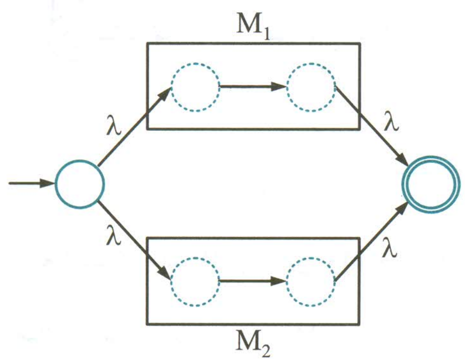
فصل ۴ خصوصیات زبان‌های منظم

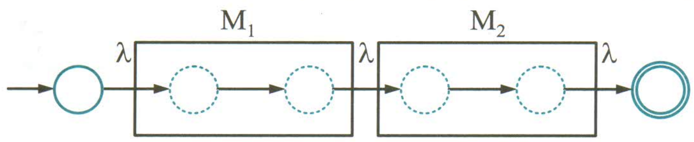
در این فصل به بررسی خصوصیات زبان‌های منظم خواهیم پرداخت. زبان‌های منظم به عنوان دسته‌ای مهم از زبان‌ها خصوصیات جالبی دارند که می‌توان از جمله به بسته بودن آن‌ها تحت عملگرهایی نظیر اجتماع، اشتراک، تفاضل و مکمل‌گیری اشاره کرد همچنین توسط یک خصوصیت جالب به نام تزریق می‌توان عدم تعلق یک زبان به دسته زبان‌های منظم را ذکر کرد.

قضیه ۴-۱: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند، آن‌گاه $L_1 \cup L_2$ و $L_1 . L_2$ نیز منظم هستند. به بیان دیگر زبان‌های منظم تحت اجتماع و الحاق بسته هستند.

اثبات: به سادگی می‌توان دید که اگر L_1 و L_2 منظم باشند، ماشین متناهی دارند. فرض کنید M_1 و M_2 ماشین‌های متناهی متناظر با زبان‌های L_1 و L_2 باشند. حال می‌توان ماشین $M_1 + M_2$ را به روش روبه‌رو به‌گونه‌ای ساخت که زبان آن برابر با $L_1 \cup L_2$ باشد:

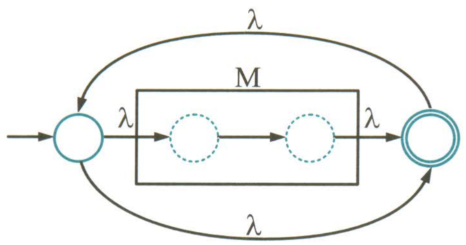


همچنین ماشین $M_1 . M_2$ را می‌توان به صورت زیر به‌گونه‌ای ساخت که زبان آن برابر با $L_1 . L_2$ باشد:



قضیه ۴-۲: اگر L یک زبان منظم دلخواه باشد، آن‌گاه L^*، L^R، $\overline{L}$ نیز منظم هستند. به بیان دیگر، زبان‌های منظم تحت بستار ستاره، معکوس و مکمل‌گیری، بسته هستند.

اثبات: به سادگی می‌توان دید که اگر L منظم باشد، ماشین متناهی دارد. فرض کنید M ماشین متناهی متناظر با زبان L باشد. حال می‌توان ماشین M^* را به روش روبه‌رو به‌گونه‌ای ساخت که زبان آن برابر با L^* باشد:



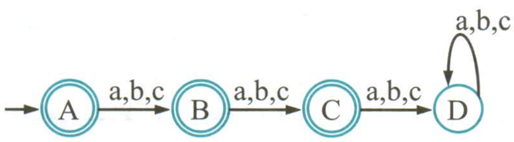
برای ساختن ماشین مربوط به زبان L^R از روی ماشین مربوط به زبان L می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

اگر M پذیرنده متناهی مربوط به زبان L و M^R پذیرنده متناهی مربوط به زبان L^R باشـد، برای سـاختن M^R از روی M، باید حالت اولیه M را به حالت نهایی و حالت نهایی M را به حالت اولیه تبدیل کرده و سپس جهت تمامی یال‌ها در گراف تغییر وضعیت M را معکوس کرد. اگر پس از این کار M^R بیش از یک حالت اولیه داشت، آن‌گاه یک حالت جدید به عنوان حالت اولیه در M^R ایجاد کرده و از آن حالت جدید یالی با برچسب λ به همه حالات اولیه قبلی ایجاد می‌کنیم. قابل اثبات است که ماشین حاصل دارای زبان L^R است.

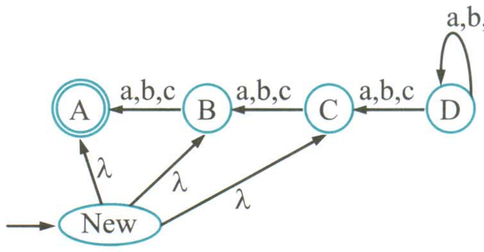
برای ساختن ماشین مربوط به زبان $\overline{L}$ از روی ماشین مربوط به زبان L می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

اگر M پذیرنده متناهی مربوط به زبان L و $\overline{M}$ پذیرنده متناهی مربوط به زبان $\overline{L}$ باشـد، برای سـاختن $\overline{M}$ از روی M، باید حالات نهایی M را به غیر نهایی و حالات غیر نهایی M را به حالات نهایی تبدیل کرد. باید توجه داشـت درصورتی‌که حالت تله در ماشین M رسم نشده باشد باید ابتدا آن را رسم کرد و سپس الگوریتم مورد نظر را اجرا کرد. قابل اثبات است که ماشین حاصل دارای زبان $\overline{L}$ است.

