

به نام پروردگار
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس جبر خطی کاربردی

تمرین سری دوم

توضیحات:

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- خوانایی و مرتب بودن پاسخ ها از اهمیت زیادی برخوردار است.
- مهلت ارسال پاسخ ها ساعت 23:55 روز جمعه 10 اردیبهشت می باشد.
- مدت زمان تاخیر مجاز 6 روز می باشد، و به ازای هر روز تاخیر 10 درصد جریمه در نظر گرفته می شود.
- سوالات بخش دوم باید با زبان پایتون نوشته شود، و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه های NumPy، Matplotlib و Pillow هستید.
- پاسخ هر سوال بخش تئوری را (چه به صورت دستی و اسکن شده یا چه به صورت تایپ شده) در زیر سوال مربوطه در فایل docx موجود قرار دهید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام در ارتباط با سوالات از طریق linearalgebral.spring2021@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- فایل doc پاسخ های خود را PDF کرده و به همراه کد (فایل .py) و نتایج تمرینات (اسکرین شات های) بخش شبیه سازی، در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

HW1_StudentNumber_StudentName_StudentLastName.zip

(به عنوان مثال، HW1_9731505_Arash_Harirpoosh.zip)

❖ بخش اول - مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. محاسبات زیر را انجام دهید: (انجام تمام مراحل الزامی است)

الف) معکوس ماتریس A را در صورت وجود با استفاده از اعمال سطری مقدماتی بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) تنها ستون سوم معکوس ماتریس B را بدون محاسبه همه ستون ها با استفاده از اعمال سطری مقدماتی بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. اگر تبدیل خطی T معکوس پذیر باشد نشان دهید این تبدیل یک به یک و پوشا است.

3. محاسبات زیر را انجام دهید: (انجام تمام مراحل الزامی است)

الف) معادله زیر را با استفاده از تجزیه LU حل کنید.

$$Ax = b \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از بلوکی سازی ماتریس، حاصل M^2 را بیابید.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

4. اگر $A=LU$ و همچنین $A=L'U'$ باشد و همه فاکتور ها (L, U, L', U') وارون پذیر باشند نشان دهید
 $U=U'$ و $L=L'$

5. درستی یا نادرستی موارد زیر را با ذکر دلیل نشان دهید:

- اگر $AB=0$ باشد یا $A=0$ است یا $B=0$
- هر ماتریس مربعی را می توان با ضرب ماتریس های مقدماتی ساخت.
- اگر A یک ماتریس مربعی و 3×3 باشد و $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ یک جواب یکتا داشته باشد، A معکوس پذیر است.
- اگر A یک ماتریس 6×4 و B یک ماتریس 4×6 باشد ماتریس AB یک ماتریس معکوس پذیر نیست.
- ماتریس بلوکی $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر B و C معکوس پذیر باشند. (B و C ماتریس های مربعی هستند)

6. اگر ماتریس A دارای ابعاد n در n باشد اثبات کنید:

- (الف) اگر $A^T = -A$ و n عددی فرد باشد $|A| = 0$
- (ب) اگر $A^2 = -I$ آنگاه n عددی زوج است.

7. ابتدا با اعمال سطری و ستونی ماتریس ها را ساده کنید و سپس دترمینان را بیابید.

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

8. ماتریس معکوس پذیر A که درایه هایش اعداد صحیح هستند را در نظر بگیرید. اثبات کنید درایه های معکوس ماتریس A نیز همه اعداد صحیح هستند اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس A برابر با 1 یا -1 باشد.

❖ بخش دوم – مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

1. برنامه ای بنویسید که معکوس یک ماتریس را پیدا کند. برای این کار مراحل زیر را انجام دهید.

- ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ را از ورودی بگیرید.
- ماتریس افزوده $[A_{n \times n} \mid I_{n \times n}]$ را تشکیل دهید.
- ماتریس افزوده ساخته شده را به فرم اشلون کاهش داده شده ببرید.
- اگر ماتریس نهایی بدست آمده به شکل $[I_{n \times n} \mid B]$ بود یعنی ماتریس A معکوس پذیر است و B معکوس آن است در غیر این صورت A معکوس ناپذیر است.
- ماتریس افزوده اولیه، ماتریس افزوده در فرم اشلون کاهش داده شده و ماتریس معکوس را در خروجی نشان دهید.

2. خروجی برنامه برای ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ را نشان دهید.

قوانین:

- 1) پیاده سازی تمرین های عملی به صورت انفرادی می باشد و در صورت مشاهده ی تقلب و شباهت چشمگیر، نمره ی آن تقسیم خواهد شد.
- 2) استفاده از توابع آماده برای حل هر دو تمرین شبیه سازی غیر مجاز می باشد و تنها مجاز به استفاده از توابع ساده ای چون `numpy.array` برای ساخت ماتریس و `numpy.arange` برای `arange` کردن یک ماتریس و ... می باشید.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400