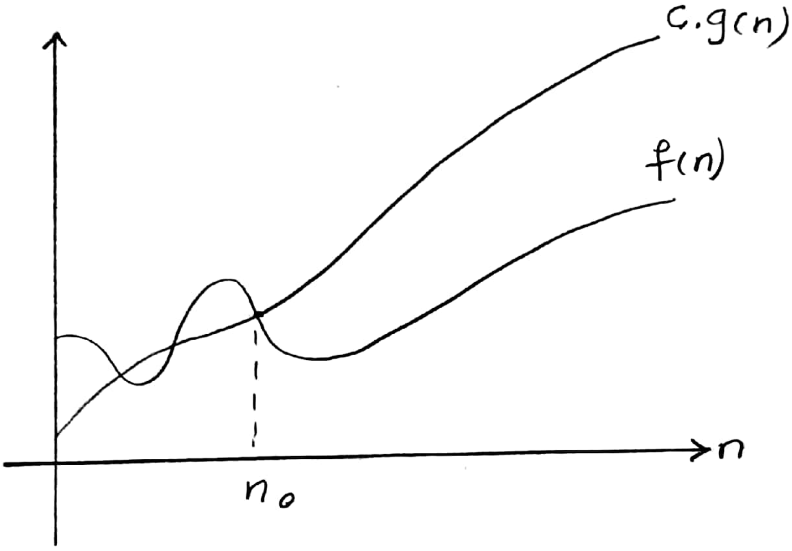
Growth of Function

Asymptotic Notation:

O- notation (Big-O)

$O(g(n)) = \{ f(n)$: there exist positive constants c and n_0 such that $0 \leqslant f(n) \leqslant c.g(n)$ for all $n \geqslant n_0 \}$



$g(n)$ یک asymptotic upper bound برای $f(n)$ است.

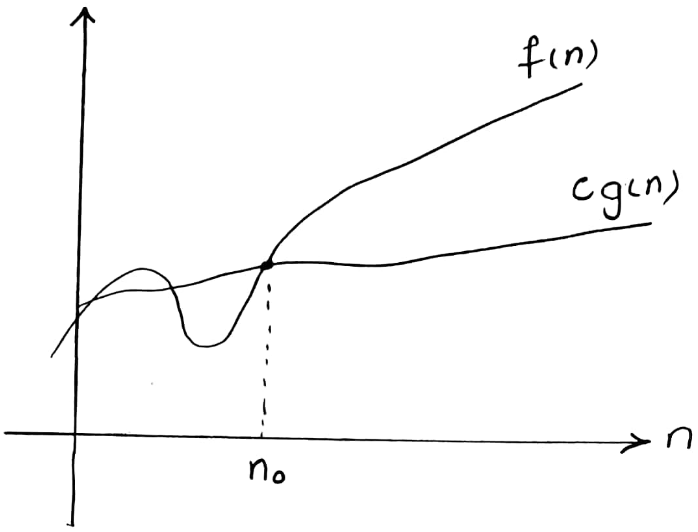
اگر $f(n) \in O(g(n))$ ، می‌نویسیم که $f(n) = O(g(n))$

Examples of functions in $O(n^2)$:

n^2	$n^2 + 1000n$	n	$n^{1.99999}$
$n^2 + n$	$1000n^2 + 1000n$	$n/1000$	$\dfrac{n^2}{\lg\lg\lg n}$

Ω-notation (big-omega)

$\Omega(g(n)) = \{ f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \leqslant c\,g(n) \leqslant f(n)$ for all $n \geqslant n_0 \}$



g(n) یک asymptotic lower bound برای f(n) است

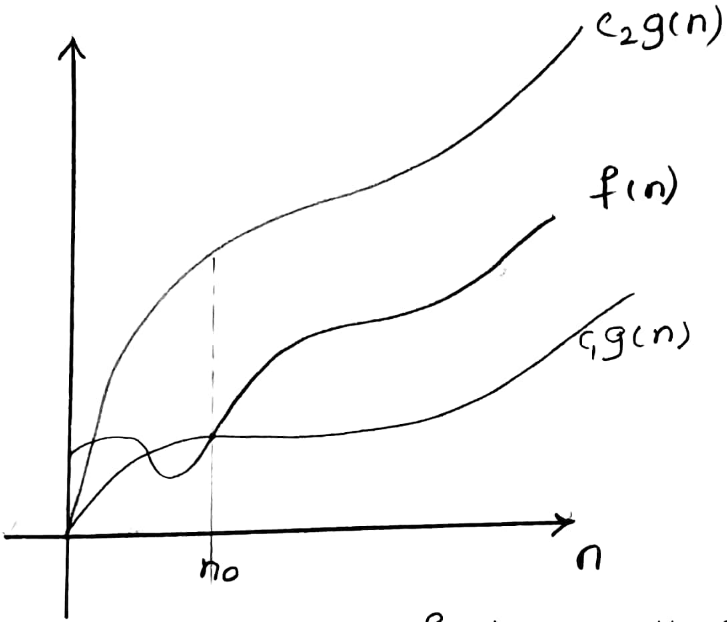
Examples of functions in $\Omega(n^2)$

n^2 $\quad n^2 - n \quad 1000n^2 + 2n \quad n^3 \quad n^2 \lg\lg\lg n$

$n^2 + n \quad 1000n^2 - 1000n \quad n^{2.00001} \quad 2^{2^n}$

Θ-notation (theta)

