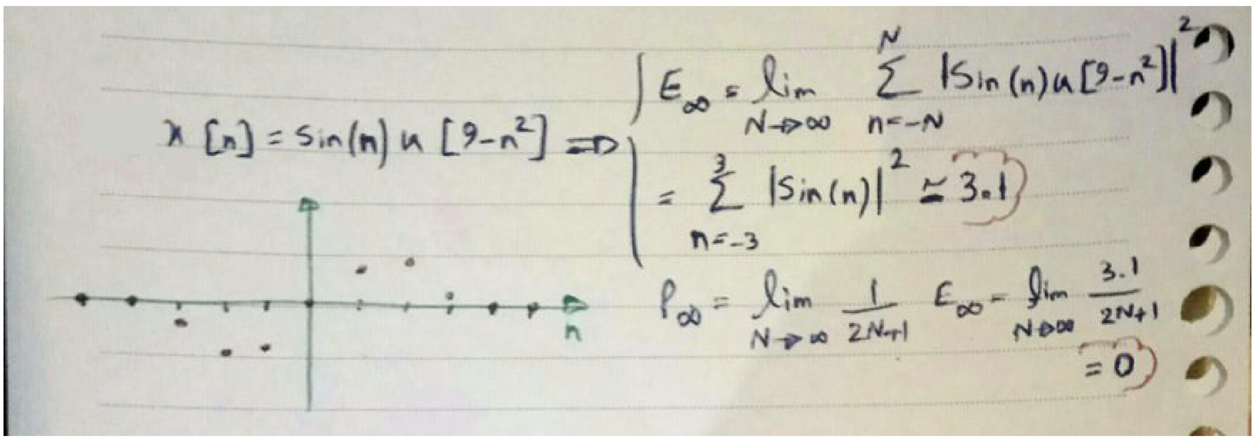
پاسخ تمرین ۱ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

سوال ۱ -

انرژی کل و توان متوسط سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

$a)\ \ x_1[n] = \sin(n)\, u[9-n^2]$



$b)\ \ x_2(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t u(t)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_0^\infty \left|\left(\frac{1}{4}\right)^t\right|^2 dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{16}\right)^t dt = \frac{1}{4\ln(2)}$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left(\frac{1}{16}\right)^t dt = \frac{C}{\infty} = 0$$

c) $x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right|^2 = +\infty$$

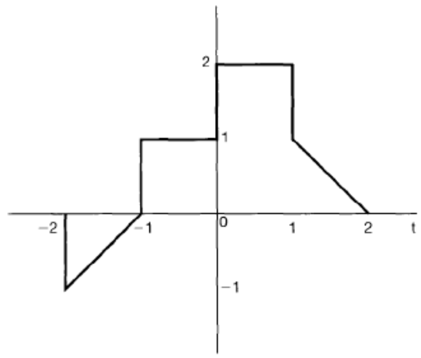
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right|^2 =$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2}\right) \times \frac{1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E_\infty = \infty \qquad P_\infty = \frac{1}{2}}$$

سوال ۲ -

سیگنال $x(t)$ را به شکل زیر در نظر بگیرید. موارد خواسته شده را رسم کنید.



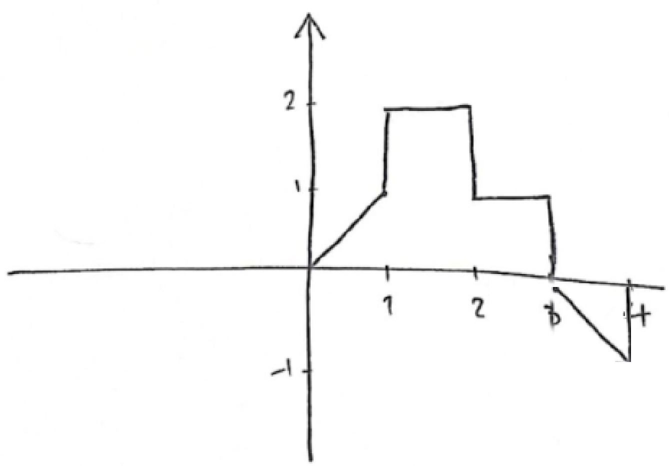
a) $x(2-t)$

$$x(t) \xrightarrow[\text{reverse}]{\text{time}} x_1(t) = x(-t) \xrightarrow[\text{shift}]{\text{time}} x_2(t) = x_1(t-2) = x(2-t)$$

