به نام پروردگار

دانشگاه صنعتي اميرکبير (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

پاسخ نامه تمرین سری اول

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

a. اگر بردارهای a , b شامل n درایه باشند، حاصل $span\{\vec{a},\vec{b}\}$ همیشه یک صفحه در فضای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

نادرست، بردار a و b را در فضای $\mathbb{R}^3$ درنظر بگیرید؛ در صورتی فضای حاصل از $Span\{a,b\}$ یک صفحه خواهد شد که این دو بردار مستقل خطی باشند و اگر a مضربی از b باشد و یا a بردار صفر باشد، آنگاه فضای span شده یک خط یا حتی می تواند یک نقطه شود (در صورتی که هر دوی a, b صفر باشند)

b. بردارهای $\begin{bmatrix}9\\6\\7\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\8\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\-5\end{bmatrix}$، فضای $\mathbb{R}^4$ را Span می کنند.

نادرست، برای Span کردن $\mathbb{R}^4$، حداقل نیاز به چهار بردار مستقل خطی می باشد. اگر سه بردار داده شده را ستون های یک ماتریس درنظر بگیریم و به شکل کاهش یافته ی سطری در آوریم به ماتریس زیر خواهیم رسید.

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

در نتیجه طبق تئوری 4 فصل 1 کتاب چون در هر ستون ماتریس M، pivot وجود ندارد، پس ستون های آن و در نتیجه بردارهای ذکر شده نمی توانند فضای $\mathbb{R}^4$ را Span کنند. در واقع برای آنکه n بردار بتوانند فضای $\mathbb{R}^{m}$ را Span کنند، نیاز هست که $m \leq n$ باشد.

c. یک دستگاه همگن[1] با 4 معادله خطی و 4 متغیر، ناسازگار خواهد بود.

نادرست، می دانیم دستگاه معادلات خطی ناسازگار است که جواب نداشته باشد. از آنجا که با یک سیستم همگن مواجه هستیم و این سیستم حداقل یک جواب بدیهی صفر دارد، پس صرف نظر از برابری m , n، این سیستم یک یا بی نهایت جواب می تواند داشته باشد.

[1] Homogeneous System

d. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که ستون های آن $\mathbb{R}^m$ را Span نمی کنند، آن گاه A در هر سطر خود دارای pivot خواهد بود.

نادرست، زیرا طبق تئوری چهارم فصل اول کتاب درسی می دانیم اگر یک ماتریس$m \times n$ در هر سطر خود دارای pivot باشد، ستون های آن ماتریس $\mathbb{R}^m$ را Span خواهند کرد. در واقع ماتریس ذکر شده در هر سطر خود دارای pivot نیست.

e. اگر سه بردار در $\mathbb{R}^3$ بر روی یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ قرار داشته باشند، آن گاه این سه بردار نسبت به یک دیگر مستقل خطی هستند.

نادرست، طبق تئوری هفتم کتاب درسی، یک مجموعه برداری وابسته ی خطی است؛ اگر و تنها اگر دست کم یک بردار در آن مجموعه برداری ، ترکیب خطی ای از سایر بردار ها باشد. به عبارتی در اینجا اگر بردارهای مستقل خطی u و v را داشته باشیم که یک صفحه را در $\mathbb{R}^3$ تشکیل می دهند، آنگاه بردار w نیز— که با این دو بردار در یک صفحه قرار دارد— را می توان به صورت ترکیب خطی این دو بردار نوشت و درنتیجه این سه بردار وابسته خطی می شوند.

f. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با m ستون pivot باشد، تبدیل خطی $x \mapsto Ax$ یک نگاشت یک به یک است.

نادرست؛ برای اینکه تبدیل $x \mapsto Ax$ یک به یک باشد، هر ستون A باید دارای pivot باشد. بنابراین یک به یک بودن تبدیل $x \mapsto Ax$ بستگی به رابطه m و n دارد، در صورتی که m = n باشد آنگاه ممکن است تبدیل $x \mapsto Ax$ یک به یک باشد؛ اما در صورتی که $m < n$ تبدیل $x \mapsto Ax$ نمی تواند یک به یک باشد؛ در نتیجه عبارت فوق همواره صحیح نمی باشد.

g. اگر T یک تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $S = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ یک زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد، به طوری که $\{T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_k)\}$ یک مجموعه مستقل خطی شود، مجموعه S نیز یک مجموعه مستقل خطی می باشد.

