

Курс математической логики по Штукенбергу Д.Г.

Daniyar Lolka Itegulov, Ignat Loskutov

22 января 2015 г.

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Базовые понятия | 1 |
| 1.1 | Формальные системы и модели | 1 |
| 2 | Определения (нужно знать идеально) | 2 |
| 2.1 | ИВ | 2 |
| 2.2 | Общезначимость, доказуемость, выводимость | 3 |
| 2.3 | Теорема о дедукции для ИВ | 3 |
| 2.4 | Теорема о полноте исчисления высказываний | 3 |
| 2.5 | ИИВ | 4 |
| 2.6 | Теорема Гливенко | 4 |
| 2.7 | Порядки | 4 |
| 2.8 | Решетки (все свойства) | 4 |
| 2.9 | Булевы/псевдобулевы алгебры | 5 |
| 2.10 | Топологическая интерпретация ИИВ | 5 |
| 2.11 | Модель Крипке | 6 |
| 2.12 | Вложение Крипке в алгебры Гейтинга | 6 |
| 2.13 | Полнота ИИВ в алгебрах Гейтинга и моделях Крипке | 6 |
| 2.14 | Нетабличность ИИВ | 7 |
| 2.15 | Предикаты | 7 |
| 2.16 | Теорема о дедукции в предикатах | 7 |
| 2.17 | Теорема о полноте исчисления предикатов | 7 |
| 2.18 | Теории первого порядка, определение структуры и модели | 7 |
| 2.19 | Аксиоматика Пеано | 8 |
| 2.20 | Формальная арифметика - аксиомы | 8 |
| 2.20.1 | Аксиомы | 8 |
| 2.21 | Рекурсивные функции | 9 |
| 2.22 | Функция Аккермана | 9 |
| 2.23 | Существование рек.ф-й не явл. ф-ей Аккермана (определение конечной леммы) | 9 |
| 2.24 | Представимость | 9 |
| 2.25 | Выразимость | 9 |
| 2.26 | Лемма о связи представимости и выразимости | 9 |
| 2.27 | Бета-функция Гёделя, Г-последовательность | 10 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.28 | Представимость рек.ф-й в ФА (знать формулы для самых простых) | 10 |
| 2.29 | Гёделева нумерация (точно) | 10 |
| 2.30 | Выводимость и рекурсивные функции (че там с Тьюрингом) | 10 |
| 2.31 | Непротиворечивость | 11 |
| 2.32 | ω -непротиворечивость | 11 |
| 2.33 | Первая теорема Гёделя о неполноте | 11 |
| 2.34 | Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера | 11 |
| 2.35 | Consis | 11 |
| 2.36 | Условия Г-Б (наизусть) | 11 |
| 2.37 | Лемма о самоприменении | 12 |
| 2.38 | Вторая теорема Гёделя о неполноте ФА | 12 |
| 2.39 | Теория множеств | 12 |
| 2.40 | ZFC | 12 |
| 2.40.1 | Аксиома равенства | 12 |
| 2.40.2 | Аксиома пары | 12 |
| 2.40.3 | Аксиома объединений | 12 |
| 2.40.4 | Аксиома степени | 12 |
| 2.40.5 | Схема аксиом выделения | 12 |
| 2.40.6 | Аксиома выбора (не входит в ZF по дефолту) | 13 |
| 2.40.7 | Аксиома бесконечности | 13 |
| 2.40.8 | Аксиома фундирования | 13 |
| 2.40.9 | Схема аксиом подстановки | 13 |
| 2.41 | Ординальные числа, операции | 13 |
| 2.42 | Кардинальные числа, операции | 14 |
| 2.43 | Диагональный метод, теорема Лёвенгейма-Скулема | 14 |
| 2.44 | Парадокс Скулема | 14 |
| 2.45 | Теорема Генцена о непротиворечивости ФА | 14 |
| 3 | Ticket 1: ИВ | 15 |
| 3.1 | Определения (исчисление, высказывание, оценка...) | 15 |
| 3.2 | Общезначимость, доказуемость, выводимость | 15 |
| 3.3 | Схемы аксиом и правило вывода | 15 |
| 3.4 | Теорема о дедукции | 16 |
| 3.5 | Корректность исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского | 16 |
| 4 | Ticket 2: полнота ИВ | 17 |
| 4.1 | Полнота исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского . . . | 17 |
| 4.1.1 | Контрапозиция | 17 |
| 4.1.2 | Правило исключенного третьего | 17 |
| 4.1.3 | Всякие очевидные вещи типа если выводится из А и из Б то из А и Б тоже | 17 |
| 4.1.4 | Правило со звездочкой (14 доказательств) | 17 |
| 5 | Ticket 3: ИИВ | 20 |
| 5.1 | ИИВ, структура, модель | 20 |
| 5.2 | Опровергаемость исключенного третьего | 20 |
| 5.3 | Решетки | 21 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 5.4 | Алгебра Гейтинга, булева алгебра | 22 |
| 5.5 | Алгебра Линденбаума-Тарского | 22 |
| 5.6 | Теорема о полноте ИИВ относительно алгебры Гейтинга | 23 |
| 5.7 | Дизъюнктивность ИИВ | 23 |
| 5.8 | Теорема Гливенко | 24 |
| 5.9 | Топологическая интерпретация | 25 |
| 6 | Ticket 4: ИИВ2 | 26 |
| 6.1 | Модели Крипке | 26 |
| 6.2 | Корректность ИИВ относительно моделей Крипке | 26 |
| 6.3 | Вложение Крипке в Гейтинга | 27 |
| 6.4 | Полнота ИИВ в моделях Крипке | 27 |
| 6.5 | Нетабличность интуиционистской логики | 27 |
| 7 | Ticket 5: Логика 2 порядка | 29 |
| 7.1 | Основные определения | 29 |
| 7.2 | Теорема о дедукции | 29 |
| 7.3 | Корректность исчисления предикатов | 30 |
| <p>Mykhail Volkhov, 2538, 2014Sep-2015Jan Я не отвечаю за верность написанного - много информации я придумал сам, много достал из недостоверных источников.</p> | | |

1. Базовые понятия

1.1. Формальные системы и модели

Сделано мной для меня самого, be careful

Мы работаем с формальными системами. Формальная система определяется сигнатурой, грамматикой, набором аксиом и набором правил вывода.

1. Сигнатура ФС - это (Pr, F, C, Links, Misc, arity):

- Pr - описывает предикаты (Num + BigLatinChar)
- F - множество функций (большие заглавные латинские чары)
- C - описывает константы
- Links - множество связок ({"->", "U", " "})
- Misc - дополнительные элементы ({"(", ")", " "})
- arity: FooUPrUC \rightarrow N возвращает арность

2. Грамматика описывает то, как мы можем строить выражения в соответствии с нашей сигнатурой.

3. Аксиомы - выражения в нашей грамматике.

4. Правила вывода – пары вида (List, List), где List - список утверждений. Первый элемент – посылки, второй - то, что из них следует.

Иногда нам хочется что-то посчитать и мы прикручиваем к формальной системе модель - корректную структуру с оценкой. Структура - это сигнатура с интерпретацией и носителем.

1. Сигнатура структуры - (R, F, C, arity) :

- R - множество символов для предикатов
- F - функциональных символов
- C - символов констант
- arity - функция, определяющая арность $R \cup F \rightarrow \mathbb{N}$.

2. Интерпретация - это приписывание символам значения и правил действия (отображения из $R \cup F \cup C$ в носитель)

3. Носитель - это объединение множеств, в котором обязательно присутствует V - множество истинностных значений. Если же мы рассматриваем только нульместные предикаты, на этом можно остановиться, otherwise часто вводится P - предметное множество, в которое отображаются элементы из F, C .

TODO Эта реализация структуры не определяет ничего в районе аксиоматики, но аксиоматически заданные структуры существуют - например в ФА есть Пеано. Если все аксиомы тавтологии, то структура корректна. В таком случае она называется моделью.

Оценку иногда определяют раньше/позже чем модель, мне удобно думать о ней, как об отдельной сущности, потому что она связывает модель с ФС. Оценка - это функция оценки и функция тавтологии.

