فصل چهارم : خصوصیات زبانهای منظم

قضیه pumping (تزریق)

سلب زبانهای منظم

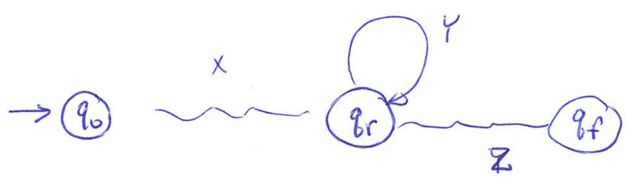
✓ - قضیه pumping (تزریق) برای زبانهای منظم

- اگر L یک زبان منظم نامتناهی باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت m وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $w \in L$ در حالی که $|w| \geq m$ باشد می‌توان رشته w را به صورت xyz تجزیه کرد (شرایط تجزیه $|xy| \leq m$ و $|y| \geq 1$) بطوریکه $xy^iz \in L$ برای $i=0,1,2,\ldots$

- با توجه به اینکه زبان L منظم است لزوماً برای آن یک $\overset{M_1}{\text{DFA}}$ با m حالت وجود دارد.

- در گراف انتقال ماشین M با m حالت (گره) طول طولانی‌ترین مسیر از حالت اولیه به حالت نهایی که در آن هیچ حالتی تکرار نشده باشد حداکثر $m-1$ است. لذا مسیر پذیرش هر رشته $w \in L$ با طول بزرگتر یا مساوی m لزوماً دارای لااقل یک حالت تکراری مانند q_r به صورت زیر است.

$$q_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{q_r} \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{q_r} \rightarrow \cdots \rightarrow q_f$$



$$\Rightarrow xy^iz \in L \quad \text{for } i=0,1,2,\ldots$$

$$q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q_3 \rightarrow q_4 \rightarrow q_4 \rightarrow q_3 \rightarrow q_f$$

- قضیه pumping

اگر زبان L منظم نامتناهی باشد $\Longrightarrow$ $\exists m \geq 0$

$$\forall w \in L,\ |w| \geq m$$

$$\exists x, y, z \in \Sigma^*,\ w = xyz,\ |xy| \leq m,\ |y| \geq 1$$

$$\forall i \in 0,1,2,3,\dots \mid w_i = xy^iz \in L$$

- نقیض گزاره شرطی فوق

$$\forall m \geq 0$$

$$\exists w \in L,\ |w| \geq m$$

$$\forall x, y, z \in \Sigma^*,\ w = xyz,\ |xy| \leq m,\ |y| \geq 1$$

$\exists i \in 0,1,2,\dots \mid w_i = xy^iz \notin L \Longrightarrow$ زبان L منظم نیست

- قضیه pumping (لم تزریق) برای زبانهای منظم نشان می‌دهد که تمام زبان‌های منظم از ویژگی خاصی برخوردار هستند، پس اگر بتوان نشان داد که یک زبان این ویژگی خاص را ندارد، تضمین می‌شود که آن زبان منظم نیست. این ویژگی بیان می‌کند، تمام رشته‌های موجود در زبان که دارای طول بزرگ‌تر یا مساوی طول خاصی به نام طول تزریق (pumping length) هستند را می‌توان تزریق کرد، یعنی هر رشته، طول بزرگ‌تر یا مساوی طول تزریق شامل قسمتی است که آن قسمت از رشته را می‌توان هر تعداد بار تکرار کرد و رشته‌هایی که تولید می‌شوند، خود عضو زبان هستند.

ـ نشان دهید زبان $\boxed{L=\{w \mid w\in\{a,b\}^*, n_a(w)=n_b(w)\}}$ منظم نیست.

من	رقیب	
$a^m b^m$	m	$\lvert xy\rvert \le m$ $\lvert y\rvert \ge 1$

$$\underbrace{aa\cdots a}_{m}\ \underbrace{bb\cdots b}_{m}$$

$$\begin{matrix} x & y & z \\ a^k & a^{k'} & a^{m-(k+k')}b^m \end{matrix}$$

$$\frac{a^k (a^{k'})^i a^{m-(k+k')} b^m}{a^{m+k'(i-1)} b^m}$$

برای $i=0$

$a^{m-k'} b^m \quad , \quad k'\ge 1$

ـ چون $k'\ge 1$ در نتیجه تعداد a ها در رشته $a^{m-k'}b^m$ از تعداد b ها کمتر خواهد بود.

