دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین ششم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

-١

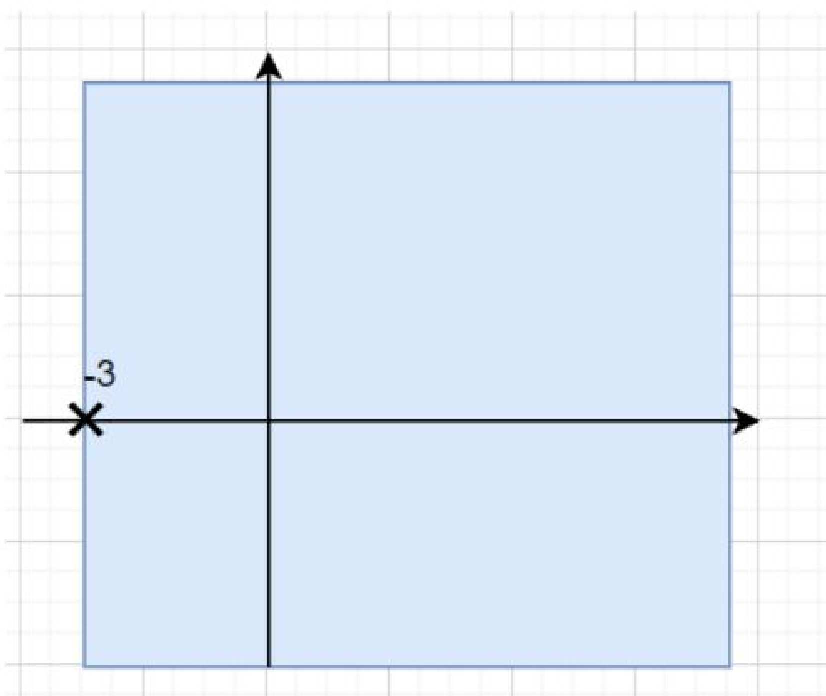
a.

$x(t) = 3t^2 e^{-3t} u(t)$

$z(t) = e^{-3t} u(t) \xrightarrow{S} Z(s) = \frac{1}{s+3}$, RoC = $Real\,\{s\} > -3$

$t^2 z(t) \xrightarrow{S} \left(\frac{d^2 Z(s)}{ds^2}\right) = \frac{d\left(-\frac{1}{(s+3)^2}\right)}{ds} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^4} = \frac{2}{(s+3)^3}$, RoC = $Real\{s\} > -3$

$x(t) \xrightarrow{S} X(s) = \frac{6}{(s+3)^3}$, RoC = $Real\{s\} > -3.$



b.

$$x(t) = |t|e^{-4t} = -te^{-4t}u(-t) + te^{-4t}u(t) = y(t) + z(t)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{S}} Y(s) = -\frac{d\left(\frac{1}{s+4}\right)}{ds} = \frac{1}{(s+4)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} < -4$$

$$z(t) \xrightarrow{\text{S}} Z(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+4}\right) = \frac{1}{(s+4)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -4$$

$$X(s) = \frac{2}{(s+4)^2}, \text{Roc} = \Phi$$

c.

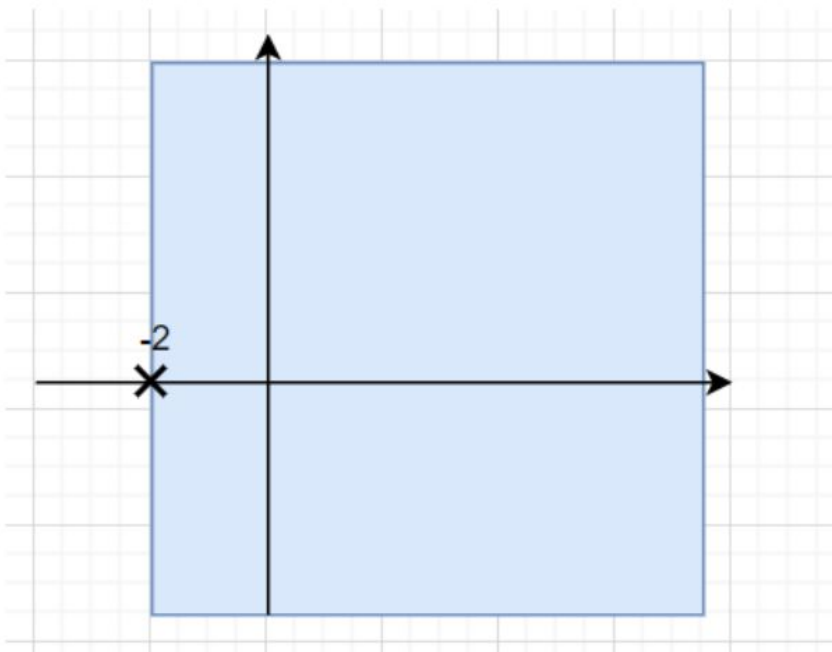
$$x(t) = (t-3)e^{-2t}u(t-3) = (t-3)e^{-2(t-3)}u(t-3)e^{-6}$$

$$y(t) = (t)e^{-2t}u(t)e^{-6}, z(t) = e^{-2t}u(t)e^{-6}$$

$$Z(s) = \frac{e^{-6}}{s+2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}\big(Z(s)\big) = \frac{e^{-6}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$X(s) = e^{-3s}Y(s) = \frac{e^{-6-3s}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$



درنقطه منفی دو، دو عدد قطب دارد، یک عدد هم صفر در بینهایت دارد،

d.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{1} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} (e^{-st}]_{1}^{0}) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s}), \text{RoC} = \mathbb{R}^2.$$

در نقطه صفر، هم صفر دارد و هم قطب که با هم خنثی می‌شوند.