2 step right

or

$$x(t) \xrightarrow[\text{2 step left}]{\text{time shift}} x_1(t) = x(t+2) \xrightarrow[\text{reverse}]{\text{time}} x_2(t) = x_1(-t) = x(-t+2)$$



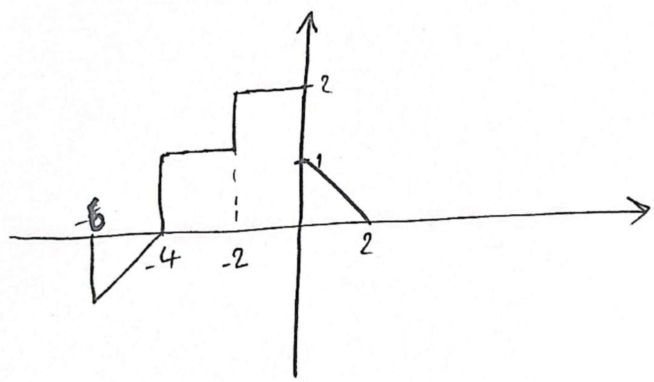
b) $x(\frac{t}{2}+1)$

$x(t) \xrightarrow[\text{by } 2]{\text{time scale}} x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow[\text{shift}]{\text{time}} x_2(t) = x_1(t+2) = x\left(\frac{t}{2}+1\right)$

2 step left

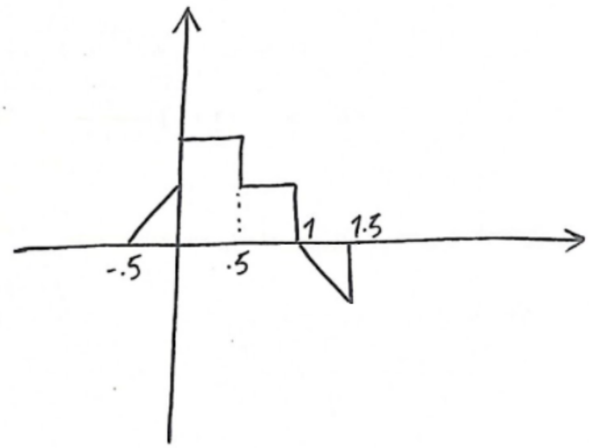
or

time shift 1 step left $\longrightarrow x_1(t) = x(t+1) \xrightarrow[\text{scale by } 2]{\text{time}} x_2(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) = x\left(\frac{t}{2}+1\right)$



c) $x(1-2t)$

$$x(t) \xrightarrow[\substack{\text{by } 1/2 \\ \text{and time} \\ \text{reverse}}]{\substack{\text{time} \\ \text{scale}}} x_1(t) = x(-2t) \xrightarrow[\substack{\text{by } 1/2 \\ \text{to right}}]{\substack{\text{time} \\ \text{shift}}} x_2(t) = x_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = x(1-2t)$$



d) $x(\frac{t}{2})\left[\delta(t+3) - \delta(t-3)\right]$

$$x(t) \longrightarrow x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow[\text{sample at}]{\times[\delta(t+3) - \delta(t-3)]} x\left(\frac{t}{2}\right)\left[\delta(t+3) - \delta(t-3)\right]$$

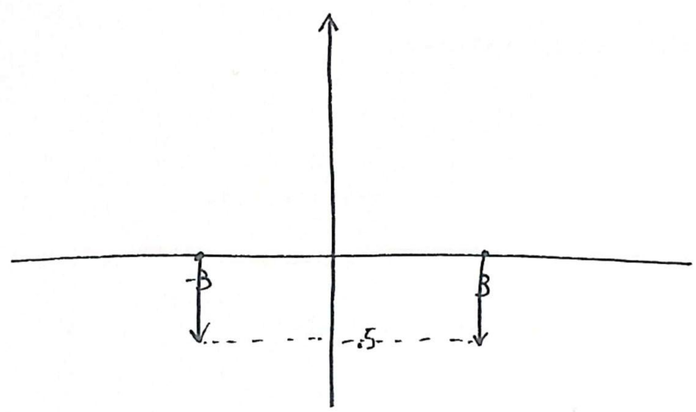
sample at

$x_1(-3)$ and $x(+3)$

or

$x(-1.5)$ and $x(1.5)$

and put it in -3 and 3.