- نشان دهید زبان $\boxed{L=\{ww^R \mid w\in\{a,b\}^*\}}$ از نوع سوم نیست.

من

$a^m b^m b^m a^m$

رقیب

m

$\underbrace{aa\cdots a}_{m}\underbrace{bb\cdots b}_{m}\underbrace{aa\cdots a}_{m}\underbrace{bb\cdots b}_{m}$

$x\ y\ z$

$a^{k'}\ a^{k}\ a^{k''} b^m a^m b^m$

$a^{k'}(a^{k})^{i} a^{k''} b^m a^m b^m$

$i=0$

$\underline{aa\cdots a}\ \underline{bbb\cdots b}\ \underline{aa\cdots a}\ \underline{bb\cdots b}$

✓ ?

برای $i=0$ رشته حاصل دیگر فرم ww^R را ندارد.

نشان دهید زبان $\boxed{L = \{a^{n!} \mid n \geq 0\}}$ منظم نیست.

من

رقیب

$a^{m!}$

m

$\underbrace{aaa \ldots a}_{m!}$

$x\,y\,z$

$\underline{a^{k}}\;\underline{a^{k'}}\;\underline{a^{m!-(k+k')}}$

$a^{k}(a^{k'})^{i}a^{m!-(k+k')}$

برای $i=0$

$a^{m!-k'}$ ، $m \geq k' \geq 1$

$\boxed{(m-1)! < m!-k' < m!}$ برای $m>2$

پس زبان $\hat{L}=\{a^{n!} \mid n \geq 2\}$ یک زبان نامنظم است.

از طرفی $L=\hat{L}\cup\{a\}$ است. اگر به زبان نامنظمی تعداد محدودی رشته اضافه شود زبان حاصل لزوماً نامنظم است، پس L نیز نامنظم است.

نشان دهید زبان $\boxed{L=\{a^{n^2} \mid n\geq 0\}}$ نامنظم است.

من	رقیب
a^{m^2}	m

$$\underbrace{aa\cdots\cdots a}_{m^2}$$

$$\overset{x}{a^{k}}\ \overset{y}{a^{k'}}\ \overset{z}{a^{m^2-(k+k')}}$$

$$a^{k}(a^{k'})^{i}a^{m^2-(k+k')}$$

$$a^{m^2+k'(i-1)}$$

برای $i=0$

$$a^{m^2-k'}$$

- با توجه به اینکه $1\leq k'\leq m$ داریم:

$$\boxed{(m-1)^2 < m^2-k' < m^2}$$

$$m^2-1<m^2 \quad ✓$$

$$(m-1)^2 < m^2-m \Rightarrow m^2-2m+1 < m^2-m$$
$$\Rightarrow -2m+1<-m \Rightarrow m>1$$

پس برای $m\geq 2$ نابرابر $(m-1)^2<m^2-m$ برقرار بوده

- نتیجه اینکه m^2-k' مجذور هیچ عددی نیست و رشته $a^{m^2-k'}$ عضو زبان L نمی‌باشد، بنابراین زبان $\hat{L}=\{a^{n^2} \mid n\geq 2\}$ نامنظم است، لذا $L=\{a^{n^2} \mid n\geq 0\}=\hat{L}\cup\{\lambda, a\}$ نیز نامنظم است.

- نشان دهید $\boxed{L=\{a^nb^n \mid n\geq 0\}}$ از نوع سوم (منظم) نیست.

رقیب m

من a^mb^m

$\underbrace{aaa\cdots a}_{m}\underbrace{bbb\cdots b}_{m}$

شرایط تجزیه $|xy|\leq m$
$|y|\geq 1$

$x\ y\ z$

$a^{k'}\ a^{k}\ a^{k''}b^{m}$

$1\leq k\leq m$ $\quad a^{k'}(a^{k})^{i}a^{k''}b^{m}$

$i=0 \Rightarrow a^{m-k}b^{m}$

- چون $k\geq 1$ درنتیجه تعداد a ها در رشته $a^{m-k}b^{m}$ از تعداد b ها کمتر خواهد بود.

۳۶ - قضیه pumping برای زبانهای منظم

- اگر L یک زبان منظم نامتناهی باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت m وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $w\in L$ درحالی که $|w|\geq m$ باشد می‌توان رشته w را به صورت xyz تجزیه کرد $\boxed{(|y|\geq 1,\ |yz|\leq m \text{ شرایط تجزیه})}$

بطوریکه $xy^{i}z\in L$ برای $i=0,1,2,\cdots$

- نشان دهید زبان $\boxed{L=\{w \mid w\in\{a,b\}^*,\ w=w^R\}}$ منظم نیست.

