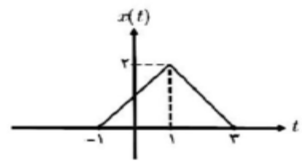
پاسخ تمرین ۲ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

سوال ۱ -

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر با $u(t) - u(t-4)$ داده شده است. پاسخ این سیستم وقتی ورودی قسمت زوج سیگنال $x(t)$، که از رابطه $\frac{x(t)+x(-t)}{2}$ به‌دست می‌آید، باشد چه خواهد بود؟



پاسخ:

(2

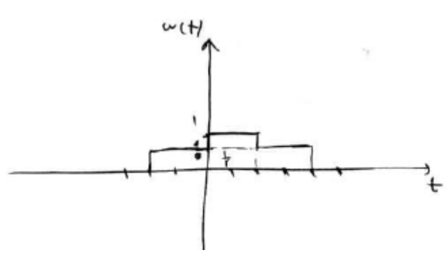
$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \overbrace{u(t) - u(t-۴)}^{y(t)}$$

نکته: به خاطر تقارن شکل سیگنال $x(t)$ می‌توان گفت که: $x(-t) = x(t+۲)$

$$\Rightarrow \quad \frac{x(t)+x(-t)}{۲} = \frac{x(t)+x(t+۲)}{۲}$$

$$\frac{x(t)}{۲} + \frac{x(t+۲)}{۲} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \underbrace{\frac{y(t)}{۲} + \frac{y(t+۲)}{۲}}_{w(t)}$$

$$w(t) = \frac{y(t)+y(t+۲)}{۲} = \frac{u(t)-u(t-۴)+u(t+۲)-u(t-۲)}{۲}$$



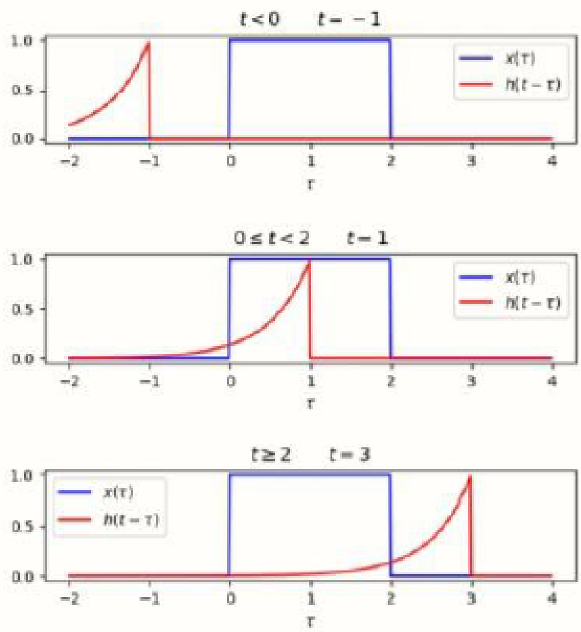
سوال ۲-

در هر یک از موارد زیر، در صورتی که پاسخ ضربه سیستم LTI برابر $h(t)$ و ورودی آن برابر $x(t)$ باشد، خروجی سیستم را به دست آورید.

$$a)\ \ x(t) = u(t) - u(t-2), \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

پاسخ:

(a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-2t}u(t)$



- $t < 0$

$$y(t) = 0$$

- $0 \leq t < 2$

$$y(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{2(\tau-t)}\right)\Big|_0^t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

- $t \geq 2$

$$y(t) = \int_0^2 e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{2(\tau-t)}\right)\Big|_0^2 = \frac{e^{2(2-t)} - e^{-2t}}{2}$$

b) $h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1], \quad x[n] = \frac{1}{3^n}$

پاسخ:

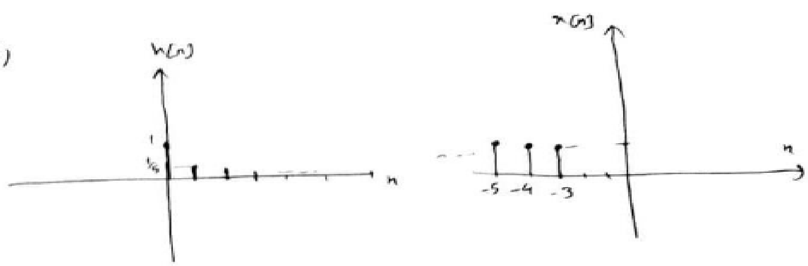
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^k}\,\delta[n+2-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^k}\,\delta[n+1-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^k}\,\delta[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^k}\,\delta[n-1-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

c) $h[n] = \frac{1}{5^n} u[n], \quad x[n] = u[-n-3]$

پاسخ:

d)



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

if $n > -3 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-3} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-3} \frac{1}{5^{n-k}} u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-3} \frac{1}{5^{n-k}}$

$\rightarrow y[n] = 5^{-n} \sum_{k=-\infty}^{-3} 5^k \quad \rightarrow \quad y[n] = 5^{-n} \sum_{k=3}^{+\infty} 5^{-k} = 5^{-n} \times \frac{1}{100}$

if $n > -3 \rightarrow y[n] = \frac{5^{-n}}{100}$

if $n \leq -3 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{1}{5^{n-k}} u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{1}{5^{n-k}}$

$\rightarrow y[n] = 5^{-n} \times \sum_{k=-\infty}^{n} 5^k \quad \rightarrow \quad y[n] = 5^{-n} \times \sum_{k=-n}^{+\infty} 5^{-k} = 5^{-n} \times \frac{5^n}{1-\frac{1}{5}}$

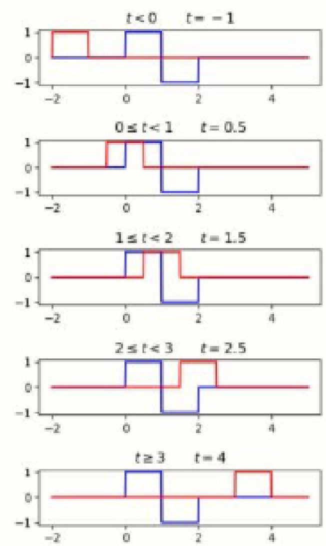
$$y[n] = \frac{5}{4}$$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{5^{-n}}{100} & n > -3 \\ \frac{5}{4} & n \leq -3 \end{cases}$$

d) $x(t) = \prod(t - \frac{1}{2}) - \prod(t - \frac{3}{2}), \quad h(t) = u(t) - u(t-1)$

$\prod(t) = rect(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$

پاسخ:



- $t < 0$ or $t \geq 3$

$$y(t) = 0$$

- $0 \leq t < 1$

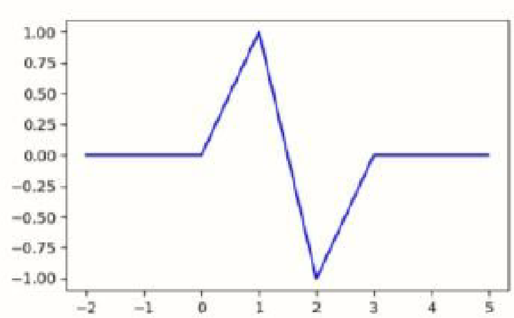
$$y(t) = \int_0^t d\tau = t$$

- $1 \leq t < 2$

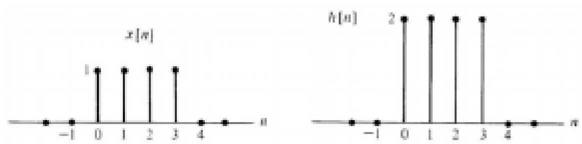
$$y(t) = \int_{t-1}^1 d\tau + \int_1^t -d\tau = 2 - t + 1 - t = 3 - 2t$$

- $2 \leq t < 3$

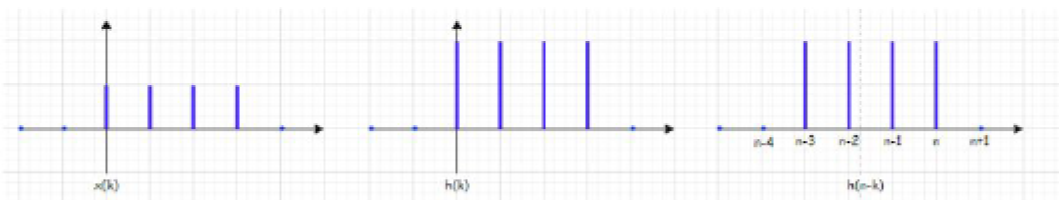
$$y(t) = \int_{t-1}^2 -d\tau = -(2 - (t-1)) = t - 3$$



e)



