دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین سوم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

۱-

برای محاسبه ضرایب فوریه $x(t)$ می‌توان از همان فرمول محاسبه $a_k$ استفاده کرد. اما در حالتی که سیگنال ما به شکل نمایی باشد و یا به راحتی به شکل نمایی تبدیل شود، می‌توانیم از روش بهتری نیز استفاده نماییم. هدف از محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب این است که آن سیگنال را به‌صورت مجموعی از نمایی‌های مختلط متناوب بنویسیم که ضرایب آن نمایی‌ها برابر $a_k$ می‌باشد. گاهی اوقات می‌توان بدون محاسبه $a_k$، سیگنال را به‌صورت نمایی نوشت و در واقع بسط سری فوریه آن را به‌دست آورد. در این صورت $a_k$ را نیز می‌توان با توجه به ضریب نمایی‌ها تعیین کرد. در این مثال سیگنال ما به‌صورت سینوسی است و می‌توان آن را با استفاده از فرمول‌های اویلر مستقیماً به‌صورت نمایی نوشت و اصلاً نیازی به استفاده از رابطه آنالیز نداریم. اما قبل از انجام این کار، دوره تناوب و فرکانس اصلی سیگنال را محاسبه می‌کنیم. دوره تناوب $\sin\frac{۳}{۲}t$ برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ و دوره تناوب $\cos(t-\frac{\pi}{۳})$ نیز برابر $۲\pi$ می‌باشد. پس دوره تناوب اصلی $x(t)$ و فرکانس اصلی آن برابر است با:

$$T = \mathrm{lcm}\left(\frac{۴\pi}{۳}, ۲\pi\right) = ۴\pi \quad \longrightarrow \quad \omega_۰ = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$

حال $x(t)$ را با استفاده از فرمول‌های اویلر به‌صورت نمایی می‌نویسیم:

$$x(t) = ۲j\sin\frac{۳}{۲}t + \cos\left(t-\frac{\pi}{۳}\right) + ۲ = e^{j\frac{۳}{۲}t} - e^{-j\frac{۳}{۲}t} + \frac{۱}{۲}e^{j(t-\frac{\pi}{۳})} + \frac{۱}{۲}e^{-j(t-\frac{\pi}{۳})} + ۲$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = (۱)e^{j\frac{۳}{۲}t} + (-۱)e^{-j\frac{۳}{۲}t} + \left(\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{\pi}{۳}}\right)e^{jt} + \left(\frac{۱}{۲}e^{j\frac{\pi}{۳}}\right)e^{-jt} + ۲ \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌کنید که $x(t)$ برحسب نمایی نوشته شده است. از طرف دیگر می‌دانیم که بسط سری فوریه $x(t)$ برابر می‌باشد با:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_۰ t} = \cdots + \underbrace{a_{-۲}\, e^{-j۲\omega_۰ t}}_{k=-۲} + \underbrace{a_{-۱}\, e^{-j\omega_۰ t}}_{k=-۱} + \underbrace{a_۰}_{k=۰} + \underbrace{a_۱\, e^{j\omega_۰ t}}_{k=۱} + \underbrace{a_۲\, e^{j۲\omega_۰ t}}_{k=۲} + \cdots$$

حال می‌توانیم با معادل قرار دادن رابطه فوق با رابطه (۱) و با توجه به مقدار $\omega_۰ = \frac{۱}{۲}$، ضرایب $a_k$ را شناسایی و تعیین نماییم. برای این کار به‌صورت زیر استدلال می‌کنیم:

در بسط سری فوریه سیگنال، ضریب $e^{jk\omega_0 t}$ برابر $a_k$ می‌باشد. با توجه به اینکـه در اینجـا $\omega_0 = \frac{1}{2}$ اسـت، پـس ضریب $e^{jk\frac{1}{2}t}$ برابر $a_k$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$\text{ضریب } e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow a_k \xrightarrow{\omega_0 = \frac{1}{2}} \text{ضریب } e^{jk\frac{1}{2}t} \longrightarrow a_k$$

