دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین اول درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

۱-

پیوسته-زمان

Year : .... Month : .... Day : ....

گسسته - زمان

(1)

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

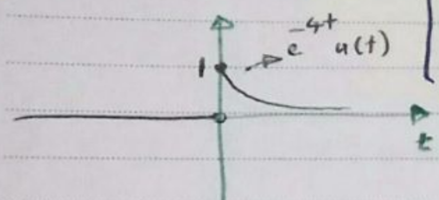
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty$$

(a) $x_1(t) = e^{-4t} u(t) \Rightarrow$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |e^{-4t} u(t)|^2 dt = \int_0^\infty e^{-8t} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{8} e^{-8t}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{8}}{2T} = 0$$

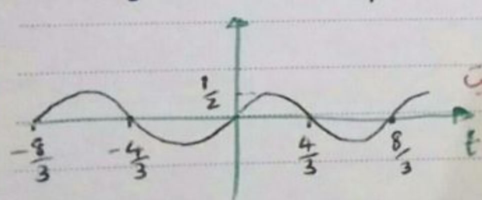


(b) $x_2(t) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} t\right) \Rightarrow$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} t\right)\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{3\pi}{4} t\right) dt = \infty$$

مقدار سیگنال نامنفی ← مساحت زیر نمودار مثبت ← بی‌نهایت



$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} \int_{-T}^{T} \sin^2\left(\frac{3\pi}{4} t\right) dt$$

$$\overset{*}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} \int_{-T}^{T} \frac{1 - \cos\left(\frac{6\pi}{4} t\right)}{2} dt$$

$*: \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

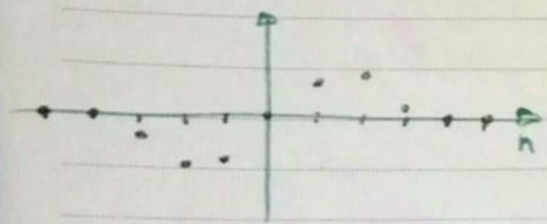
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} \left[\frac{t}{2} - \frac{4}{6\pi} \sin\left(\frac{6\pi}{4} t\right)\right]_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} (T) = \frac{1}{8}$$

SEPEHR

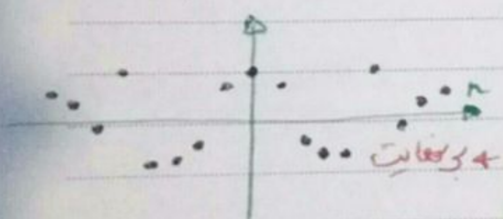
ادامه ①

(c) $x_3[n] = \sin(n)\, u[9-n^2] \Rightarrow \begin{cases} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\sin(n)\, u[9-n^2]|^2 \\ = \sum_{n=-3}^{3} |\sin(n)|^2 \simeq 3.1 \end{cases}$



$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{3.1}{2N+1} = 0$

(d) $x_4[n] = \frac{3}{2}\cos(n^2) \Rightarrow \begin{cases} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left|\frac{3}{2}\cos(n^2)\right|^2 \\ = \frac{9}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2(n^2) = \infty \end{cases}$



مقدار سیگنال نامنفی ← جمع نامتناهی مقادیر مثبت ← بی‌نهایت

$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2)$

$0 < \cos^2(n^2) \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leq \frac{9}{4}$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \lim_{N\to\infty} (2N+1)$

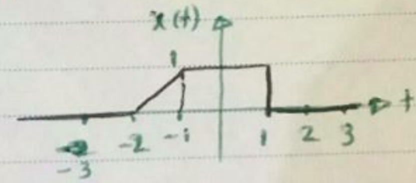
$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leq \frac{9}{4}$

Year : .... Month : .... Day : ....

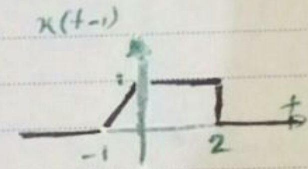
②

نکته: سیگنال را به صورت $x(\alpha t+\beta)$ می‌نویسیم. پس ابتدا به اندازه β، شیفت می‌دهیم و در ادامه به اندازه α، انبساط/انقباض انجام می‌دهیم.

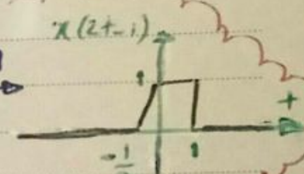
(اگر α منفی بود، یک بازتاب نیز در حالت انجام می‌دهیم.)



