

لُغَاتٍ وَ مَكْتُوبَاتٍ

دانشگاه طبیور

دانشگاه امیرکبیر

: رساله

An Introduction to Formal Languages and Automata

by: P. Linz

# فصل اول

مقدمة

## فصل اول : مقدمات

(Alphabet) حروف -

مجموعه تسانی (زیر مجموعه) -

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

(Sentence, word, string) عبارت -

ردیفه از کلمات -

'001', '111', '00'

(length) طول رشته -

$$x = '001'$$

$$|x| = 3$$

(empty string) عبارت خالی -

$$|\lambda| = 0$$

(operations on strings) عملیات روی رشته -

Concatenation -

$$x = '001', y = '111', x \cdot y = xy = '00111'$$

$$x\lambda = \lambda x = x$$

$$|xy| = |x| + |y|, xy \neq yx$$

(Reversal) عکس می-

$$x = '1011', x^R = '1101'$$

عکس برای تعریف رکشی -

Recursive  
Definition

: تعریف اول -

$$x = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^R = \begin{cases} \text{Basis: } a_n & \text{if } n=1 \\ \text{recursive step: } a_n (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^R & \end{cases}$$

$$x = 'abcde'$$

$$(abcde)^R = e (abcd)^R = ed (abc)^R = edc (ab)^R = edcb (a)^R = edcba$$

: تعریف دوم -

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^R = \begin{cases} \text{Basis: } a_n & \text{if } n=1 \\ \text{recursive step: } (a_2 a_3 \dots a_n)^R a_1 & \end{cases}$$

$$(abcde)^R = (bcde)^R a = (cde)^R b a = (de)^R c b a = (e)^R d c b a = edcba$$

لطفاً تذكر

$$Z = xy$$

$$Z^R = y^R x^R$$

$$(xy)^R = \begin{cases} y^R x^R & |x|=1 \\ y^R x^R & \text{(مرجع) } \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (abcdef)^R &= (def)^R (abc)^R \\ &= (ef)^R d (abc)^R \\ &= fed (abc)^R \end{aligned}$$

$$= \overset{\vdots}{fedcba}$$

$$Z = ux y, \quad Z^R = y^R (ux)^R = y^R x^R u^R$$

$$Z^R = y^R x^R u^R$$

⋮

(Palindrome) بالإنجليزية

'abba', 'ababa'

- رشتة  $x$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا

$$x = x^R$$

\* - شرط دعيه  $x$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا  $x = x^R$  هي بالياندروم.

$$x = x^R : \text{فرض}$$

$$(xx) = (xx)^R : \text{حکم}$$

$$(xx)^R = x^R x^R = xx$$

\* - شرط دعيه  $x$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا  $x$  هي بالياندروم.

$x$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا  $x = x^R$



$x$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا  $x = x^R$



$x = x^R$  هي بالياندروم إذا وفقط إذا  $x = x^R$

الى

اگر  $x, y, z$  را داشتیم  $w = xyz$  رشته ای می بود که زیر رشته  $w$  است. اگر  $x$  را برداشتیم (prefix)  $y, z$  را باقی می بودند. اگر  $x$  را باقی بگذاریم  $y, z$  را پسوند (postfix) می بودند.

- رشته  $w$  طول  $n$  داشته باشد و فرمی  $n+1$  بیو نداشت.

- پیشوندها رشته  $w$  می باشد از  $abc$

- پسوندها رشته  $w$  می باشد از  $abc$

- زیر رشته های رشته  $w$  می باشد از  $abc$

C و w تعداد پیشوندهای رشته  $w$  که در A بیو نداشتند.

مجموعه زیر رشته های  $w$  در الفبا  $\Sigma$  می باشد در این مورد

$$\boxed{\begin{aligned} A \cup B &\subseteq C \\ A &\subseteq C \\ B &\subseteq C \end{aligned}}$$

سؤال: آیا رشته  $w$  در الفبا  $\Sigma$  و حوزه ای دارد لغو نماید؟

# ( Language ) زبان

مجموعه از کلمات محدود است

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$L_1 = \{000, 10, 01\} \quad \text{متنی} \quad (\text{finite Language})$$

$$L_2 = \{0, 00, 000, 0000, \dots\} = \{0^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_3 = \{1, 01, 0101, 010101, \dots\}$$

$$= \{(01)^n \mid n \geq 0\}$$

متنی (Infinite Lang.)

عملیات

$$L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ or } x \in L_2\}$$

ترکیب

$$L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ and } x \in L_2\}$$

concatenation

$$L_1 \cdot L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ and } y \in L_2\}$$

$$L_1 = \{00, 11\}, \quad L_2 = \{10, 01\}$$

$$L_1 \cdot L_2 = \{0010, 0001, 1110, 1101\}$$

✓  $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

✓  $|L_1 L_2| \leq |L_1| * |L_2|$

$$L_1 = \{0, 00\}, \quad L_2 = \{00, 000\}$$

$$L_1 \cdot L_2 = \{000, 0000, 0000, 00000\}$$

$$= \{000, 0000, 00000\}$$

✓  $L \cdot \{1\} = \{1\} L = L$

✓  $L \cdot \{\} = \{\} L = \{\}$        $L \cdot \emptyset = \emptyset L = \emptyset$

सार्वजनिक

$$L^R = \{ x^R \mid x \in L \} = \{ x \mid x^R \in L \}$$

$$L_1 = \{ ab, bba, abb \}$$

$$L_1^R = \{ ba, abb, bba \}$$

$$L_2 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$= \{ \lambda, ab, aabb, aaabbb, \dots \}$$

$$L_2^R = \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \}$$

$$= \{ \lambda, ba, bbba, bbbb, \dots \}$$

✓  $(L^R)^R = L$

✓  $\left( \left( \left( L^R \right)^R \right)^R \right) = L$

✓  $\left( \left( \left( L^R \right)^R \right)^R \right)^R = L^R$

فکرنا

مجموع تمام رشته ها مشتمل از ۰ و ۱  
که دو طول ۲ دسته

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Sigma^2 = \Sigma^{\Sigma^2} = \{00, 01, 10, 11\}$$