۲) a. $X(s) = \dfrac{s}{s^{۲}+۹}$ Real$\{s\} > ۰$

سیگنال دست راستی

$\Rightarrow x(t) = \cos ۳t \, . \, u(t)$

b. $X(s) = \dfrac{s+۲}{s^{۲}+۷s+۱۲}$ $-۴ < \text{Real}\{s\} < -۳$

$\Rightarrow X(s) = \dfrac{-۱}{s+۳} + \dfrac{۲}{s+۴} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s+۳} \text{ for } s < -۳\right\}$

$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{۲}{s+۴} \text{ for } s > -۴\right\}$

$\Rightarrow x(t) = e^{-۳t} u(-t) + ۲e^{-۴t} u(t)$

c.

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

$$A = \frac{(s-1)}{(s+3)(s^2+s+1)}|_{s=-2} = -1$$

$$B = \frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+s+1)}|_{s=-3} = \frac{4}{7}$$

$$s-1 = A(s+3)(s^2+s+1) + B(s+2)(s^2+s+1) + (Cs+D)(s+2)(s+3)$$

$$A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + (Cs+D)(s^2+5s+6)$$

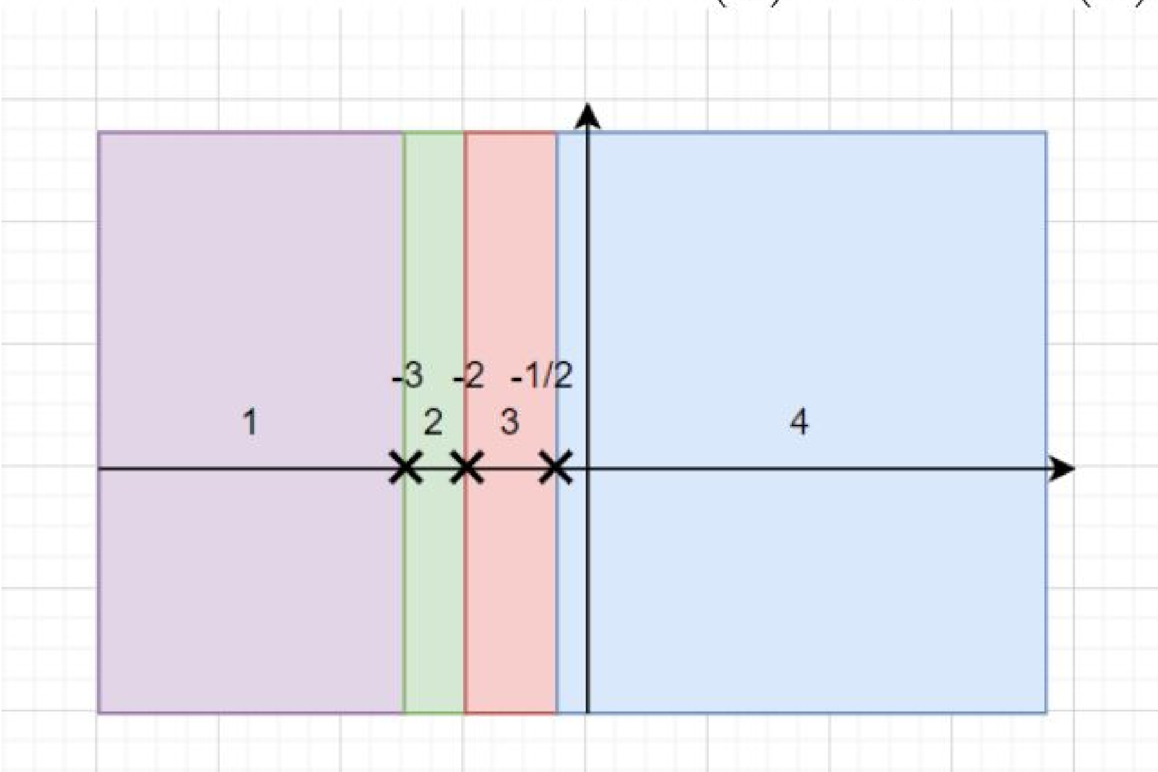
$$= A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + Cs^3 + 5Cs^2 + Ds^2 + 5Ds + 6Cs + 6D$$

$$A+B+C = 0 \rightarrow C = -(A+B) = \frac{3}{7}$$

$$3A+2B+6D = -1 \rightarrow 6D = -1+3-\frac{8}{7} \rightarrow D = \frac{1}{7}$$

$$-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{\frac{3}{7}s+\frac{1}{7}}{s^2+s+1}=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{21}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$



