به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي اميرکبير (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
( پلی تکنیک تهران )

# درس جبر خطی کاربردی

## پاسخ تمرین سری سوم

## ❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. A را به گونه ای بیابید که مجموعه داده شده زیر همان Col(A) باشد

$$\left\{\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} : r,s,t \in R\right\}$$

مجموعه را به شکل می نویسیم:

$$r\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ترکیب خطی بالا spanning set بردارهای ضریب r, s, t است و اگر این بردارها ستون‌های A باشند بنابراین مجموعه داده شده همان Col A خواهد بود. پس:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. ماتریس A را داریم. یک پایه برای Nul A، یک پایه برای Row A و یک پایه برای Col A بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ستون اول و دوم و سطر اول و دوم ماتریس A مستقل خطیند. به این ترتیب سطر اول و دوم ماتریس A یک پایه برای Row A هستند و ستون های اول و دوم A یک پایه برای Col A هستند.

برای بدست آوردن پایه برای Nul A به صورت زیر عمل میکنیم:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&8\\1&3&0&5\\1&1&6&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&9&2\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$Nul\ A=\{x|Ax=0\}$$

$$Ax=0\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9x_3-2x_4\\3x_3-1x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-9\\3\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین دو بردار ضرب شده در x3 و x4 مجموعه Nul A را span میکنند و چون مستقل خطیند بنابراین یک پایه برای Nul A هستند.

3. فرض کنید T یک تبدیل خطی یک به یک است نشان دهید اگر مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ نیز مستقل خطی است.

فرض میکنیم $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ وابسته‌ی خطی هستند بنابراین $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ غیر صفری یافت میشود که:

$$\begin{aligned}&b_1T(v_1)+b_2T(v_2)+\cdots+b_nT(v_n)\\&\quad=0\xrightarrow{T\ is\ linear}T(b_1v_1)+T(b_2v_2)+\cdots+T(b_nv_n)\\&\quad=T(b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n)=0\xrightarrow{T\ is\ one\ to\ one}b_1v_1+\cdots+b_nv_n\\&\quad=0\end{aligned}$$

پس چون $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ هستند $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نیز وابسته خطی میشوند که خلاف فرض است بنابراین $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ باید مستقل خطی باشد (برهان خلف)

4. فرض کنید V فضای برداری تمام ماتریس‌های k در k باشد. دو ثابت R و S در V را داریم. اثبات کنید. $W=\{RAS\mid A\in V\}$ زیرفضایی از V است.

شرط اول:

$$A = 0 \Rightarrow RAS = 0 \Rightarrow 0 \in W$$

شرط دوم: فرض کنید X و Y عضو W باشند بنابراین A و B ای وجود دارند که X = RAS و Y = RBS

$$X, Y \in W \Rightarrow RAS + RBS = R(A + B)S = X + Y \in W$$

شرط سوم: برای اسکالر c و ماتریس X = RAS داریم:

$$X \in W \Rightarrow cX = cRAS = R(cA)S = RA'S \in W$$

بنابراین چون مجموعه W سه شرط مورد نظر را دارد بنابراین W زیرفضای V است.

5. فرض کنید V فضای برداری تمام ماتریس‌های 2 در 2 و W فضای برداری تمام ماتریس‌های 3 در 2 باشد. تبدیل خطی $T: V \to W$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. یک پایه برای فضای برداری مربوط به Range تبدیل T بدست آورید. (توجه: تبدیل خطی T روی ماتریس ها عمل می‌کند بنابراین نمیتوان آنرا به صورت یک ماتریس نوشت)

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2d \\ 2b-d & -3c \\ 2b-c & -3a \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس‌های ضرب شده در a و b و c و d فضای برداری Range(T) را span میکنند. اگر ثابت کنیم این ماتریس‌ها مستقل خطی نیز هستند می‌توانیم آنها را به عنوان یک پایه برای Range(T) در نظر بگیریم.

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b & 2d \\ 2b-d & -3c \\ 2b-c & -3a \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = 0$$

بنابراین مجموعه $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ هم مسقل خطی است و هم Range(T) را Span میکند بنابراین یک پایه برای آن است.

