فصل ۹ ماشین‌های تورینگ

در این فصل دسته دیگری از ماشین‌ها که ماشین تورینگ نامیده می‌شود مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. ماشین‌های تورینگ (Turing machine) هر کاری را که یک کامپیوتر انجام می‌دهد، می‌توانند انجام دهند. این موضوع ما را به سمتی هدایت می‌کند که به تز تورینگ معروف است. این تز بیان می‌کند که هر کاری که به وسیله کامپیوترهای امروزی قابل انجام است توسط ماشین تورینگ نیز انجام‌شدنی است. به بیان دیگر قدرت ماشین تورینگ نهایت قدرت محاسبات مکانیکی نامیده می‌شود.

شخصی را تصور کنید که پشت یک میز نشسته و محاسباتی را انجام می‌دهد.این شخص می‌تواند:

- علایمی را که روی کاغذ نوشته شده است، بخواند.
- علایمی را روی کاغذ بنویسد.
- اطلاعاتی را که روی کاغذ نوشته شده است را پاک کند.
- بر اساس علایمی که از روی کاغذ خوانده، عملیاتی را انجام دهد.

فرض کنید کاغذی که شخص، عملیاتی را روی آن انجام می‌دهد به صورت یک نوار (tape) است که به سلول‌هایی تقسیم شده است که در هر سلول یک حرف و یا علامت خالی (Blank) می‌تواند قرار گیرد. کامپیوتر در هر لحظه می‌تواند روی یکی از این سلول‌ها متمرکز شود. فرض کنید فضایی را که روی کاغذ برای انجام عملیات داریم، نامحدود است. عملیاتی که کامپیوتر می‌تواند روی این نوار انجام دهد به صورت زیر است:

- خواندن محتوای یک سلول از نوار
- نوشتن یک حرف یا فضای خالی در همان سلول از نوار
- حرکت به روی سلول سمت چپی (left) و یا سلول سمت راستی (right).

حال یک مدل رسمی از یک کامپیوتر مجرد داریم و می‌توانیم توابعی را که یک کامپیوتر می‌تواند محاسبه کند با این ماشین پیاده‌سازی کنیم. این توابع را می‌توانیم « توابع قابل محاسبه به وسیله ماشین تورینگ» نام‌گذاری کنیم.(Turing Computable)

تعریف رسمی ماشین تورینگ استاندارد قطعی

یک ماشین تورینگ یک چندتایی مرتب به صورت $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\square,F)$ است. که در آن:

Q: مجموعه‌ای متناهی از حالات

Σ: مجموعه‌ای متناهی از الفبای ورودی

Γ: مجموعه‌ای متناهی از الفبای نوار

δ: تابع انتقال

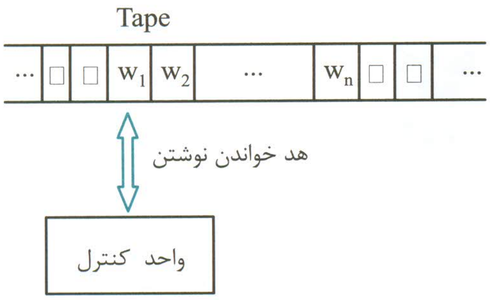
$$\delta: Q\times\Gamma \rightarrow Q\times\Gamma\times\{L,R\}$$

$\square$: علامت خالی $(\square \in \Gamma)(\text{Blank})$

q_0: حالت ابتدایی $(q_0 \in Q)$

F: حالات پایانی (پذیرش) $(F \subseteq Q)$

در ماشین تورینگ فرض بر این است که الفبای ورودی زیرمجموعه‌ای از الفبای نوار محسوب می‌شود و همچنین علامت جای خالی نیز جزو الفبای نوار است $\left(\Sigma \subseteq \Gamma - \{\square\}\right)$. یک نوار نامحدود داریم و یک هد که در هر لحظه روی یکی از سلول‌های نوار قرار می‌گیرد. اگر رشته ورودی نوار $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n$ باشد آن‌گاه روی n خانه اول از نوار ماشین تورینگ نمادهای $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$ را خواهیم داشت. مابقی سلول‌های نوار به صورت پیش فرض با نماد خالی $\square$ پر شده‌اند و هد ماشین به صورت پیش‌فرض روی اولین خانه از نوار قرار دارد. دیاگرام روبه‌رو شمای کلی یک ماشین تورینگ را نشان می‌دهد:



شکل ۹-۱

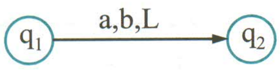
ازآنجا که می‌توانیم روی نوار بنویسیم؛ بنابراین می‌توانیم از آن به عنوان حافظه استفاده کنیم.

تابع انتقال

تابع انتقال در یک ماشین تورینگ به عوامل زیر بستگی دارد:

- حالتی که در حال حاضر در آن قرار داریم (وضعیت جاری ماشین)
- سلولی از نوار که هد نوار در حال حاضر به آن اشاره می‌کند و محتوای آن سلول
- محتوای جدیدی که در آن سلول نوشته می‌شود
- حالت جدید ماشین
- جهتی که هد نوار قرار است حرکت کند (چپ یا راست)

عملکرد تابع انتقال را می‌توان به صورت گرافیکی نیز نمایش داد. برای نمونه عملکرد تابع $\delta(q_1, a) = (q_2, b, L)$ که نشان‌دهنده این است که ماشین در حالت q_1 اگر بر روی نوار علامت a را ببیند به حالت q_2 رفته، به‌جای علامت a علامت b نوشته و محل هد را یکی به چپ می‌برد. این امر را می‌توان به صورت این شکل بیان کرد:



شکل ۹-۲

نکته: در ماشین تورینگ فرض بر این است که ماشین در حالات نهایی هیچ حرکتی را نمی‌تواند انجام دهد. به بیان دیگر در حالات نهایی هیچ تابع انتقالی برقرار نیست.

پیکربندی (configuration)

همان‌طور که ما محاسباتی را انجام می‌دهیم، در بین وضعیت‌های ماشین حرکت می‌کنیم و هد در سراسر نوار می‌تواند حرکت کند و عملیات خواندن و یا نوشتن علایم روی نوار را انجام می‌دهد. پیکربندی ماشین تورینگ را می‌توانیم به صورت یک ۳تایی مرتب نمایش دهیم که شامل اجزای زیر است:

- حالت جاری ماشین
- محتوای نوار
- مکان قرارگیری هد نوار

بنابراین پیکربندی ماشین تورینگ را به صورت

$[q]\omega_1 \ldots \underline{\omega_k} \ldots \omega_n$

و یا

$\omega_1 \ldots . q\omega_k \ldots \omega_n$

نمایش می‌دهیم که در آن:

q: حالت جاری ماشین

$\omega_1 \ldots \omega_k \ldots \omega_n$: محتوای نوار

ω_k: نمادی که در حالت فعلی هد نوار روی آن قرار دارد

به عنوان نمونه اگر وضعیت جاری ماشین q_1 ورودی نوار $\omega = \text{babba}$ باشد، آن‌گاه پیکربندی اولیه ماشین به صورت زیر خواهد بود:

$[q_1]\underline{b}abba$

با انجام دادن دنباله‌ای از پیکرها می‌توانیم یک محاسبه را انجام دهیم. تغییر پیکربندی و حرکت ماشین را مانند ماشین‌های قبلی می‌توان با نماد $\vdash$ نشان داد و همچنین تغییر پیکربندی طی صفر یا بیشتر مرحله را توسط نماد $\vdash^*$ نشان می‌دهند.

نکته: در یک پیکربندی که هیچ تابع انتقالی قابل فعال شدن نیست، در اصطلاح گفته می‌شود که ماشین در وضعیت توقف (Halt) قرار گرفته است. دنباله‌ای از پیکربندی‌ها که به یک وضعیت توقف منجر شود را یک محاسبه (computation) می‌نامند.

