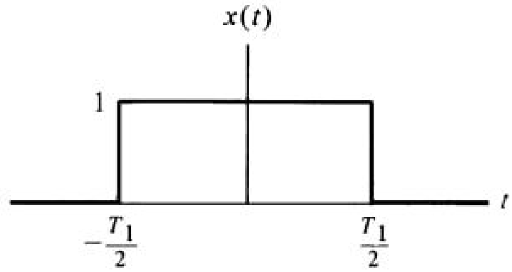
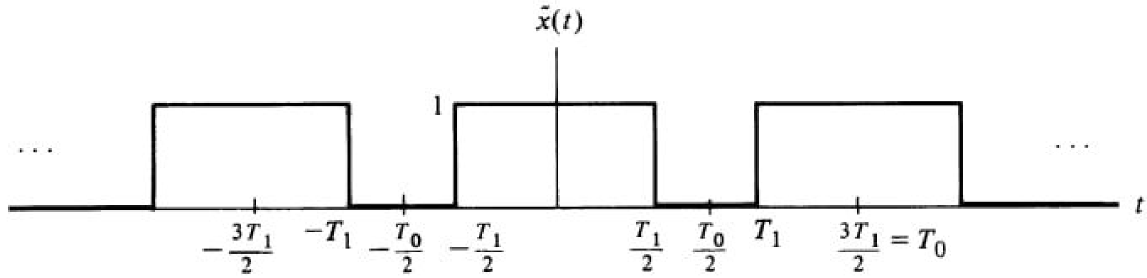
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین چهارم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

۱- الف)



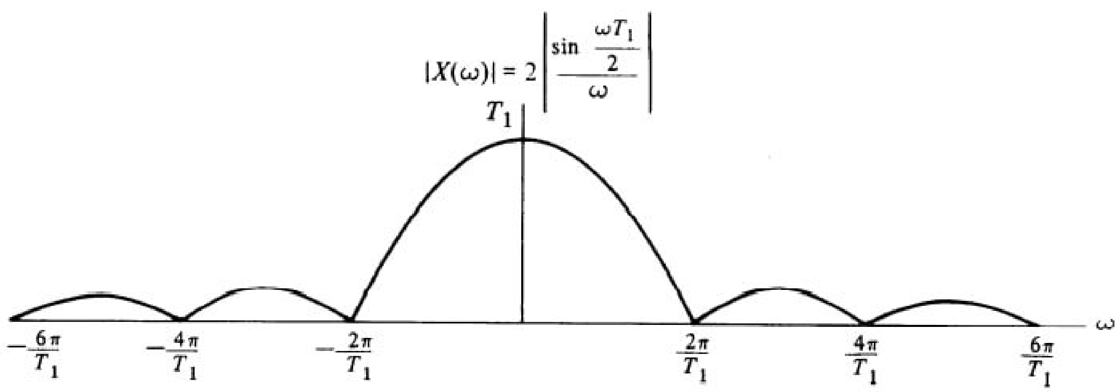


ب)

Using the definition of the Fourier transform, we have

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{since } x(t) = 0 \quad \text{for} \quad |t| > \frac{T_1}{2}$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T_1/2} - e^{j\omega T_1/2}\right) = \frac{2\sin\frac{\omega T_1}{2}}{\omega}$$



پ)

Using the analysis formula, we have

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt,$$

where we integrate over *any* period.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)e^{-jk(2\pi/T_0)t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{\;jk(2\pi/T_0)t}\,dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jk\dfrac{2\pi}{T_0}}\right)(e^{-jk\pi T_1/T_0} - e^{jk\pi T_1/T_0}) = \frac{\sin k\pi(T_1/T_0)}{\pi k} = \frac{\sin \pi(2k/3)}{\pi k}$$

ت)

$$\frac{1}{T_0}X(\omega)\Big|_{\omega=(2\pi k)/T_0} = \frac{1}{T_0}\frac{2\sin(\pi k T_1/T_0)}{2\pi k/T_0} = \frac{\sin \pi k(T_1/T_0)}{\pi k} = a_k$$

ث)

همانطور که در قسمت «ت» می‌بینیم، اگر در تبدیل فوریه‌ی سیگنال x، مقادیر $k\omega_0$ را جایگذاری کرده و حاصل را تقسیم بر اندازه‌ی دوره تناوب سیگنال متناوب‌شده‌ی x کنیم، حاصل آن سری فوریه‌ی فرم متناوب سیگنال x خواهد بود.