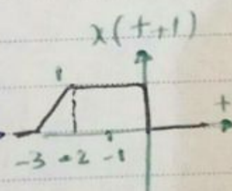
(a) $x(2t-1) \xrightarrow{\text{شیفت}}$



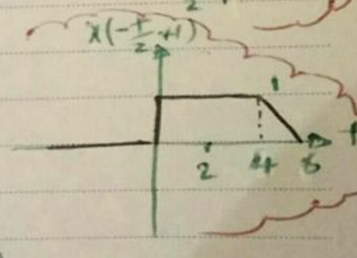
$\xrightarrow{\text{انقباض}}$



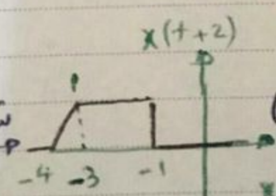
(b) $x(-\frac{t}{2}+1) \xrightarrow{\text{شیفت}}$



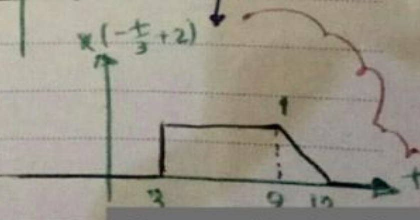
$\xrightarrow[\text{(و بازتاب)}]{\text{انبساط}}$



(c) $x(\frac{6-t}{3}) = x(-\frac{t}{3}+2) \xrightarrow{\text{شیفت}}$



انبساط (و بازتاب)



SEPEHR

-٣

For each of the signals listed below, find the even and odd components $Ev\{x(t)\}$ and $Od\{x(t)\}$.

(a) $x(t) = e^{-5t}sin(t)u(t)$

$$x(t) = e^{-5t}sin(t)u(t)$$

$$x(-t) = e^{5t}sin(-t)u(-t) = -e^{5t}sin(t)u(-t)$$

$$Ev\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \Rightarrow Ev\{x(t)\} = \frac{e^{-5t}sin(t)u(t) - e^{5t}sin(t)u(-t)}{2}$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \Rightarrow Od\{x(t)\} = \frac{e^{-5t}sin(t)u(t) + e^{5t}sin(t)u(-t)}{2}$$

$$\Rightarrow Ev\{x(t)\} = \frac{sin(t)}{2}(e^{-5t}u(t) - e^{5t}u(-t))$$

$$\Rightarrow Od\{x(t)\} = \frac{sin(t)}{2}e^{-5|t|}$$

(b) $x(t) = e^{-3|t|}cos(t)$

$$x(t) = e^{-3|t|}cos(t)$$

$$x(-t) = e^{-3|-t|}cos(-t) = e^{-3|t|}cos(t) = x(t)$$

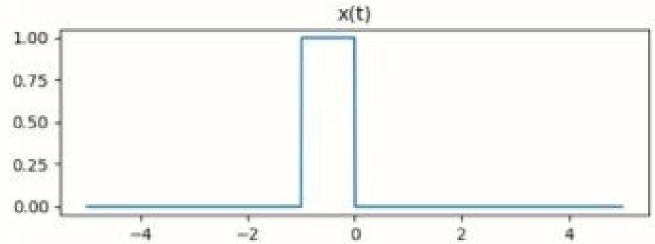
$$\Rightarrow Ev\{x(t)\} = x(t)$$

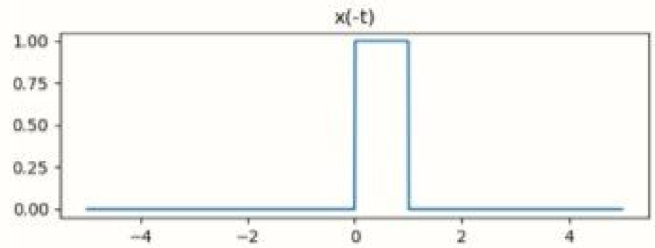
$$\Rightarrow Od\{x(t)\} = 0$$

(c) $x(t) = \Pi(t+\frac{1}{2})$, (Solve by sketching) Hint:

$$\Pi(t) = rect(t) = \text{unit pulse} = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$$

$$Ev\{x(t)\} = \begin{cases} 0.5, |x| < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$





$$Od\{x(t)\} \begin{cases} 0.5, -1 < x < 0 \\ -0.5, 0 < x < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

