نظریه زبانها و ماشین‌ها

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

کتاب درسی:

An Introduction to Formal Languages and Automata

by: P. Linz

فصل اوّل

مقدمات

فصل اوّل : مقدمات

- الفبا (Alphabet)

- مجموعه‌ای متناهی از علامات

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

- رشته (Sentence, word, String)

- دنباله‌ای از علامات

'001' , '111' , '00'

- طول رشته (length)

$x = '001'$

$|x| = 3$

- رشته تهی (empty string)

$|\lambda| = 0$

- عملگرها روی رشته‌ها (operators on strings)

- Concatenation

$x = '001'$, $y = '111'$, $x.y = xy = '001111'$

$x\lambda = \lambda x = x$

$|xy| = |x| + |y|$, $xy \neq yx$

- عملگر معکوس (Reversal)

$x = '1011'\ ,\ x^R = '1101'$

- چند تعریف برگشتی برای عملگر معکوس

$\underbrace{\text{تعریف برگشتی}}_{\text{Recursive Definition}}$

- تعریف اوّل :

$x = a_1 a_2 \cdots a_n$

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^R = \begin{cases} \text{Basis: } & a_n \text{ if } n=1 \\ \text{recursive step: } & a_n (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^R \end{cases}$$

$x = 'abcde'$

$$(abcde)^R = e(abcd)^R = ed(abc)^R = edc(ab)^R$$
$$= edcb(a)^R$$
$$= edcba$$

- تعریف دوّم :

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^R = \begin{cases} \text{Basis: } & a_n \text{ if } n=1 \\ \text{recursive step: } & (a_2 a_3 \cdots a_n)^R a_1 \end{cases}$$

$$(abcde)^R = (bcde)^R a = (cde)^R ba = (de)^R cba$$
$$= (e)^R dcba$$
$$= edcba$$

تعریف سوم:

$$Z = xy$$

$$Z^R = y^R x^R$$

$$(xy)^R = \begin{cases} y^R x & y\ |x|=1 \quad \text{(پایه)} \\ y^R x^R & \text{(مرحله برگشتی)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(abcdef)^R &= (def)^R (abc)^R \\ &= (ef)^R d\,(abc)^R \\ &= fed\,(abc)^R \\ &\ \vdots \\ &= fedcba\end{aligned}$$

$Z = uxy \quad , \quad Z^R = y^R (ux)^R = y^R x^R u^R$

$$Z^R = y^R x^R u^R$$

$$\vdots$$

پالیندروم (Palindrome)

'abba' , 'ababa'

- رشته x یک پالیندروم است اگر

$$x = x^R$$

* - نشان دهید اگر x یک پالیندروم است در این صورت xx هم یک پالیندروم است.

فرض : $x = x^R$

حکم : $(xx) = (xx)^R$

$$(xx)^R = x^R x^R = xx$$

* - نشان دهید اگر xx یک پالیندروم در این صورت x یک پالیندروم است.

x یک پالیندروم است اگر و فقط اگر xx یک پالیندروم است ✓

x یک پالیندروم است اگر و فقط اگر $\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ مرتبه}}$ یک پالیندروم است ✓

$\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ مرتبه}}$ یک پالیندروم است $\Longleftrightarrow$ x یک پالیندروم است

نکته :

اگر $w = xyz$ آنگاه y یک زیر رشته w است. اگر x برابر رشته تهی (λ) باشد، آنگاه y یک پیشوند (prefix) برای w می‌باشد و درصورتی که z برابر λ باشد، آنگاه y یک پسوند (postfix) برای w می‌باشد.

- رشته w به طول n دارای $n+1$ پیشوند و همچنین $n+1$ پسوند است.
- پیشوندهای رشته abc عبارتند از λ, a, ab, abc
- پسوندهای رشته abc عبارتند از λ, c, bc, abc
- زیر رشته‌های رشته abc عبارتند از $\lambda, a, b, c, ab, bc, abc$
- اگر A مجموعه پیشوندهای رشته w، B مجموعه پسوندهای رشته w و C مجموعه زیر رشته‌های رشته w روی الفبای Σ باشد در این صورت

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup B \subseteq C \\ A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{array}}$$

سؤال: آیا رشته w روی الفبای Σ وجود دارد بطوریکه $A = B = C$ ؟

زبان (Language)

- مجموعه‌ای محدود یا نامحدود از رشته‌ها روی الفبای Σ

$\Sigma = \{0,1\}$

$L_1 = \{000, 10, 01\}$ زبان متناهی (Finite Language)

$L_2 = \{0, 00, 000, 0000, \ldots\} = \{0^n \mid n \geq 1\}$

زبان نامتناهی (Infinite Lang.)

$L_3 = \{\lambda, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

$= \{(01)^n \mid n \geq 0\}$

- عملگرها روی زبانها

اجتماع $L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ or } x \in L_2\}$

اشتراک $L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ and } x \in L_2\}$

Concatenation $L_1 . L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ and } y \in L_2\}$