من	رقیب
$a^m b a^m$	m

$$a^m b a^m \longrightarrow \underbrace{aa\cdots a}_{m}\,b\,\underbrace{aa\cdots a}_{m}$$

$$xyz:\quad x=a^k,\quad y=a^{k'},\quad z=a^{m-(k+k')}ba^m$$

$$a^k(a^{k'})^i a^{m-(k+k')} b a^m$$

$$= a^{m+k'(i-1)} b a^m$$

برای $i=0$

$$a^{m-k'} b a^m$$

با توجه به اینکه $m \ge k' \ge 1$ بوده، رشته $a^{m-k'}ba^m$ عضو زبان L نیست.
پس L نامنظم است.

نشان دهید زبان $\boxed{L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}}$ منظم نیست.

من — رقیب

a^p — اولین عدد اول بزرگتر یا مساوی m

m

$$\underbrace{aaa\cdots\cdots a}_{p}$$

$$x\ y\ z$$

$$a^k\ a^{k'}\ a^{p-(k+k')}$$

$m \geq k' \geq 1$

$$a^k (a^{k'})^i a^{p-(k+k')}$$

$$a^{p+k'(i-1)}$$

اگر $i = p+1$

$$a^{p+k'(p+1-1)} = a^{p(k'+1)}$$

رشته $a^{p(k'+1)}$ به زبان L تعلق ندارد

زیرا عدد $p(k'+1)$ غیر اول است.

- نشان دهید زبان $\boxed{L = \{a^i b^j \mid i+j \text{ is a prime}\}}$ نامنظم است.

$h(a) = a$

$h(b) = a$

$h(L) = \{a^i b^j \mid i+j \text{ is a prime}\} = \{a^p \mid p \text{ is a prime}\}$

- زبان $\{a^p \mid p \text{ is a prime}\}$ قبلاً نشان داده شد که نامنظم است.

- نشان دهید زبان $\boxed{L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n,k \geq 0\}}$ نامنظم است.

$$h(a) = a, \quad h(b) = a, \quad h(c) = b$$

$$h(L) = \{a^n a^k b^{n+k} \mid n,k \geq 0\} = \{a^{n+k} b^{n+k} \mid n+k \geq 0\}$$

$$= \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$$

- اثبات از طریق برهان خلف

- نشان دهید زبان $\boxed{L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}}$ نامنظم است.

$$\bar{L} \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- اثبات از طریق برهان خلف

- فرض می‌کنیم L منظم باشد (فرض خلف)، پس $\bar{L}$ نیز منظم است.
از طرفی زبان‌های منظم تحت عمل اشتراک بسته‌اند، بنابراین اشتراک
$\bar{L}$ با زبان منظم $L(a^* b^*)$ باید منظم باشد

$$\bar{L} \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

درصورتی که حاصل اشتراک زبان نامنظم $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ بوده و این تناقض
است، پس فرض اشتباه بوده و زبان L نامنظم است

تعیین کنید کدام یک از زبانها زیر منتظم و کدام یک نامنتظم است است ($\Sigma=\{a,b\}$) ؟

$$L_1=\{ww^Rv \mid v,w\in\{a,b\}^*\}$$

ـ اگر w برابر λ در نظر گرفته شود v می تواند هر رشته ای روی الفبای Σ باشد، بنابراین L_1 برابر Σ^* بوده و منتظم است.

$$L_2=\{uww^R \mid u,w\in\{a,b\}^*\}$$

$$L_3=\{uww^Rv \mid u,v,w\in\{a,b\}^*\}$$

$$L_4=\{uww^Rv \mid u,w,v\in\{a,b\}^*,\ |u|\geq|v|$$

ـ L_2 ، L_3 و L_4 همان Σ^* بوده و منتظم است.

$$L_5=\{uww^Rv \mid u,v,w\in\Sigma^+,\ |w|\leq 2\}$$

$$R_5=\Sigma^+(aa+bb+aaaa+abba+baab+bbbb)\Sigma^+$$

ـ عبارت منتظم R_5 زبان L_5 را توصیف می کند. پس L_5 منتظم است.

$$L_6=\{wvw \mid v,w\in\{a,b\}^*\}$$

ـ زبان L_6 نمایشی دیگر از زبان منتظم Σ^* است، بنابراین این زبان منتظم است.

