بسمه‌تعالی

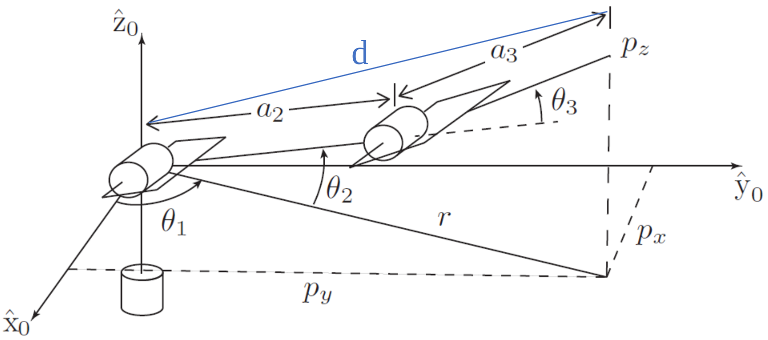
دانشگاه صنعتی امیرکبیر دپارتمان مهندسی کامپیوتر

درس اصول علم ربات نیمسال دوم سال تحصیلی۱۴۰۲-۱۴۰۱

پاسخنامه‌ی بخش تئوری تمرین سری سوم

❖ سوال اول

مقادیر $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ را بر اساس پارامترهای تصویر بدست آورید.(inverse kinematic)



$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$

بدست آوردن θ_3:

$$d^2 = r^2 + p_z^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3Cos(\pi - \theta_3) \rightarrow$$

$$\cos(\theta_3) = \frac{r^2 + {p_z}^2 - a_2^2 - a_3^3}{2a_2a_3} = \frac{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2 - a_2^2 - a_3^3}{2a_2a_3} = A$$

در نتیجه:

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - A^2}, A\right)$$

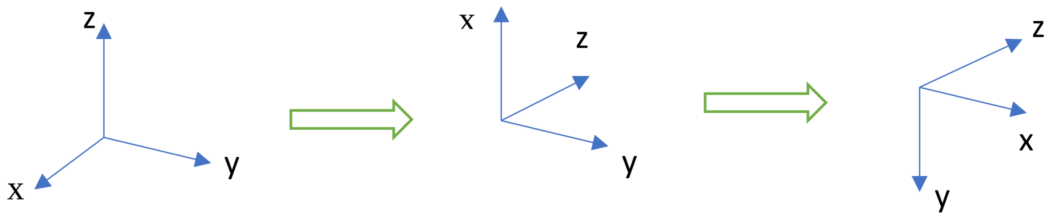
برای بدست آوردن θ_2 ، زاویه‌ی بین امتداد a_2, d را از زاویه‌ی بین امتداد dو r کم میکنیم.

$$\measuredangle(d, a_2) = atan2(a_3 \sin(\theta_3), a_2 + a_3 \cos(\theta_3))$$

$$\theta_2 = atan2(p_z, r) - atan2(a_3 \sin(\theta_3), a_2 + a_3 \cos(\theta_3))$$

❖ سوال دوم

برای تبدیل زیر یک دنباله چرخش اویلری پیدا کنید و مراحل چرخش را ترسیم کنید.



ابتدا $-\frac{\pi}{2}$ حول y و سپس $+\frac{\pi}{2}$ حول z

❖ سوال سوم

فرض کنید یک بازوی رباتی که بر روی پلتفرم متحرکی نصب شده، در اتاقی حرکت می‌کند. در این اتاق دوربینی به سقف نصب شده که با فریم d نمایش داده می‌شود. فریم‌های b وc مربوط به بازو و پلتفرم متحرک هستند. این ربات باید یک شی در اتاق با فرم e را از زمین بردارد. میدانیم که تبدیل های T_{de}, T_{db} به کمک دوربین قابل محاسبه هستند. با محاسبه‌ی T_{bc} تبدیل T_{ce} را حساب کنید.

