней $\nvdash Consis$

2.39. Теория множеств

Теория множеств – теория первого порядка, в которой есть единственный предикат $\in$ (в ФА был =), есть связка $\leftrightarrow$, есть пустое множество, операции пересечения и объединения. $x \cap y = z$, тогда $\forall t(t \in z \leftrightarrow t \in x \& t \in y)$ $x \cup y = z$, тогда $\forall t(t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y)$ $D_j(x) \forall a \forall b(a \in x \& b \in x \& a \neq b \to a \cap b = \emptyset)$

2.40. ZFC

2.40.1. Аксиома равенства

$\forall x \forall y \forall z((x = y \& y \in z) \to x \in z)$ Если два множества равны, то любой элемент лежащий в первом, лежит и во втором

2.40.2. Аксиома пары

$\forall x \forall y(\neg(x = y) \to \exists p(x \in p \& y \in p \& \forall z(z \in p \to (x = z \vee y = z))))$ $x \neq y$, тогда сущ. $\{x, y\}$

2.40.3. Аксиома объединений

$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists p \forall y(y \in p \leftrightarrow \exists s(y \in s \& s \in x)))$ Если x не пусто, то из любого семейства множеств можно образовать «кучу-малу», то есть такое множество p, каждый элемент y которого принадлежит по меньшей мере одному множеству s данного семейства s x

2.40.4. Аксиома степени

$\forall x \exists p \forall y(y \in p \leftrightarrow y \in x)$ P(x) – множество степени x (не путать с 2x – булеаном) Это типа мы взяли наш x, и из его элементов объединением и пересечением например понаобразовывали кучу множеств, а потом положили их в p.

2.40.5. Схема аксиом выделения

$\forall x \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow (y \in x \& \varphi(y)))$ Для нашего множества x мы можем подобрать множество побольше, на котором для всех элементов, являющихся подмножеством x выполняется предикат.

2.40.6. Аксиома выбора (не входит в ZF по дефолту)

Если $a = Dj(x)$ и $a \neq 0$, то $x \in a \neq 0$

2.40.7. Аксиома бесконечности

$\exists N(\emptyset \in N \& \forall x(x \in N \to x \cup \{x\} \in N))$

2.40.8. Аксиома фундирования

$\forall x(x = \emptyset \vee \exists y(y \in x \& y \cap x = \emptyset))$ $\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \& y \cap x = \emptyset))$ Равноценные формулы.

Я бы сказал, что это звучит как-то типа «не существует бесконечно вложенных множеств»

2.40.9. Схема аксиом подстановки

$\forall x \exists! y. \varphi(x, y) \to \forall a \exists b \forall c(c \in b \leftrightarrow (\exists d.(d \in a \& \varphi(d, c))))$ Пусть формула φ такова, что для при любом x найдется единственный y такой, чтобы она была истинна на x, y, тогда для любого a найдется множество b, каждому элементу которого c можно сопоставить подмножество a и наша функция будет верна на нем и на c Типа для хороших функций мы можем найти множество с отображением из его элементов в подмножество нашего по предикату.

2.41. Ординальные числа, операции

- Определение вполне упорядоченного множества (фундированное с линейныи порядком).
- Определение транзитивного множества Множество X транзитивно, если $\forall a \forall b((a \in b \& b \in x) \to a \in x)$
- Ординал – транзитивное вполне упорядоченное отношением $\in$ мн-во
- Верхняя грань множества ординалов S $C|\{C = min(X) \& C \in X \mid X = \{z \mid \forall(y \in S)(z \geqslant y)\}\}$ $C = Upb(S)$ $Upb(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$
- Successor ordinal (сакцессорный ординал?) Это b = a' = a ∪ {a}
- Предельны ординал Ординал, не являющийся ни 0 ни successor'ом.
- Недостижимый ординал ε – такой ординал, что $\varepsilon = w^{\varepsilon}$ $\varepsilon_0 = Upb(w, w^w, w^{w^w}, w^{w^{w^w}}, \dots)$ – минимальный из ε
- Канторова форма – форма вида ∑($a*w^b$+c), где b – ординал, последовательность строго убывает по b. Есть слабая канторова форма, где вместо $a(a \in N)$ пишут a раз w^b. В канторовой форме приятно заниматься сложениями и прочим, потому что всякие upb – слишком ниочем.

$$x + 0 = x$$
$$x + c' = (x + c)'$$
$$x + \lim(a) = \mathrm{Upb}\{x + c \mid c < a\}$$
$$x * 0 = 0$$
$$x * c' = x * c + x$$
$$x * \lim(a) = \mathrm{Upb}\{x * c \mid c < a\}$$
$$x^0 = 1$$
$$x^{c'} = (x^c) * x$$
$$x^{\lim(a)} = \mathrm{Upb}\{x^c \mid c < a\}$$

2.42. Кардинальные числа, операции

Определение. Будем называть множества равномощными, если найдется биекция.

Определение. Будем называть A не превышающим по мощности B, если найдется инъекция $A \to B(|A| \leqslant |B|)$

Определение. Будем называть меньше по мощности, чем B, если $|A| \leqslant |B| \& |A| \neq |B|$

Определение. Кардинальное число – число, оценивающее мощность множества.

Определение. Кардинальное число $\aleph$ – это ординальное число a, такое что $\forall x \leqslant a |x| \leqslant |a|$
$\aleph_0 = w$ по определению; $\aleph_1 =$ минимальный кардинал, следующий за $\aleph_0$

Определение. Кардинальное число $\beth$ – это ординальное число a, такое что $\beth_i = P(\beth_{i-1})$
$\beth_0 = \aleph_0$
$+ : |A| + |B| = \max(|A|, |B|)$(если нет общих элементов) $= |A \cup B|$

2.43. Диагональный метод, теорема Лёвенгейма-Скулема

Диагональный метод – метод доказательства $|2^X| > |X|$

2.44. Парадокс Скулема

Мнимый парадокс, базирующийся на теореме Лёвенгейма-Скулема и том факте, что в формальной арифметике существуют несчетные множества. Заковырка в том, что «существует счетное мн-во» выражается в ФА «не существует биекции». И тогда прийти к противоречию нельзя.

2.45. Теорема Генцена о непротиворечивости ФА

Ну типа мы можем обернуть ФА в теорию покруче, доказать что в ней невозможно доказать $0 = 1$, а потом доказать, что если S_∞ непротиворечива, то и S непротиворечива.

3. Ticket 1: ИВ

3.1. Определения (исчисление, высказывание, оценка...)

Формальная система с алгеброй Яськовского J_0 в качестве модели, множество истинностных значений $\{0, 1\}$. Формальная теория нулевого порядка, кванторов нету, предикаты - это пропозициональные переменные.

3.2. Общезначимость, доказуемость, выводимость

- Общезначимость формулы – ее свойство в теории с моделью. Общезначимость можно определить как угодно, в принципе. Например в ИВ общезначимость – это что оценка формулы на любых значениях свободных переменных отображает в 1. В модели крипке - существование формулы во всех мирах и т.д.

- Доказуемость - свойство формулы в теории, значащее, что существует доказательство для этой формулы. Доказательство для теории тоже определяется по разному (последовательность утверждений, каждое из которых есть аксиома или следует по правилу вывода из предыдущих в ИВ, дерево с выводами в $S\infty$)

- Выводимость - в общем случае часто используется как аналог доказуемости, в ИВ это доказуемость из всего, что и ранее + из посылок.

3.3. Схемы аксиом и правило вывода

Аксиомы:

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma \to \beta)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Правило вывода М.Р.:

$$\frac{\alpha \quad (\alpha \to \beta)}{\beta}$$

3.4. Теорема о дедукции

$\Rightarrow$ Если нужно переместить последнее предположение вправо, то рассматриваем случаи – аксиома или предположение, MP, это самое выражение.