$L_1 = \{00, 11\}, \quad L_2 = \{10, 01\}$

$L_1 L_2 = \{0010, 0001, 1110, 1101\}$

✓ $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

✓ $|L_1 L_2| \leq |L_1| \times |L_2|$

$L_1 = \{0, 00\}, \quad L_2 = \{00, 000\}$

$L_1 L_2 = \{000, 0000, 0000, 00000\}$

$= \{000, 0000, 00000\}$

✓ $L . \{\lambda\} = \{\lambda\} L = L$

✓ $L . \{\} = \{\} L = \{\} \qquad L . \emptyset = \emptyset L = \emptyset$

- عملگر معکوس

$$L^R = \{x^R \mid x \in L\} = \{x \mid x^R \in L\}$$

$$L_1 = \{ab,\ bba,\ abb\}$$

$$L_1^R = \{ba,\ abb,\ bba\}$$

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$$
$$= \{\lambda,\ ab,\ aabb,\ aaabbb,\ \dots\}$$

$$L_2^R = \{b^n a^n \mid n \geqslant 0\}$$
$$= \{\lambda,\ ba,\ bbaa,\ bbbaaa,\ \dots\}$$

✓ $(L^R)^R = L$

✓ $\Big(\overbrace{((L^R)^R)^{\cdots}}^{\text{زوج}}\Big)^R = L$

✓ $\Big(\overbrace{((L^R)^R)^R{}^{\cdots}}^{\text{فرد}}\Big)^R = L^R$

نکته

$$\Sigma = \{0,1\}$$

مجموعه تمام رشته‌ها تشکیل از ۰ و ۱ که دارای طول ۲ هستند

$$\Sigma\Sigma = \Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

مجموعه تمام رشته‌ها تشکیل از ۰ و ۱ که دارای طول ۳ هستند

$$\Sigma^2\Sigma = \Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

$$\Sigma^3\Sigma = \Sigma^4 = \{ \ \cdots \ \}$$

$$\vdots$$

مجموعه تمام رشته‌ها تشکیل از ۰ و ۱ که دارای طول n می‌باشند

$$\Sigma^{n-1}\Sigma = \Sigma^n = \{ \ \cdots \ \}$$

star closure of Σ

بستار ستاره Σ

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

$$= \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$$

$$\Sigma^0 = \{\lambda\}$$

Σ^* مجموعه تمام رشته‌هایی است که از علامات در Σ تشکیل شده‌اند.

positive closure of Σ

بستار مثبت Σ

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

$$= \Sigma \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\} \\ \Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\} \end{array}}$$

ادامه عملگرها روی زبانها

- عملگر متمم

$$\overline{L} = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ and } x \notin L\}$$
$$= \Sigma^* - L$$

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$
$$\overline{L} = \{0^n 1^m \mid n \neq m\} \cup \{0,1\}^* \{10\} \{0,1\}^*$$

- عملگر بستار ستاره (star closure)

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$
$$= L^0 \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

$$L^0 = \{\lambda\}$$
$$L^2 = \{xy \mid x, y \in L\}$$
$$L^3 = \{xyz \mid x, y, z \in L\}$$
$$\vdots$$

- بستار ستاره زبان L، مجموعه تمام رشته‌هایی است که از الحاق (Concatenation) صفر یا چند رشته از زبان L به دست می‌آید.

$$L^* = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ x = x_1 x_2 x_3 \cdots x_i,\ i \geq 0,\ \underset{1 \leq j \leq i}{x_j \in L}\}$$

- L^* همواره شامل رشته تهی می‌باشد.

بستار مثبت که

positive closure

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

$$= L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots$$

$$L^+ = \begin{cases} L^* & \text{اگر } \lambda \in L \\ L^* - \{\lambda\} & \text{اگر } \lambda \notin L \end{cases}$$

- اگر $\lambda \in L$ باشد آنگاه $L^+ = L^*$ می‌باشد

مسأله:

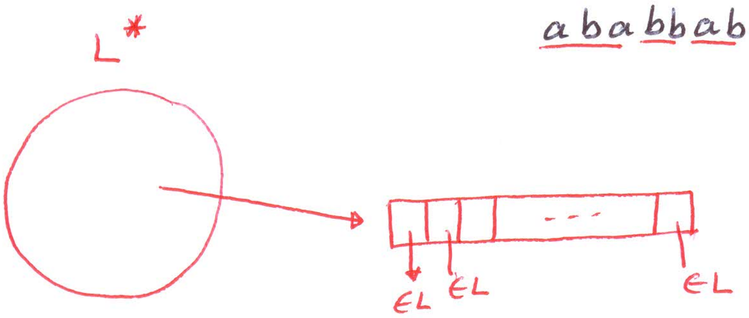
اگر زبان $L = \{bb, aba\}$ روی $\Sigma = \{a,b\}$ تعریف شده باشد، کدام یک از رشته‌ها به زبان L^* تعلق ندارد؟

الف: bbabaabaaba

ب: bbabababb

ج: bbbbbbaba

د: ababbababb



مسأله:

چه تعداد زبان L روی الفبای Σ وجود دارد در حالیکه L^* متناهی باشد،
یعنی $|L^*| < \infty$.

الف: بی شمار

ب: صفر

ج: دو

د: هیچکدام

- تنها برای دو زبان $L=\{\lambda\}$ و $L=\emptyset$ ، L^* متناهی است و برای
سایر زبانها متعلق به 2^{Σ^*} همواره L^* نامتناهی است.

$$\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$$

$$\emptyset^* = \{\lambda\}$$

اثبات کنید:

$$\boxed{L^* = L^*L^*}$$

$$L^* = \{x \mid x = x_1x_2\cdots x_i,\ i \geq 0,\ x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i\}$$

$$L^*L^* = \{xy \mid x \in L^*,\ x = x_1x_2\cdots x_i,\ i \geq 0,\ x_k \in L \text{ for } 1 \leq k \leq i$$
$$y \in L^*,\ y = y_1y_2\cdots y_j,\ j \geq 0,\ x_k \in L \text{ for } 1 \leq k \leq j\}$$