-۲

(a

$$a)\ x(t) = e^{-۳|t|} \sin(۲t)$$

$$e^{-۳|t|} \xrightarrow{FT} \frac{۶}{۹+\omega^۲} \qquad \sin(۲t) \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-۲) - \delta(\omega+۲)\right)$$

$$x(t)\,y(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{۲\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{۲\cancel{\pi}} \times \frac{\cancel{\pi}}{j}\left(\frac{۶}{۹+(\omega-۲)^۲} - \frac{۶}{۹+(\omega+۲)^۲}\right)$$

b)

(b) $x(t) = \begin{cases} 1-t & 0<t<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

از تعریف تبدیل فوریه مسأله را حل می‌کنیم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{1} (1-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{1} e^{-j\omega t}\, dt}_{A} - \underbrace{\int_{0}^{1} t e^{-j\omega t}\, dt}_{B} = A-B$$

$$A = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_0^1 = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - 1\right)$$

$$B = \int_0^1 t e^{-j\omega t}\, dt \qquad \boxed{\begin{array}{l} u=t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-j\omega t} dt \Rightarrow v = \dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \end{array}}$$

$$= uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,du = \frac{t e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\, dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} - \left(\frac{-1}{\omega^2} e^{-j\omega t}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} - \left(\frac{e^{-j\omega}-1}{-\omega^2}\right)$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega}-1}{+\omega^2}$$

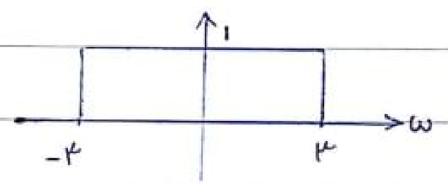
$$\Rightarrow X(\omega) = A-B = \frac{-2e^{-j\omega}+1}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^2}$$

قسمت c)

c) $x(t) = \dfrac{\sin 4t \cdot \cos t}{\pi t}$

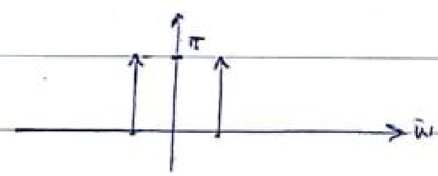
$$\frac{\sin w_0 t}{\pi t} \xrightarrow{FT} X(jw) = \begin{cases} 1 & |w| < w_0 \\ 0 & |w| > w_0 \end{cases}$$

$\rightarrow FT\left\{\dfrac{\sin 4t}{\pi t}\right\}$:



$\rightarrow X_1(jw)$

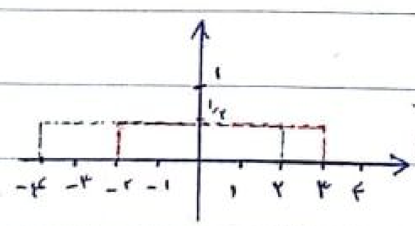
$FT\{\cos t\}$:



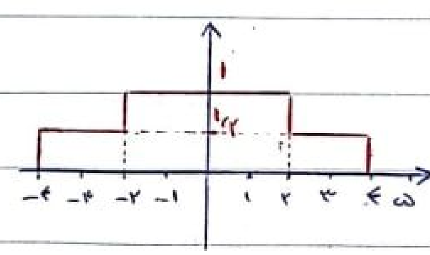
$X_2(jw)$

طبق خاصیت ضرب : $X(jw) = \dfrac{1}{2\pi} X_1(jw) * X_2(jw)$

$\downarrow$



$\rightarrow$



(d

d) $te^{-2|t-1|}$

$\rightsquigarrow e^{-a|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-2|t|} \xrightarrow{FT} \frac{4}{4+\omega^2}$

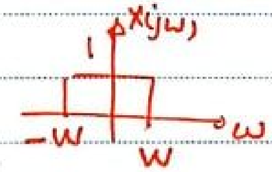
$\rightsquigarrow x(t+t_0) \xrightarrow{FT} e^{j\omega_0 t_0} X(j\omega) \Rightarrow e^{-2|t-1|} \xrightarrow{FT} e^{-j\omega_0} \times \frac{4}{4+\omega_0^2}$