سوال ۳-

آ) متناوب بودن سیگنال‌های زیر را بررسی کنید. در صورت متناوب بودن سیگنال، دوره تناوب اصلی آن را به دست آورید.

$a)\ \ x_1(t) = e^{3jt} + e^{4\pi jt}$

$$x(t) = e^{3jt} + e^{4\pi jt}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{3jt} \longrightarrow T_1 = \dfrac{2\pi}{3} \\ e^{4\pi jt} \longrightarrow T_2 = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

نمی‌توان مضرب مشترک گرفت

پس متناوب نیست

$$b)\ \ x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|6t+n|}$$

$$x(t+N) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+6N+n|} = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+n'|} \rightarrow 6N \in \mathbb{N} \rightarrow T_0 = \frac{1}{6}.$$

$c)\ \ x_3(t) = \mathcal{E}v\{\sin(4\pi t)\ u(t)\}$

$$Ev\{\sin(4\pi t).u(t)\} = \frac{\sin(4\pi t)u(t) + \sin(-4\pi t)u(-t)}{2} = \frac{\sin(4\pi t)u(t) - \sin(4\pi t)u(-t)}{2}$$

متناوب نیست.

d) $x_4[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)\ \cos(\frac{\pi}{4}n)$

$$x[n] = \cos(\tfrac{\pi}{2}n).\cos(\tfrac{\pi}{4}n) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4}n) + \cos(\tfrac{3\pi}{4}n)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\frac{\pi}{4}n) \rightarrow N_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \\ \cos(\frac{3\pi}{4}n) \rightarrow N_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{8}{3} \end{array}\right\} \rightarrow N = 8$$

e) $x_5[n] = 2\cos(\frac{1}{4}n) + \sin(\frac{1}{8}n) - 2\cos(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6})$

$$x[n] = 2\cos(\tfrac{n}{4}) + \sin(\tfrac{n}{8}) - 2\cos(\tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{6})$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\frac{n}{4}) \rightarrow N_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \\ \sin(\frac{n}{8}) \rightarrow N_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi \\ \cos(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}) \rightarrow N_3 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \end{array}\right\} \rightarrow N = 16\pi \notin \mathbb{N} \rightarrow \text{متناوب نیست}$$

ب) سیگنال‌های زیر را رسم کرده و دوره تناوب هر کدام را در صورت وجود به دست آورید.