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) :$ there exist positive constants c_1, c_2 and n_0 such that $0 \leqslant c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)$ for all $n \geqslant n_0 \}$



$g(n)$ یک asymptotically tight bound برای $f(n)$ است.

Examples: $\frac{n^2}{2} - 2n = \theta(n^2)$ ، $c_1 = 1/4, c_2 = \frac{1}{2}$ and $n_0 = 8$

Theorem: $f(n) = \theta(g(n))$ iff $f = O(g(n))$ and $f = \Omega(g(n))$

Asymptotic Notation in Equations:

when on right-hand side

هرگاه سمت راست یک عبارت واقع شوند به معنای یک تابع در آن کلاس است

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n)$$

$\downarrow$

$f(n)$ s.t $f(n) \in \theta(n)$

$\sum_{i=1}^{n} O(i)$ OK: یک تابع ناشناخته جای $O(i)$ را می‌گیرد

$O(1) + O(2) + \cdots + O(n)$ not OK

no clean interpretation

اهمیتی ندارد که چطور anonymous fun انتخاب می‌شود. به این معناست که یک راه وجود دارد که تابعهای سمت راست را انتخاب کنیم تا equation ، valid شود.

تفسیر عبارت

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

برای تمام توابعی که می‌توانند جای $\Theta(n)$ قرار بگیرد حداقل یک تابع می‌توانیم جای $\Theta(n^2)$ بگذاریم که عبارت درست باشد.

$$2n^2 + \underset{\underset{n+5}{\uparrow}}{f(n)} = \underset{\underset{2n^2+n+5}{\uparrow}}{g(n)}$$

o-notation (little-o)

$o(g(n)) = \{ f(n)$: for all constants $c > 0$, there exists a constant $n_0 > 0$ s.t. $0 \leq f(n) < c.g(n)$ for all $n \geq n_0 \}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

راه ساده‌تر

Examples:

$$n^{1.999} = o(n^2)$$

$$n^2/\lg n = o(n^2)$$

$$n^2 \neq o(n^2)$$

$$\frac{n^2}{1000} \neq o(n^2)$$

ω-notation : (little-omega)

$\omega(g(n)) = \{f(n)$: for all constants $c>0$, there exists a constant $n_0>0$ s.t. $0 \leq cg(n) < f(n)$ for all $n \geq n_0\}$

راه ساده‌تر :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Examples:

$n^{2.0001} = \omega(n^2)$

$n^2 \lg n = \omega(n^2)$

$n^2 \neq \omega(n^2)$

مقایسه توابع و روابط :

Transitivity :

$f(n) = \Theta(g(n))$ and $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$

Same for O, Ω, o and ω

Reflexivity:

$f(n) = \Theta(f(n))$

Same for O and Ω

Symmetry :

$f(n) = \Theta(g(n))$ iff $g(n) = \Theta(f(n))$

Transpose Symetry :

$f(n) = O(g(n))$ iff $g(n) = \Omega(f(n))$

$f(n) = o(g(n))$ iff $g(n) = \omega(f(n))$

نکته :- وقتی گفته می شود که worst case یک الگوریتم $\Theta(n^2)$ است.

- دراین صورت average case و best case می توانند $O(n^2)$ باشند. ($O(n^2)$ شامل $\Theta(n^2)$ و $O(n)$ ، $O(n\lg n)$ و ... می شود)

$O(n\lg n)$ $O(n)$

نکته - وقتی گفته می شود که worst case یک الگوریتم $O(n^2)$ است.

- دراین صورت average case و best case می توانند $O(n^2)$ باشند.

نکته - وقتی گفته می شود که worst case یک الگوریتم $\Omega(n^2)$ است.

- دراین صورت average case و best case می توانند $\Omega(n^2)$ یا $O(n^2)$ یا $\Theta(n^2)$ باشند.

نکته : اگر گفته شود الگوریتمی $O(n^2)$ است دراین صورت worst case آن نمی تواند $\omega(n^2)$ باشد.

نکته : اگر گفته شود الگوریتمی $\Omega(n^2)$ است ، دراین صورت best case آن نمی تواند $o(n^2)$ باشد.