- اگر L_1 و L_2 زبانهای منتظم باشند نشان دهید که زبان زیر منتظم است.

$$L = \{ w \mid w \in L_1 \text{ and } w^R \in L_2 \}$$

$$= L_1 \cap L_2^R$$

- نشان دهید اگر L_1 و L_2 زبانهای غیر منتظم باشند، الزاماً $L_1 \cup L_2$ غیر منتظم نمی‌باشد.

$$L_1 = \{ a^n b^m \mid n = m \}$$

$$L_2 = \{ a^n b^m \mid n \neq m \}$$

$$L_1 \cup L_2 = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0 \}$$

- نشان دهید زبان زیر منظم نیست:

$$L=\{a^n b^l a^k \mid n>5,\ l>3,\ k\le l\}$$

- اگر ما رشته $aaaaaab^m a^m$ را انتخاب کنیم، رقیب انتخاب های مختلفی دارد. اگر y فقط از a ها باشد، ما می‌توانیم $i=0$ را استفاده کرده و شرط $n>5$ را نقض کنیم. اگر y شامل b ها باشد، ما می‌توانیم شرط $k\le l$ را نقض کنیم.

- نشان دهید زبان

$$L=\{uww^R v \mid u,v,w\in\{a,b\}^+\}$$

یک زبان منظم است.

$$R=(a+b)(a+b)^*(aa+bb)(a+b)(a+b)^*$$

?

نکته

- اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم باشند و داشته باشیم

$$L_1 \subseteq L \subseteq L_2$$

آن گاه L لزوماً منظم نیست.

$$\phi \subseteq \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$$

یک زبان نامنظم

نکته

- اگر L_1 ، L_2 دو زبان نامنظم باشند آنگاه $L_1 \cup L_2$ و هم چنین $L_1 \cap L_2$ لزوماً نامنظم نیستند.

نامنظم

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n \leq m\}$$

نامنظم

$$L_2 = \{a^n b^m \mid n > m\}$$

منظم

$$\Rightarrow L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$$

نامنظم

$$L_1 = \{b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

نامنظم

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

منظم

$$\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\lambda\}$$

نکته:

اگر $L_2 \subseteq L_1$ و L_1 یک زبان نامنتظم باشد، L_2 لزوماً نامنتظم نیست،
به تعبیری زیرمجموعهٔ زبان نامنتظم لزوماً نامنتظم نیست

نامنتظم $\rightarrow$ $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

منتظم $\rightarrow$ $L_2 = \{\lambda\}$

اگر $L_2 \subseteq L_1$ و L_2 یک زبان منتظم باشد، L_1 لزوماً منتظم نیست؛
به تعبیری ابرمجموعه زبان منتظم لزوماً منتظم نیست.

نامنتظم $\rightarrow$ $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

منتظم $\rightarrow$ $L_2 = \{\lambda\}$

نکته :

- اگر L_1 و L_2 دو زبان نامنظم باشند آن گاه $L_1 \cup L_2$ و همچنین $L_1 \cap L_2$ لزوماً نامنظم نیست.

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n = m\}$$
$$L_2 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$$
$$L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \phi$$

نکته :

- اگر $L_1 \subseteq L_2$ و L_2 یک زبان نامنتظم باشد، L_1 لزوماً نامنتظم نیست. به تعبیری زیرمجموعه زبان نامنتظم لزوماً نامنتظم نیست.

- اگر L_1 نامنتظم و L_2 متناهی باشد آنگاه $L_1 \cup L_2$ و $L_1 - L_2$ لزوماً نامنتظم است و $L_1 \cap L_2$ لزوماً منتظم است.

- فرض کنید $L_1 \cup L_2$ منظم است و L_1 متناهی است.
آیا می‌توان نتیجه گرفت که L_2 منظم است؟

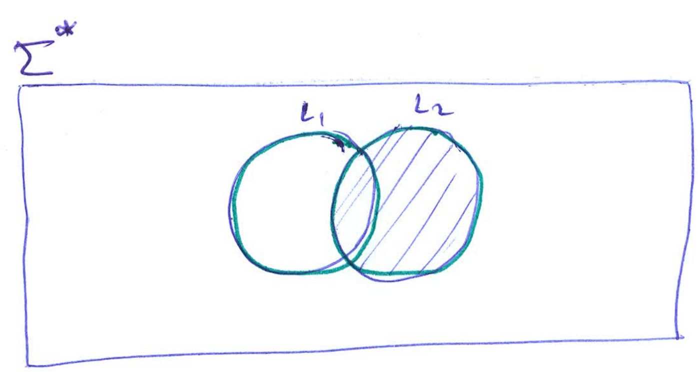
$$\boxed{L_2 = ((L_1 \cup L_2) \cap \overline{L_1}) \cup (L_1 \cap L_2)}$$

- بلی. می‌توان نتیجه گرفت که L_2 منظم است.