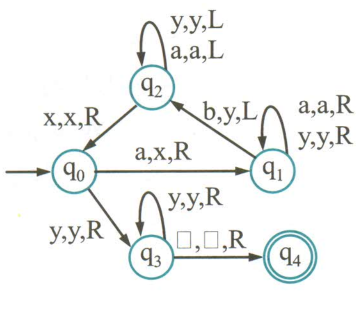
نکته: اگر ماشین با شروع از یک پیکربندی هیچ‌گاه در وضعیت توقف قرار نگیرد، گفته می‌شود که ماشین در حلقه(loop) افتاده است و با نماد زیر نشان داده می‌شود:

$x_1 q x_2 \vdash^* \infty$

تعریف: زبان پذیرفته‌شده توسط یک ماشین تورینگی مانند M را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^+ \mid q_0 w \vdash^* x_1 q_f x_2 \,,\quad q_f \in F, \quad x_1, x_2 \in \Gamma^* \right\}$$

مثال۱: ماشین زیر نشان‌دهنده ماشین تورینگی است که زبان $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ را می‌پذیرد.



ماشین تورینگ به عنوان تراگذر(Transducer)

ازآنجاکه ماشین تورینگ برخلاف بقیه ماشین‌ها قادر به تغییر محتوای نوار است؛ بنابراین از ماشین تورینگ هم می‌توان به عنوان یک پذیرنده استفاده کرد و هم می‌توان از آن برای محاسبه یک تابع استفاده کرد. برای نمونه تابعی مانند f را می‌توان توسط ماشین تورینگی ساخت که بتواند برای هر رشته‌ای مانند w بر روی ورودی خود مقدار $f(w)$ را بر روی خروجی خود تولید کند.

تعریف: تابع f با دامنه D را محاسبه‌پذیر تورینگ (Turing computable) نامند اگر ماشین تورینگی مانند $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\square,F)$ وجود داشته باشد که:

$$\forall w \in D: q_0w \vdash_M^* q_f f(w), q_f \in F$$

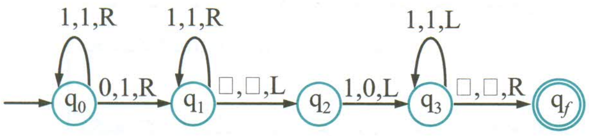
مثال ۲: اگر برای نمایش اعداد طبیعی از روش بازنمایی یکتایی (هر عددی مانند x با همان تعداد ۱ بر روی نوار ورودی نشان داده شود) استفاده کنیم، ماشین تورینگی برای جمع دو عدد طراحی کنید. به بیان دیگر این ماشین باید بتواند محاسبه‌ای مانند زیر را انجام دهد:

$$q_0x0y \vdash^* q_f x+y0$$

باید بر اساس الگوریتم زیر عمل کنیم:

۱. به سمت راست حرکت کرده تا به 0 برسید.
۲. 0 به‌دست‌آمده در مرحله قبل را به 1 تبدیل کنید.
۳. به سمت راست حرکت کرده تا به جای خالی برسید.
۴. یک سلول به سمت چپ حرکت کنید تا به آخرین 1 عدد y برسید.
۵. در محل فعلی بر روی نوار 0 بنویسید.
۶. به سمت چپ حرکت کرده تا به جای خالی برسید.
۷. یک سلول به سمت راست رفته و متوقف شوید.

