به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي اميرکبير (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

تمرین سری اول

توضیحات:

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- خوانایی و مرتب بودن پاسخ ها از اهمیت زیادی برخوردار است.
- مدت زمان تاخیر مجاز 6 روز می باشد، و به ازای هر روز تاخیر 10 درصد جریمه در نظر گرفته می شود.
- سوالات بخش دوم باید با زبان پایتون نوشته شود، و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه های NumPy، Matplotlib و Pillow هستید.
- پاسخ هر سوال بخش تئوری را (چه به صورت دستی و اسکن شده یا چه به صورت تایپ شده) در زیر سوال مربوطه در فایل docx موجود قرار دهید.
- در صورت وجود هر گونه ابهام در ارتباط با سوالات از طریق **linearalgebral.spring2021@gmail.com** سوال خود را بپرسید.
- فایل doc پاسخ های خود را PDF کرده و به همراه کد (فایل py.) و نتایج تمرینات (اسکرین شات های) بخش شبیه سازی، در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

HW1_StudentNumber_StudentName_StudentLastName.zip

(به عنوان مثال، HW1_9731505_Arash_Harirpoosh.zip)

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

a. اگر بردارهای a , b شامل n درایه باشند، حاصل $span\{\vec{a},\vec{b}\}$ همیشه یک صفحه در فضای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

b. بردارهای $\begin{bmatrix}9\\6\\7\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\8\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\-5\end{bmatrix}$، فضای $\mathbb{R}^4$ را Span می کنند.

c. یک دستگاه همگن[1] با 4 معادله خطی و 4 متغیر، ناسازگار خواهد بود.

d. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که ستون های آن $\mathbb{R}^m$ را Span نمی کنند، آن گاه A در هر سطر خود دارای pivot خواهد بود.

e. اگر سه بردار در $\mathbb{R}^3$ بر روی یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ قرار داشته باشند، آن گاه این سه بردار نسبت به یک دیگر مستقل خطی هستند.

f. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با m ستون pivot باشد، تبدیل خطی $x \mapsto Ax$ یک نگاشت یک به یک است.

g. اگر T یک تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $S = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ یک زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد، به طوری که $\{T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_k)\}$ یک مجموعه مستقل خطی شود، مجموعه S نیز یک مجموعه مستقل خطی می باشد.

.2

a. سه معادله خط $2x_1 + 3x_2 = -1$ و $6x_1 + 5x_2 = 0$ و $2x_1 - 5x_2 = 7$ را در نظر بگیرید؛ آیا این سه خط نقطه ی مشترکی دارند؟ (چرا؟) در صورت وجود محل برخورد سه خط را بیابید.

b. توضیح دهید که آیا یک سیستم نامعین می تواند پاسخ یکتا[2] داشته باشد یا خیر. (سیستمی نامعین هست که تعداد معادلات خطی آن کمتر از تعداد متغیرهای شرکت کننده در آن معادلات باشد)

---

[1] Homogeneous System
[2] Unique

.3 ماتریس A را درنظر بگیرید. بررسی کنید آیا معادله به ازای هر b در $\mathbb{R}^4$ دارای جواب می باشد؟ سپس بررسی کنید که آیا بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = u در زیرمجموعه ای که ستون های A آن را span می کنند قرار دارد یا خیر. (دلیل آن را ذکر کنید)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

.4 معادله ی ماتریسی $Ax = b$ را حل کنید و جواب خود را به صورت فرم برداری نمایش دهید؛ که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

سپس درستی بردارهای بدست آمده در فرم برداری را بررسی کنید و در نهایت با توجه به فرم کاهش یافته ی سطری-پلکانی ماتریس A بررسی کنید که آیا برداری مانند u در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که معادله ماتریسی $Ax = u$ به ازای آن ناسازگار[3] باشد؟ (توضیح دهید)

.5 به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. ثابت کنید که اگر مجموعه $\{v_1, \dots, v_4\}$ یک مجموعه برداری مستقل خطی در $\mathbb{R}^4$ باشد، آن گاه $\{v_1, v_2, v_3\}$ نیز یک مجموعه برداری مستقل خطی می باشد.

b. مستقل خطی بودن یا نبودن مجموعه برداری زیر را مشخص کنید؛ سپس در صورت مستقل خطی نبودن مجموعه، یک بردار از این مجموعه را که ترکیب خطی از بقیه بردار ها می باشد نشان دهید.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

[3] Inconsistent

6. خطی بودن یا نبودن تبدیلات زیر را مشخص کنید، و ماتریس استاندارد را برای تبدیل های خطی بیابید.

a.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x+1 \\ 3y \end{bmatrix}$$

b.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ y \end{bmatrix}$$

c. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$$

حال خطی بودن یا نبودن تبدیل $f\left(f(x, y)\right)$ را بررسی کنید. و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.