با استفاده از

- اگر L_1 متناهی باشد در این صورت $L_1 \cap L_2$ متناهی است برای هر L_2

- خصوصیات بستاری زبانهای منظم تحت اجتماع، اشتراک و متمم



- هر زبان متناهی یک زبان منظم است ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

$L = \{ab, b, bb\}$

$R = ab + b + bb$

- اگر $h(L)$ منظم باشد نمی‌توان نتیجه گرفت L لزوماً منظم است.

$\Sigma_1 = \{a, b\}$ $\quad$ $h(a) = d$

$\Sigma_2 = \{d\}$ $\quad$ $h(b) = d$

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$h(L) = \{d^n d^n \mid n \geq 0\} = \{d^{2n} \mid n \geq 1\}$

ملاحظه می‌شود که $h(L)$ منظم است امّا زبان L نامنظم است.

* اگر L یک زبان نامنظم باشد، آنگاه $h(L)$ لزوماً نامنظم نیست.

اگر $L \subseteq \{0,1\}^*$ زبان گرامر زیر باشد، کدام گزاره نادرست است؟

$$G: \quad S \rightarrow 00S \mid X$$
$$X \rightarrow 11X \mid \lambda$$

الف: L منتظم است.

ب: $\bar{L}$ منتظم است.

ج: $L \cup \bar{L}$ منتظم است.

د: $L = \{0^n 1^m \mid n+m \text{ is even}\}$

توضیحات: گزینه الف: $L(G) = \{(00)^n (11)^m \mid n,m \geq 0\}$

- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف: اگر L_1 و L_2 زبان‌های نامنتظم باشند آن‌گاه $L_1 \cup L_2$ نیز نامنتظم است.

ب: اگر L_1 و L_2 زبان‌های منتظم باشند آن‌گاه زبان

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, w \in L_1 \text{ and } w^R \in L_2\}$$

منتظم خواهد بود.

ج: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تعیین کند که آیا یک زبان نوع سوم نامتناهی است یا خیر.

د: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تعیین کند که آیا یک زبان نوع سوم تهی است یا خیر.

توضیحات: الف: اجتماع دو زبان نامنتظم ممکن است منتظم باشد.

$L_1 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$, $L_2 = \{a^n b^m \mid n = m\} \Rightarrow L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$

ب: $L = L_1 \cap L_2^R$ یک زبان منتظم است.

ج: وجود دارد

د: وجود دارد

کدام گزینه نادرست است؟

الف: اگر $L_1 \cup L_2$ منتظم است و L_1 متناهی است در این صورت L_2 منتظم است.

ب: اگر L_1 و L_2 منتظم باشند در این صورت $L_1 \cap L_2$ منتظم است.

ج: اگر L_1 و L_2 زبانهای نامنتظم باشند در این صورت $L_1 \cup L_2$ نیز نامنتظم است.

د: اگر $L_2 \subseteq L_1$ و L_2 یک زبان منتظم باشد در این صورت L_1 لزوماً منتظم نیست.

۲۰

- کدام یک از زبانهای زیر منظم می‌باشند؟

الف: $L=\{a^n b^m \mid n\leq m\}$

ب: $L=\{c^i d^j \mid i\geq 0, j\geq 0\}$.

ج: $L=\{a^n b^l a^k \mid n=l \text{ or } l\neq k\}$

د: $L=\{a^n b^k \mid n>k\} \cup \{a^n b^k \mid n\neq k-1\}$

توضیحات: زبان گزینه ب با استفاده از یک عبارت منظم قابل توصیف است.
زبانهای گزینه‌های الف - ج و د نیاز به شمارش نامحدود دارند

ب

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

الف: اگر L_1 و L_2 دو زبان منتظم باشند و داشته باشیم $L_1 \subset L \subseteq L_2$، آن‌گاه L منتظم است.