اثبات کنید:

$$\boxed{L^* = (L^*)^*}$$

$$L^* = \{x \mid x = x_1x_2\cdots x_i,\ i \geq 0,\ x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i\}$$

$$(L^*)^* = \{x \mid x = x_1x_2\cdots x_i,\ i \geq 0,\ x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i,$$
$$x_j = y_1y_2\cdots y_k,\ k \geq 0,\ x_p \in L \text{ for } 1 \leq p \leq k\}$$

اثبات کنید:

$$L_1 \subseteq L_2 \implies L_1^* \subseteq L_2^*$$

$$L_1 \subseteq L_2 \implies L_1^n \subseteq L_2^n$$

$$(L_1^n = \underbrace{L_1L_1\cdots L_1}_{n \text{ مرتبه}})$$

نکته:

- Σ^* مجموعه تمام رشته‌ها روی الفبای Σ یعنی مجموعه مرجع (Universal Set) است و برای هر زبان L روی الفبا Σ داریم $L \subseteq \Sigma^*$.

- مجموعه توانی Σ^* یعنی 2^{Σ^*} مجموعه تمام زبان‌ها قابل تعریف روی الفبای Σ است. به بیان دقیق‌تر

$$2^{\Sigma^*} = \{ L \mid L \subseteq \Sigma^* \}$$

- $$\forall L \subseteq \Sigma^* : L \cup \Sigma^* = \Sigma^*$$

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : (L \cup \{\lambda\}) \Sigma^* = \Sigma^* \{\lambda\} = \Sigma^* \Sigma^* = \Sigma^*$$

زبان $L=\{x \mid x\in\{0,1\}^*, |x| \bmod 2 = 0\}$ داده شده است.

آیا $L=L^*$ می باشد یا نه؟

$$L \overset{?}{=} L^*$$

$L \subset L^*$

$x \in L \Rightarrow x \in L^*$

هر رشته ای تشکیل از 0 و یا 1 که دارای طول زوج می باشد عضوی L^* می باشد

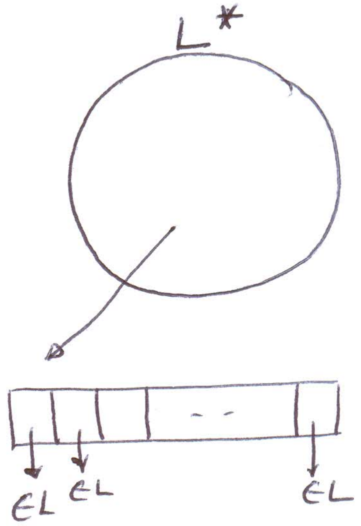
$L^* \subset L$

$x \in L^* \Rightarrow x \in L$

هر عضو از L^* رشته ای است تشکیل از 0 و یا 1 که دارای طول زوج است

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

$$\boxed{L \subset L^*}$$



$$\Rightarrow \quad L = L^*$$

زبان $L=\{x \mid x\in\{a,b\}^*,\ n_a(x)=n_b(x)\}$ را در نظر بگیرید. آیا $L=L^*$ می‌باشد یا نه؟

$$L=L^*$$

$$L\subset L^* \qquad\qquad L^*\subset L$$

$x\in L \Longrightarrow x\in L^*$

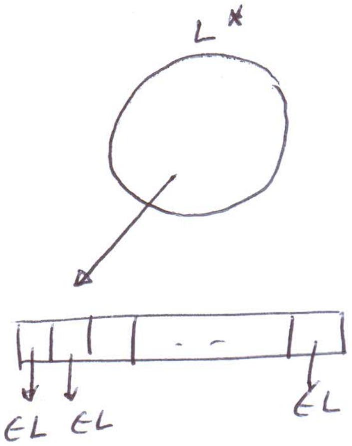
$\boxed{\text{هر رشته‌ای که دارای تعداد مساوی } a \text{ و } b \text{ می‌باشد عضو از } L^* \text{ می‌باشد.}}$

$x\in L^* \Longrightarrow x\in L$

$\boxed{\text{هر رشته‌ای از } L^* \text{ دارای تعداد مساوی } a \text{ و } b \text{ می‌باشد.}}$

$$L^*=\bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$
$$=L^0\cup L^1\cup L^2\cup\dots$$

$$L\subset L^*$$



$$\Longrightarrow \quad L=L^*$$

زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 2 = 0 \text{ and } |x| \bmod 3 = 0\}$$

$$= \{x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 6 = 0\}$$

آیا $L = L^*$ می‌باشد یا نه؟

$$L = L^*$$

$L \subset L^*$

$x \in L \Rightarrow x \in L^*$

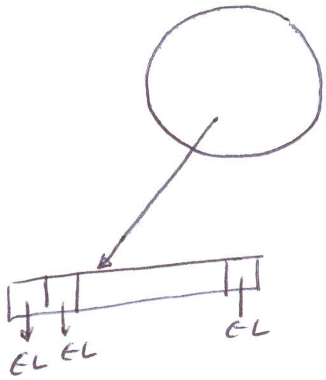
هر رشته‌ی تشکیل از a و b که طول آن مضربی از ۶ می‌باشد عضوی از L^* است.

$L^* \subset L$

$x \in L^* \Rightarrow x \in L$

هر عضو از L^* طولش مضربی از ۶ می‌باشد.