7. به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. فرض کنید u و v دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند. و در نظر بگیرید صفحه ای به نام P از این دو بردار و مرکز مختصات می گذرد. نمایش پارامتریک نقاط P برابر $x = su + tx \ (s, t \in \mathbb{R})$ می باشد. نشان دهید صفحه P به کمک تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود مبدا مختصات نگاشت می شود. همچنین $T(u)$ و $T(v)$ باید دارای چه شرایطی باشند تا تصویر P نیز یک صفحه باشد؟

b. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد، نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آن گاه $T(x) = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

❖ بخش دوم – مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

1. برنامه ای بنوسید که در آن یک دستگاه معادله را حل کند؛ این برنامه باید شامل ویژگی های زیر باشد:

a) ماتریس $A_{n\times n}$ و بردار $b_{n\times 1}$ را به عنوان ورودی بگیرد.

b) ماتریس افزوده[4] $[A|B]$ را برای دستگاه معادله $Ax = b$ نمایش دهد.

c) با تبدیل ماتریس افزوده به فرم reduced echelon دستگاه معادله $Ax = b$ را حل کند.

d) ماتریس تبدیل شده به فرم echelon و reduced echelon را نمایش دهد.

e) جواب نهایی دستگاه معادله $Ax = b$ را به فرم پارامتری[5] نمایش دهد و متغیرهای آزاد و اصلی مشخص شوند. (در صورت آنکه سیستم جواب نداشت، باید پیغام "System is inconsistent" چاپ شود)

f) در نهایت دستگاه معادلات زیر را به کمک برنامه خود حل کنید و نتیجه را به همراه کد نوشته شده در یک فایل zip ارائه دهید.

.i

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

.ii

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 7x_2 + 6x_4 = 5 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

.iii

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

---

[4] Augmented Matrix

[5] Parametric description

2. تصاویر رنگی در کامپیوتر به صورت یک ماتریس از پیکسل ها می باشند، که هر پیکسل از سه کانال RGB تشکیل می شود که به کمک آن ها می توان تمامی رنگ های مختلف بر روی یک پیکسل را توصیف کرد. بنابراین هر پیکسل یک آرایه سه تایی [Red, Green, Blue] می باشد که بازه هر یک از درایه ها در این آرایه از 0 تا 255 متغیر می باشد، به طوری که (0, 0, 0) نشان دهنده نبودن هر سه این رنگ ها (رنگ سیاه) و (255, 255, 255) نشان دهنده وجود هر سه این رنگ ها (رنگ سفید) می باشد. بنابراین تصاویر رنگی در کامپیوتر در یک ماتریس سه بعدی نمایش داده می شوند؛ این در حالی است که تصاویر سیاه سفید تنها دارای یک کانال رنگ می باشند و می توان آن ها را با استفاده از یک ماتریس دو بعدی نمایش داد. در این تمرین می خواهیم با انجام یک تبدیل خطی یک تصویر رنگی را به یک تصویر سیاه و سفید تبدیل کنیم؛ با توجه به مراحل زیر برنامه ای بنویسید که با انجام یک تبدیل خطی یک عکس رنگی را به یک عکس سیاه سفید تبدیل کند. برای انجام این کار نیاز است تا مراح زیر انجام شود:

a) عکس موجود در فایل sample.jpg دریافت و به ماتریس تبدیل شود.

b) یک ماتریس جدید به ابعاد عکس ورودی تشکیل شود، با توجه به اینکه تصویر خروجی سیاه سفید می باشد هر پیکسل تنها دارای یک بعد می باشد (در صورتی که درایه های ماتریس حاصل از عکس رنگی ورودی هر کدام دارای سه بعد (red, green, blue) بودند) که میزان شدت رنگ سیاه را نشان می دهد بدین صورت که 0 نشان دهنده سیاه بودن پیکسل و 255 نشان دهنده سفید بودن پیکسل می باشد بنابراین هر یک از درایه های این ماتریس تنها شامل یک عدد می باشد. (در صورتی که ابعاد ماتریس ورودی (numOfRows, numOfcolums, 3) باشد ابعاد ماتریس خروجی برابر (numOfRows, numOfcolums) می باشد)

درواقع ماتریس ورودی ما یک nested list سه بعدی خواهد بود درحالی که ماتریس خروجی یک دو بعد خواهد بود و آن ابعاد rgb را نخواهد داشت.

c) یک تابع نوشته شود که در آن هر یک از پیکسل های تصویر به کمک ماتریس انتقال زیر تبدیل یابند و در ماتریس جدید که در مرحله قبل ایجاد شده است ذخیره شود. (برای انجام این کار نیاز است تا ترانهاده[5] ماتریس RGB هر پیکسل را در نظر بگیرید)

$$TransformationMatrix = [0.2989 \quad 0.5870 \quad 0.1140]$$

d) ماتریس نهایی ذخیره شود و خروجی آن نمایش داده شود. (در صورتی که برای نمایش و ذخیره سازی تصویر نهایی از توابع موجود در کتابخانه matplotlib استفاده شود نیاز است تا در این توابع مقدار cmap = ‘gray’ مقدار دهی شود)

[5] Transpose

قوانین:

1) پیاده سازی تمرین های عملی به صورت انفرادی می باشد و در صورت مشاهده ی تقلب و شباهت چشمگیر، نمره ی آن تقسیم خواهد شد.
2) برای باز کردن و دریافت فایل عکس می توانید از هر کتابخانه ای نظیر matplotlib در پایتون و ... استفاده کنید.
3) استفاده از توابع آماده برای حل هر دو تمرین شبیه سازی غیر مجاز می باشد و تنها مجاز به استفاده از توابع ساده ای چون numpy.array برای ساخت ماتریس و numpy.arrange برای arrange کردن یک ماتریس و ... می باشید.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 00