مجموع تمام رشته ها مشتمل از ۰ و ۱  
که دو طول ۳ دسته

$$\Sigma^3 = \Sigma^{\Sigma^2} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

$$\Sigma^4 = \Sigma^{\Sigma^3} = \{ \dots \}$$

مجموع تمام رشته ها مشتمل از ۰ و ۱  
که دو طول n دسته

$$\Sigma^{n-1} \Sigma = \Sigma^n = \{ \dots \}$$

star closure  
of  $\Sigma$

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

$$= \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$$

$$\Sigma^0 = \{\lambda\}$$

مجموع تمام رشته های ایجاد شده از  $\Sigma$  تا نهایی شده اند.

positive closure  
of  $\Sigma$

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

$$= \Sigma \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$$

$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$
$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

أداة حمل و نسخ -

$$\bar{L} = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ and } x \notin L\}$$

$$= \Sigma^* - L$$

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$\bar{L} = \{0^n 1^m \mid n \neq m\} \cup \{0,1\}^* \{10\} \{0,1\}^*$$

(star closure) او تربيع حمل -

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

$$= L^0 U L^1 U L^2 U L^3 U \dots$$

$$L^0 = \{\lambda\}$$

$$L^2 = \{xy \mid x, y \in L\}$$

$$L^3 = \{xyz \mid x, y, z \in L\}$$

⋮

- سلسلة زرين لـ  $L$  تحدد في قاموس ملحوظ لـ  $L$  (Concatenation) .  
صفري يحدد ملحوظ لـ  $L$  بـ  $L^*$ .

$$L^* = \{x \mid x \in \Sigma^*, x = x_1 x_2 x_3 \dots x_i, i \geq 0, x_j \in L\}$$

-  $L^*$  هو امتداد ملحوظ لـ  $L$ .

*تعریف مثبت*

*positive closure*

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

$$= L U L^2 U L^3 U \dots$$

$$L^+ = \begin{cases} L^* & \lambda \in L \\ L^* - \{\lambda\} & \lambda \notin L \end{cases}$$

ثابت:  $L^+ = L^*$  *لما  $\lambda \in L$*  ✓

:  $L^*$

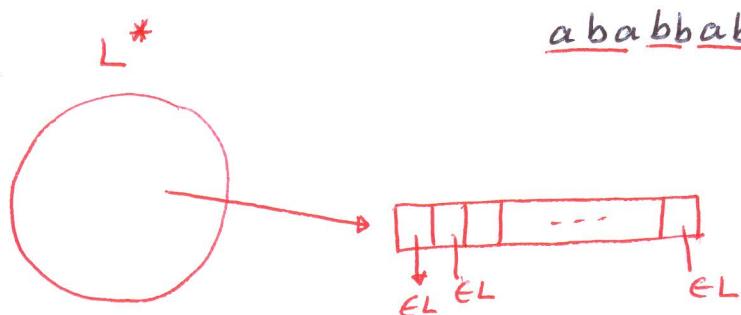
اگر زیر  $\Sigma = \{a, b\}$  در  $L = \{bb, aba\}$  شده باشد، کامیاب  
کردن  $L^*$  چگونه؟

bbabaabaaba : a

bbbabababb : — ✓

b b b b b b a b a : c

a b a b b a b a b b : >



مثال:

چه تعداد زیان  $L$  روی  $\Sigma$  وجود دارد در حالت  $L^*$   $L$  تساوی باشد.  
لینی  $|L^*| < \infty$ .

الف: بیشتر

-: صفر

ج: دو ✓

د: همیشگاه

- تساوی روزیان  $\{1\}$  ،  $L = \emptyset$  ،  $L^* = L$  تساوی است و رایی  
سایر زیان تعلق به  $L^* = \emptyset$  همراه  $\Sigma^*$  نتساوی است.

$$\{1\}^* = \{1\}$$

$$\emptyset^* = \{1\}$$

$$\boxed{L^* = L^* L^*}$$

int = o

$$L^* = \{x \mid x = x_1 x_2 \dots x_i, i \geq 0, x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i\}$$

$$L^* L^* = \{xy \mid x \in L^*, x = x_1 x_2 \dots x_i, i \geq 0, x_k \in L \text{ for } 1 \leq k \leq i \\ y \in L^*, y = y_1 y_2 \dots y_j, j \geq 0, x_k \in L \text{ for } 1 \leq k \leq i\}$$

$$\boxed{L^* = (L^*)^*}$$

int = o

$$L^* = \{x \mid x = x_1 x_2 \dots x_i, i \geq 0, x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i\}$$

$$(L^*)^* = \{x \mid x = x_1 x_2 \dots x_i, i \geq 0, x_j \in L \text{ for } 1 \leq j \leq i, \\ x_1 = y_1 y_2 \dots y_k, k \geq 0, x_p \in L \text{ for } 1 \leq p \leq k\}$$

$$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$$

$$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^n \subseteq L_2^n$$

$$(L_1^n = \underbrace{L_1 L_1 \dots L_1}_n)$$

int = o

نکته:

-  $\Sigma^*$  مجموعه تمام رشته های روی الفبا  $\Sigma$  بین مجموعه مرجع

$\Sigma$  ایست و برای هر زبان  $L$  روی الفبا  $\Sigma$

$$\text{داریم } L \subseteq \Sigma^*$$

- مجموعه توانی  $\Sigma^*$  بین  $\Sigma^*$  مجموعه تمام زبان های قابل

تعریف روی الفبا  $\Sigma$  ایست. همین دلیل در حقیقت

$$2^\Sigma = \{ L \mid L \subseteq \Sigma^* \}$$

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L \cup \Sigma^* = \Sigma^*$$

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : (L \cup \{\lambda\}) \Sigma^* = \Sigma^* \setminus \{\lambda\} = \Sigma^* \Sigma^* = \Sigma^*$$