1. Функция оценки - отображение из (множества всех формул, сгенеренных грамматикой) x (какие-нибудь допаргументы) в V модели. Дополнительные аргументы - например оценки элементов связки.

2. Функция тавтологии - отображение из множества формул грамматики в $\{0, 1\}$ - является ли формула тавтологией. Тавтология использует функцию оценки. Например, тавтология

- это выражение, оценка которого на любых аргументах

возвращает $\in V$ - какой-то элемент V .

Когда говорится "сигнатура модели" - имеется в виду ровно она. Когда говорится "сигнатура ФС" - имеется в виду скорее всего объединение сигнатур, а может только сигнатура самой ФС. Первый вариант тут предпочтительней.

2. Определения (нужно знать идеально)

Определения тут зачастую дублируют то, что написано в самом конспекте, поэтому удаление этого блока сэкономит бумагу при печати.

2.1. ИВ

Формальная система с алгеброй Яськовского J_0 в качестве модели, множество истинностных значений $\{0, 1\}$. Формальная теория нулевого порядка, кванторов нету, предикаты - это пропозициональные переменные. Аксиомы:

1. $a \rightarrow b \rightarrow a$
2. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$
3. $a \rightarrow b \rightarrow a \& b$
4. $a \& b \rightarrow a$
5. $a \& b \rightarrow b$
6. $a \rightarrow a \vee b$
7. $b \rightarrow a \vee b$
8. $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow b) \rightarrow (a \vee c \rightarrow b)$
9. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$
10. $\neg \neg a \rightarrow a$

2.2. Общезначимость, доказуемость, выводимость

- Общезначимость формулы - ее свойство в теории с моделью. Общезначимость можно определить как угодно, в принципе. Например в ИВ общезначимость - это что оценка формулы на любых значениях свободных переменных отображает в 1. В модели крипке - существование формулы во всех мирах и т.д.
- Доказуемость - свойство формулы в теории, значащее, что существует доказательство для этой формулы. Доказательство для теории тоже определяется по разному (последовательность утверждений, каждое из которых есть аксиома или следует по правилу вывода из предыдущих в ИВ, дерево с выводами в S^∞)
- Выводимость - в общем случае часто используется как аналог доказуемости, в ИВ это доказуемость из всего, что и ранее + из посылок.

2.3. Теорема о дедукции для ИВ

Теорема, утверждающая, что из $a \vdash b$ следует $\vdash a \rightarrow b$ и наоборот. Доказывается вправо поформульным преобразованием, влево добавлением 1 формулы. Работает в ИВ, ИИВ, предикатах.

2.4. Теорема о полноте исчисления высказываний

Типа исчисление предикатов полно относительно вот той булевой алгебры. Общий ход д-ва: строим док-ва для конкретных наборов перменных, 2^n , где n - количество возможных переменных. Потом их мерджим.

2.5. ИИВ

Это такое ИВ, в котором убрали десятую аксиому, а вместо нее добавили 10i. 10i: $a \rightarrow \neg a \rightarrow b$ Кстати она доказывается и в ИВ

$$1. (a \rightarrow a \vee \neg a) \rightarrow (a \rightarrow a \vee \neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)) \rightarrow a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$$

$$2. a, a \vee \neg a, \neg a \vdash b$$

a

$\neg a$

$b \rightarrow a$

$b \rightarrow \neg a$

$(b \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg b$

$\neg b \rightarrow a$

$\neg b \rightarrow \neg a$

$(\neg b \rightarrow a) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg \neg b$

$\neg \neg b \rightarrow b$

b

$$3. a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$$

А еще в ИИВ главная фишка - недоказуемо $A \vee \neg A$ (можно подобрать модель).

2.6. Теорема Гливенко

Если в ИВ доказуемо a , то в ИИВ доказуемо $\neg \neg a$ Общий ход д-ва: говорим, что если в ИИВ доказуема F , то в ней же доказуема $\neg \neg F$. Доказываем руками двойное отрицание 10 аксиомы и то же самое для МР.

2.7. Порядки

Частичный порядок – рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение. Частично упор. мн-во - множество с частичным порядком на элементах. Линейно упорядоч. мн-во - множество с частичным порядком, в котором два любых элемента сравнимы. Фундированное мн-во - частично упорядоч. множество, в котором каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент. Вполне упорядоченное множество - фундированное множество с линейным порядком.

2.8. Решетки (все свойства)

- Решетка Решетка - это $(L, +, *)$ в алгебраическом смысле и (L, \leq) в порядковом. Решетку можно определить как алгебраическую структуру через аксиомы: коммутативность, ассоциативность, поглощение. Решетку можно определить как упорядоченное множество через множество с частичным порядком на нем, тогда операции

$+$, $*$ определяются как \sup и \inf :

$$\sup p = \min\{u | u \geq \text{all } s \in p\}$$

$$\inf p = \max\{u | u \leq \text{all } s \in p\}$$

$$a + b = \sup\{a, b\}$$

$$a * b = \inf\{a, b\}$$

Если для двух элементов всегда можно определить $a + b$ и $a * b$, то такое множество называется решеткой.

- Дистрибутивная решетка – решетка, в которой работает дистрибутивность: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- Импликативная решетка – всегда существует псевдодополнение b ($b \rightarrow a$) $a \rightarrow b = \max\{c | c * a \leq b\}$ Имеет свойства, что в ней всегда есть максимальный элемент $a \rightarrow a$ и что она дистрибутивна.

2.9. Булевы/псевдобулевы алгебры

- Булева алгебра можно определить так:
 1. $(L, +, *, -, 0, 1)$ с выполненными аксиомами - коммутативность, ассоциативность, поглощение, две дистрибутивности и $a * -a = 0$, $a + -a = 1$.
 2. Импликативная решетка над фундированным множеством. Тогда мы в ней определим 1 как $a \rightarrow a$ (традиционно для импликативной), отрицание как $-a = a \rightarrow 0$, и тогда последняя аксиома из предыдущего определения будет свойством:

$$a * -a = a * (a \rightarrow 0) = a * (\max\{c : c * a \leq 0\}) = a * 0 = 0$$

Насчет второй аксиомы - должно быть 1. То есть лучше как-то через аксиомы определять, видимо.

$$a + -a = a + (a \rightarrow 0) = a + (\max\{c : c * a \leq 0\}) = a + 0 = a$$

// не 1

- Псевдобулева алгебра - это импликативная решетка над фундированным множеством с $\neg a = (a \rightarrow 0)$

2.10. Топологическая интерпретация ИИВ

Булеву алгебру и алгебру Гейтинга можно интерпретировать на множестве R^n . Тогда заключения о общезначимости формулы можно делать более наглядно. Давайте возьмем в качестве множества алгебры все открытые подмножества R^n . Определим операции следующим образом:

1. $a + b \Rightarrow a \cup b$

2. $a * b \Rightarrow a \cap b$

$$3. a \rightarrow b \Rightarrow \text{Int}(a^c \cup b)$$

$$4. \neg a \Rightarrow \text{Int}(a^c)$$

$$5. 0 \Rightarrow \otimes$$

$$6. 1 \Rightarrow \otimes\{-L\}$$

2.11. Модель Крипке

$\text{Var} = \{P, Q, \dots\}$ Модель Крипке – это $\langle W, \leq, v \rangle$, где

- W - множество "миров"
- \leq - частичный порядок на W (отношение достижимости)
- $v: W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1, \perp\}$ - оценка переменных на W , монотонна (если $v(x, P) = 1$, $x \leq y$, то $v(y, P) = 1$ – формулу нельзя ип'вынудить)

Правила:

- $W, x \models P \otimes v(x, P) = 1 \mid P \in \text{Var}$
- $W, x \models (A \& B) \otimes W, x \models A \& W, x \models B$
- $W, x \models (A \vee B) \otimes W, x \models A \vee W, x \models B$
- $W, x \models (A \rightarrow B) \otimes \forall y \geq x (W, y \models A \otimes W, y \models B)$
- $W, x \models \neg A \otimes \forall y \in x (W, y \models \neg A)$

В мире разрешается быть не вынужденной переменной и ее отрицанию одновременно. Формула называется тавтологией в ИИВ с моделью Крипке, если она истинна (вынуждена) в любом мире любой модели Крипке.

