سوال اول)

الف) اگر اجتماع را MAX و اشتراک را MIN در نظر بگیریم، با توجه به یکسان بودن مجموعه مرجع این ۲ مجموعه داریم:

$$A \cup B = \{\frac{0.5}{A10},\frac{0.7}{B52},\frac{0.2}{B117},\frac{0.8}{C5},\frac{0.6}{F4},\frac{0.1}{C130},\frac{1.0}{F14},\frac{1.0}{F15},\frac{0.1}{F16},\frac{0.1}{F111}\}$$

$$A \cap B = \{\frac{0.3}{A10},\frac{0.6}{B52},\frac{0.3}{F14},\frac{0.8}{F15}\}$$

$$A' = \{\frac{0.5}{A10},\frac{0.4}{B52},\frac{0.8}{B117},\frac{1}{C5},\frac{1}{C130},\frac{0.4}{F4},\frac{0.7}{F14},\frac{0.9}{F16},\frac{1}{F111},\frac{1}{KC130}\}$$

$$B' = \{\frac{0.7}{A10},\frac{0.3}{B52},\frac{1}{B117},\frac{0.2}{C5},\frac{0.9}{C130},\frac{1}{F4},\frac{0.2}{F15},\frac{1}{F16},\frac{0.9}{F111},\frac{1}{KC130}\}$$

ب) طبق تعریف Core داریم:

$$\mathrm{core}(A) = \{ x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

پس برای دو مجموعه A و B داریم:

$$\mathrm{core}(A) = \{F15\}$$

$$\mathrm{core}(B) = \{F14\}$$

طبق تعریف cross-over point داریم:

$$\mathrm{crossover}(A) = \{ x \mid \mu_A(x) = 0.5 \}$$

بنابراین داریم:

$$\mathrm{crossover}(A) = \{A10\}$$
$$\mathrm{crossover}(B) = \{\}$$

طبق تعریف support داریم:

$$\mathrm{support}(A) = \{ x \mid \mu_A(x) > 0 \}$$

بنابراین داریم:

$$\mathrm{support}(A) = \{ A10, B52, B117, F4, F14, F15, F16 \}$$

$$\mathrm{support}(B) = \{ A10, B52, C5, C130, F14, F15, F111 \}$$

طبق تعریف boundary داریم:

$$\mathrm{boundary}(A) \; = \{ x \mid 0 < \mu_A(x) < 1 \}$$

بنابراین داریم:

$$\mathrm{boundary}(A) = \{A10, B52, B117, F4, F14, F16\}$$

$$\mathrm{boundary}(B) \; = \; \{A10, B52, C5, C130, F15, F111\}$$

طبق تعریف Height داریم:

$$\mathrm{height}(A) \; = \; \max_{x \in A} \{\mu_A(x)\}$$

لذا داریم:

$$\mathrm{height}(A) = 1$$

$$\mathrm{height}(B) \; = \; 1$$

پ) طبق تعریف برش آلفا داریم:

$$A_\alpha \; = \; \{ x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}$$

بنابراین برای مجموعه A داریم:

$$A_{0.3} \; = \; \{A10, B52, F4, F14, F15\}$$

$$B_{0.75} \; = \; \{ C5, F14, F15 \}$$

سوال دوم) حل به روش max – min:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
R \circ S = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} x_1z_1 & x_1z_2 & x_1z_3 \\ x_{21}z_1 & x_2z_2 & x_3z_3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

که هر درایه برابراست با:

$$x_1z_1 = \max\big(\min(0.5,0.8), \min(0.6,0.1)\big) = \max(0.5,0.1) = 0.5$$

$$x_1z_2 = \max(\min(0.5, 0.6), \min(0.6, 0.5)) = \max(0.5, 0.5) = 0.5$$

$$x_1z_3 = \max\big(\min(0.5,0.7), \min(0.6,0.4)\big) = \max(0.5,0.4) = 0.5$$

$$x_2z_1 = \max\big(\min(0.3,0.8), \min(0.7,0.1)\big) = \max(0.3,0.1) = 0.3$$

$$x_2z_2 = \max\big(\min(0.3,0.6), \min(0.7,0.5)\big) = \max(0.3,0.5) = 0.5$$

$$x_2z_3 = \max\big(\min(0.3,0.7), \min(0.7,0.4)\big) = \max(0.3,0.4) = 0.4$$

لذا داریم:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
R \circ S = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