ابتدا x , y فریم c را نسبت به bپیدا میکنیم:

$$x = 0.3\cos(\alpha) + 0.4\cos(\alpha+\beta)$$

$$y = 0.3\sin(\alpha) + 0.4\sin(\alpha+\beta)$$

$$\theta = \alpha + \beta + \gamma$$

$$T_{bc} = \begin{bmatrix} cos(\alpha+\beta+\gamma) & -sin(\alpha+\beta+\gamma) & 0.3\cos(\alpha)+0.4\cos(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta+\gamma) & cos(\alpha+\beta+\gamma) & 0.3\sin(\alpha)+0.4\sin(\alpha+\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{de} = T_{db} \times T_{bc} \times T_{ce} \;\rightarrow$$

$$T_{bc}^{1} \times T_{db}^{-1} \times T_{de} = T_{ce}$$

❖ سوال چهارم

فرض کنید یک روبات چرخ دیفرانسیلی با دو چرخ به شعاع ۳ سانتی‌متر و با فاصله ۱۰ سانتی‌متر از یکدیگر در اختیار دارید که و روبات با زاویه ۹۰ درجه نسبت به دستگاه مختصات جهانی قرار گرفته است. درصورتی که سرعت چرخ چپ و راست به ترتیب ۵ سانتی‌متر بر ثانیه و ۱۰ سانتی‌متر بر ثانیه باشد، سرعت خطی و زاویه‌ای روبات را محاسبه نمایید.

معادلات سینماتیک ربات (نسبت به دستگاه مختصات ربات و دستگاه مختصات جهانی) در ادامه آورده شده‌اند:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix}\dfrac{r\dot{\phi}_R(t)+r\dot{\phi}_L(t)}{2}\\ 0\\ \dfrac{r\dot{\phi}_R(t)-r\dot{\phi}_L(t)}{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{v_R(t)+v_L(t)}{2}\\ 0\\ \dfrac{v_R(t)-v_L(t)}{d}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}_W = \begin{bmatrix}\cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0\\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}_R$$

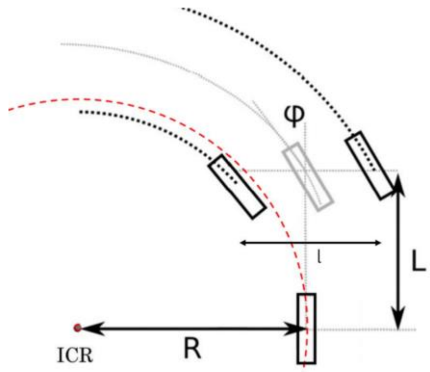
با جایگذاری این موارد $v_R = 0.1, v_L = 0.05, d = 0.1, \theta = 90,$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix}\dfrac{0.1+0.05}{2}\\ 0\\ \dfrac{0.1-0.05}{0.1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.075\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}_W = \begin{bmatrix}\cos(90^{\circ}) & -\sin(90^{\circ}) & 0\\ \sin(90^{\circ}) & \cos(90^{\circ}) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.075\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0.075\\ 0.5\end{bmatrix}$$

❖ سوال پنجم

فرض کنید مدل سه چرخه زیر را با استفاده مدل دو چرخه معادل سازی کنیم. در آن صورت زاویه φ را بر حسب زاویه چرخ چپ و راست محاسبه کنید. سپس معادلات حرکت ربات را محاسبه کنید. معادلات کامل سینماتیک مستقیم روبات را به دست بیاورید.



می‌دانیم که در مدل دوچرخه، روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} tan\phi = \dfrac{L}{R} \\ tan\phi_L = \dfrac{L}{R-\dfrac{l}{2}} \\ tan\phi_R = \dfrac{L}{R+\dfrac{l}{2}} \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$tan\phi \times R = tan\phi_L \times \left(R-\frac{l}{2}\right) = tan\phi_R \times \left(R+\frac{l}{2}\right)$$

$$\Rightarrow tan\phi \times R = \frac{tan\phi_L \times \left(R-\frac{l}{2}\right) + tan\phi_R \times \left(R+\frac{l}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{tan\phi_L \times \left(R-\frac{l}{2}\right) + tan\phi_R \times \left(R+\frac{l}{2}\right)}{2R}\right)$$

سایر معادلات سینماتیک به صورت زیر است:

$$\dot{x}_r = \dot{\omega} r = \dot{\theta}_r R$$

$$\dot{y}_r = 0$$

$$tan\phi = \frac{L}{R} \Rightarrow R = \frac{L}{tan\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}_r}{R} = \frac{\dot{\omega} r tan\phi}{L}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \dot{\omega} r \\ 0 \\ \dfrac{\dot{\omega} r tan\phi}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_W = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\omega}(t) r \cos(\theta(t)) \\ \dot{y} = \dot{\omega}(t) r \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta} = \dfrac{\dot{\omega}(t) r tan\phi}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \dot{\omega}(t) r \cos(\theta(t))\, dt \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \dot{\omega}(t) r \sin(\theta(t))\, dt \\ \theta(t) = \displaystyle\int_0^t \dfrac{\dot{\omega}(t) r tan\phi}{L} dt \end{cases}$$