

پاسخ تمرین ۴ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

سوال ۱ -

تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$a) x_1(t) = \sin(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) &\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2} \left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) \right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) \xleftrightarrow{F.T.} e^{j\omega/2} \frac{1}{2} \left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) \right] \\ \sin(t) &\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j} \left[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \right] \Rightarrow x(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j} \left[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \right] + e^{j\omega/2} \frac{1}{2} \left[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) \right] \end{aligned}$$

$$b) x_2(t) = 2 \frac{\sin^2(3t)}{t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(3t)}{\pi t} \times 2\pi \sin(3t)$$

$$\frac{\sin(3t)}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| < 3 \\ 0, & |\omega| > 3 \end{cases}$$

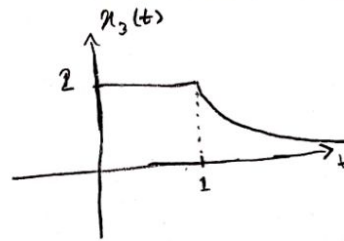
$$2\pi \sin(3t) \longleftrightarrow -\frac{2\pi^2}{j} \delta(\omega + 3) + \frac{2\pi^2}{j} \delta(\omega - 3)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{j}, & -6 < \omega < 0 \\ 0, & o.w \end{cases} + \begin{cases} \frac{\pi}{j}, & 0 < \omega < 6 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$c) x_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 2, & 0 < t < 1 \\ 2e^{-(t-1)}, & t \geq 1 \end{cases}$$

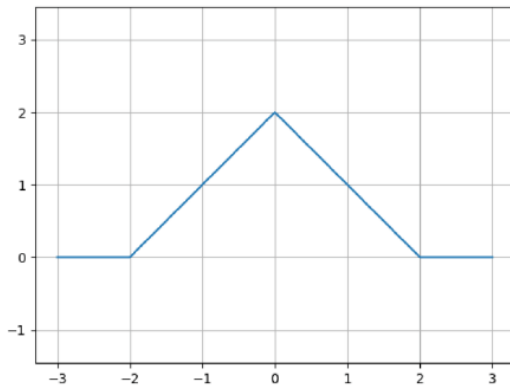
$$x_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < 1 \\ 2e^{-(t-1)}, & t \geq 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) = \begin{cases} 0, & [t < 0, t \geq 1] \\ 2, & 0 < t < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{F.T.}} X_1(j\omega) = 2e^{-\frac{j\omega}{2}} \times \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} \\ x_2(t) = 2e^{-(t-1)} u(t-1) \xrightarrow{\text{F.T.}} X_2(j\omega) = \frac{2e^{-j\omega}}{1+j\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_3(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) = \frac{4e^{-\frac{j\omega}{2}} \sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} + \frac{2e^{-j\omega}}{1+j\omega}$$

d)

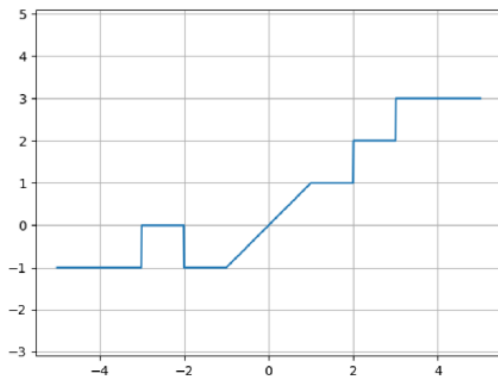


$$\frac{d}{dt} n(t) = \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{0} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{---} \text{1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{0} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{---} \text{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{0} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{---} \text{1} \end{array} \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{---} \text{1} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \downarrow \text{F.T.} \\ e^{j\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega} + e^{-j\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} n(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \frac{2 \sin \omega}{\omega} \times 2j \sin \omega$$

$$\Rightarrow n(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2}$$

e)



$$\frac{d}{dt} n(t) = \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{3} \end{array} \begin{array}{c} \text{0} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{1} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{3} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{1} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{---} \text{3} \end{array}$$

$$\downarrow \text{duality F.T.} \quad \downarrow \text{duality F.T.} \quad \downarrow \text{duality F.T.}$$

$$j\omega X(j\omega) = 2 \cos(-3\omega) + 2j \sin(-2\omega) + \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{2}{j\omega} \cos(-3\omega) + \frac{2}{\omega} \sin(-2\omega) + \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2}$$

سوال ۲ -

عکس تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را محاسبه نمایید.

a) $X_1(j\omega) = \frac{7j\omega + 32}{-\omega^2 + 9j\omega + 20}$

$$\frac{7j\omega + 32}{-\omega^2 + 9j\omega + 20} = \frac{7j\omega + 32}{(\omega j + 4)(\omega j + 5)} = \frac{4j\omega + 20 + 3j\omega + 12}{(\omega j + 4)(\omega j + 5)} = \frac{3}{\omega j + 5} + \frac{4}{\omega j + 4}$$

