پاسخ تمرین ۵ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

سوال ۱ -

دو دنباله متناوب زیر را در نظر بگیرید.

$$\tilde{x}_1[n] = 1 + sin(\frac{2\pi n}{10})$$

$$\tilde{x}_2[n] = 1 + sin(\frac{20\pi}{12}n + \frac{\pi}{2})$$

آ) دوره تناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را تعیین کنید.

(a) $\tilde{x}_1[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$

To find the period of $\tilde{x}_1[n]$, we set $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}_1[n + N]$ and determine N. Thus

$$1 + \sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right) = 1 + \sin\left[\frac{2\pi}{10}(n + N)\right]$$
$$= 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{10}n + \frac{2\pi}{10}N\right)$$

Since

$$\sin\left(\frac{2\pi}{10}n + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}n\right),$$

the period of $\tilde{x}_1[n]$ is 10. Similarly, setting $\tilde{x}_2[n] = \tilde{x}_2[n + N]$, we have

$$1 + \sin\left(\frac{20\pi}{12}n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left[\frac{20\pi}{12}\left(n + N\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= 1 + \sin\left(\frac{20\pi}{12}n + \frac{\pi}{2} + \frac{20\pi}{12}N\right)$$

Hence, for $\frac{20}{12}\pi N$ to be an integer multiple of 2π, N must be 6.

ب) دنباله ضرایب سری فوریه a_{1k} را برای $x_1[n]$ و a_{2k} را برای $x_2[n]$ تعیین کنید.

(b) $\tilde{x}_1[n] = 1 + \sin\left(\dfrac{2\pi n}{10}\right)$

Using Euler's relation, we have

$$x_1[n] = 1 + \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/10)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/10)n} \qquad \text{(S10.2-1)}$$

Note that the Fourier synthesis equation is given by

$$\tilde{x}_1[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

where $N = 10$. Hence, by inspection of eq. (S10.2-1), we see that

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \qquad a_{1-1} = \frac{-1}{2j}, \\ a_{11} &= \frac{1}{2j}, \qquad \text{and} \\ a_{1k} &= 0, \qquad 2 \le k \le 8, \\ & \qquad\qquad -8 \le k \le -2 \end{aligned}$$

Similarly,

$$\tilde{x}_2[n] = 1 + \frac{1}{2j} e^{j(\pi/2)} e^{j(20\pi/12)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(\pi/2)} e^{-j(20\pi/12)n}$$

Therefore, $N = 12$.

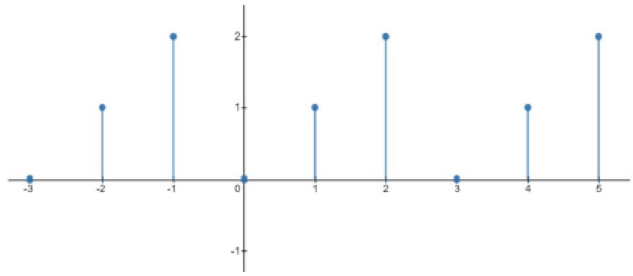
$$a_{20} = 1, \quad a_{2-1} = -\frac{e^{-j(\pi/2)}}{2j} = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = \frac{1}{2j} e^{j(\pi/2)} = \frac{1}{2}, \quad \text{and}$$
$$a_{2\pm 2}, \ldots, a_{2\pm 11} = 0$$

پ) در هر مورد، دنباله ضرایب سری فوریه متناوب است. دوره تناوب دنباله‌های a_{1k} و a_{2k} را تعیین کنید.

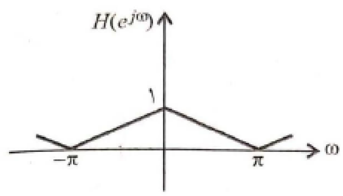
(c) The sequence a_{1k} is periodic with period 10 and a_{2k} is periodic with period 12.

سوال ۲-

سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب $N = 3$ به شکل زیر است.



فرض کنید $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر به $x[n]$ است. ضریب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ را در سری فوریه $y[n]$ بدست آورید.