حل به روش max -product:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
R \circ S = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} x_1z_1 & x_1z_2 & x_1z_3 \\ x_2z_1 & x_2z_2 & x_2z_3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

که هر درایه برابراست با:

$$x_1z_1 = \max(0.5 \times 0.8, 0.6 \times 0.1) = \max(0.4,0.06) = 0.4$$

$$x_1z_2 = \max(0.5 \times 0.6, 0.6 \times 0.5) = \max(0.3, 0.3) = 0.3$$

$$x_1z_3 = \max(0.5 \times 0.7, 0.6 \times 0.4) = \max(0.35,0.24) = 0.35$$

$$x_2z_1 = \max(0.3 \times 0.8, 0.7 \times 0.1) = \max(0.24,0.07) = 0.24$$

$$x_2z_2 = \max(0.3 \times 0.6, 0.7 \times 0.5) = \max(0.18,0.35) = 0.35$$

$$x_2z_3 = \max(0.3 \times 0.7, 0.7 \times 0.4) = \max(0.21,0.28) = 0.28$$

لذا داریم:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
R \circ S = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.35 \\ 0.24 & 0.35 & 0.28 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

سوال سوم) اگر اجتماع را ماکسیمم در نظر بگیریم داریم:

الف) جهت تصویر کردن رابطه Q در $U_1 \times U_2 \times U_4$، در رابطه Q هرجا که عضوی از این ۳ مجموعه را داشتیم ثابت نگه میداریم و با تغییر عضو U_3 بین مقدار تعلق ها ماکسیمم میگیریم. (مواردی که نوشته نشده اند مقدار تعلق صفر را دارند)

$$Q = \frac{0.3}{b,t,i} + \frac{0.4}{a,s,i} + \frac{0.9}{b,s,i} + \frac{0.6}{b,s,j} + \frac{0.1}{a,t,j} + \frac{0.7}{c,s,i}$$

ب) جهت تصویر کردن رابطه Q در $U_1 \times U_3$ بایستی اعضای این ۲تا را ثابت در نظر بگیریم و بقیه برای U_2 و U_4 را متغیر در نظر بگیریم و بین آن ها ماکسیمم بگیریم:

$$Q = \frac{0.9}{b,y} + \frac{0.4}{a,x} + \frac{0.1}{a,y} + \frac{0.7}{c,y}$$

ج) مشابه تفاسیر قبل داریم:

$$Q = \frac{0.9}{i} + \frac{0.6}{j}$$

د) جهت توسعه استوانه ای، بایستی ضرب کارتزین با U_3 را انجام بدهیم که در آن مقدار تعلق برای x و y برابر با ۱ است. لذا داریم:

$$Q \times U_3 = \frac{0.3}{b,t,x,i} + \frac{0.3}{b,t,y,i} + \frac{0.4}{a,s,x,i} + \frac{0.4}{a,s,y,i} + \frac{0.9}{b,s,x,i} + \frac{0.9}{b,s,y,i} + \frac{0.6}{b,s,x,j} + \frac{0.6}{b,s,y,j} + \frac{0.1}{a,t,x,j} + \frac{0.1}{a,t,y,j} + \frac{0.7}{c,s,x,i} + \frac{0.7}{c,s,y,i}$$

ه) مشابه تفسیر بخش (د) داریم:

$$Q \times U_2 \times U_4 = \frac{0.9}{b,s,y,i} + \frac{0.9}{b,s,y,j} + \frac{0.9}{b,t,y,i} + \frac{0.9}{b,t,y,j} + \frac{0.4}{a,s,x,i} + \frac{0.4}{a,s,x,j} + \frac{0.4}{a,t,x,i} + \frac{0.4}{a,t,x,j} + \frac{0.1}{a,s,y,i} + \frac{0.1}{a,s,y,j} + \frac{0.1}{a,t,y,i} + \frac{0.1}{a,t,y,j} + \frac{0.7}{c,s,y,i} + \frac{0.7}{c,s,y,j} + \frac{0.7}{c,t,y,i} + \frac{0.7}{c,t,y,j}$$

و) تکراری و حذف شده

سوال چهارم) برای حل میدانیم $B = A^{\circ} R$ که در آن $A = A_1 \times A_2$ می باشد. لذا برای حل ابتدا A را بدست می‌آوریم.