الگوریتم بالا ما را به ماشین زیر هدایت می‌کند:



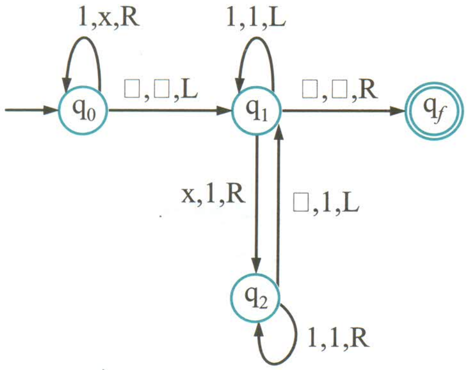
مثال ۳: ماشین تورینگی طراحی کنید که بتواند تابع زیر را محاسبه کند:

$$q_0w \vdash^* q_f ww$$

باید بر اساس الگوریتم زیر عمل کنیم:

۱. به سمت راست حرکت کرده و همه 1 ها را با x جایگزین کنید تا به جای خالی برسید.
۲. به سمت چپ حرکت کرده تا به جای خالی یا x برسید.
۳. در صورت پیدا کردن جای خالی یک سلول به راست رفته و متوقف شوید و در غیر این صورت حرف x به‌دست‌آمده را با 1 جایگزین کنید.
۴. به سمت راست حرکت کرده تا به جای خالی برسید.
۵. حرف 1 را نوشته و به مرحله ۲ بروید.

الگوریتم بالا ما را به ماشین روبه‌رو هدایت می‌کند:



می‌توان از ماشین تورینگ برای محاسبه توابع پیچیده نیز استفاده کرد. برای نمونه می‌توان ماشین تورینگی ساخت که بتواند کارهایی نظیر عملیاتی که یک کامپیوتر انجام می‌دهد نظیر جمع، ضرب، تفریق، تقسیم، مقایسه و تصمیم‌گیری را انجام دهد.

قضیه چرچ ـ تورینگ

اثبات این موضوع که کلاس توابع قابل محاسبه توسط ماشین‌های تورینگ همان کلاس توابع قابل محاسبه توسط کامپیوتر است، قضیه چرچ ـ تورینگ نامیده می‌شود.

تعریف: الگوریتمی برای محاسبه تابع f با دامنه D همان ماشین تورینگی است که بتواند برای هر رشته $w \in D$ رشته $f(w)$ را بر روی نوار خود تولید کند. به بیان دیگر:

$$\forall w \in D: q_0 w \vdash_M^* q_f f(w), q_f \in F$$

نمونه سؤالات

۱. ماشین تورینگ $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\square,F)$ را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$Q=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$

$\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{a,b,\square\}$, $q_0=S_1$, $F=\{S_4\}$

و توابع انتقال در جدول زیر مشخص شده است:

State	Reading	State	Writing	Moving
S_1	a	S_2	a	R
S_1	b	S_2	b	R
S_2	b	S_3	b	R
S_3	a	S_3	a	R
S_3	b	S_3	b	R
S_3	$\square$	S_4	$\square$	R

آن‌گاه ماشین تورینگ M چه زبانی را می‌پذیرد؟

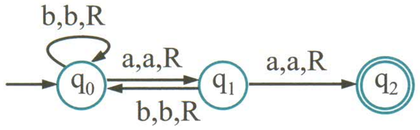
۱) $ab(a+b)^+$

۲) $((a+b)b(a+b)^*)$

۳) $ab(a+b)^*b(a+b)^*$

۴) هیچ‌کدام

۲. زبان پذیرفته‌شده توسط ماشین تورینگ زیر کدام است؟



۱) $(a\cup b)aa(a\cup b)(a\cup b)^+$

۲) $(a\cup b)^*aa(a\cup b)^*$

۳) $a(a\cup b)^*a(a\cup b)^*$

۴) هیچ‌کدام

۳. ماشین تورینگ M با دستورات حرکت زیر مفروض است که در آن q_0 حالت شروع، q_f حالت پایانی و B علامت خانه‌های خالی دو طرف نوار است. منظور از $\delta(q,a)=(P,X,R)$ این است که اگر M در حالت q و سر آن مقابل حرف a روی نوار

باشد، آن‌گاه به حالت P رفته، a را با X عوض کرده و سر را به اندازه یک خانه به راست می‌برد (اگر به‌جای R، L باشد، آن‌گاه به چپ می‌رود) اگر در شروع کار M (یعنی حالت q_0 و سر در ابتدای ورودی روی نوار) محتوای نوار برابر رشتهٔ $aaabbb$ باشد، پس از دقیقاً 11 حرکت δ محتوای نوار کدام است؟

