

## فصل ۸ خصوصیات زبان‌های مستقل از متن

همان‌طور که در فصل چهارم به بررسی خصوصیات زبان‌های منظم پرداختیم خصوصیات زبان‌های مستقل از متن هم بسیار در درک این زبان‌ها مهم می‌باشد. در این فصل به بررسی خصوصیات زبان‌های مستقل از متن و الگوریتم‌های موجود بر روی آنها می‌پردازیم.

### лем تزریق برای زبان‌های مستقل از متن

اگر  $L$  یک زبان مستقل از متن نامتناهی باشد. آن گاه یک عدد صحیح مثبت مانند  $m$  وجود دارد به طوریکه هر رشته  $w \in L$  با  $|w| \geq m$  می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

$$w = uvxyz, |vxy| \leq m, |vy| \geq 1$$

به قسمی که:

$$\forall i \geq 0 : uv^i xy^i z \in L$$

### لم تزریق برای زبان‌های خطی

اگر  $L$  یک زبان خطی نامتناهی باشد. آن گاه یک عدد صحیح مثبت مانند  $m$  وجود دارد به طوریکه هر رشته  $w \in L$  با  $|w| \geq m$  می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

$$w = uvxyz, |uvyz| \leq m, |vy| \geq 1$$

به قسمی که:

$$\forall i \geq 0 : uv^i xy^i z \in L$$

### خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن

قضیه ۱-۸: اگر  $L_1$  و  $L_2$  دو زبان مستقل از متن دلخواه باشند آن گاه زبان  $L_1 \cup L_2$  مستقل از متن است.

اثبات: از آنجاکه  $L_1$  و  $L_2$  مستقل از متن هستند لذا دارای گرامر مستقل از متنی مانند  $(G_1(V_1, T_1, S_1, P_1))$  و  $(G_2(V_2, T_2, S_2, P_2))$  می‌باشند. حال گرامر

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\})$$

را در نظر بگیرید. این گرامر قادر است زبان  $L_1 \cup L_2$  را تولید کند.

قضیه ۲-۸: اگر  $L_1$  و  $L_2$  دو زبان مستقل از متن دلخواه باشند آن گاه زبان  $L_1 \cdot L_2$  مستقل از متن است.

**اثبات:** از آنجا که  $L_1$  و  $L_2$  مستقل از متن هستند لذا دارای گرامر مستقل از متنی مانند  $(V_1, T_1, S_1, P_1)$  و  $G_1 = (V_1, T_1, S_1, P_1)$  می‌باشند. حال گرامر  $G_2 = (V_2, T_2, S_2, P_2)$

$$G = \left( V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\} \right)$$

را در نظر بگیرید. این گرامر قادر است زبان  $L_1 \cdot L_2$  را تولید کند.

**قضیه ۳-۸:** اگر  $L$  یک زبان مستقل از متن دلخواه باشد آن‌گاه زبان  $L^*$  مستقل از متن است.

**اثبات:** از آنجا که  $L$  مستقل از متن است لذا دارای گرامر مستقل از متنی مانند  $G = (V, T, S, P)$  می‌باشد. حال گرامر  $G' = (V \cup \{S'\}, T_1 \cup T_2, S', P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S' S | \lambda\})$  را در نظر بگیرید. این گرامر قادر است زبان  $L^*$  را تولید کند.

**نکته:** خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عمل معکوس بسته می‌باشد.

**نکته:** اگر  $L_1$  یک زبان مستقل از متن دلخواه و  $L_2$ . نیز یک زبان منظم دلخواه باشد آن‌گاه زبان  $L_1 \cap L_2$  مستقل از متن است. این عملگر اشتراک منظم نامیده می‌شود.

در اثبات برخی از قضایا می‌توان از روش ساختاری استفاده کرد برای نمونه برای اثبات منظم بودن یک زبان باید آن را به گونه‌ای از اشتراک، اجتماع با تفاضل دو زبان منظم ساخت و یا برای اثبات مستقل از متن بودن یک زبان می‌توان آن را از اشتراک یک زبان مستقل از متن با یک زبان منظم ساخت.

**مثال ۱:** زبان  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0, n \neq 100\}$  را در نظر بگیرید. زبان  $L$  را می‌توان به صورت زیر ساخت:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cap \bar{L}_1$$

که در آن  $L_1 = \{a^{100} b^{100}\}$  می‌باشد. از آنجا که زبان  $L_1$  و نتیجتاً مکمل آن منظم هستند لذا زبان  $L$  که از اشتراک یک زبان مستقل از متن و یک زبان منظم تولید شده است لذا مستقل از متن است.

**مثال ۲:** زبان  $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$  را در نظر بگیرید. حال از آنجا که زبان زیر مستقل از متن نیست لذا زبان  $L$  نمی‌تواند مستقل از متن باشد.

$$L \cap L(a^* b^* c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

**قضیه ۴-۸:** خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عملیات اشتراک بسته نمی‌باشد.

**اثبات:** توسط یک مثال نقض می‌توان قضیه را اثبات نمود. دو زبان مستقل از متن

$$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\} \quad L_1 = \{a^n b^m c^m \mid m, n \geq 0\}$$

را در نظر بگیرید. حال چون  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  دو زبان مستقل از متن نیست لذا زبان‌های مستقل از متن تحت عمل اشتراک بسته نیستند.