$$A = A_1 \times A_2 = \left\{\frac{0.2}{1,4}, \frac{0.2}{1,5}, \frac{0.2}{1,6}, \frac{0.4}{2,4}, \frac{0.4}{2,5}, \frac{0.4}{2,6}, \frac{0.3}{3,4}, \frac{0.3}{3,5}, \frac{0.3}{3,6}\right\}$$

حال بایستی رابطه را بدست بیاوریم. اگر رابطه را به شکل یک ماتریس توصیف کنیم، با توجه به ترکیب A با R بایستی ستون های A با سطر های R هم جنس باشند. ستون های R نیز با جایگذاری x_1 و x_2 در رابطه y حاصل می شود. لذا داریم:

$$R = \begin{array}{c} \\ 1,4 \\ 1,5 \\ 1,6 \\ 2,4 \\ 2,5 \\ 2,6 \\ 3,4 \\ 3,5 \\ 3.6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 11 & 12 & 13 & 17 & 18 & 19 & 27 & 28 & 29 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

سپس برای ترکیب ابتدا بین ستون های A و سطر ها به شکل درایه به درایه مینیمم میگیریم و نتیجه را ماکسیمم میگیریم که با توجه همانی شدن ماتریس R، نتیجه B برابر است با:

$$B = \left\{\frac{0.2}{11}, \frac{0.2}{12}, \frac{0.2}{13}, \frac{0.4}{17}, \frac{0.4}{18}, \frac{0.4}{19}, \frac{0.3}{27}, \frac{0.3}{28}, \frac{0.3}{29}\right\}$$

سوال پنجم)

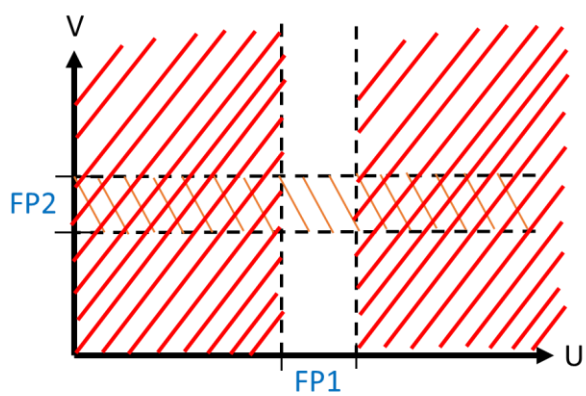
الف) خیر. FP1 و FP2 را جایگزین p و q کنیم داریم:

- $FP1^{\sim} \cup FP2$
- $FP1^{\sim} \cup (FP1 \cap FP2)$

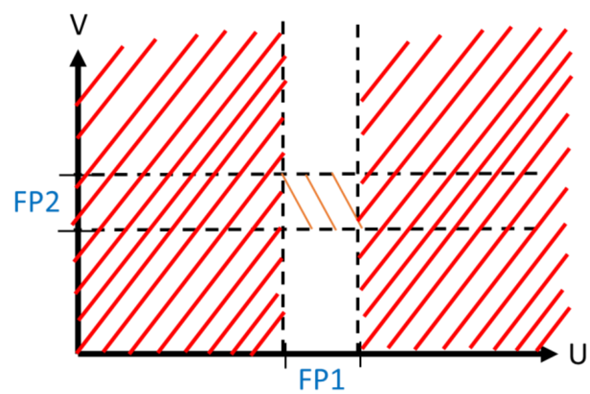
در نگاه اول، با در نظر گرفتن ماکسیمم برای اجتماع و مینیمم برای اشتراک این ۲ معادل در نظر گرفته میشوند. اما با توجه به این که FP1 و FP2 هم مرجع نیستند، آن هارا هم مرجع کنیم و سپس نمودار آن هارا رسم کنیم داریم:

$$FP1^{\sim} \cup FP2 \rightarrow (FP1^{\sim} \times V) \cup (U \times FP2)$$

$$FP1^{\sim} \cup (FP1 \cap FP2) \rightarrow (FP1^{\sim} \times V) \cup (FP1 \times FP2)$$