۴-

a)

$$x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{10}\right)} \to T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

b)

$$x(t) = \sin^3 2t \to$$

$$x(t+T) = \sin^3\left(2(t+T)\right) = \frac{1}{4}(3\sin(2t+2T) - \sin(6t+6T))$$

$$= \frac{3}{4}[(\sin 2t \cos 2T) + (\cos 2t \sin 2T)]$$

$$- \frac{1}{4}[\sin(6t)\cos(6T) + \cos(6t)\sin(6T)] \to \text{if } 2T = 2\pi$$

$$\to x(t+T) = \frac{3}{4}(\sin 2t) - \frac{1}{4}(\sin 6T) = x(t) \to T = \pi.$$

c)

$$x(t+N) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+6N+n|} = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+n'|} \to 6N \in \mathbb{N} \to T_0 = \frac{1}{6}.$$

d)

$$x[n] = 5\cos(3n) \to x[n+N] = 5\cos(3n+3N)$$

$$= 5[\cos 3n \cos 3N - \sin 3n \sin 3N] \to \cos 3N = 1 \text{ and } \sin 3N = 0$$

$$\to 3N = 2k\pi \to N = \frac{2k\pi}{3} \notin \mathbb{N} \to x[n] \text{ is non-periodic.}$$

e)

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n}{7} + 2\right) \to T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}} = \frac{14}{3} \to T = 3 \times \frac{14}{3} = 14.$$

f)

$$x[n] = 1 + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{5}{3}n\right) \to T = \frac{2\pi}{\frac{5}{3}} = \frac{6\pi}{5} \notin \mathbb{Q}. \to x[n] \text{ is non-periodic.}$$

۵-

S3.5

(a) $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

(b) $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

(c) $y[n] = \mathrm{H}[x[n] - x[n-1]]$
$= x^2[n] + x^2[n-1] - 2x[n]x[n-1]$

(d) $y[n] = \mathrm{G}[x^2[n]]$
$= x^2[n] - x^2[n-1]$

(e) $y[n] = \mathrm{F}[x[n] - x[n-1]]$
$= 2(x[n] - x[n-1]) + (x[n-1] - x[n-2])$
$y[n] = 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

(f) $y[n] = \mathrm{G}[2x[n] + x[n-1]]$
$= 2x[n] + x[n-1] - 2x[n-1] - x[n-2]$
$= 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

(a) and (b) are equivalent. (e) and (f) are equivalent.

۶-

1) $y[n] = x[n-n_0]$

حافظه‌دار هست، چون برای هر لحظه به زمان n0- آن بستگی دارد.

علی نیست لزوماً، چون بستگی به علامت n0 دارد .

پایدار است، زیرا:

$$|x[n]| < L_1 \to |x[n-n_0]| < L_1 \to y[n] < L_2.$$

تغییرناپذیر با زمان است. زیرا:

$$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[n-n_0]$$
$$x_2[n] = x_1[n-n_1] \to y_2[n] = x_2[n-n_0] = x_1[n-n_0-n_1]$$
$$y_1[n-n_1] = x_1[n-n_0-n_1]$$
$$\Rightarrow y_2[n] = y_1[n-n_1]$$

خطی اســـت، زیرا هم خاصـــیت خطی دارد ($x_1[t] + x_2[t] \xrightarrow{T} y_1[t] + y_2[t]$) و هم خاصـــیت ضرب‌پذیری ($a\,x[t] \xrightarrow{T} ay[t]$).

2) $y[n] = x[-n]$

حافظه‌دار است، زیرا برای اعداد به قرینه آن احتیاج است.

غیرعلی است، زیرا برای اعداد منفی به اعداد مثبت احتیاج است.

پایدار است، چون برای ورودی محدود، خروجی، محدود است.

تغییرپذیر است، چون با شیف به سمت راست، خروجی به چپ شیفت پیدا می‌کند و از نظر ریاضی:

$$x_2[n] = x_1[n-n_0], x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[-n]$$
$$y_2[n] = x_2[-n] = x_1[-n-n_0]$$
$$y_1[n-n_0] = x_1[-n+n_0] \neq y_2[n]$$

خطی است، زیرا دو شرط را دارد.

3) $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس ارتباط دارد و تابع پله عددی جداست و ورودی نیست.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

پایدار، زیرا اگر خود ورودی محدود باشد، تابع پله نیز محدود است، پس جمعشان نیز محدود است.

تغییر پذیر است. چون اگر شیفت دهیم از اعداد منفی به مثبت، مقدار تابع پله، تاثیرخواهد گذاشت.

خطی اســـت، اگر چه وجود مقدار اضـــافه دو خاصـــیت را از بین می‌برد، اما میتوان این ســـیســـتم‌ها را incrementally linear است.

4) $y[n] = e^{x[n]}$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس در همان لحظه ارتباط دارد.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

پایدار، زیرا:. $|x(t)| < L_1 \to -L_1 < x(t) < L_1 \to e^{-L_1} < y(t) < e^{L_1} \to |y(t)| < L_2$

تغییر ناپذیر است.