قضیه ۸-۵: خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عمل مکمل گیری بسته نمی‌باشد.

**اثبات:** با استفاده از برهان خلف اثبات را انجام می‌دهیم. از آنچه که  $\overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1}} \cup \overline{\overline{L_2}}$  صورت بسته بودن زبان‌های مستقل از متن تحت عمل مکمل گیری باید زبان‌های مستقل از متن تحت عمل اشتراک نیز بسته باشند که طبق قضیه قبلی نادرست است. یک روش اثبات دیگر برای بسته بودن زبان‌های مستقل از متن تحت عمل مکمل گیری استفاده از مثال توضیح است. زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \left\{ a^i b^j c^l d^m \mid i = 1 \text{ and } j = m, i, j, l, m \geq 0 \right\}$$

$$L_1 = \left\{ a^i b^j c^l d^m \mid i \neq 1, i, l \geq 0 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ a^i b^j c^l d^m \mid j \neq m, j, m \geq 0 \right\}$$

$$L_3 = \left\{ a^* b^* c^* d^* \right\}$$

مثال ۳: زبان  $L = \left\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \right\}$  یک زبان مستقل از متن نیست و لی مکمل آن مستقل از متن است:

$$L = \left\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \right\} = \left\{ a^m b^n c^k \mid m = n \text{ and } n = k, m, n, k \geq 0 \right\}$$

$$\overline{L} = \left\{ a^m b^n c^k \mid m \neq n \text{ or } n \neq k, m, n, k \geq 0 \right\} \cup \overline{\left\{ a^* b^* c^* \right\}}$$

قضیه ۸-۶: خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عمل تفاضل بسته نمی‌باشد.

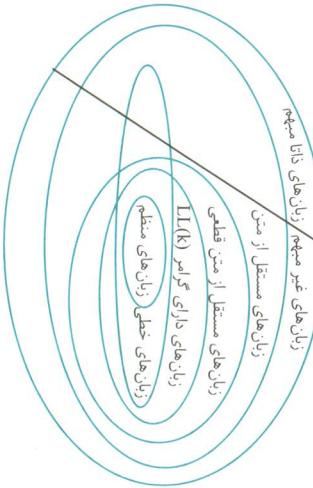
**اثبات:** از آنچه که  $\overline{L_1} = \sum^* - L_1$  لذا اگر زبان مستقل از متن تحت تفاضل بسته باشد تحت مکمل گیری نیز باید بسته باشد که نادرست است.

**نکته:** یک زبان مستقل از متن معین (قطعی) هیچ گاه ذاتاً مبهم نیست.

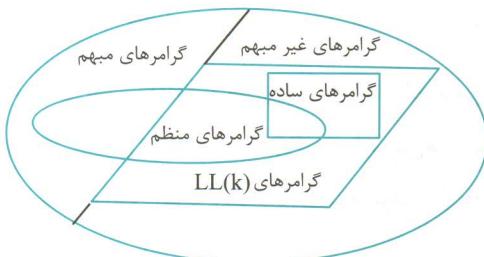
**نکته:** اجتماع دو زبان مستقل از متن قطعی ممکن است مستقل از متن غیر قطعی باشد.

نمودار رو به رو رابطه بین زبان‌های منظم، زبان‌های مستقل از متن قطعی،

زبان‌های غیر مبهم زبان‌های ذاتاً مبهم



شکل ۸-۱



شکل ۲-۸

نمودار زیر رابطه بین گرامرهای ساده، منظم، مبهم و غیر مبهم را نشان می‌دهد.

**مثال ۴:** گرامر زیر نشان دهنده یک گرامر منظم است که مبهم می‌باشد:

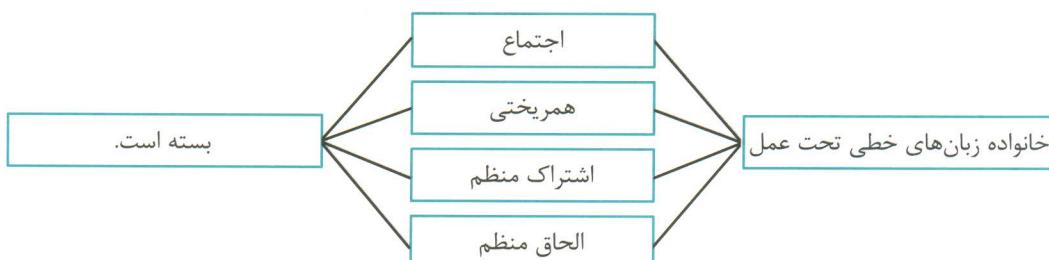
$$S \rightarrow aS \mid a \mid \lambda$$