2.12. Вложение Крипке в алгебры Гейтинга

Возьмем модель Крипке, возьмем какое-то объединение поддеревьев со всеми потомками, каждое такое объединение пусть будет входить в алгебру Гейтинга. \leq - отношение "быть подмножеством". Определим 0 как \otimes (пустое объединение поддеревьев); Определим операции:

- $= \cup, * = \cap,$

$a \rightarrow b = \cup\{z \in H \mid z \leq a^c \cup b\}$ Так созданное множество с операциями является импликативной решеткой, в которой мы определим $\neg a = a \rightarrow 0$, получим булеву алгебру.

2.13. Полнота ИИВ в алгебрах Гейтинга и моделях Крипке

ИИВ полно относительно алгебр Гейтинга и моделей Крипке. Общий ход доказательства первого сводится к вложению в Гейтинга алгебры Линденбаума-Тарского, а второго - к построению дизъюнктивного множества всех доказуемых формул, являющегося миром Крипке.

2.14. Нетабличность ИИВ

Не существует полной модели, которая может быть выражена таблицей (конечной – алгебра Гейтинга и Крипке не табличны, так как и там и там связи определяются иначе). От противного соорудим табличную модель и покажем, что она не полна, приведя пример большой дизъюнкции из импликаций, для которой можно построить модель Крипке в которой она не общезначима.

2.15. Предикаты

Теория первого порядка, расширяющая исчисление высказываний. Добавляются две новые аксиомы $\forall x.A \rightarrow A[x :=]$, где θ свободна для подстановки в A $A[x :=] \rightarrow \exists x.A$, $-/-$

Правила вывода:

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x.B}$$

x не входит свободно в A

$$\frac{A \rightarrow B}{\exists x.A \rightarrow B}$$

x не входит свободно в B

2.16. Теорема о дедукции в предикатах

Аналогично 1 теореме о дедукции в ИВ, но в доказательстве должны отсутствовать применения правил для кванторов по переменным входящих свободно в выражение γ , $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \rightarrow \alpha$

2.17. Теорема о полноте исчисления предикатов

Исчисление предикатов полно (заметим, что относительно любой модели). Суть в том, что если предикаты непротиворечивы, то у них есть модель. Если у них есть модель, то типа там можно по контрпозиции показать $\models \alpha$.

2.18. Теории первого порядка, определение структуры и модели

Теория первого порядка - это формальная система с кванторами по функциональным символам, но не по предикатам. Рукомахательное определение – это фс с логикой первого порядка в основе, в которой абстрактные предикаты и функциональные символы определяются точно (а может такое определение даже лучше).

Структура по ДГ: Структурой теории первого порядка мы назовем упорядоченную тройку $\langle D, F, P \rangle$, где F — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. функций, и $P = \{P_0, P_1, \dots, P_i\}$ — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. предикатов, D — предметное множество.

Понятие структуры — развитие понятия оценки из исчисления предикатов. Но оно касается только нелогических составляющих теории; истинностные значения и оценки для связок по-прежнему определяются исчислением предикатов, лежащим в основе теории.

Для получения оценки формулы нам нужно задать структуру, значения всех свободных индивидуальных переменных, и (естественным образом) вычислить результат.

Структура по-моему: Все то же самое определение из ИВ. Мы просто забиваем на предикаты в ИВ (не определяем их), расширяем нашу сигнатуру (добавляя конкретные предикаты и функциональные символы), определяем для нее интерпретацию.

И как всегда,.. Модель – это корректная структура (любое доказуемое утверждение должно быть в ней общезначимо).

2.19. Аксиоматика Пеано

Множество N удовлетворяет аксиоматике Пеано, если:

1. $0 \in N$
2. $x \in N, \text{succ}(x) \in N$
3. $\nexists x \in N : (\text{succ}(x) = 0)$
4. $(\text{succ}(a) = c \ \& \ \text{succ}(b) = c) \rightarrow a = b$
5. $P(0) \ \& \ \forall n. (P(n) \rightarrow P(\text{succ}(n))) \rightarrow \forall n. P(n)$

2.20. Формальная арифметика - аксиомы

Формальная арифметика - это теория первого порядка, у которой сигнатура определена как: (цифровки, логические связки, алгебр. связки, '), а интерпретацию сейчас будем определять. Интерпретация определяет два множества - V , P - истинностные и предметные значения. Пусть множество $V = \{0, 1\}$ по-прежнему. $P = \{\text{всякие штуки, которые мы можем получать из логических связок и } 0\}$ Определим оценки логических связок естественным образом. Определим алгебраические связки так: $+(a, 0) = a$ $+(a, b') = (a + b)'$ $*(a, 0) = 0$ $*(a, b') = a * b + a$

2.20.1. Аксиомы

1. $a = b \rightarrow a' = b'$
2. $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
3. $a' = b' \rightarrow a = b$
4. $\neg(a' = 0)$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a * 0 = 0$
8. $a * b' = a * b + a$
9. $\varphi[x := 0] \ \& \ \forall x. (\varphi \rightarrow \varphi[x := x']) \rightarrow \varphi$ // φ содержит св.п x

2.21. Рекурсивные функции

$$Z(x) = 0$$

$$N(x) = x + 1$$

$$U(x_1, \dots, x_n) = x$$

$$S\langle f, g_1, \dots, g \rangle(x_1, \dots, x) = f(g_1(x_1 \dots x), \dots, g(x_1, \dots, x))$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1 \dots x, n) = \begin{cases} f(x_1 \dots x) & n = 0 \\ g(x_1 \dots x, n, R\langle f, g \rangle(x_1 \dots x, n - 1)) & n > 0 \end{cases}$$

$$\mu\langle f \rangle(x_1, \dots, x_n) - \text{минимальное } k, \text{ такое что } f(x_1 \dots x_n, k) = 0$$

2.22. Функция Аккермана

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(m, 0) = A(m - 1, 1)$$

$$A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$$

2.23. Существование рек.ф-й не явл. ф-ей Аккермана (определение конечной леммы)

Пусть $f(n_1 \dots n)$ - примитивная рекурсивная функция, $k \geq 0$. $\exists J : f(n_1 \dots n) < A(J, \sum(n_1, \dots, n))$
Доказывается индукцией по рекурсивным функциям.

2.24. Представимость

Функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется представимой в формальной арифметике, если существует отношение $a(x_1 \dots x_{i+1})$, ее представляющее, причем выполнено следующее:

1. $f(a, b, \dots) = x \Leftrightarrow \vdash a(a\sim, b\sim, \dots x\sim)$
2. $\exists! x. f(a, b, \dots x)$ (вот это свойство вроде бы не обязательно, но ДГ его писал).

2.25. Выразимость

Отношение n называется выразимым, если существует предикат N его выражающий, такой что

1. $n(x_1 \dots x_n) \Rightarrow \vdash N(x_1\sim, \dots x\sim)$
2. $n(x_1 \dots x) \Rightarrow \vdash \neg N(x_1\sim, \dots x\sim)$

2.26. Лемма о связи представимости и выразимости

Если n выразимо, то C° представимо. $C^\circ = 1$ если n , и нулю если $\neg n$

2.27. Бета-функция Гёделя, Г-последовательность

$\beta(b, c, i) = k$ Функция, отображающая конечную последовательность из N (a) в k . Работает через магию, математику, простые числа и Гёделеву последовательность, которая подходит под условия китайской теоремы об остатках. $\beta(b, c, i) = b \% ((i + 1) * c + 1)$

2.28. Представимость рек.ф-й в ФА (знать формулы для самых простых)

Рекурсивные функции представимы в ФА

1. $z(a, b) = (a = a) \& (b = 0)$
2. $n(a, b) = (a = b')$
3. $u = (x_1 = x_1) \& \dots \& (x = x) \& (x_{+1} = x)$
4. $s(a_1 \dots a, b) = \exists b_1 \dots \exists b (G_1(a_1 \dots a, b_1) \& \dots \& G_n(a_1 \dots a, b))$
5. $r(x_1, \dots, x_n, k, a) =$
 $\exists b \exists c (\exists k (\beta(b, c, 0, k) \& \varphi(x_1, \dots, x_n, k)) \&$
 $B(b, c, x_{n+1}, a) \&$
 $\forall k (k < x_{n+1} \rightarrow \exists d \exists e (B(b, c, k, d) \& B(b, c, k', e) \& G(x_1 \dots x, k, d, e))))$
6. $m\langle F \rangle(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, 0) \& \forall y ((y < x_{n+1}) \rightarrow \neg F(x_1, \dots, x_n, y, 0))$