ب: اگر $L_2 \subseteq L_1$ و L_1 یک زبان نامنتظم باشد در این صورت L_2 نامنتظم است.

ج: اگر $L_2 \subseteq L_1$ و L_2 یک زبان منتظم باشد در این صورت L_1 منتظم است.

د: اگر L_1 و L_2 دو زبان نامنتظم باشند آن‌گاه $L_1 \cup L_2$ و هم چنین $L_1 \cap L_2$ لزوماً نامنتظم نیستند.

- کدامیک از زبانهای زیر منتظم نیست؟

الف: $L=\{wvw^R \mid v,w\in\{a,b\}^*\}$

ب: $L=\{w \mid w\in\{a,b\}^*,\ n_a(w) < 100 - n_b(w)\}$

ج: $L=\{a^nb^n \mid n\geq 0\}\cap L(ab^*)$

د: $L=\{w \mid w\in\{a,b\}^*,\ n_a(w) > n_a(w)+2\}$.

توضیحات:

الف: $L=\{a,b\}^*$

ب و ج: زبانهای گزینه‌ی ب و ج متناهی هستند.

7

کدام گزینه درست است؟

الف: $\phi^{*} = \phi$

ب: هر زبان منظم یک زبان متناهی است.

ج: هر زبان نامنظم لزوماً یک زبان نامتناهی است.

د: دو DFA به نام‌های M_1 و M_2 معادل هستند اگر و تنها اگر

$$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \phi$$

توضیحات:

الف: $\phi^{*} = \{\lambda\}$

ب: هر زبان منظم لزوماً متناهی نیست.

د: با مثال نقض می‌توان نشان داد که گزینه ج نادرست است
مثلاً اگر $L(M_1) = \phi$ و $L(M_2) = \Sigma^{*}$ باشد آنگاه داریم

$$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \phi \not\Rightarrow M_1 \equiv M_2$$

: $M_1 \equiv M_2 \Longleftrightarrow L(M_1) \subseteq L(M_2)$ and $L(M_2) \subseteq L(M_1)$

شرط داده شده در گزینه ج نشان می‌دهد که رابطه $L(M_1) \subseteq L(M_2)$
برقرار است و رابطه $L(M_2) \subseteq L(M_1)$ ممکن است برقرار نباشد. ۲

– فرض کنید w^R معکوس رشته‌ی w و L_4 ، L_5 دو زبان منظم دلخواه باشند. زبان‌های L_1 ، L_2 ، L_3 به شرح زیر معرفی شده‌اند:

$L_1 = \{ww^Rv \mid v, w \in \{a,b\}^*\}$

$L_2 = \{w_1cw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^*, w_1 \neq w_2\}$

$L_3 = \{w \mid w \in L_4, w^R \in L_5\}$

کدام گزینه درست است؟

الف: L_1 ، L_2 و L_3 نامنظم‌اند.

ب: L_1 ، L_2 و L_3 هر سه منظم‌اند.

ج: L_1 ، L_3 منظم ولی L_2 نامنظم است. •

د: L_2 و L_1 نامنظم‌اند امّا L_3 منظم است.

توضیحات: زبان L_1 برابر $\{a,b\}^*$ است و بنابراین L_1 منظم است.

: زبان L_3 برابر $L_4 \cap L_5^R$ است و بنابراین L_3 منظم است.

: L_2 نامنظم است

- کدام گزینه نادرست است؟

الف: اگر L_1 و L_2 زبانهای منتظم باشند و $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$، آن‌گاه L منتظم است.

ب: هر زبان منتظم نامتناهی شامل یک زبان منتظم نامتناهی دیگر است.

ج: هر زبان دلخواه زیرمجموعهٔ یک زبان نامتناهی دیگر است.

د: برای هر عدد $0 \neq k \in \mathbb{N}$، اجتماع k زبان منتظم دلخواه در $\{0,1\}^*$ یک زبان منتظم است.

توضیحات: الف: کافی است L_1 را تهی و L_2 را Σ^* گرفته، بدیهی است که Lها را بی‌شماری می‌توان تعریف کرد که نامنتظم باشند. بنابراین گزینه الف نادرست است.

ب: با توجه به اینکه هر زبان متناهی، منتظم است، می‌توان برای هر زبان منتظم نامتناهی زیرمجموعه‌های متناهی نامتناهی در نظر گرفت، بنابراین گزینه ب صحیح است.