### الگوریتم‌های موجود بر روی زبان‌های مستقل از متن

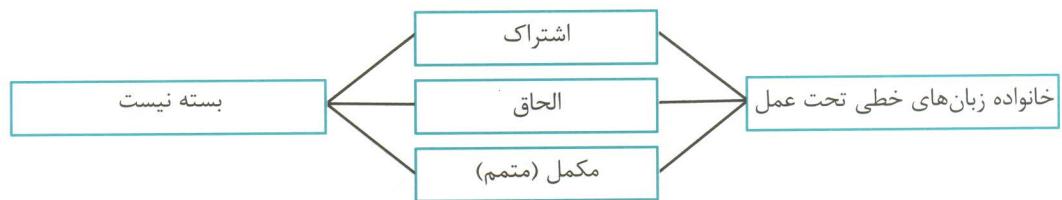
**نکته:** اگر  $G$  یک گرامر مستقل از متن دلخواه باشد، تشخیص تهی بودن  $G$  دارای الگوریتم زیر است.  
الگوریتم: ابتدا الگوریتم حذف قواعد بی‌فایده را بر روی گرامر اجرا می‌کنیم. اگر متغیر آغازین  $G$  بی‌فایده باشد آن‌گاه  $L(G) = \emptyset$  و در غیر اینصورت  $L(G) \neq \emptyset$ .

**نکته:** اگر  $G$  یک گرامر مستقل از متن دلخواه باشد، تشخیص نامتناهی بودن  $G$  دارای الگوریتم زیر است.  
الگوریتم: ابتدا الگوریتم حذف قواعد نامطلوب را بر روی گرامر اجرا می‌کنیم. سپس گراف وابستگی گرامر را تولید می‌کنیم. اگر در گراف وابستگی حلقه‌ای وجود داشته باشد آن‌گاه زبان  $(G) L$  نامتناهی است و در غیر اینصورت زبان  $(G) L$  متناهی است.

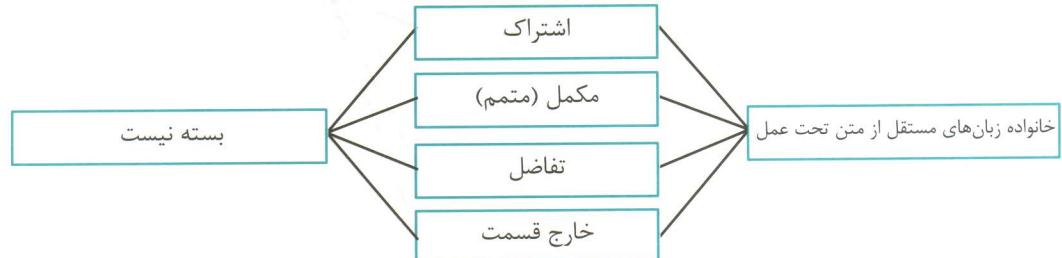
**نکته:** اگر  $A$  و  $B$  دو ماشین پشته‌ای قطعی باشند آن‌گاه الگوریتمی برای تصمیم‌گیری در مورد  $L(A) = L(B)$  وجود دارد. و اگر  $A$  و  $B$  دو ماشین پشته‌ای غیرقطعی باشند آن‌گاه تصمیم‌گیری در مورد  $L(A) = L(B)$  دارای الگوریتم نمی‌باشد.



