

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین ششم فیلترینگ، نمونه‌برداری و تبدیل لاپلاس

استاد درس
دکتر راستی

توضیحات:

- مهلت تحویل تا جمعه ۱۷ دی ساعت ۲۲ در نظر گرفته شده است و به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد. امکان استفاده از بودجه تاخیر مجاز برای این تمرین وجود ندارد.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- پاسخ تمرین را در قالب یک فایل PDF با نام «HW6_StudentNumber.pdf» در سایت درس بارگذاری کنید.
- سوالات خود را از طریق ایمیل ss.fall.2021@gmail.com با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را «تمرین n : سوال m » برای سوالات تمرین و «سوال از فصل x » برای سوالات درسی قرار دهید.

نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

سوال ۱ -

فیلتر میان‌گذر پیوسته-زمان ایده‌آلی را با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \leq |\omega| \leq 3\omega_c \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

آ) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه این فیلتر باشد، تابع $g(t)$ را طوری تعیین کنید که:

$$h(t) = \left(\frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \right) g(t)$$

ب) با افزایش ω_c ، پاسخ ضربه فیلتر نسبت به مبدا بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟

سوال ۲ -

(آ) دنباله $x[n] = (-1)^n$ با نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته-زمان سینوسی $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ در فاصله‌های ۱ میلی‌ثانیه‌ای بدست می‌آید. به عبارتی:

$$\cos(\omega_0 nT) = (-1)^n, \quad T = 10^{-3} \text{ s}$$

سه مقدار ممکن و متمایز برای ω_0 تعیین کنید.

(ب) سیگنال $y(t)$ از کانولوشن دو سیگنال باند محدود^۱ $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بدست می‌آید؛ یعنی:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

که در آن

$$X_1(j\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| > 1000\pi$$

$$X_2(j\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| > 2000\pi$$

با نمونه‌برداری با قطار ضربه روی $y(t)$ بدست می‌آوریم:

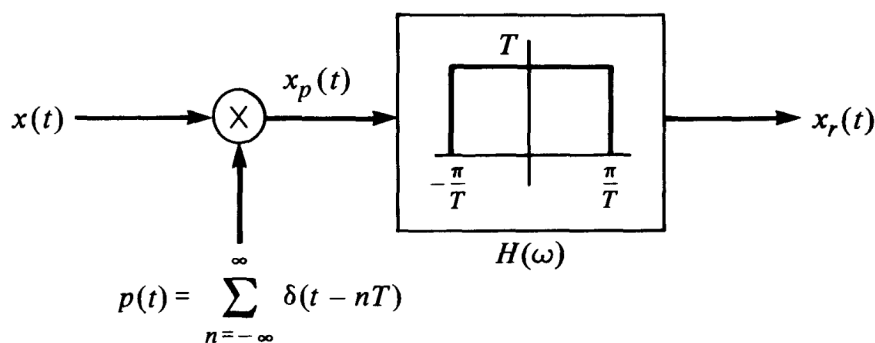
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

محدوده مقادیر را برای دوره نمونه برداری T مشخص کنید به طوری که تضمین شود $y(t)$ از $y_p(t)$ قابل بازیابی است.

^۱band-limited

سوال ۳ -

در سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده است، سیگنال ورودی $x(t)$ با قطار ضربه متناوب نمونه‌برداری شده است و سیگنال بازسازی شده $x_r(t)$ توسط نمونه‌هایی از یک فیلتر پایین گذر بدست آمده است.



تناوب نمونه‌برداری T برابر با $1ms$ و $x(t)$ یک سیگنال سینوسی به شکل $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ است. برای هر یک از مقادیر f_0 و θ ، سیگنال $x_r(t)$ را مشخص نمایید.

a) $f_0 = 250Hz$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $f_0 = 750Hz$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

c) $f_0 = 500Hz$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

سوال ۴ -

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) + 4e^{3t}u(t)$$

آ) با محاسبه تبدیل فوریه این سیگنال، همگرایی یا عدم همگرایی تبدیل فوریه آن را بررسی کنید.

ب) برای کدام یک از مقادیر σ زیر، تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ همگرا می‌شود؟

i) $\sigma = 1$

ii) $\sigma = 2.5$

iii) $\sigma = 3.5$

پ) تبدیل لاپلاس $X(s)$ را برای $x(t)$ محاسبه کنید. نمودار ناحیه همگرایی آن را رسم و محل صفرها و قطب‌های آن را مشخص کنید.