خطی نیست، زیرا:

$$e^{x_1[n]+x_2[n]} = e^{x_1[n]}e^{x_2[n]} \neq y_1[n] + y_2[n]$$

5) $y[n] = n\,x[n]$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس در همان لحظه ارتباط دارد.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

ناپایدار، زیرا:

$$x[n] = 1 \to y[n] = n.$$

تغییرپذیر است، زیرا:

$$x_2[n] = x_1[n-n_0], y_1[n] = nx_1[n] \to y_1[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0]$$
$$y_2[n] = nx_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0]$$

خطی است، زیرا دو شرط را دارد.

6) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

حافظه‌دار است، زیرا به لحظات قبل و بعد ارتباط دارد بنابراین علی هم نیست.

پایدار، زیرا برای دامنه‌های محدود، خروجی محدود است.

تغییرپذیر است، زیرا:

$$y_1(t) = x_1(t-n_0-2) + x_1(2-t+n_0) \neq x_1(t-2-n_0) + x_1(2-t-n_0)$$

خطی است.

7) $y(t) = x(t)\cos(3t)$

بدون حافظه است، چون به زمان دیگری به غیر از زمان حال بستگی ندارد (کوسینوس ضریب است) و طبعاً علی است.

این سیستم، پایدار است، زیرا:

$$\text{if } |x(t)| < L_1 \xrightarrow{(\cos 3t)<1} |y(t)| < L_2.$$

تغییر پذیر است، زیرا مقدار شیفت به دوره تناوب کوسینوس ارتباط دارد.

خطی است زیرا دو شرط مقیاس‌پذیری و جمع‌پذیری را دارد.

8) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\iota)\, \mathrm{d}\iota$

حافظه‌دار است، زیرا در هر لحظه به مقدار لحظات منفی بینهایت تا 2t بستگی دارد، و برای نقطه $t = 1$، به مقدار $x(2)$ احتیاج است، پس علی نیست.

پایدار نیســـت، زیرا محدوده پایین انتگرال باعث می‌شـــود برای مقادیر محدود ســـیگنال ورودی، مقادیر نامحدود تولید شود.

تغییرپذیر با زمان است، زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t-t_0), y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\iota)\, \mathrm{d}\iota\, , y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2t-2t_0} x_1(\iota - t_0)\, \mathrm{d}\iota$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\iota)\, d\iota = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\iota - t_0)\, d\iota.$$

$$y_2(t) \neq y_1(t - t_0).$$

خطی است، زیرا قابلیت جمع‌پذیری و مقیاس‌پذیری برای انتگرال تعریف می‌شود.

8) $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$

حافظه‌دار است. برای نقطه $t = -3$، باید به مقدار سیگنال ورودی در $x(-1)$ احتیاج است که پس یعنی علی نیست. این سیستم، فقط دامنه را سه برابر می‌کند، پس پایدار است.

تغییرپذیر است، زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0), y_1(t - t_0) = x\left(\frac{(t - t_0)}{3}\right),$$

$$y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t - 3t_0}{3}\right). \Rightarrow y_1(t - t_0) \neq y_2(t).$$

خطی است، زیرا خواص خطی بودن را دارد.

Function	حافظه‌دار	علی	پایدار	تغییرپذیر	خطی
$y[n] = x[n - n_0]$	بلی	خیر	بلی	خیر	بلی
$y[n] = x[-n]$	بلی	خیر	بلی	بلی	بلی
$y[n] = x[n] + 3u[n + 1]$	خیر	بلی	بلی	بلی	بلی
$y[n] = e^{x[n]}$	خیر	بلی	بلی	خیر	خیر
$y[n] = n\, x[n]$	خیر	بلی	خیر	بلی	بلی
$y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$	بلی	خیر	بلی	بلی	بلی
$y(t) = x(t) \cos(3t)$	خیر	بلی	بلی	بلی	بلی
$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\iota)\, d\iota$	بلی	خیر	خیر	بلی	بلی
$y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$	بلی	خیر	بلی	بله	بله

۷-

۷- الف)

$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$$

$$\Rightarrow y_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_3(t)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a x_1(t) + b x_2(t)\right)\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a x_1(t)\,\delta(t-nT) + b x_2(t)\,\delta(t-nT)$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,\delta(t-nT) + b\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(t)\,\delta(t-nT)$$

$$= a\,y_1(t) + b\,y_2(t) \Rightarrow \text{Linear}$$

ب)