الكلمات المدروسة  $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^*, |x| \bmod 2 = 0\}$  على  
 $\{0,1\}^*$  متساوية  $L = L^*$

$$L = L^*$$

$$L \subset L^*$$

$$x \in L \Rightarrow x \in L^*$$

هر زیر لغزشی از  $L$  بـ  $L^*$  متعلق نباشد  
 لـ  $L^*$  عضو  $L$  نباشد

$$L^* \subset L$$

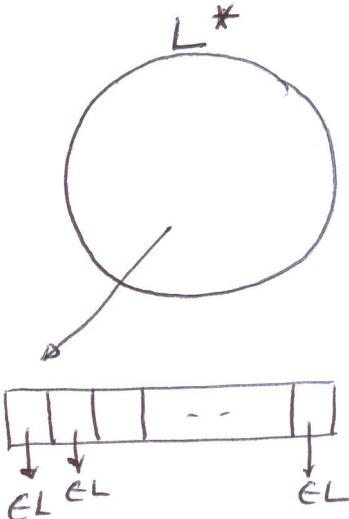
$$x \in L^* \Rightarrow x \in L$$

هر عضو از  $L^*$  روزنگاری متعلق نباشد  
 از  $L$  بـ  $L^*$  متعلق نباشد

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

$$= L^0 U L^1 U L^2 U \dots$$

$$L \subset L^*$$



$$\Rightarrow L = L^*$$

لطفاً تذكّر  $L = \{ x \mid x \in \{a, b\}^*, n_a(x) = n_b(x) \}$  لأن  
هي المترافق  $L = L^*$

$$L = L^*$$

$$L \subset L^* \quad L^* \subset L$$

$$x \in L \Rightarrow x \in L^*$$

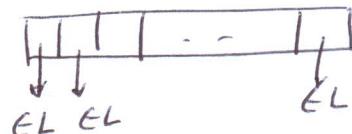
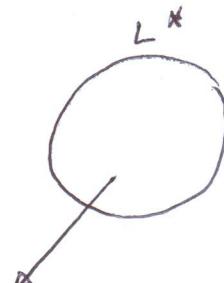
هر زیرشاخه لاملاً متماثل  
و مغلق لـ  $L^*$  بـ a, b

$$x \in L^* \Rightarrow x \in L$$

هر زیرشاخه لاملاً متماثل  
و مغلق لـ  $L$  بـ a, b

$$\begin{aligned} L^* &= \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \\ &= L^0 U L^1 U L^2 U \dots \end{aligned}$$

$$L \subset L^*$$



$$\Rightarrow L = L^*$$

زبان زیر بر این نظر نماید ✓

$$\begin{aligned} L &= \{ x \mid x \in \{a,b\}^*, |x|_{\text{mod } 2} = 0 \text{ and } |x|_{\text{mod } 3} = 0 \} \\ &= \{ x \mid x \in \{a,b\}^*, |x|_{\text{mod } 6} = 0 \} \end{aligned}$$

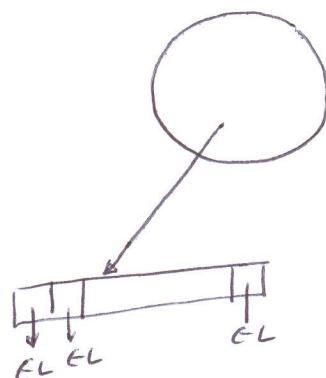
؟ آیا  $L = L^* \cup L$  بود

$$L = L^*$$

$LCL^*$   
 $x \in L \Rightarrow u \in L^*$   
 هر شش تکه ای از  $x$  را که طول آن  
صفحه ای باشد عضو از  $L^*$  است

$L^* CL$   
 $x \in L^* \Rightarrow x \in L$   
 هر عضو از  $L^*$  طویل عضو از  
 $L$  باشد.

✓  $LCL^*$



$\Rightarrow L = L^*$

زبان زیر بر این نظر نماید ✓

$$L = \{ x \mid x = uv, u, v \in \{a,b\}^*, |u|=|v| \}$$

؟ آیا  $L = L^* \cup L$  بود

$$L = \{ x \mid x = uv, u, v \in \{a,b\}^*, |u|=|v| \}$$

↓

$$L = \{ x \mid x \in \{a,b\}^*, |x|_{\text{mod } 2} = 0 \}$$

L. if both L = { $x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 2 = 1\}$  or L is a subset of  $L^*$

$$\begin{array}{ccc} L = L^* & & \\ \swarrow & & \searrow \\ L \subset L^* & & L^* \subset L \\ x \in L \Rightarrow x \in L^* & & x \in L^* \Rightarrow x \in L \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{aba \in L} \\ \underline{bbb \in L} \\ \underline{ababbb \in L^*} \\ \qquad \qquad \qquad \{ ababbb \in L^2 \} \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow L \neq L^* \end{array}$$

L. if both L = { $x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 2 = 0$  or  $|x| \bmod 3 = 0\}$  or L is a subset of  $L^*$

$$\begin{array}{c} \underline{ab \in L} \\ \underline{bbb \in L} \\ \underline{ababbb \in L^*} \\ \qquad \qquad \qquad \{ ababbb \in L^2 \} \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow L \neq L^* \end{array}$$

$$\Rightarrow L \neq L^*$$

L. تبریزی ل =  $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, |x| \bmod 2 = 1\}$  ل; ✓  
? تبریزی ل =  $L^*$

$$\begin{array}{ccc} L = L^* & & \\ \swarrow & & \searrow \\ L \subset L^* & & L^* \subset L \\ x \in L \Rightarrow x \in L^* & & x \in L^* \Rightarrow x \in L \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{aba \in L} \\ \underline{bbb \in L} \\ \underline{ababbb \in L^*} \end{array} \quad \left\{ ababb \in L^2 \right\} \Rightarrow L \neq L^*$$

