سوال ۱-

1- $x_1(t) = e^{-2t} u(t)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t} \, \overset{1}{\cancel{u^2(t)}} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t} \, dt = \frac{e^{-4t}}{4} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

$$P_{avg\,\infty} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{E_\infty}{2T} = \lim_{T \to \infty} \frac{\frac{1}{4}}{2T} = 0$$

(چون E_∞ محدود شد، $P_{ave\,\infty} = 0$ بوده)

$$z = \alpha + j\beta$$
$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

2. $x_2(t) = e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}$

رابطه اویلر : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \Rightarrow x_2(t) = \cos(2t + \frac{\pi}{4}) + j\sin(2t + \frac{\pi}{4})$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2t + \frac{\pi}{4})^2 +$$

$$\sin(2t + \frac{\pi}{4})^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dt}{2T} = \lim_{T \to \infty} \frac{2T}{2T} = 1$$

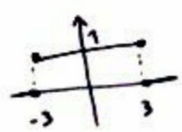
سؤال ۱ -

3. $x_3[n] = e^{j\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{j\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} \right|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} 1 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{-N}^{+N} 1}{2N+1} = 1$$

4. $x_4[n] = \sin[n]\, u[9 - n^2]$ $\qquad u[9-n^2]$:



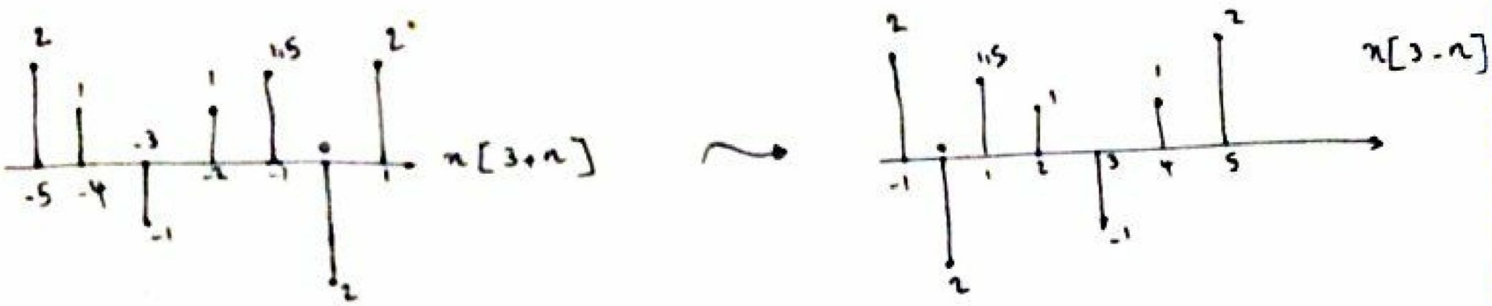
$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_4[n]|^2 = \sum_{-3}^{3} |\sin[n]|^2 = 2|\sin[3]|^2 + 2|\sin[2]|^2$$

$+ 2|\sin[1]|^2 =$ یک عدد محدود

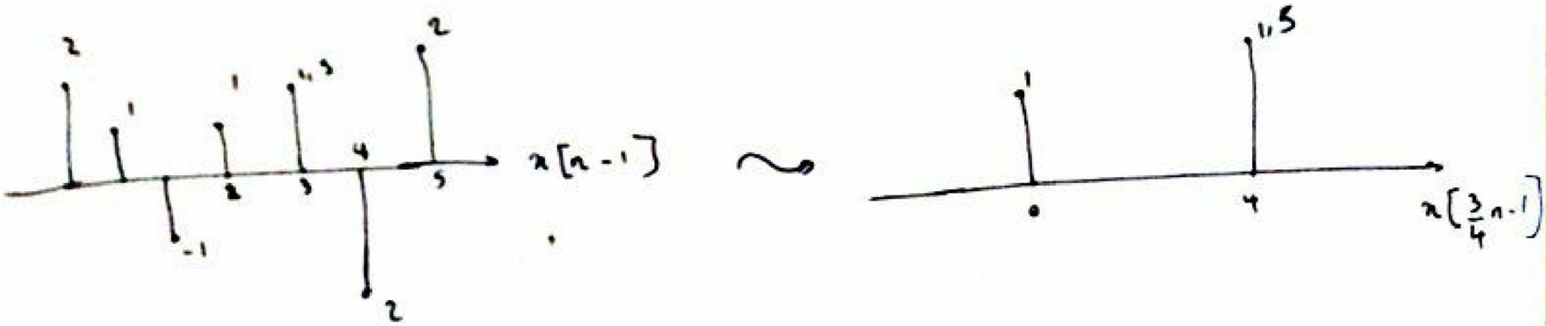
. چون E_∞ عدد محدودی شد، $P_{ave\,\infty} = 0$ است