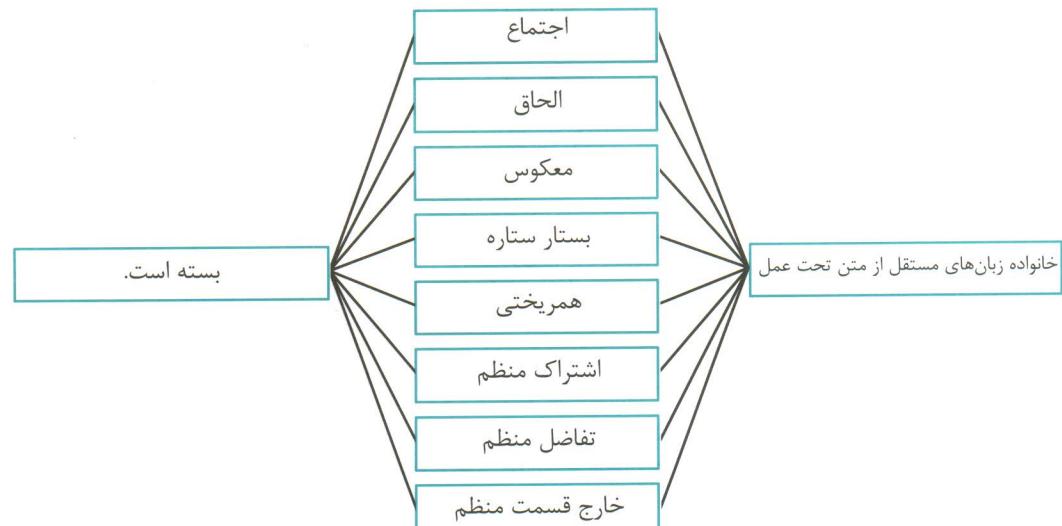
شکل ۳-۸



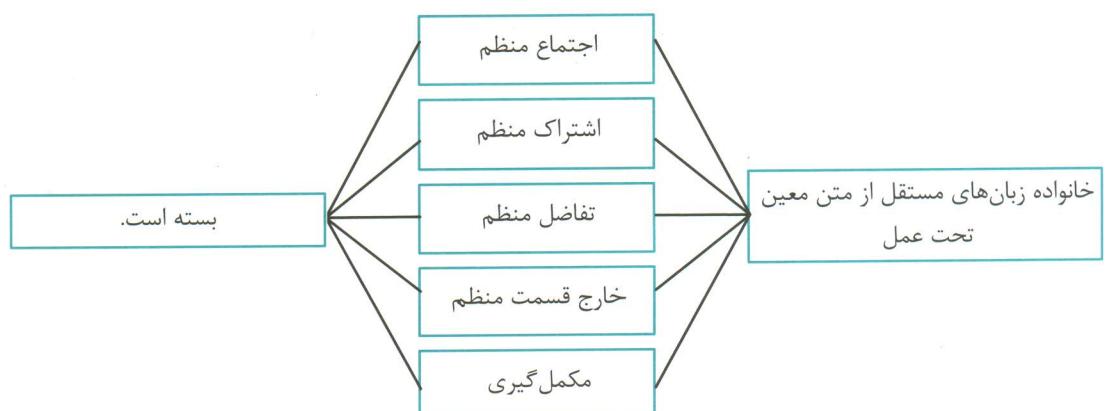
شکل ۴-۸



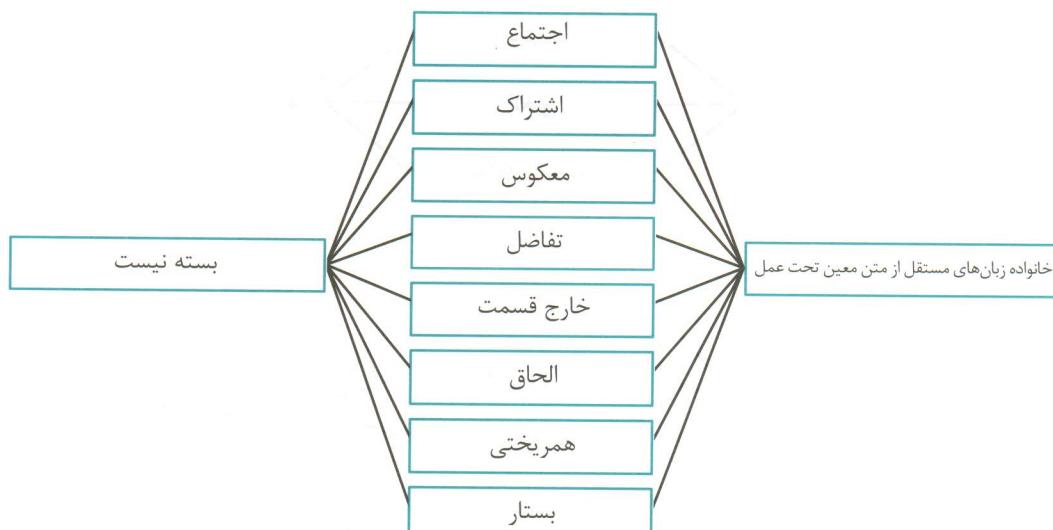
شکل ۵-۸



شکل ۶-۸



شکل ۷-۸



شکل ۸-۸



شکل ۹-۸

جداول زیر نمونه‌هایی از زبان‌ها و دسته بندی آنها را نشان می‌دهند:

جدول ۱ - ۸

ردیف	زبان	منظم	مستقل از متن
۱	$L = \{w_1cw_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 \neq w_2\}$	-	-
۲	$L = \{w_1cw_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w = w_2\}$	-	-
۳	$L = \{uvw^Rv : u, v \in \{a, b\}^+,  u  \geq  v \}$	-	-
۴	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} : n \geq 0\} \cup \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$	-	-
۵	$L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$	-	-
۶	$L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$	-	-
۷	$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$	-	-
۸	$L = \{a^n b^j : n = j^2\}$	-	-
۹	$L = \{a^n : \text{عدد اول است } n\}$	-	-

–	–	$L = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$	۱۰
–	–	$L = \{a^n b^j : n \geq j^2\}$	۱۱
–	–	$L = \{a^n b^j : n \geq (j-1)^3\}$	۱۲
–	–	$L = \{a^n b^j c^k : k = nj\}$	۱۳
–	–	$L = \{a^n b^j c^k : k > n, k > j\}$	۱۴
–	–	$L = \{a^n b^j c^k : n < j, n \leq k \leq j\}$	۱۵
–	–	$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) < n_b(w) < n_c(w)\}$	۱۶
–	–	$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w)/n_b(w) = n_c(w)\}$	۱۷
–	–	$L = \{a^n b^j a^n b^j : n \geq 0, j \geq 0\}$	۱۸
–	–	$L = \{a^n b^j a^k b^l : n \leq k, j \leq l\}$	۱۹
–	–	$L = \{a^n b^n c^j : n \leq j\}$	۲۰
–	–	$L = \{a^{nm} \mid n \text{ اعداد اول هستند و } m\}$	۲۱
–	–	$L = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\} \cap \{a^n b^m c^m : n, m \geq 0\}$	۲۲
–	–	$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$	۲۳