1. A
   $A \to \alpha \to A$
   $\alpha \to A$

2. (там где-то сзади уже было $\alpha \to A$, $\alpha \to A \to B$)
   $(\alpha \to A) \to (\alpha \to A \to B) \to (\alpha \to B)$
   $(\alpha \to A \to B) \to (a \to B)$
   $\alpha \to B$

3. $A \to A$ умеем доказывать

$\Leftarrow$ Если нужно переместить влево, то перемещаем, добавляем
$A \to B$ (последнее)
A (перемещенное)
B

3.5. Корректность исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского

- Индукцией по доказательству – если аксиома, то она тавтология, все ок. Если модус поненс, то таблица истинности для импликации и все ок

4. Ticket 2: полнота ИВ

4.1. Полнота исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского

Кстати полноту можно доказывать маханием руками как для предикатов, и я не могу утверждать, что при таком подходе ИВ не будет полно относительно любой модели.

4.1.1. Контрапозиция

Лемма 4.1. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Доказательство. Докажем, что $(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash \neg\alpha$:

(1)	$\alpha \to \beta$	Допущение	
(2)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	Сх. акс. 9	
(3)	$(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	М.Р. 1,2	
(4)	$\neg\beta \to \alpha \to \neg\beta$	Сх. акс. 1	После применения теоремы о дедукции
(5)	$\neg\beta$	Допущение	
(6)	$\alpha \to \neg\beta$	М.Р. 5,4	
(7)	$\neg\alpha$	М.Р. 6,3	

2 раза получим как раз то, что нужно ☐

4.1.2. Правило исключененного третьего

С помощью контрапозиции доказываем два утверждения:
$\neg(A|\neg A) \to \neg A$ (один раз контрапозицию от этого обратную, там $A \to (A|\neg A)$ акс)
$\neg(A|\neg A) \to \neg\neg A$ Потом девятую аксиому и снимаем двойное отрицание

4.1.3. Всякие очевидные вещи типа если выводится из А и из Б то из А и Б тоже

4.1.4. Правило со звездочкой (14 доказательств)

1. $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   α
   $\alpha \to \alpha \vee \beta$
   $\alpha \vee \beta$

2. $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   α
   $\alpha \to \alpha \vee \beta$
   $\alpha \vee \beta$

3. $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   β
   $\beta \to \alpha \vee \beta$
   $\alpha \vee \beta$

4. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   $\neg\alpha$
   $\neg\beta$
   $(\alpha \vee \beta \to \alpha) \to (\alpha \vee \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \vee \beta)$
   $\neg\alpha \to \alpha \vee \beta \to \neg\alpha$
   $\alpha \vee \beta \to \neg\alpha$
   $\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta \vdash \alpha$
   $\neg\alpha$
   $\neg\beta$
   $\alpha \vee \beta$
   $\alpha \to \alpha$
   … //д-во $\neg\beta, \neg\alpha \vdash \beta \to \alpha$
   $\beta \to \alpha$
   $(\alpha \to \alpha) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha))$
   $(\beta \to \alpha) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha)$
   $\alpha \vee \beta \to \alpha$
   α
   $\alpha \vee \beta \to \alpha$
   $(\alpha \vee \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \vee \beta)$
   $\neg(\alpha \vee \beta)$

5. $\alpha, \beta \vdash \alpha\&\beta$
   α
   β
   $\alpha \to \beta \to \alpha\&\beta$
   $\beta \to \alpha\&\beta$
   $\alpha\&\beta$

6. $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   $\neg\beta$
   $((\alpha\&\beta) \to \beta) \to ((\alpha\&\beta) \to \neg\beta) \to \neg(\alpha\&\beta)$
   $\alpha\&\beta \to \beta$
   $(\alpha\&\beta \to \neg\beta) \to \neg(\alpha\&\beta)$
   $\neg\beta \to \alpha\&\beta \to \neg\beta$
   $\alpha\&\beta \to \neg\beta$
   $\neg(\alpha\&\beta)$

7. $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   аналогично

8. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   аналогично

9. $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   β
   $\beta \to \alpha \to \beta$
   $\alpha \to \beta$

10. $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$
    α
    $\neg\beta$
    $\neg\beta \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\beta)$
    $(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$
    $\alpha, \neg\beta, \alpha \to \beta \vdash \beta$
    α
    $\alpha \to \beta$
    β
    $(\alpha \to \beta) \to \beta$
    $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$
    $((\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$
    $\neg\beta \to (\alpha \to \beta) \to \neg\beta$
    $(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$
    $\neg(\alpha \to \beta)$

11. $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
    β
    $\beta \to \alpha \to \beta$
    $\alpha \to \beta$

12. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$
    Ну тут типо очевидно (на самом деле тут боль и страдания)

13. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
    Схема аксиом 9

14. $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
    $\neg\alpha$

5. Ticket 3: ИИВ

5.1. ИИВ, структура, модель

Сигнатура - (R, F, C, r): R - множество символов для предикатов, F - функциональных символов, C - символов констант, r – функция, определяющая арность $x \in R \vee F$. Интерпретация - это приписывание символам значения и правил действия Структура - это носитель M (множство истинностных значений), сигнатура и интерпретация над носителем. Если все аксиомы верны, то структура корректна. В таком случае она называется моделью. Выкидываем 10 аксиому, добавляем $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$.
Она доказывается и в ИВ:

Лемма 5.1. $\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

(1)	α	Допущение
(2)	$\neg\alpha$	Допущение
(3)	$\alpha \to \neg\beta \to \alpha$	Сх. акс. 1
(4)	$\neg\beta \to \alpha$	M.P. 1,3
(5)	$\neg\alpha \to \neg\beta \to \neg\alpha$	Сх. акс. 1
(6)	$\neg\beta \to \neg\alpha$	M.P. 2,5
(7)	$(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\beta)$	Сх. акс. 9
(8)	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\beta)$	M.P. 4,7
(9)	$\neg\neg\beta$	M.P. 6,8
(10)	$\neg\neg\beta \to \beta$	Сх. акс. 10
(11)	β	M.P. 9,10

Таким образом мы умеем доказывать $\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha \to \neg\alpha \to \beta$ применив 3 раза теорему о дедукции

Лемма 5.2. $\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha \to \neg\alpha \to \beta, \alpha \vee \neg\alpha \vdash \alpha \to \neg\alpha \to \beta$

(1)	$(\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$	Сх. акс. 2
(2)	$\alpha \vee \neg\alpha \to \alpha \to \alpha \vee \neg\alpha$	Сх. акс. 1
(3)	$\alpha \vee \neg\alpha$	Допущение
(4)	$\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha$	M.P. 3,2
(5)	$(\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$	M.P. 4,1
(6)	$\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha \to \neg\alpha \to \beta$	Допущение
(7)	$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$	M.P. 6,5

5.2. Опровергаемость исключенного третьего

Вводим в наше множество ***истинностных значений*** дополнительный элемент Н (сокращение от слова «Неизвестно»). Отождествим Н с $\frac{1}{2}$, так что $Л < Н < И$. Определим операции на этом множестве ***истинностных значений***:

- конъюнкция: минимум из двух значений (например $И \& Н = Н$).
- дизъюнкция: максимум из двух значений (например $И \vee Н = И$).
- импликация: $И \to \alpha = \alpha$, $Л \to \alpha = И$, $Н \to Л = Л$, $Н \to Н = И$, $Н \to Н = И$.
- отрицание: $\neg Н = Л$, а для остальных элементов все так же.