$$x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t-t_0)\,\delta(t-nT)$$

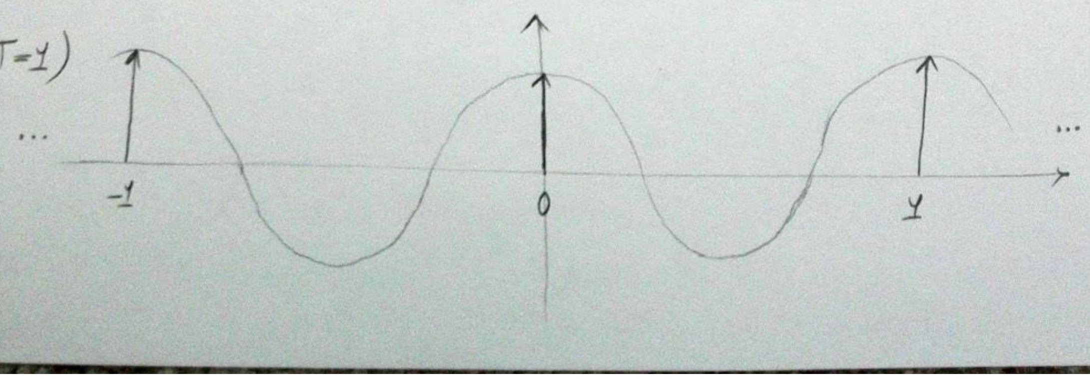
و $$y_1(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t-t_0)\,\delta(t-t_0-nT)$$

$$\xrightarrow{\text{به طور کلی}} y_2(t) \neq y_1(t-t_0) \Rightarrow \text{Time-Variant}$$

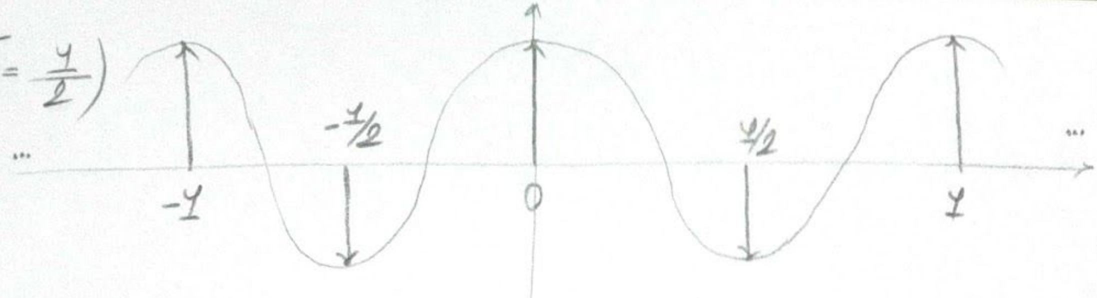
پ)

$$x(t) = \cos(2\pi t)$$

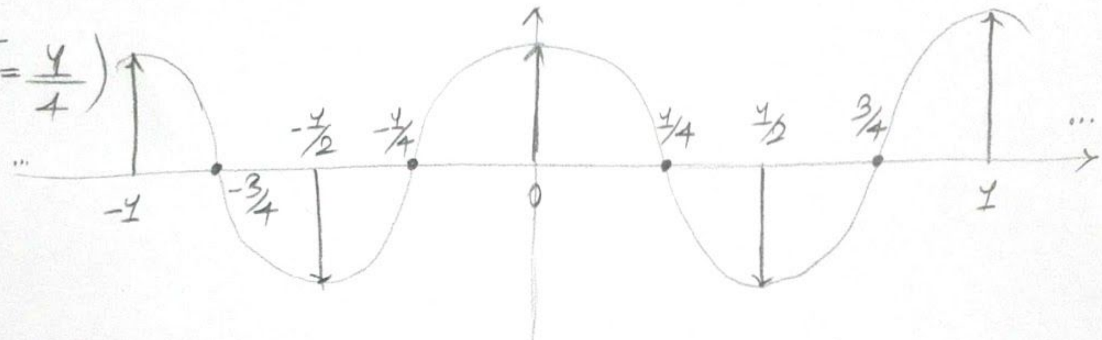
T=۱)