$\rightsquigarrow t\,x(t) \xrightarrow{FT} -\frac{1}{j} \cdot \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \Rightarrow te^{-2|t-1|} \xrightarrow{FT} -\frac{1}{j} \cdot \frac{d\left(\frac{4e^{-j\omega_0}}{4+\omega_0^2}\right)}{d\omega}$

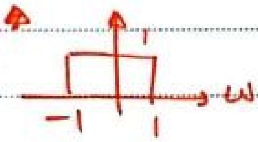
(e

$$x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow x(t) = t\,\frac{\sin(t)}{\pi t}\,\frac{\sin(t)}{\pi t}$$

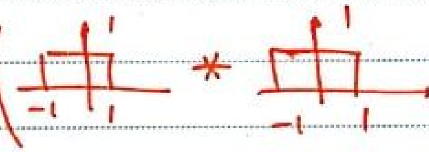
عکس داریم * $x(t) = \dfrac{\sin(Wt)}{\pi t} \overset{FT}{\longleftrightarrow}$



$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow$$

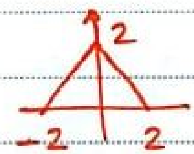


$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\Big($$



$$\Big)$$

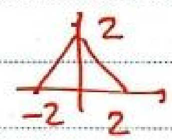
$$= \frac{1}{2\pi}$$



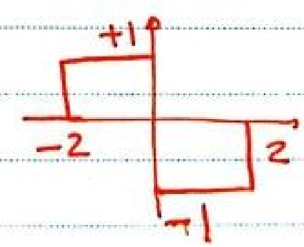
$$* \quad x(t) \longleftrightarrow X(jw)$$

$$t\,x(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{dw}X(jw)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$



$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}$$



-۳

(a

(a) $X(j\omega) = 2\delta(\omega+6)$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\xrightarrow[\text{Shift}]{\text{Frequency}} e^{j(-6)t} \longleftrightarrow 2\pi\delta\big(\omega-(-6)\big)$$

$$\xrightarrow{\div\pi} \frac{1}{\pi}e^{-j6t} \longleftrightarrow 2\delta(\omega+6)$$

(b

(b) $\dfrac{7j\omega+46}{-\omega^2+13j\omega+42} = \dfrac{7(j\omega)+46}{(j\omega)^2+13j\omega+42}$

$\Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{7j\omega+46}{(j\omega+7)(j\omega+6)} = \dfrac{A}{j\omega+7} + \dfrac{B}{j\omega+6}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=7 \\ 6A+7B=46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=4 \end{cases}$

$\dfrac{1}{j\omega+7} \longleftrightarrow e^{-7t}u(t)$

$\dfrac{1}{j\omega+6} \longleftrightarrow e^{-6t}u(t)$

$\Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{3}{j\omega+7} + \dfrac{4}{j\omega+6} \longleftrightarrow \left(3e^{-7t}+4e^{-6t}\right)u(t)$

(c

(C) $x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1 + j\omega/3}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{-j e^{2\omega j}}{1 + j\omega/3}\right)$

$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = \frac{-j e^{2\omega j}}{1 + j\omega/3}$

$z(t) \longleftrightarrow Z(\omega) = \frac{-j}{1 + j\omega/3} = \frac{-3j}{3 + j\omega}$

$\boxed{e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}} \Rightarrow z(t) = \underbrace{(-3j)}_{\text{ضریب عددی ثابت}} e^{-3t} u(t)$

$\boxed{\begin{array}{l} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} Y(\omega) = e^{2\omega j} Z(\omega) \\ \Rightarrow y(t) = z(t+2) = (-3j) e^{-3t-6} u(t+2) \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ -jt\, f(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} Y(\omega) \\ \Rightarrow x(t) = -jt\, y(t) \end{cases}$

$= -3t\, e^{-3t-6} u(t+2)$

(d

(d) $X(j\omega) = \pi e^{-3|\omega|}$

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\text{Duality}} \frac{2a}{a^2+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$\xrightarrow{a=3} \frac{6}{9+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-3|\omega|}$$

$$\overset{\div 2}{\Longrightarrow} \frac{3}{9+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-3|\omega|}$$

