به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

پاسخ نامه تمرین سری چهارم

1. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

a. هر بردار ویژه ماتریس معکوس پذیر A بردار ویژه ماتریس A^{-1} نیز می باشد.

درست، بردار غیر صفر x را در نظر بگیرید که در $Ax = \lambda x$ صادق است، در صورتی که A^{-1} در سمت چپ این معادله ضرب شود داریم:

$$x = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x$$

با توجه به اینکه A معکوس پذیر است، مقدار ویژه λ صفر نمی باشد. بنابراین:

$$\lambda^{-1}x = A^{-1}x$$

که نشان می دهد x بردارد ویژه ماتریس A^{-1} نیز می باشد.

b. اگر v_1 و v_2 بردار های ویژه مستقل خطی باشند، آنگاه مقادیر ویژه متناسب با هر یک از این بردار ها متفاوت می باشد.

نادرست، ماتریس زیر را به عنوان یک فضای ویژه دو بعدی در نظر بگیرید، این ماتریس دارای دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر با یک مقدار ویژه می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \lambda = 2 \Rightarrow eigenvectors \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

عبارت عنوان شده اصلا با تئوری دوم بخش 5.1 یکسان نمی باشد. در اصل، مخالف تئوری 2 بخش 5.1 می باشد (برای حالت r=2).

c. ماتریس مربعی A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر یک سیستم مختصات وجود داشته باشد که در آن تبدیل $x \mapsto Ax$ توسط یک ماتریس قطری نمایش داده شده باشد.

نادرست، در صورتی که A یک ماتریس منفرد[1]باشد که قابلیت قطری سازی دارد. (برای مثال، A یک ماتریس قطری با درایه های قطری صفر باشد.) آنگاه، طبق تئوری 8 بخش 5.4 تبدیل $x \mapsto Ax$ با یک ماتریس قطری متناظر با سیستم مختصات تعیین شده توسط بردار های ویژه A نمایش داده می شود.

d. اگر A و B ماتریس های معکوس پذیر $n \times n$ باشند، آنگاه AB مشابه با BA می باشد.

درست، با توجه به اینکه B معکوس پذیر است، AB مشابه با $B(AB)B^{-1}$ می باشد، که برابر با BA می باشد.

---

[1] Singular

e. اگر A یک ماتریس معکوس پذیر و مشابه[2] ماتریس B باشد، آنگاه ماتریس B معکوس پذیر است و ماتریس A^{-1} مشابه ماتریس B^{-1} می باشد.

درست، اگر A مشابه با B باشد، آنگاه یک ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد که در آن $P^{-1}AP = B$ باشد. بنابراین با توجه به اینکه ماتریس B حاصل ضرب ماتریس های معکوس پذیر می باشد، (ماتریس B) معکوس پذیر است. با توجه به تئوری مربوطه به معکوس حاصل ضرب ها[3]:

$$B^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

که نشان می دهد ماتریس A^{-1} مشابه ماتریس B^{-1} می باشد.

f. برای یک ماتریس $A_{m\times n}$ بردارهایی که در Nul A وجود دارند، بر بردارهایی که در فضای سطری A قرار دارند عمود هستند.

درست، طبق تئوری سوم قسمت 6.1 کتاب این گزاره درست می باشد.

g. اگر A یک ماتریس مربعی باشد، بردارهای درون Col A بر بردارهای درون Nul A متعامد[4] خواهند بود.

نادرست، مثال تناقض:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

h. تصویر متعامد y روی زیر فضای W یعنی $\hat{y}$ ، گاهی وابسته به پایه متعامدی از W که برای محاسبه $\hat{y}$ استفاده می شود می باشد.

نادرست، میتوان طبق تئوری 9 بخش 6.3 کتاب نتیجه گرفت که $\hat{y}$ وابسته به یک پایه متعامد خاص برای W نیست و اگر یک پایه متعامد دیگر برای ساخت تصویر عمود y استفاده شود، این تصویر نیز نزدیک ترین فاصله را تا y در W خواهد داشت یعنی همان $\hat{y}$ خواهد بود.