جدول ۲ - ۸

ردیف	زبان	منظمه	مستقل از متن
۲۴	$\{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\} \cap (abc)^*$	–	–
۲۵	$\{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$	–	–
۲۶	$\{w_1 w_2 : w_1 \neq w_2,  w_1  =  w_2 \}$	–	–
۲۷	$\{a^{m'>m} : m, m' > 0\}$	–	–
۲۸	$\{x w w^R y : x, y, w \in \{a, b\}^+,  x  \geq  y \}$	–	–

-	-	$L = \{w_1 \subset w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$	۲۹
-	-	$L = \{a^n b^n c^{2n} : n \geq 1\}$	۳۰
-	-	$L = \{a^n b^{2n} a^n : n \geq 1\}$	۳۱
✓	-	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$	۳۲
✓	-	$L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$	۳۳
✓	-	$L = \{ab(bbba)^n bba(ba)^n : n \geq 0\}$	۳۴
✓	-	$L = \{a^n b^l : n \neq l\}$	۳۵
✓	✓	$L = \{a^{2n} b^m : n, m \geq 0\}$	۳۶
✓	✓	$L = \{ab^{2n} : n \geq 1\}$	۳۷
✓	-	$L = \{a^n b^m : n \leq (m+3)\}$	۳۸
✓	-	$L = \{a^n b^m : n \neq m-1\}$	۳۹
✓	-	$L = \{a^n b^m : n \neq 2m\}$	۴۰
✓	-	$L = \{a^n b^m : 2n \leq m \leq 3n\}$	۴۱
✓	-	$L = \{w \in \{a, b\}^* : n_a(w) \neq n_b(w)\}$	۴۲
✓	-	$L = \{a^n b^m c^k : n = m \text{ or } m \leq k, n, m \geq 0\}$	۴۳
✓	-	$L = \{a^n b^m c^k : n = m \text{ or } m \neq k, n, m \geq 0\}$	۴۴
✓	-	$L = \{a^n b^m c^k : k = n+m, n, m \geq 0\}$	۴۵
✓	-	$L = \{a^n b^m c^k : n+2m = k\}$	۴۶

جدول ۳ - ۸

ردیف	زبان	منتظم	مستقل از متن
۴۷	$L = \{a^n b^m c^k : k   m-n\}$	✓	-

✓	-	$L = \{w \in \{a, b, c\}^*: n_a(w) + n_b(w) \neq n_c(w)\}$	۴۸
✓	-	$L = \{a^n b^m c^k : k \neq n+m\}$	۴۹
✓	-	$L = \{a^n w w^R b^n : w \sum^*, n \geq 1\}$	۵۰
✓	-	$L = \{a^n b^m : n \leq m+3\}$	۵۱
✓	-	$L = \{uvwv^R : u, v, w \in \{a, b\}^+,  u = v =2\}$	۵۲
✓	-	$L = \{w_1 cw_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^+, w_1 \neq w_2^R\}$	۵۳
✓	-	$L = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\} \cup \{a^n b^m c^m : n, m \geq 0\}$	۵۴
✓	-	$L = \{w \in \{a, b\}^*: n_a(w) = n_b(w)\}$	۵۵
✓	-	$L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$	۵۶
✓	-	$L = \{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\}$	۵۷
✓	-	$L = \{a^n b^m c^{n+m} : n \geq 0, m \geq 0\}$	۵۸
✓	-	$L = \{w \in \{a, b\}^*: 2n_a(w) \leq n_b(w) \leq 3n_a(w)\}$	۵۹
✓	-	$L = \{w_1 cw_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 \neq w_2^R\} \cdot \{a^*\}$	۶۰
✓	-	$L = \{ab(ab)^n b(ab)^n : n \geq 0\}$	۶۱
✓	-	$L = \{a^{n+1} b^{2n} : n \geq 0\}$	۶۲
✓	-	$L = \{a^n b^{n+1} : n \geq 0\}$	۶۳
✓	-	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$	۶۴
✓	-	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a\}$	۶۵
✓	-	$L = \{a^n w w^R a^n : n \geq 0, w \in \{a, b\}^*\}$	۶۶
✓	-	$L = \{a^n b^j a^j b^n : n \geq 0, j \geq 0\}$	۶۷
✓	-	$L = \{a^n b^j a^k b^l : n+j \leq k+l\}$	۶۸
✓	-	$L = \{a^n b^n a^m b^m : n \geq 0, m \geq 0\}$	۶۹