2.29. Гёделева нумерация (точно)

| a | $\ulcorner a \urcorner$ | описание |
|---------------|------------------------------|--|
| (| 3 | |
|) | 5 | |
| , | 7 | |
| \neg | 9 | |
| \rightarrow | 11 | |
| \vee | 13 | |
| $\&$ | 15 | |
| \forall | 17 | |
| \exists | 19 | |
| x_k | $21 + 6 \cdot k$ | переменные |
| f_k^n | $23 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | n -местные функцион. символы ($'$, $+$, $*$) |
| P_k^n | $25 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | n -местные предикаты ($=$) |

2.30. Выводимость и рекурсивные функции (че там с Тьюрингом)

Основные тезисы по вопросу:

- $\text{Emulate}(\text{input}, \text{prog}) = \text{plog}(R < f, g > (< 'S, \text{input}, 0 >, , \text{pb}, \text{pc}, \text{tb}, \text{tc}, \text{steps}(-// -)), 1) ==$
 F

- $\text{Proof}(\text{term}, \text{proof}) = \text{Emulate}(\text{proof}, \text{MY_PROOF_CHECKER}) \&\& (\text{plog}(\text{proof}, \text{len}(\text{proof})) = \text{term})$
- Любая представимая в ФА ф-я является рекурсивной $f(x_1 \dots x_n) = \text{plog}(\langle S \langle G_\varphi, U_{n+1,1}, \dots, U_{n+1,n}, p \rangle \rangle)$
 G_φ тут принимает $n+2$ аргумента: $x_1 \dots x_n, p, b$ и возвращает 0 если p - доказательство $\varphi(x_1 \dots x_n, p)$, представляющего f .

2.31. Непротиворечивость

Теория непротиворечива, если в ней нельзя одновременно вывести a и $\neg a$. Одновременная выводимость $\neg a$ и a эквивалентна выводимости $a \& \neg a$

2.32. ω -непротиворечивость

Теория ω -непротиворечива, если из $\odot \varphi(x) \vdash \varphi(x \sim)$ следует $\odot \exists p \neg \varphi(p)$. Проще говоря, если мы взяли формулу, то невозможно вывести одновременно $\exists x \neg A(x)$ и $A(0), A(1), \dots$

2.33. Первая теорема Гёделя о неполноте

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\sigma \sim)$
2. Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то недоказуемо $\neg(\sigma \sim)$

2.34. Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней найдется такая формула φ , что $\odot \varphi$ и $\odot \neg \varphi$

2.35. Consis

Consis - утверждение, формально доказывающее непротиворечивость ФА То есть $\vdash \text{Consis} \Rightarrow$ непротиворечива

2.36. Условия Г-Б (наизусть)

Пусть $\pi g(x, p)$ выражает $\text{Proof}(x, p)$. $(x) = \exists t. g(x, t)$ действительно показывает, что выражение доказуемо, если

1. $\vdash a \Rightarrow \vdash (a \sim)$
2. $\vdash (a \sim) \rightarrow ((a \sim) \sim)$
3. $\vdash (a \sim) \rightarrow ((a \rightarrow b) \sim) \rightarrow (b \sim)$

2.37. Лемма о самоприменении

$a(x)$ - формула, тогда $\exists b$ такой что

1. $\vdash a(\neg b) \rightarrow b$
2. $\vdash \neg \rightarrow a(\neg b)$

2.38. Вторая теорема Гёделя о неполноте ФА

Если теория непротиворечива, в ней ω Consis

2.39. Теория множеств

Теория множеств - теория первого порядка, в которой есть единственный предикат \in (в ФА был $=$), есть связка \leftrightarrow , есть пустое множество, операции пересечения и объединения. $x \cap y = z$, тогда $\forall t (t \in z \leftrightarrow t \in x \& t \in y)$ $x \cup y = z$, тогда $\forall t (t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y)$ $Dj(x) \omega a \omega b (a \in x \& b \in x \& a \neq b \rightarrow a \cap b = \emptyset)$

2.40. ZFC

2.40.1. Аксиома равенства

$\forall x \forall y \forall z ((x = y \& y \in z) \rightarrow x \in z)$ Если два множества равны, то любой элемент лежащий в первом, лежит и во втором

2.40.2. Аксиома пары

$\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow \exists p (x \in p \& y \in p \& \forall z (z \in p \rightarrow (x = z \vee y = z))))$ $x \neq y$, тогда сущ. $\{x, y\}$

2.40.3. Аксиома объединений

$\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow \exists s (y \in s \& s \in x)))$ Если x не пусто, то из любого семейства множеств можно образовать „кучу-малу“, то есть такое множество p , каждый элемент y которого принадлежит по меньшей мере одному множеству s данного семейства $s \in x$

2.40.4. Аксиома степени

$\forall x \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow y \in x) P(x)$ - множество степени x (не путать с 2^ω - булеаном) Это типа мы взяли наш x , и из его элементов объединением и пересечением например понаобразовывали кучу множеств, а потом положили их в p .

2.40.5. Схема аксиом выделения

$\forall x \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow (y \in x \& \varphi(y)))$ Для нашего множества x мы можем подобрать множество побольше, на котором для всех элементов, являющихся подмножеством x выполняется предикат.

2.40.6. Аксиома выбора (не входит в ZF по дефолту)

Если $a = Dj(x)$ и $a \neq 0$, то $x \in a \neq 0$

2.40.7. Аксиома бесконечности

$\exists N(\emptyset \in N \& \forall x(x \in N \rightarrow x \cup \{x\} \in N))$

2.40.8. Аксиома фундирования

$\forall x(x = \emptyset \vee \exists y(y \in x \& y \cap x = \emptyset)) \quad \forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \& y \cap x = \emptyset))$ Равноценные формулы.

Я бы сказал, что это звучит как-то типа "не существует бесконечно вложенных множеств"

2.40.9. Схема аксиом подстановки

$\forall x \exists! y. \varphi(x, y) \rightarrow \forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow (\exists d. (d \in a \& \varphi(d, c))))$ Пусть формула φ такова, что для при любом x найдется единственный y такой, чтобы она была истинна на x, y , тогда для любого a найдется множество b , каждому элементу которого c можно сопоставить подмножество a и наша функция будет верна на нем и на c . Типа для хороших функций мы можем найти множество c отображением из его элементов в подмножество нашего по предикату.

2.41. Ординальные числа, операции

- Определение вполне упорядоченного множества (фундированное с линейным порядком).
- Определение транзитивного множества Множество X транзитивно, если $\forall a \forall b ((a \in b \& b \in x) \rightarrow a \in x)$
- Ординал - транзитивное вполне упорядоченное отношение \in мн-во
- Верхняя грань множества ординалов S $C = \min(X) \& C \in X | X = \{z | \emptyset (y \in S)(z \geq y)\}$
 $C = \text{Upb}(S) \quad \text{Upb}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$
- Successor ordinal (сакцессорный ординал?) Это $b = a' = a \cup \{a\}$
- Предельный ординал Ординал, не являющийся ни 0 ни successor'ом.
- Недостижимый ординал ε - такой ординал, что $\varepsilon = w^\varepsilon \quad \varepsilon_0 = \text{Upb}(w, w^w, w^{w^w}, w^{w^{w^w}}, \dots)$
- минимальный из ε
- Канторова форма - форма вида $\sum(a \cdot w^b + c)$, где b - ординал, последовательность строго убывает по b . Есть слабая канторова форма, где вместо $a (a \in \mathbb{N})$ пишут a раз w^b . В канторовой форме приятно заниматься сложениями и прочим, потому что всякие upb - слишком ни о чем.