مثال ۱: معکوس زبان ماشین M_1 را می‌توان به صورت ماشین M_2 ایجاد کرد:



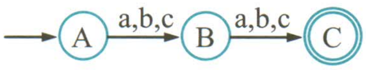
M_1



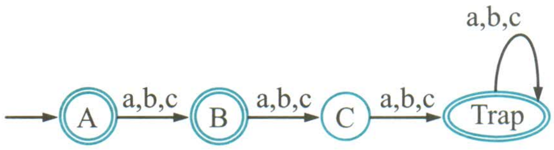
M_2

واضح است که حالت D در ماشین M_2 حالتی دسترسی‌ناپذیر است؛ بنابراین می‌توان آن را حذف کرد.

مثال ۲: مکمل زبان ماشین M_1 را می‌توان به صورت ماشین M_2 ایجاد کرد:



M_1



M_2

قضیه ۴-۳: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند، آن‌گاه $L_1 \cap L_2$ و $L_1 - L_2$ نیز منظم هستند. به بیان دیگر زبان‌های منظم تحت عمل اشتراک و تفاضل بسته هستند.

اثبات: ازآنجاکه اشتراک دو زبان را می‌توان به صورت زیر بیان کرد، اشتراک هر دو زبان منظم نیز منظم است:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2}$$

و همچنین از آنجا که تفاضل دو زبان را می‌توان به صورت زیر بیان کرد، تفاضل هر دو زبان منظم نیز منظم است:

$$L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L}_2$$

مثال ۳: زبان $L = \left\{a^n b^m \mid n \neq m\right\}$ را در نظر بگیرید. ازآنجاکه زبان زیر منظم نیست، زبان L نمی‌تواند منظم باشد.

$$\overline{L} \cap L\left(a^* b^*\right) = \left\{a^n b^n \mid n \geq 0\right\}$$

قضیه ۴-۳ روشی را برای ساخت ماشین مربوط به زبان‌های مربوط به اشتراک و تفاضل دو زبان منظم از روی ماشین مربوط به آن‌ها ارائه می‌دهد ولی مثال زیر روش رسیدن به ماشین مربوط به اشتراک دو زبان منظم را از روی ماشین آن دو زبان نشان می‌دهد.

مثال ۴: دو ماشین M_1 و M_2 که نشان‌دهنده ماشین متناهی مربوط به دو زبان:

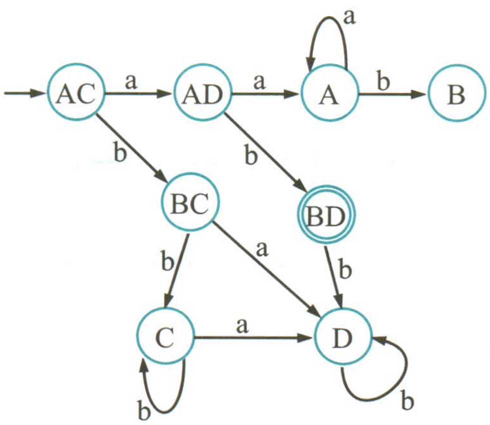
$$L_1 = \left\{a^n b \mid n \geq 0\right\}$$

و

$$L_2 = \left\{b^n a b^m \mid m, n \geq 0\right\}$$

هستند به صورت زیر داده شده است. ماشینی بسازید که اشتراک دو زبان مورد نظر را پذیرا باشد:

برای ساخت ماشینی که اشتراک هر دو زبان را بپذیرد باید از حالتی که نشان‌دهنده حالات اولیه هر دو ماشین است شروع کرده و با هر ورودی هر دو ماشین را همزمان به پیش برد و درنهایت نیز حالتی که نشان‌دهنده حالات نهایی هر دو ماشین است به عنوان نهایی محسوب شود:



که درنهایت ماشین بالا را می‌توان به صورت بهینه زیر تولید کرد که فقط رشته ab را می‌پذیرد:

تعریف: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند، آن‌گاه خارج قسمت راست (right quotient) L_1 بر L_2 که با L_1 / L_2 نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_1 / L_2 = \left\{x \mid \exists y \left(y \in L_2 \text{ and } xy \in L_1\right)\right\}$$

تعریف: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند، آن‌گاه خارج قسمت چپ (left quotient) L_1 بر L_2 که با $L_2 \setminus L_1$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_2 \setminus L_1 = \left\{x \mid \exists y \left(y \in L_2 \text{ and } yx \in L_1\right)\right\}$$

نکته: در خارج قسمت راست، جملات L_2 را با انتهای سمت راست جملات L_1 تطبیق داده و پیشوند باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم و در خارج قسمت چپ، جملات L_2 را با ابتدای سمت چپ جملات L_1 تطبیق داده و پسوند باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۴-۴: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند، آن‌گاه زبان‌های L_1/L_2 و $L_2 \backslash L_1$ نیز منظم هستند. به بیان دیگر زبان‌های منظم تحت عملگرهای خارج قسمت راست و خارج قسمت چپ، بسته هستند.

تعریف: فرض کنید Σ و Γ دو مجموعه باشند که هر کدام‌یک الفبا را نشان دهد. یک تابع $h:\Sigma \to \Gamma^*$ یک تابع همریختی(Homomorphism) محسوب می‌شود. به بیان دیگر تابع همریختی یک حرف از الفبای Σ را با یک رشته از الفبای Γ جایگزین می‌کند. اگر $w = a_1a_2...a_n$، آن‌گاه $h(w) = h(a_1).h(a_2)...h(a_n)$ و همچنین اگر L زبانی بر روی Σ باشد، آن‌گاه تصویر همریختی زبان L تحت تابع h به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$$

تعریف: تصویر همریختی معکوس یک رشته مانند s تحت همریختی h به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{-1}(s) = \{w \mid h(w) = s\}$$

تعریف: تصویر همریختی معکوس یک زبان مانند L تحت همریختی h به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{-1}(L) = \{s \mid h(s) \in L\}$$

نکته: در حالت کلی $h(h^{-1}(L)) \subseteq L \subseteq h^{-1}(h(L))$.