Назовем формулу ***3-тавтологией***, если она принимает значение И при любых значениях переменных из множества {И, Л Н}. Теперь нужно всего-лишь проверить, что все аксиомы являются 3-тавтологиями и, что если посылка импликации является тавтологией, то и заключение является тавтологией. Второе очевидно по определению тавтологии, а аксиомы просто проверяются вручную.

Значит любая интуиционистски выводимая формула 3-тавтология. Теперь заметим, что формула $\alpha \vee \neg\alpha$ принимает значение Н при $\alpha = Н$. Следовательно она не 3-тавтология, а значит невыводима.

5.3. Решетки

Просто ***решетка*** – это $(L, +, *)$ в алгебраическом смысле и $(L, \leqslant)$ в порядковом. Решетку можно определить как алгебраическую структуру через аксиомы:

- Аксиомы идемпотентность
  $\alpha + \alpha = \alpha$
  $\alpha * \alpha = \alpha$

- Аксиомы коммутативности
  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
  $\alpha * \beta = \beta * \alpha$

- Аксиомы ассоциативности
  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
  $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$

- Аксиомы поглощения
  $\alpha + (\alpha * \beta) = \alpha$
  $\alpha * (\alpha + \beta) = \alpha$

Также решетку можно определить как упорядоченное множество с частичным порядком на нем. Тогда операции $+, *$ определяются как sup и inf ($sup(\varphi) = min\{u | u \geqslant \forall x \in \varphi\}$, $inf(\varphi) = max\{u | u \leqslant \forall x \in \varphi\}$).
$\alpha + \beta = sup(\{\alpha, \beta\})$
$\alpha * \beta = inf(\{\alpha, \beta\})$
Если для любых двух элементов из множества S можно определить эти две операции, то S называется решеткой.

Дистрибутивная решетка – ***решетка***, в которой добавляется дистрибутивность:
$\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$

Импликативная решетка – ***решетка***, в которой для любых двух элементов α и β из множества существует псевдодополнение α относительно β ($\alpha \to \beta$), которое определяется так:
$\alpha \to \beta = max\{\gamma | \gamma * \alpha \leqslant \beta\}$
Свойства ***импликативной решетки***:

- Существует максимальный элемент $\alpha \to \alpha$, обычно обозначаемый как 1

- Всякая ***импликативная решетка*** дистрибутивна

5.4. Алгебра Гейтинга, булева алгебра

Булева алгебра – $(L, +, *, -, 0, 1)$, с аксиомами:

- Аксиомы коммутативности
  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
  $\alpha * \beta = \beta * \alpha$

- Аксиомы ассоциативности
  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
  $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$

- Аксиомы поглощения
  $\alpha + (\alpha * \beta) = \alpha$
  $\alpha * (\alpha + \beta) = \alpha$

- Аксиомы дистрибутивности
  $\alpha + (\beta * \gamma) = (\alpha + \beta) * (\alpha + \gamma)$
  $\alpha * (\beta + \gamma) = (\alpha * \beta) + (\alpha * \gamma)$

- Аксиомы дополнительности
  $\alpha * \neg\alpha = 0$
  $\alpha + \neg\alpha = 1$

Также ***Булеву алгебру*** можно определить как импликативную решетку над фундированным множеством. Тогда 1 в ней будет $\alpha \to \alpha$, $\neg\alpha = \alpha \to 0$. Тогда $\alpha * \neg\alpha = 0$ будет уже свойством, а $\alpha + \neg\alpha = 1$ все еще аксиомой.

Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) – это импликативная решетка над фундированным множеством с $\neg\alpha = \alpha \to 0$

5.5. Алгебра Линденбаума-Тарского

Пусть V – множество формул ИИВ
Порядок для решетки:
$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash \beta$
$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash \beta \& \beta \vdash \alpha$
Определим операции и 0, 1:
$0 - \alpha \& \neg\alpha = \perp$
$1 - \alpha \to \alpha = \mathsf{T}$
$\alpha \& \beta = \alpha * \beta$
$\alpha \vee \beta = \alpha + \beta$
$\neg\alpha = -\alpha$
Получившаяся алгебра называется ***алгеброй Линденбаума-Тарского*** и является алгеброй Гейтинга, т.к. для нее выполняется аксиома $\alpha * \neg\alpha = 0$ (по определению).

Лемма 5.3. $\forall \beta \in V \perp \vdash \beta$ (Из лжи следует все)

Доказательство. $\alpha \& \neg\alpha \vdash \beta$

(1)	$\alpha \& \neg\alpha$	Допущение
(2)	$\alpha \& \neg\alpha \to \alpha$	Сх. акс. 4
(3)	$\alpha \& \neg\alpha \to \neg\alpha$	Сх. акс. 5
(4)	α	М.Р. 1,2
(5)	$\neg\alpha$	М.Р. 1,3
(6)	$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$	Сх. акс. 10
(7)	$\neg\alpha \to \beta$	М.Р. 4,6
(8)	β	М.Р. 5,7

□

5.6. Теорема о полноте ИИВ относительно алгебры Гейтинга

Возьмем в качестве алгебры Гейтинга алгебру Линденбаума-Тарского - ξ. Она очевидно является моделью.

Теорема 5.4. $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Доказательство. $\models \alpha \Rightarrow [\![\alpha]\!]^{\xi} = 1$
$[\![\alpha]\!]^{\xi} = 1 \Rightarrow 1 \leqslant [\![\alpha]\!]^{\xi}$ (По определению алгебры Л-Т)
$\beta \to \beta \vdash \alpha$ (По определению $\leqslant$ в алгебре Л-Т)
Т.к. $\beta \to \beta$ - тавтология, то и α - тавтология □

5.7. Дизъюнктивность ИИВ

Используем алгебру Гёделя $\Gamma(A)$ (γ - функция преобразования). Можно преобразовать любую алгебру Гейтинга, возьмем алгебру Л-Т. Алгебра Гёделя использует функцию преобразования: $\gamma(a) = b$ значит, что в алгебре A элементу a соответствует элемент b из алгебры Гёделя. Порядок сохраняется естественным образом. Также добавим еще один элемент ω ($\gamma(1) = \omega$). Таким образом $\Gamma(A) = A \cup \{\omega\}$. Порядок в $\Gamma(A)$:

- $\forall a \in \Gamma(A) \setminus \{1\}\ a \leqslant \omega$
- $\omega \leqslant 1$

$a+b$	$b=1$	$b=\gamma(v)$
$a=1$	1	1
$a=\gamma(u)$	1	$\gamma(u+v)$

$a*b$	$b=1$	$b=\gamma(v)$
$a=1$	1	$\gamma(a*v)$
$a=\gamma(u)$	$\gamma(u*b)$	$\gamma(u*v)$

$a\to b$	$b=1$	$b=\gamma(v)$
$a=1$	1	$\gamma(a\to v)$
$a=\gamma(u)$	1	$u\to v$

a	$\neg a$
$a=1$	$\gamma(\neg a)$
$a=\gamma(u)$	$\neg u$

Лемма 5.5. Гёделева алгебра является Гейтинговой

Доказательство. Необходимо просто доказать аксиомы коммутативности, ассоциативности и поглощения. □

Теорема 5.6. $\vdash \alpha \vee \beta \Rightarrow$ *либо* $\vdash \alpha$, *либо* $\vdash \beta$

Доказательство. Возьмем A, построим $\Gamma(A)$. Если $\vdash \alpha\vee\beta$, то $[\![\alpha\vee\beta]\!]^{A} = 1$ и $[\![\alpha\vee\beta]\!]^{\Gamma(A)} = 1$. Тогда по определению $+$ в алгебре Гёделя, $[\![\alpha]\!]^{\Gamma(A)} = 1$, либо $[\![\beta]\!]^{\Gamma(A)} = 1$. Тогда оно такое же и в алгебре Л-Т, а алгебра Л-Т полна. □

5.8. Теорема Гливенко

Теорема 5.7. Если в ИВ доказуемо α, то в ИИВ доказуемо $\neg\neg\alpha$.

