پاسخ تمرین ۳ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

سوال ۱ -

ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را محاسبه نمایید.

$a)\ \ x(t) = e^{-t} \text{ for } 0 \leq t \leq 1\ ,\ T_0 = 1$

دوره تناوب سیگنال $T_0 = 1$ است پس $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$ است. مطابق معادله آنالیز سری فوریه، داریم:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0t}\mathrm{d}t = \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t}e^{-jk2\pi t}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-(1+jk2\pi)t}\mathrm{d}t = \frac{-1}{1+jk2\pi}\ e^{-(1+jk2\pi)t}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{1+jk2\pi}\ e^{-(1+jk2\pi)} + \frac{1}{1+jk2\pi} = \frac{1-e^{-(1+jk2\pi)}}{1+jk2\pi}$$

b) $x(t) = \left[1 + cos(2\pi t)\right] \left[sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})\right]$

$$\begin{aligned}
x(t) &= [1 + \cos(2\pi t)]\left[\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right] \\
&= \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(2\pi t)\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \left(\frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5}\right) + \left(\tfrac{1}{2}e^{j2\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-j2\pi t}\right)\left(\frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5} + \frac{e^{j\pi/6}}{4j} e^{j2\pi t6} - \frac{e^{-j\pi/6}}{4j} e^{-j2\pi t4} \\
&\quad + \frac{e^{j\pi/6}}{4j} e^{j2\pi t4} - \frac{e^{-j\pi/6}}{4j} e^{-j2\pi t6}
\end{aligned}$$

Therefore,

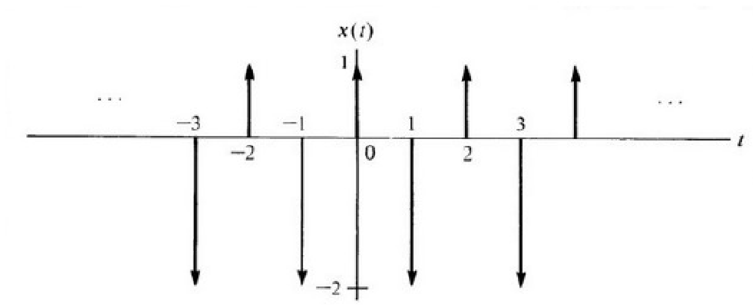
$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t},$$

where $\omega_0 = 2\pi$.

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{e^{j\pi/6}}{4j}, & a_{-4} &= \frac{-e^{-j\pi/6}}{4j}, \\
a_5 &= \frac{e^{j\pi/6}}{2j}, & a_{-5} &= \frac{-e^{-j\pi/6}}{2j}, \\
a_6 &= \frac{e^{j\pi/6}}{4j}, & a_{-6} &= \frac{-e^{-j\pi/6}}{4j}
\end{aligned}$$

All other a_k's $= 0$.

c)



The period is $T_0 = 2$, with $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. The Fourier coefficients are

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Choosing the period of integration as $-\frac{1}{2}$ to $\frac{3}{2}$, we have

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{3/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{3/2} [\delta(t) - 2\delta(t-1)] e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\ &= \frac{1}{2} - e^{-jk\omega_0} = \frac{1}{2} - (e^{-j\pi})^k \end{aligned}$$

Therefore,

$$a_0 = -\tfrac{1}{2}, \qquad a_k = \tfrac{1}{2} - (-1)^k$$

It is instructive to plot a_k, which we have done in Figure S7.4-3.