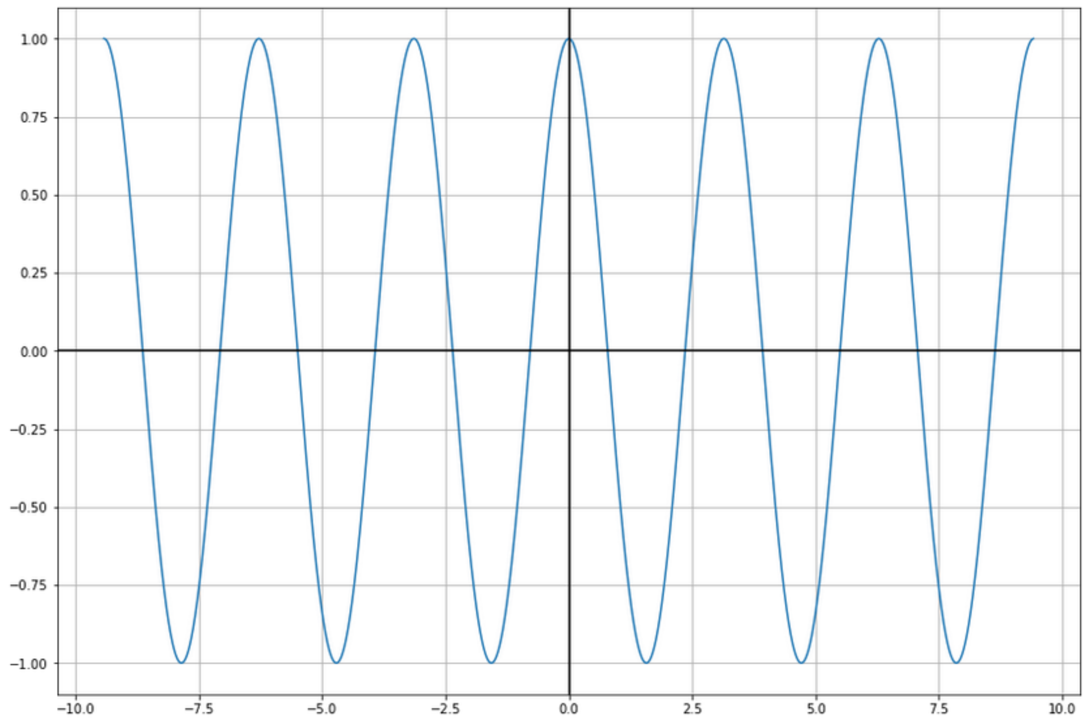
a) $x_1(t) = \cos(2t)$

b) $x_2[n] = \cos(2n)$

c) $x_3(t) = \cos(2\pi t)$

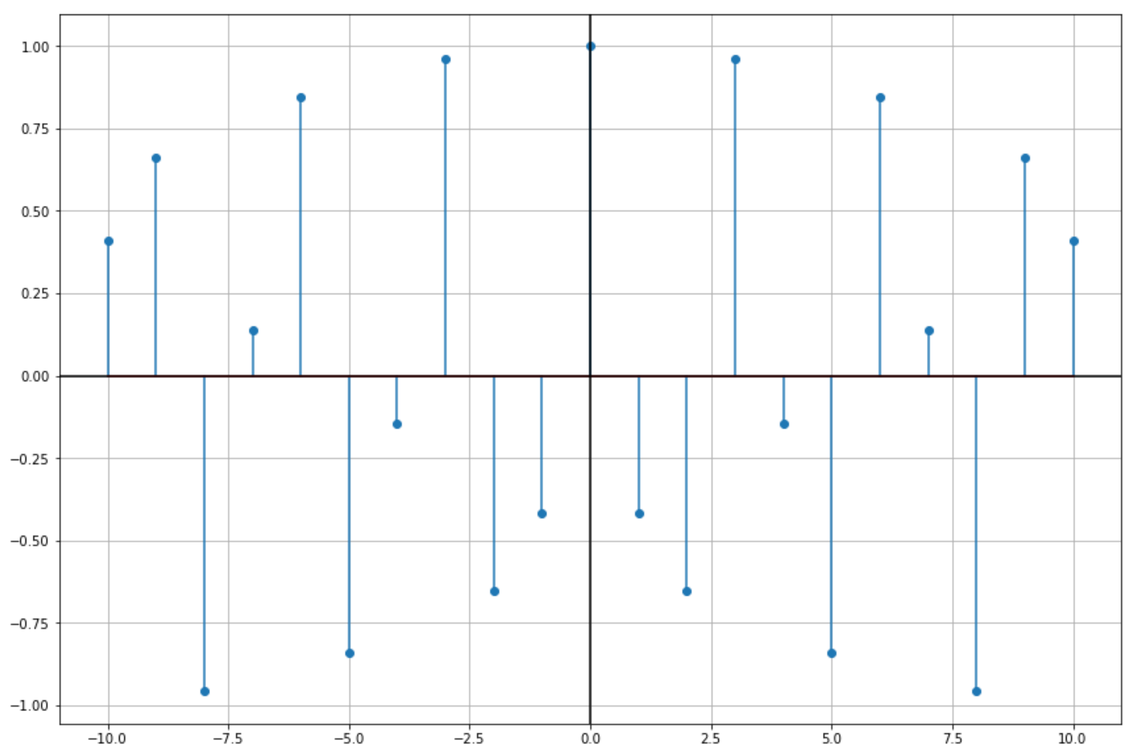
d) $x_4[n] = \cos(2\pi n)$

a)