$$\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + c' &= (x + c)' \\
x + \lim(a) &= \text{Upb}\{x + c \mid c < a\} \\
x * 0 &= 0 \\
x * c' &= x * c + x \\
x * \lim(a) &= \text{Upb}\{x * c \mid c < a\} \\
x^0 &= 1 \\
x^{c'} &= (x^c) * x \\
x^{\lim(a)} &= \text{Upb}\{x^c \mid c < a\}
\end{aligned}$$

2.42. Кардинальные числа, операции

Будем называть множества равномощными, если найдется биекция. Будем называть A не превышающим по мощности B , если найдется инъекция $A \rightarrow B$ ($|A| \leq |B|$). Будем называть A меньше по мощности, чем B , если $|A| \leq |B|$ & $|A| \neq |B|$. Кардинальное число - число, оценивающее мощность множества. Кардинальное число \aleph - это ординальное число a , такое что $\aleph \leq x \leq a \mid |x| \leq |a|$. $\aleph_0 = \omega$ по определению; \aleph_1 - минимальный кардинал, следующий за \aleph_0 . Кардинальное число \aleph - это ординальное число a , такое что $\aleph = P_{(i-1)} 0 = 0^+$: $|A| + |B| = \max(|A|, |B|)$ (если нет общих элементов) $= |A \cup B|$

2.43. Диагональный метод, теорема Лёвенгейма-Скулема

Диагональный метод - метод доказательства $|2^X| > |X|$

2.44. Парадокс Скулема

Мнимый парадокс, базирующийся на теореме Лёвенгейма-Скулема и том факте, что в формальной арифметике существуют несчетные множества. Заковырка в том, что "существует счетное мн-во" выражается в ФА "не существует биекции". И тогда прийти к противоречию нельзя.

2.45. Теорема Генцена о непротиворечивости ФА

Ну типа мы можем обернуть ФА в теорию покруче, доказать что в ней невозможно доказать $0=1$, а потом доказать, что если S^∞ непротиворечива, то и S непротиворечива.

3. Ticket 1: ИВ

3.1. Определения (исчисление, высказывание, оценка...)

Формальная система с алгеброй Яськовского J_0 в качестве модели, множество истинностных значений $\{0, 1\}$. Формальная теория нулевого порядка, кванторов нету, предикаты - это пропозициональные переменные.

3.2. Общезначимость, доказуемость, выводимость

- Общезначимость формулы - ее свойство в теории с моделью. Общезначимость можно определить как угодно, в принципе. Например в ИВ общезначимость - это что оценка формулы на любых значениях свободных переменных отображает в 1. В модели крипке - существование формулы во всех мирах и т.д.
- Доказуемость - свойство формулы в теории, значащее, что существует доказательство для этой формулы. Доказательство для теории тоже определяется по разному (последовательность утверждений, каждое из которых есть аксиома или следует по правилу вывода из предыдущих в ИВ, дерево с выводами в S_∞)
- Выводимость - в общем случае часто используется как аналог доказуемости, в ИВ это доказуемость из всего, что и ранее + из посылок.

3.3. Схемы аксиом и правило вывода

Аксиомы:

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma \rightarrow \beta)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Правило вывода М.Р.:

$$\frac{\alpha \quad (\alpha \rightarrow \beta)}{\beta}$$

3.4. Теорема о дедукции

\Rightarrow Если нужно переместить последнее предположение вправо, то рассматриваем случаи – аксиома или предположение, МР, это самое выражение.

1. A
 $A \rightarrow \alpha \rightarrow A$
 $\alpha \rightarrow A$
2. (там где-то сзади уже было $\alpha \rightarrow A$, $\alpha \rightarrow A \rightarrow B$)
 $(\alpha \rightarrow A) \rightarrow (\alpha \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (\alpha \rightarrow B)$
 $(\alpha \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (\alpha \rightarrow B)$
 $\alpha \rightarrow B$
3. $A \rightarrow A$ умеем доказывать

\Leftarrow Если нужно переместить влево, то перемещаем, добавляем
 $A \rightarrow B$ (последнее)
 A (перемещенное)
 B

3.5. Корректность исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского

- Индукцией по доказательству – если аксиома, то она тавтология, все ок. Если модус поненс, то таблица истинности для импликации и все ок

4. Ticket 2: полнота ИВ

4.1. Полнота исчисления высказываний относительно алгебры Яськовского

Кстати полноту можно доказывать маханием руками как для предикатов, и я не могу утверждать, что при таком подходе ИВ не будет полно относительно любой модели.

4.1.1. Контрапозиция

Лемма 4.1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Доказательство. Докажем, что $(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta \vdash \neg\alpha$:

- | | | | |
|-----|--|------------|-------------------------------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta$ | Допущение | |
| (2) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ | Сх. акс. 9 | |
| (3) | $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ | М.Р. 1,2 | |
| (4) | $\neg\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta$ | Сх. акс. 1 | После применения теоремы о дедукции |
| (5) | $\neg\beta$ | Допущение | |
| (6) | $\alpha \rightarrow \neg\beta$ | М.Р. 5,4 | |
| (7) | $\neg\alpha$ | М.Р. 6,3 | |

2 раза получим как раз то, что нужно

□

4.1.2. Правило исключенного третьего

С помощью контрапозиции доказываем два утверждения:

$\neg(A|\neg A) \rightarrow \neg A$ (один раз контрапозицию от этого обратную, там $A \rightarrow (A|\neg A)$ акс)

$\neg(A|\neg A) \rightarrow \neg\neg A$ Потом девятую аксиому и снимаем двойное отрицание

4.1.3. Всякие очевидные вещи типа если выводится из А и из Б то из А и Б тоже

4.1.4. Правило со звездочкой (14 доказательств)

1. $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
 α
 $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
 $\alpha \vee \beta$
2. $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
 α
 $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
 $\alpha \vee \beta$
3. $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
 β
 $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
 $\alpha \vee \beta$

4. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
 $\neg\alpha$
 $\neg\beta$
 $(\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$
 $\neg\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \neg\alpha$
 $\alpha \vee \beta \rightarrow \neg\alpha$
 $\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta \vdash \alpha$
 $\neg\alpha$
 $\neg\beta$
 $\alpha \vee \beta$
 $\alpha \rightarrow \alpha$
 $\dots // \Delta\text{-BO } \neg\beta, \neg\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$
 $\beta \rightarrow \alpha$
 $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha))$
 $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha)$
 $\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha$
 α
 $\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha$
 $(\alpha \vee \beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$
 $\neg(\alpha \vee \beta)$

5. $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
 α
 β
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
 $\beta \rightarrow \alpha \& \beta$
 $\alpha \& \beta$

6. $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
 $\neg\beta$
 $((\alpha \& \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \& \beta) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \& \beta)$
 $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
 $(\alpha \& \beta \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \& \beta)$
 $\neg\beta \rightarrow \alpha \& \beta \rightarrow \neg\beta$
 $\alpha \& \beta \rightarrow \neg\beta$
 $\neg(\alpha \& \beta)$

7. $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
аналогично

8. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
аналогично

9. $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 β
 $\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
 $\alpha \rightarrow \beta$

10. $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

α

$\neg\beta$

$\neg\beta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta)$

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$

$\alpha, \neg\beta, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

α

$\alpha \rightarrow \beta$

β

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

$\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$

$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$

11. $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

β

$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$

$\alpha \rightarrow \beta$

12. $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Ну тут типо очевидно (на самом деле тут боль и страдания)

13. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Схема аксиом 9

14. $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

$\neg\alpha$

5. Ticket 3: ИИВ

5.1. ИИВ, структура, модель

Сигнатура - (R, F, C, r) : R - множество символов для предикатов, F - функциональных символов, C - символов констант, r - функция, определяющая арифметичность $x \in R \vee F$. Интерпретация - это приписывание символам значения и правил действия Структура - это носитель M (множество истинностных значений), сигнатура и интерпретация над носителем. Если все аксиомы верны, то структура корректна. В таком случае она называется моделью. Выкидываем 10 аксиому, добавляем $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$.

