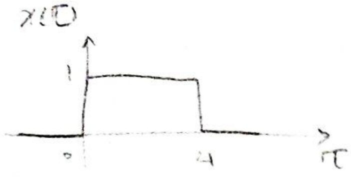
سوال ۱) الف)

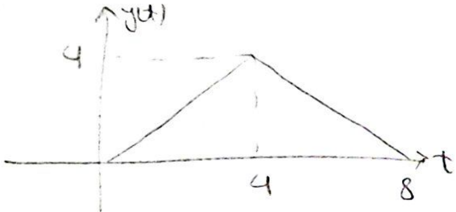


$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

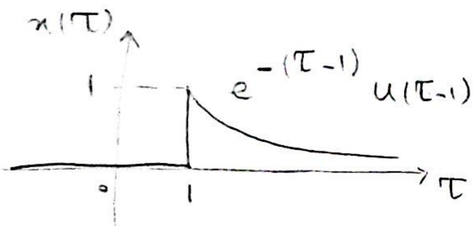
① $t < 0 \longrightarrow y(t) = 0$

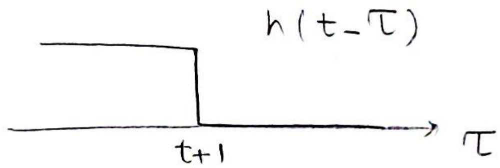
② $0 \leq t < 4 \longrightarrow y(t) = \int_0^t 1\, d\tau = \tau \Big|_0^t = t$

③ $0 \leq t-4 < 4 \longrightarrow 4 \leq t < 8 \longrightarrow y(t) = \int_{t-4}^{4} 1\, d\tau = \tau \Big|_{t-4}^{4} = 4 - t + 4 = -t + 8$



ب)





① $t+1 < 1 \longrightarrow y(t) = 0$
$t < 0$

② $t+1 \geq 1 \longrightarrow t \geq 0 \longrightarrow y(t) = \int_1^{t+1} e^{-(\tau-1)}\, d\tau$

$a = \tau - 1 \longrightarrow da = d\tau$

$\tau = 1 \longrightarrow a = 0$

$\tau = t+1 \longrightarrow a = t$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-a}\, da = -e^{-a} \Big|_0^t$$

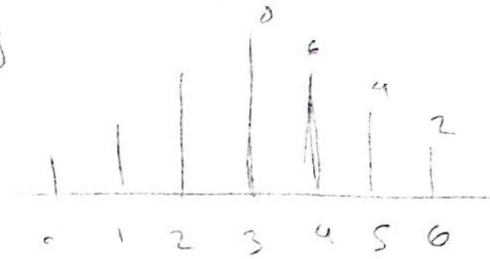
$$= -e^{-t} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-t}$$

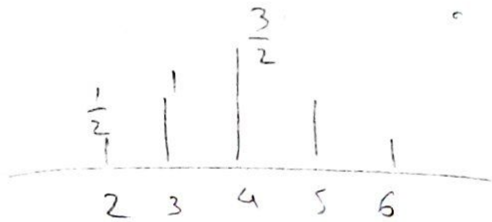
سوال ۳) می‌دانیم $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

الف)

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$



ب) $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2]$



سوال ۴) اگر h_1 و h_2 معکوس هم باشند، $h_1 * h_2 = \delta$

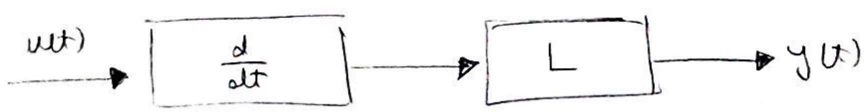
1. $h_1 * h_2 = e^{-t}u(t) * \delta(t) + e^{-t}u(t) * \delta'(t)$

$$= e^{-t}u(t) + (e^{-t}u(t))' = \cancel{e^{-t}u(t)} - \cancel{e^{-t}u(t)} + \underbrace{e^{-t}\delta(t)}_{e^{0} \times \delta(t)} = \delta(t)$$

2. $h_1 * h_2 = \delta[n] * u[n] - \delta[n-1]u[n]$

$$= u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

سوال ۷) می‌دانیم در اتصال سری سیستم‌های LTI، ترتیب مهم نیست!