✓ $L \subset L^*$



$$\Longrightarrow \quad L = L^*$$

زبان $L = \{x \mid x = uv,\ u,v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\}$ را در نظر بگیرید. آیا برای این زبان $L = L^*$ می‌باشد یا نه؟

$$L = \{x \mid x = uv,\ u,v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 2 = 0\}$$

✓ زبان $L=\{x \mid x\in\{a,b\}^*,\ |x| \bmod 2=1\}$ را در نظر بگیرید. آیا $L=L^*$ می‌باشد یا نه؟

$$L = L^*$$

$L \subset L^*$ — $x\in L \Longrightarrow x\in L^*$

$L^* \subset L$ — $x\in L^* \Longrightarrow x\in L$

$aba \in L$

$bbb \in L$

$ababbb \in L^*$ $\qquad \{ababbb \in L^2\}$

$\Longrightarrow L \neq L^*$

✓ زبان $L=\{x \mid x\in\{a,b\}^*,\ |x| \bmod 2=0 \text{ or } |x| \bmod 3=0\}$ را در نظر بگیرید. آیا $L=L^*$ می‌باشد یا نه؟

$ab \in L$

$bbb \in L$

$abbbb \in L^*$ $\qquad \{ababbb \in L^2\}$

$\Longrightarrow L \neq L^*$

زبان $L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*,\ |x| \bmod 2 = 1\}$ را در نظر بگیرید. آیا $L = L^*$ می‌باشد یا نه؟

$$L = L^*$$

$$L \subset L^* \qquad\qquad L^* \subset L$$

$$x \in L \Longrightarrow x \in L^* \qquad\qquad x \in L^* \Longrightarrow x \in L$$

$aba \in L$

$bbb \in L$

$ababbb \in L^*$ $\qquad \{ababbb \in L^2\}$

$$\Longrightarrow L \neq L^*$$

زبان $L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*,\ |x| \bmod 2 = 0$ or $|x| \bmod 3 = 0\}$ را در نظر بگیرید. آیا $L = L^*$ می‌باشد یا نه؟

$ab \in L$

$bbb \in L$

$abbbb \in L^*$ $\qquad \{abbbb \in L^2\}$

$$\Longrightarrow L \neq L^*$$

- برای کدام یک از زبانهای زیر $L = L^*$ می باشد؟

✓ $L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*,\ |x| \text{ is a prime number}\}$

✓ $L = \{x \mid x = uv,\ u = v^R,\ u, v \in \{a,b\}^*\}$

$abba \in L$
$bbbb \in L$
$abbabbbb \in L^*$ $\{abbabbbb \in L^2\}$ $\Rightarrow L \neq L^*$

✓ $L = \{x \mid x = uv,\ u = v,\ u, v \in \{a,b\}^*\}$

$abab \in L$
$bbbb \in L$
$ababbbbb \in L^*$ $\{ababbbbb \in L^2\}$ $\Rightarrow L \neq L^*$

✓ $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

✓ $L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*,\ |x| \bmod 3 = 0\}$

✓ $L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*,\ x = x^R\}$

گرامر (Grammar) : تعریف زبان

بصورت یک چهارتایی تعریف می شود.

$$G = (V, T, P, S)$$

- **V**: مجموعه متغیرها (علامات غیرنهائی)
  Non-terminal symbols, Variables
  - از حروف بزرگ استفاده می شود
- **T**: مجموعه علامات نهائی
  Terminal symbols
  - از حروف کوچک استفاده می شود
- **P**: مجموعه قواعد
  rewritting rules, rules, productions
- **S**: starting symbol
  علامت شروع
  $S \in V$

$$\alpha \to \beta$$

β می تواند جایگزین α شود.

α می تواند با β جایگزین شود

مثالی از یک گرامر :

$G = (V, T, P, S)$

$V = \{S, A, B\}$

$T = \{a, b\}$

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow AB & 1 \\ A \rightarrow aA & 2 \\ A \rightarrow a & 3 \\ B \rightarrow bB & 4 \\ B \rightarrow b & 5 \end{array} \right\}$$

$\mathcal{S} = S$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aAB \\ &\Rightarrow aaAB \\ &\Rightarrow aaaB \\ &\Rightarrow aaabB \\ &\Rightarrow aaabbB \\ &\Rightarrow aaabbb \end{aligned}$$

اشتقاق برای جمله aaabbb

derivation

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aB \\ &\Rightarrow ab \end{aligned}$$

اشتقاق برای جمله ab

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aB \\ &\Rightarrow abB \\ &\Rightarrow abb \end{aligned}$$

اشتقاق برای جمله abb

$\Rightarrow$	$\overset{*}{\Rightarrow}$
اشتقاق در یک مرحله	اشتقاق در صفر یا بیشتر مرحله

$aAB \Rightarrow aaAB$

$aaabB \Rightarrow aaabbB$

$aAB \overset{*}{\Rightarrow} aaabB$

$S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbb$

- این گرامر چه زبانی را تعریف می‌کند.