Она доказывается и в ИВ:

Лемма 5.1. $\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

| | | |
|------|---|-------------|
| (1) | α | Допущение |
| (2) | $\neg\alpha$ | Допущение |
| (3) | $\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow \alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (4) | $\neg\beta \rightarrow \alpha$ | М.Р. 1,3 |
| (5) | $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (6) | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | М.Р. 2,5 |
| (7) | $(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\neg\beta)$ | Сх. акс. 9 |
| (8) | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\neg\beta)$ | М.Р. 4,7 |
| (9) | $\neg\neg\beta$ | М.Р. 6,8 |
| (10) | $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$ | Сх. акс. 10 |
| (11) | β | М.Р. 9,10 |

Таким образом мы умеем доказывать $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ применив 3 раза теорему о дедукции

Лемма 5.2. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vee \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$

| | | |
|-----|--|------------|
| (1) | $(\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$ | Сх. акс. 2 |
| (2) | $\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (3) | $\alpha \vee \neg\alpha$ | Допущение |
| (4) | $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ | М.Р. 3,2 |
| (5) | $(\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$ | М.Р. 4,1 |
| (6) | $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ | Допущение |
| (7) | $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ | М.Р. 6,5 |

5.2. Опровергаемость исключенного третьего

Вводим в наше множество истинностных значений дополнительный элемент H (сокращение от слова «Неизвестно»). Отождествим H с $\frac{1}{2}$, так что $L < H < I$. Определим операции на этом множестве истинностных значений:

- конъюнкция: минимум из двух значений (например $I \& H = H$).
- дизъюнкция: максимум из двух значений (например $I \vee H = I$).
- импликация: $I \rightarrow \alpha = \alpha, L \rightarrow \alpha = I, H \rightarrow L = L, H \rightarrow H = I, H \rightarrow I = I$.

- отрицание: $\neg H = L$, а для остальных элементов все так же.

Назовем формулу *3-тавтологией*, если она принимает значение И при любых значениях переменных из множества $\{И, Л Н\}$. Теперь нужно всего-лишь проверить, что все аксиомы являются 3-тавтологиями и, что если посылка импликации является тавтологией, то и заключение является тавтологией. Второе очевидно по определению тавтологии, а аксиомы просто проверяются вручную.

Значит любая интуиционистски выводимая формула 3-тавтология. Теперь заметим, что формула $\alpha \vee \neg \alpha$ принимает значение Н при $\alpha = Н$. Следовательно она не 3-тавтология, а значит невыводима.

5.3. Решетки

Просто *решетка* – это $(L, +, *)$ в алгебраическом смысле и (L, \leq) в порядковом. Решетку можно определить как алгебраическую структуру через аксиомы:

- Аксиомы идемпотентности
 $\alpha + \alpha = \alpha$
 $\alpha * \alpha = \alpha$
- Аксиомы коммутативности
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
 $\alpha * \beta = \beta * \alpha$
- Аксиомы ассоциативности
 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
 $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$
- Аксиомы поглощения
 $\alpha + (\alpha * \beta) = \alpha$
 $\alpha * (\alpha + \beta) = \alpha$

Также решетку можно определить как упорядоченное множество с частичным порядком на нем. Тогда операции $+$, $*$ определяются как \sup и \inf ($\sup(\varphi) = \min\{u | u \geq \forall x \in \varphi\}$, $\inf(\varphi) = \max\{u | u \leq \forall x \in \varphi\}$).

$$\alpha + \beta = \sup(\{\alpha, \beta\})$$

$$\alpha * \beta = \inf(\{\alpha, \beta\})$$

Если для любых двух элементов из множества S можно определить эти две операции, то S называется решеткой.

Дистрибутивная решетка – решетка, в которой добавляется дистрибутивность:

$$\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$$

Импликативная решетка – решетка, в которой для любых двух элементов α и β из множества существует псевдодополнение α относительно β ($\alpha \rightarrow \beta$), которое определяется так:

$$\alpha \rightarrow \beta = \max\{\gamma | \gamma * \alpha \leq \beta\}$$

Свойства импликативной решетки:

- Существует максимальный элемент $\alpha \rightarrow \alpha$, обычно обозначаемый как 1
- Всякая импликативная решетка дистрибутивна

5.4. Алгебра Гейтинга, булева алгебра

Булева алгебра – $(L, +, *, -, 0, 1)$, с аксиомами:

- Аксиомы коммутативности
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha * \beta = \beta * \alpha$$
- Аксиомы ассоциативности
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$$
- Аксиомы поглощения
$$\alpha + (\alpha * \beta) = \alpha$$
$$\alpha * (\alpha + \beta) = \alpha$$
- Аксиомы дистрибутивности
$$\alpha + (\beta * \gamma) = (\alpha + \beta) * (\alpha + \gamma)$$
$$\alpha * (\beta + \gamma) = (\alpha * \beta) + (\alpha * \gamma)$$
- Аксиомы дополненности
$$\alpha * \neg\alpha = 0$$
$$\alpha + \neg\alpha = 1$$

Также Булеву алгебру можно определить как импликативную решетку над фундированным множеством. Тогда 1 в ней будет $\alpha \rightarrow \alpha$, $\neg\alpha = \alpha \rightarrow 0$. Тогда $\alpha * \neg\alpha = 0$ будет уже свойством, а $\alpha + \neg\alpha = 1$ все еще аксиомой.

Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) – это импликативная решетка над фундированным множеством с $\neg\alpha = \alpha \rightarrow 0$

5.5. Алгебра Линденбаума-Тарского

Пусть V – множество формул ИИВ

Порядок для решетки:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash \beta$$

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash \beta \& \beta \vdash \alpha$$

Определим операции и 0, 1:

$$0 = \alpha \& \neg\alpha = \perp$$

$$1 = \alpha \rightarrow \alpha = \top$$

$$\alpha \& \beta = \alpha * \beta$$

$$\alpha \vee \beta = \alpha + \beta$$

$$\neg\alpha = -\alpha$$

Получившаяся алгебра называется алгеброй Линденбаума-Тарского и является алгеброй Гейтинга, т.к. для нее выполняется аксиома $\alpha * \neg\alpha = 0$ (по определению).

Лемма 5.3. $\forall \beta \in V \perp \vdash \beta$ (Из лжи следует все)

Доказательство. $\alpha \& \neg \alpha \vdash \beta$

- (1) $\alpha \& \neg \alpha$ Допущение
- (2) $\alpha \& \neg \alpha \rightarrow \alpha$ Сх. акс. 4
- (3) $\alpha \& \neg \alpha \rightarrow \neg \alpha$ Сх. акс. 5
- (4) α М.Р. 1,2
- (5) $\neg \alpha$ М.Р. 1,3
- (6) $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$ Сх. акс. 10
- (7) $\neg \alpha \rightarrow \beta$ М.Р. 4,6
- (8) β М.Р. 5,7

□

5.6. Теорема о полноте ИИВ относительно алгебры Гейтинга

Возьмем в качестве алгебры Гейтинга алгебру Линденбаума-Тарского - ξ . Она очевидно является моделью.

Теорема 5.4. $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Доказательство. $\models \alpha \Rightarrow \llbracket \alpha \rrbracket^\xi = 1$

$\llbracket \alpha \rrbracket^\xi = 1 \Rightarrow 1 \leq \llbracket \alpha \rrbracket^\xi$ (По определению алгебры Л-Т)

$\beta \rightarrow \beta \vdash \alpha$ (По определению \leq в алгебре Л-Т)

Т.к. $\beta \rightarrow \beta$ - тавтология, то и α - тавтология

□

5.7. Дизъюнктивность ИИВ

Используем алгебру Гёделя $\Gamma(A)$ (γ - функция преобразования). Можно преобразовать любую алгебру Гейтинга, возьмем алгебру Л-Т. Алгебра Гёделя использует функцию преобразования: $\gamma(a) = b$ значит, что в алгебре A элементу a соответствует элемент b из алгебры Гёделя. Порядок сохраняется естественным образом. Также добавим еще один элемент ω ($\gamma(1) = \omega$). Таким образом $\Gamma(A) = A \cup \{\omega\}$. Порядок в $\Gamma(A)$:

- $\forall a \in \Gamma(A) \setminus \{1\} a \leq \omega$
- $\omega \leq 1$

| | | |
|-----------------|---------|-----------------|
| $a + b$ | $b = 1$ | $b = \gamma(v)$ |
| $a = 1$ | 1 | 1 |
| $a = \gamma(u)$ | 1 | $\gamma(u + v)$ |

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| $a * b$ | $b = 1$ | $b = \gamma(v)$ |
| $a = 1$ | 1 | $\gamma(a * v)$ |
| $a = \gamma(u)$ | $\gamma(u * b)$ | $\gamma(u * v)$ |

| | | |
|-------------------|---------|---------------------------|
| $a \rightarrow b$ | $b = 1$ | $b = \gamma(v)$ |
| $a = 1$ | 1 | $\gamma(a \rightarrow v)$ |
| $a = \gamma(u)$ | 1 | $u \rightarrow v$ |

| | |
|-----------------|------------------|
| a | $\neg a$ |
| $a = 1$ | $\gamma(\neg a)$ |
| $a = \gamma(u)$ | $\neg u$ |

Лемма 5.5. Гёделева алгебра является Гейтинговой

Доказательство. Необходимо просто доказать аксиомы коммутативности, ассоциативности и поглощения.