مثال ۵ : اگر $\Sigma = \Gamma = \{a,b\}$، $L_1 = \{ab, aa\}$، $L_2 = \{a, bb\}$ و تابع h به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{cases} h(a) = a \\ h(b) = aa \end{cases}$$

آن‌گاه:

$$h(L_1) = \{aa, aaa\}$$

درنتیجه:

$$h^{-1}(h(L_1)) = \{ab, ba, aaa, aa, b\}$$

و همچنین:

$$h^{-1}(L_2) = \{a\}$$

درنتیجه:

$$h(h^{-1}(L_2)) = \{a\}$$

تعریف: اگر h یک تابع همریختی باشد، آن‌گاه همریختی h، بدون λ($\lambda-$free) نامیده می‌شود اگر:

$$\forall a \in \Sigma : h(a) \neq \lambda$$

مثال ۶: اگر $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$ و تابع h به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{cases} h(a) = bba \\ h(b) = bc \end{cases}$$

آن‌گاه:

$$h(L) = \{(bba)^n bc \mid n \geq 0\}$$

قضیه ۴-۵: اگر L یک زبان منظم دلخواه و h نیز یک تابع همریختی باشد، آن‌گاه $h(L)$ نیز منظم است.

در این قسمت به بررسی الگوریتم‌های موجود بر روی زبان‌های منظم می‌پردازیم.

قضیه ۴-۶: اگر L یک زبان منظم دلخواه و w نیز رشته‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه بررسی $w \in L$ دارای الگوریتم است.

اثبات: ازآنجاکه زبان L منظم است، دارای ماشین متناهی است. اگر ماشین متناهی آن را M بنامیم، آن‌گاه با ارائه رشته w به ماشین M، اگر ماشین با دریافت رشته w در حالت نهایی قرار گیرد، رشته w داخل زبان مورد نظر است؛ در غیر این صورت رشته w در زبان مورد نظر وجود ندارد.

قضیه ۴-۷: اگر L یک زبان منظم دلخواه باشد، آن‌گاه بررسی تهی بودن زبان L دارای الگوریتم است.

اثبات: ازآنجاکه زبان L منظم است، دارای ماشین متناهی است. اگر ماشین متناهی آن را M بنامیم، آن‌گاه اگر مسیری از حالت اولیه به یک حالت نهایی در ماشین M وجود داشته باشد زبان مورد نظر تهی نیست و در غیر این صورت زبان مورد نظر تهی است.

قضیه ۴-۸: اگر L یک زبان منظم دلخواه باشد، آن‌گاه بررسی متناهی بودن زبان L دارای الگوریتم است.

اثبات: ازآنجاکه زبان L منظم است دارای ماشین متناهی است. اگر ماشین متناهی آن را M بنامیم، آن‌گاه اگر مسیری از حالت اولیه به یکی از حالات نهایی وجود داشته باشد که دارای چرخه باشد زبان مورد نظر نامتناهی است.

قضیه ۴-۹: اگر L_1 و L_2 دو زبان منظم دلخواه باشند آن‌گاه بررسی $L_1 = L_2$ دارای الگوریتم است.

اثبات: ازآنجاکه دو زبان L_1 و L_2 در صورتی با هم مساوی هستند که $(L_1 - L_2) \cup (L_2 - L_1) = \varnothing$ و گزاره مورد نظر را می‌توان به صورت $(L_1 \cap \bar{L}_2) \cup (L_2 \cap \bar{L}_1) = \varnothing$ بیان کرد و ازآنجاکه طبق قضیه ۴-۷ بررسی تهی بودن یک زبان دارای الگوریتم است، می‌توان از آن الگوریتم استفاده کرد.

لم تزریق برای زبان‌های منظم

اگر L یک زبان منظم نامتناهی باشد، آن‌گاه یک عدد صحیح مثبت مانند m وجود دارد به طوری‌که هر رشته $w \in L$ با $|w| \geq m$ می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

$$w = xyz \,,\, |xy| \leq m \,,\, |y| \geq 1$$

به طوری که:

$$\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$$

نکته: معمولاً با لم تزریق برای زبان‌های منظم می‌توان منظم نبودن یک زبان نامنظم را اثبات کرد.

نکات و قضایای مهم در رابطه با زبان‌های منظم

۱. اگر L زبان منظم باشد $L - \{\lambda\}$ نیز منظم است.

۲. تمام زبان‌های متناهی، منظم هستند (زبانی متناهی است که تعداد جملات آن متناهی باشد) $(|L| < \infty)$

۳. زبانی منظم است که اطلاعات در موقع پردازش یک رشته باید در هر مرحله به خاطر آورده شود.

۴. زیرمجموعه یک زبان منظم الزاماً منظم نیست زیرا مثلاً Σ^* خود منظم است. ازطرفی هر زبانی می‌تواند زیرمجموعه Σ^* باشد که منظم یا نامنظم است.

۵. اگر L_1, L_2 منظم نباشد، آن‌گاه $L_1 \cup L_2$ ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۶. اگر L_1 منظم باشد و $L_1 \cup L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۷. اگر L_1 منظم و L_2 نامنظم باشد، آن‌گاه $L_1 \cap L_2$ ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۸. اگر L_1 منظم باشد و $L_1 L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۹. اگر L_1 منظم باشد و $L_1 \cap L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۱۰. اگر L_1 منظم باشد و $L_1 - L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 ممکن است منظم یا نامنظم باشد.

۱۱. اگر L یک زبان منظم باشد و تعداد جملات به طول n در آن را با $c_L(n)$ نشان دهیم، آن‌گاه اعداد ثابتی مانند $a_1, a_2, \ldots, a_k$ و توابع چندجمله‌ای مانند $P_1(x), P_2(x), \ldots P_k(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$c_L(n) = a_1^n P_1(n) + a_2^n P_2(n) + \ldots + a_k^n P_k(n)$$

برای نمونه اگر L زبان عبارات پرانتزی خوش‌ساخت (متوازن) باشد، در این زبان:

$$c_L(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \cong \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$$

ازآنجاکه $c_L(n)$ را نمی‌توان به صورت یک چندجمله‌ای بیان کرد، این زبان منظم نیست.

.۱۲

۱. برای هر NFA با چندین وضعیت ابتدایی یک NFA با فقط یک وضعیت ابتدایی وجود دارد که همان زبان را می‌پذیرد.

