دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین پنجم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

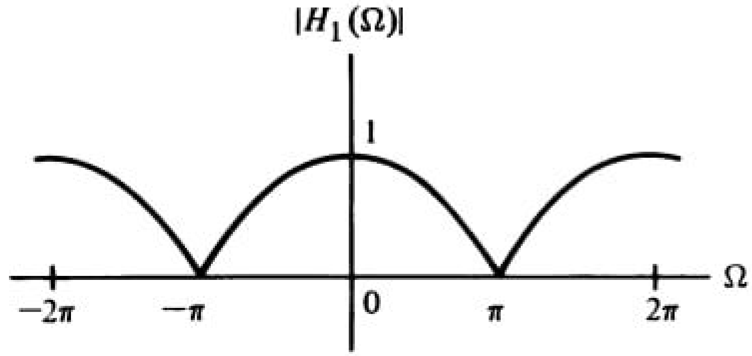
-١

**(a)** We see by examining $y_1[n]$ and $y_2[n]$ that $y_1[n]$ averages $x[n]$ and thus tends to suppress changes while $y_2[n]$ tends to suppress components that have not varied from $x[n-1]$ to $x[n]$. Therefore, the $y_1[n]$ system is lowpass and $y_2[n]$ is highpass.

**(b)** Taking the Fourier transforms yields

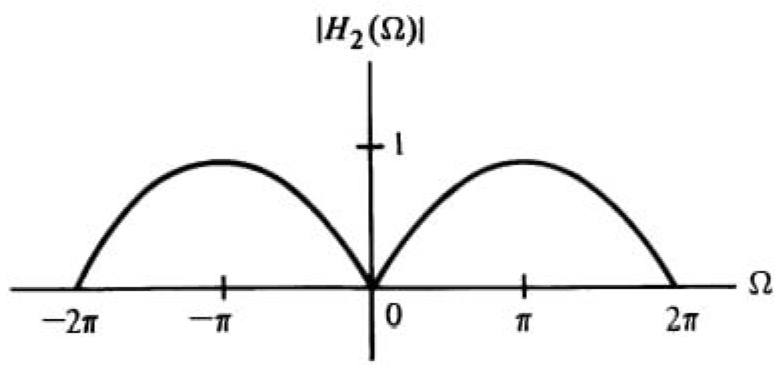
$$Y_1(\Omega) = X(\Omega)\left(\frac{1+e^{-j\Omega}}{2}\right),$$

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{2}(1+e^{-j\Omega})$$

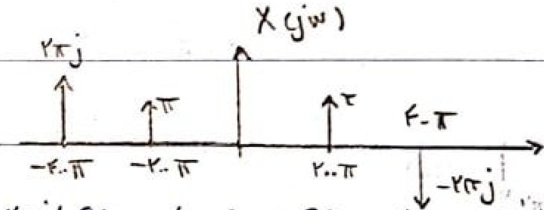



$$Y_2(\Omega) = X(\Omega)\left(\frac{1-e^{-j\Omega}}{2}\right),$$

$$H_2(\Omega) = \frac{1}{2}(1-e^{-j\Omega})$$



$x(t) = \cos(200\pi t) + 2\sin(400\pi t)$




$X(j\omega) = \pi(\delta(\omega+200\pi) + \delta(\omega-200\pi)) + 2\pi j(\delta(\omega+400\pi) - \delta(\omega-400\pi))$

$g(t) = x(t)\sin(400\pi t)$

$\hookrightarrow G(j\omega) = X(j\omega) * \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-400\pi) - \delta(\omega+400\pi))$

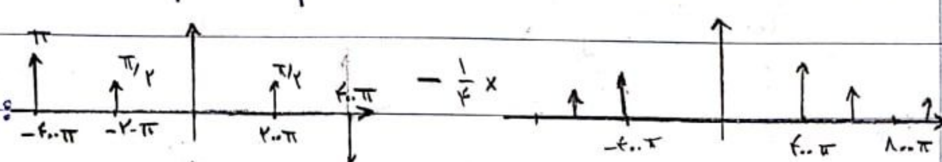
$w(t) = g(t)\sin(400\pi t)$

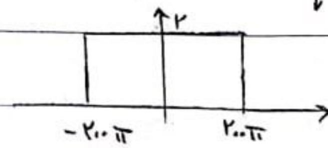
$\hookrightarrow W(j\omega) = G(j\omega) * \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-400\pi) - \delta(\omega+400\pi))$