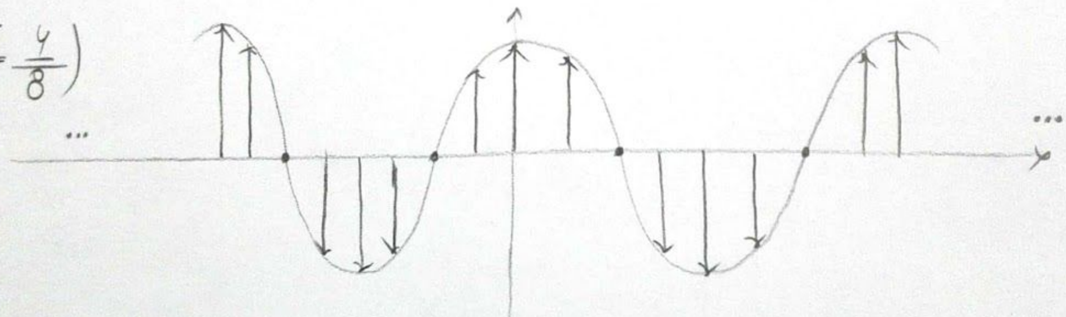
$T = \frac{1}{2})$



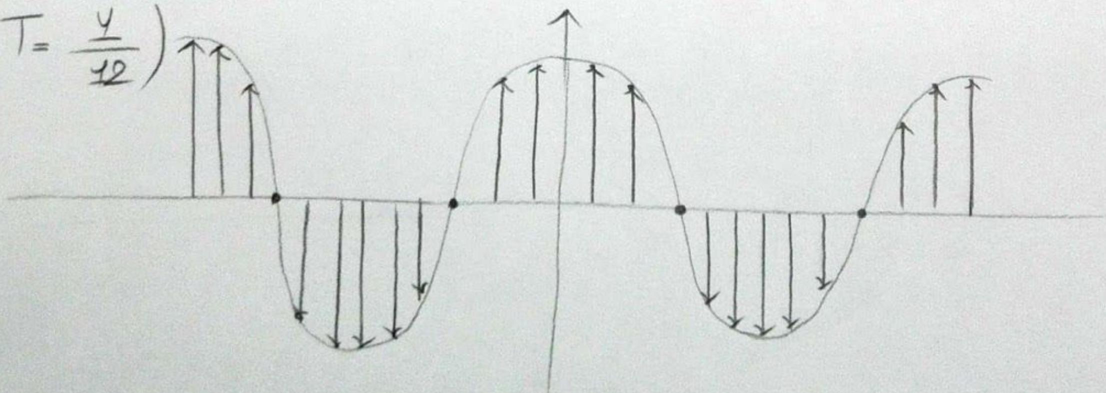
$T = \frac{1}{4})$



$T = \frac{1}{8})$

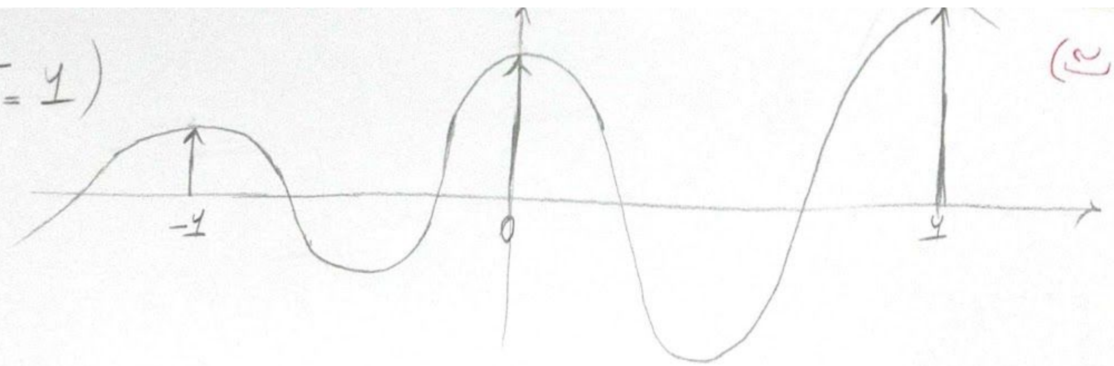


$T = \frac{1}{12})$

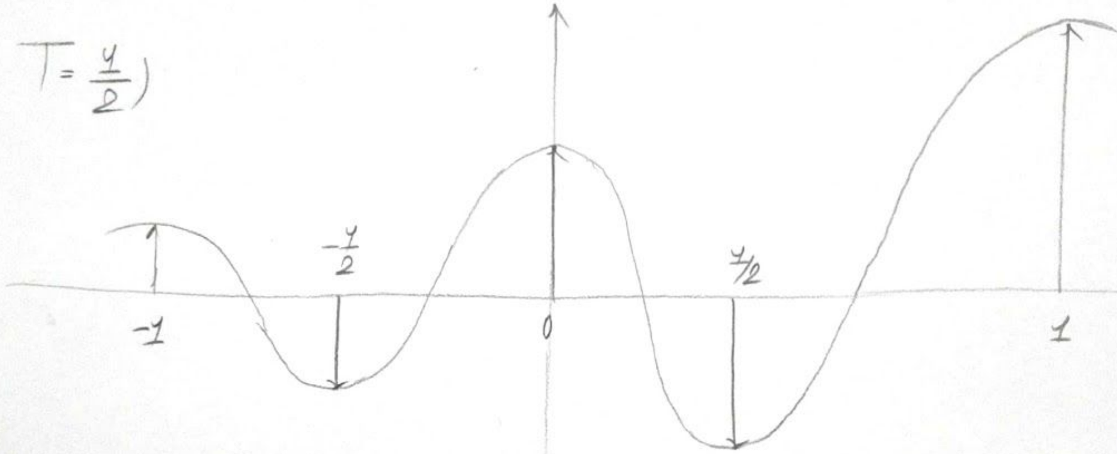


(* As we can see, the frequency is getting Lower)

