به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي اميرکبير (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

پاسخ تمرین سری دوم

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. محاسبات زیر را انجام دهید: (انجام تمام مراحل الزامی است)

الف) معکوس ماتریس A را در صورت وجود با استفاده از اعمال سطری مقدماتی بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.25 & 0.125 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.25 & 0.125 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5.75 & 1.75 & 0.125 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.25 & 0.125 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5.75 & 1.75 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & -2.75 & 0.75 & 0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.25 & 0.125 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -5.75 & 1.75 & 0.125 \\ -2.75 & 0.75 & 0.125 \\ 1.25 & -0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$$

ب) تنها ستون سوم معکوس ماتریس B را بدون محاسبه همه ستون ها با استفاده از اعمال سطری مقدماتی بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$[A\ e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \textit{third column of } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

2. اگر تبدیل خطی T معکوس پذیر باشد نشان دهید این تبدیل یک به یک و پوشا است.

پاسخ: ابتدا فرض می کنیم S معکوس T باشد. برای آن که T یک به یک باشد باید به ازای فرض $T(u) = T(v)$ نشان دهیم که $u = v$ است:

$$T(u) = T(v) \to S\big(T(u)\big) = S\big(T(v)\big) \to u = v \to T\ is\ \ one - to - one$$

برای پوشا بودن فرض می کنیم y یک عضو دلخواه از R^n باشد:

$$S(y) = x \to x = S(y) \to T(x) = T\big(S(y)\big) = y \to T(x) = y$$

پس T عضوی را به هر عضو دلخواه از R^n متناظر می کند و در نتیجه T پوشا است.

3. محاسبات زیر را انجام دهید: (انجام تمام مراحل الزامی است)

الف) معادله زیر را با استفاده از تجزیه LU حل کنید.

$$Ax = b \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ابتدا L و U را می یابیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$\to L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال معادله را با استفاده از این ماتریس ها محاسبه می کنیم:

$$Ax = b \to LUx = b \xrightarrow{Ux=y} Ly = b \to [L\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \to Ux = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \to$$

$$[U\ y]=\begin{bmatrix}2&-1&2&1\\0&-3&4&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&0&-5\\0&-3&0&-9\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&0&-5\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}2&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\rightarrow x=\begin{bmatrix}-1\\3\\3\end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از بلوکی سازی ماتریس، حاصل M^2 را بیابید.

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\1&0&-2&0\\0&1&-4&2\end{bmatrix}$$

پاسخ: با توجه به الگویی که در ماتریس دیده می شود به صورت زیر بلوکی می کنیم:

$$if\ A=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}\rightarrow M=\begin{bmatrix}A&0\\I&-2A\end{bmatrix}\rightarrow M^2=\begin{bmatrix}A^2&0\\-A&4A^2\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow M^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&4&0\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$$

4. اگر A=LU و همچنین A=L’U’ باشد و همه فاکتور ها (L, U, L’, U’) وارون پذیر باشند نشان دهید U=U’ و L=L’

پاسخ: با توجه به آنکه همه فاکتور ها وارن پذیر هستند داریم:

$$L'U'=LU\rightarrow L'^{-1}L'U'U^{-1}=L'^{-1}LUU^{-1}\rightarrow IU'U^{-1}=L'^{-1}LI\rightarrow U'U^{-1}=L'^{-1}L$$

می دانیم که ماتریس L و L’ پایین مثلثی و U و U’ بالا مثلثی هستند و سمت چپ تساوی بالا مثلثی است و سمت راست تساوی پایین مثلثی است که در نتیجه دو طرف تساوی، ماتریس های قطری اند و چون درایه های روی قطر اصلی در L یک است پس دو طرف تساوی ماتریس های همانی هستند. پس:

$$U'U^{-1}=I\rightarrow U=U' \quad , \quad L'^{-1}L=I\rightarrow L=L'$$

5. درستی یا نادرستی موارد زیر را با ذکر دلیل نشان دهید:

- اگر AB=0 باشد یا A=0 است یا B=0

پاسخ: غلط- مثال نقض آن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- هر ماتریس مربعی را می توان با ضرب ماتریس های مقدماتی ساخت.

پاسخ: غلط- ویژگی برای ضرب ماتریس های مقدماتی مطرح می کنیم که همه ماتریس های مربعی ندارند: می دانیم هر ماتریس مقدماتی معکوس پذیر است، پس ضرب ماتریس های مقدماتی هم معکوس پذیرند. در حالی که می دانیم همه ماتریس های مربعی معکوس پذیر نیستند. پس هر ماتریس مربعی نمی تواند ضرب ماتریس های مقدماتی باشد.

- اگر A یک ماتریس مربعی و 3×3 باشد و $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ یک جواب یکتا داشته باشد، A معکوس پذیر است.

پاسخ: صحیح-چون جواب یکتا برای این معادله وجود دارد پس دارای هیچ متغیر آزادی نمی باشد و این به معنای آن است که A دارای سه pivot است. در نتیجه ماتریس A معکوس پذیر است.

