

۱. با استفاده از الگوریتم ضرب Booth حاصل ضرب $A = 110011$ در $B = 101110$ را محاسبه کنید.
(نشان دهید چند عمل shift و چند عمل add/sub باید انجام پذیرد).

مراحل الگوریتم بوث		n در این سوال برابر 6 هست	
ردیف	توضیحات	تعداد Shift	تعداد sub/add
0: start			
1: $Q \leftarrow 0$ $G \leftarrow 0$ $sc \leftarrow n$	000000:101110:0 $B_0G = 00$	1	0
2: if $B_0G = 10$ goto 3 else if $B_0G = 01$ goto 4 else goto 5	SAR و $sc \leftarrow sc - 1$ 000000:010111:0 sc برابر 5 است B_0G مساوی برابر 10 است	2	0
3: $E:Q \leftarrow Q + A' + 1$ goto 5	$E:Q \leftarrow 0:001101$ SAR و $sc \leftarrow sc - 1$ 001101:010111:0 000110:101011:1	5	1
4: $E:Q \leftarrow Q + A$ goto 5	$SC = 4$ $B_0G = 11$	6	1
5: SAR $Q: B: G$ $sc \leftarrow sc - 1$	SAR و $sc \leftarrow sc - 1$ 000011:010101:1 $sc = 3$	2	1
6: if $sc \neq 0$ goto 2 else goto 7	$B_0G = 11$ SAR و $sc \leftarrow sc - 1$ 000001:101010:1 $sc = 2$	3	2
7: finish	$B_0G = 01$ $E:Q \leftarrow 0:110100$ $Q = 000001$ نتیجه قبل عملیات	5	4
		4	5
		4	6

شماره خط	تعداد shift	تعداد sub/add	توضیحات
5	5	7	SAR (110100:101010:1) و $sc \leftarrow sc - 1$ $\hookrightarrow 111010:010101:0$
6	5	7	$sc = 1$
2	5	7	$BoG = 10$
3	5	8	$E:Q \leftarrow 1:000111$
5	6	9	SAR (000111:010101:0) و $sc \leftarrow sc - 1$ $\hookrightarrow 000011:101010:1$
6	6	9	$sc = 0$
7	(6)	(9)	:)))

همانطور که در توضیحات مرحله مرحله گفته شد در انتهای الگوریتم ما 6 بار shift و 9 بار add/sub انجام داده ایم.

۲. می‌خواهیم محتویات دو ثبات ده بیتی A و B را به روش $Booth$ در هم ضرب کنیم. تعداد جمع و تفریق‌ها چقدر است؟ (روی هر دو حالت $B \times A$ و $A \times B$)

$$A = 110010111$$

$$B = 1010101000$$

۳. دو عدد ۱۴ و ۱۰ را با استفاده از روش‌های زیر در هم ضرب کنید. برای نمایش باینری اعداد از ۵ بیت استفاده کنید و تمامی مراحل را با جزییات نمایش دهید.

الف) شیفت و جمع

A: 0 1 0 1 0

B: 0 1 1 1 0

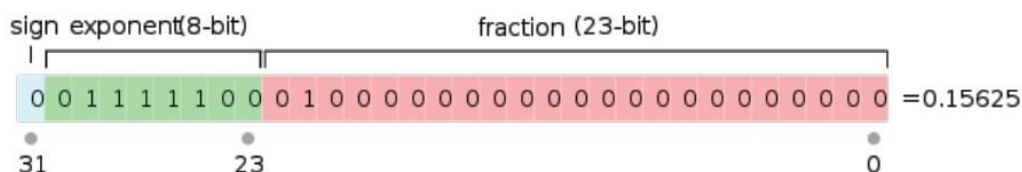
$$\begin{array}{r}
 00000 \\
 01010 \\
 01010 \\
 01010 \\
 00000 \\
 \hline
 0010001100
 \end{array}$$

ب) بوث

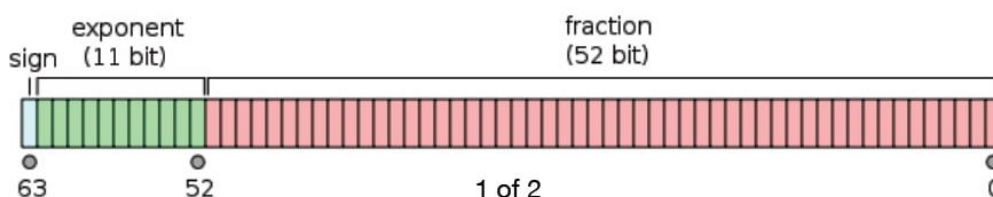
در امتحان باید به صورت کامل تمامی مراحل انجام الگوریتم را بنویسید. مانند حل سوال اول اما برای چک کردن سریع جواب می‌توانید از این راه استفاده کنید.