Доказательство. Разберем все втречающиеся в изначальном доказательстве формулы

1. Заметим, что если в ИИВ доказуемо α, то $\neg\neg\alpha$ так же доказуемо.
   Докажем, что $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

(1)	α	Допущение
(2)	$\alpha \to \neg\alpha \to \alpha$	Сх. акс. 1
(3)	$\neg\alpha \to \alpha$	М.Р. 1,2
(4)	$\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$	Сх. акс. 1
(5)	$(\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$	Сх. акс. 2
(6)	$(\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$	М.Р. 4,5
(7)	$(\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha))$	Сх. акс. 1
(8)	$\neg\alpha \to \neg\alpha$	М.Р. 7,6
(9)	$(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$	Сх. акс. 9
(10)	$(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$	М.Р. 3,9
(11)	$\neg\neg\alpha$	М.Р. 8,10

   Значит, если α - аксиома с 1-ой по 9-ую, то $\neg\neg\alpha$ так же может быть доказано

2. Пусть α получилось по 10-ой аксиоме $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Докажем, что $\vdash \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

(1)	$\alpha \to \neg\neg\alpha \to \alpha$	Сх. акс. 1
(2)	$\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha$	Контрпозиция
(3)	$\neg\alpha \to \neg\neg\alpha \to \alpha$	Сх. акс. 10
(4)	$\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$	Контрпозиция
(5)	$(\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha) \to (\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 9
(6)	$(\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	М.Р. 2,5
(7)	$\neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	М.Р. 4,6

3. Приведем конструктивное доказательство:

   - Если α - аксиома, то $\neg\neg\alpha$ доказывается с помощью 1-го и 2-го пунктов
   - Если был применен М.Р., то в изначальном доказтельстве были α, $\alpha \to \beta$, β. По индукционному предположению мы знаем, что $\neg\neg\alpha$, $\neg\neg(\alpha \to \beta$. Нужно доказать $\neg\neg\beta$.
     Давайте для начала докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$.

(1)	α	Допущение
(2)	$\alpha \to \beta$	Допущение
(3)	β	М.Р. 1,2

     Значит мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha \vdash (\alpha \to \beta) \to \beta$. Теперь докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha, (\alpha \to \beta) \to \beta \vdash \neg\alpha \to \beta$.

(1)	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$	Сх. акс. 9
(2)	$((\alpha \to \beta) \to \beta)$	Допущение
(3)	$\neg\beta \to (\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	Сх. акс. 1
(4)	$\neg\beta$	Допущение
(5)	$(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	М.Р. 4,3
(6)	$((\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$ М.Р. 2,1	
(7)	$\neg(\alpha \to \beta)$ М.Р. 5,6	

Теперь мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$. Докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta, \alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\alpha$.

(1)	$(\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$	Сх. акс. 9
(2)	$\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$	Допущение
(3)	$\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	Сх. акс. 1
(4)	$\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	Допущение
(5)	$\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	М.Р. 4,3
(6)	$(\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$	М.Р. 2,1
(7)	$\neg\alpha$	М.Р.5,6

Теперь мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$. Наконец докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vdash \neg\neg\beta$.

(1)	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$	Сх. акс. 9
(2)	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	Допущение
(3)	$\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$	Сх. акс. 1
(4)	$\neg\neg\alpha$	Допущение
(5)	$\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$	М.Р. 4,3
(6)	$(\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$	М.Р. 2,1
(7)	$\neg\neg\beta$	М.Р. 5,6

$\square$

5.9. Топологическая интерпретация

Булеву алгебру и алгебру Гейтинга можно интерпретировать на множестве $\mathbb{R}^n$. Тогда заключения о общезначимости формулы можно делать более наглядно. Давайте возьмем в качестве множества алгебры все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Определим операции следующим образом:

- $\alpha + \beta = \alpha \cup \beta$
- $\alpha * \beta = \alpha \cap \beta$
- $\alpha \rightarrow \beta = \mathrm{Int}(\alpha^c \cup \beta)$
- $-\alpha = \mathrm{Int}(\alpha^c)$
- $0 = \emptyset$
- $1 = \cup\{V \subset L\}$

6. Ticket 4: ИИВ2

6.1. Модели Крипке

W – множество миров
V – множество вынужденных переменных
Введем отношение частичного порядка на W - $\leqslant$ (отношение достижимости). И введем оценку переменной $\nu : W \times V \to \{0, 1\}$. ν должна быть монотонна (Если $\nu(x, P) = 1$ и $x \leqslant y$, то $\nu(y, P) = 1$). Если пременная x истинна в мире w, то мы пишем $w \Vdash x$.
Модель Крипке – это $< W, \leqslant, \nu >$.
Теперь можно определить истинность любой формулы (в данном мире) индукцией по построению формулы. Правила:

- $w \Vdash A \& B \Leftrightarrow w \Vdash A$ и $w \Vdash B$;
- $w \Vdash A \vee B \Leftrightarrow w \Vdash A$ *или* $w \Vdash B$;
- $w \Vdash A \to B \Leftrightarrow$ в любом мире $u \geqslant w$, в котором истинна A, истинна так же истинна и B;
- $w \Vdash \neg A \Leftrightarrow$ ни в каком мире $u \geqslant w$ формула A не является истинной;

6.2. Корректность ИИВ относительно моделей Крипке

Теорема 6.1. Если формула выводима в ИИВ, то она истинна в моделях Крипке.

Доказательство. Проверим М.Р. и аксиомы (что они истинны во всех мирах):

- М.Р.: по определению импликации в моделях Крипке, если в мире истинно $A, A \to B$, то истинно и B
- Аксиомы:
  1. $A \to (B \to A)$
     Пусть где-нибудь истинна A, в силу монотонности она истинна во всех б'ольших мирах, так что $B \to A$ тоже будет истинно.
  2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
     Пусть где-нибудь истинно $A \to B$, тогда необходимо доказать, что истинно и $((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.
     – Пусть истинны A, B. Тогда если истинно $A \to (B \to C)$, то истинно и C по монотонности A и B. A, B, C истинны, значит $A \to C$ истинно.
     – Пусть не истинны ни A, ни B. Тогда $A \to (B \to C)$ не истинно и C не истинно. Значит $A \to C$ не может быть истинно, т.к. ни A, ни B, ни C не истинны.
  3. Подобным образом доказываем все аксиомы

□

6.3. Вложение Крипке в Гейтинга

Не нужно

6.4. Полнота ИИВ в моделях Крипке

Теорема 6.2. ИИВ полно относительно моделей Крипке

Доказательство. Докажем в несколько шагов

1. ***Дизъюнктивное множество*** M - такое множество, что если в $M \vdash a \vee b$, то $a \in M$ или $b \in M$. Докажем, что если $M \vdash a$, то $a \in M$:
   Пусть это не так. Рассмотрим $a \to a \vee \neg a$. Раз $M \vdash a$, то $M \vdash a \vee \neg a$. Т.к. $a \notin M$, то $\neg a \in M$ по определению дизъюнктивности M. Но тогда из $M \vdash a$ и $M \vdash \neg a$ мы можем доказать, что $M \vdash a \& \neg a$.