جدول ۸-۴

ردیف	زبان	منظمه	مستقل از متن
۷۰	$L = \{a^n b^j : j \leq n \leq 2j - 1\}$	-	✓
۷۱	$L = \{a^n b^n : n \geq 0, n \neq 100\}$	-	✓
۷۲	$L = \left\{ w \in \{a, b\}^*: n_a(w) = n_b(w), \text{ شامل زیر رشته } aab \text{ نیست} \right\}$	-	✓
۷۳	$L = \left\{ a^n b^n \mid n \text{ مضربی از } 5 \text{ نیست} \right\}$	-	✓
۷۴	$L = \{xa^n b^n : n \geq 0\} \cup \{ya^n b^n : n \geq 0\}$	-	✓
۷۵	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^n c^{2n} : n \geq 0\}$	-	✓
۷۶	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{b^{2n} : n \geq 0\}$	-	✓
۷۷	$L = \{wcw^R v : w, v \in \{a, b\}^*\}$	-	✓
۷۸	$L = \{wcw^R a^n : w \in \{a, b\}^*, n \geq 0\}$	-	✓
۷۹	$L = \{a^n b^m : n \neq 2m\}$	-	✓
۸۰	$L = \{a^i b^j c^i c^j d^k : i, j, k \geq 0\}$	-	✓
۸۱	$L = \{a^n : n = k^2, k > 0\}$ برای برخی از	-	-
۸۲	$L = \{a^n : n = 2^k, k > 0\}$ برای برخی از	-	-
۸۳	$L = \left\{ a^n b^k c^l \mid \frac{n}{l} \text{ یک عدد صحیح است} \right\}$	-	-
۸۴	$L = \{a^n b^l a^k : n > 5, l > 3, k > 1\}$	-	✓
۸۵	$L = \{a^n b^l \mid \text{عدد اول است } n+1\}$	-	-
۸۶	$L = \{abab^n : n \geq 0\} \cup \{aba^n : n \geq 0\}$	✓	✓
۸۷	$L = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{b^n a : n \geq 1\}$	✓	✓
۸۸	$L = \{awa : w \in \{a, b\}^*\}$	✓	✓
۸۹	$L = \{ab^5 wb^4 : w \in \{a, b\}^*\}$	✓	✓

✓	✓	$L = \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1, nm \geq 3\}$	۹۰
✓	✓	$L = \{ab^n w : n \geq 3, w \in \{a, b\}^+\}$	۹۱
✓	✓	$L = \{a^{2n} b^{2m+1} : n, m \geq 0\}$	۹۲

جدول ۸

ردیف	زبان	منظمه	مستقل از متن
۹۳	$L = \{vwv : v, w \in \{a, b\}^*,  v  = 2\}$	✓	✓
۹۴	$L = \{a^n b^m \mid \text{نیز n+m است}\}$	✓	✓
۹۵	$L = \{w_1 bw_2 :  w_1  \bmod 2 =  w_2  \bmod 2, w_1, w_2 \in \{a\}^*\}$	✓	✓
۹۶	$L = \{w \in \{a, b\}^* : n_a(w), n_b(w) \text{ هر دو زوج اند}\}$	✓	✓
۹۷	$L = \{a^n : n = i + jk, i, k \text{ fixed}, j = 0, 1, 2, \dots\}$	✓	✓
۹۸	$L = \{a^n b^l a^k : n+l+k > 5\}$	✓	✓
۹۹	$L = \{uvw^R v : u, v, w \in \{a, b\}^+\}$	✓	✓

جدول ۹

ردیف	زبان مستقل از متن	قطعی	غیر قطعی
۱	$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$	✓	✓
۲	$L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$	-	✓
۳	$L = \{a^n b^m : 2n \leq m \leq 3n\}$	-	✓
۴	$L = \{w \in \{a, b\}^* : n_a(w) \neq n_b(w)\}$	✓	✓
۵	$L = \{a^n b^m c^k : n = m \text{ or } m \leq k, n, m \geq 0\}$	-	✓
۶	$L = \{a^n b^m c^k : n = m \text{ or } m \neq k, n, m \geq 0\}$	-	✓
۷	$L = \{w_1 cw_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^+, w_1 \neq w_2^R\}$	✓	✓

✓	✓	$L = \left\{ w \in \{a, b\}^*: n_a(w) = n(w) = n_b(w) \right\}$	۸
✓	✓	$L = \left\{ a^n b^{2n} : n \geq 0 \right\}$	۹
✓	✓	$L = \left\{ w c w^R : w \in \{a, b\}^* \right\}$	۱۰
✓	-	$L = \left\{ w \in \{a, b\}^*: 2n_a(w) \leq n_b(w) \leq 3n_a(w) \right\}$	۱۱
✓	✓	$L = \left\{ w_1 c w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 \neq w_2^R \right\} \cdot \{a^a\}$	۱۲
✓	-	$L = \left\{ a^n b^n : n \geq 0 \right\} \cup \left\{ a^n c^{2n} : n \geq 0 \right\}$	۱۳
✓	✓	$L = \left\{ a^n b^n : n \geq 0 \right\} \cup \{a\}$	۱۴
✓	-	$L = \left\{ a^n b^m c^k : n = m \mid m = k \right\}$	۱۵
-	✓	$L = \left\{ a^n b^n a^m b^m : n, m \geq 0 \right\}$	۱۶
✓	✓	$L = \left\{ x a^n b^n : n \geq 0 \right\} \cup \left\{ y a^n b^b : n \geq 0 \right\}$	۱۷
✓	✓	$L = \left\{ a^n b^n : n \geq 0 \right\} \cup \left\{ a^n c^{2n} : n \geq 0 \right\}$	۱۸
✓	✓	$L = \left\{ a^n b^n : n \geq 0 \right\} \cup \left\{ b^{2n} : n \geq 0 \right\}$	۱۹
✓	✓	$L = \left\{ w c w^R v : w, v \in \{a, b\}^* \right\}$	۲۰

نمونه سؤالات

۱. برای اینکه ثابت کنیم که  $L$  یک زبان مستقل از متن نیست، شرایط کافی کدامند؟

- I. زبانی منظم وجود داشته باشد که از اشتراک آن با  $L$  زبانی منظم به وجود نیاید.