- اگر A یک ماتریس 4×6 و B یک ماتریس 6×4 باشد ماتریس AB یک ماتریس معکوس پذیر نیست.

پاسخ: صحیح-تعداد ستون های ماتریس B از تعداد سطر های آن بیشتر است، پس ستون های ماتریس B مستقل خطی نیستند و معادله Bx=0 جواب غیر صفر دارد. حال دو طرف این تساوی را در A ضرب می کنیم: ABx=0 و در نتیجه این معادله هم جواب غیر صفر دارد و این موضوع نشان میدهد که AB معکوس ناپذیر است.

- ماتریس بلوکی $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر B و C معکوس پذیر باشند.(B و C ماتریس های مربعی هستند)

پاسخ: صحیح-حکم دو طرفه است و باید هر دو طرف را اثبات کنیم:

ابتدا معکوس A را می یابیم. فرض می کنیم معکوس A به صورت زیر باشد:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} \to AA^{-1}=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BD & BE \\ CF & CG \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

چون B مربعی است و $BD=I$ پس D معکوس B است: $B^{-1}=D$

چون C مربعی است و $CG=I$ پس G معکوس C است: $C^{-1}=G$

$$BE=0 \to E=B^{-1}0=0, \quad CF=0 \to F=C^{-1}0=0$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

ابتدا اثبات می کنیم که اگر A معکوس پذیر باشد، B و C معکوس پذیرند:

با توجه به محاسبات بالا مشخص است که معکوس A زمانی وجود دارد که B و C معکوس‌پذیر باشند.

حال اثبات می کنیم اگر B و C معکوس پذیر باشند A معکوس پذیر است:

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BB^{-1} & 0 \\ 0 & CC^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

چون ماتریس A مربعی است و حاصل ضرب آن با ماتریسی دیگر I شده است پس ماتریس A معکوس پذیر است و معکوس آن $\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$ است.

6. اگر ماتریس A دارای ابعاد n در n باشد اثبات کنید:

الف) اگر $A^T = -A$ و n عددی فرد باشد انگاه $|A|=0$

$$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$$

ب) اگر $A^2 = -I$ آنگاه n عددی زوج است.

$$|A^2|=|A||A|=|A|^2=|-I|=(-1)^n|I|=(-1)^n \Rightarrow n \text{ is even}$$

7. ابتدا با اعمال سطری و ستونی ماتریس ها را ساده کنید و سپس دترمینان را بیابید.

الف) $$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

مرحله 1: به جای هر سطر حاصل تفریق آن سطر با سطر بعدش را قرار میدهیم.

$$\begin{bmatrix} a-b & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

مرحله 2: ستون اول را با ستون دوم جمع میکنم. ستون جدید را با ستون سوم و الی آخر.

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 2b & 3b & \cdots & (n-1)b+a \end{bmatrix}$$

درایه های بالای قطر اصلی همه صفرند بنابراین حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی دترمینان را بدست می‌آورد:

$$(a-b)^{n-1}((n-1)b+a)$$

ب) $$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ماتریس بالارا A_n می نامیم (n به ابعاد ماتریس اشاره می‌کند) به این ترتیب داریم:

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_n - a_1)a_2^1 & \cdots & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (a_n - a_1) & (a_n - a_1)a_n^1 & \cdots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n^1 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ماتریس جدید بدست آمده همانند ماتریس اول است با این تفاوت که یک سطر و ستون کمتر دارد بنابراین برای به دست آوردن دترمینان آن نیز باید مانند قبل عمل کنیم. به این ترتیب در هر مرحله یک بعد از ماتریس کم میشود تا اندازه آن به 1 برسد و در آن صورت دترمینانش 1 میشود. بنابراین داریم.

$$\det(A_n) = \left(\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1)\right)\left(\prod_{k=3}^{n}(a_k - a_2)\right)\ldots\left(\prod_{k=n}^{n}(a_k - a_{n-1})\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=i+1}^{n}(a_k - a_i)$$

8. ماتریس معکوس پذیر A که درایه‌هایش اعداد صحیح هستند را در نظر بگیرید. اثبات کنید درایه‌های معکوس ماتریس A نیز همه اعداد صحیح هستند اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس A برابر با 1 یا 1- باشد.

اثبات شرط لازم: اگر درایه‌های ماتریس A^{-1} همگی اعداد صحیح باشند.

چون دترمینان یک ماتریس از جمع و ضرب درایه‌هایش به دست می‌آید بنابراین دترمینان A و A^{-1} هر دو صحیحند (زیرا درایه‌های آنها اعداد صحیحند) بنابراین:

$$\det(A).\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

بنابراین دترمینان A باید 1 یا 1- باشد.

اثبات شرط کافی: اگر دترمینان A برابر با 1 یا 1- باشد.

با توجه به رابطه $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$ داریم $A^{-1} = \pm Adj(A)$

همانطور که میدانیم درایه‌های Adj(A) همه کوفاکتورهای ماتریس A و اعداد صحیحند بنابراین معکوس ماتریس A تنها شامل درایه‌های صحیح است.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400