6. فضای چند جمله‌ای های حداکثر از درجه دو را در نظر بگیرید. تغییر مختصات (change-of-coordinates) ماتریس از پایه B به پایه استاندارد C را بیابید و سپس بردار مختصات مربوط به B (B-coordinate vector) را برای $-1+2t$ محاسبه کنید.

$$B=\{1-2t+t^2, 3-5t+4t^2, 2t+3t^2\} \qquad C=\{1,t,t^2\}$$

$$[b_1]_C=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, [b_2]_c=\begin{bmatrix}3\\-5\\4\end{bmatrix}, [b_3]_c=\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} \to \ P_{C\leftarrow B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\-2 & -5 & 2\\1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$x=-1+2t \to P_{C\leftarrow B}[x]_B=[x]_C \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\-2 & -5 & 2\\1 & 4 & 3\end{bmatrix}[x]_B=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\-2 & -5 & 2 & 2\\1 & 4 & 3 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\-2 & -5 & 2 & 2\\0 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to [x]_B=\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$$

7. درستی یا نادرستی هر مورد را با اثبات یا مثال نقض نشان دهید.

الف) اگر ماتریس A یک ماتریس $m\times n$ باشد و تبدیل خطی $x\to Ax$ پوشا باشد، آنگاه $rank\ A=m$

درست – چون تبدیل خطی پوشا است پس ترکیب خطی ستون های $A$ تمام فضای $\mathbb{R}^m$ را می سازد

یا به عبارتی دیگر: $Col\ A=\mathbb{R}^m$

پس ستون های $A$ باید پایه های فضای $m$ بعدی باشند. در نتیجه : rank(A)=m

ب) اگر r نشان رتبه باشد آنگاه از $r(AB)=0$ می توان نتیجه گرفت که $r(A)=0$ یا $r(B)=0$

نادرست – مثال نقض:

$$A=B=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\to rank(A)=rank(B)=1 \ \ but: AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\to rank(AB)=0$$

ج) ماتریس $A_{n\times m}$ دارای رتبه یک است اگر و فقط اگر بتوان آن را به صورت $A = XY^T$ نوشت به طوری که X و Y بردارهای $n \times 1$ و $m \times 1$ هستند.

درست - چون رنک ماتریس 1 است پس باید ستون های این ماتریس ضریبی از یک ستون باشند. اگر $b_i$ ها ضریب ها باشند و V ستون مورد نظر باشد:

$$A = [b_1V, b_2V, \dots b_mV] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = XY^T$$

همچنین چون تمام تساوی ها برگشت پذیر هستند، عکس قضیه نیز درست است.

8. موارد زیر را اثبات کنید:

الف) نشان دهید رتبه AB نمی تواند از رتبه A یا B بیشتر شود.(راهنما: با اثبات آنکه هر عضو فضای ستونی AB عضو فضای ستونی A است اثبات کنید $rank(AB) \leq rank(A)$ )

فرض کنیم y عضو فضای ستونی AB باشد. در این صورت x ای وجود دارد که $y = ABx$ :

$$y = ABx \rightarrow y = A(Bx)$$

پس y عضو فضای ستونی A است. پس هر عضو فضای ستونی AB عضو فضای ستونی A است. پس:

$$rank(AB) = \dim Col\, AB \leq \dim Col\, A = rank(A)$$

برای اثبات همین مورد برای متغیر B نیز از روش زیر استفاده می کنیم:

$$rank(AB) = rank(AB)^T = rank(B^TA^T) \leq rank(B^T) = rank(B)$$

ب) با توجه به مورد الف نشان دهید اگر P ماتریس معکوس پذیر باشد انگاه:

$$rank(PA) = rank(A)$$

با توجه به پاسخ قسمت الف و معکوس پذیر بودن P داریم:

$$rank(PA) \leq rank(A) = rank(P^{-1}PA) = rank\left(P^{-1}(PA)\right) \leq rank(PA)$$

$$\rightarrow rank(PA) = rank(A)$$

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400