$\left. \begin{array}{l} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} 3e^{-5t}u(t) \\ \xleftrightarrow{\text{F.T.}} 4e^{-4t}u(t) \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = 3e^{-5t}u(t) + 4e^{-4t}u(t)$

b) $X_2(j\omega) = \frac{2\sin(\omega-1)}{\omega-1} * \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$

$\left[\begin{array}{c} \text{Rect}_{[-1,1]} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{2\sin \omega}{\omega} \\ \text{Rect}_{[-2,2]} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{\sin(2\omega)}{\omega} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Rect}_{[-1,1]} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{2\sin(\omega-1)}{\omega-1} \\ \text{Rect}_{[-2,2]} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{\sin(2\omega)}{\omega} \end{array} \right] \Rightarrow \text{Rect}_{[-1,1]} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} X(j\omega)$

c) $X_3(j\omega) = \frac{\sin^2(-\omega)}{\omega^2}$

$\left[\begin{array}{c} \frac{\sin(-\omega)}{\omega} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \text{Rect}_{[-1,1]} \\ \frac{\sin(-\omega)}{\omega} \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \text{Rect}_{[-1,1]} \end{array} \right] \Rightarrow x(t) = \text{Rect}_{[-1,1]} * \text{Rect}_{[-1,1]} = \text{Tri}_{[-2,2]}$

d) $X_4(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\sin(\pi\omega) - j \cos(\pi\omega)}{1 + 2j\omega} \right]$

$X(j\omega) = \frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\cos(\pi\omega) + j \sin(\pi\omega)}{1 + 2j\omega} \right] = \frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{e^{j\pi\omega}}{1 + 2j\omega} \right]$
 $\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} u(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{1}{1 + 2j\omega} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} u(t + \bar{\omega}) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{e^{j\pi\omega}}{1 + 2j\omega} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} u(t + \bar{\omega}) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{e^{j\pi\omega}}{1 + 2j\omega} \right]$

سوال ۳-

به کمک رابطه پارسوال مقدار انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

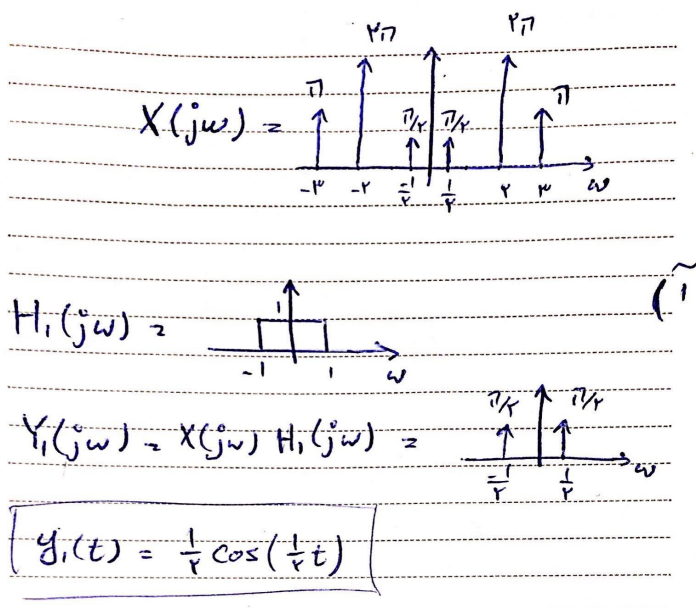
$$|X(j\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 + a^2)^2} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2} \Rightarrow x(t) = \frac{e^{-a|t|}}{2a} \Rightarrow |x(t)|^2 = \frac{e^{-2a|t|}}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2a|t|}}{4a^2} dt = \pi \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2at}}{2a^2} dt + \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-2at}}{2a^2} dt = \pi \left[\frac{e^{2at}}{2a} \right]_{-\infty}^0 + \pi \left[-\frac{e^{-2at}}{2a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a^3}$$