II. زبانی مستقل از متن وجود داشته باشد که از اجتماع آن با  $L$  زبانی مستقل از متن به وجود نیاید.

III. زبانی مستقل از متن وجود داشته باشد که از اشتراک آن با  $L$  زبانی مستقل از متن به وجود نیاید.

III 9 II 12 II 11

III (۴) I (۳)

گلستانی از اینجا شروع می‌شود

الآن، يُمكنكم تعلم المفاهيم الجديدة.

۱۰) ریلیتی سیم دست اسکرپ می‌نمایی بسته به بسته  
۱۱) پلی‌پلی‌نیترات‌کربن‌نیترات‌کربن

۲. کدام یک از گزینه ها صحیح نمی باشد؟

۳. کدام یک از گزینه های زیر غلط است

(۱) اگر  $L_1$  خطی و  $L_2$  منظم باشد آن گاه  $L_1 \cap L_2$  و  $L_1 \cdot L_2$ ، خطی می‌باشند.

(۲) اگر  $L_1$  مستقل از متن و  $L_2$  منظم باشد، آن‌گاه  $L_1 \cap L_2$  و  $L_1 - L_2$  و  $L_1 / L_2$  مستقل از متن می‌باشند.

۳) اگر  $L_1$  مستقل از متن معین و  $L_2$  منظم باشد آن‌گاه  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 - L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$ ,  $L_1 / L_2$  مستقل از متن معین

میلسنڈ

۲) هیچدام

۴. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱: اگر  $L$  زبان منظم باشد آن‌گاه الگوریتمی وجود دارد که نشان دهد آیا  $\sum = L$  است یا خیر.

ii: اگر  $L$  زبان مستقل از متن باشد آن‌گاه الگوریتمی وجود دارد که نشان دهد آیا  $\sum = L$  است یا خیر.

iii : برای زبان‌های منظم، مستقل از متن و بازگشتی، الگوریتم عضویت وجود دارد.

iv: اگر  $L_1$  و  $L_2$  دو زبان مستقل از متن باشند آن‌گاه الگوریتمی وجود دارد که مشخص کند ایا  $L_1 = L_2$  است یا خیر.

III و II (۲) و I (۱) و IV (۴) و III (۳)

iii و i (۳)

۵. اگر  $A, B$  دو زبان DCF روی حروف الفبای  $\Sigma$  باشند و  $\Sigma \neq \$$ , آن‌گاه کدام گزاره نادرست است؟

۱) زبان  $\$A \cup B \subseteq (\{\$\} \cup \Sigma)^*$  یک زبان DCF است.

۲)  $A \cup B$  لزوماً یک زبان DCF نیست.

۳)  $\Sigma^* - A$  یک زبان DCF نیست.

۴) اگر  $B$  منظم باشد آن‌گاه  $A \cap B$  یک زبان DCF است.

۶. با فرض  $L_2 = \{a^n b^l \mid n, l \geq 0\}$  و  $L_1 = \{a^n b^l \mid n \neq l\}$  کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) زبان  $\overline{L_1}$  (متتم زبان  $L_1$ ) یک زبان منظم نمی‌باشد.

۲) زبان  $L_1 \cup L_2$  یک زبان منظم نمی‌باشد.

۳) زبان  $\overline{L_1 \cap L_2}$  یک زبان منظم می‌باشد.

۴) زبان  $L_1 \cap L_2$  یک زبان منظم می‌باشد.

۷. کدام یک از عبارات زیر صحیح نیست؟

۱) خانواده زبان‌های مستقل از بافت (Context free) تحت عملگرهای اجتماع (Union) (الحق) (Concatenation) و بستار (Closure) بسته می‌باشد.

۲) خانواده زبان‌های مستقل از بافت تحت عملگرهای اشتراک (Intersection) و مکمل (Complement) بسته می‌باشد.

۳) الگوریتمی وجود دارد که بوسیله آن می‌توان تشخیص داد که یک زبان مستقل از بافت خالی و یا نامتناهی می‌باشد.

۴) اگر  $L_1$  یک زبان مستقل از بافت و  $L_2$  یک زبان منظم (regular) باشد در این صورت  $L_1 \cap L_2$  یک زبان مستقل از بافت می‌باشد.

۸. گرامر رو به رو را در نظر بگیرید. کدام یک از جملات زیر صحیح است؟

(علوم کامپیوتر ۸۷)

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid AA$

$A \rightarrow 0A \mid \lambda$

$A \rightarrow A1 \mid \lambda$

۱) گرامر فوق یک گرامر مستقل از متن است که زبان منظم تولید می‌کند.

۲) گرامر فوق یک گرامر مستقل از متن است که زبان نامنظم تولید می‌کند.

۳) گرامر فوق یک گرامر وابسته به متن است که زبان منظم تولید می‌کند.

۴) گرامر فوق یک گرامر خطی است که زبان نامنظم تولید می‌کند.

