به نام پروردگار
دانشگاه صنعتي امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس جبر خطی کاربردی

پاسخ تمرین سری پنجم

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را به فرم QR بنویسید.

اگر ستون های ماتریس A را از چپ به راست به ترتیب x_1, x_2, x_3 درنظر بگیریم، داریم:

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 . v_1}{v_1 . v_1} v_1 = x_2 - (-1)v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

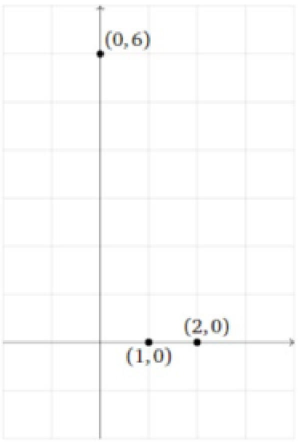
$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 . v_1}{v_1 . v_1} v_1 - \frac{x_3 . v_2}{v_2 . v_2} v_2 = x_3 - 4v_1 - \left(-\frac{1}{3}\right) v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = QR \rightarrow Q^T A = Q^T (QR) = IR = R$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. فرض کنید مقادیر 3 نقطه (0, 6) و (1, 0) و (2, 0) را اندازه گرفته ایم و مدل ما نشان دهد که این سه نقطه باید روی یک خط باشند. در واقع، این نقاط روی یک خط قرار نمی گیرند اما این موضوع می تواند از خطای اندازه گیری ما باشد. پیش بینی کنید در اندازه گیری ما این نقاط باید روی چه خطی قرار گیرند. (معادله ی خط را بدست آورید)



معادله کلی خط به صورت $y = \beta_0 + \beta_1 x$ می باشد. در صورتی که سه نقطه داده شده بر روی یک خط باشند نیاز است تا معادله های زیر برقرار باشند:

$$6 = \beta_0 + \beta_1 .0$$

$$0 = \beta_0 + \beta_1 .1$$

$$0 = \beta_0 + \beta_1 .2$$

حال با توجه به اینکه سه نقطه بر روی یک خط قرار ندارند. نیاز است تا پاسخ least – squares محاسبه گردد. برای محاسبه least – squares ابتدا نیاز است تا معادله خط $y = \beta_0 + \beta_1 x$ محاسبه گردد؛ برای محاسبه معادله فوق ابتدا design matrix X و observation vector y به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سپس مقدار ضرایب به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (X^T X)^{-1} = \frac{1}{15-9} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 30 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 5 \\ \beta_1 = -3 \end{cases}$$

بنابراین خطی که در این اندازه گیری برای نقاط رسم می شود برابر است با:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \Rightarrow \boldsymbol{y = 5 - 3x}$$

3. با توجه به مقدار ویژه های داده شده برای ماتریس زیر، spectral decomposition را برای آن محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 7, -2$$

$$\lambda = 7:\ [A - 7I \quad 0] = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to$$

$$bases = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \to orthogonal\ bases: \{z_1, z_2\} \to$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, z_2 = v_2 - \frac{v_2 . z_1}{z_1 . z_1} z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \to$$

$$normalized\ bases = \{u_1, u_2\} \to u_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{45} \\ 2/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2:\ [A + 2I \quad 0] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 7.2 & 3.6 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 7.2 & 3.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$x_2 = -0.5x_3 \ , \ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \to 5x_1 + x_3 + 4x_3 = 0 \to x_1 = -x_3 \to$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -0.5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \to base = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \to normalized\ base = \{u_3\} \to$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$P = [u_1\ \ u_2\ \ u_3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & -1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to A = PDP^{-1}$$

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \lambda_3 u_3 u_3^T = 7u_1 u_1^T + 7u_2 u_2^T - 2u_3 u_3^T =$$

$$7\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 16/45 & 8/45 & 20/45 \\ 8/45 & 4/45 & 10/45 \\ 20/45 & 10/45 & 25/45 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4/9 & 2/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ -4/9 & -2/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

4. فرض کنید ماتریس A یک ماتریس متقارن مثبت معین باشد. نشان دهید یک ماتریس متقارن مثبت معین مانند B وجود دارد که $B^2 = A$

چون A یک ماتریس متقارن مثبت معین است بنابراین n مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد به نام های $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ و میتوان آن را به شکل زیر تجزیه کرد.

$$A = SDS^T \quad , D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

چون مقادیر ویژه مثبتند بنابراین ماتریس D’ را داریم که درایه هایش جذر درایه های D اند.

$$B = SD'S^T \Rightarrow B\ is\ symmetric\ and\ positive\ definite$$

$$B^2 = (SD'S^T)(SD'S^T) = SD'(S^TS)D'S^T = SD'^2S^T = SDS^T = A$$

5. برای ماتریس زیر SVD را بیابید.

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow eigenvalues = 25, 9, 0$$

برای ماتریس بالا بردارهای ویژه را بدست می‌آوریم و با تقسیم به اندازه انها، آنها را به بردار واحد تبدیل میکنیم.

$$(A^T A - 25I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - 9I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - 0I)v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس نهایی U است که به 2 در 2 است و به این صورت بدست می‌آید.:

$$u_1 = \frac{1}{5} A v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{3} A v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

شاد و پیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400