۲. برای هر NFA با چندین وضعیت نهایی یک NFA معادل با فقط یک وضعیت نهایی وجود دارد.

۳. برای هر DFA با چندین وضعیت ابتدایی یک DFA معادل با فقط یک وضعیت ابتدایی وجود دارد.

۴. قانون شماره ۱۲ـ۲ برای یک DFA صادق نیست اما در مورد یک NFA برقرار است زیرا در یک NFA می‌توانیم تمامی وضعیت‌های پایانی را به وضعیت غیر پایانی تبدیل کرده سپس همه آن‌ها را با یک λ به یک وضعیت نهایی جدید انتقال دهیم اما در یک DFA مجاز نیستیم که از $\lambda -$ transition ها استفاده کنیم.

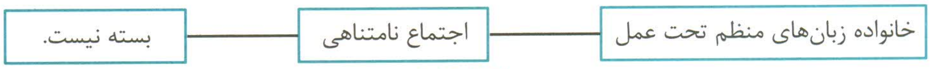
۵. اگر L یک زبان منظم باشد، آن‌گاه یک NFA با یک وضعیت نهایی وجود دارد که L را می‌پذیرد.

۶. به ازای هر NFA، یک DFA معادل با یک وضعیت ابتدایی وجود دارد زیرا می‌دانیم به ازای هر NFA یک DFA معادل با آن وجود دارد. ازطرفی به ازای هر DFA یک DFA معادل با فقط یک وضعیت ابتدایی وجود دارد.

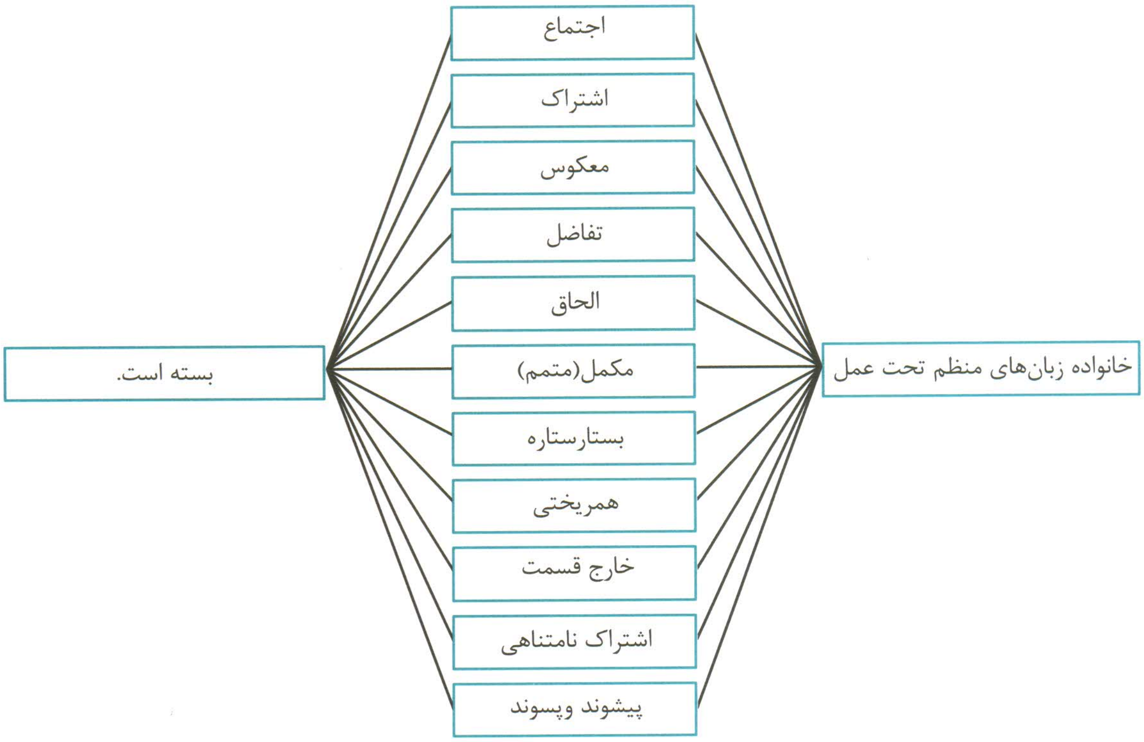
.۱۳

۱. برای معکوس کردن زبان یک DFA ، جهت فلش‌ها را برعکس می‌کنیم و حالات پایانی را به حالت اولیه و حالت اولیه را به پایانی تبدیل می‌کنیم.

۲. هیچ الگوریتم خاصی برای مکمل کردن (Complement) زبان یک ماشین NFA وجود ندارد ولی در مورد یک ماشین DFA روشی برای متمم کردن (Complement) آن وجود دارد. بدین ترتیب عمل می‌کنیم که با در نظر گرفتن حالت trap تمام حالات پایانی را به حالات غیر پایانی و تمام حالات غیر پایانی را به پایانی تبدیل می‌کنیم.



شکل ۴-۱



شکل ۴-۲

جدول ۴-۱

خانواده زبان‌های منظم تحت عمل	Head (L)	$\left\{x \mid xy \in L_1, y \in \Sigma^*\right\}$	بسته است
	Shuffle(L_1,L_2)	$L1=\{w_1, w_2, \ldots\}$ $L2=\{v_1, v_2, \ldots\}$ $\Rightarrow \text{shuffle}(L_1, L_2)=\{w_1v_1, w_2v_2, \ldots\}$	
	Minus(n)	حذف n عنصر از چپ (برای رشته‌هایی با طول کمتر از n بدون تغییر)	
	nor(L_1,L_2)	$\{w : w \notin L_1, w \notin L_2\}$	
	Third	$\text{Third}(q_1q_2q_3 \ldots q_n)=q_3q_6\ldots$	
	exchange	$\text{exchange}(q_1q_2\ldots q_{n-1}q_n)=q_nq_2\ldots q_{n-1}q_1$	
	even(L)	$\text{even}(q_1q_2q_3\ldots q_n)=q_2q_4\ldots$	
	truncate	اگر تابع truncate، سمت راست‌ترین عنصر رشته را حذف کند و L منظم باشد آن‌گاه truncate (L) نیز منظم است (به شرطی که L شامل λ نباشد).	
	Shift(L)	$\text{shift}(q_1q_2\ldots q_n)=q_nq_1q_2\ldots q_{n-1}$	