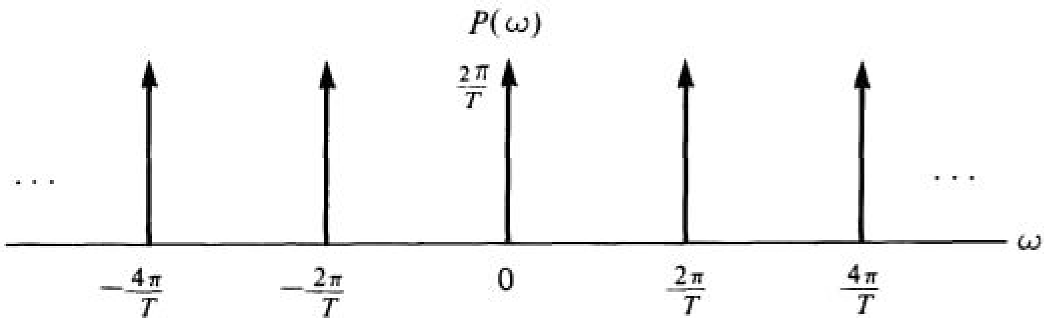
۴- a)

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt = \frac{1}{T}$$

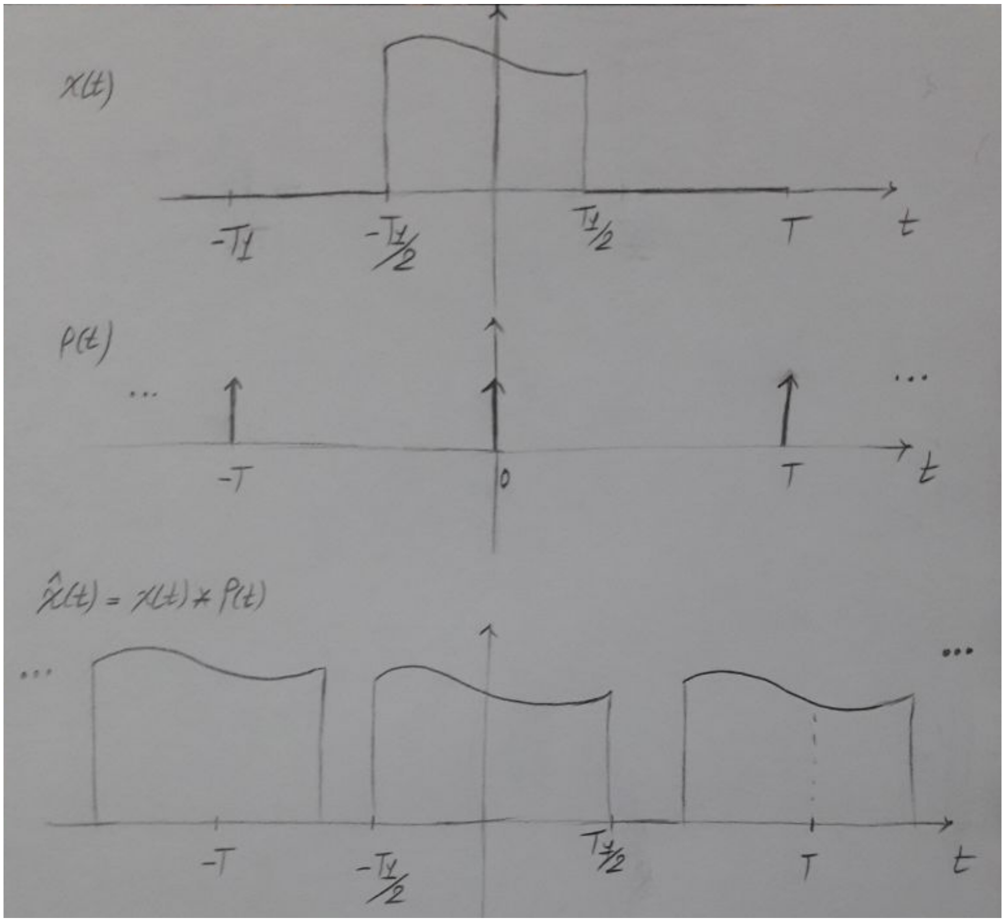
b)