(دولتی مهندسی کامپیوتر ۸۸)

$\delta(q_0, a) = (q_1, X, R)$

$\delta(q_1, a) = (q_1, a, R)$

$\delta(q_1, b) = (q_2, Y, L)$

$\delta(q_2, a) = (q_2, a, L)$

$\delta(q_2, X) = (q_1, X, R)$

$\delta(q_0, B) = (q_f, B, R)$

$\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, R)$

$\delta(q_2, Y) = (q_f, Y, R)$

$\delta(q_1, B) = (q_f, B, R)$

۱) XaaYYb

۲) XXaYYb

۳) XXaYbb

۴) XXXYYY

۴. برای تشخیص زبان $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ یک ماشین تورینگ ساخته‌ایم. حداقل هزینه تشخیص $w \in L$ با این ماشین تورینگ در چه حدی است؟

(دولتی مهندسی کامپیوتر ۸۶)

۱) $O(n)$

۲) $O(n^2)$

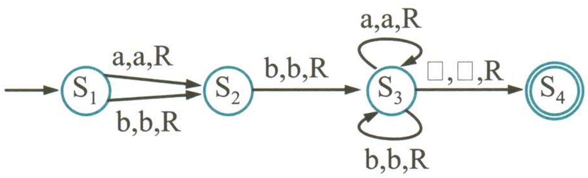
۳) $O(n^3)$

۴) $O(2^n)$

حل تشریحی

۱. گزینه ۲ درست است.

نمایش گرافیکی ماشین تورینگ M به صورت روبه‌رو است:



به عنوان نمونه اگر رشته $w = abb$ وارد ماشین M شود، خواهیم داشت:

$$[S_1]\underline{a}bb \vdash [S_2]a\underline{b}b \vdash [S_3]ab\underline{b} \vdash [S_3]abb\underline{\square} \vdash [S_4]abb\square\underline{\square} \Rightarrow \text{Accept}$$

اگر رشته $w = bab$ وارد ماشین M شود، خواهیم داشت:

$$[S_1]\underline{b}ab \vdash [S_2]b\underline{a}b \Rightarrow \text{Reject}$$

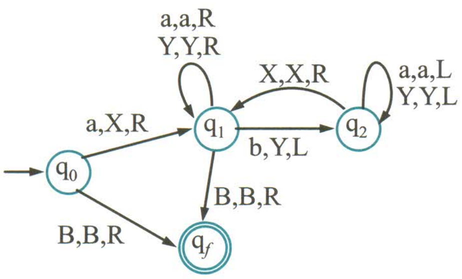
۲. گزینه ۲ درست است.

به عنوان نمونه رشته $w = baab$ را بررسی می‌کنیم:

$$w = baab : [q_0]\underline{b}aab[q_0]b\underline{a}ab \vdash [q_1]ba\underline{a}b \vdash [q_2]baa\underline{b} \Rightarrow \text{Accept}$$

۳. گزینه ۱ درست است.

ماشین مورد نظر به صورت زیر قابل رسم است:



۴. گزینه ۲ درست است.

برای تشـخیص زبان L باید به ازای دیدن هر a به ابتدای حروف b رفته و دوباره به ابتدای رشـته بازگشت؛ بنابراین درمجموع به اندازه $O(n^2)$ باید زمان صرف کرد؛ پس گزینه ۲ درست است.

خودآزمایی

۱. ماشین تورینگی طراحی کنید که زبان‌های زیر را بپذیرد:

a) $L = L(aba^*b)$

b) $L = \{w \mid |w| = 2k \text{ for some } k \geq 0\}$

c) $L = \{w \mid |w| = 3k \text{ for some } k \geq 0\}$

d) $L = \{w \mid n_a(w) = n_b(w)\}$