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}(0+1+2) = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(e^{-j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{-j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

می‌دانیم که برای سیستم LTI، رابطه سری فوریه ورودی و سری فوریه خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$b_k = a_k H(e^{j\omega})$$

ضرب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ را می‌خواهیم. بنابراین به ازای $k = -1$ داریم:

$$b_{-1} = a_{-1}H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}e^{\frac{j2\pi}{3}} + \cdots$$

بنابراین، ضریب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ در سری فوریه خروجی برابر $\frac{1}{9}$ می‌باشد.

سوال ۳-

فرض کنید چهار ویژگی زیر برای سیگنال $x[n]$ برقرار است.

- $x[n]$ یک سیگنال حقیقی و زوج است.
- دوره تناوب آن برابر $N = 10$ و ضرایب سری فوریه آن a_k است.
- $a_{11} = 5$
- $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} \left|x[n]\right|^2 = 50$

نشان دهید $x[n] = A\cos(Bn + C)$ است. سپس ضرایب ثابت A، B و C را بدست آورید.

از آنجا که ضرایب سری فوریه به ازای N=۱۰ تکرار می‌شوند پس داریم:

$$a_1 = a_{11} = 5$$

از طرفی چون سیگنال x حقیقی و زوج است، a_k نیز حقیقی و زوج است. پس داریم:

$$a_1 = a_{-1} = 5$$

با توجه به ویژگی ۴ و استفاده از رابطه پارسوال داریم:

$$\sum_{k=<N>} |a_k|^2 = 50$$

$$\sum_{k=-1}^{8} |a_k|^2 = 50$$

$$|a_{-1}|^2 + |a_1|^2 + a_0^2 + \sum_{k=2}^{8} |a_k|^2 = 50$$

$$a_0^2 + \sum_{k=2}^{8} |a_k|^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_k = 0, \quad k = 2, , 8$$

حال میتوانیم x را به شکل زیر بدست آوریم:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=-1}^{8} a_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$= 5e^{j\frac{2\pi}{10}n} + 5e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$= 10cos(\frac{\pi}{5}n)$$

سوال ۴-

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی متناهی به طول N می‌باشد به طوری که به ازای $n < 0$ و $n > N-1$، $x[n] = 0$ است. تبدیل فوریه گسسته-زمان را برای $x[n]$، با $X(e^{j\omega})$ نشان می‌دهیم. سیگنال متناوب $\tilde{y}[n]$ با کنار هم قرار دادن سیگنال $x[n]$ به صورت متناوب ایجاد می‌شود؛ یعنی:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$$

آ) ضرایب سری فوریه a_k سیگنال $\tilde{y}[n]$ را برحسب $x[n]$ بنویسید.

(a) $x[n]$ is an aperiodic signal with extent $[0, N-1]$. The periodic signal

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

is periodic with period N. To get the Fourier series coefficients for $\tilde{y}[n]$, we sum over one period of $\tilde{y}[n]$ to get

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

ب) رابطه میان ضرایب سری فوریه $\tilde{y}[n]$ و تبدیل فوریه $x[n]$ را به شکل یک عبارت ریاضی بیان کنید.

(b) The Fourier transform of $x[n]$ is

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

since $x[n] = 0$ for $n < 0$, $n > N-1$.

We can now easily see the relation between a_k and $X(\Omega)$ since

$$\frac{1}{N}X(\Omega)\Big|_{\Omega=(2\pi k)/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Therefore,

$$\frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = a_k$$

سوال ۵-

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته‌ـزمان زیر را محاسبه کنید.

a) $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

b) $x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

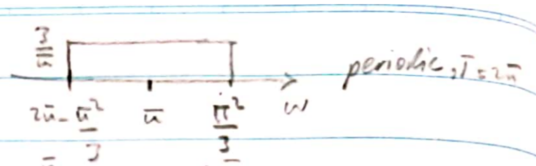
c) $x[n] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$

$$\frac{\sin(\frac{\pi^2}{3}n)}{\frac{\pi^2}{3}n} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) = \frac{3}{\pi}\,\frac{\sin(\frac{\pi^2}{3}n - \pi n + \pi n)}{\pi n} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