۵. اندازه‌ی بیتی قسمت‌های Exponent و Fraction را در نمایش‌های single – precision و double – precision بیابید.

single precision



double precision



۶. جدول زیر را مطابق الگوریتم‌هایی که در اسلایدهای درس آمده‌اند برای اعداد ممیز شناور تکمیل کنید و هم‌چنین فلوچارت الگوریتم ضرب را ترسیم کنید.

عملوند ۲	عملوند ۱	عملیات	حاصل
-0.4375	0.5	جمع	?
10.375	0.016	تقسیم	?
-0.4375	0.5	ضرب	?

الگوریتم جمع:

- ۱- چک کردن صفر
 - اگر A صفر بود، جواب B است، اگر B صفر بود، جواب A است.
- ۲- ردیف کردن نماها
 - عدد با نمای کوچک به عدد با نمای بزرگ رسانده شود و مانتیس عدد کوچک به اندازه اختلاف نماها شیفت به راست پیدا کند (چرا؟)
- ۳- مانتیس‌ها با جمع‌کننده اندازه-علامت جمع شوند.
- ۴- چنانچه نتیجه ناهنجار بود، هنجار شود.

$$0.5 \rightarrow 1.0 * 2^{-1} \rightarrow 0 \text{ 0111 1110 000 0000 0000 0000 0000 0000}$$

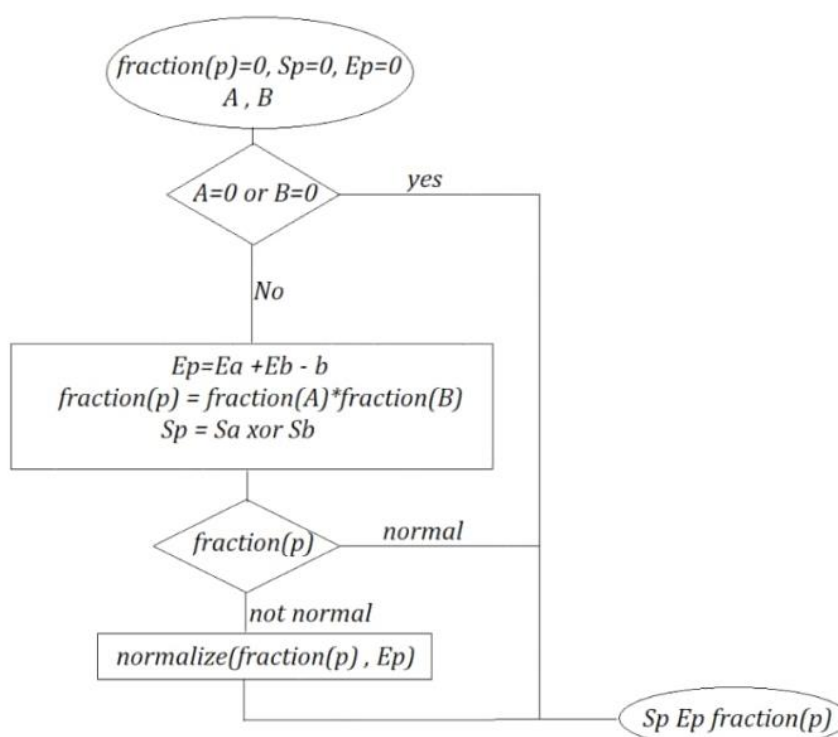
$$-0.4375 \rightarrow -1.11 * 2^{-2} \rightarrow 1 \text{ 0111 1101 110 0000 0000 0000 0000 0000}$$

برای یکسان کردن توان‌ها عدد دوم را شیفت می‌دهیم: $-0.111 * 2^{-1}$

$$1 + (-0.111) = 0.001$$

$$\text{sum} = 0.001 * 2^{-1} = 1.0 * 2^{-4} \rightarrow$$

- ۱- چک کردن صفر
○ اگر **A** صفر بود، جواب صفر است، اگر **B** صفر بود، جواب صفر است.
- ۲- نماها با هم جمع شوند (بایاس از آن کم شود): $E_p = E_A + E_B - b$
- ۳- مانتیس‌ها در هم ضرب شوند.
- ۴- علامت نتیجه، **xor** علامت‌های **A** و **B** است.
- ۵- اگر نتیجه ناهنجار است، هنجار شود.