$1: x(t)=e^{-2t}u(-t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$

$2: x(t)=-e^{-2t}u(t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$

$3: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$

$4: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)+\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$

-۳

توجه می‌کنیم که:

$$L\left\{e^{-at}u(t)\right\} = L\left\{-e^{-at}u(-t)\right\} = \frac{۱}{s+a}$$

$$L\left\{e^{-a(t-۱)}u(t-۱)\right\} = L\left\{-e^{-a(t-۱)}u(-(t-۱))\right\} = \frac{e^{-s}}{s+a}$$

بنابراین:

$$L\left\{e^{-۵(t-۱)}u(t-۱)\right\} = L\left\{-e^{-۵(t-۱)}u(-(t-۱))\right\}$$

$$\Rightarrow \ L\left\{e^{-۵t}u(t-۱)\right\} = L\left\{-e^{-۵t}u(-t+۱)\right\}$$

لذا $A=-۱$ و $t_{۰}=-۱$

-۴

$$y(t) = te^{-۴t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{+1}{(s+۴)^۲} \qquad Real\{s\} > -۴$$

$$x(t) = e^{-۴t}u(t) - te^{-۴t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \underset{s>-۴}{\frac{1}{s+۴}} - \underset{s>-۴}{\frac{1}{(s+۴)^۲}} = \underset{s>-۴}{\frac{s+۳}{(s+۴)^۲}}$$

الف) $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{+\frac{1}{(s+۴)^۲}}{\frac{s+۳}{(s+۴)^۲}} = \frac{+1}{s+۳} \qquad s>-۴$$

ب) $Y_1(s) = H_1(s)\, X_1(s)$

$$X_1(s) = \mathcal{L}\{e^{-۲t}u(t)\} = \frac{1}{s+۲} \qquad s>-۲$$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{1}{s+۲} \times \frac{+1}{s+۳} = \frac{A}{s+۲} + \frac{B}{s+۳}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = +1 \\ B = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow y(t) = e^{-۲t}u(t) - e^{-۳t}u(t)$$

ج)

$$x_2(t) = e^{2t} = e^{2t}u(t) + e^{2t}u(-t) \rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-2} = 0, \mathrm{RoC} = \Phi$$

پس لاپلاس ندارد و باید با کانولوشن رفت:

$$x_2(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}e^{2t-2\tau}\, d\tau = e^{2t}\int_{0}^{\infty} e^{-5\tau}\, d\tau$$

$$= -e^{2t}\frac{1}{5}e^{-5\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{e^{2t}}{5}$$

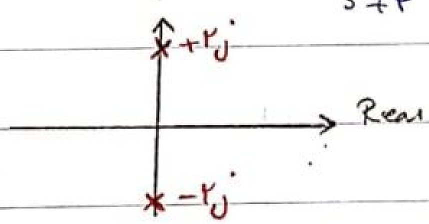
د) برای به دست آوردن تابع تبدیل سیستم معکوس کافی است $y(t)$ را به عنوان ورودی و $x(t)$ را به عنوان خروجی در نظر بگیریم. به این صورت کافی است: $G(s) = \frac{1}{H(s)}$

$$\Rightarrow G(s) = s + 3$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -۲y(t) + \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) = -۲Y(s) + ۱$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = ۲x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) = ۲X(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = \dfrac{۲}{s^۲+۴} \rightarrow \text{دست راستی} \Rightarrow \text{Real}\{s\} > ۰ \\ X(s) = \dfrac{s}{s^۲+۴} \rightarrow \text{"} \qquad \text{"} \end{cases}$$

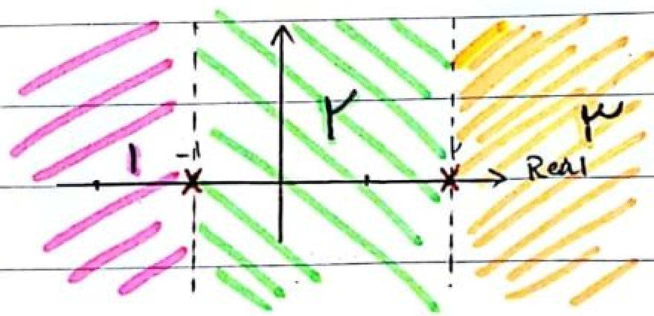


$$\frac{d^۲}{dt^۲} y(t) - \frac{d}{dt} y(t) - ۲y(t) = x(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

الف) $s^۲ Y(s) - sY(s) - ۲Y(s) = X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{۱}{s^۲ - s - ۲} = \frac{۱}{(s-۲)(s+۱)}$$



ب) $H(s) = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$ → ROC

۱: سیستم LTI پایدار است ⟵⟶ ROC برای H(s)، شامل محور $j\omega$ باشد

$\Rightarrow$ ناحیه دوم: $-1 < Real\{s\} < 2$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۲: ROC برای H(s) در یک سیستم علّی، سمت راستی است.

$\Rightarrow$ ناحیه سوم، $Real\{s\} > 2$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۳، ناحیه اول: $Real\{s\} < -1$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{-1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$