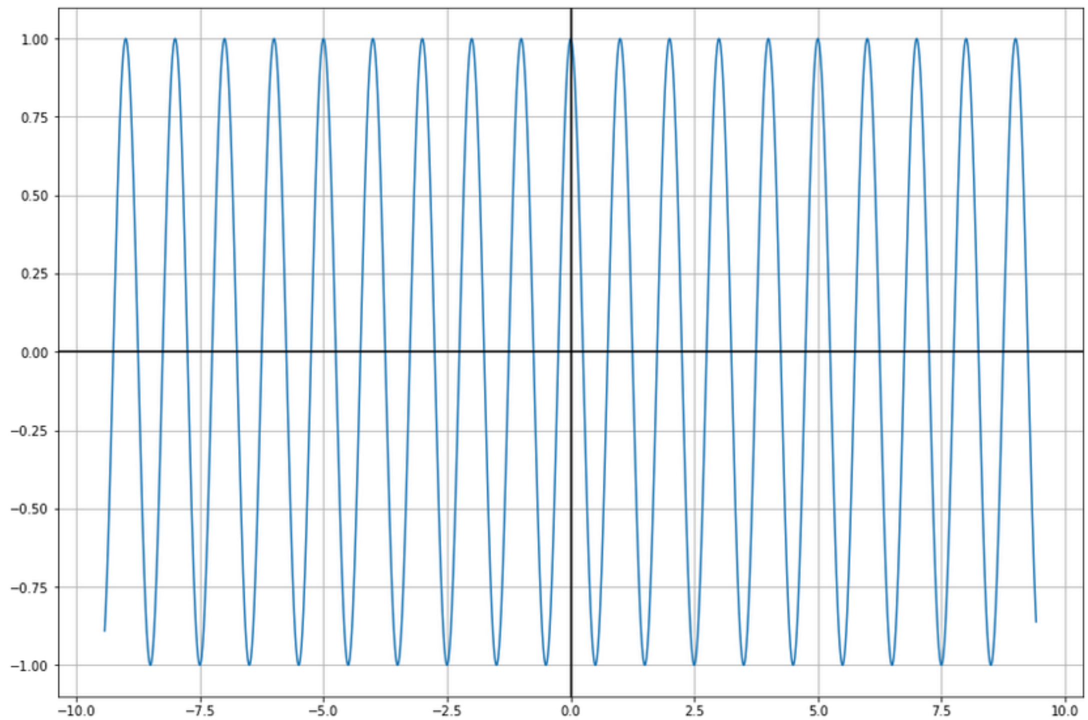
متناوب با دوره $T_0 = \pi$

b)