□

Теорема 5.6. $\vdash \alpha \vee \beta \Rightarrow$ либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$

Доказательство. Возьмем A , построим $\Gamma(A)$. Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket^A = 1$ и $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket^{\Gamma(A)} = 1$. Тогда по определению $+$ в алгебре Гёделя, $\llbracket \alpha \rrbracket^{\Gamma(A)} = 1$, либо $\llbracket \beta \rrbracket^{\Gamma(A)} = 1$. Тогда оно такое же и в алгебре Л-Т, а алгебра Л-Т полна.

□

5.8. Теорема Гливенко

Теорема 5.7. Если в ИВ доказуемо α , то в ИИВ доказуемо $\neg\neg\alpha$.

Доказательство. Разберем все встречающиеся в изначальном доказательстве формулы

1. Заметим, что если в ИИВ доказуемо α , то $\neg\neg\alpha$ так же доказуемо.

Докажем, что $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

| | | |
|------|--|------------|
| (1) | α | Допущение |
| (2) | $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (3) | $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | М.Р. 1,2 |
| (4) | $\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha)$ | Сх. акс. 1 |
| (5) | $(\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha)$ | Сх. акс. 2 |
| (6) | $(\neg\alpha \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha)$ | М.Р. 4,5 |
| (7) | $(\neg\alpha \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha))$ | Сх. акс. 1 |
| (8) | $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ | М.Р. 7,6 |
| (9) | $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ | Сх. акс. 9 |
| (10) | $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ | М.Р. 3,9 |
| (11) | $\neg\neg\alpha$ | М.Р. 8,10 |

Значит, если α - аксиома с 1-ой по 9-ую, то $\neg\neg\alpha$ так же может быть доказано

2. Пусть α получилось по 10-ой аксиоме $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. Докажем, что $\vdash \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

| | | |
|-----|---|--------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (2) | $\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\alpha$ | Контрпозиция |
| (3) | $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | Сх. акс. 10 |
| (4) | $\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ | Контрпозиция |
| (5) | $(\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ | Сх. акс. 9 |
| (6) | $(\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ | М.Р. 2,5 |
| (7) | $\neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ | М.Р. 4,6 |

3. Приведем конструктивное доказательство:

- Если α - аксиома, то $\neg\neg\alpha$ доказывается с помощью 1-го и 2-го пунктов
- Если был применен М.Р., то в изначальном доказательстве были α , $\alpha \rightarrow \beta$, β . По индукционному предположению мы знаем, что $\neg\neg\alpha$, $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$. Нужно доказать $\neg\neg\beta$.

Давайте для начала докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta, \alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$.

| | | |
|-----|----------------------------|-----------|
| (1) | α | Допущение |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$ | Допущение |
| (3) | β | М.Р. 1,2 |

Значит мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta, \alpha \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$. Теперь докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta, \alpha, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$.

| | | |
|-----|--|------------|
| (1) | $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Сх. акс. 9 |
| (2) | $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$ | Допущение |
| (3) | $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$ | Сх. акс. 1 |
| (4) | $\neg\beta$ | Допущение |
| (5) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$ | М.Р. 4,3 |
| (6) | $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | М.Р. 2,1 |
| (7) | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | М.Р. 5,6 |

Теперь мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$. Докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta, \alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\alpha$.

- | | | |
|-----|--|------------|
| (1) | $(\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$ | Сх. акс. 9 |
| (2) | $\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Допущение |
| (3) | $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Сх. акс. 1 |
| (4) | $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Допущение |
| (5) | $\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | М.Р. 4,3 |
| (6) | $(\alpha \rightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$ | М.Р. 2,1 |
| (7) | $\neg\alpha$ | М.Р.5,6 |

Теперь мы знаем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$. Наконец докажем, что $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vdash \neg\neg\beta$.

- | | | |
|-----|---|------------|
| (1) | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$ | Сх. акс. 9 |
| (2) | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | Допущение |
| (3) | $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$ | Сх. акс. 1 |
| (4) | $\neg\neg\alpha$ | Допущение |
| (5) | $\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$ | М.Р. 4,3 |
| (6) | $(\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$ | М.Р. 2,1 |
| (7) | $\neg\neg\beta$ | М.Р. 5,6 |

□

5.9. Топологическая интерпретация

Булеву алгебру и алгебру Гейтинга можно интерпретировать на множестве \mathbb{R}^n . Тогда заключения о общезначимости формулы можно делать более наглядно. Давайте возьмем в качестве множества алгебры все открытые подмножества \mathbb{R}^n . Определим операции следующим образом:

- $\alpha + \beta = \alpha \cup \beta$
- $\alpha * \beta = \alpha \cap \beta$
- $\alpha \rightarrow \beta = \text{Int}(\alpha^c \cup \beta)$
- $-\alpha = \text{Int}(\alpha^c)$
- $0 = \emptyset$
- $1 = \cup\{V \subset L\}$

6. Ticket 4: ИИБ2

6.1. Модели Крипке

W – множество миров

V – множество вынужденных переменных

Введем отношение частичного порядка на W - \leq (отношение достижимости). И введем оценку переменной $v : W \times V \rightarrow \{0, 1\}$. v должна быть монотонна (Если $v(x, P) = 1$ и $x \leq y$, то $v(y, P) = 1$). Если переменная x истинна в мире w , то мы пишем $w \models x$.

Модель Крипке – это $\langle W, \leq, v \rangle$.

Теперь можно определить истинность любой формулы (в данном мире) индукцией по построению формулы. Правила:

- $w \models A \& B \Leftrightarrow w \models A$ и $w \models B$;
- $w \models A \vee B \Leftrightarrow w \models A$ или $w \models B$;
- $w \models A \rightarrow B \Leftrightarrow$ в любом мире $u \geq w$, в котором истинна A , истинна так же истинна и B ;
- $w \models \neg A \Leftrightarrow$ ни в каком мире $u \geq w$ формула A не является истинной;

6.2. Корректность ИИБ относительно моделей Крипке

Теорема 6.1. Если формула выводима в ИИБ, то она истинна в моделях Крипке.