$$X(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

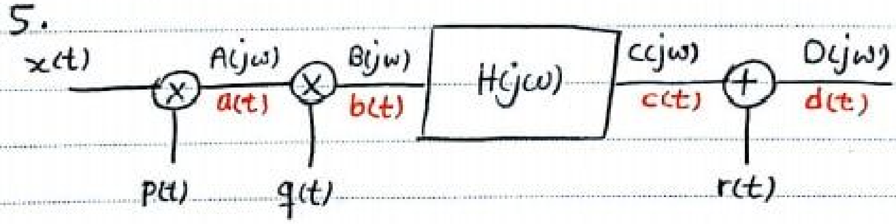


(c



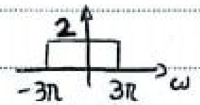
همانطور که می‌دانیم، کانولوشن $x(t)$ با $\delta(t-t_0)$، حاصلش $x(t-t_0)$ است ⇐
کانولوشن با قطاری از ضربه‌ها، منجر به تکرار سیگنال $x(t)$ در بازه‌هایی به طول T می‌شود.
حال اگر T کوچک باشد، تکرارهای $x(t)$ به یکدیگر برخورد می‌کنند، اما اگر T به قدر
کافی بزرگ باشد، سیگنال حاصل، سیگنالی متناوب است که از تکرار سیگنال $x(t)$ بدست
می‌آید.

5.



$x(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ $\quad p(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ $\quad q(t)=\cos(3\pi t)$

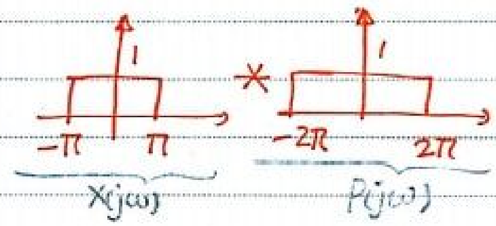
$H(j\omega)=$



$r(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

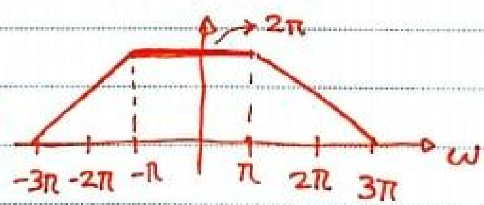
A(jω) محاسبه * $\quad a(t)=x(t)\,p(t) \Rightarrow A(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\left(X(j\omega)*P(j\omega)\right)$

$\Rightarrow A(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}$

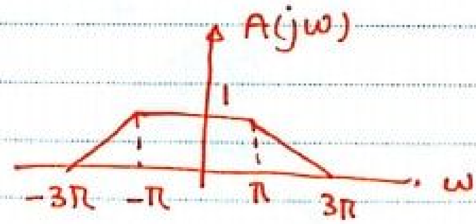


* برای انجام این convolution، از کادر موجود در سولوشن سؤال 2c تمرین 2 استفاده کنید

$\Rightarrow A(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}$

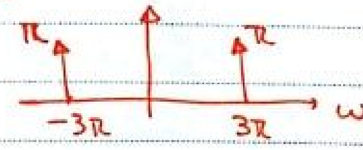


$=$



B(jω) محاسبه * $b(t) = a(t)\,q(t) \Rightarrow B(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(A(j\omega) * Q(j\omega)\right)$

$q(t) = \cos(3\pi t) \Rightarrow Q(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega-3\pi) + \delta(\omega+3\pi)\right)$

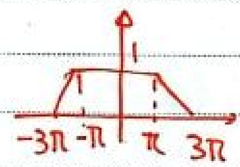


* یادآوری : $\text{convolution}\left(\delta(\omega-\omega_0), X(j\omega)\right) = X(j(\omega-\omega_0))$

$\Rightarrow B(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(A(j\omega) * \pi\left(\delta(\omega-3\pi) + \delta(\omega+3\pi)\right)\right)$

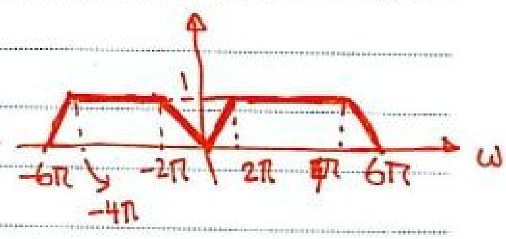
$= \frac{1}{2}\left(A(j(\omega-3\pi)) + A(j(\omega+3\pi))\right)$

$A(j\omega)$:

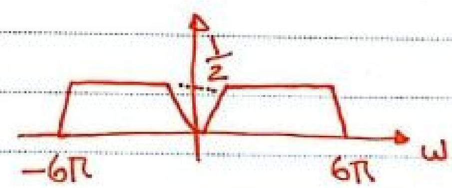


$B(j\omega) =$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A(j(\omega-3\pi)) + A(j(\omega+3\pi))\right) = \frac{1}{2}$