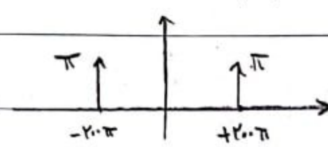
$\hookrightarrow$ یا ، $w(t) = x(t)\sin^2(400\pi t) = x(t)\left(\frac{1}{2}(1-\cos(800\pi t))\right)$

$= \frac{x(t)}{2} - \frac{x(t)\cos 800\pi t}{2}$

$\Rightarrow W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{2} - \frac{1}{4}\left(X(j(\omega+800\pi)) + X(j(\omega-800\pi))\right)$

$W(j\omega)$ : 


فیلتر : 


$\Rightarrow$ خروجی : 

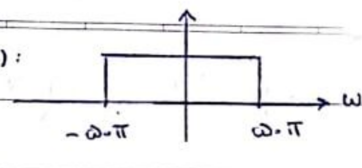

$\Downarrow$

output: $\cos(200\pi t)$

۳-

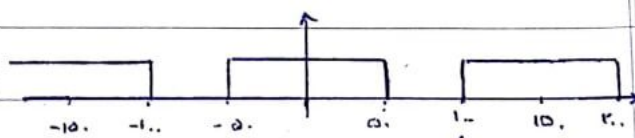
الف)

$$x(t) = \frac{\sin 500\pi t}{\pi t} \Rightarrow X(j\omega):$$




$\rightarrow \omega_s = 1500\pi :$

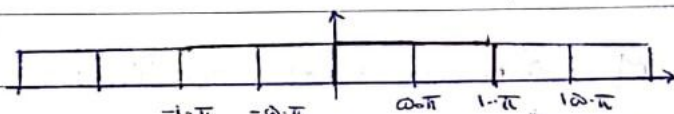
$\Rightarrow X_s(j\omega):$




قابل بازیابی ✓

$\rightarrow \omega_s = 500\pi$

$\Rightarrow X_s(j\omega):$




غیرقابل بازیابی X

ب) $\omega_{s\,min} = 2\omega_m = 1000\pi$

۴-

a) $x(t) = e^{-5t}u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+5}$

Band-Limited نیست

b) $x(t) = \underbrace{1}_{\text{impulse یک}} + \underbrace{\cos(100\pi t)}_{} + \underbrace{\underbrace{\cos(300\pi t)}_{\substack{\text{2 impulses} \\ \omega=\pm300\pi}}\;\underbrace{\sin(50\pi t)}_{\substack{\text{2 impulses} \\ \omega=\pm50\pi}}}_{}$

یک impulse در $\omega=0$

دو impulse در $\omega=\pm100\pi$

ضرب در حوزه زمان ← کانولوشن در فرکانس

باعث ایجاد impulse هایی در نقاط زیر می‌شود

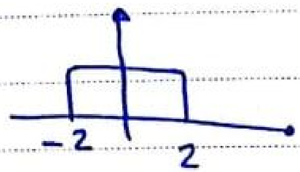
$\omega = -350\pi, -250\pi, 250\pi, 350\pi$

$\max\{0, -100\pi, 100\pi, -350\pi, 350\pi, -250\pi, 250\pi\} = 350\pi$

$\Rightarrow \omega_M = 350\pi$

$\Rightarrow$ Nyquist Rate $= 700\pi = 2(350\pi)$

c) $x(t) = u(t) - u(t-4)$




$$\longleftrightarrow \quad \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

$$\xrightarrow{\text{shift}} x(t) \longleftrightarrow e^{-j\omega 2}\,\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

ليست Band-limited

**۵-**

$$N=\frac{۲\pi}{\frac{۳\pi}{۷}}\times m=\frac{۱۴}{۳}m \quad \xrightarrow{m=۳} \quad N=۱۴ \quad , \quad \omega_{\circ}=\frac{\pi}{۷}$$

$$x[n]=۲+\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۳\pi}{۷}}e^{j\frac{۳n\pi}{۷}}+\frac{۱}{۲}e^{j\frac{۳\pi}{۷}}e^{-j\frac{۳n\pi}{۷}}$$