Доказательство. Проверим М.Р. и аксиомы (что они истинны во всех мирах):

- М.Р.: по определению импликации в моделях Крипке, если в мире истинно A , $A \rightarrow B$, то истинно и B
- Аксиомы:
 1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Пусть где-нибудь истинна A , в силу монотонности она истинна во всех б'ольших мирах, так что $B \rightarrow A$ тоже будет истинно.
 2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Пусть где-нибудь истинно $A \rightarrow B$, тогда необходимо доказать, что истинно и $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
 - Пусть истинны A, B . Тогда если истинно $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, то истинно и C по монотонности A и B . A, B, C истинны, значит $A \rightarrow C$ истинно.
 - Пусть не истинны ни A , ни B . Тогда $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ не истинно и C не истинно. Значит $A \rightarrow C$ не может быть истинно, т.к. ни A , ни B , ни C не истинны.
 3. Подобным образом доказываем все аксиомы

□

6.3. Вложение Крипке в Гейтинга

Не нужно

6.4. Полнота ИИВ в моделях Крипке

Теорема 6.2. ИИВ полно относительно моделей Крипке

Доказательство. Докажем в несколько шагов

1. *Дизъюнктивное множество* M - такое множество, что если в $M \vdash a \vee b$, то $a \in M$ или $b \in M$. Докажем, что если $M \vdash a$, то $a \in M$:
Пусть это не так. Рассмотрим $a \rightarrow a \vee \neg a$. Раз $M \vdash a$, то $M \vdash a \vee \neg a$. Т.к. $a \notin M$, то $\neg a \in M$ по определению дизъюнктивности M . Но тогда из $M \vdash a$ и $M \vdash \neg a$ мы можем доказать, что $M \vdash a \& \neg a$.
2. Возьмем множество всех дизъюнктивных множеств с формулами из ИИВ. Мы можем это сделать, т.к. ИИВ дизъюнктивно. Для любого элемента $W_i \vdash a$, $a \in W_i$, значит в этом мире a вынуждено. Построим дерево с порядком "быть подмножеством". Докажем, что это множество - модель Крипке. Проверим 5 свойств:
 - (a) $W, x \Vdash P \Leftrightarrow v(x, P) = 1$ если $P \in V$ (V - множество вынужденных переменных).
Монотонность выполняется по определению дерева
 - (b) $W, x \Vdash (A \& B) \Leftrightarrow W, x \Vdash A$ и $W, x \Vdash B$
С помощью аксиомы $A \& B \rightarrow A$ доказываем $W \vdash A$, значит $A \in W$. Аналогично с B
 - (c) $W, x \Vdash (A \vee B) \Leftrightarrow W, x \Vdash A$ или $W, x \Vdash B$
Очевидно по определению дизъюнктивности
 - (d) $W, x \Vdash (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall y \geq x (W, y \Vdash A \Rightarrow W, y \Vdash B)$
Мы знаем, что $W \vdash A \rightarrow B$. Пусть в W есть A , тогда по М.Р. докажем, что B . Пусть в W есть B , тогда мы уже получили B .
 - (e) $W, x \Vdash \neg A \Leftrightarrow \forall y \geq x (W, y \not\Vdash A)$
Если где-то оказалось A , то оно доказуемо, а значит мы сможем доказать и $A \& \neg A$
3. $\vdash A$, тогда $W_i \Vdash A$. Рассмотрим $W_0 = \{\text{все тавтологии ИИВ}\}$. $W_0 \Vdash A$, т.е. $\vdash A$.

□

6.5. Нетабличность интуиционистской логики

Теорема 6.3. Не существует полной модели, которая может быть выражена таблицей

Доказательство. Докажем от противного. Построим табличную модель и докажем, что она не полна. В ИВ мы обычно пользуемся алгеброй Яськовского $V = \{0, 1\}$, $0 \leq 1$. Пусть имеется $V = \{\dots\}$, $|V| = n$ - множество истинностных значений. Пусть его размер больше 2. Тогда построим формулу $\bigvee_{(1 \leq j < i \leq n+1)} (p_i \rightarrow p_j)$ - такая большая дизъюнкция из импликаций

1. Она общезначима, т.к. всего таких импликаций у нас будет $C_n^2 \geq n$ (по принципу Дирихле встретятся два одинаковых значения и она будет верна, тогда все выражение будет верно)
2. Недоказуемость. Построим такую модель Крипке, в которой она будет не общезначима.
 J_0 - алгебра Яськовского. Определим последовательность алгебр L_n по следующим правилам: $L_0 = J_0$, $L_n = \Gamma(L_{n-1})$. Таким образом L_n - упорядоченное множество $\{0, w_1, w_2, \dots, 1\}$. Пусть f - оценка в L_n , действующая по следующим правилам на нашу формулу: $f(a_1) = 0$, $f(a_{n+1}) = 1$, $f(a_i) = w_i$ при $j < i$ if $(a_i \rightarrow a_j) = f(a_i) \rightarrow f(a_j) = f(a_j)$. Последнее выражение не может являться 1, так что формула недоказуема. (ИИВ полно относительно алгебры Гейтинга)

□

7. Ticket 5: Логика 2 порядка

7.1. Основные определения

Смотрим коснпект $\mathcal{D}\Gamma$

7.2. Теорема о дедукции

Теорема 7.1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве отсутствуют применения правил для кванторов, использующих свободные переменные из формулы α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство. Будем рассматривать формулы в порядке сверху вниз. На i -ой строке встретили формулу δ_i . Тогда докажем, что $\alpha \rightarrow \delta_i$. Разберем случаи:

1. δ_i - старая аксиома, совпадает с α или выводится по правилу М.Р.
Тогда мы знаем, что делать из Теоремы о дедукции для ИВ
2. δ_i - новая аксиома
Тогда все то же самое, что и в старой аксиоме, но нужно так же проверить условие.
3. $\exists x(\psi) \rightarrow \varphi$ - новое правило вывода
 - Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 7.2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Доказательство. Докажем, что $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha \vdash \gamma$:

- | | | |
|-----|---|-----------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ | Допущение |
| (2) | α | Допущение |
| (3) | $\beta \rightarrow \gamma$ | М.Р. 2,1 |
| (4) | β | Допущение |
| (5) | γ | М.Р. 4,3 |

□

- По индукционному предположению мы знаем, что $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$. Тогда докажем, что $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi, (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha \rightarrow \varphi) \vdash \alpha \rightarrow \exists x(\psi) \rightarrow \varphi$:

| | | |
|-----|---|------------------|
| (1) | $(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha \rightarrow \varphi)$ | Допущение |
| (2) | $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ | Допущение |
| (3) | $\psi \rightarrow \alpha \rightarrow \varphi$ | М.Р. 2,1 |
| (4) | $\exists x(\psi) \rightarrow \alpha \rightarrow \varphi$ | Правило вывода 1 |
| (5) | $(\exists x(\psi) \rightarrow \alpha \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \exists x(\psi) \rightarrow \varphi)$ | Допущение |
| (6) | $\alpha \rightarrow \exists x(\psi) \rightarrow \varphi$ | М.Р. 4,5 |

4. $\varphi \rightarrow \forall x(\psi)$ - новое правило вывода

- Докажем вспомогательную лемму 1

Лемма 7.3. $(\alpha \& \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma)$

Доказательство. Докажем, что $(\alpha \& \beta \rightarrow \gamma), \alpha, \beta \vdash \gamma$:

- | | | |
|-----|--|------------|
| (1) | α | Допущение |
| (2) | β | Допущение |
| (3) | $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$ | Сх. акс. 1 |
| (4) | $\beta \rightarrow \alpha \& \beta$ | М.Р. 1,3 |
| (5) | $\alpha \& \beta$ | М.Р. 2,4 |
| (6) | $\alpha \& \beta \rightarrow \gamma$ | Допущение |
| (7) | γ | М.Р. 5,6 |

□

- Докажем вспомогательную лемму 2

Лемма 7.4. $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \& \beta \rightarrow \gamma)$

Доказательство. Докажем, что $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma, \alpha \& \beta \vdash \gamma$:

- | | | |
|-----|---|------------|
| (1) | $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$ | Сх. акс. 4 |
| (2) | $\alpha \& \beta$ | Допущение |
| (3) | α | М.Р. 2,1 |
| (4) | $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$ | Сх. акс. 5 |
| (5) | β | М.Р. 2,4 |
| (6) | $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ | Допущение |
| (7) | $\beta \rightarrow \gamma$ | М.Р. 3,6 |
| (8) | γ | М.Р. 5,7 |

□

- По индукционному предположению мы знаем, что $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$. Тогда докажем, что $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \vdash \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall(\varphi)$.

- | | | |
|-----|--|-------------------------|
| (1) | $(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi \rightarrow \varphi)$ | Вспомогательная лемма 1 |
| (2) | $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ | Допущение |
| (3) | $\alpha \& \psi \rightarrow \varphi$ | М.Р. 2,1 |
| (4) | $\alpha \& \psi \rightarrow \forall(\varphi)$ | Правило вывода 2 |
| (5) | $(\alpha \& \psi \rightarrow \forall(\varphi)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall(\varphi))$ | Вспомогательная лемма 2 |
| (6) | $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall(\varphi)$ | М.Р. 4,5 |

□

7.3. Корректность исчисления предикатов

Смотрим конспект ДГ