ج: هر زبان دلخواه زیرمجموعهٔ زبان Σ^* است، پس گزینه ج درست است.

د: زبان‌های منتظم تحت اجتماع محدود بسته هستند. پس گزینه د درست است.

الف

- کدام یک از زبان‌های زیر منظم نیست؟

$L_1 = \{ w_1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^+, |w_1| = |w_2| \}$

$L_2 = \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \} \{a,b\}^*$

$L_3 = \{ v w w^R \mid v, w \in \{a,b\}^* \}$

$L_4 = \{ w c w^R v \mid v, w \in \{a,b\}^* \}$

الف: L_4, L_2

ب: L_4

ج: L_3, L_1

د: همه موارد

$(a+b)(a+b)^*(a+b)(a+b)^*$

توضیحات: زبان L_1 را می‌توان با استفاده از عبارت منظم $((a+b)(a+b)(a+b))^*$ توصیف کرد.

زبان‌های L_2 و L_3 برابر زبان منظم Σ^* هستند.

زبان L_4 نامنظم است.

- فرض کنید L_1 ، L_2 و L_3 زبان هایی هستند که روی یک الفبا تعریف شده اند. کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف: $L_1(L_2 \cap L_3) = (L_1L_2) \cap (L_1L_3)$

ب: به ازای هر زبان L_1 ، زبان نامنتظم L_2 وجود دارد به گونه ای که $L_2 \subseteq L_1$.

ج: به ازای هر زبان L_1 ، زبان نامنتظم L_2 وجود دارد به گونه ای که $L_2 \supseteq L_1$.

د: $L_1(L_2 \cup L_3) = (L_1L_2) \cup (L_1L_3)$

توضیحات: گزینه الف نادرست است زیرا در مجموعه زبان ها عمل الحاق نسبت به اشتراک دارای خاصیت توزیع پذیری نیست.

: برای رد گزینه ب کافی است زبان L_1 برابر یک مجموعه متناهی در نظر گرفته شود. در این حالت هر زیرمجموعه آن حتماً یک زبان منتظم است.

: برای رد گزینه ج کافی است زبان L_1 برابر Σ^* در نظر گرفته شود. در این حالت تنها زبانی که می تواند شامل L_1 باشد همان Σ^* است و می دانیم Σ^* یک زبان منتظم است.

: گزینه د صحیح است به دلیل این که در مجموعه زبان ها عمل الحاق نسبت به عمل اجتماع دارای خاصیت توزیع پذیری است.

- نشان دهید که خانواده زبانهای نوع سوم (منظم) تحت عملگر shift بسته است.

$$shift(L) = \{ v \mid v = shift(w) \text{ for some } w \in L \}$$

$$shift(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_2 \cdots a_n a_1$$

- نشان دهید که خانواده زبانهای منظم تحت عملگر Exchange بسته است.

$$Exchange(L) = \{ v \mid v = exchange(w) \text{ for some } w \in L \}$$

$$Exchange(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n) = a_n a_2 \cdots a_{n-1} a_1$$

- خانواده زبانهای منظم تحت اشتراک نامحدود بسته نیستند.

- اشتراک تعدادی نامحدود زبان منظم لزوماً منظم نیست.

- با استفاده از برهان خلف

- فرض می‌کنیم اشتراک نامتناهی زبانهای منظم لزوماً منظم باشد.
زبانهای L_1، L_2، L_3، L_4 و ... منظم بوده، بنابراین متمم آن‌ها یعنی $\overline{L_1}$، $\overline{L_2}$، $\overline{L_3}$، $\overline{L_4}$ و ... منظم است و اشتراک آنها یعنی

$$\overline{L_1}\cap\overline{L_2}\cap\overline{L_3}\cap\overline{L_4}\cap\dots$$

طبق فرض منظم است. در نتیجه متمم این زبان یعنی

$$\overline{\overline{L_1}\cap\overline{L_2}\cap\overline{L_3}\cap\overline{L_4}\cap\dots}$$

منظم است. اما با استفاده از قوانین دمورگان داریم:

$$\overline{\overline{L_1}\cap\overline{L_2}\cap\overline{L_2}\cap\overline{L_4}\cap\dots}=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup\dots$$

که این تناقض است چون زبانهای منظم تحت اجتماع نامتناهی بسته نیستند. پس فرض اشتباه بوده و زبانهای منظم تحت اشتراک نامتناهی بسته نیست.