پاسخ:



$y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$

if $n < 0$: $y[n] = 0.$

if $0 \le n < 4$: $y[n] = \Sigma_{k=0}^{n} 2.$

if $4 \le n < 8$: $y[n] = \Sigma_{k=n-3}^{3} 2.$

if $n \ge 8$: $y[n] = 0.$

$$f)\ x(t)=\begin{cases}2 & |t|<t_1\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad,\quad h(t)=\begin{cases}1 & |t|<t_2\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad,\quad 0<t_1\le t_2$$

پاسخ:

$$f)\ \begin{cases}x(t)=2\left(u(t+t_1)-u(t-t_1)\right)\\ h(t)=u(t+t_2)-u(t-t_2)\end{cases} \Longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$0<t_1\le t_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}2\left(u(\tau+t_1)-u(\tau-t_1)\right)\overbrace{\left(u(t-\tau+t_2)-u(t-\tau-t_2)\right)}^{t-t_2<\tau<t+t_2}d\tau = 2\int_{t-t_2}^{t+t_2}\left(u(\tau+t_1)-u(\tau-t_1)\right)d\tau$$

$$\tau+t_1<0 \longrightarrow \underline{\tau<-t_1}$$

$$\tau-t_1<0 \longrightarrow \underline{\tau<t_1}$$

$$t+t_2<-t_1 \longrightarrow \underline{t<-t_1-t_2} \longrightarrow y(t)=\underline{0}$$

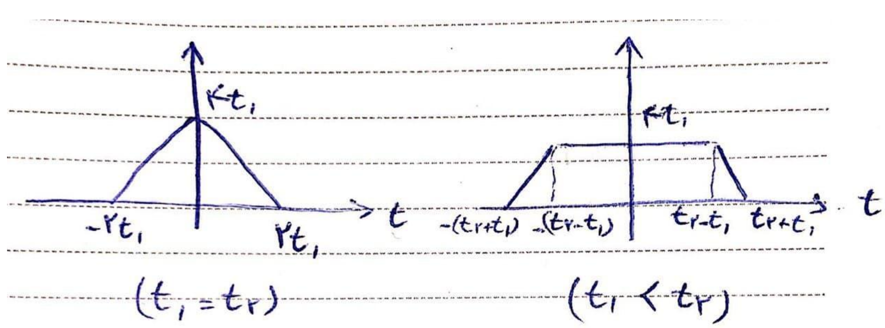
$$-t_1<t+t_2<t_1 \longrightarrow \underline{-t_1-t_2<t<t_1-t_2} \longrightarrow y(t)=2\int_{-t_1}^{t+t_2}\cancelto{1}{u(\tau+t_1)}\,d\tau=\underline{2(t+t_2+t_1)}$$

$$\left.\begin{matrix}t+t_2>t_1\\ t-t_2<-t_1\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \underline{t_1-t_2<t<-t_1+t_2} \longrightarrow y(t)=2\int_{-t_1}^{t_1}1\,d\tau=\underline{4t_1}$$

f) ادامه $-t_1<t-t_2<t_1 \longrightarrow \underline{-t_1+t_2<t<t_1+t_2} \longrightarrow y(t)=2\int_{t-t_2}^{t_1}d\tau=\underline{2(t_1-t+t_2)}$

$$t-t_2>t_1 \longrightarrow \underline{t>t_1+t_2} \longrightarrow y(t)=\underline{0}$$

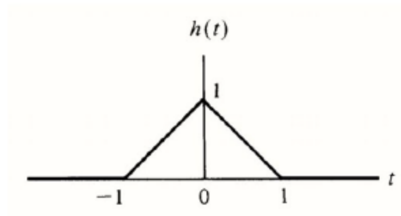
$$y(t)=\begin{cases}0 & t<-t_1-t_2\\ 2(t+t_1+t_2) & -t_1-t_2<t<t_1-t_2\\ 4t_1 & t_1-t_2<t<t_2-t_1\\ 2(t_1+t_2-t) & t_2-t_1<t<t_1+t_2\\ 0 & t>t_1+t_2\end{cases}$$



سوال ۳-

فرض کنید سیگنال $x(t)$ یک قطار ضربه با رابطه‌ای که در ادامه نوشته شده است باشد و سیگنال پاسخ ضربه $h(t)$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.