$(FP1^{\sim} \times V) \cup (U \times FP2)$



$(FP1^{\sim} \times V) \cup (FP1 \times FP2)$

در ۲ نمودار فوق، یک تفاوتی میبینیم، در سمت چپ بین خطوط قرمز و نارنجی اشتراک وجود دارد و در نمودار راست وجود ندارد. یعنی در نمودار سمت چپ برخی نواحی ۲ بار حساب می شوند. در ماکسیمم و مینیمم و حالت کلاسیک این ۲ تفاوت ندارن چون اجتماع ۲ چیز تکراری $a \vee a$ برابر با a خواهد شد. ولی در برخی حالت های نرمال نظیر جمع و ضرب جبری داریم:

$$a \vee b = a + b - ab$$

لذا داریم:

$$a \vee a = 2a - a^2$$

پس این ۲ معادل نیستند.

ب) اگر بخواهیم رابطه این قاعده را با اگر-آنگاه فازی بدست آوریم داریم:

۱)

$$\mu_{Q_D}(x,y) = max\left[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right]$$

$$Q_D \;=\; \{\frac{1}{1,1},\frac{1}{1,2},\frac{1}{1,3},\frac{1}{2,1},\frac{0.8}{2,2},\frac{0.8}{2,3},\frac{1}{3,1},\frac{0.4}{3,2},\frac{0.4}{3,3},\frac{1}{4,1},\frac{0.4}{4,2},\frac{0}{4,3}\}$$

۲)

$$\mu_{Q_G}(x,y) = \begin{cases} 1 & if\, \mu_{FP_1}(x) \le \mu_{FP_2}(y) \\ \mu_{FP_2}(y) & else \end{cases}$$

$$Q_G \;=\; \{\frac{1}{1,1},\frac{1}{1,2},\frac{1}{1,3},\frac{1}{2,1},\frac{1}{2,2},\frac{0}{2,3},\frac{1}{3,1},\frac{0.4}{3,2},\frac{0}{3,3},\frac{1}{4,1},\frac{0.4}{4,2},\frac{0}{4,3}\}$$

۳)

$$\mu_{Q_{MM}}(x,y) = min\left[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right]$$

$$Q_{MM} \;=\; \{\frac{0}{1,1},\frac{0}{1,2},\frac{0}{1,3},\frac{0.2}{2,1},\frac{0.2}{2,2},\frac{0}{2,3},\frac{0.6}{3,1},\frac{0.4}{3,2},\frac{0}{3,3},\frac{1}{4,1},\frac{0.4}{4,2},\frac{0}{4,3}\}$$

۴)

$$\mu_{Q_{MP}}(x,y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y)$$

$$Q_{MP} \;=\; \{\frac{0}{1,1},\frac{0}{1,2},\frac{0}{1,3},\frac{0.2}{2,1},\frac{0.08}{2,2},\frac{0}{2,3},\frac{0.6}{3,1},\frac{0.24}{3,2},\frac{0}{3,3},\frac{1}{4,1},\frac{0.4}{4,2},\frac{0}{4,3}\}$$

۵)

$$\mu_{Q_Z}(x,y) = max\left[min\left(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right), 1 - \mu_{FP_1}(x)\right]$$

$$Q_z = \{\frac{1}{1,1}, \frac{1}{1,2}, \frac{1}{1,3}, \frac{0.8}{2,1}, \frac{0.8}{2,2}, \frac{0.8}{2,3}, \frac{0.6}{3,1}, \frac{0.4}{3,2}, \frac{0.4}{3,3}, \frac{1}{4,1}, \frac{0.4}{4,2}, \frac{0}{4,3}\}$$

سوال ششم)

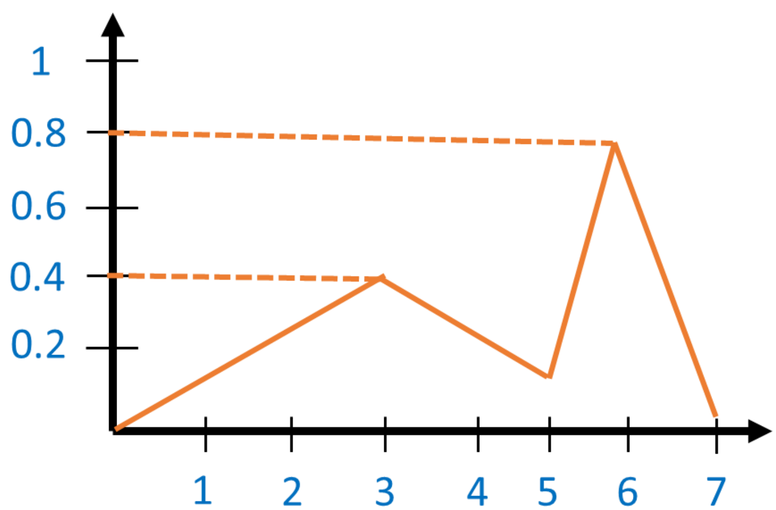
فازی سازی: فرایندی که در آن یک مجموعه کلاسیک به یک مجموعه فازی تبدیل می شود.