2. Возьмем множество всех дизъюнктивных множеств с формулами из ИИВ. Мы можем это сделать, т.к. ИИВ дизъюнктивно. Для любого элемента $W_i \vdash a$, $a \in W_i$, значит в этом мире a вынуждено. Построим дерево с порядком "быть подмножеством". Докажем, что это множество - модель Крипке. Проверим 5 свойств:

   (a) $W, x \Vdash P \Leftrightarrow \nu(x, P) = 1$ если $P \in V$ (V - множество вынужденных переменных). Монотонность выполняется по определению дерева

   (b) $W, x \Vdash (A \& B) \Leftrightarrow W, x \Vdash A$ и $W, x \Vdash B$
   С помощью аксиомы $A \& B \to A$ доказываем $W \vdash A$, значит $A \in W$. Аналогично с B

   (c) $W, x \Vdash (A \vee B) \Leftrightarrow W, x \Vdash A$ или $W, x \Vdash B$
   Очевидно по определению дизъюнктивности

   (d) $W, x \Vdash (A \to B) \Leftrightarrow \forall y \geqslant x (W, y \Vdash A \Rightarrow W, y \Vdash B)$
   Мы знаем, что $W \vdash A \to B$. Пусть в W есть A, тогда по М.Р. докажем, что B. Пусть в W есть B, тогда мы уже получили B.

   (e) $W, x \Vdash \neg A \Leftrightarrow \forall y \geqslant x (W, x \nVdash A)$
   Если где-то оказалось A, то оно доказуемо, а значит мы сможем доказать и $A \& \neg A$

3. $\Vdash A$, тогда $W_i \Vdash A$. Рассмотрим $W_0 = \{$все тавтологии ИИВ$\}$. $W_0 \Vdash A$, т.е. $\vdash A$.

□

6.5. Нетабличность интуиционистской логики

Теорема 6.3. Не существует полной модели, которая может быть выражена таблицей

Доказательство. Докажем от противного. Построим табличную модель и докажем, что она не полна. В ИВ мы обычно пользуемся алгеброй J_0 Яськовского $V = \{0, 1\}$, $0 \leqslant 1$.
Пусть имеется $V = \{...\}$, $|V| = n$ - множество истиностных значений. Пусть его размер больше 2. Тогда построим формулу $\vee_{(1 \leqslant j < i \leqslant n+1)}(p_i \to p_j)$ - такая большая дизъюнкция из импликаций

1. Она общезначима, т.к. всего таких импликаций у нас будет $C_n^2 >= n$ (по принципу Дирихле встретятся два одинаковых значения и она будет верна, тогда все выражение будет верно)

2. Недоказуемость. Построим такую модель Крипке, в которой она будет не общезначима.
   J_0 - алгебра Яськовского. Определим последовательность алгебр L_n по следующим правилам: $L_0 = J_0$, $L_n = \Gamma(L_{n-1})$. Таким образом L_n - упорядоченное множество $\{0, w_1, w_2, ..., 1\}$. Пусть f - оценка в L_n, действующая по следующим правилам на нашу формулу: $f(a_1) = 0$, $f(a_{n+1}) = 1$, $f(a_i) = w_i$ при $j < i f(a_i \to a_j) = f(a_i) \to f(a_j) = f(a_j)$. Последнее выражение не может являться 1, так что формула недоказуема. (ИИВ полно относительно алгебры Гейтинга)

$\square$

7. Ticket 5: *Логика 2 порядка*

7.1. Основные определения

Смотрим косnпект ДГ

7.2. Теорема о дедукции

Теорема 7.1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве отсутствуют применения правил для кванторов, использующих свободные переменные из формулы α, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство. Будем рассматривать формулы в порядке сверху вниз. На i-ой строке встретили формулу δ_i. Тогда докажем, что $\alpha \to \delta_i$. Разберем случаи:

1. δ_i - старая аксиома, совпадает с α или выводится по правилу М.Р.
   Тогда мы знаем, что делать из Теоремы о дедукции для ИВ

2. δ_i - новая аксиома
   Тогда все то же самое, что и в старой аксиоме, но нужно так же проверить условие.

3. $\exists x(\psi) \to \varphi$ - новое правило вывода

   - Докажем вспомогательную лемму:

     Лемма 7.2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

     Доказательство. Докажем, что $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha \vdash \gamma$:

(1)	$\alpha \to \beta \to \gamma$	Допущение
(2)	α	Допущение
(3)	$\beta \to \gamma$	М.Р. 2,1
(4)	β	Допущение
(5)	γ	М.Р. 4,3

     □

   - По индукционному преположению мы знаем, что $\alpha \to \psi \to \varphi$. Тогда докажем, что $\alpha \to \psi \to \varphi, (\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\psi \to \alpha \to \varphi) \vdash \alpha \to \exists x(\psi) \to \varphi$:

(1)	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\psi \to \alpha \to \varphi)$	Допущение
(2)	$\alpha \to \psi \to \varphi$	Допущение
(3)	$\psi \to \alpha \to \varphi$	М.Р. 2,1
(4)	$\exists x(\psi) \to \alpha \to \varphi$	Правило вывода 1
(5)	$(\exists x(\psi) \to \alpha \to \varphi) \to (\alpha \to \exists x(\psi) \to \varphi)$	Допущение
(6)	$\alpha \to \exists x(\psi) \to \varphi$	М.Р. 4,5

4. $\varphi \to \forall x(\psi)$ - новое правило вывода

   - Докажем вспомогательную лемму 1

     Лемма 7.3. $(\alpha \& \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \to \gamma)$

Доказательство. Докажем, что $(\alpha\&\beta \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \gamma$:

(1)	α	Допущение
(2)	β	Допущение
(3)	$\alpha \to \beta \to \alpha\&\beta$	Сх. акс. 1
(4)	$\beta \to \alpha\&\beta$ М.Р. 1,3	
(5)	$\alpha\&\beta$	М.Р. 2,4
(6)	$\alpha\&\beta \to \gamma$	Допущение
(7)	γ	М.Р. 5,6

□

- Докажем вспомогателньую лемму 2

  Лемма 7.4. $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha\&\beta \to \gamma)$

  Доказательство. Докажем, что $\alpha \to \beta \to \gamma, \alpha\&\beta \vdash \gamma$:

(1)	$\alpha\&\beta \to \alpha$	Сх. акс. 4
(2)	$\alpha\&\beta$	Допущение
(3)	α	М.Р. 2,1
(4)	$\alpha\&\beta \to \beta$	Сх. акс. 5
(5)	β	М.Р. 2,4
(6)	$\alpha \to \beta \to \gamma$	Допущение
(7)	$\beta \to \gamma$	М.Р. 3,6
(8)	γ	М.Р. 5,7

□

- По индукционному предположению мы знаем, что $\alpha \to \psi \to \varphi$. Тогда докажем, что $\alpha \to \psi \to \varphi \vdash \alpha \to \psi \to \forall(\varphi)$.

(1)	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha\&\psi \to \varphi)$	Вспомогательная лемма 1
(2)	$\alpha \to \psi \to \varphi$	Допущение
(3)	$\alpha\&\psi \to \varphi$	М.Р. 2,1
(4)	$\alpha\&\psi \to \forall(\varphi)$	Правило вывода 2
(5)	$(\alpha\&\psi \to \forall(\varphi)) \to (\alpha \to \psi \to \forall(\varphi))$	Вспомогательная лемма 2
(6)	$\alpha \to \psi \to \forall(\varphi)$	М.Р. 4,5

□

7.3. Корректность исчисления предикатов

Смотрим конспект ДГ

8. Ticket 6: Полнота исчисления предикатов

Тут можно почитать конспект Д.Г.

8.1. Свойства противоречивости

Противоречивая теория – теория, в которой можно вывести p, ¬p.

Лемма 8.1. Теория противоречива $\Leftrightarrow$ в ней выводится $a\&\neg a$

Доказательство. $\Leftarrow$ Если выводится $a\&\neg a$, то противоречива – очевидно через аксиомы
$\Rightarrow$ Если противоречива, то выводится $a\&\neg a$

(1)	$\neg\alpha$	Допущение
(2)	α	Допущение
(3)	$\alpha \to \neg\alpha \to (\alpha\&\neg\alpha)$	Сх. акс. 10
(4)	$\neg\alpha \to (\alpha\&\neg\alpha)$	М.Р. 1,3
(5)	$\alpha\&\neg\alpha$	М.Р. 2,4

□

Заметим, что всякое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
Заметим, что всякое бесконечное прот. множество содержит конечное противоречивое подмножество ввиду конечности вывода.
Совместное множество – множество с моделью (все формулы множества верны в какой-либо интерпретации).