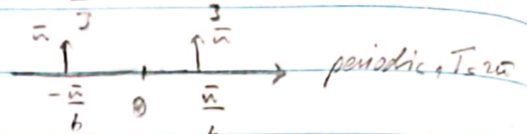
$$= \left(\frac{3}{\pi}\,\frac{\sin[(\frac{\pi^2}{3}-\pi)n]}{\pi n} \times \cos \pi n + \frac{3}{\pi}\,\frac{\cos[(\frac{\pi^2}{3}-\pi)n]}{\pi n}\,\cancel{\sin \pi n}^{\,0}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$= \frac{3}{\pi}\,\frac{\sin[(\frac{\pi^2}{3}-\pi)n]}{\pi n}\, e^{j\pi n} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

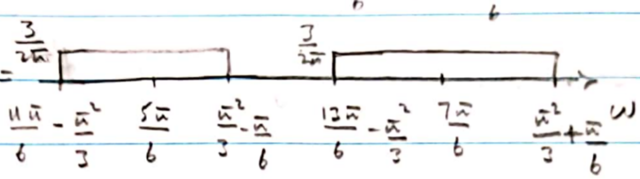
$$\frac{3}{\pi}\,\frac{\sin[(\frac{\pi^2}{3}-\pi)n]}{\pi n}\, e^{j\pi n} \xleftrightarrow{F}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) \xleftrightarrow{F}$$



$$\Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) =$$



سوال ۶-

تبدیل فوریه معکوس سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

a) $X(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 4\delta[n-3] + \delta[n-10]$$

b) $X(e^{j\omega}) = \frac{70-24e^{-j\omega}}{35-12e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{70-24e^{-j\omega}}{35-12e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}$$

$$A = e^{-j\omega} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{70-24A}{A^2-12A+35} = \frac{70-24A}{(A-7)(A-5)}$$

$$= \frac{-49}{A-7} + \frac{25}{A-5} = \frac{7}{1-\frac{1}{7}A} + \frac{-5}{1-\frac{1}{5}A}$$

$$= \frac{7}{1-\frac{1}{7}e^{-j\omega}} + \frac{-5}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}} \Rightarrow x[n] = 7\left(\frac{1}{7}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

c) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega k}$

$$\delta[n-k] \xleftrightarrow{F} e^{-jk\omega} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega k}$$

d) $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1\,, & \frac{\pi}{4} \le |\omega| \le \frac{3\pi}{4} \\ 0\,, & \frac{3\pi}{4} \le |\omega| \le \pi,\ 0 \le |\omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

d)

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{4} \leqslant |\omega| \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ 0 & 0 \leqslant |\omega| < \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{3\pi}{4} < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

$$= \left(X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \frac{3\pi}{4} \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \right) - \left(X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \right)$$

$$x[n] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = F^{-1}\{X_1(e^{j\omega}) - X_2(e^{j\omega})\} = F^{-1}\{X_1(e^{j\omega})\} - F^{-1}\{X_2(e^{j\omega})\}$$

$$= \frac{\sin \frac{3\pi}{4} n}{\pi n} - \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n}$$

سوال ۷-

پاسخ ضربه سیستم‌های LTI زیر را در نظر بگیرید.

$$a)\ \ h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$$

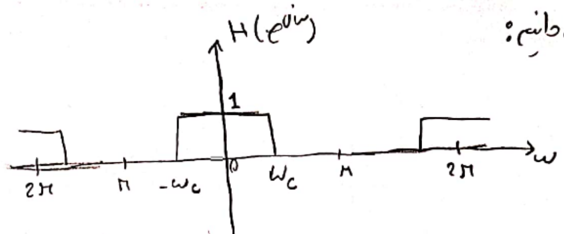
$$b)\ \ h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$$

$$c)\ \ h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\pi n}$$

آ) پاسخ ضربه سیستم‌های فوق را در حوزه فرکانس رسم کنید.