غیرفازی سازی: فرایندی که در آن یک مجموعه فازی به یک مجموعه کلاسیک تبدیل می شود (عکس فرایند قبل). برای این کار از λ-cut استفاده می شود. به این صورت که یک λ بین ۰ و ۱ اختیار می شود و هرگاه که مقدار تعلق از λ بیشتر شد در مجموعه کلاسیک می آوریم و در غیر این صورت نمی آوریم.

روش های مختلفی برای این کار موجود است که طبق خواسته سوال به ۴ مورد آن اشاره میکنیم

۱. **ماکزیمم گیری:** ساده ترین روش غیر فازی می باشد. این روش تنها در مواقعی که خروجی ما peak دارد امکان پذیر می باشد.

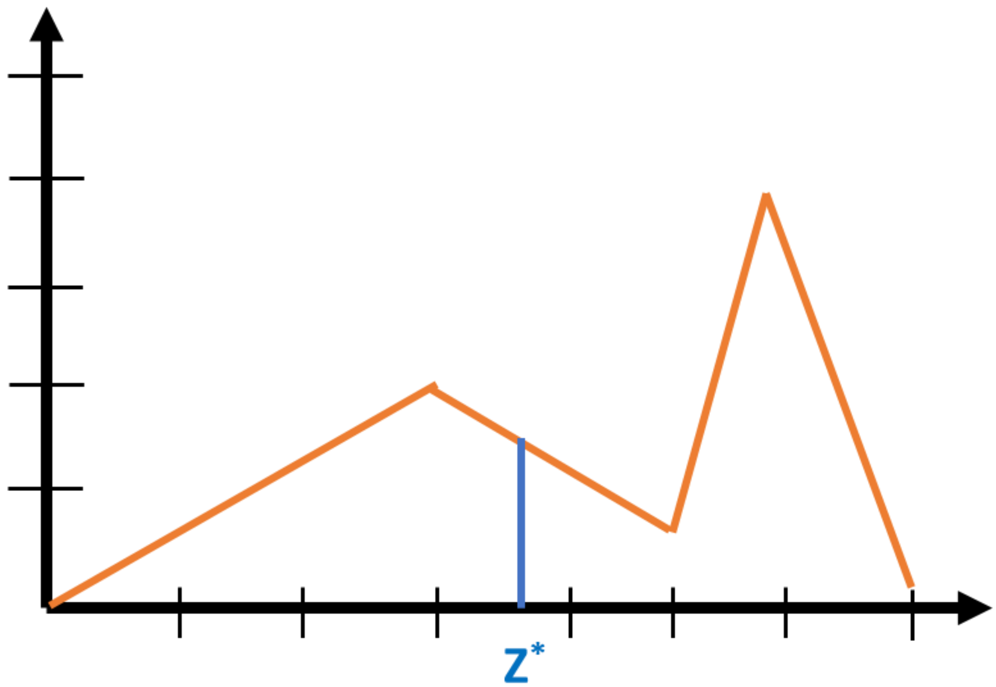
$$\mu_A(z^*) \geq \mu_A(z) for\ all\ z \in Z$$