حال باید در رابطه (۱)، ضریب نمایی $e^{jk\frac{1}{2}t}$ را بـه ازای هـر $k$ شناسـایی کنـیم. بـه عنـوان مثـال ضـریب نمـایی $e^{j(3)\frac{1}{2}t}$ برابر $a_3$، و یا ضریب نمایی $e^{j(-2)\frac{1}{2}t} = e^{-jt}$ برابر $a_{-2}$ می‌باشد. در نتیجه از رابطه (۱) داریم:

$$x(t) = \underbrace{(1)}_{a_3} e^{j\frac{3}{2}t} + \underbrace{(-1)}_{a_{-3}} e^{-j\frac{3}{2}t} + \underbrace{(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}_{a_2} e^{jt} + \underbrace{(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})}_{a_{-2}} e^{-jt} + \underbrace{2}_{a_0} e^{j(0)t}$$

ضریب نمایی $e^{j\frac{3}{2}t}$ برابر $a_3$، ضریب نمایی $e^{-j\frac{3}{2}t}$ برابر $a_{-3}$، ضریب نمایی $e^{jt}$ برابـر $a_2$، ضـریب نمـایی $e^{-jt}$ برابر $a_{-2}$ و ضریب $e^{j(0)t}$ (یعنی عدد ثابت) برابر $a_0$ می‌باشد. همچنین بقیه ضرایب نیز صفر هستند. پس ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر می‌شود با:

$$a_0 = 2 \ , \ a_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} \ , \ a_{-2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} \ , \ a_3 = 1 \ , \ a_{-3} = -1$$

۲-

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^4 x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \delta(t-2)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4} e^{-jk\omega_0 \times 2} = \frac{1}{4} e^{-jk\frac{2\pi}{T}\times 2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} e^{-jk\pi}}$$

-۳

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

a) $x(t-t_0) + x(t+t_0) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}\ (a_k) + e_0^{jk\omega t_0}\ (a_k).$

$T_a = \text{lcm}(T_1, T_2) = \text{lcm}(T, T) = T.$

b) $Even\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} \frac{a_k}{2} + \frac{a_{-k}}{2}.$

$T_b = \text{lcm}(T, T) = T.$

c) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} (jk\omega_0)^2 a_k = -k^2\omega_0^2\ a_k.$

$T_c = T.$

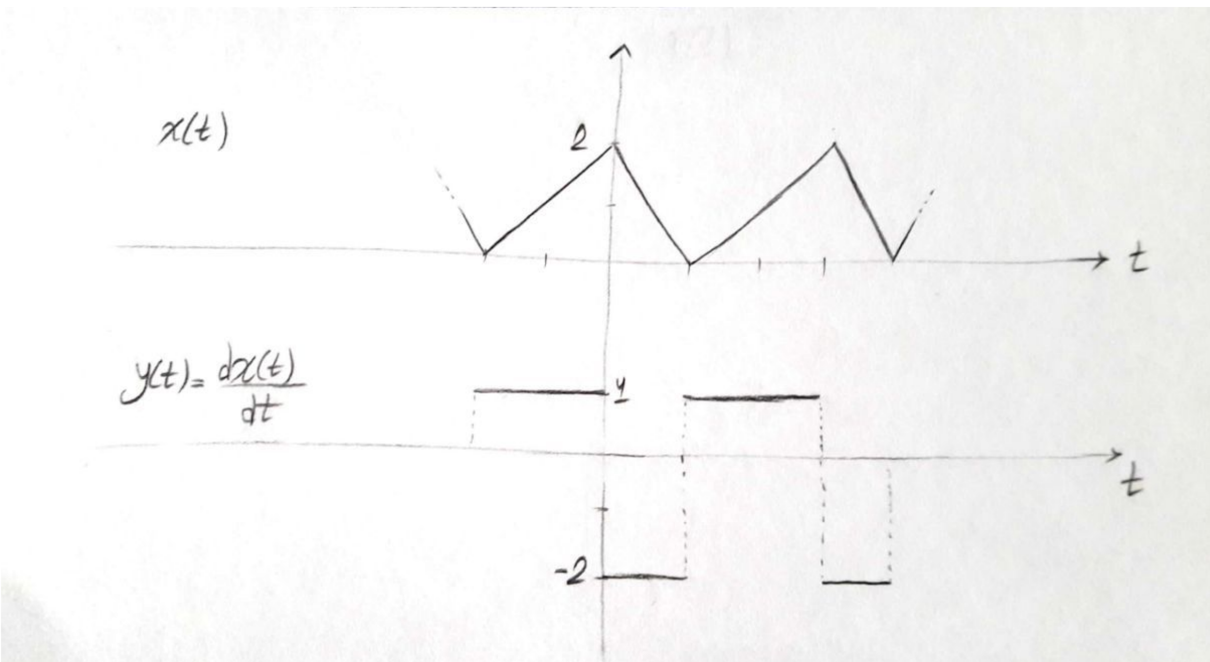
* $x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = jk\omega_0\ \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} =$
$(jk\omega_0)^2\ \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$