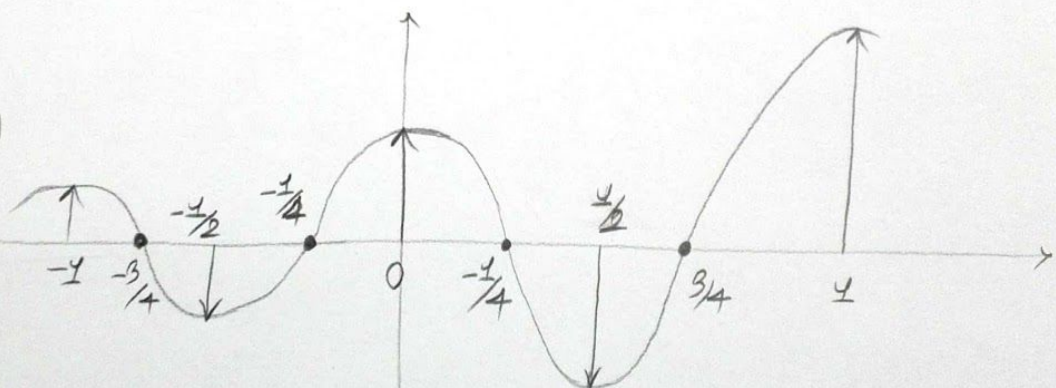
T= 1)



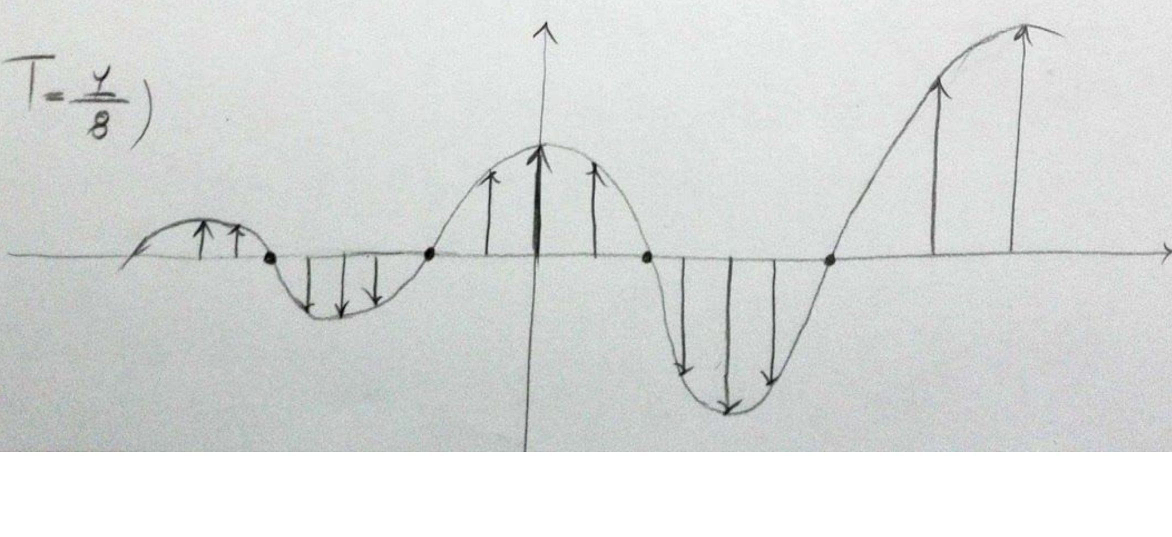
T= 1/2)