8.2. Лемма о дополнении непротиворечивого множества

Лемма 8.2. Для всякого непротиворечивого множества Γ замкнутых формул сигнатуры σ существует множество Γ', являющееся к тому же полным, имеющее ту же сигнатуру и содержащее Γ.

Доказательство. Для не более чем счетных сигнатур:
Давайте добавлять недостающие формулы в Γ - если есть формула α, добавим α или $\neg\alpha$ в зависимости от того, является ли $\Gamma \cup \alpha$ или $\Gamma \cup \neg\alpha$ противоречивым или нет (выберем непротиворечивый вариант). Одно всегда верно, потому что:

1. $\Gamma \cup \alpha$, $\Gamma \cup \neg\alpha$ противоречивы обе $\Rightarrow$ Мы можем доказать, что Γ изначально было противоречиво

2. $\Gamma \cup \alpha$, $\Gamma \cup \neg\alpha$ не противоречивы обе $\Rightarrow$ Тогда можно сказать, что $\alpha \to \neg\alpha \to \alpha\&\neg\alpha$.

□

8.3. Условие о интерпретации непротиворечивого мн-ва

Будем называть интерпретацией непротиворечивого множества формул функцию оценки, тождественно равную 1 на элементах из этого множества. Будем говорить, что $\Gamma \models \alpha$, если она тождественна в любой модели Γ.

8.4. Несколько лемм

Лемма 8.3. $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha$

Доказательство. Механическая проверка аксиом □

Лемма 8.4. Если у Γ есть модель, то Γ непротиворечиво

Доказательство. Пусть Γ имеет модель, но противоречиво, тогда из Γ выводится $\alpha, \neg\alpha$, по корректности $\Gamma \models \alpha, \neg\alpha$, но формула и ее отрицание не могут быть общезначимыми одновременно. □

Лемма 8.5. Пусть Γ - полное непротиворечивое множество бескванторных формул. Тогда существует модель для Γ.

Доказательство. Построим модель структурной индукцией по формулам. Предметное множество - строки, содержащие выражения. Например $[\![c_1]\!] = "c_1"$, $[\![f_1(c_1, f_2(c_2))]\!] = "f_1(c_1, f_2(c_2))"$ Мы не хотим заниматься подсчетом, а предпочитаем оставлять то, что нужно вычислить как отдельную функцию. Рассмотрим формулу - предикат. Его оценка истина, если он принадлежит носителю, ложна если его отрицание в носителе (в предметном множестве). Элементы всегда входят противоречиво (элемент не вдохит со своим отрицанием. Связки определим естественным образом. Докажем, что $\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \gamma$ истинна (Γ - предметное множество)

- База:
  Если атомарная формула лежит в Γ, то она истинна по определению.
  Если атомарная формула истинна, то лежит в Γ

- Переход:

  1. $\alpha \& \beta$
     Если $\alpha \& \beta$ лежит в Γ, то оно истинно по определению

     – Пусть $[\![\alpha \& \beta]\!] = \text{И}$, тогда покажем, что $\alpha \& \beta \in \Gamma$.
       По таблице истинности & ясно, что $[\![\alpha]\!] = \text{И}$ и $[\![\beta]\!] = \text{И}$. Тогда α и β лежат в Γ по индукционному предположению. Тогда с помощью $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$ можно показать, что и $\alpha \& \beta \in \Gamma$.
     – Пусть $[\![\alpha \& \beta]\!] = \text{Л}$, тогда покажем, что $\neg(\alpha \& \beta) \in \Gamma$.
       По таблице истинности & ясно, что $[\![\alpha]\!] = \text{Л}$ *или* $[\![\beta]\!] = \text{Л}$. Для определенности возьмем, что α - ложь. Тогда $\neg\alpha$ лежат в Γ по индукционному предположению.
       Докажем, что $\neg\alpha \vdash \neg(\alpha \& \beta)$:

(1)	$\neg\alpha$	Предположение
(2)	$\neg\alpha \to \alpha \& \beta \to \neg\alpha$	Сх. акс. 1
(3)	$\alpha \& \beta \to \neg\alpha$	М.Р. 1,2
(4)	$\alpha \& \beta \to \alpha$	Сх. акс. 4
(5)	$(\alpha \& \beta \to \alpha) \to (\alpha \& \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \& \beta)$	Сх. акс. 9
(6)	$(\alpha \& \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \& \beta)$	М.Р. 5,4
(7)	$\neg(\alpha \& \beta)$	М.Р. 6,3

  2. $\alpha \vee \beta$

– $[\![\alpha \vee \beta]\!] = $ И. Тогда по таблице истинности $\vee$ либо $[\![\alpha]\!] = $ И, либо $[\![\beta]\!] = $ И. Не умаляя общности скажем, что $[\![\alpha]\!] = $ И. Тогда $\alpha \in \Gamma$ по предположению индукции. Легко можно доказать, что и $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ с помощью $\alpha \to \alpha \vee \beta$.
– $[\![\alpha \vee \beta]\!] = $ Л. Тогда по таблице истинности $\vee$ и $[\![\alpha]\!] = $ Л, и $[\![\beta]\!] = $ Л. Тогда $\neg\alpha \in \Gamma$ и $\neg\beta \in \Gamma$ по предположению индукции. С помощью 9-ой схемы аксиом мы можем доказать, что и $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$.

3. Аналогично нужно доказать все связки

□

8.5. Построение Γ^*

Теорема 8.6. Можно построить из нашего множества формул множество бескванторных формул

Доказательство. Для этого определим такую операцию избавления от 1 квантора: Построим новый язык, отличающийся от нашего контантами, там будут d_i^j, где нижний индекс - это поколение, верхний – нумерационный. Возьмем непротиворечивое множество формул Γ_i и пополним его, получив непротиворечивое множество формул Γ_{i+1}, такое что $\Gamma_i \subset \Gamma_{i+1}$. Возьмем формулу $\gamma \in \Gamma_i$. Рассмотрим случаи:

1. Не содержит кванторов
   Тогда делать ничего не нужно

2. $\gamma = \forall x(a)$
   Тогда возьмем все константы, использующиеся в Γ_i - это будут c_i, d_a^j, где $a \leqslant i$. Занумеруем их $\theta_1, \theta_2, \dots$. И добавим формулы $a_1 = a[x := \theta_1], \dots$ к Γ_{i+1}.

3. $\gamma = \exists x(a)$
   Тогда возьмем новую константу d_{i+1}^j и добавим $a[x := d_{i+1}^j]$ к Γ_{i+1}.

Заметим, что сами формулы с кванторами мы не выкидываем - ведь в будущем появятся новые формулы, и процесс для уже использованных кванторных формул нужно будет повторить. Покажем, что полученные множества остаются непротиворечивыми. Γ_i непротиворечиво, а Γ_{i+1} противоречиво, тогда $\Gamma_{i+1} \vdash \alpha \& \neg\alpha$, тогда выпишем конечное доказательство, найдем посылки, новые в Γ_{i+1}, которых нету в Γ_i, выпишем их и впихнем направо по теореме о дедукции: $\Gamma_i \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \dots \to \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$ Новые посылки у нас получаются только из пунктов 2 и 3.