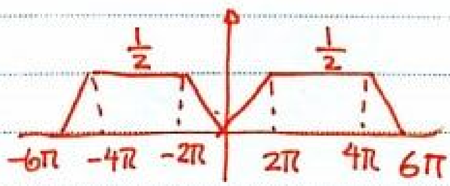


$\Rightarrow B(j\omega) =$

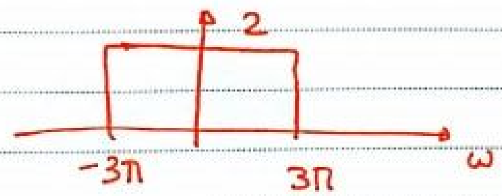


$C(j\omega)$ محاسبه* $C(j\omega) = B(j\omega)\, H(j\omega)$

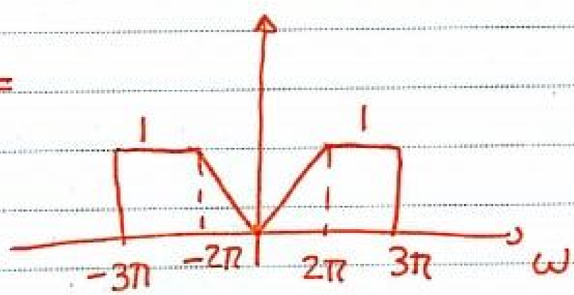
$B(j\omega)$:



$H(j\omega)$:



$\Rightarrow C(j\omega) =$



-۶

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

الف)

$$6H(j\omega) \underbrace{-\omega^2}_{+j^2\omega^2} H(j\omega) + 5j\omega H(j\omega) = j\omega+2$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} 6h(t) + \frac{d^2h(t)}{dt} + 5\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t)$$

با جایگذاری $x(t)=\delta(t)$, $y(t)=h(t)$ داریم،

$$6y(t) + \frac{d^2y(t)}{dt} + 5\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ب) $h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\}$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+2)} = \frac{1}{j\omega+3} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-3t}u(t)$$

ج) $$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4} - j\underbrace{\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{j\omega+4}\right\}}_{\frac{-1}{(j\omega+4)^2}} = \frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{\cancel{j\omega+3}}{(j\omega+4)^2} \times \frac{\cancel{j\omega+2}}{(\cancel{j\omega+2})(\cancel{j\omega+3})}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)^2} \Rightarrow y(t) = t e^{-4t} u(t)$$

2) $x_1(t) = e^{2t} \longrightarrow$ می دانیم e^{2t} تبدیل فوریه ندارد.

اما اگر کانولوشن را انجام دهیم، سیستم برای این ورودی، خروجی می دهد:

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau} e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= e^{-3t} \int_{-\infty}^{t} e^{5\tau}\, d\tau = e^{2t} \times \frac{1}{5}$$

۷- الف)

الف) $\Rightarrow x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 6\frac{dh(t)}{dt} + 9h(t) = \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} + 3\frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t)$$

$$\xrightarrow{FT} j^2 w^2 H(jw) + 6jw H(jw) + 9H(jw) = j^2 w^2 + 3jw + 2$$

$$\Rightarrow H(jw) = \frac{j^2w^2 + 3jw + 2}{j^2w^2 + 6jw + 9} = 1 - \frac{3jw + 7}{(3 + jw)^2}$$

$$= 1 - \frac{3}{jw + 3} + \frac{2}{(jw + 3)^2}$$

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-3t}u(t) + 2te^{-3t}u(t)$$

ب و پ)

ب) با عوض کردن جای x و y در معادله‌ی سیستم، در واقع معادله‌ی سیستم وارون را خواهیم داشت.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

برای محاسبه‌ی $g(t)$: ← (راه اول) مثل سمت قبل، $x(t) = \delta(t)$ میذاریم، تبدیل فوریه میگیریم و بعد F^{-1}.

راه کوتاه‌تر: ← (راه دوم) در مورد پاسخ ضربه‌ی سیستم معکوس می‌دانیم که:

$$h(t) * g(t) = \delta(t) \Rightarrow H(j\omega) \times G(j\omega) = 1$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{j^2\omega^2 + 6j\omega + 9}{j^2\omega^2 + 3j\omega + 2} = 1 + \frac{3j\omega + 7}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$$

$$= 1 + \frac{4}{1+j\omega} + \frac{-1}{2+j\omega} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(t) + 4e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$