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ \boxed{\begin{array}{l} A \to aA \\ A \to a \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} B \to bB \\ B \to b \end{array}} \end{array} \right\}$$

direct recursion

direct recursion

A	B

$A \to aA$ $\quad$ $B \to bB$

$A \to a$ $\quad$ $B \to b$

تعریف برگشتی برای رشته‌ها از گونه A

تعریف برگشتی برای رشته‌ها از گونه B

Recursive Def.

$$A \Rightarrow a$$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aa$$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$$

$$\vdots$$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow a^n \quad \text{for } n \geq 1$$

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$$

$$B \Rightarrow b$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bb$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow bbb$$

$$\vdots$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow b^n \quad \text{for } n \geq 1$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \longrightarrow AB \\ \boxed{\begin{array}{l} A \longrightarrow aC \, , \quad C \longrightarrow aA \\ A \longrightarrow a \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} B \longrightarrow bD \, , \quad D \longrightarrow bB \\ D \longrightarrow b \end{array}} \end{array} \right\}$$

Indirect recursion

A	B

$$\boxed{\begin{array}{l} B \rightarrow bD \\ D \rightarrow bB \\ D \rightarrow b \end{array}}$$

$$B \Longrightarrow bD \Longrightarrow bb$$

$$B \Longrightarrow bD \Longrightarrow bbB \Longrightarrow bbbD \Longrightarrow bbbb$$

$$B \Longrightarrow bD \Longrightarrow bbB \Longrightarrow bbbD \Longrightarrow bbbbB \Longrightarrow bbbbbD \Longrightarrow bbbbbb$$

$$\vdots$$

$$B \Longrightarrow bD \Longrightarrow bbB \Longrightarrow bbbD \cdots\cdots \Longrightarrow b^{2k} , \; k \geq 1$$

$$L = \left\{ a^{2k+1} b^{2k'} \;\middle|\; k \geq 0 , \; k' \geq 1 \right\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aA \\ A \to a \\ B \to bB \\ B \to b \end{array} \right\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ \boxed{A \to aC,\ C \to aA,\ A \to a} \\ \boxed{\begin{array}{l} B \to bB \\ B \to b \end{array}} \end{array} \right\}$$

Indirect recursion

Direct recursion

A	B

$$\boxed{\begin{array}{l} A \to aC \\ C \to aA \\ A \to a \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} B \to bB \\ B \to b \end{array}}$$

$A \Rightarrow a$

$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$

$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \Rightarrow aaaC \Rightarrow aaaaA \Rightarrow aaaaaa$

$\vdots$

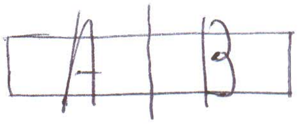
$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \cdots\cdots \Rightarrow a^{2n+1} \quad n \geq 0$

$$L = \left\{ a^{2k+1} b^{n} \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 0 \\ n \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$P = \{ S \longrightarrow AB$$

$$\boxed{A \longrightarrow aC \,,\; C \longrightarrow aA \,,\; A \longrightarrow a}$$

$$\boxed{B \longrightarrow bB \,,\; B \longrightarrow b} \}$$



$$L_S = L_A \cdot L_B$$

$$L_A = \{ a^n \mid n \geq 1 \}$$

$$L_B = \{ b^n \mid n \geq 1 \}$$

$$L_S = \{ a^n \mid n \geq 1 \} \{ b^n \mid n \geq 1 \}$$

$$= \boxed{\{ a^n b^m \mid n, m \geq 1 \}}$$

$$\boxed{P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AS \mid \lambda \\ A \rightarrow a \mid b \end{array} \right\}}$$

$S \Rightarrow \lambda$

$S \Rightarrow AS \Rightarrow A \Rightarrow a$, $S \Rightarrow AS \Rightarrow A \Rightarrow b$

$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow AA$

$\begin{array}{cc} A & A \\ \downarrow & \downarrow \\ a & a \\ \text{یا} & \text{یا} \\ b & b \end{array} \Rightarrow aa, ab, bb, ba$

⋮

$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ مرتبه}}$ for $n \geq 0$

$$\boxed{L = \{ x \mid x \in \{a, b\}^* \}}$$

$$\boxed{P = \{ S \rightarrow aA,\ A \rightarrow bS,\ A \rightarrow a \}}$$

$S \Rightarrow aA \Rightarrow aa$

$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow abaA \Rightarrow abaa$

$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow abaA \Rightarrow ababS \Rightarrow ababaA \Rightarrow ababaa$

⋮

$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow \cdots \Rightarrow (ab)^n aa$ for $n \geq 0$

$$\boxed{L = \{ (ab)^n aa \mid n \geq 0 \}}$$

$$\boxed{P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aaS \mid aB \\ B \to bbB \mid \lambda \end{array} \right\}}$$

$$S \overset{*}{\Longrightarrow} (aa)^n S \Longrightarrow (aa)^n a B$$
$$\Longrightarrow (aa)^n a (bb)^m B$$
$$\Longrightarrow (aa)^n a (bb)^m \quad \text{for } n \geq 0,\ m \geq 0$$

$$\boxed{L = \{ (aa)^n a (bb)^m \mid n, m \geq 0 \}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L = \left\{ a^{2k+1} b^{2k'} \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 0 \\ k' \geq 0 \end{array} \right\}}$$

o — o — o — o — o —

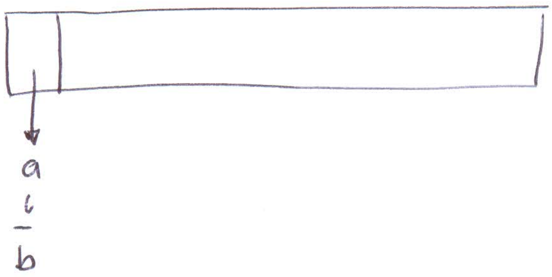
$$\boxed{P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aaS \mid aA \\ A \to Abb \mid b \end{array} \right.}$$

$$\boxed{L = \{ a^{2k+1} b^{2k'+1} \mid k, k' \geq 0 \}}$$

- یک گرامر برای زبان $\{a,b\}^+$ طراحی کنید :

مجموعه تمام رشته ها متشکل از a و یا b که دارای طول ۱ یا بیشتر باشد.