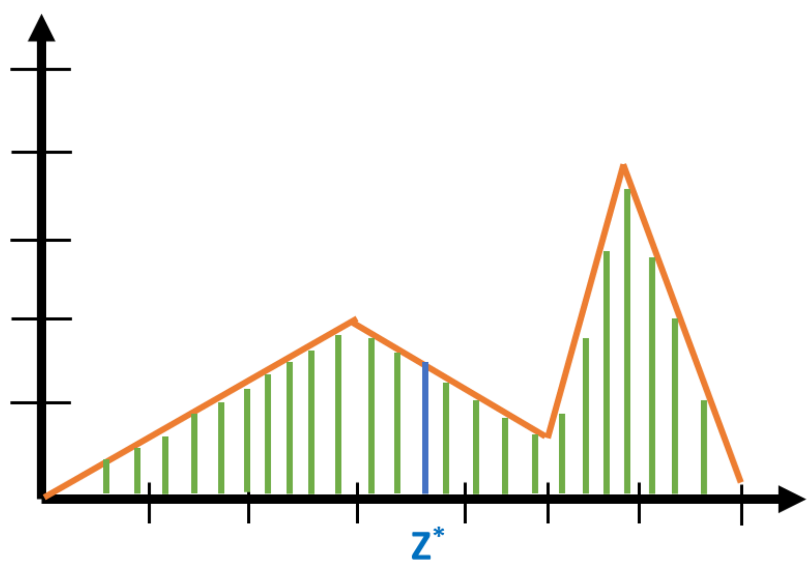
همانطور که در مثال فوق مشاهده میکنیم، ۲ پیک یکی در ۳ یکی در ۶ داریم. لذا توانایی استفاده از ماکزیمم گیری را داریم و $z^*=6$ خواهد شد.

۲. **مرکز ثقل:** در این روش از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$z^* = \frac{\int \mu_A(z).zdz}{\int \mu_A(z)dz}$$



با توجه به هزینه محاسباتی زیاد این روش، میتوان گسسته سازی انجام داد، به طوری که به نحو زیر مقدار های تعلق را در نقاط در نظر میگیریم:

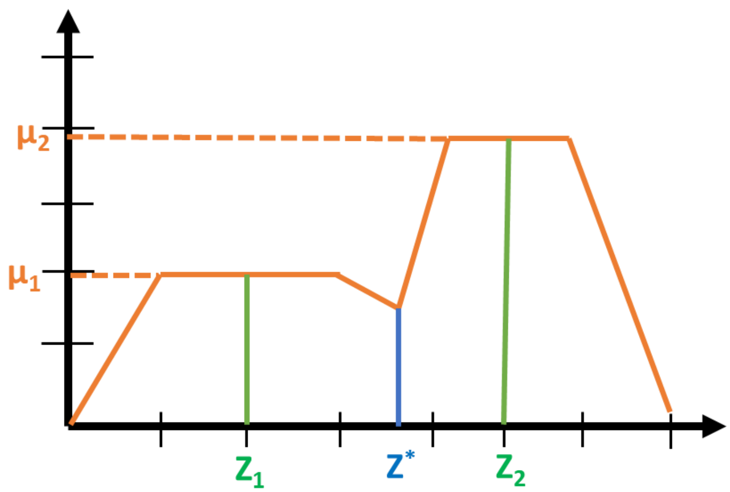


سپس رابطه مرکز ثقل را در این نقاط گسسته به جای نقاط پیوسته اعمال میکنیم. میدانیم در نقاط پیوسته انتگرال به سیگما تبدیل خواهد شد و لذا داریم:

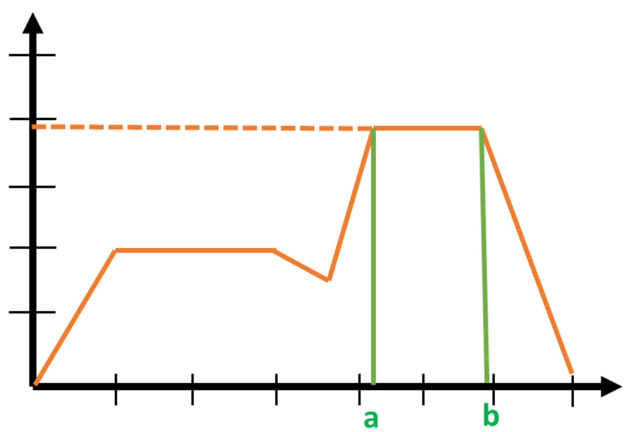
$$z^* = \frac{\sum \boldsymbol{\mu_A(z_i).z_i}}{\sum \boldsymbol{\mu_A(z_i)}}$$