2. به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و سپس بردارهای ویژه آن را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

---

[2] Similar

[3] Inverses of products

[4] Orthogonal

ابتدا برای محاسبه مقدار ویژه ماتریس A مقدار det(A-λI) را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\det(A-\lambda\mathrm{I})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda(3-\lambda)-2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda*\lambda*(2-\lambda)*(\lambda*(3-\lambda)-2) = -\lambda^2(2-\lambda)(-\lambda^2+3\lambda-2)$$

$$\Rightarrow -\lambda^2(2-\lambda)(\lambda-1)(2-\lambda) = -\lambda^2(2-\lambda)^2(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

مقدار $\lambda = 0$ با توجه به اینکه مقدار ویژه ماتریس نمی تواند صفر باشد قابل قبول نمی باشد، بنابراین تنها مقادیر 2 و 1 می توانند جزو مقادیر ویژه این ماتریس باشند.

حال با توجه به مقدار های ویژه بدست آمده به کمک حل معادلات زیر بردار های ویژه را محاسبه می کنیم:

$$(A-\lambda\mathrm{I})\mathrm{x}=0 \; if \; \lambda=2 \Rightarrow (\mathrm{A}-2\mathrm{I})\mathrm{x}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \Rightarrow u = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$(A-\lambda\mathrm{I})\mathrm{x}=0 \; if \; \lambda=1 \Rightarrow (\mathrm{A}-2\mathrm{I})\mathrm{x}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow q = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v_3}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

بنابراین مقدار ویژه ماتریس *A* برابر 2 (*multiplicity=2*) و *1* (*multiplicity=1*) و بردار ویژه این ماتریس برابر v_1, v_2, v_3 می باشد.

b. ماتریس A را قطری‌سازی کرده (ماتریس های P و D را در $A = P^{-1}\ DP$ بدست آورید) و سپس صحت جواب خود را بدون محاسبه P^{-1} بررسی کنید.

با توجه به بردار های ویژه بدست آمده در مرحله قبل ماتریس P را که از ماتریس های v_1, v_2, v_3 تشکیل شده است، ایجاد می کنیم:

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سپس با توجه به مقادیر ویژه بدست آمده و *multiplicity* هر یک از آن ها ماتریس D را ایجاد می کنیم، بدین صورت که مقدار ویژه λ = 1 با توجه به اینکه *multiplicity=1* است یک بار و مقدار ویژه λ = 2 با توجه به اینکه *multiplicity=2* است دو بار تکرار می شود:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال برای بررسی صحت جواب بدون محاسبه P^{-1} باید درستی رابطه زیر بررسی شود:

$$AP = PD \Rightarrow \begin{cases} AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ PD = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow AP = PD$$

بنابراین با توجه به اینکه رابطه *AP = PD* درست می باشد، بنابراین جواب بدست آمده درست می باشد.

3. در صورتی که A یک ماتریس $n \times n$ و c یک عدد مختلط باشد.

a. نشان دهید که برای هر مقدار ویژه λ در ماتریس A، مقدار λ + c نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس $A + cI$ می باشد، که در آن I ماتریس همانی[5] می باشد.

اگر x بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه داریم:

$$Ax = \lambda x$$

در نتیجه:

$$(A + cI)x = Ax + cx = \lambda x + cx$$

[5] Identity Matrix

بنابراین نتیجه گرفته می شود که:

$$(A+cI)x=(\lambda+c)x$$

که در آن x یک بردار غیر صفر می باشد.

بنابراین $\lambda+c$ یک مقدار ویژه برای ماتریس $A+cI$ و x بردار ویژه متناظر با $\lambda+c$ می باشد.

b. نشان دهید که چندگانگی[6] مقدار ویژه λ در ماتریس A با چندگانگی مقدار ویژه λ + c در ماتریس $A+cI$ برابر است.