L. تبریزی ل =  $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, |x| \bmod 2 = 0 \text{ or } |x| \bmod 3 = 0\}$  ل; ✓  
? تبریزی ل =  $L^*$

$$\begin{array}{c} \underline{ab \in L} \\ \underline{bbb \in L} \\ \underline{abbbb \in L^*} \end{array} \quad \left\{ abbbb \in L^2 \right\}$$

$$\Rightarrow L \neq L^*$$

?  $\vdash \omega L = L^*$  (i)  $\omega$  is  $L$

$$\checkmark L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \text{ is a prime number}\}$$

$$\checkmark L = \{x \mid x = uv, u = v^R, u, v \in \{a,b\}^*\}$$

$$\begin{array}{l} abba \in L \\ bbbb \in L \\ abbabbbbb \in L^* \end{array} \quad \{abbabbbbb \in L^2\} \Rightarrow L \neq L^*$$

$$\checkmark L = \{x \mid x = uv, u = v, u, v \in \{a,b\}^*\}$$

$$\begin{array}{l} abab \in L \\ bbbb \in L \\ ababbbbbb \in L^* \end{array} \quad \{ababbbbbb \in L^2\} \Rightarrow L \neq L^*$$

$$\checkmark L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$\checkmark L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*, |x| \bmod 3 = 0\}$$

$$\checkmark L = \{x \mid x \in \{a,b\}^*, x = x^R\}$$

گرامر (Grammar) : تعریف زبان  
برهت یک بیان تعریف شود.

$$G = (V, T, P, S)$$

مجموعه تعریف (بازگشایی)

Non-terminal Variables  
Symbols

- از حرف نزدیک استفاده شود

حروف بازگشایی

Terminal

symbols  
- وزن حروف کمی استفاده شود

starting symbol

حروف شروع

$$S \in V$$

rewriting rules, rules,  
productions

$$\alpha \rightarrow \beta$$

$\beta$  بتواند حاصلترین  $\alpha$  شود

$\alpha$  بتواند  $\beta$  حاصلترین شود

تسلیق کر اسے:

$$G = (V, T, P, S)$$

$$V = \{ S, A, B \}$$

$$T = \{ a, b \}$$

$$\begin{aligned} P = & \{ S \rightarrow AB \\ & \quad A \rightarrow aA \\ & \quad A \rightarrow a \\ & \quad B \rightarrow bB \\ & \quad B \rightarrow b \} \end{aligned}$$

$$S = S$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aAB \\ &\Rightarrow aaAB \\ &\Rightarrow aaaB \\ &\Rightarrow aaabB \\ &\Rightarrow aaabbB \\ &\Rightarrow aaabbb \end{aligned}$$

aaabbb  
تسلیق کرنے والا  
↓  
derivation

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aB \\ &\Rightarrow ab \end{aligned}$$

ab تسلیق کرنے والا

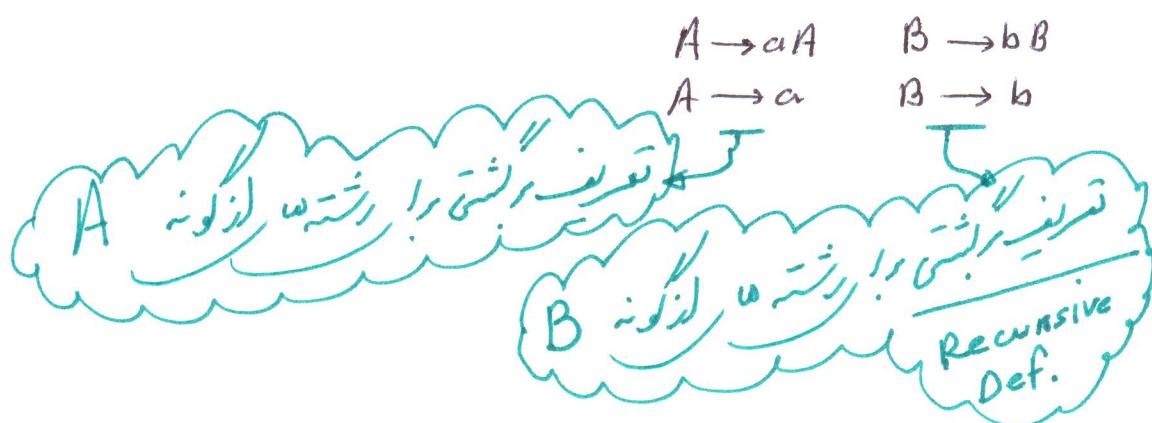
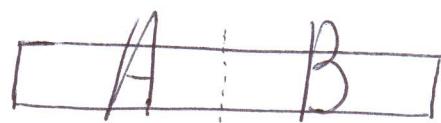
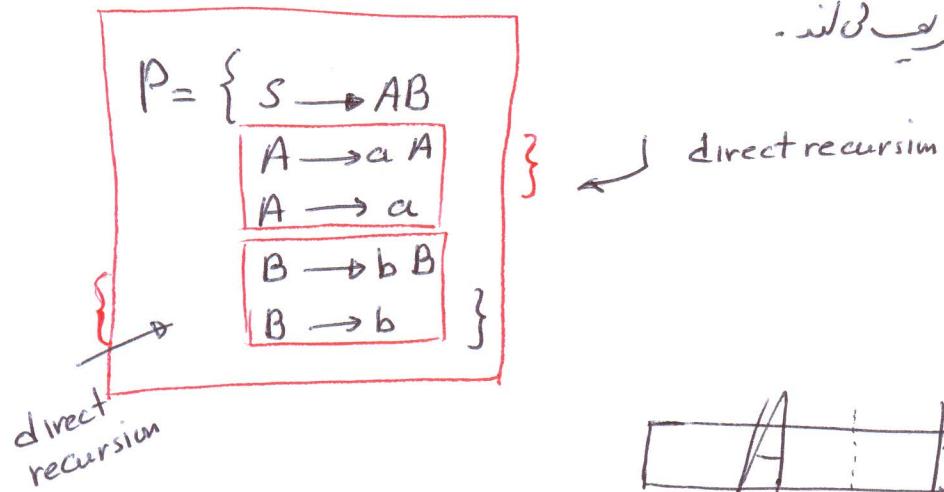
$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aB \\ &\Rightarrow abB \\ &\Rightarrow abb \end{aligned}$$

abb تسلیق کرنے والا



$$\begin{aligned} aAB &\Rightarrow aaAB \\ aaabB &\Rightarrow aaabbB \\ aAB &\xrightarrow{*} aabbB \\ S &\xrightarrow{*} aaabbb \end{aligned}$$