1. $\gamma_1 = a[x := \theta_1]$ из $\forall x(a)$. Тогда рассмотрим доказательство:

(1)	$\forall x \alpha \to \alpha[x := \theta]$	Сх. акс. $\forall$
(2)	$\forall x \alpha$	$\forall x \alpha$ из Γ_g
(3)	$\alpha[x := \theta]$	М.Р. 2, 1
$(4 \dots k)$	$\alpha[x := \theta] \to (\gamma_2 \to \dots \gamma_n \to \beta \& \neg\beta)$	Исх. формула
$(k+1)$	$\gamma_2 \to \dots \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$	М.Р. 3, k

2. $\gamma_1 = a[x := d_{i+1}^k]$ из $\exists x(a)$ выберем переменную, не участвующую в выводе противоречия - z. Заменим все вхождения d^k в д-ве на z. поскольку d_{i+1}^k - константа, мы можем делать такие замены. Поскольку z - константа, специально введенная для замены и

раньше не встречавшаяся, то она отсутствует в $\gamma_2, \dots$ + мы можем правильно выбрать b, чтобы и в нем отсутствовала $i + 1^k$. Значит мы можем применить правило для выведения $\exists$:

$(1 \dots k)$	$\alpha[x := y] \to (\gamma_2 \to \dots \gamma_n \to \beta \& \neg\beta)$	Исх. формула
$(k+1)$	$\exists y \alpha[x := y] \to (\gamma_2 \to \dots \gamma_n \to \beta \& \neg\beta)$	Правило для $\exists$
$(k+2)$	$\exists x \alpha$	Т.к. $\exists x \alpha$ из Γ_g
$(k+3 \dots l)$	$\exists y \alpha[x := y]$	Доказуемо
$(l+1)$	$\gamma_2 \to \dots \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$	M.P. $l, k+1$

Возьмем $\Gamma_0 = \Gamma$. $\Gamma^* = \cup \Gamma_i$. Γ^* также не противоречиво, потому что д-во использует конечное количество предположений, добавленных на каком-то шаге j максимум, значит множество $_j$ тоже противоречиво, что невозможно по условию. □

8.6. Доказательство того, что дополненное бескванторное подмножество Γ^* - модель для Γ

Теорема 8.7. Дополненное бескванторное подмножество Γ^* - модель для Γ

Доказательство. Выделим в Γ^* бескванторное подмножество G. Пополним его по лемме 2 (лемма о дополнении непротиворечевиого множества) модель сделаем из него по лемме о бескванторной модели. Покажем, что это модель для всего Γ^*, а значит и для Γ. Рассмотрим $\gamma \in \Gamma^*$, покажем, что $[\gamma] = \text{И}$.

- База
  Формула не содержит кванторов. Истинность гарантируется леммой о бескванторном множестве.

- Переход
  Пусть G это модель для любой формулы из Γ^* с r кванторами, покажем что она остается моделью для $r + 1$ квантора.

  1. $\gamma = \forall x(a)$
     Покажем, что формула истинна для любого $t \in D$. По построению подели есть такое θ, что $t =$ "θ (string). По построению Γ^* начиная с шага $p + 1$ мы добавляем формулы вида $a[x := k]$, где k - конструкция из констант и ф.симв. Также каждая константа (c_i или d_i^j) из θ добавлена на некотором шаге s_k. То есть будет шаг $l = max(max(s_k), p)$, на котором θ обретет смысл и в Γ_{l+1} будет присутствовать $a[x := \theta]$. В формуле a на один квантор меньше, значит она истинна по предположению индукции.
  2. $\gamma = \exists x(a)$
     По построению Γ^* как только добавили a к Γ_i, так сразу в следующем мире Γ_{i+1} появляется $a[x := d_{i+1}^k]$. Значит формула истинна на значении "d_{i+1}^k", то есть истинна.

□

8.7. Следствие – если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Теорема 8.8. $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Доказательство.

- Пусть $\Gamma \nvdash a$, тогда по полноте множества Γ, $\Gamma \vdash \neg a$, но у Γ есть модель, в которой $\Gamma \models \neg a$. То есть $\Gamma \not\models a$. Но Γ по построению то же, что и модель теории, то есть все рассуждения $\Gamma \vdash a$ равноценны в предикатах $\vdash a$.

- Пусть $\nvdash a$, тогда пусть $\Gamma = \{\neg a\}$

  1. Γ непротиворечиво
     Пусть Γ противоречиво, значит $\forall b \Gamma \vdash b, \Gamma \vdash \neg b$;
     (a) $\neg a \vdash b, \neg a \vdash b$;
     (b) $\neg a \vdash a, \neg a \vdash \neg a$;
     (c) $\vdash \neg a \to a, \neg a \to \neg a$;
     (d) $\vdash (\neg a \to a) \to (\neg a \to \neg a) \to \neg\neg a$;
     (e) $\vdash \neg\neg a \to a$;
     (f) $\vdash a \to\leftarrow$ недоказуемо по условию.;
  2. Γ подходит под условие теоремы Гёделя о полноти исчисления предикатов, то есть у Γ есть модель. Тогда в ней оценка $[\neg a] = 1$, значит оценка $[a] = 0$, то есть $\not\models a$. Мы доказали мета-контрпозицию $\nvdash a \Rightarrow \not\models a$.

$\square$

9. Ticket 7: ФА

9.1. Структуры и модели, теория первого порядка

Теория первого порядка - это формальная система с кванторами по функциональным символам, но не по предикатам. Рукомахательное определение – это фс с логикой первого порядка в основе, в которой абстрактные предикаты и функциональные символы определяются точно (а может такое определение даже лучше).

Структура по ДГ: Структурой теории первого порядка мы назовем упорядоченную тройку $< D, F, P >$, где F – списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. функций, и $P = P_0, P_1, \ldots$ – списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. предикатов, D — предметное множество.

Понятие структуры — развитие понятия оценки из исчисления предикатов. Но оно касается только нелогических составляющих теории; истинностные значения и оценки для связок по-прежнему определяются исчислением предикатов, лежащим в основе теории. Для получения оценки формулы нам нужно задать структуру, значения всех свободных индивидных переменных, и (естественным образом) вычислить результат.

Структура по-моему: Все то же самое определение из ИВ. Мы просто забиваем на предикаты в ИВ (не определям их), расширяем нашу сигнатуру (добавляя конкретные предикаты и функциональные символы), определяем для нее интерпретацию.

Модель – это корректная структура (любое доказуемое утверждение должно быть в ней общезначимо).

9.2. Аксиомы Пеано

Множество N удовлетворяет аксиоматике Пеано, если:

1. $0 \in N$
2. $x \in N, succ(x) \in N$
3. $\nexists x \in N : (S(x) = 0)$
4. $(succ(a) = c \& succ(b) = c) \to a = b$
5. $P(0) \& \forall n.(P(n) \to P(succ(n))) \to \forall n.P(n)$

9.3. Формальная арифметика – аксиомы, схемы, правила вывода

Формальная арифметика – это теория первого порядка, у которой сигнатура определена как: (циферки, логические связки, алгебр. связки, $'$), а интерпретацию сейчас будем определять. Интерпретация определяет два множества - $\vee$, P - истинностные и предметные значения. На самом деле нет никакого множества P, мы определяем только $\vee$, потому что оно нужно для оценок. Все элементы, которые мы хотели бы видеть, выражаются в сигнатуре. Пусть множество $\vee = \{0, 1\}$ по-прежнему. Определим оценки логических связок естественным образом. Определим алгебраические связки так: $+(a, 0) = a$ $+(a, b') = (a + b)'$ $*(a, 0) = 0$ $*(a, b') = a * b + a$

Тут должно быть что-то на уровне док-ва $2 + 2 = 4$

9.3.1. Аксиомы

1. $a = b \to a' = b'$
2. $a = b \to a = c \to b = c$
3. $a' = b' \to a = b$
4. $\neg(a' = 0)$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a * 0 = 0$
8. $a * b' = a * b + a$
9. $\varphi[x := 0] \& \forall x.(\varphi \to \varphi[x := x']) \to \varphi$