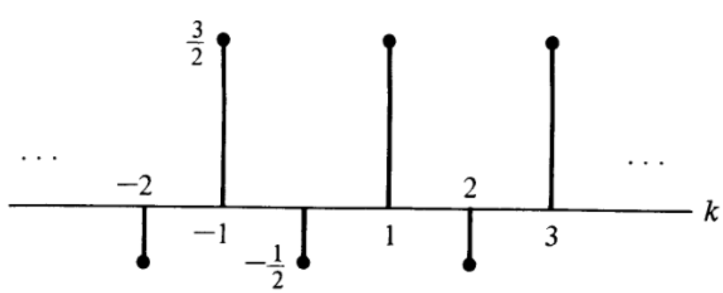
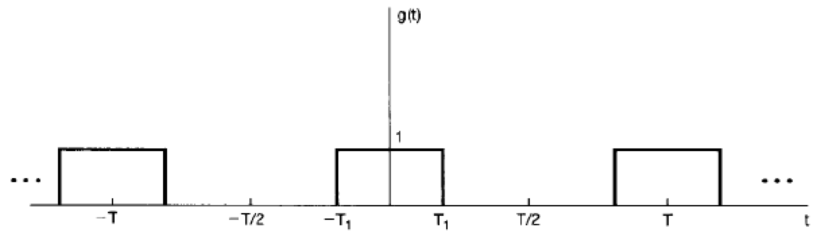


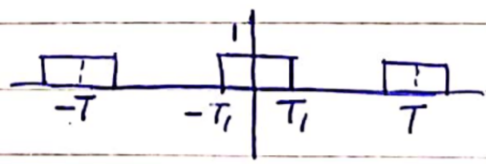
Figure S7.4-3

سوال ۲-

آ) ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را به صورت پارامتری محاسبه کنید.



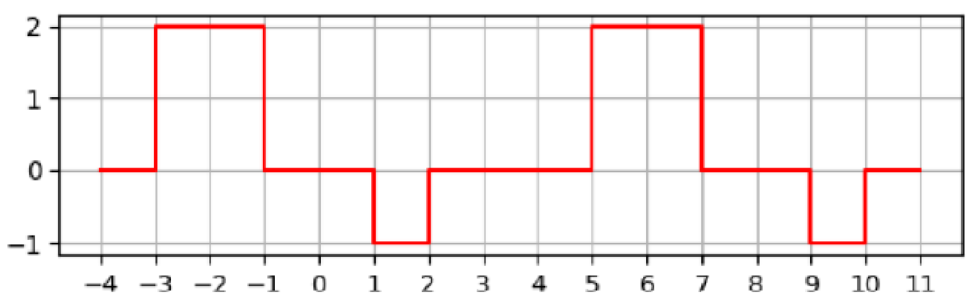
Oppenhiem pages 193-194



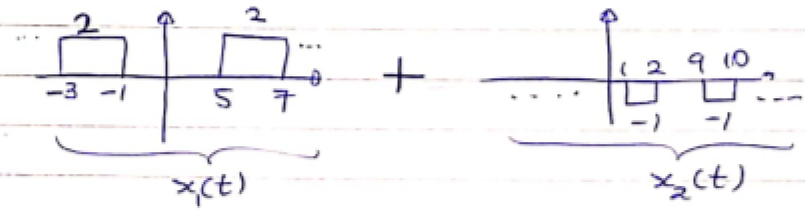
$$\xleftrightarrow{FS} \quad \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0$$

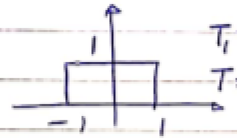
$$\frac{2T_1}{T} \quad k = 0$$

ب) با استفاده از بخش قبل، ضرایب سری فوریه را برای سیگنال‌های زیر محاسبه کنید.