در صورتی که معادله مشخصه چند جمله ای $p(t)=\det\,(A-tI)$ برای ماتریس A و معادله مشخصه چند جمله ای $q(t)$ برای ماتریس $A+cI$ باشد، داریم:

$$q(t)=\det\big((A+cI)-t\big)=\det\big(A-(t-c)\big)=p(t-c)$$

در صورتی که $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس A با چندگانگی $n_1,\dots,n_k$ باشند؛ آنگاه نتیجه گرفته می شود:

$$p(t)=\pm\prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{n_i}$$

در نتیجه داریم:

$$q(t)=p(t-c)=\pm\prod_{i=1}^{k}(t-c-\lambda_i)^{n_i}=\pm\prod_{i=1}^{k}\big(t-(\lambda_i+c)\big)^{n_i}$$

از معادله آخر نتیجه گرفته می شود که مقادیر ویژه ماتریس $A+cI$ برابر λ_i+c با چندگانگی n_i به ازای $i=1,\dots,k$ می باشد. بنابراین چندگانگی λ و $\lambda+c$ یکسان می باشد.

4. اگر معادله مشخصه ماتریس قطری A برابر $f_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-3)(\lambda+2)^3(\lambda-4)^3$ باشد:

a. ابعاد ماتریس A را چقدر است؟

اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه معادله مشخصه چند جمله ای آن از درجه n می باشد.

بنابراین با توجه به اینکه درجه f_A برابر 9 می باشد، ماتریس A دارای ابعاد 9×9 می باشد.

b. ابعاد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda=4$ که با E_4 نمایش داده می شود چقدر است؟

چندگانگی مقدار ویژه $\lambda=4$ برابر 3 می باشد. (تعداد دفعاتی است که مولفه $\lambda-4$ در f_A ظاهر شده است.)

---

[6] Multiplicity

با توجه به اینکه A قابلیت قطری سازی دارد، ابعاد فضای ویژه مربوط به هر مقدار ویژه برابر با مقدار چندگانگی آن مقدار ویژه می باشد. بنابراین ابعاد E_4 برابر 3 می باشد.

c. ابعاد فضای تهی[7] ماتریس A چقدر است؟

ابعاد فضای تهی ماتریس A برابر با ابعاد فضای ویژه E_0 متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 0$ می باشد. با توجه به اینکه ماتریس A قابلیت قطری سازی دارد، ابعاد فضای ویژه E_0 در آن برابر مقدار چندگانگی $\lambda = 0$ می باشد. بنابراین ابعاد فضای تهی در ماتریس A برابر 2 می باشد.

5. P_1 فضای برداری چند جمله ای حقیقی درجه یک یا کمتر می باشد. تبدیل خطی $T: P_1 \to P_1$ به ازای هر $ax + b \in P_1$ به صورت زیر می باشد:

$$T(ax+b) = (3a+b)x + a + 3$$

a. ماتریس تبدیل خطی T را با توجه به پایه $B = \{1, x\}$ بیابید.

ماتریس A برای T متناظر با پایه $B = \{1, x\}$ برابر است با:

$$A = [[T(1)]_B, [T(x)]_B]$$

بنابراین داریم:

$$T(ax+b) \overset{a=0,\ b=1}{\Longrightarrow} T(1) = x + 3,$$

$$T(ax+b) \overset{a=1,\ b=0}{\Longrightarrow} T(x) = 3x + 4$$

بردار های مختصات این بردار ها متناظر با پایه B برابر است با:

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین، ماتریس A برای T متناظر با پایه B برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b. پایه B' از فضای برداری P_1 را که در آن ماتریس T نسبت به B' یک ماتریس قطری می باشد بیابید.

ابتدا ماتریس A بدست آمده در بخش a را قطری می کنیم.

معادله مشخصه چند جمله ای این ماتریس برابر است با:

[7] Null space

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{bmatrix} 3-t & 4 \\ 1 & 3-t \end{bmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$$

مقادیر ویژه این ماتریس برابر 1 و 5 می باشد. با توجه به اینکه ماتریس A دارای دو مقدار ویژه متمایز می باشد، قابل قطری سازی می باشد.

بردار های ویژه متناظر با مقدار ویژه 1 محاسبه می گردد:

بردار های ویژه جواب های غیر صفر $(A - I)x = 0$ می باشد؛ بنابراین $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ بردار ویژه می باشند.

به طور مشابه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ نیز بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه 5 می باشد. بنابراین ماتریس P برابر است با:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس قطری سازی شده A برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

این نشان می دهد که $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ نمایش ماتریس برای T متناظر با پایه $B' = \{v_1, v_2\}$ می باشد که در آن $[v_1]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $[v_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می باشد. همچنین ماتریس P نیز ماتریس انتقال از B' به B می باشد.