❋ دوره تناوب مشتق یک تابع متناوب برابر با دوره تناوب خود تابع است.

d) $x(3t-1) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} e^{-jk\omega_0}\ a_k.$

$T_d = \frac{T}{3}.$

-۴



$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau \\ x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_K \\ y(t) \xleftrightarrow{F.S} b_K \\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{طبق ویژگی}} a_K = \frac{b_K}{jK\omega_0}$$

* چون مخرج به ازای $K=0$ برابر با $0$ است ← $a_0$ نیاز است که به طور مستقیم و از روی خود $x(t)$ حساب شود.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$$

$$b_K = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} y(t)\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{1} -2\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{3}\int_{1}^{3} e^{-jK\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{-2}{3}\left(\frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0}\right)\Bigg|_{0}^{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0}\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= \frac{-1}{3jK\omega_0}\left(-2\left(e^{-jK\omega_0} - 1\right) + \left(e^{-3jK\omega_0} - e^{-jK\omega_0}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{3jK\omega_0}\left(-3e^{-jK\omega_0} + e^{-3jK\omega_0} + 2\right) ; \quad K \neq 0$$

$$b_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\, dt = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} a_K = \dfrac{-3e^{-jK\omega_0} + e^{-3jK\omega_0} + 2}{3K^2\omega_0^2} & ; \quad K \neq 0 \\ \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{0}^{3} x(t)\, dt = 1 & ; \quad K = 0 \end{array}}$$

-۵

$$x(t) = 3e^{j3t} + \cos 2t + e^{j4t} = 3e^{j3t} + \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} + e^{j4t}.$$

$$T = \mathrm{lcm}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{4}\right) = 2\pi \rightarrow \omega_0 = 1.$$

$$x(t) = 3e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t} + e^{j4\omega_0 t}.$$

$$a_2, a_{-2} = \frac{1}{2}, a_3 = 3, a_4 = 1.$$

$$P_{avr} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + 3^2 + 1^2 = \frac{1}{2} + 9 + 1 = \frac{21}{2}.$$

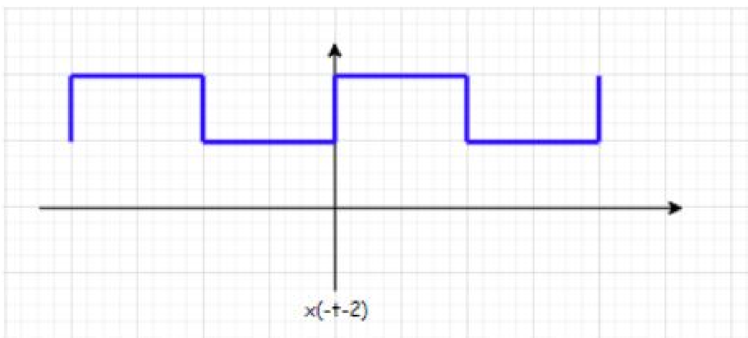
۶-

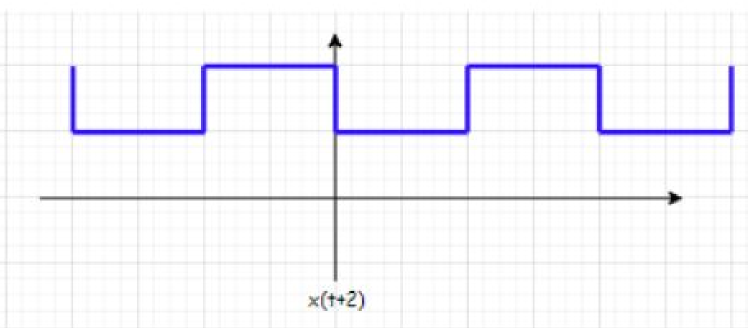
می‌دانیم که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$، پس می‌توانیم $b_k$ را به فرم زیر بنویسیم:

$$b_k = e^{jk\omega_0 \times 2}\,(a_k) + e^{jk\omega_0 \times 2}\,(a_{-k})$$

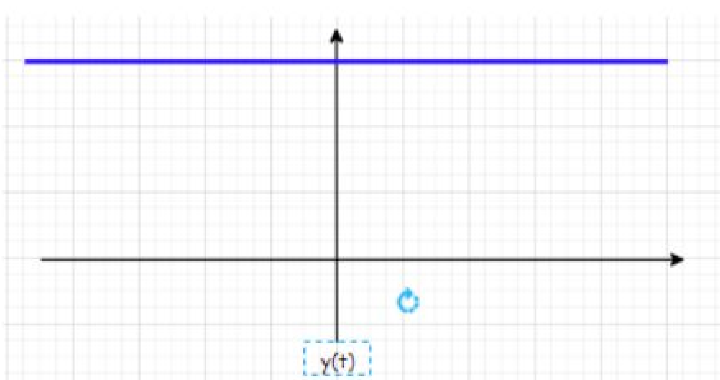
می‌دانیم که $x(-t) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} a_{-k}$ و همچنین، $x(t-t_0) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}\,a_k$. پس داریم:

$$y(t) = x(t+2) + x(-t-2).$$




$$y = 3$$



-۷

۱. سیگنال حقیقی است، پس: $a_k = a_{-k}^*$.

۲. سیگنال فقط دارای سه ضریب فوریه در kهای ۰، ۱، ۲، منفی دو و منفی یک دارد.

۳. مزدوج و حقیقی بودن ضرایب در ۱ و منفی یک: $a_1 = a_{-1}$.

۳. از رابطه داریم:

$$x(t) = -x(t-3) \rightarrow a_k = -e^{-jk\omega_0 3} a_k$$

$$\text{if k=0:}\ a_0 = -a_0 \rightarrow a_0 = 0.$$

$$\text{if k=1 or -1:}\ a_k = -e^{-kj\pi} a_k \rightarrow a_k = a_k.$$

$$\text{if } k = 2 \text{ or } -2\text{:}\ a_k = -a_k \rightarrow a_2 = a_{-2} = 0.$$

۴.

$$\int_{-3}^{3} \left| a_{-1} e^{-\frac{j\pi}{3}t} + a_1 e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt = |a_1| \int_{-3}^{3} \left| e^{-\frac{j\pi}{3}t} + e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt$$

$$= |2a_1| \int_{-3}^{3} \left| \cos\frac{\pi}{3}t \right| dt \overset{*}{=} \frac{24}{\pi} |a_1| = 12\pi \rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$* \int_{-3}^{3} \left| \cos\frac{\pi}{3}t \right| dt = \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} \left( -\cos\frac{\pi}{3}t \right) dt + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left( \cos\frac{\pi}{3}t \right) dt + \int_{\frac{3}{2}}^{3} - \left( \cos\frac{\pi}{3}t \right) dt$$

$$= \frac{3}{\pi} + \frac{6}{\pi} + \frac{3}{\pi} = \frac{12}{\pi}.$$

$$x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

-۸

محاسبه پاسخ فرکانسی : $H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau$ ①

← چرا پاسخ فرکانسی؟ چون سیستم‌های LTI را می‌توان برای ورودی‌های متناوب به صورت یکتایی با $H(jw)$ بیان کرد؛ خروجی سیستم LTI به ورودی متناوب، سیگنالی است با همان دوره تناوب و ضرایب سری فوریه‌ی : $b_k = \underbrace{a_k}_{\text{ضریب سری فوریه‌ی ورودی}} H(jkw)$

$$① : H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|\tau|} e^{-jw\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{4\tau - jw\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-4\tau - jw\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{4-jw} e^{(4-jw)\tau} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-4-jw} e^{(-4-jw)\tau} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1-0}{4-jw} + \frac{0-1}{-4-jw} = \frac{1}{4-jw} + \frac{1}{4+jw} = \frac{8}{16+w^2}$$

← حالا کافی است ضرایب سری فوریه سیگنال‌های ورودی را به دست آوریم:

$$x_1(t) : a_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(t) e^{-jkw_0 t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) dt = 1$$

مقدار ضربه → $T=1$

$$\Rightarrow y_1(t) : b_k = \frac{8}{16 + (k\underbrace{w_0}_{2\pi})^2} = \frac{8}{16 + 4\pi^2 k^2}$$