$0.5 \rightarrow 1.0 * 2^{-1} \rightarrow 0$ 0111 1110 000 0000 0000 0000 0000 0000

$-0.4375 \rightarrow -1.11 * 2^{-2} \rightarrow 1$ 0111 1101 110 0000 0000 0000 0000 0000

sum of biased exponents - bias = $01111110 + 01111101 - 01111111 = 01111100$

multiplication of fractions = $1 * 1.11 = 1.11$

product = 1 1111 1100 110 0000 0000 0000 0000 0000

۱- چک کردن صفر

○ اگر A صفر بود، جواب صفر است، اگر B صفر بود، جواب بینهایت است (یا سرریز رخ داده است).

۲- تفریق کردن نماها (بایاس به آن اضافه شود): $E_p = E_A - E_B + b$ (چرا؟)

۳- مانتیس‌ها با تقسیم‌کننده اندازه-علامت تقسیم شوند.

۴- چنانچه خارج قسمت ناهنجار بود، هنجار شود.

توجه شود اگر طبق الگوریتم تقسیم شرایط سرریز شدن (بجز تقسیم بر صفر) باشد، با شیفت مانتیس مقسوم به سمت راست و اضافه کردن به نمای آن، می‌توان از سرریز شدن جلوگیری کرد

$$10.375 = 1010.011 \rightarrow ex = 3 \text{ fraction} = 010011$$

0	0011	01001100000
---	------	-------------

$$0.016 = 0.000001000001100010010011...$$

$$ex = -6 \text{ fraction} = 00000110001$$

0	1010	00000110001
---	------	-------------

$$\text{subtract of exponent : } 0011 - 1010 = 01001$$

$$\text{division: } \frac{1.01001100000}{1.00000110001} = 1.01000100001 ...$$

$$\text{result} \rightarrow 0 ? 01000100001 \text{ exception}$$

۷. برای دو عدد 0.75 و -0.222 جمع و ضرب را با توجه به مراحل الگوریتم آن پیاده‌سازی کنید. (ابتدا به نمایش ممیزش‌ناور در بیاورید).

الگوریتم جمع/تفریق اعداد اعشاری

۱. چک کردن صفر

۲. مقایسه نماها (جهت پیدا کردن عدد با نمای بزرگتر)

۳. عدد با نمای کوچکتر را به اندازه نماها به سمت راست شیفت می‌دهیم.

۴. دو عدد را با هم جمع/تفریق می‌کنیم (جمع/تفریق کننده اندازه علامت)

۵. در صورتی که حاصل هنجار نباشد؛ آن را هنجار می‌کنیم.

$$0.75 = 1.1 \times 2^{-1}, (-0.4375)_{10} = (-1.11)_2 \times 2^{-2}$$

$$-0.111 \times 2^{-1} + 1.1 \times 2^{-1} = 0.101 \times 2^{-1} = 1.01 \times 2^{-2}$$

۸. جدول زیر را برای اعداد ممیز شناور single-precision مانند نمونه کامل کنید (از بایاس ۲ استفاده شده است).

Type	Sign	Actual exponent	Biased exponent	Exponent field	Fraction field	Value
Smallest denormalized number	0 or 1	-126	0	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0001	$\pm 2^{-23} * 2^{-126} = 2^{-149}$
Largest denormalized number						
Smallest normalized number						
Largest normalized number						
Negative zero						

توجه: این سوال یکی از سوالات تمرین‌های ترم‌های گذشته است که برای کسانی که علاقه‌مند هستند و برای مطالعه گذاشته شده. اعداد denormalized در مباحث درسی تدریس‌شده‌ی استاد نبوده و در امتحان هم سوالی مربوط به این بخش داده نمی‌شود. جواب‌های آخر این جدول عیناً در صفحه‌ی ویکی‌پدیای زیر موجود است:

https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-1985

برای مطالعه: اعداد denormalized به اعدادی می‌گویند که exponent field آن‌ها تماماً صفر است در حالی که fraction field تماماً صفر نیست. این دو شرط باید همزمان باشد تا به آن عدد denormalized بگوییم.