نمونه سؤالات

۱. اگر $L_1 = L(a^*baa^*)$, $L_2 = L(ab^*)$ باشد، آن‌گاه L_1 / L_2 کدام است؟

۱) $L(a^+ba^*)$
۲) $L(a^*ba^*)$
۳) $L(a^*ba^+)$
۴) $L(a^+ba^+)$

۲. اگر $L_1 = \{a^n b^m : n \geq 1 , m \geq 0\} \cup \{ba\}$ و $L_2 = \{b^m : m \geq 1\}$، آن‌گاه L_1 / L_2 کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $L_1 / L_2 = \{a^n b^m : n \geq 0 , m \geq 0\}$
۲) $L_1 / L_2 = \{a^n b^m : n \geq 0 , m \geq 1\}$
۳) $L_1 / L_2 = \{a^n b^m : n \geq 1 , m \geq 0\}$
۴) $L_1 / L_2 = \{a^n b^m : n \geq 1 , m \geq 1\}$

۳. اگر مجموعه‌های L_1, L_2 به صورت زیر تعریف شوند، آن‌گاه مجموعه $(L_1 / (L_1 / L_2))$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

$L_1 = \{\lambda, a, ab, aab, baa, baba\}$

$L_2 = \{a, b\}$

۱) $\{\lambda, ba, bab, a, aa\}$
۲) $\{\lambda, aa, aab, baba, b\}$
۳) $\{\lambda, a, ab, aab, baa, baba, ba, bab, b\}$
۴) هیچ‌کدام

۴. اگر مجموعه‌های L_3, L_2, L_1 به صورت زیر تعریف شوند، آن‌گاه حاصل مجموعه $L_1.((L_3 / (L_2 / L_1))$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

$L_1 = \{\lambda, a, b, ba, aaa, bbb\}$

$L_2 = \{\lambda, ab, bb, bba, aba, aab, b\}$

$L_3 = \{\lambda, a, aaa, bbb, aabb, bbaa\}$

۱) $\{ab, bb, bba, aab\}$
۲) $\{b, aa\}$
۳) $\{a, b, bb, aa, bba, aab\}$
۴) هیچ‌کدام

۵. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر L زبان منظم باشد، آن‌گاه $L - \{\lambda\}$ نیز منظم است.
۲) زیرمجموعه یک زبان منظم الزاماً منظم نیست.
۳) تمامی زبان‌های متناهی، منظم هستند.
۴) هیچ‌کدام

۶. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

i: اگر L_1 منظم باشد، $L_1 \cap L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 نیز منظم است.

ii: اگر L_1 منظم باشد، $L_1 \cup L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه ممکن است L_2 نیز منظم باشد.

iii: اگر L_1 منظم باشد، $L_1 - L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 نیز منظم است.

iv: اگر L_1 منظم باشد، $L_1 . L_2$ نیز منظم باشد، آن‌گاه L_2 نیز منظم است.

۱) i و iii و iv
۲) فقط ii
۳) همه موارد
۴) هیچ‌کدام

۷. کدام گزینه نادرست است؟

(علوم کامپیوتر ۸۴)

۱) اگر L_1 و L_2 زبان‌هایی منظم باشند و $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$، آن‌گاه L منظم است.

۲) هر زبان منظم نامتناهی شامل یک زبان منظم نامتناهی دیگر است.

۳) هر زبان دلخواه زیرمجموعه یک زبان منظم نامتناهی است.

۴) برای هر عدد $0 \neq k \in \mathbb{N}$، اجتماع k زبان منظم دلخواه در $\{0,1\}^*$، یک زبان منظم است.

۸. زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ به صورت زیر تعریف شده است: (λ نمایانگر کلمه پوچ به طول صفر است.)

(علوم کامپیوتر ۸۴)

- $\lambda \in L$
- اگر $x \in L$ آن‌گاه $0x1 \in L$.
- اگر $x \in L$ و $y \in L$ آن‌گاه $xy \in L$.

کدام گزینه صحیح است؟

۱) L منظم است ولی در هر کلمه از این زبان لزوماً تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی نیست.

۲) L زبان منظم است و در هر کلمه از این زبان تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی است.

۳) L منظم نیست ولی در هر کلمه از این زبان تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی است.

۴) L منظم نیست و در هر کلمه از این زبان نیز لزوماً تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی نیست.

۹. برای کدام تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ زبان $L_f = \{0^n 1^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0,1\}^*$ منظم نیست؟

(علوم کامپیوتر ۸۴)

۱) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases}$

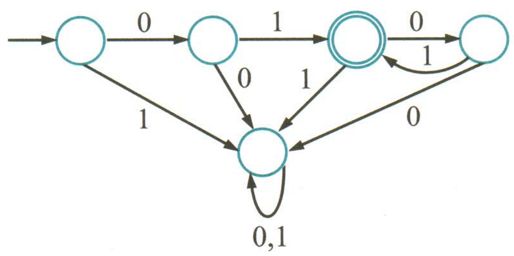
۲) $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{زوج } n \\ 2n+1 & \text{فرد } n \end{cases}$

۳) $f(n) = 15$

۴) $f(n) = 16$

۱۰. تعداد حالات اتوماتون مینیمال برای اتوماتون زیر برابر است با:

(علوم کامپیوتر ۸۴)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱. فرض کنید Σ یک الفبا، L یک زبان بر روی Σ و $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. L یک زبان قابل تعریف به وسیله (Finite –State Automata) نیست اگر:

۱) $(\exists n \in N)(\forall x \in L \text{ such that} \mid x \mid \geq n)(\exists u, v, w \in \Sigma^*) \text{such that}$
$x = uvw, \mid uv \mid \leq n, \mid v \mid \geq 1, \text{and} (\forall i \in N)(uv^i w \in L)$

۲) $(\forall n \in N)(\exists x \in L \text{ such that} \mid x \mid \geq n)(\forall u, v, w \in \Sigma^*) \text{such that}$
$x = uvw, \mid uv \mid \leq n, \mid v \mid \geq 1, \text{and} (\exists i \in N)(uv^i w \notin L)$

۳) $(\forall n \in N)(\exists x \in L \text{ such that} \mid x \mid \geq n)(\forall u, v, w \in \Sigma^*) \text{such that}$
$x = uvw, \mid uv \mid \leq n, \mid v \mid \geq 1, \text{and} (\exists i \in N)(uv^i w \in L)$

۴) $(\exists n \in N)(\forall x \in L \text{ such that} \mid x \mid \geq n)(\exists u, v, w \in \Sigma^*) \text{such that}$
$x = uvw, \mid uv \mid \leq n, \mid v \mid \geq 1, \text{and} (\forall i \in N)(uv^i w \notin L)$

۱۲. زبان‌های مستقل از متن L_1 و L_2 به شرح زیر مفروض‌اند:

$$L_1 = \{a^n baa^m \mid n \geq m > 0\}$$
$$L_2 = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$$

کدام گزینه در مورد زبان $L = \ x \mid xy \in L_1 \text{ and } y \in L_2 \ $ درست است؟

۱) $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$
۲) $L = \{a^n ba \mid n \geq 0\}$
۳) $L = \{a^n ba^{m+1} \mid n \geq m \geq 0\}$
۴) $L = \{a^n ba^m \mid n \geq m \geq 0\}$

۱۳. کدام گزاره نادرست است؟

(علوم کامپیوتر ۸۶)

۱) اشتراک دو زبان منظم روی یک مجموعه الفبای مشخص حتماً منظم است.
۲) هر زبان نامنظم زیرمجموعه یک زبان منظم است.
۳) هر زبان ناتهی حتماً شامل یک زبان ناتهی و منظم است.
۴) اجتماع تعداد دلخواهی از زبان‌های منظم حتماً منظم است.

۱۴. اگر L_1 و L_2 زبان‌هایی نامنظم روی الفبای Σ باشند، آن‌گاه:

(علوم کامپیوتر ۸۵)

۱) $L_1.L_2$ لزوماً نامنظم است.

۲) $L_1 \cup \left(\Sigma^* - L_2\right)$ لزوماً نامنظم است.

۳) $L_1 \cup L_2$ لزوماً نامنظم است.

۴) $\left(\Sigma^* - L_1\right)$ و $\left(\Sigma^* - L_2\right)$ لزوماً نامنظم هستند.

۱۵. کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟

i: برای مکمل کردن زبان هر ماشین متناهی (FA)، باید وضعیت‌های پایانی را به غیر پایانی و وضعیت‌های غیر پایانی را به پایانی تبدیل کنیم.

ii: برای معکوس کردن زبان یک ماشین متناهی قطعی (DFA) هیچ روش کلاسیکی وجود ندارد.

iii: به ازای هر DFA با چندین وضعیت نهایی، یک DFA معادل با فقط یک وضعیت نهایی وجود دارد.

۱) فقط i
۲) i و iii
۳) i و ii و iii
د) هیچ‌کدام

۱۶. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) هر زبان پذیرفته‌شده توسط یک DFA با n وضعیت، قابل پذیرش توسط NFAای با n وضعیت است.

۲) هر زبان پذیرفته‌شده توسط یک NFA با n وضعیت، قابل پذیرش توسط DFAای با n وضعیت است.

۳) هر زبان پذیرفته‌شده توسط یک عبارت منظم به طول n قابل پذیرش توسط یک DFAای با تعدادی متناسب با n وضعیت است.

۴) اگر دو زبان منظم B , A قابل پذیرش توسط دو DFA متفاوت با n وضعیت باشند، آن‌گاه زبان $A \cup B$ قابل پذیرش توسط یک DFA با حداکثر $2n+1$ وضعیت است.

۱۷. اگر $M = \left(Q, q_0, \Sigma, F, \delta\right)$ یک اتومات متناهی باشد. تعریف می‌کنیم $\overline{M} = \left(Q, q_0, \Sigma, Q-F, \delta\right)$ و همچنین $d(M)$ اتومات قطعی معادل M خواهد بود. اگر M_1 و M_2 دو اتومات متناهی باشند، $M_1 + M_2$ اتومات متناهی است که زبان آن اجتماع زبان‌های M_1 و M_2 است. فرض کنید G_1 و G_2 دو گرامر منظم باشند که زبان آن‌ها به ترتیب معادل زبان‌های M_1 و M_2 هستند. کدام عبارت زیر صحیح است؟

(مهندسی کامپیوتر ۸۸)

۱) $L(G_1) - L(G_2) = \left(L\overline{\overline{M}_1 + M_2}\right)$

۲) $L(G_1) - L(G_2) = L\left(\overline{d\left(\overline{d(M_1)} + M_2\right)}\right)$

۳) $L(G_1) - L(G_2) = L\left(\overline{\overline{d(M_1)} + d(M_2)}\right)$

۴) $L(G_1) - L(G_2) = L\left(\overline{\overline{d(M_1)} + \overline{d(M_2)}}\right)$

۱۸. برای هر زبان منظم $L \subseteq \Sigma^*$، ....

(علوم کامپیوتر ۸۷)

۱) اتوماتون مینیمال $\Sigma^* - L$ حتماً دارای یک حالت پذیرش منحصربه‌فرد یکتاست.

۲) اتوماتون مینیمال L حتماً دارای یک حالت پذیرش منحصربه‌فرد یکتاست.

۳) اگر M یک اتوماتون قطعی مینیمال L با q حالت باشد، آن‌گاه $q > \min\left\{|w| \mid w \in \Sigma^* - L\right\}$

۴) تعداد حالات اتوماتون‌های مینیمال L و $\Sigma^* - L$ برابر است.