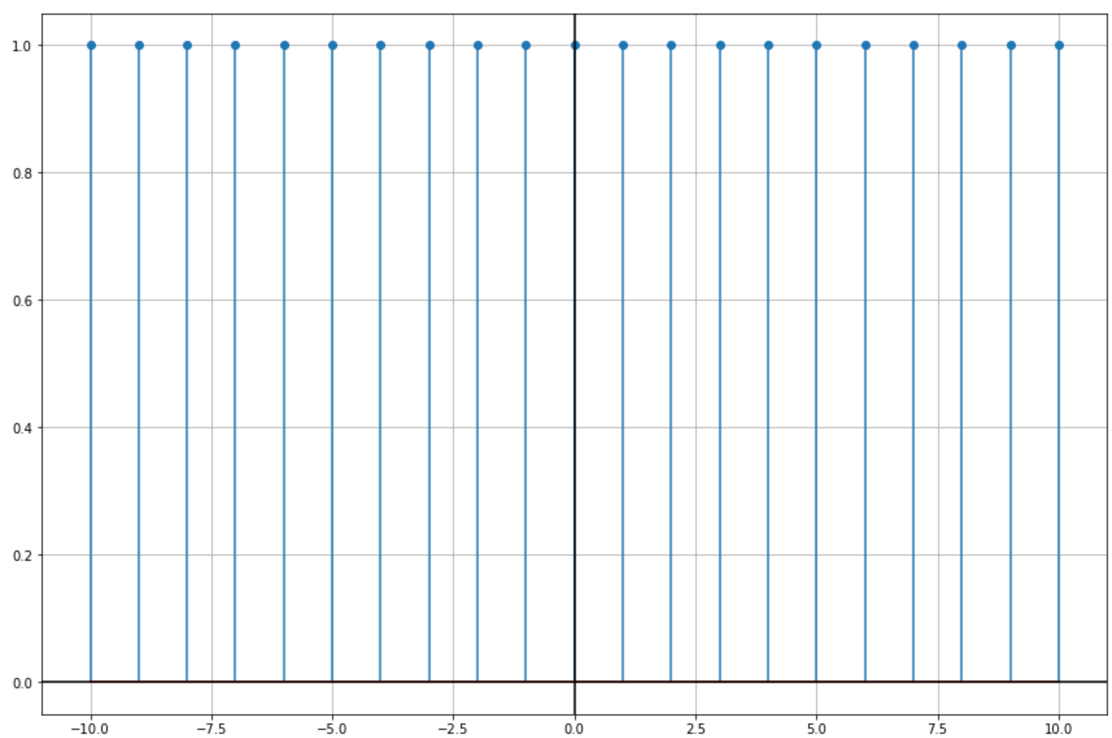
نامتناوب

c)



متناوب با دوره $T_0 = 1$

d)



متناوب با دوره $T_0 = 1$

سوال ۴-

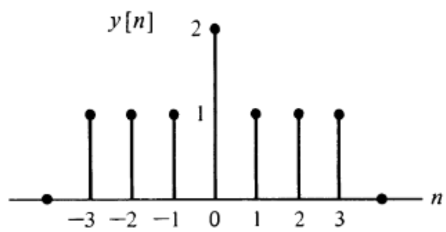
آ) بخش‌های زوج و فرد سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t) = e^{-3|t|} \cos(t)$$

$$Even\{x(t)\} = (x(t) + x(-t)) / 2 = \left(e^{-3|t|}\cos(t) + e^{-3|-t|}\cos(-t)\right) / 2$$
$$= \left(e^{-3|t|}\cos(t) + e^{-3|t|}\cos(t)\right) / 2 = e^{-3|t|}\cos(t)$$

$$Odd\{x(t)\} = (x(t) - x(-t)) / 2 = \left(e^{-3|t|}\cos(t) - e^{-3|-t|}\cos(-t)\right) / 2$$
$$= \left(e^{-3|t|}\cos(t) - e^{-3|t|}\cos(t)\right) / 2 = 0$$

ب) سیگنال $y[n]$ در شکل زیر را در نظر بگیرید.



(۱) سیگنال $x[n]$ را بیابید به گونه‌ای که برای $n \geq 0$، $\mathcal{E}v\{x[n]\} = y[n]$ و برای $n < 0$، $\mathcal{O}d\{x[n]\} = y[n]$ باشد.

(۲) اگر برای تمامی مقادیر n، $\mathcal{E}v\{w[n]\} = y[n]$ و به ازای $n < 0$، $w[n] = 0$ باشد، $w[n]$ را بیابید.

(a) Let $Ev\{x[n]\} = x_e[n]$ and $Od\{x[n]\} = x_o[n]$. Since $x_e[n] = y[n]$ for $n \geq 0$ and $x_e[n] = x_e[-n]$, $x_e[n]$ must be as shown in Figure S2.5-1.

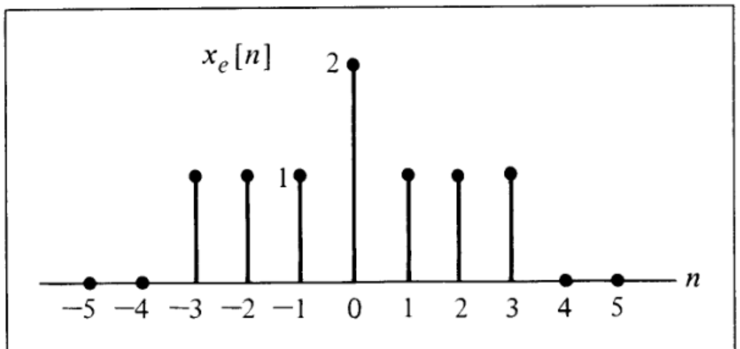


Figure S2.5-1

Since $x_o[n] = y[n]$ for $n < 0$ and $x_o[n] = -x_o[-n]$, along with the property that $x_o[0] = 0$, $x_o[n]$ is as shown in Figure S2.5-2.