۳. **متوسط وزنی مراکز:** با فرض اینکه اجتماع دو مجموعه فازی را داشته باشیم، به این صورت عمل میکنیم که مرکز هر یک از دو مجموعه فازی را در نظر میگیریم. مقدار تعلق هریک را وزن آن در نظر میگیریم و داریم:

$$z^* = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2}$$



۴. **روش mean-max.** این روش را تنها در توابع متقارن میتوان استفاده کرد. برای این کار میانگین بخشی که در آن مقدار تعلق ماکسیمم می باشد حساب میشود. یعنی اگر داشته باشیم:

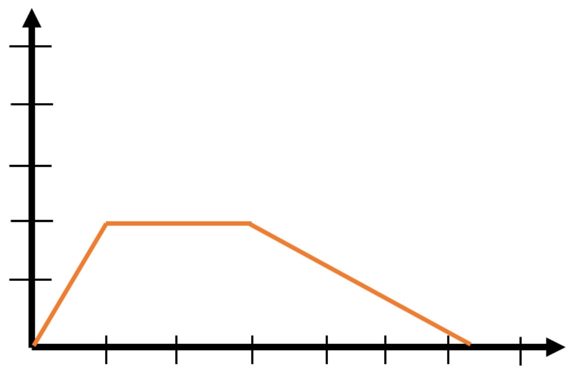


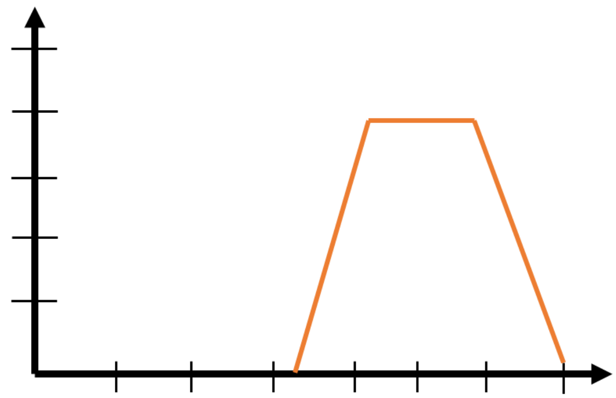
آنگاه داریم:

$$z^* = \frac{a+b}{2}$$

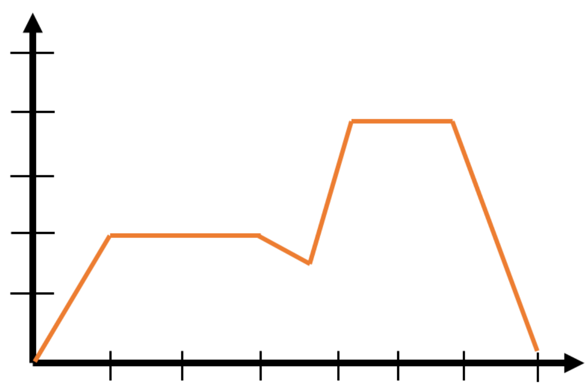
سوال هفتم)

الف) نادرست. برای مثال دو مجموعه فازی محدب زیر را در نظر بگیرید:





اجتماع دو مجموعه فازی محدب فوق، مجموعه فازی غیر محدب را حاصل میکنند:



ب) نادرست. تنها در صورتی این اصل درست است که رابطه مورد نظر ما جداپذیر باشد. بر فرض اگر یک رابطه استوانه ای را در نظر بگیریم، پس از تصویر و توسعه استوانه ای یک مکعب حاصل میکند که با رابطه اولی متفاوت است.

ج) درست. در صورتی که جداپذیر باشد این اصل درست است. در غیر این صورت یک V_1 حاصل می‌شود که بهترین تقریب نسبت به V را دارد.

د) درست. پس از اشتراک توسعه استوانه ای تصویر ها همانطور که مشاهده میکنیم رابطه اولی حاصل خواهدشد:

R	0.7	0.8	1
0.9	0.7 0.9 0.7 0.7	0.8 0.9 0.8 0.8	0.9 0.9 1 0.9
0.4	0.4 0.4 0.7 0.4	0.4 0.4 0.8 0.4	0.4 0.4 1 0.4
1	0.7 1 0.7 0.7	0.8 1 0.8 0.8	1 1 1 1

ه) منطق فازی تعلق یک عضو را نشان خواهد داد و با احتمال رخداد متفاوت است.