۹. همه زبان‌های زیر مستقل از متن هستند به جز:

(علوم کامپیوتر ۸۵)

$$L = \left\{ a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \cap \left\{ a^{2n} b^{2n} c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \quad (1)$$

$$L = \left\{ a^n b^{2n} c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \cap \left\{ a^n b^m c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \quad (2)$$

$$L = \left\{ a^{2n} b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \quad (3)$$

$$L = \left\{ a^{2m} b^n c^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\} \quad (4)$$

$$L = \left\{ a^m c b^n \mid m \neq n \right\} \cup \left\{ a^m d b^{2m} \mid m \geq 0 \right\} \quad (10)$$

(دولتی مهندسی کامپیوتر ۸۶)

- (۱) هر همومورفیسم  $L$  با یک PDA معین شناسایی می‌شود.
- (۲) یک گرامر غیر مبهم برای زبان  $L$  موجود است.
- (۳) یک PDA نامعین برای شناسایی  $L$  موجود است.
- (۴) همه موارد

## حل تشریحی

۱. گزینه ۱ درست است.

زبان‌های مستقل از متن تحت عمل اشتراک منظم بسته هستند و لذا اشتراک یک زبان منظم و مستقل از متن حتماً مستقل از متن است ولی ممکن است منظم نباشد لذا جمله I نادرست است. از آنجا که اجتماع دو زبان مستقل از متن حتماً مستقل از متن است لذا جمله II درست است. و همچنین چون اشتراک دو زبان مستقل از متن ممکن است مستقل از متن نباشد لذا جمله III نادرست است. گزینه ۱ صحیح است.

۲. گزینه ۲ درست است.

بر اساس خصوصیات زبان‌های منظم، خطی و مستقل از متن گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۳. گزینه ۴ درست است.

بر اساس خصوصیات زبان‌های منظم، خطی و مستقل از متن گزینه ۴ صحیح است.

۴. گزینه ۳ درست است.

بر اساس مطالب مطرح شده در درس، الگوریتم‌های مورد نظر در i و iii وجود دارند پس گزینه ۳ صحیح است. ولی الگوریتم‌های ii و iv وجود ندارند.

۵. گزینه ۳ درست است.

از آنجا که مکمل زبان‌های DCF خودشان DCF هستند لذا جمله ۳ نادرست است. اجتماع دو زبان DCF ممکن است DCF نباشد لذا جمله ۲ درست است. زبان  $A \cup B$  نیز DCF است چون رشته‌هایی از آن که با  $\$$  شروع می‌شوند باید داخل A باشند و بقیه رشته‌ها باید داخل B باشند. همچنین از آنجا که زبان‌های DCF تحت اشتراک منظم بسته هستند لذا جمله ۴ درست است و لذا گزینه ۳ صحیح است.

۶. گزینه ۱ درست است.

از آنجا که زبان  $L_1$  نامنظم است لذا مکمل آن نیز نمی‌تواند منظم باشد لذا گزینه ۱ صحیح است. اجتماع دو زبان مورد نظر یعنی  $L_1 \cup L_2$  برابر با زبان  $L_2$  است که منظم است پس گزینه ۲ نادرست است. زبان  $\overline{L_1 \cap L_2} - L_2$  است که  $\left\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \right\}$  است و منظم نمی‌باشد لذا گزینه ۳ نادرست است. زبان  $L_1 \cap L_2$  نیز برابر با  $L_1$  است که منظم نمی‌باشد لذا گزینه ۴ نیز نادرست است.

۷. گزینه ۲ درست است.

از آنجا که می‌دانیم زبان‌های مستقل از متن تحت عملگرهای اشتراک و مکمل‌گیری بسته نیستند لذا گزینه ۲ صحیح است.

۸. گزینه ۲ درست است.

با در نظر گرفتن گرامر در حالت فعلی گزینه ۲ صحیح است. ولی اگر به جای قاعده  $A \rightarrow A1 \rightarrow A$  قاعده  $A \rightarrow 1A$  را قرار دهیم گزینه ۱ صحیح خواهد بود.

۹. گزینه ۲ درست است.

گزینه ۱ برابر با زبان  $\{a^{2n}b^{2n}c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$  است و لذا مستقل از متن است. گزینه ۳ و ۴ نیز مستقل از متن هستند ولی گزینه ۲ برابر با زبان  $\{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$  است که مستقل از متن نیست پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۰. گزینه ۱ درست است.

از آنجا که زبان  $L$  یک زبان مستقل از متن نامعین است و هر همومورفیسم آن نیز ممکن است مستقل از متن نامعین باشد لذا گزینه ۱ صحیح است.

## خودآزمایی

۱. گرامر منظمی ارائه نمایید که مبهم باشد.
۲. گرامر ساده‌ای ارائه نمایید که منظم نباشد.
۳. یک گرامر  $LL(3)$  ارائه نمایید که منظم باشد.
۴. یک گرامر  $LL(3)$  ارائه نمایید که منظم نباشد.
۵. ثابت کنید گرامرهای ساده مبهم نیستند.
۶. نشان دهید خانواده زبان‌های مستقل از متن معین تحت عمل هم‌ریختی بسته نیست.
۷. با مفروض بودن گرامر  $G$ ، الگوریتمی جهت تشخیص  $\lambda \in L(G)$  ارائه نمایید.