- این گرامر حیزبی را تعریف کند.



$$A \Rightarrow a$$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aa$$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \dots \Rightarrow aaa$$

⋮

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n \text{ for } n \geq 1$$

$$B \Rightarrow b$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bb$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow bbb$$

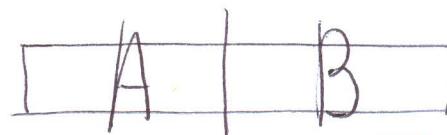
⋮

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$$

$$B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow \dots \Rightarrow b^n \text{ for } n \geq 1$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ \boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow aC, C \rightarrow aA \\ A \rightarrow a \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} B \rightarrow bD, D \rightarrow bB \\ D \rightarrow b \end{array}} \end{array} \right\}$$

Indirect recursion



$$\boxed{\begin{array}{l} B \rightarrow bD \\ D \rightarrow bB \\ D \rightarrow b \end{array}}$$

$$B \Rightarrow bD \Rightarrow bb$$

$$B \Rightarrow bD \Rightarrow bbB \Rightarrow bbbD \Rightarrow bbbb$$

$$B \Rightarrow bD \Rightarrow bbB \Rightarrow bbbD \Rightarrow bbbbB \Rightarrow bbbbbD \Rightarrow bbbbbb$$

⋮

$$B \Rightarrow bD \Rightarrow bbB \Rightarrow bbbD$$

$$\Rightarrow b^{2k}, k \geq 1$$

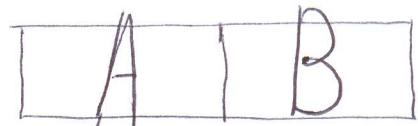
$$L = \left\{ a^{2k+1} b^{2k'} \mid k \geq 0, k' \geq 1 \right\}$$

$$P = \{ S \rightarrow AB, \\ A \rightarrow aA, \\ A \rightarrow a, \\ B \rightarrow bB, \\ B \rightarrow b \}$$

Indirect recursion

$$P = \{ S \rightarrow AB, \\ \boxed{A \rightarrow aC, C \rightarrow aA, \\ A \rightarrow a}, \\ B \rightarrow bB, \\ B \rightarrow b \}$$

Direct recursion



A → aC C → aA A → a	B → bB B → b
---------------------------	-----------------

$$A \Rightarrow a$$

$$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$$

$$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \Rightarrow aaaC \Rightarrow aaaaA \Rightarrow aaaaaa$$

⋮

$$A \Rightarrow aC \Rightarrow aaA \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \Rightarrow a^{2n+1} \quad n \geq 0$$

$$L = \left\{ a^{2k+1} b^n \mid \begin{array}{l} k \geq 0 \\ n \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ \boxed{A \rightarrow aC, C \rightarrow aA, A \rightarrow a} \\ \boxed{B \rightarrow bB, B \rightarrow b} \end{array} \right\}$$



$$L_S = L_A \cdot L_B$$

$$L_A = \{a^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_B = \{b^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_S = \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$$

$$= \boxed{\{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}}$$

□

$$P = \{ S \rightarrow AS \mid A \rightarrow a \mid b \}$$

$$\underline{S \Rightarrow \lambda}$$

$$\underline{S \Rightarrow AS \Rightarrow A \Rightarrow a}, \quad \underline{S \Rightarrow AS \Rightarrow A \Rightarrow b}$$

$$\underline{S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow AA}$$

$$\begin{matrix} & a & a \\ & \downarrow & \downarrow \\ a & & a \\ & \downarrow & \downarrow \\ b & & b \end{matrix}$$

$\Rightarrow aa, ab, bb, ba$

$$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{AA \dots A}_{n \geq 0} \text{ for } n \geq 0$$

$$L = \{ x \mid x \in \{a, b\}^{\omega} \}$$

$$\checkmark P = \{ S \rightarrow aA, A \rightarrow bS, A \rightarrow a \}$$

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow \underline{aa}$$

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow abaA \Rightarrow \underline{abaa}$$

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow abaA \Rightarrow ababS \Rightarrow ababaA \Rightarrow \underline{ababaa}$$

:

:

:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow (ab)^n aa$$

for  $n \geq 0$

$$L = \{ (ab)^n aa \mid n \geq 0 \}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aas \mid aB \\ \hline B \rightarrow bbB \mid 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{*} (aa)^n S \Rightarrow (aa)^n a B \\ &\Rightarrow (aa)^n a (bb)^m B \\ &\Rightarrow (aa)^n a (bb)^m \quad \text{for } n \geq 0 \\ &\quad m \geq 0 \end{aligned}$$

$$L = \left\{ (aa)^n a (bb)^m \mid n, m \geq 0 \right\}$$

$$L = \left\{ a^{2k+1} b^{2k'} \mid k \geq 0 \right\}$$

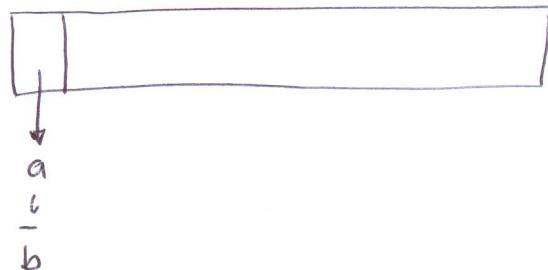
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aas \mid aA \\ A \rightarrow Abb \mid b \end{array} \right\}$$

$$L = \left\{ a^{2k+1} b^{2k'+1} \mid k, k' \geq 0 \right\}$$

- کیمی گرامر بر زبان طاری لند:  $\{a, b\}^+$



: گرامر اول:

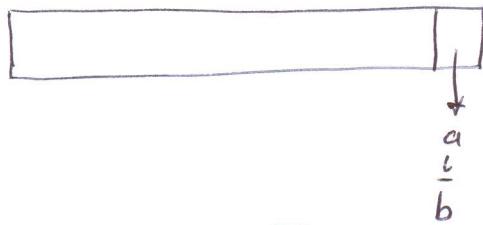


$$S \rightarrow aS \mid bS \mid a \mid b$$

: abaab (شناختی بر زبان)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \Rightarrow abS \Rightarrow abaS \Rightarrow abaas \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow abaab \end{aligned}$$

: گرامر دوم:



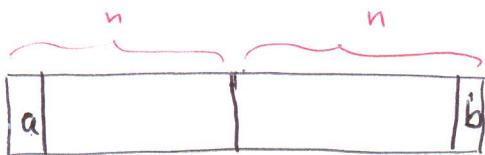
$$S \rightarrow Sa \mid Sb \mid a \mid b$$

: abaab (شناختی بر زبان)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Sb \Rightarrow Sab \Rightarrow Saab \Rightarrow Sbaab \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow abaab \end{aligned}$$

کی گرامر برای زبان نیز طریق ای نیز:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

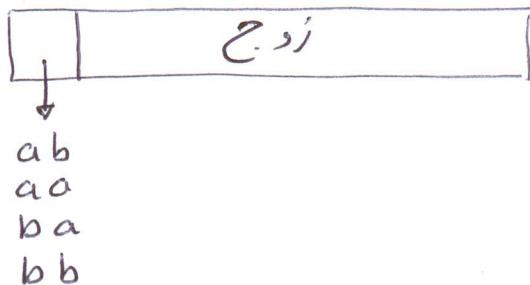


$$S \rightarrow a S b \mid \lambda$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow a S b \Rightarrow a a S b b \Rightarrow a a a S b b b b \\ &\Rightarrow a a a a S b b b b b \\ &\Rightarrow a a a a a b b b b b b \end{aligned}$$

یک کاربرد زبان  
 ممکن است، ورید  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \bmod 2 = 0\}$

گرامری:



$$S \rightarrow abS \mid aaaS \mid baS \mid bbS \mid \lambda$$

: aaabb زنگنه شفاف برای رشته -

$$S \Rightarrow aaaS \Rightarrow aaabs \Rightarrow aaabbbs \Rightarrow aaabbb$$

$$L = L(G)$$

$$L \subset L(G)$$

$$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$$

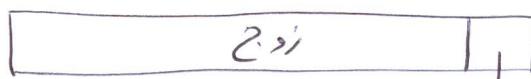
هر رشته بطول زوج توسط  
گرامر کاربرد کو طبقه بندی شود.

$$L(G) \subset L$$

$$x \in L(G) \Rightarrow x \in L$$

هر رشته که توسط گرامر  
تولید شود داشت طبقه بندی شود.

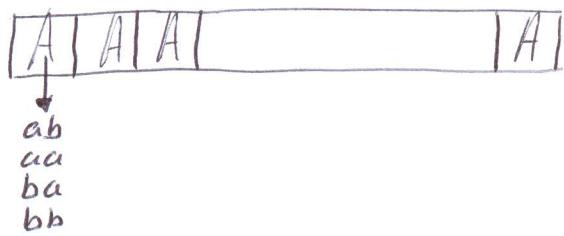
نتیجہ:



$$S \rightarrow Sab \mid Sbb \mid Saa \mid Sba$$



گرامر دوسری



$$\boxed{S \rightarrow AS \mid \lambda}$$

$$\boxed{A \rightarrow ab \mid aa \mid ba \mid bb}$$

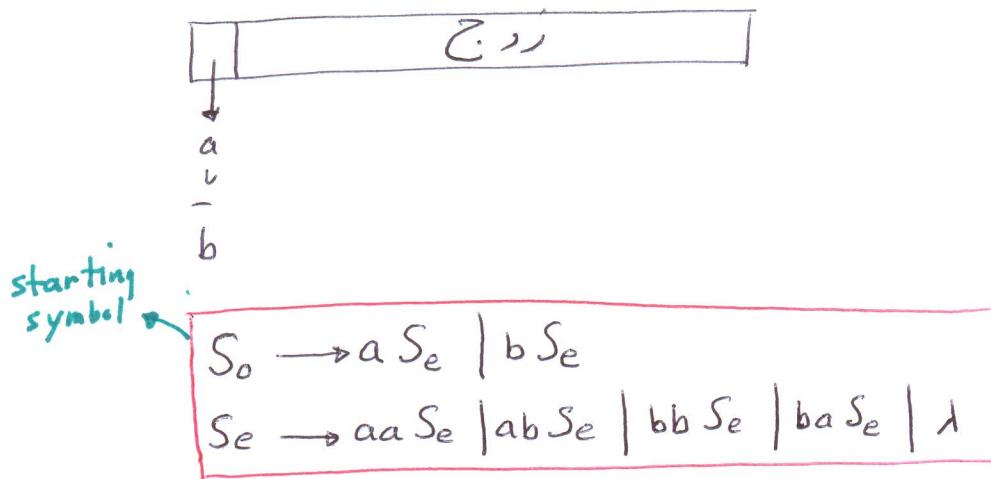
aaabb b نمایر رشته،

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow AAAS \Rightarrow AAA \\ &\Rightarrow aaAA \\ &\Rightarrow aaab A \\ &\Rightarrow aaabb b \end{aligned}$$

$$L = L(G)$$

$$\begin{array}{ccc} L \subset L(G) & & L(G) \subset L \\ x \in L \Rightarrow x \in L(G) & & x \in L \Rightarrow x \in L(G) \\ \text{هر رشته } x \text{ طول زوج نوست} & & \text{هر رشته } x \text{ که طول زوج نوست} \\ \text{گرامر بآسانی ثور} & & \text{آنکه شود را که طول زوج است} \end{array}$$