۱۹. اگر $m(L)$ تعداد حالات DFA مینیمال متناظر با زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ باشد، کدام گزاره همواره درست است؟

(علوم کامپیوتر ۸۵)

۱) $m(L) = m(L^R)$

۲) $m(L) \geq 2^{m(L^R)}$

۳) $m(L) \leq 2^{m(L^R)}$

۴) $m(L) \leq \min(m(L), m(L^R))$

۲۰. کدام عبارت صحیح است؟

(دولتی مهندسی کامپیوتر ۸۹)

۱) در هر زبان منظم L رشته‌ای مثل z وجود دارد به قسمی که $z = uvw$ و $v \neq \varepsilon$ و برای هر مقدار صحیح i رشته $z' = uv^iw$ نیز متعلق به زبان L است.

۲) برای هر زبان منظم L عددی صحیح مثل k وجود دارد به قسمی که اگر رشته‌ای از L مثل z با طول بزرگ‌تر از k داشته باشیم، آن‌گاه حتماً رشته‌ای از L با طول کوچک‌تر از k نیز خواهیم داشت.

۳) اگر رشته‌ای از زبان L مثل $z = uvw$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $i \geq 0$ رشته $z = uv^iw$ متعلق به L باشد، آن‌گاه L زبانی منظم است.

۴) هر سه مورد صحیح است.

۲۱. زبان‌های زیر با $\alpha, \gamma \in \Sigma^*$ و $\beta \in \Sigma^+$ مفروض‌اند. کدام گزینه صحیح است؟

(دولتی مهندسی کامپیوتر ۸۷)

$$L_1 = \left\{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^i, j \geq 0, i \geq 0\right\}$$

$$L_2 = \left\{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^{i+j}, j \geq 0, i \geq 1\right\}$$

$$L_3 = \left\{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^i, j \geq, i \geq 1\right\}$$

۱) L_3 و L_1 هر دو منظم هستند.

۲) L_1 منظم و L_3 نامنظم است.

۳) L_1 منظم و L_2 نامنظم است.

۴) L_1 و L_2 و L_3 همگی نامنظم هستند.

حل تشریحی

۱. گزینه ۲ درست است.

اگر از انتهای سمت راست جملات L_1، جملاتی به فرم ab^* را جدا کنیم، گزینه ۲ به دست می‌آید؛ بنابراین گزینه ۲ درست است.

۲. گزینه ۳ درست است.

۳. گزینه ۳ درست است.

$$L_1 / L_2 = \{\lambda, ba, bab, a, aa\}$$
$$\left(L_1 / \left(L_1 / L_2\right)\right) = \{\lambda, a, bb, aab, baa, baba, ba, bab, b\}$$

۴. گزینه ۴ درست است.

$$L_2 - L_1 = \{ab, bb, bba, aba, aab\}$$
$$\left(L_3 / \left(L_2 - L_1\right)\right) = \{b, aa\}$$
$$\left(L_3 / \left(L_2 - L_1\right)\right).L_1 = \{b, ba, bb, bba, baaa, bbbb, aa, aaa, aab, aaba, aaaaa, aabbb\}$$

۵. گزینه ۴ درست است.

ازآنجاکه با حذف تعداد متناهی رشـــته از یک زبان منظم نتیجه هنوز یک زبان منظم اســت؛ بنابراین جمله ۱ درست است. ازآنجاکه تمامی زبان‌ها (چه منظم و چه نامنظم) همه، زیر مجموعه زبان Σ^* هستند، جمله ۲ نیز درست است.

۶. گزینه ۱ درست است.

مثالی برای نادرست بودن i و iii و iv به صورت زیر است:

$$L_1 = \varnothing, L_2 = \left\{a^n b^n \mid n \geq 0\right\}$$

مثالی برای درست بودن ii به صورت زیر است:

$$L_1 = \Sigma^*, L_2 = \left\{a^n b^n \mid n \geq 0\right\}$$

۷. گزینه ۱ درست است.

فرض کنید:

$$L_1 = \varnothing, L_2 = \Sigma^*$$

و ازآنجاکه هر زبانی (چه منظم و چه نامنظم) شامل تهی و مشمول Σ^* است، جمله ۱ نادرست است. برای نشان دادن درستی جمله ۲ می‌توان گفت که با حذف یک رشته دلخواه از هر زبان منظم نامتناهی به زبان منظمی می‌رسیم که زیرمجموعه زبان اول است. ازآنجاکه هر زبانی زیرمجموعه Σ^* است، جمله ۳ درست است. اجتماع تعداد نامتناهی زبان منظم ممکن است منظم نباشد ولی اجتماع تعداد مشخصی زبان منظم حتماً منظم است.

۸. گزینه ۳ درست است.

ازآنجاکه زبان L دارای گرامر زیر است، مستقل از متن بوده ولی در هر جمله آن تعداد 0 ها با تعداد 1 ها برابر است.

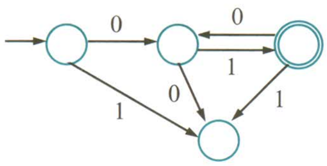
$$S \to SS \mid 0S1 \mid \lambda$$

۹. گزینه ۲ درست است.

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ ماشین متناهی دارند.

۱۰. گزینه ۳ درست است.

ماشین مینیمال برای ماشین مورد نظر به صورت زیر است:



بنابراین گزینه ۳ درست است.

۱۱. گزینه ۲ درست است.

فقط گزینه ۲ نقیض لم تزریق محسوب می‌شود. دقت کنید که:

$$\sim\left(\exists x : P(x)\right) \equiv \forall x :\sim P(x)$$

و همچنین:

$$\sim\left(\forall x : P(x)\right) \equiv \exists x :\sim P(x)$$

۱۲. گزینه ۴ درست است.

بر اساس تعریف عملگر خارج قسمت راست گزینه ۴ درست است.