9.3.2. a = a

Лемма 9.1. $\vdash a = a$

Доказательство. $\vdash a = a$

(1)	$a = b \to a = c \to b = c$	Сх. акс. ФА 2
(2)	T	Сх. акс.
(3)	$(a = b \to a = c \to b = c) \to T \to (a = b \to a = c \to b = c)$	Сх. акс. 1
(4)	$T \to (a = b \to a = c \to b = c)$	М.Р. 1,3
(5)	$T \to \forall a(a = b \to a = c \to b = c)$	ПВ $\forall$
(6)	$T \to \forall a \forall b(a = b \to a = c \to b = c)$	ПВ $\forall$
(7)	$T \to \forall a \forall b \forall c(a = b \to a = c \to b = c)$	ПВ $\forall$
(8)	$\forall a \forall b \forall c(a = b \to a = c \to b = c)$	М.Р. 2,7
(9)	$\forall a \forall b \forall c(a = b \to a = c \to b = c) \to \forall b \forall c(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$	Сх. акс. ИП 1
(10)	$\forall b \forall c(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$	М.Р. 8,9
(11)	$\forall b \forall c(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c) \to (\forall c(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c)$	Сх. акс. ИП 1
(12)	$\forall c(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$	М.Р. 10,11
(13)	$(\forall c(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c) \to (a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a)$	Сх. акс. ИП 1
(14)	$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$	М.Р. 12,13
(15)	$a + 0 = a$	Сх. акс. ФА 6
(16)	$a + 0 = a \to a = a$	М.Р. 15,14
(17)	$a = a$	М.Р. 15,16

□

10. Ticket 8: рекурс, Аккерман

10.1. Рекурсивные функции

Рассмотрим примитивы, из которых будем собирать выражения:

1. $Z : N \to N$, $Z(x) = 0$
2. $N : N \to N$, $N(x) = x'$
3. Проекция. $U_i^n : N^n \to N$, $U_i^n(x_1, ...x_n) = x_i$
4. Подстановка. Если $f : N^n \to N$ и $g_1, ...g_n : N^m \to N$, то $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle : N^m \to N$. При этом $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle(x_1, ...x_m) = f(g_1(x_1, ...x_m), ...g_n(x_1, ...x_m))$
5. Примитивная рекурсия. Если $f : N^n \to N$ и $g : N^{n+2} \to N$, то $R\langle f, g\rangle(x_1 \dots x_n, n) = \begin{cases} f(x_1 \dots x_n) & n = 0 \\ g(x_1 \dots x_n, n, R\langle f, g\rangle(x_1 \dots x_n, n-1)) & n > 0 \end{cases}$
6. Минимизация. Если $f : N^{n+1} \to N$, то $\mu\langle f\rangle : N^n \to N$, при этом $\mu\langle f\rangle(x_1, ...x_n)$ — такое минимальное число y, что $f(x_1, ...x_n, y) = 0$. Если такого y нет, результат данного примитива неопределен.

Пример:
$a + b = R\langle U_1^2, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(a, b)$

10.2. Характеристическая функция и рекурсивное отношение

- ***Характеристическая фукнция*** – функция от выражения, которая возвращает 1 если выражение истинно, 0 иначе.
- ***Рекурсивное отношение*** – отношение, характеристическая функция которого рекурсивна.

10.3. Аккерман не примитивно-рекурсивен, но рекурсивен (второе)

Функция Аккермана – это функция, удовлетворяющая следующим правилам:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m-1, n) & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Например:
$A(2, 0) = A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3$

Лемма 10.1. $A(m, n) \geqslant 1$

Доказательство. $A(m, n)$ определена только на натуральных числах
$A(0, 0) = 1, A(1, 0) = A(0, 1) = 2, A(0, 1) = 2$, а все остальное ещё больше $\square$

Лемма 10.2. $A(1, n) = n + 2$

Доказательство. $A(1, n) = A(0, A(1, n-1)) = A(0, A(0, A(1, n-2)))$
$= A(0, A(0, A(0, \dots A(1, 0)))) = A(0, A(0, A(0, \dots 2)))$
$= n + 2$ (n)

□

Лемма 10.3. $A(2, n) = 2n + 3$

Доказательство. $A(2, n) = A(1, A(1, \dots A(2, 0))) = A(1, A(1, \dots 3)) = 2n+3$ (n раз к тройке прибавляем $A(0, 1) = 2$) □

Лемма 10.4. $A(m, n) \geqslant n + 1$

Доказательство. В первом случае $A \geqslant n + 1 = n + 1$
Во втором A может перейти в первый случай, который работает хорошо, или в третий.
В третьем случае мы можем получить $A(0, n)$ если первый аргумент был нулем, тогда все ок, можем получить $A(1, 0)$, тогда это второй случай, для него условие выполнено.
Третий ссылается на второй, а второй на третий, но тут нет противоречия, потому что мы знаем, что функция Аккермана завершается. □

Лемма 10.5. $A(m, n) < A(m, n + 1)$

Доказательство. индукция по m:

- База:
  $A(0, n) = n + 1 < n + 2 = A(0, n + 1)$

- Переход:
  $A(k + 1, m) < A(k + 1, m) + 1$
  $\geqslant A(k, A(k + 1, m))$ (по лемме 2)
  $\geqslant A(k + 1, m + 1)$ (iii)

□

Лемма 10.6. $A(m, n + 1) \leqslant A(m + 1, n)$

Доказательство. индукция по n:

- база $A(m, 0 + 1) = A(m, 1) = A(m + 1, 0)$ (ii)

- переход, предположение: $A(m, j + 1) \leqslant A(m + 1, j)$ по лемме 2 $(j + 1) + 1 \leqslant A(m, j + 1)$ $A(m, (j+1)+1) \leqslant A(m, A(m, j+1))$ (по монотонности) $A(m, A(m, j+1)) \leqslant A(m, A(m+1, j))$ (по монотонности + предположение) $A(m, (j + 1) + 1) \leqslant A(m, A(m + 1, j)) = A(m + 1, j + 1)$ (iii)

□

Лемма 10.7. $A(m, n) < A(m + 1, n)$

Доказательство. $A(m, n) < A(m, n + 1) \leqslant A(m + 1, n)$ (3a, 3b) □

Лемма 10.8. $A(m_1, n) + A(m_2, n) < A(max(m_1, m_2) + 4, n)$

Доказательство. $A(m_1, n)+A(m_2, n) \leq A(max(m_1, m_2), n)+A(max(m_1, m_2), n) = 2*A(max(m_1, m_2), n)$ $2 * A(max(m_1, m_2), n) + 3 = A(2, A(max(m_1, m_2), n))$ *лемма* $1 < A(2, A(max(m_1, m_2) + 3, n))$ строгая монотонность по обоим арг. $< A(max(m_1, m_2) + 2, A(max(m_1, m_2) + 3, n))$ *лемма* $3c = A(max(m_1, m_2) + 3, n + 1)$ (iii) $\leq A(max(m_1, m_2) + 4, n)$ *лемма* 3b ☐

Лемма 10.9. $A(m, n) + n < A(m + 4, n)$

Доказательство. $A(m, n) + n < A(m, n) + n + 1 = A(n, m) + A(0, n) < A(m + 4, n)$ ☐

Теорема 10.10. Функция аккерманна не пригивно-рекурсивна

Доказательство. TODO ☐

Теорема 10.11. Функция Аккерманна рекурсивна

Доказательство. Можем сказать, что он рекурсивный, потому что мы можем его написать на компьютере, а тьюринг выражается в рекурсивных функциях. ☐