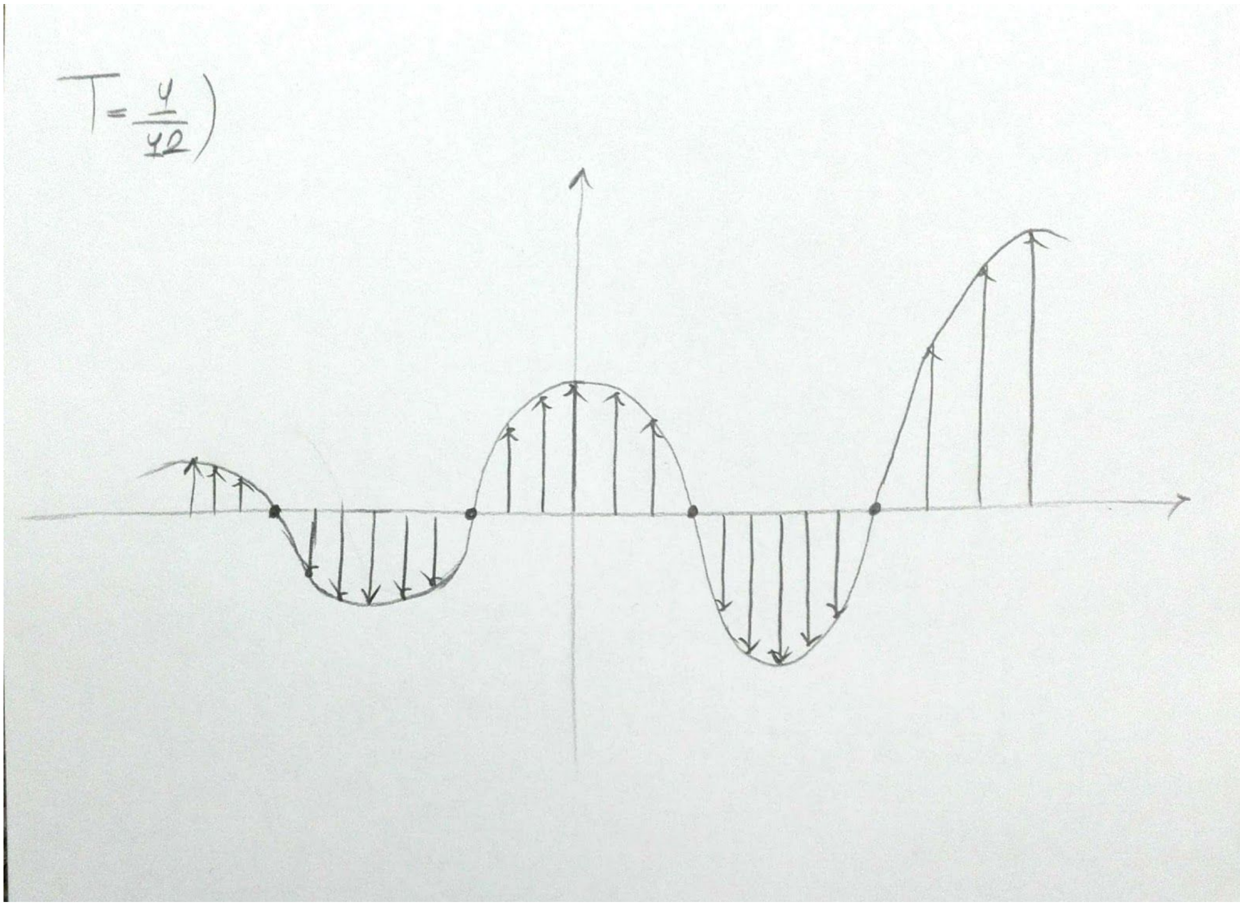


T= 1/4)



T= 1/8)





$T=\frac{4}{40})$

-۸

الف) این سیستم، سیگنال ورودی را ۱ واحد به سمت راست شیفت می‌دهد و سپس آن را در سیگنال $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ ضرب می‌کند. از آن جایی که سیگنال $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ در هیچ n ای ۰ نیست، اگر سیگنال خروجی را ۱ واحد به چپ شیفت دهیم و تقسیم بر $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ کنیم، سیگنال اولیه را بازتولید خواهیم کرد ← سیستم معکوس پذیر است.

$$y^{-1}[n] = \frac{1}{\cos(\frac{2\pi}{5}n)} x[n+1]$$

* به طور کلی، سیستم $y[n]=f(n)x[n-n_0]$ ($y(t)=f(t)x(t-t_0)$) معکوس پذیر است، اگر $f(n)$ ($f(t)$) در هیچ نقطه‌ای، برابر با صفر نشود.

ب)

$$y(t) = \int_{t^2+t}^{+\infty} x(\tau-1)\,d\tau = \int_{t^2+t-1}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau$$

این سیستم برای تولید سیگنال خروجی، از ورودی خود به ازای مقادیر مختلف t، از بازه‌ی t^2+t-1 تا $+\infty$ انتگرال می‌گیرد. $f(t)=t^2+t-1$ یک تابع درجه ۲ است که مینیمم‌اش -1.25 است. درنتیجه این سیستم هیچ‌گاه از مقادیر سیگنال ورودی خود در $t<-1.25$ انتگرال نمی‌گیرد. پس اگر دو ورودی مختلف داشته باشیم که در $t \geq -1.25$ باهم برابراند ولی در $t<-1.25$ متفاوت‌اند، این سیستم خروجی یکسانی به ازای آن‌ها تولید خواهد کرد.

← این مثال نقض برای معکوس پذیر بودن سیستم است ← سیستم معکوس پذیر نیست.