۹. الف) دو رقم سمت راست شماره دانشجویی خود را بنویسید. (آن را MN به نامید که در آن N یکان و M دهگان است. اگر یکان یا دهگان هر کدام صفر است، آنرا ۵ کنید و مجدداً آنرا MN بنامید و بنویسید) (۱ نمره)

ب) عدد MN را به صورت عدد بی‌علامت ۸ بیتی نمایش دهید: (۲ نمره)

ج) عدد دهدهی M.N (قسمت صحیح M و قسمت اعشار N است) که معادل MN دهم است را بصورت ممیز شناور در قالب ۴ بیت اعشار، ۳ بیت توان و یک بیت علامت (به ترتیب از بیت‌های راست به چپ) نشان دهید (بایاس ۱ لحاظ شود). (۴ نمره)

د) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش در قالب ممیز شناور فوق و بایاس ۲ چیست؟ (۲ نمره)

الفـ)

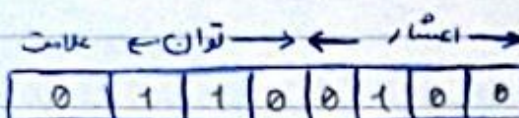
$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 251} \\ \underline{4} \\ 11 \\ \underline{10} \\ \textcircled{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 121} \\ \underline{2} \\ 5 \\ \underline{4} \\ \textcircled{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 61} \\ \underline{12} \\ \textcircled{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 31} \\ \underline{6} \\ 3 \\ \underline{2} \\ \textcircled{1} \end{array}$$

$$M \cdot N = 5.1$$



(2)

چون با ۱ خواسته
سینه ۲ عدد توان رو با

گروهی محاسباتی
اعداد معجزه‌ناور

2^{e-1} جمع می‌کنیم و بیت‌های

(I) کاغذ کی کٹائی صحیح کراد :

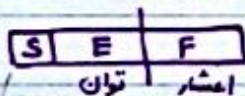
درووي حاصل رودر کښي نغا

5 = [5.1] غش صحیح

$$(-1)^S \times 1.F \times 2^E$$

قرار می دهم.

$$5 = (101)_2$$



$$E_{1000} = 2 + 2^{3-1}$$

① ماسدی کنش اعصار عدد:

چون 3 بیت مدحش توان داد سه سوره

0.1، [5.1] کش اعصابی

حالا بعد از دست

$$= 2 + 2^2 = 6$$

$$0.1 \times 2 = 0.2$$

۱.۴ آمده رو به صورت

$$=(110)_2$$

$$0.2 \times 2 = 0.4$$

در ماییم تا به شکل استغفار (موج)

عدد هم از بیت های F به دست

$$0.4 \times 2 = 0.8$$

در بیان و عدد نام مستحق

آئندہ درجہ اولیٰ قبل :-

$$0.8 \times 2 = 1.6$$

$$5.1 = (101.000110011\dots)_2$$

امڈازہ ی مضمون

$$0.6 \times 2 = 1.2$$

$$= 1.0100011001 \times 2$$

اعشاری مدد سے

$$0.2 \times 2 = 0.4$$

$$= (-1)^0 \times 1.F \times 2^E$$

در قالب قرار

$$0.1 = (0.000110011)_2$$

$$\Rightarrow \int S = 0$$

$$0.1 \approx 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}$$

$$E = 01000110011 \dots$$

$$+ 1x2^{-4} + 1x2^{-5} + 0x2^{-6}$$

$$E = 2 = (10)$$

$$+ 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + \dots$$

$$\Rightarrow 5.1 = (101.000110011\dots)_2$$

(د) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش در قالب ممیز شناور فوق و بیاس 2 ؟

$S = 0$

بخش اعشاری تمام صفر $\Rightarrow F = 0000$

3 بیت برای ما داریم

مکمل 2 بیاس 2 با 3 بیت

+3	110
+2	101
+1	100
0	011
-1	010
-2	001
-3	000 ✓
-4	111

کوچکترین عدد مثبت $\Rightarrow (-1)^S \times 1 \cdot F \times 2^E$

$= (-1)^0 \times 1 \cdot 0000 \times 2^{-3}$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = 0.125$

نمای (111) کوچکترین عدد را در بیاس 2 به ما می دهد اما این

pattern برای نمادی ها رزرو شده بنابراین کوچکترین نمای قابل استفاده برای ما -3 خواهد بود.