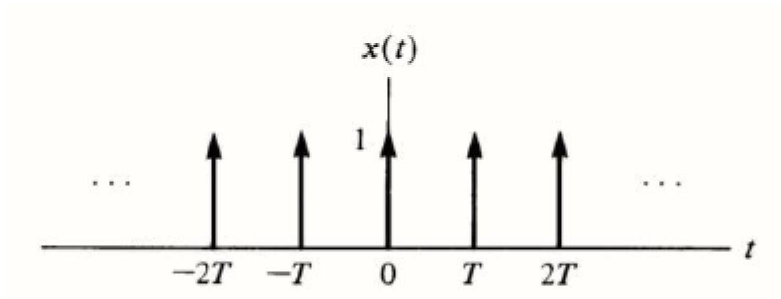
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



آ) سیگنال $x(t)$ را رسم کنید.

پاسخ:

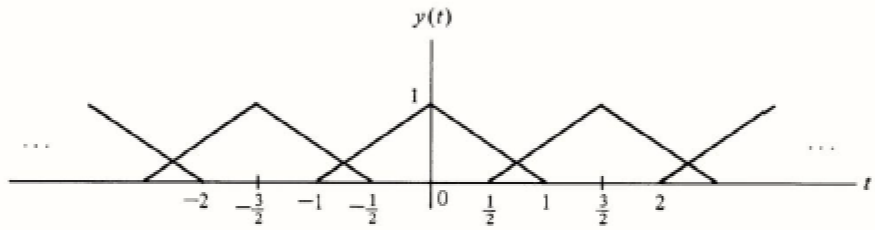
(a) $x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT)$ is a series of impulses spaced T apart.



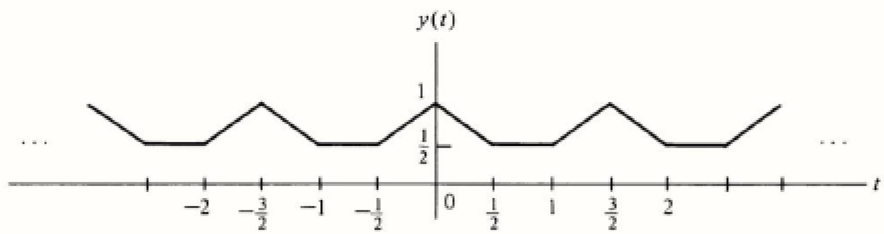
ب) اگر $T = \frac{3}{2}$ باشد، $y(t) = x(t) * h(t)$ را محاسبه و رسم نمایید.

پاسخ:

(b) Using the result $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t_0)$, we have



So $y(t) = x(t) * h(t)$ is



سوال ۴-

خواص علی بودن و پایداری سیستم‌های LTI زیر را که با پاسخ ضربه یا معادله صریح مشخص شده‌اند تعیین کنید.

$$a)\ \ h(t) = e^{-6t}u(t+2)$$

پاسخ:

حافظه‌دار است، زیرا:

$$h(1) = e^{-6}u(3) \neq 0.$$

علی نیست، زیرا:

$$h(-1) = e^{6t} \neq 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-6t}u(t+2)|\, dt = \int_{-2}^{\infty} e^{-6t}\, dt = -\frac{1}{6}(e^{-6t})|_{-2}^{\infty} = -\frac{1}{6}(0 - e^{12}) < \infty.$$

$$b)\ \ h[n] = 2^n u[3-n]$$

پاسخ:

Causality:

$$n = -1 < 0 \Rightarrow h[-1] = 2^{-1}u[4] = \frac{1}{2} \neq 0 \Longrightarrow \textit{The system is } \boldsymbol{noncausal}$$