بنابراین، $v_1 = -x + 2$ و $v_2 = x + 2$ پایه $B' = \{v_1, v_2\}$ را تشکیل می دهد که در آن ما T ماتریس قطری $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ می باشد.

c. تابع $f(x) = 5x + 3$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردار های پایه B' بنویسید.

با توجه به اینکه P ماتریس تبدیل B′ به B می باشد، به ازای هر $v \in P_1$ رابطه زیر را بین بردار های مختصات داریم:

$$P[v]_{B'} = [v]_B$$

بنابراین داریم:

$$[f(x)]_{B'} = P^{-1}[f(x)]_B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین ترکیب خطی *f(x)* بر اساس v_1, v_2 برابر است با:

$$f(x) = -\frac{7}{4}v_1 + \frac{13}{4}v_2$$

(همچنین عبارت فوق را به صورت $5x + 3 = -\frac{7}{4}(-x+2) + \frac{13}{4}(x+2)$ نیز می توان نوشت.)

6. اگر F و H ماتریس های $n \times n$ باشند که رابطه $HF - FH = -2F$ در آن ها برقرار است:

a. مجموع مقادیر ویژه[8] ماتریس F را محاسبه کنید. (راهنمایی: مجموع مقادیر ویژه در دو طرف معادله داده شده را محاسبه کنید.)

با استفاده از رابطه داده شده مجموع مقادیر ویژه F به صورت زیر محاسبه می شود:

ابتدا مجموع مقادیر ویژه دو طرف معادله محاسبه می شود:

$$tr(-2F) = tr(HF - FH)$$

مقدار بدست آمده برای سمت راست معادله $-2tr(F)$ می باشد و مقدار سمت چپ معادله برابر است با:

$$tr(HF - FH) = tr(HF) - tr(FH) = tr(HF) - tr(HF) = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر ویژه F نیز صفر می باشد.

$$tr(F) = 0$$

b. اگر λ مقدار ویژه ماتریس H و v بردار ویژه متناظر با λ باشد. نشان دهید که یک عدد مثبت صحیح N وجود دارد که $F^N v = 0$ شود. (راهنمایی: با نشان دادن اینکه اگر $F^k v \neq 0$ باشد آنگاه تعداد زیادی مقدار ویژه وجود دارد یک تناقض را نشان دهید)

با توجه به اینکه v بردار ویژه متناظر λ برای H است، $Hv = \lambda v$ که معادل $(H - \lambda I)v = 0$ می باشد. بنابراین داریم:

$$F(H - \lambda I) = FH - \lambda F = (HF + 2F) - \lambda F = (H - (\lambda - 2)I)F$$

بنابراین:

$$F(H - \lambda I) = (H - (\lambda - 2)I)F$$

با توجه به v نتیجه گرفته می شود که:

$$0 = F(H - \lambda I)v = (H - (\lambda - 2)I)Fv$$

اگر $Fv \neq 0$، آنگاه این معادله نشان می دهد که Fv یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda - 2$ برای H می باشد. در این صورت داریم:

[8] trace

$$0 = F(H-(\lambda-2)I)Fv = (FH-(\lambda-2)F)F = (HF+2F-(\lambda-2)F)Fv$$
$$= \big(H-(\lambda-4)\big)F^2v$$

اگر $F^2v \neq 0$، آنگاه این معادله نشان می دهد که F^2v یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda - 4$ برای H می باشد. با تکرار این روند به ازای همه k ها نتیجه گرفته می شود که:

$$0 = \big(H-(\lambda-2k)\big)F^kv$$

بنابراین اگر F^kv یک بردار غیر صفر برای همه k ها باشد، بنابراین تعداد زیادی مقدار ویژه $\lambda - 2k$ وجود دارد که این غیر ممکن است چرا که H یک ماتریس $n \times n$ می باشد و به همین دلیل H حداکثر n مقدار ویژه دارد. بنابراین مقدار N وجود دارد که به ازای آن $F^Nv = 0$ شود.

7. فرض کنید ماتریس $U_{n\times n}$ یک ماتریس orthogonal باشد.

a. نشان دهید سطرهای $U_{n\times n}$ یک basis orthonormal برای $\mathbb{R}^n$ می باشد.