۱۰. ضرب شیفت و جمع عدد بی علامت، $A = 11100011$ را در عدد بی علامت $B = MN$ که در سوال قبل مشخص شده بود، مد نظر است. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) نمایش بوث عدد B را بیابید. (۲ نمره)

ب) نتیجه نهایی ضرب چیست؟ مراحل آنرا نشان دهید. (۴ نمره)

ج) در ضرب شیفت و جمع، به چند عمل جمع نیاز است؟ (۱ نمره)

د) در ضرب شیفت و جمع، به چند عمل شیفت نیاز است؟ (۱ نمره)

$MN=15$

$A = (11100011)_2$. $B = 15 = (00001111)_2$

الف و ب)

Booth form $B = 2^4 - 2^0$

$-A = 00011101$

SC	Q	B	B ₀	A	
8	00000000	00001111	0	11100011	$Q+A'+1$
	00011101	00001111	0		shift
7	00001110	10000111	1		Shift
6	00000111	01000011	1		Shift
5	00000011	10100001	1		shift
4	00000001	11010000	1		$Q+A$
	11100100	11010000	1		shift
3	11110010	01101000	0		Shift
2	11111001	00110100	0		Shift
1	11111100	10011010	0		Shift
0	11111110	01001101	0		$Q+A$

ج و د) در ضرب شیفت و جمع چنانچه B_k یک باشد عمل جمع را انجام میدهد سپس شیفت میدهد و اگر صفر باشد فقط شیفت می‌دهد. تعداد بیت های ۱ B چهار است پس چهار عمل شیفت انجام میشود و ۸ بار شیفت داده می‌شود.

۱۱. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) شرط سرریز شدن تقسیم بی‌علامت در مقسوم $M+N$ بیتی بر مقسوم علیه M بیتی با خارج قسمت N بیت چیست؟ توجه کنید M و N همان یکان و دهگان شماره دانشجویی هستند که قبلتر بدست آمده بود (۲ نمره)

M بیت پر ارزش مقسوم از مقسوم علیه کمتر نباشه. مثال عددی:

به ازای $M=5$ و $N=1$ زمانی سرریز رخ میدهد که خارج قسمت تقسیم ۶ بر ۵ به قدری بزرگ باشد که در ۱ بیت جا نشود. کوچکترین خارج قسمتی که این ویژگی را دارد (۱۰) است.

$$10 \times M[5 \text{ bit}] = M:0[6 \text{ bit}]$$

مقسوم هم عددی ۶ بیتی هست که قرار است بر عدد ۵ بیتی M تقسیم شود. پس ۵ بیت پر ارزش آن نباید از خود مقسوم علیه M بیشتر باشد. در غیر اینصورت سرریز خواهیم داشت.

ب) مثالی از جمع دو عدد هنجار شده بنزید که حین عمل، زیر ریز (underflow) رخ دهد. (۲ نمره)

عمل زیر ریز همانطور که در جزوه داشتید در شرایط تفریق اتفاق می‌افتاد.

نکته: ممکن است پدیده **underflow** (زیرریز) رخ دهد (یعنی قبل و بعد از ممیز صفر شود):
مثل: **0.001**