در این حالت ورودی سیستم L برابر است با: $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$

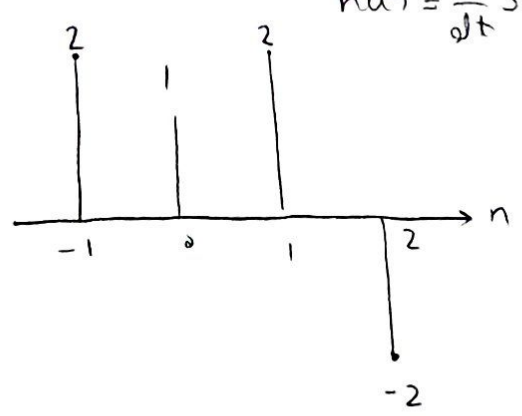
پس y پاسخ ضربه‌ی سیستم L است. از دیاگرام اولیه داریم: $\frac{d}{dt}s(t) = y$

پس $h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$

سوال ۸)

$$x_4[n] = 2x_1[n] - 2x_2[n] + x_3[n]$$

$$y_4[n] = 2y_1[n] - 2y_2[n] + y_3[n]$$



Subject :
Date

سوال ۳-

$1-\ h(t) = e^{-8t} u(t-3)$

شرط بی حافظه بودن : $h(t)\Big|_{t \neq 0} = 0$ $\Rightarrow$ شرط برقرار نیست $\Rightarrow$ حافظه دار است

شرط علی بودن ، $h(t)\Big|_{t<0} = 0$ $\Rightarrow$ شرط برقرار است به دلیل $u(t-3)$ پس علی است

شرط پایداری : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-8t} u(t-3) \right| dt = \int_{3}^{+\infty} e^{-8t}\, dt = \frac{-1}{8} e^{-8t} \Big|_{3}^{+\infty} =$$

$$0 + \frac{1}{8} e^{-24} = \frac{1}{8} e^{-24} < \infty$$ پایدار است

$2-\ h(t) = t e^{-t} u(t)$

شرط بی حافظه بودن ، $h(t)\Big|_{t \neq 0} = 0$ $\Rightarrow$ شرط برقرار نیست و حافظه دار است

شرط علی بودن $\Rightarrow$ به دلیل $u(t)$ برقرار است

شرط پایداری $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |t e^{-t} u(t)|\, dt = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{t}_{f} \underbrace{e^{-t} dt}_{dg}$

$$= -te^{-t} \Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, dt = -e^{-t} \Big|_{0}^{+\infty} = 1 \Rightarrow$$ پایدار است

3. $h[n] = 3^n u[-3-n]$

شرط بی‌حافظه بودن ، $h[n]\Big|_{n\neq 0} = 0$ مانند قبل حافظه دار است

شرط علی بودن ، $h[n]\Big|_{n<0} = 0$ علی نیست زیرا برای $n<-3$ مقدار دارد.
(به دلیل $u[-3-n]$)

شرط پایداری ، $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |3^n u[-3-n]| = \sum_{k=-\infty}^{-3} 3^n = 3^{-3} + 3^{-4} + 3^{-5} + \dots$$

$$= \frac{3^{-3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{18} < \infty$$ پایدار است.

4 - $h(t) = e^{5|t|}$ برای تمام t ها مقدار دارد و با حافظه و غیر علی است ←

پایدار بودن ، $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{5|t|}| dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-5t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{5t} dt$

$$= \frac{-e^{-5t}}{5}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{5t}}{5}\Big|_{0}^{+\infty} = \infty + 0 + \infty + 0$$

<= پایدار نیست

سؤال 5 - در این سؤال پاسخ ضربه را داریم و پاسخ پله را باید بدست آوریم و می‌دانیم:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} 2e^{6\tau}\,d\tau = \frac{e^{6\tau}}{3}\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{e^{6t}}{3} - 0 = \frac{e^{6t}}{3}$$

سؤال 6 - بر اساس سکون ابتدایی چون در ضربه $x[n]=0$, $n<0$ پس $y[n]=0$ است در $n<0$ و داریم:

$$y[0] + \underbrace{2y[-1]}_{0} = \underbrace{x[0]}_{1} \Rightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] + \underbrace{2y[0]}_{2} = \underbrace{x[1]}_{0} \Rightarrow y[1] = -2$$

$$y[2] + \underbrace{2y[1]}_{-4} = \underbrace{y[2]}_{0} \Rightarrow y[2] = 4$$

$$y[3] + \underbrace{2y[2]}_{8} = \underbrace{y[3]}_{0} \Rightarrow y[3] = -8$$

$$y[4] + \underbrace{2y[3]}_{-16} = \underbrace{y[4]}_{0} \Rightarrow y[4] = 16$$

$$\Rightarrow y[K] = \begin{cases} (-2)^K & K \geq 0 \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$