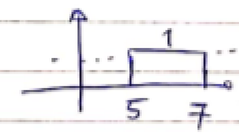


(i)

$x(t) =$ 

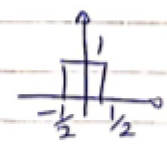


$T_1 = 1$, $T = 8$ $\xleftrightarrow{FS}$ $\dfrac{\sin\left(k\frac{2\pi}{8}(1)\right)}{k\pi} = \dfrac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{k\pi}$

Shift Right (5) $\longrightarrow$ 

$= x_1(t) \times \frac{1}{2} \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\frac{2\pi}{8}(5)} \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{4})}{k\pi}$

$\xrightarrow{\times 2}$ $x_1(t) \xleftrightarrow{FS} 2e^{-jk\frac{\pi}{4}(5)} \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{4})}{k\pi} = d_k$



$T_1 = \frac{1}{2}$, $T = 8$ $\xleftrightarrow{FS}$ $\dfrac{\sin\left(k\frac{2\pi}{8}\frac{1}{2}\right)}{k\pi} = \dfrac{\sin\left(k\frac{\pi}{8}\right)}{k\pi}$

Shift Right ($\frac{3}{2}$) $\longrightarrow$ 

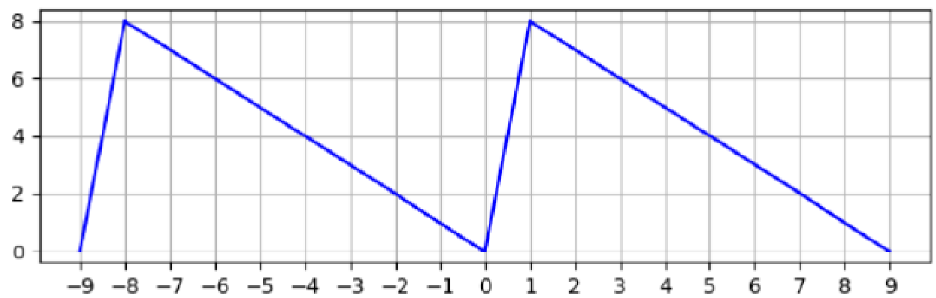
$= -x_2(t) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\frac{2\pi}{8}(\frac{3}{2})} \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{8})}{k\pi}$

$\xrightarrow{\times(-1)}$ $x_2(t) \xleftrightarrow{FS} -e^{-jk\frac{\pi}{8}(3)} \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{8})}{k\pi} = e_k$

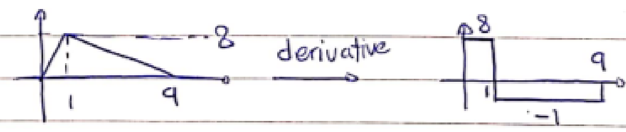
$\Rightarrow x_1(t) \xleftrightarrow{FS} d_k$

$\cancel{x_2(t) \xleftrightarrow{FS} e_k}$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \xleftrightarrow{FS} d_k + e_k$

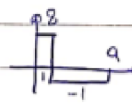


(ii)

one period: 

FS properties: $x(t) \longleftrightarrow a_k$

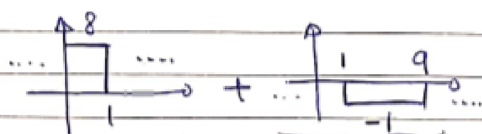
$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{1}{jk\omega_0} a_k \quad (\text{if } a_0 = 0)$$

in this case, $x(t) =$  $\overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$

and we want to compute FS coeffs for $\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$.

since $a_0 = \frac{1}{9}(8-8) = 0$, it is possible to find a_k

and then compute $\frac{1}{jk\omega_0} a_k$ $\quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{9}\right)$

$x(t) =$ 

$T_1 = \frac{1}{2}$, $T = 9$ $\qquad$ $T_1 = 4$, $T = 9$

$$\Rightarrow a_k = 8e^{-jk\frac{2\pi}{9}\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{9}\frac{1}{2}\right)}{k\pi} - e^{-jk\frac{2\pi}{9}(5)} \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{9}(4)\right)}{k\pi}$$

$$\Rightarrow \text{ANS} = \frac{1}{jk\,2\pi/9} a_k$$

سوال ۳-

اگر $x(t) \xleftrightarrow{\text{F.S}} a_k$ و $\hat{x}(t) \xleftrightarrow{\text{F.S}} c_k$ باشد، آنگاه c_k را برحسب a_k محاسبه کنید (در قسمت (c) اگر از ویژگی‌های سری فوریه استفاده می‌کنید، باید آن را اثبات کنید).