Stability:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|2^k u[3-k]\right| = \sum_{k=-\infty}^{3} 2^k \overset{p=-k}{=} \sum_{p=-3}^{+\infty} 2^{-p} = \sum_{p=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

$$= \frac{2^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 16 < \infty \Longrightarrow \textit{The system is } \boldsymbol{stable}$$

c) $y(t) = \int_{-\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)d\tau$

پاسخ:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)\, u(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow h(t) = t\,u(t)$$

For all $t<0 \longrightarrow h(t)=0 \longrightarrow$ causal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t\,u(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$\longrightarrow$ the system is not stable.

d) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

پاسخ:

حافظه‌دار است، زیرا:

$$h[1] = 0.8 \neq 0.$$

علی نیست، زیرا:

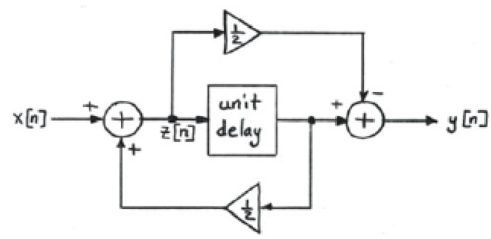
$$h[-1] = 0.8^{-1}u[1] = 0.8^{-1} \neq 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \Sigma_{n=-2}^{\infty} 0.8^n = 0.8^{-2} + 0.8^{-1} + \Sigma_{n=0}^{\infty} 0.8^n \cong 2.8 + \frac{1}{0.2} = 7.8 < \infty.$$

سوال ۵-

سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید (بخش‌های مثلثی به معنای عملگر ضرب در سیگنال ورودی هستند).



آ) معادله تفاضلی بین ورودی $x[n]$ و خروجی $z[n]$ را بیابید.

ب) پاسخ ضربه $h[n]$ بین ورودی $x[n]$ و خروجی $z[n]$ را محاسبه کنید.

پ) پاسخ ضربه $h_{overall}[n]$ بین ورودی $x[n]$ و خروجی $z[n]$ را بیابید.

پاسخ:

الف)

$$z[n] = \frac{1}{2}z[n-1] + x[n]$$

ب)

برای بدست آوردن پاسخ ضربه، ورودی سیستم را تابع ضربه میدهیم

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n]$$

سیستم در $n-1$ در حالت سکون است در نتیجه: $h[-1] = 0$

$$h[0] - \frac{1}{2}h[-1] = 1 \xRightarrow{h[-1]=0} h[0] = 1$$

حال برای $n > 0$

$$h[n] = \frac{1}{2}h[n-1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h[1] = \frac{1}{2}h[0] = \frac{1}{2} \\ h[2] = \frac{1}{2}h[1] = \frac{1}{4} \\ h[3] = \frac{1}{2}h[2] = \frac{1}{8} \\ \quad \cdots \end{cases} \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ج)

$$-\frac{1}{2}z[n] + z[n-1] = y[n] \Rightarrow y[n] = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right]u[n] = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right]u[n]$$

سوال ۶-

با فرض برقراری سکون ابتدایی در معادله تفاضلی مرتبه اول زیر، پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی-خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

سکون ابتدایی:

$$\text{if } \forall n < n_0 . x[n] = 0 \text{ then } \forall n < n_0 . y[n] = 0$$

پاسخ:

$$y[n] + ۲y[n-1] = x[n]$$

ورودی $x[n] = \delta[n]$

خروجی $y[n]$

$$\xrightarrow{\text{سکون ابتدایی}} \forall n < ۰ . \ \delta[n] = ۰ \Rightarrow y[n] = ۰$$

$$n = ۰ \Rightarrow y[۰] + ۲y[-1] = \delta[۰] \Rightarrow y[۰] = ۱$$

$$n = ۱ \Rightarrow y[۱] + ۲y[۰] = \delta[۱] \Rightarrow y[۱] = -۲$$

$$n = ۲ \Rightarrow y[۲] + ۲y[۱] = \delta[۲] \Rightarrow y[۲] = ۴$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \forall n \geq ۰ . \ y[n] = (-۲)^n$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} ۰ & n < ۰ \\ (-۲)^n & n \geq ۰ \end{cases}$$