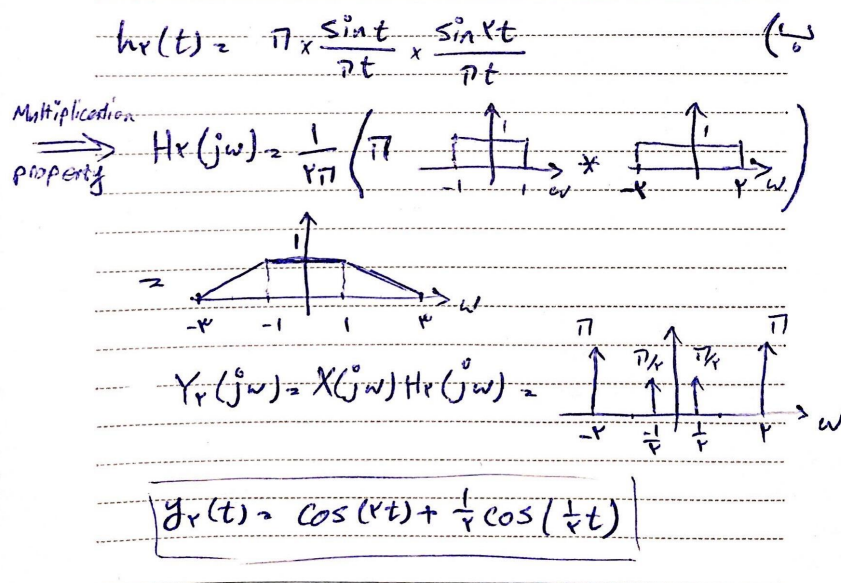
سوال ۲-

فرض کنید $x(t) = \cos(3t) + 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}t)$ باشد.

آ) خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t}$ را به ورودی $x(t)$ بدست آورید.



ب) خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_2(t) = \frac{\sin(t)\sin(2t)}{\pi t^2}$ را به ورودی $x(t)$ بدست آورید.



سوال ۵-

یک سیستم LTI پایدار و علی را در نظر بگیرید. در این سیستم رابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادله دیفرانسیلی زیر توصیف می شود.

$$-\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 7\frac{d}{dt}y(t) - 10y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + 13x(t)$$

(آ) پاسخ فرکانسی این سیستم را بدست آورید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

(پ) خروجی $y_1(t)$ را برای ورودی $x_1(t) = te^{-t}u(t)$ محاسبه کنید.

(ت) با فرض اینکه $g(t)$ پاسخ ضربه معکوس این سیستم باشد، آن را بدست آورید.

(ث) رابطه بین ورودی و خروجی سیستم معکوس را با یک معادله دیفرانسیلی مشخص کنید.

$$a) -(j\omega)^2 Y(j\omega) - 7j\omega Y(j\omega) - 10Y(j\omega) = 2j\omega X(j\omega) + 13X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{2j\omega + 13}{\omega^2 - 7j\omega - 10} = \frac{2j\omega + 13}{(j\omega + 2)(j\omega + 5)} = \frac{3j\omega + 5 - j\omega - 2}{(j\omega + 2)(j\omega + 5)} = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{3}{j\omega + 5}$$

$$b) h(t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{3}{j\omega + 5} \Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) - 3e^{-5t}u(t)$$

$$c) x_1(t) = te^{-t}u(t) \Rightarrow X_1(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \left\{ \begin{aligned} \Rightarrow Y_1(j\omega) &= \frac{1}{(1+j\omega)^2} \times \left(\frac{1}{j\omega + 2} - \frac{3}{j\omega + 5} \right) \\ Y_1(j\omega) &= X_1(j\omega)H(j\omega) \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{1}{1+j\omega} \left(\frac{1}{1+j\omega} - \frac{3}{j\omega + 5} \right) = \frac{1}{1+j\omega} \left(-\frac{11}{4} \frac{1}{1+j\omega} + \frac{3}{1+2j\omega} - \frac{1}{4} \frac{1}{j\omega + 5} \right)$$

$$= -\frac{11}{4} \frac{1}{(1+j\omega)^2} + \frac{3}{1+j\omega} - \frac{3}{2+j\omega} - \frac{1}{16} \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{16} \frac{1}{j\omega + 5} \Rightarrow y_1(t) = -\frac{11}{4}e^{-t}u(t) + \frac{47}{16}e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t) + \frac{e^{-5t}}{16}u(t)$$

$$d) G(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega^2 - 7j\omega - 10}{2j\omega + 13} = \frac{\omega^2 - 6.5j\omega - 0.5j\omega - 10}{2j\omega + 13} = -\frac{j\omega}{2} - \frac{j\omega + 20}{4j\omega + 26}$$

$$= -\frac{j\omega}{2} - \frac{j\omega + 6.5 + 13.5}{4j\omega + 26} = -\frac{j\omega}{2} - \frac{1}{4} - \frac{13.5}{4j\omega + 26} \Rightarrow g(t) = -\frac{\delta(t)}{2} - \frac{\delta(t)}{4} - 3.375e^{-6.5t}u(t)$$

$$e) G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - 7j\omega - 10}{2j\omega + 13} \Rightarrow 2\frac{d}{dt}y(t) + 13y(t) = -\frac{d^2}{dt^2}x(t) - 7\frac{d}{dt}x(t) - 10x(t)$$