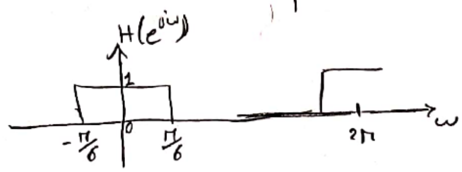
۷) آ) می‌دانیم:

$$h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F.T.}$$

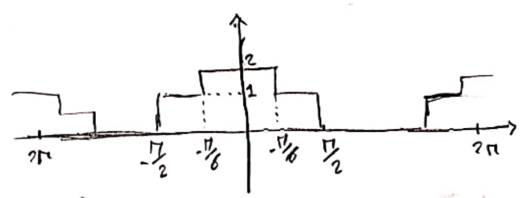


پس داریم:

$$a)\ h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F.T.}$$



$$b)\ h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F.T.}$$

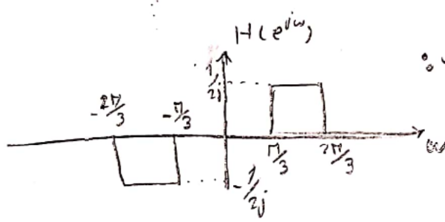


$$c)\ h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} = \overbrace{\frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n}}^{S} \times \overbrace{\sin(\tfrac{\pi}{3}n)}^{P}$$

با رفتن به حوزه فرکانس، ضرب تبدیل به کانولوشن می‌شود:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} S(e^{j\theta})\,P(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

حاصل این کانولوشن به شکل زیر است:

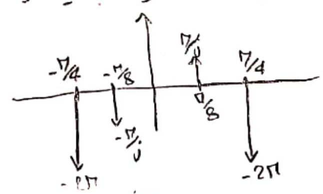


ب) به کمک نمودارهایی که در بخش قبل رسم کردید خروجی سیگنال زیر را برای هریک از سیستم‌های فوق بدست آورید.

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

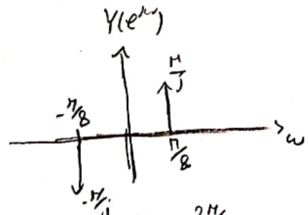
ب) برای این کار ابتدا باید به حوزه فرکانس برویم و پس از بدست آوردن خروجی، باز به حوزه زمان برگردیم:

$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \xleftrightarrow{F.T.}$



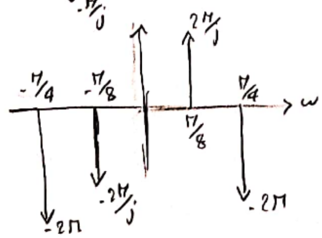
حال با استفاده از رابطه $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) . H(e^{j\omega})$ داریم:

a)



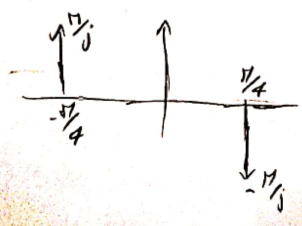
$\xleftrightarrow{F.T.} y[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

b)



$\xleftrightarrow{F.T} y[n] = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

c)



$\xleftrightarrow{F.T} y[n] = \sin\left(-\frac{\pi}{4}n\right)$

همانطور که مشاهده می‌کنید سیستم های قسمت آ همانند یک فیلتر عمل می‌کنند و سیگنال ورودی در قسمت ب را با توجه به پاسخ فرکانس خود فیلتر می‌کنند.

سوال ۸-

یک سیستم LTI با سکون ابتدایی با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

آ) تابع سیستم که $Y(e^{j\omega})$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان می‌کند بدست آورید.

(a) The difference equation $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$, which is initially at rest, has a system transfer function that can be obtained by taking the Fourier transform of both sides of the equation. This yields

$$Y(\Omega)(1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\Omega}) = X(\Omega),$$

so

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{-j\Omega}}$$

ب) با استفاده از تبدیل فوریه، $y[n]$ را به ازای $x[n]$های زیر بدست آورید.

i) $\delta[n]$

(b) (i) If $x[n] = \delta[n]$, then $X(\Omega) = 1$ and

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}},$$

so

$$y[n] = (\tfrac{1}{2})^n u[n]$$

ii) $\delta[n - n_0]$

(ii) $X(\Omega) = e^{-j\Omega n_0}$, so

$$Y(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega n_0}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

and, using the delay property of the Fourier transform,

$$y[n] = (\tfrac{1}{2})^{n-n_0} u[n - n_0]$$

iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

(iii) If $x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n]$, then

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}},$$

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}\right) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{3}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}},$$

so

$$y[n] = -2(\tfrac{1}{2})^n u[n] + 3(\tfrac{3}{4})^n u[n]$$