با توجه به فرکانس پایه $\omega_{\circ}=\frac{\pi}{۷}$ ضرایب سری فوریه به شکل زیر بدست می‌آید:

$$a_{\circ}=۲ \quad , \quad a_{۳}=\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۳\pi}{۷}} \quad , \quad a_{-۳}=\frac{۱}{۲}e^{j\frac{۳\pi}{۷}} \quad ,$$ سایر $a_k$ ها در یک پریود $=\circ$

a)

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin(n\pi)$$

$$\sin(n\pi) = 0 \Rightarrow x[n] = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$N=4$ متناوب با

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2}\left(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\rightarrow a_0 = a_4 = a_8 = a_{12} = \cdots = 1$$

$$a_1 = a_5 = a_9 = a_{13} = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = a_3 = a_7 = a_{11} = \cdots = \frac{1}{2}$$

e) $N=8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{4}n} \xrightarrow[\text{بازکش}]{} \underbrace{\frac{1}{8}\left[4 + 3e^{-jk\frac{\pi}{4}} + \cdots + 3e^{-jk\frac{7\pi}{4}}\right]}_{= a_k}$$

-۷

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}(0+1+2) = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(e^{-j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{-j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

می‌دانیم که برای سیستم LTI، رابطه سری فوریه ورودی و سری فوریه خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$b_k = a_k H(e^{j\omega})$$

ضرب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ را می‌خواهیم. بنابراین به ازای $k = -1$ داریم:

$$b_{-1} = a_{-1}H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}e^{\frac{j2\pi}{3}} + \cdots$$

بنابراین، ضریب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ در سری فوریه خروجی برابر $\frac{1}{9}$ می‌باشد.

-۸

ابتدا یادآوری می‌کنیم:

$$nx[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

$$a^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}$$

بنابراین داریم:

$$x[n]=(n+۱)a^n u[n]=na^n u[n]+a^n u[n]$$

$$na^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}\right\}=\frac{ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}$$

$$a^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}$$

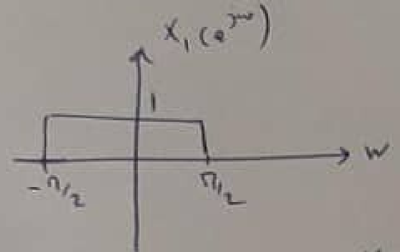
$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}+\frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}=\frac{ae^{-j\omega}+۱-ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}=\frac{۱}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}$$

$$x[n] = \frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi)^2}$$

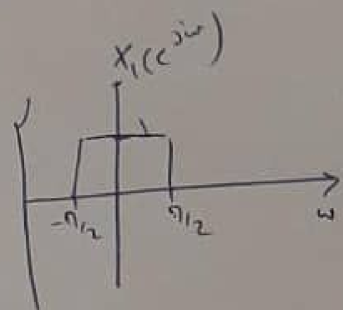
$x[n] \rightarrow$ درواقع حاصلضرب دو سیگنال $\frac{\sin \pi/2}{n\pi}$ است

$$x[n]\, y[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \{ X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega}) \}$$

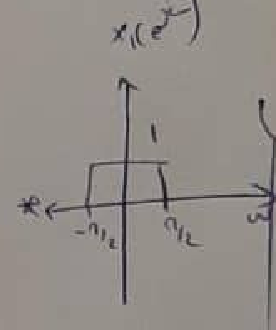
$x_1[n] \xleftrightarrow{F}$

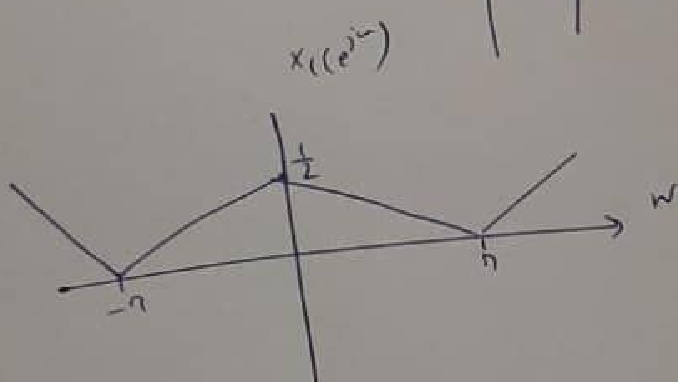



$$\left( \frac{\sin n\pi/2}{n\pi} \right)^2 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}$$