اگر U یک ماتریس $n \times n$ ، که ستون های آن متعامد باشند، آنگاه $I = UU^{-1} = UU^T$؛ و از آنجایی که U ترانهاده U^T می باشد، باتوجه به تئوری ششم می توان نتیجه گرفت که U^T نیز ستون های متعامد و درنتیجه مستقل خطی خواهد داشت و یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ خواهند بود؛ که یعنی سطرهای U یک پایه orthonormal برای $\mathbb{R}^n$ هستند.

b. اگر $V_{n\times n}$ نیز یک ماتریس متعامد باشد، نشان دهید که UV یک ماتریس متعامد خواهد بود یا خیر.

از آنجایی که هردوی U, V متعامد هستند، می توان نتیجه گرفت که معکوس پذیر نیز می باشند. به کمک تئوری 6 در بخش 2.2، می توان نتیجه گرفت که UV نیز معکوس پذیر است و داریم:

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^TU^T = (UV)^T$$

بنابراین UV یک ماتریس متعامد هست.

8. فرض کنید $v_1 = \begin{bmatrix} x-1 \\ 1 \\ x-2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ x-3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس $y = \begin{bmatrix} x+1 \\ x-9 \\ x \\ x+1 \end{bmatrix}$ می توان نشان داده که y در زیر فضایی که $S\{v_1, v_2\}$ پوشش می دهند، قرار ندارد. یک بردار غیر صفر مانند u را در فضای $\mathbb{R}^4$ بیابید که بر $Span(S)$ عمود باشد. آیا این بردار یکتا خواهد بود؟ (راهنمایی: ابتدا از خاصیت orthogonally برای بدست آوردن x استفاده کنید)

چون v_2, v_1 برهم عمود هستند، داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ x-3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-1 \\ 1 \\ x-2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \to x^2 - x + x - 3 - 3x + 6 - 1 = 0 \to x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{y.v_1}{v_1.v_1} v_1 + \frac{y.v_2}{v_2.v_2} = \frac{-55}{15} v_1 + \frac{17}{15} v_2 = \begin{bmatrix} \frac{17}{15} \\ \frac{-89}{15} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{72}{15} \end{bmatrix}$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} \frac{13}{15} \\ \frac{-31}{15} \\ \frac{11}{15} \\ \frac{-42}{15} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{y.v_1}{v_1.v_1} v_1 + \frac{y.v_2}{v_2.v_2} = \frac{2}{3} v_1 - \frac{7}{3} v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. یک پایه متعامد[9] برای فضای پوچ A بیابید.

ابتدا باید معادله Ax=0 را حل کنیم تا پایه آن را بیابیم، از آنجایی که A به فرم کاهش یافته ی سطری است بنابراین پاسخ به راحتی بدست می آید:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

حال اگر فرم عمومی آن را بنویسیم داریم:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

بنابراین مجموعه ی $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ یک orthogonal basis برای فضای پوچ A خواهد بود. اگر بخواهیم orthonormal basis آن را هم نمایش دهیم، داریم:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}}{\sqrt[2]{\mathbf{1+0+1}}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt[2]{\mathbf{2}}} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[2]{\mathbf{2}}} \end{bmatrix}$$

b. rank ماتریس A را بیابید.

می دانیم:

$$\operatorname{rank} A + \dim Null\ A = 3$$

و همچنین از قسمت الف می دانیم که Null A =1 پس بنابراین rank A برابر با 2 می شود.

rank(A) = 2

[9] orthogonal Basis

c. یک پایه متعامد برای فضای سطری A بیابید.

می دانیم که سطرهای غیر صفر در فرم کاهش یافته ی سطری یک ماتریس یک پایه را برای فضای سطری آن تشکیل می دهند پس:

$$\boldsymbol{row\ space\ basis} = \left\{\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\right\} = \boldsymbol{orthogonal\ basis\ for\ A}$$

از آنجا که ضرب داخلی دو بردار بالا صفر می شود یک orthogonal set هستند و همچنین فضای سطری A را span می کنند و پایه می باشند، پس مجموعه بالا یک orthogonal basis برای فضای سطری A می باشد.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400