درست؛ برای اثبات درستی این عبارت ابتدا ترکیب خطی از بردار های S را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k = 0_n$$

برای اثبات مستقل خطی بودن S باید نشان دهیم که همه ضرایب این ترکیب (c_i) ها برابر صفر می باشند. می دانیم که حاصل هر ترکیب خطی بر روی بردار صفر، بردار صفر می باشد ($T(0) = 0$)؛ بنابراین بر اساس خواص تبدیل های خطی داریم:

$$
\begin{aligned}
0_m = T(0_n) &= T(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k) \\
&= c_1T(X_1) + c_2T(X_2) + \cdots + c_kT(X_k)
\end{aligned}
$$

با توجه به اینکه بردار های $T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_k)$ مستقل خطی می باشند، ضرایب متناظر آن ها نیز در ترکیب خطی بالا برابر صفر خواهد بود.

در نتیجه $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ که نشان می دهد که S مجموعه مستقل خطی می باشد.

.2

a. سه معادله خط $2x_1 + 3x_2 = -1$ و $6x_1 + 5x_2 = 0$ و $2x_1 - 5x_2 = 7$ را در نظر بگیرید؛ آیا این سه خط نقطه ی مشترکی دارند؟ (چرا؟) در صورت وجود محل برخورد سه خط را بیابید.

ابتدا ماتریس افزوده (augmented matrix) معادل با دستگاه معادلات را ساخته و سپس آن را به فرم کاهش یافته (echelon form) در می آوریم.

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

همانطور که مشاهده می شود در سطر آخر داریم $[0 \quad 0 \quad 2]$ و بنابراین طبق تئوری دوم فصل اول کتاب این دستگاه یک دستگاه ناهمگن (inconsistent) است و در نتیجه این سه خط هیچ نقطه ی مشترکی ندارند.

b. توضیح دهید که آیا یک سیستم نامعین می تواند پاسخ یکتا[2] داشته باشد یا خیر. (سیستمی نامعین هست که تعداد معادلات خطی آن کمتر از تعداد متغیرهای شرکت کننده در آن معادلات باشد)

چون تعداد متغیرهای ما بیش از تعداد معادلات خطی ما می باشد، یا به عبارتی چون تعداد ستون های ماتریس ضرایب تشکیل شده بیش از تعداد سطرها خواهد بود، بنابراین تعداد متغیرهای اصلی (basic variables) بیش از تعداد معادلات نخواهد بود و درنتیجه حداقل یک متغیر آزاد (free variable) خواهیم داشت.

می دانیم یک متغیر آزاد نیز به تنهایی می تواند بی نهایت مقدار بگیرد و چون متغیرهای پایه ی ما بر مبنای متغیرهای آزاد در فرم نهایی نوشته می شوند، بی نهایت پاسخ تولید خواهد شد. حال

[2] Unique

اگر سیستم نامعین ما سازگار (consistent) باشد، بی نهایت؛ و اگر نا سازگار باشد، هیچ جوابی نخواهد داشت.

3. ماتریس A را درنظر بگیرید. بررسی کنید آیا معادله به ازای هر b در $\mathbb{R}^4$ دارای جواب می باشد؟ سپس بررسی کنید که آیا بردار $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ در زیرمجموعه ای که ستون های A آن را span می کنند قرار دارد یا خیر. (دلیل آن را ذکر کنید)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

ماتریس A را به فرم کاهش یافته (echelon) در می آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون در هر سطر ماتریس A ما pivot نداریم، بنابراین طبق تئوری چهارم فصل یک کتاب، معادله ی $Ax \ = \ b$ به ازای هر b در $\mathbb{R}^4$ دارای جواب نخواهد بود.

برای قسمت دوم سوال ابتدا ماتریس افزوده را ساخته و سپس به فرم کاهش یافته ی سطری-پلکانی در می آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

خیر بردار u در مجموعه بردارهایی که ستون های A آنها را Span می کند وجود ندارد. چراکه در سطر آخر ماتریس افزوده داریم $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 2]$ و طبق تئوری دوم کتاب در فصل اول، دستگاه معادلات متناظر با معادله ماتریسی $Ax \ = \ u$ ناسازگار خواهد بود.