$a)\ \ \hat{x}(t) = 2x(1-t) + 1$

$x(t) \xrightarrow{F.S} a_k \longrightarrow x(t+1) \xrightarrow{F.S} e^{jk\omega_0} a_k$

$\longrightarrow x(-t+1) \xrightarrow{F.S} e^{-jk\omega_0} a_{-k} \longrightarrow 2x(1-t)+1 \xrightarrow{F.S} \begin{cases} 2a_0+1 & k=0 \\ 2e^{-jk\omega_0} a_{-k} & k\neq 0 \end{cases}$

$b)\ \ \hat{x}(t) = x^*(2t) + x\left(\frac{-t}{2}\right), T = 2$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F.S} a^*_{-k}, x(2t) \xleftrightarrow{F.S} a_k\ (periodic\ with\ T/2) \Rightarrow x^*(2t) \xleftrightarrow{F.S} a^*_{-k}$$

$$\Rightarrow x^*(2t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^*_{-k} e^{2k\pi jt}$$

$$x(-t/2) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k}\ (periodic\ with\ 2T)$$

$$\Rightarrow x(-t/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{k\pi jt/2}$$

$$T_{total} = LCM(1,4) = 4$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^*_{-k} e^{4k\pi jt/2} + a_{-k} e^{k\pi jt/2}$$

$$c_k = \begin{cases} a_{-k} + a^*_{-k'}, & k = 4k' \\ a_{-k}, & O.W \end{cases}$$

c) $\hat{x}(t) = x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$

$$a_k = \int_T x(t) . e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

$$a_k^{new} = \int_T x(t + \frac{T}{2}) . e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

$$\Rightarrow a_k^{new} \times e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} = \int_T x(t + \frac{T}{2}) \, e^{-jk\omega_0 (t + \frac{T}{2})} \, dt$$

$$\overset{t + \frac{T}{2} = \alpha}{=} \int_T x(\alpha) \, e^{-jk\omega_0 \alpha} \, d\alpha = a_k$$

remain the same

$$\Rightarrow a_k^{new} \times e^{-jk\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}} = \boxed{-a_k^{new} = a_k}$$

سوال ۴ -

توان متوسط سیگنال زیر را بدست آورید.

$$x\left(t\right)=3e^{j3t}+\cos\left(2t\right)+e^{j4t}$$

$$x(t)=3e^{j3t}+\cos 2t+e^{j4t}=3e^{j3t}+\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}+e^{j4t}.$$

$$T=\text{lcm}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{2},\frac{2\pi}{4}\right)=2\pi\rightarrow\omega_0=1.$$

$$x(t)=3e^{j3\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j2\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t}+e^{j4\omega_0 t}.$$

$$a_2,a_{-2}=\frac{1}{2},a_3=3,a_4=1.$$

$$P_{avr}=\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2\,dt=\Sigma_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2=\left|\frac{1}{2}\right|^2+\left|\frac{1}{2}\right|^2+3^2+1^2=\frac{1}{2}+9+1=\frac{21}{2}.$$

سوال ۵ -

در مورد سیگنال $x(t)$، حقایق زیر را می‌دانیم.

- سیگنال حقیقی است و دوره تناوب اساسی آن $T = 6$ است.
- برای $k = 2$ و $|k| > 2$ ضرایب سری فوریه آن برابر صفر و در $k = 1$ ضریب سری فوریه آن عددی حقیقی و مثبت است.
- برای این سیگنال $x(t) = -x(t-3)$ است.
- $\int_{-3}^{3} |x(t)|\, dt = 12\pi$

ضرایب سری فوریه و از طریق آن، سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.

۱. سیگنال حقیقی است، پس: $a_k = a^*_{-k}$.