گرامر اول :



$$\boxed{S \longrightarrow aS \mid bS \mid a \mid b}$$

- اشتقاق برای رشته abaab :

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow abS \Rightarrow abaS \Rightarrow abaaS \Rightarrow abaab$$

گرامر دوم :

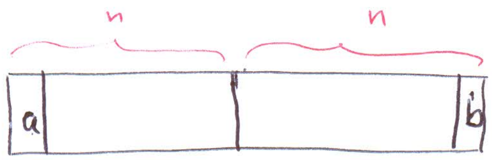
$$\boxed{S \longrightarrow Sa \mid Sb \mid a \mid b}$$

- اشتقاق برای رشته abaab :

$$S \Rightarrow Sb \Rightarrow Sab \Rightarrow Saab \Rightarrow Sbaab \Rightarrow abaab$$

یک گرامر برای زبان زیر طراحی کنید:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

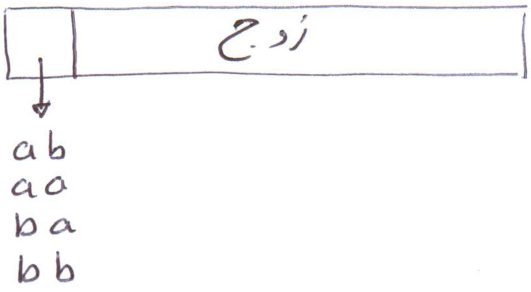


$$\boxed{S \longrightarrow aSb \mid \lambda}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb$$
$$\Rightarrow aaaaSbbbb$$
$$\Rightarrow aaaabbbb$$

یک گرامر برای زبان $L=\{w \mid w\in\{a,b\}^*,\ |w| \bmod 2=0\}$ بدست آورید

گرامر اول:



$$\boxed{S \rightarrow abS \mid aaS \mid baS \mid bbS \mid \lambda}$$

- اشتقاق برای رشته $aaabbb$:

$$S \Rightarrow aaS \Rightarrow aaabS \Rightarrow aaabbbS \Rightarrow aaabbb$$

$$L = L(G)$$

$L \subset L(G)$

$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$

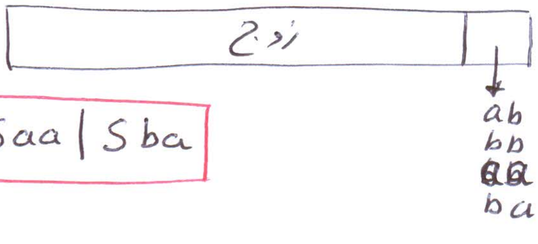
هر رشته با طول زوج توسط گرامر G تولید می‌شود.

$L(G) \subset L$

$x \in L(G) \Rightarrow x \in L$

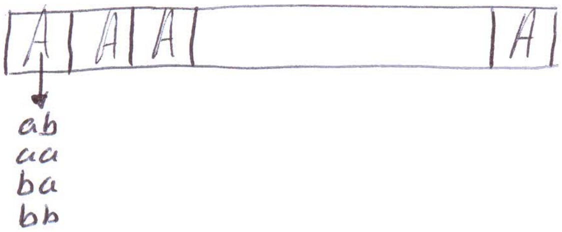
هر رشته‌ای که توسط گرامر G تولید می‌شود دارای طول زوج است.

نکته:



$$\boxed{S \rightarrow Sab \mid Sbb \mid Saa \mid Sba}$$

گرامر دوم :



$$\boxed{\begin{array}{l} S \rightarrow AS \mid \lambda \\ A \rightarrow ab \mid aa \mid ba \mid bb \end{array}}$$

- اشتقاق برای رشته aaabbb

$$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow AAAS \Rightarrow AAA$$
$$\Rightarrow aaAA$$
$$\Rightarrow aaabA$$
$$\Rightarrow aaabbb$$

$$L = L(G)$$

$L \subset L(G)$

$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$

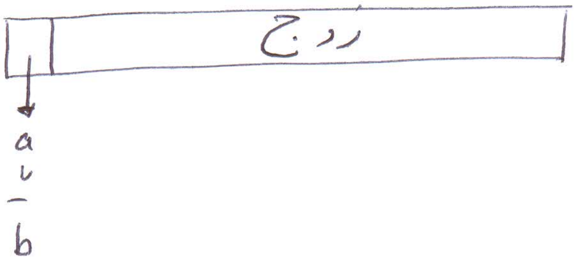
هر رشته با طول زوج توسط گرامر G تولید می شود

$L(G) \subset L$

$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$

هر رشته که توسط گرامر G تولید می شود دارای طول زوج است

- یک گرامر برای زبان $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ |w| \bmod 2 = 1\}$ بدست آورید.



starting symbol

$$\boxed{\begin{array}{l} S_o \rightarrow aS_e \mid bS_e \\ S_e \rightarrow aaS_e \mid abS_e \mid bbS_e \mid baS_e \mid \lambda \end{array}}$$

- اشتقاق aaaabba را:

$$S_o \Rightarrow aS_e \Rightarrow aaaS_e \Rightarrow aaaabS_e \Rightarrow aaaabbaS_e$$
$$\Rightarrow aaaabba$$

گرامر منظم برای زبان زیر

$$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*,\ |w| \bmod 2 = 0 \}$$

زوج	زوج
فرد	فرد

علامت شروع

$$\boxed{\begin{aligned} S_e &\rightarrow S_e S_e \mid S_o S_o \\ S_o &\rightarrow a S_e \mid b S_e \\ S_e &\rightarrow aa S_e \mid ab S_e \mid bb S_e \mid ba S_e \mid \lambda \end{aligned}}$$