مسکن  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \text{ mod } 2 = 1\}$



$;aaaabba$  رسانی -

$S_0 \Rightarrow a S_e \Rightarrow aa S_e \Rightarrow aaa S_e \Rightarrow aaaab S_e \Rightarrow aaaabb S_e$   
 $\Rightarrow aaaabba$

گرامر قسم بی رنزن زیر

$$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_{\text{mod } 2} = 0 \}$$

زوج	زوج
فرد	فرد

مکالمه شروع

$S_e \rightarrow S_e S_e \mid S_o S_o$ $S_o \rightarrow a S_e \mid b S_e$ $S_e \rightarrow aa S_e \mid ab S_e \mid bb S_e \mid ba S_e \mid \lambda$
---

: نتیجہ

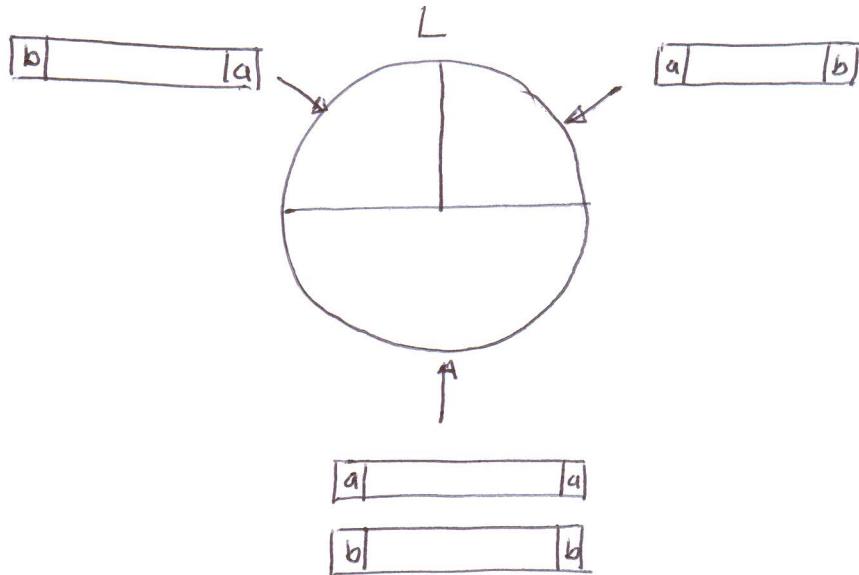
$$L(G) = \{ x \mid S \xrightarrow[G]{}^* x \}$$



بک گرامر را زبان زیر می‌نامیم، درین:

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \pi_a(w) = \pi_b(w)\}$$

گرامر اول:



a b b a : b b a b a a b a

← → ← → ← →

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \lambda$$

$$L = L(G)$$

$$L \subset L(G)$$

$$x \in L \Rightarrow x \in L(G)$$

هر کلمه ای که می‌شود تبارگاری داشته باشد  
کوچکتر گرامر و قویتر گرامر داشته باشد

$$L(G) \subset L$$

$$x \in L(G) \Rightarrow x \in L$$

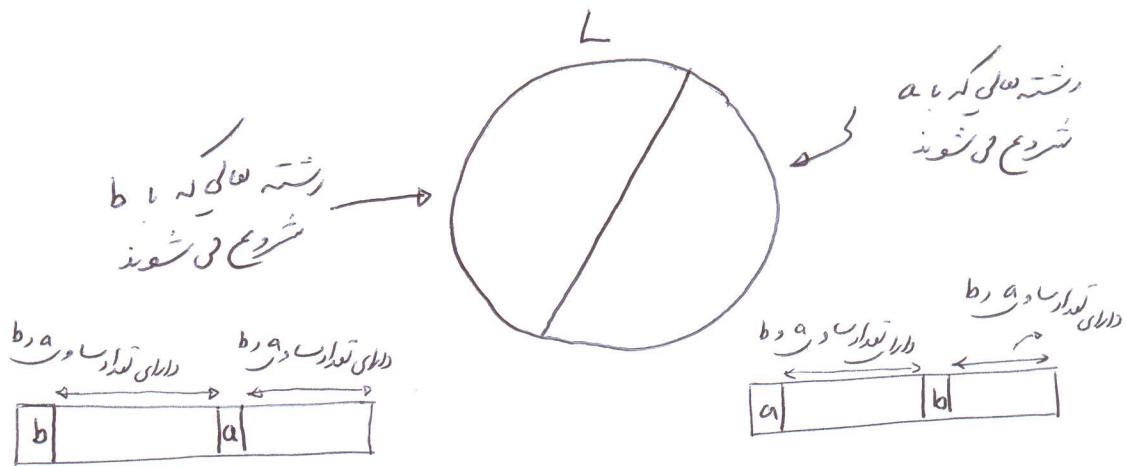
هر کلمه ای که می‌شود تبارگاری داشته باشد  
کوچکتر گرامر و قویتر گرامر داشته باشد

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abbaS \Rightarrow abba$$

$\Rightarrow babaabaa$

abba b b a a a a  $\Rightarrow$  تبارگاری داشته باشد

$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = n_b(w) \}$  کارهای دوستی: برای زبان



a abba b aababb

S → aSbS | bSaS | λ

$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aasbSbS \Rightarrow aabSbS \Rightarrow aabbSaSbS$

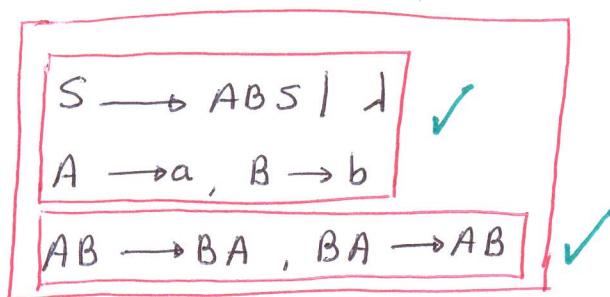
$\Rightarrow aabbasbS$   
 $\Rightarrow aabbabS$