4. معادله ی ماتریسی $Ax = b$ را حل کنید و جواب خود را به صورت فرم برداری نمایش دهید؛ که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

سپس درستی بردارهای بدست آمده در فرم برداری را بررسی کنید و در نهایت با توجه به فرم کاهش یافته ی سطری-پلکانی ماتریس A بررسی کنید که آیا برداری مانند u در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که معادله ماتریسی $Ax = u$ به ازای آن ناسازگار[3] باشد؟ (توضیح دهید)

ابتدا ماتریس افزوده حاصل از ستون های A و بردار b را ساخته و به فرم کاهش یافته ی سطری در می آوریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 \\ x_2 = 4 + x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

جواب عمومی یا فرم برداری جواب:

$$x = \begin{bmatrix} -5 - 2x_3 \\ 4 + x_3 \\ x_3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p + tv \qquad t \in \mathbb{R}$$

حال درستی پاسخ خود را بررسی می کنیم.

$$Ap = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Ap = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در نهایت به کمک فرم کاهش یافته سطری ماتریس A که در بالا بدست آوریم ،سازگاری (consistency) بودن آن را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

---

[3] Inconsistent

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود A در هر سطر خود دارای موقعیت محوری (pivot position) می باشد و در نتیجه به ازای هر بردار u در فضای $\mathbb{R}^3$، معادله ماتریسی $Ax = u$ سازگار خواهد بود و بنابراین برداری مانند u وجود نخواهد داشت که نتوان آن را به صورت ترکیب خطی ای از ستون های A نوشت.

5. به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. ثابت کنید که اگر مجموعه $\{v_1, \dots, v_4\}$ یک مجموعه برداری مستقل خطی در $\mathbb{R}^4$ باشد، آن گاه $\{v_1, v_2, v_3\}$ نیز یک مجموعه برداری مستقل خطی می باشد.

اگر معادله $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ دارای جواب غیر بدیهی باشد (حداقل یکی از x_1, x_2, x_3 غیر صفر باشد)، آن گاه با توجه به اینکه رابطه خطی بین مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ را می توان با قرار دادن مقدار صفر به عنوان ضریب برای v_4 بین مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ نیز گسترش داد، بنابراین معادله $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + 0.v_4 = 0$ است، در نتیجه برای مستقل خطی بودن مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$، ابتدا باید مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی باشد

b. مستقل خطی بودن یا نبودن مجموعه برداری زیر را مشخص کنید؛ سپس در صورت مستقل خطی نبودن مجموعه، یک بردار از این مجموعه را که ترکیب خطی از بقیه بردار ها می باشد نشان دهید.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

ترکیب خطی زیر را که متغیر های آن x_1, x_2, x_3, x_4 می باشد در نظر بگیرید:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = 0, \qquad (I)$$

حال بررسی می کنیم که آیا $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ وجود دارد که باعث سازگاری ترکیب خطی (I) شود.

ترکیب خطی (I) به صورت معادله ماتریس زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

با تبدیل کردن افزوده معادله فوق به فرم reduced echelon جواب معادله فوق را محاسبه می کنیم:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R_2]{R_3+R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 11 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4-4R_2]{R_3-4R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{5}R_4]{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4-R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3]{R_2+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین جواب کلی معادله فوق برابر است با:

$x_1 = x_4$

$x_2 = -2x_4$

$x_3 = -3x_4$

که در آن x_4 متغیر آزاد[4] می باشد.

اگر مقدار $x_4 = 1$ باشد، آن گاه یک جواب غیر صفر $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = 1$ داریم. بنابراین این مجموعه برداری مستقل خطی نمی باشد. حال با قرار دادن این مقادیر در (I) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = 0$$

[4] Free variable

بنابراین بردار $\begin{bmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی ازبقیه بردار های می باشد:

$$\begin{bmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

6. خطی بودن یا نبودن تبدیلات زیر را مشخص کنید، و ماتریس استاندارد را برای تبدیل های خطی بیابید.

برای بررسی خطی بودن هر یک از تبدیلات زیر ابتدا باید برقرار بودن دو شرط زیر را بررسی کنیم:

1. $T(0) = 0$
2. $T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$

در صورت خطی بودن، ماتریس استاندارد را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$A = [T(\boldsymbol{e_1}) \dots T(\boldsymbol{e_n})]$$

که در آن e_j برابر j امین ستون ماتریس همانی می باشد.

a.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\x+1\\3y\end{bmatrix}$$

ابتدا خطی بودن تبدیل بررسی می شود:

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0+0\\0+1\\3*0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین تبدیل T بردار صفر $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ را به بردار صفر $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ نگاشت نکرده است. بنابراین، T یک تبدیل خطی نمی باشد.