نکته:

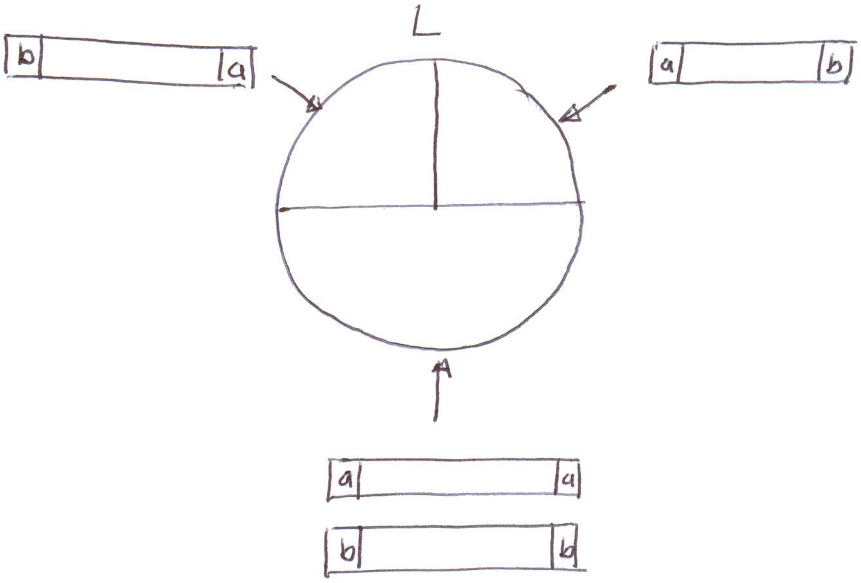
$$L(G) = \{ x \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \}$$

زبان گرامر G

یک گرامر برای زبان زیر بدست آورید.

$$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*,\ n_a(w) = n_b(w) \}$$

گرامر اول :



abba | bbabaa | ba

$$\boxed{S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \lambda}$$

$$L = L(G)$$

$L \subset L(G)$

$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$

هر رشته ای که دارای تعداد مساوی a و b باشد توسط گرامر G تولید می شود.

$L(G) \subset L$

$x \in L(G) \Rightarrow x \in L$

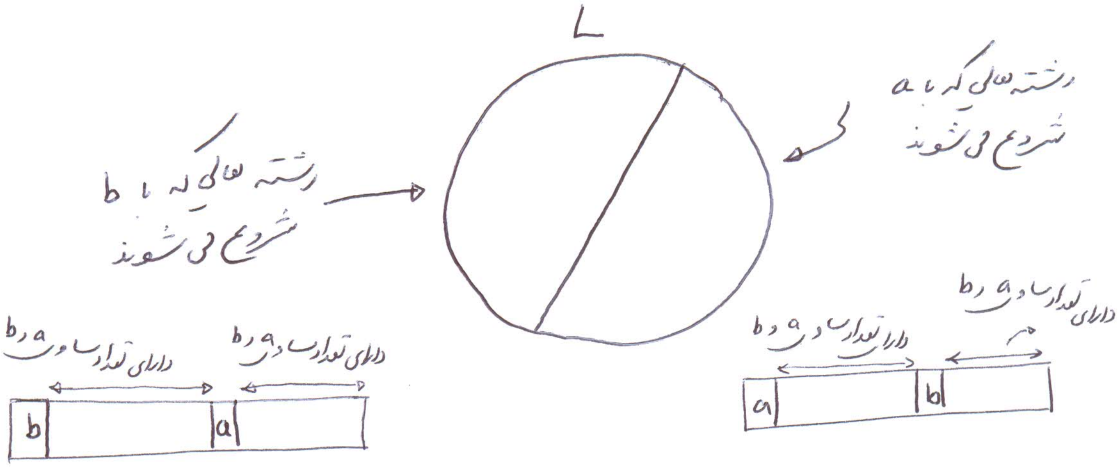
هر رشته ای که توسط گرامر G تولید می شود دارای تعداد مساوی a و b باشد.

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abbSaS \Rightarrow abbaS$$

$$\ldots \Rightarrow bbabaaba$$

abbabbabaaba اشتقاق رشته

گرامر دوم : برای زبان $L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*, n_a(w) = n_b(w) \}$



$$\underline{a}\ \underline{abba}\ \underline{b}\ \underline{aababb}$$

$$\boxed{S \longrightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda}$$

$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aaSbSbS \Rightarrow aabSbS \Rightarrow aabbSaSbS$

$\Rightarrow aabbaSbS$

$\Rightarrow \underline{a}abba\underline{b}S$

$\vdots$

$\Rightarrow aabbabaababb$

گرامر سوم: برای زبان

$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*, n_a(w) = n_b(w) \}$

$$\begin{array}{c} a\underline{b}\underline{a}bab \\ \downarrow \\ aa\underline{b}b\underline{a}b \\ \downarrow \\ aaabbb \\ \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} S \rightarrow ABS \mid \lambda \\ A \rightarrow a, \ B \rightarrow b \end{array}} \checkmark \\ \boxed{AB \rightarrow BA, \ BA \rightarrow AB} \checkmark \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \ S \Rightarrow ABS \Rightarrow ABABS &\Rightarrow A\underline{BA}BABS \\ &\Rightarrow AABB\underline{AB}S \\ &\Rightarrow AA\underline{BA}BBS \\ &\Rightarrow AAABBBS \\ &\Rightarrow AAABBB \\ &\ \ \vdots \\ &\overset{*}{\Rightarrow} \underline{aaabbb} \end{aligned}$$