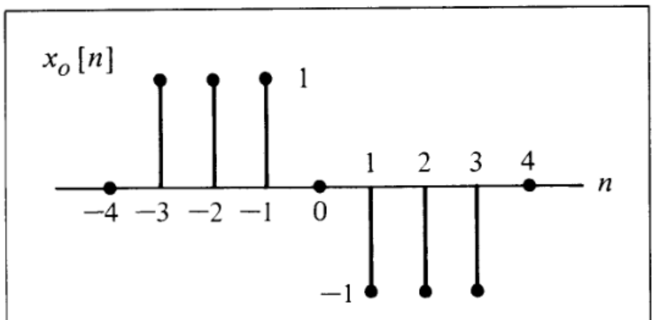


Figure S2.5-2

Finally, from the definition of $Ev\{x[n]\}$ and $Od\{x[n]\}$, we see that $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$. Thus, $x[n]$ is as shown in Figure S2.5-3.

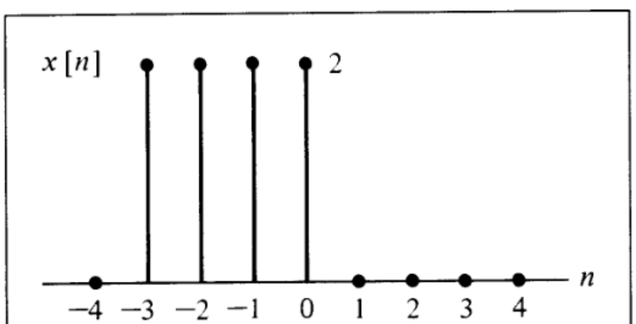


Figure S2.5-3

(b) In order for $w[n]$ to equal 0 for $n < 0$, $Od\{w[n]\}$ must be given as in Figure S2.5-4.

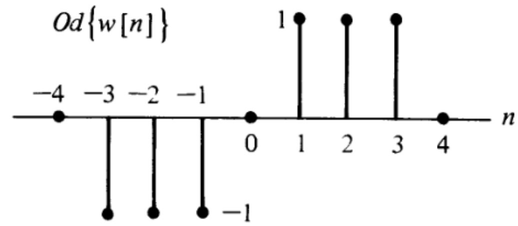


Figure S2.5-4

Thus, $w[n]$ is as in Figure S2.5-5.

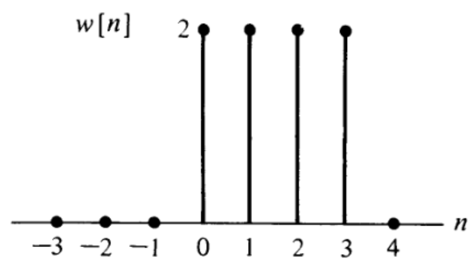


Figure S2.5-5

سوال ۵ -

ویژگی‌های خواسته شده برای هر یک از سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

a) $y_1(t) = (2 + \sin t)\, x(t)$ **(Memoryless, Linear, Time-Invariant, Stable)**

b) $y_2(t) = x(2t)$ **(Linear, Time-Invariant, Causal, Invertible, Stable)**

c) $y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$ **(Linear, Time-Invariant, Invertible)**

d) $y_4[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ **(Memoryless, Linear, Time-Invariant, Causal, Stable)**

e) $y_5(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ **(Linear, Invertible)**

f) $y_6[n] = \max\left\{x[n],\ x[n-1], \ldots, x[-\infty]\right\}$ **(Memoryless, Linear)**

Memoryless:

(a) $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is memoryless because $y(t)$ depends only on $x(t)$ and not on prior values of $x(t)$.

(d) $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[n]$ is not memoryless because $y[n]$ does depend on values of $x[\cdot]$ before the time instant n.

(f) $y[n] = \max\{x[n], x[n-1], \ldots, x[-\infty]\}$ is clearly not memoryless.

Linear:

(a)
$$\begin{aligned} y(t) &= (2 + \sin t)x(t) = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= (2 + \sin t)[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a(2 + \sin t)x_1(t) + b(2 + \sin t)x_2(t) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is linear.

(b)
$$\begin{aligned} y(t) &= x(2t) = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= ax_1(2t) + bx_2(t) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = x(2t)$ is linear.