۱۳. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم که زبان‌های منظم تحت اجتماع نامتناهی بسته نیستند؛ بنابراین گزینه ۴ درست است. ازآنجاکه زبان‌های منظم تحت اشتراک بسته هستند، جمله ۱ درست است. ازآنجاکه همه زبان‌ها زیرمجموعه Σ^* هستند، جمله ۲ درست است. ازآنجاکه هر زبان ناتهی حداقل دارای یک رشته است و آن رشته به‌تنهایی چون متناهی است پس منظم است، جمله ۳ درست است.

۱۴. گزینه ۴ درست است.

ازآنجاکه زبان‌های منظم تحت مکمل‌گیری بسته هستند، گزینه ۴ درست است. برای نشان دادن اینکه جمله ۱ ممکن است نادرست باشد، L_1 و L_2 را به صورت زیر فرض کنید:

$$L_1 = L_2 = \left\{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) \neq n_b(w)\right\} \cup \{\lambda\}$$

حال می‌توان دید که:

$$L_1.L_2 = \Sigma^*$$

ازآنجاکه $\overline{L}_2 = \Sigma^* - L_2$، اگر L_2 نامنظم باشد، $\overline{L}_2$ نیز نامنظم است ولی اجتماع دو زبان نامنظم ممکن است منظم شود مانند مثال زیر:

$$L_1 = \left\{a^n b^n \mid n \geq 0\right\}$$

و

$$L_2 = \overline{L_1}$$

بنابراین جمله ۲ و ۳ نادرست هستند.

۱۵. گزینه ۴ درست است.

جمله i فقط برای ماشین‌های متناهی قطعی که حالت تله نیز در آن‌ها رسم شده است، درست است. الگوریتم معکوس کردن زبان ماشین متناهی قطعی در داخل فصل چهارم ذکر شده است؛ بنابراین جمله ii نیز نادرست است. برای برخی از ماشین‌های متناهی قطعی که دارای چندین حالت نهایی هستند ماشین معادلی با فقط یک حالت نهایی وجود ندارد؛ پس جمله iii نادرست است؛ ازاین‌رو گزینه ۴ درست است.

۱۶. گزینه ۱ درست است.

دلیل نادرست بودن گزینه ۴:

$$B = L\left(b^* a b^*\right) \text{ و } A = L\left(a^* b a^*\right)$$

۱۷. گزینه ۲ درست است.

چون برای مکمل‌گیری از یک ماشین متناهی حتماً باید آن را به قطعی تبدیل کرد و همچنین هر بار، عمل اجتماع منجر به تولید ماشین غیر قطعی خواهد شد، بنابراین از روی رابطه زیر می‌توان زبان مورد نظر را تولید کرد:

$$L(G_1) - L(G_2) = L(G_1) \cap \overline{L(G_1)} = \overline{\overline{L(G_1)} \cup L(G_2)}$$

۱۸. گزینه ۳ درست است.

در پذیرنده‌های متناهی غیر قطعی ممکن است تعداد حالات ماشین مربوط به یک زبان با تعداد حالات ماشین مکمل آن زبان برابر نباشد؛ بنابراین گزینه ۴ نادرست است؛ ازاین‌رو گزینه ۳ درست است.

۱۹. گزینه ۳ درست است.

ازآنجاکه در تبدیل یک DFA که زبان L را می‌پذیرد به DFA ای که زبان L^R را می‌پذیرد، ممکن است ماشین به غیر قطعی تبدیل شود و در تبدیل آن به DFA تعداد حالات به صورت توانی زیاد شود:

$$\log_2 m(L) \leq m\left(L^R\right) \leq 2^{m(L)}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

گزینه ۱ در حالتی که زبان منظم L نامتناهی باشد درست است ولی در زبان‌های متناهی نادرست است. در گزینه ۲ سه حالت وجود دارد؛ در حالت اول زمانی که زبان نامتناهی باشد، کافی است k را یک واحد بیشتر از طول کوچک‌ترین رشته زبان در نظر

بگیریم. در حالت دوم زمانی که زبان متناهی و غیر تهی باشد، k را مساوی با طول بزرگ‌ترین رشته زبان فرض می‌کنیم و در حالت سوم زمانی که $L = \varnothing$ باشد، k را می‌توان هر عدد دلخواهی در نظر گرفت. گزینه ۳ نیز نادرست است. زبان زیر نمونه‌ای از یک زبان غیر منظم است که شرایط مورد نظر در گزینه ۳ را دارد:

$$L = \left\{a^n \mid n \geq 0\right\} \cup \left\{b^n c^n \mid n \geq 0\right\}$$

۲۱. گزینه ۴ درست است.

ازآنجاکه در هر سه زبان وابستگی بین ابتدای رشته‌ها و انتهای رشته‌ها وجود دارد که با حافظه متناهی امکان تشخیص آن وجود ندارد، بنابراین هر سه زبان نامنظم هستند و گزینه ۴ درست است.

خودآزمایی

۱. بررسی کنید که آیا زبان زیر منظم است؟

$$L = \left\{uww^R v \mid u, v, w \in \{a,b\}^+\right\}$$

۲. بررسی کنید که آیا زبان زیر منظم است؟

$$L = \left\{uww^R v \mid u, v, w \in \{a,b\}^+, |u| \geq |v|\right\}$$

۳. در لم تزریق m نشان‌دهنده چه کمیتی است و چه ارتباطی با ماشین پذیرنده زبان مورد نظر دارد؟

۴. نشان دهید که زبان زیر منظم نیست:

$$L = \left\{a^n b^k \mid n > k\right\} \cup \left\{a^n b^k \mid n \neq k-1\right\}$$

۵. مثالی از دو زبان غیر منظم بیابید که اجتماع آن‌ها منظم باشد.

۶. مثالی از دو زبان غیر منظم بیابید که اجتماع آن‌ها غیر منظم باشد.

۷. مثالی از یک زبان منظم و یک زبان نامنظم بیابید که اجتماع آن‌ها منظم باشد.

۸. مثالی از یک زبان منظم و یک زبان نامنظم بیابید که اجتماع آن‌ها نامنظم باشد.