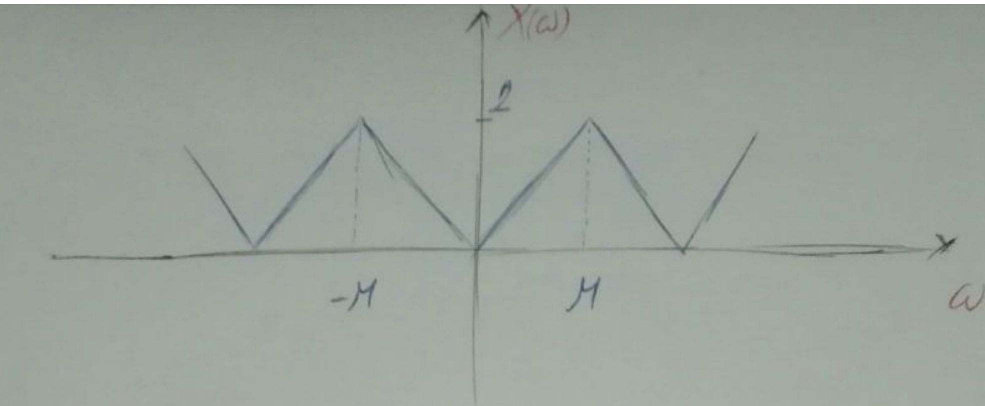



$*$



۹-




پارسوال $\rightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2M}\oint_{2M} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2 \times \frac{1}{2M}\int_0^M \left(\frac{2}{M}\omega\right)^2 d\omega$$

از آنجا که $X(\omega)$ زوج است ← انتگرال در $-M$ تا $M$ را به شکل دو برابر انتگرال در بازه‌ی $0$ تا $M$ نوشتیم.

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{4}{3M^2}\omega^3\right)\Bigg|_0^M = \frac{1}{M} \times \frac{4}{3M^2} \times M^3 = \frac{4}{3}$$

ویژگی ← اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد ← $X(\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود.
و عکس این قضیه نیز برقرار است.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]|^2 + (x[0])^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$= \underbrace{\left(x[0]\right)^2}_{?} + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2}_{\text{خواسته‌ی سؤال}} = \frac{4}{3}$$

برای محاسبه‌ی $|x[0]|^2$ از تعریف تبدیل فوریه معکوس استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\xrightarrow{n=0} \quad x[0] = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega}_{\text{جمع مساحت دو تا مثلث}} = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{2\pi}{2}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{6}}$$

-۱۰

$$y[n] + \text{۰٫۵}\, y[n-1] = x[n]$$

الف) $\xrightarrow{F.T} \; Y(e^{jw}) + \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw} Y(e^{jw}) = X(e^{jw})$

$$\Rightarrow H(e^{jw}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}}$$

ب)

$$a)\; x[n] = (\text{۰٫۵})^n u[n] \;\rightsquigarrow\; \alpha^n u[n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{1 - \alpha e^{-jw}}$$

$$\Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}}$$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) H(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}}$$

$$= \frac{\text{۰٫۵}}{1 - \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}} + \frac{\text{۰٫۵}}{1 + \frac{1}{\text{۲}} e^{-jw}} \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{\text{۲}} \left( \left(\frac{1}{\text{۲}}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{\text{۲}}\right)^n u[n] \right)$$

b) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

$$\Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-jw})^2}$$

$$\rightsquigarrow (n+1)\alpha^n u[n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2}$$

$$\Rightarrow y[n] = (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

c) $X(e^{jw}) = 1 + 2e^{-2jw}$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}}_{\downarrow F^{-1}} + \underbrace{\frac{2e^{-2jw}}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}}_{\downarrow F^{-1}}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$