- خانواده زبان‌های منظم تحت اجتماع نامحدود بسته نیستند.

- اجتماع تعداد نامحدود زبان منظم لزوماً منظم نیست.

به دلیل این که هر زبان نامنظم را می‌توان به صورت اجتماع تعداد نامحدود از زبان‌های تک عضوی (که هر یک محدود بوده و در نتیجه منظم می‌باشد) در نظر گرفت. به عنوان مثال، زبان زیر از اجتماع نامحدود از زبان‌های منظم حاصل شده است

$$L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$= \{\lambda\} \cup \{ab\} \cup \{aabb\} \cup \{ \quad ....$$

- نشان دهید که خانواده زبانهای منظم تحت عملگر Shuffle بسته است.

$$\text{Shuffle}(L_1, L_2) =$$

$$\{ w_1 v_1 w_2 v_2 \cdots w_m v_m \mid w_1 w_2 \cdots w_m \in L_1, \; v_1 v_2 \cdots v_m \in L_2, \; \text{for all } w_i, v_i \in \Sigma^* \}$$

- عملگر زیر تعریف شده است.

$$leftside(L) = \{ w \mid ww^R \in L \}$$

آیا خانواده زبانهای منظم تحت این عملگر بسته است؟

- نشان دهید که خانواده زبانهای منظم تحت عملگر min بسته است.

$$\mathrm{Min}(L) = \{ w \in L \mid \text{there is no } u \in L,\ v \in \Sigma^+, \text{ such that } w = uv \}$$

- نشان دهید که خانواده زبانهای منظم تحت عملگر third بسته است.

$$\mathrm{third}(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots) = a_3 a_6 \cdots$$

$$\mathrm{third}(L) = \{ \mathrm{third}(x) \mid x \in L \}$$

نکته:

- اگر L زبان نامنظم باشد آنگاه زبان‌های LL و L^* لزوماً نامنظم نیستند.

- اگر L یک زبان نامنظم باشد آنگاه $\bar{L}$ و L^R لزوماً نامنظم است.

- اگر L_1 و L_2 دو زبان نامنظم باشند آنگاه $L_1 L_2$ لزوماً نامنظم نیست.

به عنوان مثال، اگر L یک زبان نامنظم باشد، می‌دانیم $\bar{L}$ نیز نامنظم است. هم‌چنین زبان‌های

$$L_1 = L \cup \{\lambda\}$$

$$L_2 = \bar{L} \cup \{\lambda\}$$

نیز نامنظم هستند. امّا زبان $L_1 L_2$ برابر زبان منظم Σ^* می‌شود.

$$L_7 = \{uww^Rv \mid u,w,v \in \{a,b\}^*,\ |u|>|v|\}$$

- L_7 همان Σ^+ بوده و منتظم است.

$$L_8 = \{uww^Rv \mid u,w,v \in \{a,b\}^*,\ |u|=|v|\}$$

- L_8 نمایش از تمام رشته‌ها با طول زوج روی الفبای $\Sigma=\{a,b\}$ یعنی $(\Sigma\Sigma)^*$ است. بنابراین L_8 منتظم است.

$$L_9 = \{uww^Rv \mid u,w,v \in \{a,b\}^*,\ |u|\neq|v|\}$$

- L_9 نمایش دیگر از زبان منتظم Σ^+ بوده و منتظم است.

$$L_{10} = \{uww^Rv \mid u,v \in \{a,b\}^+,\ w \in \{a,b\}^*,\ |u|\geq|v|\}$$

- L_{10} یک نمایش دیگر از مجموعه منتظم $\Sigma\Sigma^+$ بوده.

$$L_{11} = \{uww^Rv \mid u,v,w \in \Sigma^+,\ |w|\leq 2\}$$

$$R = \Sigma^+(aa+bb+aaaa+abba+baab+bbbb)\Sigma^+$$

- L_{11} منتظم است.

Ch 9-141-C5

کدام عبارت منظم، زبان زیر را توصیف می‌کند؟

$$L = \{ a^n b^{3m} c^{2k} \mid m \geq 1,\ n \geq 1,\ k \geq 1 \}$$

الف: $a^* (bbb)^* (cc)^*$

ب: $a^* b^* b^* b^* c^* c^*$

ج: $aa^* (bbb)^* bbb (cc)^* cc$

د: $aa^* bbb b^* b^* b^* ccc^* c^*$

ج.