$\Rightarrow aabbabaababb$

جواب: مجموع کارکرد

$$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = n_b(w) \}$$

a b a b a b  
 ↓  
a a b b a b  
 ↓  
a a a b b b  
 ↓  
 :



✓  $S \rightarrow ABS \Rightarrow ABABS \Rightarrow \underline{ABABABS}$   
 $\Rightarrow AAB \underline{B} ABS$   
 $\Rightarrow AA \underline{B} ABB S$   
 $\Rightarrow AAABBB S$   
 $\Rightarrow AAABB B$

⋮  
~~\* a a a b b b~~

a a a b b b نیز نہیں

✓  $S \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \Rightarrow \underline{bbbaaa}$

bbbaaa نیز نہیں

✓  $S \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \Rightarrow \underline{bababa}$

✓  $S \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \Rightarrow \underline{baaabbb}$

گرامر ریزاب را توصیف کنید؟

G:

$$\boxed{\begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid d \\ B \rightarrow b \mid bS \mid aBB \\ A \rightarrow a \mid aS \mid bAA \end{array}}$$

$$\{w \mid w \in \{a, b\}^*, 2n_a(w) = n_b(w)\} : \text{الف}$$

$$\{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = 2n_b(w)\} : \text{ب}$$

$$\{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = n_b(w)\} : \text{ج}$$

حکایتی:

- هر دو زیر مجموعه از مجموعه متناسب هستند.

ab  
abab  
aaabbb  
aabbbab  
babbbaaa

توصییت: در این گرامر تولید هر a می باید b نیز تولید خواهد کرد و تولید هر b می باید a نیز تولید شود. خواهد کرد و همینی در گام از a, b ها را نیز تولید می کند.

تعريف: دو گرامر  $G_1, G_2$  مترادفات (equivalent) هستند اگر

$$L(G_1) = L(G_2)$$

$$L(G_1) = L(G_2)$$

$$L(G_1) \subset L(G_2)$$

$$x \in L(G_1) \Rightarrow x \in L(G_2)$$

هر شیخ که توسط  $G_1$  تولیدی شود  
توسط  $G_2$  هم تولیدی شود.

$$L(G_2) \subset L(G_1)$$

$$x \in L(G_2) \Rightarrow x \in L(G_1)$$

هر شیخ که توسط  $G_2$  تولیدی شود  
توسط  $G_1$  هم تولیدی شود.

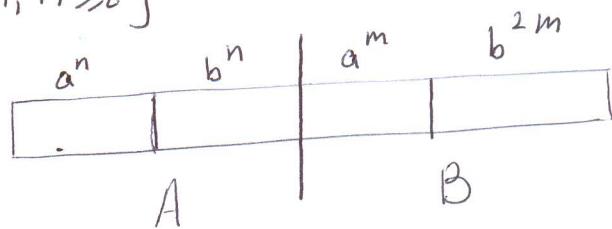
- نشان دهنده گرامر  $G_1, G_2$  مترادفات

$$G_1 : S \rightarrow SS \mid asb \mid bsa \mid \lambda$$

$$G_2 : S \rightarrow SS \mid SSS \mid asb \mid bsa \mid \lambda$$

Ergebnis ist ein Produkt

$$L = \{ a^n b^n a^m b^{2m} \mid n, m \geq 0 \}$$



$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAb \quad | \quad \lambda$$

$$B \rightarrow aBbb \quad | \quad \lambda$$

$$L_S = L_A \cdot L_B$$

$$L_A = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_B = \{ a^n b^{2n} \mid n \geq 0 \}$$

aabbbaabbbb      D. rückt, ✓

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \\ &\Rightarrow aAbB \\ &\Rightarrow aaAbbB \\ &\Rightarrow aabbB \\ &\Rightarrow aabbabBbb \\ &\Rightarrow aabbaabBbbb \\ &\Rightarrow aabbaabbbb \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{L} = \{a^m b^n \mid m > n\}$  Q: How to prove this?

$$L = \{\underline{a^p} \underline{a^n} b^n \mid n \geq 0, p \geq 1\}$$

$$\begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow aA/a \\ B \rightarrow aBb/b \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \\ &\Rightarrow aaaBb \\ &\Rightarrow aaaaBbb \\ &\Rightarrow aaaaaBbbb \\ &\Rightarrow aaaaaabb \end{aligned}$$

aaaabb Q: How to prove this?

$$L = \{\underline{a^n} \underline{a^p} b^n \mid n \geq 0, p \geq 1\}$$

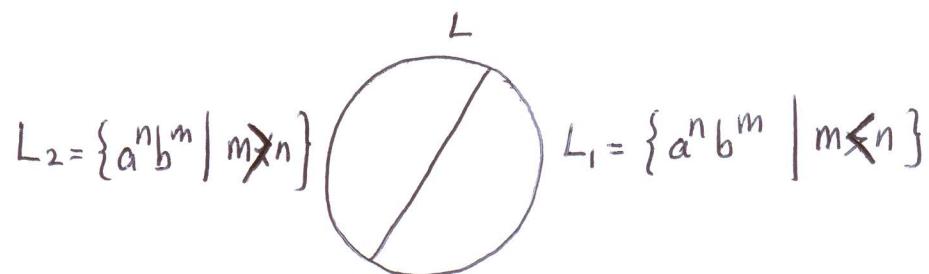
$$\begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid A \\ A \rightarrow aA \mid a \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSb \Rightarrow aasbb \Rightarrow aaaSbbb \\ &\Rightarrow aaaAbbb \\ &\Rightarrow aaaaAbbbb \\ &\Rightarrow aaaaaabb \end{aligned}$$

aaaaabb Q: How to prove this?

گرامریکس نظریہ

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$$



$$L = L_1 \cup L_2$$