b.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\sin(x)\\y\end{bmatrix}$$

ابتدا خطی بودن تبدیل بررسی می شود:

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\sin(0)\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}T\left(c\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix}cx+du\\cy+dv\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\sin(cx+du)\\cy+dv\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\sin(cx)\cos(du) + \cos(cx) + \sin(du)\\cy+dv\end{bmatrix} \neq cT\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right)\\ &= c\begin{bmatrix}\sin(x)\\y\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}\sin(u)\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}csin(x) + dsin(y)\\cy+dv\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به اینکه شرط دوم خطی بودن برای این تبدیل برقرار نمی باشد، تبدیل فوق خطی نیست.

c. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{x+y}{2}\\\dfrac{x+y}{2}\end{bmatrix}$$

حال خطی بودن یا نبودن تبدیل $f\big(f(x,y)\big)$ را بررسی کنید. و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.

با توجه به اینکه اگر تبدیلی خطی باشد ترکیب آن با تبدیل خطی دیگری نیز همچنان خطی می باشد، برای اثبات خطی بودن $f\big(f(x,y)\big)$ کافی است خطی بودن تابع f را اثبات کنیم:

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{0+0}{2}\\\dfrac{0+0}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}T\left(c\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix}cx+du\\cy+dv\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{cx+cy+du+dv}{2}\\\dfrac{cx+cy+du+dv}{2}\end{bmatrix}\\ &= c\begin{bmatrix}\dfrac{x+y}{2}\\\dfrac{x+y}{2}\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}\dfrac{u+v}{2}\\\dfrac{u+v}{2}\end{bmatrix} = cT\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

با توجه به اینکه هر دو شرط خطی بودن برای f برقرار است، بنابراین تبدیل f خطی می باشد، و به همین دلیل تبدیل $f\left(f(x,y)\right)$ نیز خطی می باشد؛ حال برای پیدا کردن ماتریس استاندارد تبدیل باید ضابطه آن را محاسبه کنیم:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix} \rightarrow f\left(f(x,y)\right) = f\left(\begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پس ماتریس استاندارد این تبدیل خطی برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7. به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. فرض کنید u و v دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند. و در نظر بگیرید صفحه ای به نام P از این دو بردار و مرکز مختصات می گذرد. نمایش پارامتریک نقاط P برابر $x = su + tv \ (s,t \ \in \mathbb{R})$ می باشد. نشان دهید صفحه P به کمک تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود مبدا مختصات نگاشت می شود. همچنین $T(v)$ و $T(u)$ باید دارای چه شرایطی باشند تا تصویر P نیز یک صفحه باشد؟

اگر تبدیل خطی T بر روی نقاط صفحه اعمال شود، داریم:

$$T(x) = T(su + tv) \xrightarrow{T \text{ خطی است}} T(su) + T(tv) = sT(u) + tT(v)$$

حال اگر تصویر دو خط u و v مستقل خطی باشند، یک صفحه تشکیل می شود و اگر دو بردار بدست آمده در یک راستا باشند یک خط ایجاد می شود. و در صورتی که هر دو این بردار ها به

یک نقطه نگاشت شوند، تشکیل یک نقطه می دهند. و با توجه به اینکه $T(0) = 0$ نتیجه گرفته می شود که همه این صفحات و یا خطوط از صفر می گذرند و اگر پاسخ یک نقطه باشد، آن نقطه همان نقطه صفر است.

b. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد، نشان دهید اگر T دو بردار مستقل خطی را به یک مجموعه وابسته خطی نگاشت کند آن گاه $T(x) = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

در صورتی که دو بردار v_2 و v_1 بردار مستقل خطی باشند و

$$T(v_1) = u_1, \qquad T(v_2) = u_2$$

آن گاه نتیجه گرفته می شود که u_1, u_2 وابسته خطی هستند؛ بنابراین می توان گفت $u_1 = ku_2,$ $k \neq 0$ سپس جواب بردار $v_1 - kv_2$ را تحت نگاشت فوق محاسبه می کنیم و با توجه به اینکه $k \neq 0$ و v_1, v_2 مستقل خطی هستند نتیجه گرفته می شود $v_1 - kv_2 \neq 0$ حال با توجه به نکات عنوان شده داریم:

$$T(v_1 - kv_2) = T(v_1) - kT(v_2) = u_1 - ku_2 = 0$$

بنابراین با توجه به اینکه یک پاسخ غیر بدیهی برای مسئله پیدا کرده ایم، حکم مسئله اثبات می شود.

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 00