سوال ۵-

تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر-قطب را برای سیگنال‌های زیر تعیین کنید.

a) $x(t) = (t - 3)e^{-2t}u(t - 3)$

b) $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

c) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT), \quad a > 0$

سوال ۶-

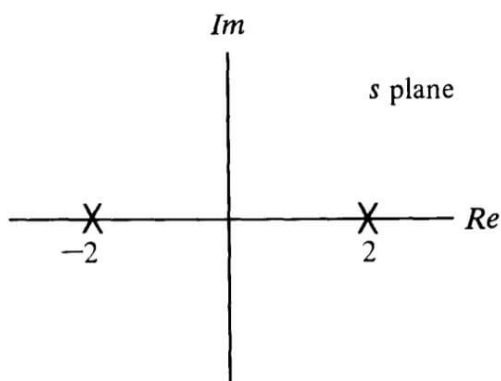
سیگنال $x(t)$ هر یک از تبدیل لاپلاس‌های $X(s)$ زیر را بیابید.

a) $X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$, $Re\{s\} > -1$

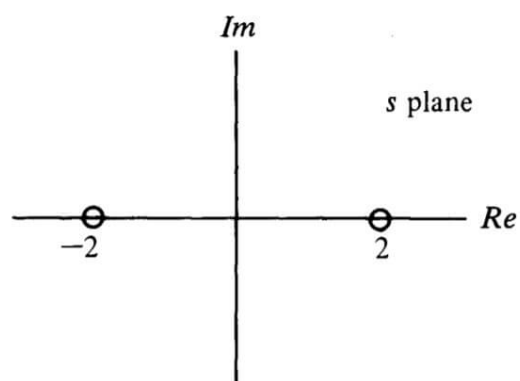
b) $X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$, for every possible ROC

سوال ۷-

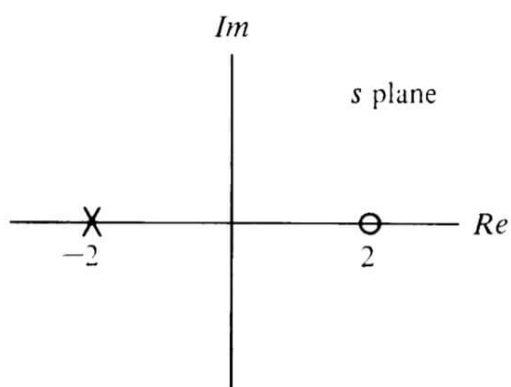
شکل‌های زیر، چهار نمودار صفر-قطب را نشان می‌دهند. در هر یک از موارد جدول برای سیگنال حوزه زمان $x(t)$ ، ناحیه همگرایی معادل آن را هاشور بزنید.



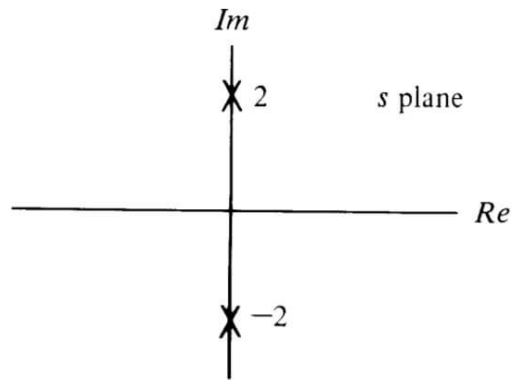
(a)



(b)



(c)



(d)

(d)	(c)	(b)	(a)	$x(t)$
				تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ همگرا شود.
				$x(t) = 0,$ $t > 10$
				$x(t) = 0,$ $t < 0$

سوال ۸-

یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیلی زیر توصیف می‌شود.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

(آ) تابع سیستم این سیستم LTI را بدست آورید و نمودار صفر-قطب آن را رسم کنید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را در هر یک از شرایط زیر به دست آورید.

۱ - سیستم پایدار باشد.

۲ - سیستم علی باشد.

۳ - سیستم نه علی و نه پایدار باشد.

سوال ۹ (امتیازی) -

تبدیل z - دنباله زیر را محاسبه کنید. نمودار صفر-قطب آن را رسم کرده و ناحیه همگرایی را مشخص کنید. آیا تبدیل فوریه دنباله زیر موجود است؟

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$