اشتقاق رشته aaabbb

$\checkmark \ S \Rightarrow \ldots \ldots \ldots \Rightarrow \underline{bbbaaa}$

اشتقاق رشته bbbaaa

$\checkmark \ S \Rightarrow \ldots \ldots \ldots \Rightarrow \underline{bababa}$

$\checkmark \ S \Rightarrow \ldots \ldots \ldots \Rightarrow \underline{baaabb}$

گرامر زیر چه زبانی را توصیف می‌کند؟

G:

$$\boxed{\begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid \lambda \\ B \rightarrow b \mid bS \mid aBB \\ A \rightarrow a \mid aS \mid bAA \end{array}}$$

الف: $\{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ 2n_a(w) = n_b(w)\}$

ب: $\{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ n_a(w) = 2n_b(w)\}$

ج: $\{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ n_a(w) = n_b(w)\}$

د: هیچکدام

- برای هر یک رشته‌های زیر یک اشتقاق بدست آورید:

ab
abab
aaabbb
aabbab
babbbaaa

توضیحات: در این گرامر تولید هر a حتماً یک b نیز تولید خواهد کرد و تولید هر b حتماً یک a نیز تولید خواهد کرد و همچنین هر ترکیبی از a و b ها را نیز تولید می‌کند.

تعریف: دو گرامر G_1 و G_2 معادل (equivalent) هستند اگر

$$L(G_1) = L(G_2)$$

$$L(G_1) = L(G_2)$$

$L(G_1) \subset L(G_2)$

$x \in L(G_1) \Rightarrow x \in L(G_2)$

هر رشته‌ای که توسط G_1 تولید می‌شود توسط G_2 هم تولید می‌شود.

$L(G_2) \subset L(G_1)$

$x \in L(G_2) \Rightarrow x \in L(G_1)$

هر رشته‌ای که توسط G_2 تولید می‌شود توسط G_1 هم تولید می‌شود

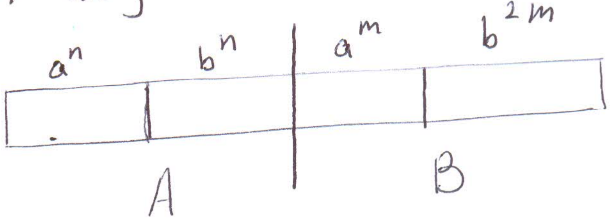
- نشان دهید گرامرهای G_1 و G_2 معادل هستند.

$G_1 : \quad S \rightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda$

$G_2 : \quad S \rightarrow SS \mid SSS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda$

- یک گرامر برای زبان زیر بدست آورید.

$$L = \{ a^n b^n a^m b^{2m} \mid n, m \geq 0 \}$$



$$S \to AB$$
$$A \to aAb \mid \lambda$$
$$B \to aBbb \mid \lambda$$

$$L_S = L_A \cdot L_B$$

$$L_A = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_B = \{ a^n b^{2n} \mid n \geq 0 \}$$

اشتقاق برای جمله aabbaabbbb

$$S \Rightarrow AB$$
$$\Rightarrow aAbB$$
$$\Rightarrow aaAbbB$$
$$\Rightarrow aabbB$$
$$\Rightarrow aabbaBbb$$
$$\Rightarrow aabbaaBbbbb$$
$$\Rightarrow aabbaabbbb$$

- یک گرامر برای زبان $L = \{a^m b^n \mid m>n\}$ بدست آورید

$$L = \{\underline{a^p}\,\underline{a^n b^n} \mid n \geq 0,\ p \geq 1\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aA \mid a \\ B &\rightarrow aBb \mid \lambda \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \\ &\Rightarrow aaaBb \\ &\Rightarrow aaaaBbb \\ &\Rightarrow aaaaaBbbb \\ &\Rightarrow aaaaabbb \end{aligned}$$

اشتقاق برای رشته aaaaabbb

$$L = \{\underline{a^n}\,\underline{a^p}\,\underline{b^n} \mid n \geq 0,\ p \geq 1\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid A \\ A &\rightarrow aA \mid a \end{aligned}}$$

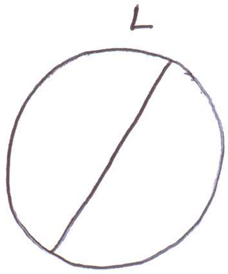
$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \\ &\Rightarrow aaa\underline{A}bbb \\ &\Rightarrow aaaa\underline{A}bbb \\ &\Rightarrow aaaaabbb \end{aligned}$$

اشتقاق برای رشته
aaaaabbb

یک گرامر برای زبان زیر بدست آورید:

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$$

$L_2 = \{a^n b^m \mid m > n\}$



$L_1 = \{a^n b^m \mid m < n\}$

$$L = L_1 \cup L_2$$

$S_2 \rightarrow CD$
$C \rightarrow aCb \mid \lambda$
$D \rightarrow bD \mid \lambda$

$S_1 \rightarrow AB$
$A \rightarrow aA \mid a$
$B \rightarrow aBb \mid \lambda$

$S \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow AB$
$A \rightarrow aA \mid a$
$B \rightarrow aBb \mid \lambda$

$S_2 \rightarrow CD$
$C \rightarrow aCb \mid \lambda$
$D \rightarrow bD \mid \lambda$