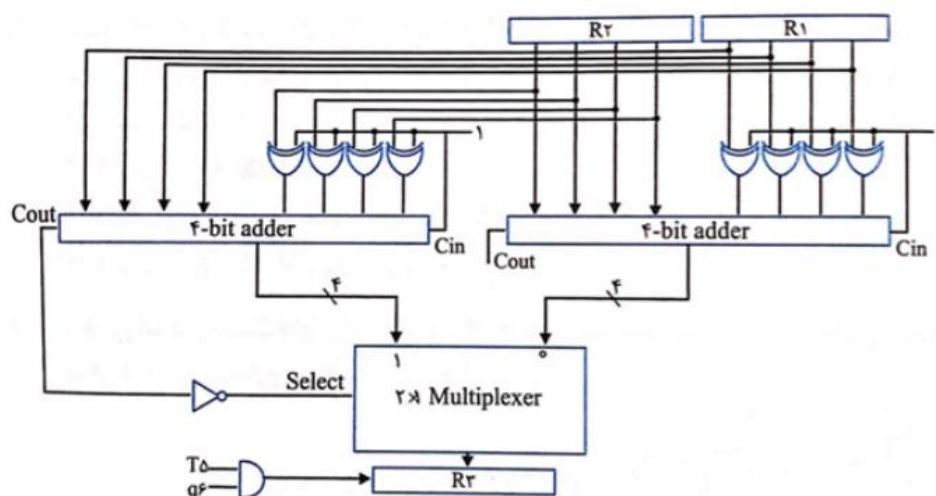
$$A = +1.10 \times 2^0$$

$$B = -1.01 \times 2^0$$

$$A+B = 0.01 \times 2^0 \text{ -----} > \text{هنجار: } 1.00 \times 2^{-2}$$

۱۲. اگر MN عدد زوج است، (الف) را جواب دهید و (ب) را جواب دهید:

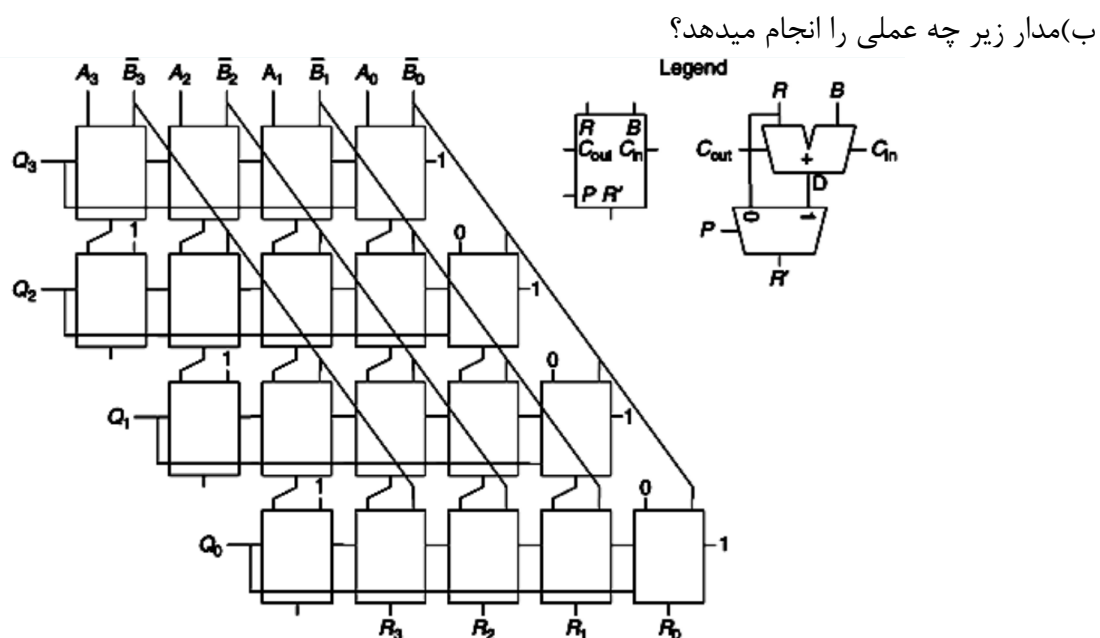
الف) مدار زیر چه عملی را انجام میدهد؟



اگر خروجی سمت چپ برابر ۱ باشد، یعنی رقم قرضی نداریم و در این صورت $R1 \geq R2$ است و $select=0$ خواهد بود. در اینصورت $R3=R2-R1$ را حساب میکنیم.

اما اگر $select = 1$ باشد یعنی Cout خروجی سمت چپ 0 بوده و $R1 < R2$ است و که $R3 = R1 - R2$ را خروجی میدهیم.

به عبارتی حاصل پایانی منفی قدر مطلق تفریق $R1$ و $R2$ است. و حاصل همیشه منفی است چون عدد کوچکتر را از بزرگتر کم میکنیم.



این مدار عمل تقسیم دو عدد را انجام می‌دهد که در آن A مقسوم و B مقسوم علیه و R باقی مانده و Q خارج قسمت است. به این صورت که در هر **black box** نشان داده شده مقدار $A + B_{prime} + 1$ محاسبه شده و اگر رقم نقلی تولید شود همان مقدار A برگردانده می‌شود و اگر تولید نشود مقدار جمع حاصل برگردانده می‌شود. و با یک شیفت وارد مرحله بعدی تقسیم می‌شود. اینکار به تعداد $n=4$ انجام می‌شود.

موفق باشید