(c)
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = T[x[n]], \\ T[ax_1[n] + bx_2[n]] &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k] \\ &= aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]] \end{aligned}$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is linear.

(d) $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is linear (see part c).

(e)
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= \frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt} = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = dx(t)/dt$ is linear.

(f)
$$\begin{aligned} y[n] &= \max\{x[n], \ldots, x[-\infty]\} = T[x[n]], \\ T[ax_1[n] + bx_2[n]] &= \max\{ax_1[n] + bx_2[n], \ldots, ax_1[-\infty] + bx_2[-\infty]\} \\ &\neq a\max\{x_1[n], \ldots, x_1[-\infty]\} + b\max\{x_2[n], \ldots, x_2[-\infty]\} \end{aligned}$$

Therefore, $y[n] = \max\{x[n], \ldots, x[-\infty]\}$ is not linear.

Time-invariant:

(a) $$y(t) = (2 + \sin t)x(t) = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = (2 + \sin t)x(t - T_0)$$
$$\neq y(t - T_0) = (2 + \sin(t - T_0))x(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is not time-invariant.

(b) $$y(t) = x(2t) = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = x(2t - 2T_0) \neq x(2t - T_0) = y(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = x(2t)$ is not time-invariant.

(c) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = T[x[n]],$$
$$T[x[n - N_0]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - N_0] = y[n - N_0]$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is time-invariant.

(d) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = T[x[n]],$$
$$T[x[n - N_0]] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - N_0] = \sum_{l=-\infty}^{n-N_0} x[l] = y[n - N_0]$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is time-invariant.

(e) $$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = \frac{d}{dt}x(t - T_0) = y(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = dx(t)/dt$ is time-invariant.

Causal:

(b) $y(t) = x(2t)$,
$y(1) = x(2)$

The value of $y(\cdot)$ at time $= 1$ depends on $x(\cdot)$ at a future time $= 2$. Therefore, $y(t) = x(2t)$ is not causal.

(d) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Yes, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is causal because the value of $y[\cdot]$ at any instant n depends only on the previous (past) values of $x[\cdot]$.

Invertible:

(b) $y(t) = x(2t)$ is invertible; $x(t) = y(t/2)$.

(c) $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is not invertible. Summation is not generally an invertible operation.

(e) $y(t) = dx(t)/dt$ is invertible to within a constant.

Stable:

(a) If $|x(t)| < M$, $|y(t)| < (2 + \sin t)M$. Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is stable.

(b) If $|x(t)| < M$, $|x(2t)| < M$ and $|y(t)| < M$. Therefore, $y(t) = x(2t)$ is stable.

(d) If $|x[k]| \leq M$, $|y[n]| \leq M \cdot \Sigma_{-\infty}^{n} 1$, which is unbounded. Therefore, $y[n] = \Sigma_{-\infty}^{n} x[k]$ is not stable.

سوال ۶-

معکوس‌پذیری سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

$a)\ \ y_1(t) = t\,x(t)$

معکوس پذیر نیست. مثال نقض:

If x1(t) = $\delta(t)$ and x2(t) = $2\delta(t)$ $\Rightarrow$ outputs are the same: y(t) = 0

$$b)\ \ y_2(t) = \int_{t^2+t}^{+\infty} x(T-1)\,\mathrm{d}T$$

$$y(t) = \int_{t^2+t}^{+\infty} x(T-1)\,dT = \int_{t^2+t-1}^{+\infty} x(T)\,dT$$

این سیستم برای تولید سیگنال خروجی، از ورودی خود به ازای مقادیر مختلف t، از بازه‌ی t^2+t-1 تا $+\infty$ انتگرال می‌گیرد. $f(t)=t^2+t-1$ یک تابع درجه ۲ است که مینیممش -1.25 است. درنتیجه این سیستم هیچگاه از مقادیر سیگنال ورودی خود در $t<-1.25$ انتگرال نمی‌گیرد. پس اگر دو ورودی مختلف داشته باشیم که در $t>-1.25$ باهم برابراند ولی در $t<-1.25$ متفاوت اند، این سیستم خروجی یکسانی به ازای آن‌ها تولید خواهد کرد.

⇐ این مثال نقضی برای معکوس پذیر بودن سیستم است ⇐ سیستم معکوس پذیر نیست.