۲. سیگنال فقط دارای سه ضریب فوریه در kهای ۰، ۱، ۲، منفی دو و منفی یک دارد.

۳. مزدوج و حقیقی بودن ضرایب در ۱ و منفی یک: $a_1 = a_{-1}$.

۳. از رابطه داریم:

$$x(t) = -x(t-3) \to a_k = -e^{-jk\omega_0 3} a_k$$

$$\text{if k=0: } a_0 = -a_0 \to a_0 = 0.$$

$$\text{if k=1 or -1: } a_k = -e^{-kj\pi} a_k \to a_k = a_k.$$

$$\text{if } k = 2 \text{ or } -2\text{: } a_k = -a_k \to a_2 = a_{-2} = 0.$$

۴.

$$\int_{-3}^{3} \left| a_{-1} e^{-\frac{j\pi}{3}t} + a_1 e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt = |a_1| \int_{-3}^{3} \left| e^{-\frac{j\pi}{3}t} + e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt$$
$$= |2a_1| \int_{-3}^{3} \left| \cos \frac{\pi}{3} t \right| dt \overset{*}{=} \frac{24}{\pi} |a_1| = 12\pi \to a_1 = a_{-1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$* \int_{-3}^{3} \left| \cos \frac{\pi}{3} t \right| dt = \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} \left(-\cos \frac{\pi}{3} t \right) dt + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{3} t \right) dt + \int_{\frac{3}{2}}^{3} -\left(\cos \frac{\pi}{3} t \right) dt$$
$$= \frac{3}{\pi} + \frac{6}{\pi} + \frac{3}{\pi} = \frac{12}{\pi}.$$

$$x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right).$$

سوال ۶-

با ذکر دلیل، به سوالات زیر درباره خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = 25te^{-3t}u(t)$ پاسخ دهید.

آ) به ازای ورودی $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T_0 = 2$، چه هارمونیک‌هایی در سیگنال خروجی $y(t)$ با اندازه[۱] کاهش یافته ظاهر می‌شوند؟ به عبارت دیگر، اگر $x(t) \overset{\text{F.S}}{\longleftrightarrow} a_k$ و $y(t) \overset{\text{F.S}}{\longleftrightarrow} c_k$ باشد، به ازای چه مقادیری از k عبارت $|c_k| < |a_k|$ برقرار است؟

ب) به ازای ورودی $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T_0 = 4\pi$، چه هارمونیک‌هایی در سیگنال خروجی $y(t)$ با اندازه کاهش یافته ظاهر می‌شوند؟

$$h(t) = 25te^{-3t}u(t)$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 25te^{-3t}u(t)e^{-j\omega t}\,dt = 25\int_{0}^{\infty} te^{-(3+j\omega)t}\,dt$$
$$= \frac{25}{(3+j\omega)^2}$$

از آنجایی که در سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$، به ازای ورودی متناوب با ضرایب سری فوریه a_k داریم خروجی با همان دوره تناوب و ضرایب سری فوریه: $c_k = a_k H(j\omega)$

حال فقط در صورتی هارمونیک‌های سیگنال خروجی با اندازه کاهش یافته ظاهر می‌شوند که اندازه $H(j\omega)$ کوچکتر از ۱ باشد.

آ)

$$T_0 = 2 \rightarrow \omega = k\pi \rightarrow H(j\omega) = \frac{25}{(3+jk\pi)^2}$$

$$\|H(j\omega)\| = \left\|\frac{25}{(3+jk\pi)^2}\right\| < 1 \rightarrow k < -1 \; OR \; 1 < k$$

ب)

$$T_0 = 4\pi \rightarrow \omega = \frac{k}{2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{25}{(3+j\frac{k}{2})^2}$$

$$\|H(j\omega)\| = \left\|\frac{25}{(3+j\frac{k}{2})^2}\right\| < 1 \rightarrow k < -8 \; OR \; 8 < k$$