سؤال 2 -

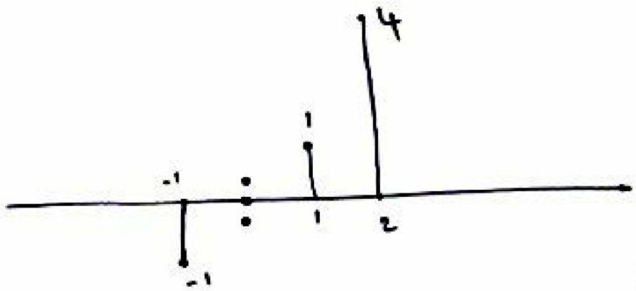
1. $x[3-n]$



2. $x\left[\frac{3}{4}n-1\right]$

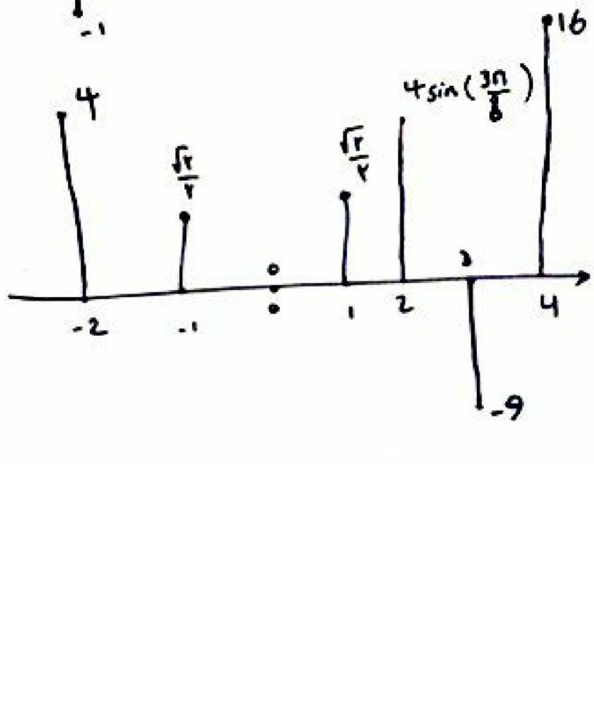


3. $n\,x[n^2]$



سؤال 2 -

4. $n^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\,x[n]\right)$



سوال ۳) الف) مجموع $x(t)+y(t)$ پریودیک است اگر اعداد صحیح n و k وجود داشته باشند به طوری که $nT_1 = kT_2$.
این بدین معناست که اگر $x(t)$ و $y(t)$ یک دوره تناوب مشترک (نه لزوما دوره تناوب اصلی)
دوره تناوب اصلی برای $x(t)+y(t)$ برابر است با nT_1 که n کوچک‌ترین مقدار ممکن است.

ب) به طور مشابه، $x[n]+y[n]$ متناوب است اگر اعداد صحیح n و k وجود داشته باشند به طوری که $nN_1 = kN_2$.
مشخص است که n و k همواره وجود دارند، یک جواب بدیهی بدین صورت است: $n=N_2$ و $k=N_1$
پس $x[n]+y[n]$ همواره متناوب است با دوره تناوب nN_1 و دوره تناوب اصلی آن زمانی است که n کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد.

ج)

$$x(t) = \cos\frac{2\pi t}{3} + 2\sin\frac{16\pi t}{3} = \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{2\pi t}{3}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{2\pi t}{3}\right)} + \frac{1}{j}e^{\left(\frac{16\pi t}{3}\right)} - \frac{1}{j}e^{-\left(\frac{16\pi t}{3}\right)}$$

$$y(t) = \sin \pi t = \frac{1}{2j}e^{j\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi t}$$

$$z(t) = x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{4j}e^{j\left(\frac{5\pi}{3}\right)t} - \frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{\pi}{3}\right)t} + \frac{1}{4j}e^{j\left(\frac{\pi}{3}\right)t} - \frac{1}{4j}e^{-j\left(\frac{5\pi}{3}\right)t} - \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{19\pi}{3}\right)t}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{13\pi}{3}\right)t} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{13\pi}{3}\right)t} - \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{19\pi}{3}\right)t} = \sum_k c_k e^{j\left(\frac{\pi}{3}\right)t}$$

$$z(t) = \sum_k c_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

سوال 4. به ورودی در لحظات دیگر وابسته است => حافظه دار

$y_1[n] = x[-n]$

علی نیست زیرا مثلاً $y[-2] = x[2]$ است و به آینده بستگی دارد.

پایدار است:

$$\text{if } |x[n]| < K \; ; \; \forall n \Rightarrow \exists M \text{ s.t } |\underbrace{x[-n]}_{y[n]}| < M \checkmark$$

تغییر پذیر با زمان است:

$$x_1[n] = x[n-n_0] \rightarrow y_1[n] = x_1[-n]$$

$$= x[-n-n_0] \neq y[n-n_0] = x[-n+n_0]$$

خطی است:

$$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow y_3[n]$$

$$y_3[n] = x_3[-n] = \alpha x_1[-n] + \beta x_2[-n] \stackrel{\checkmark}{=} \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

سوال 4.

2. $y_2(t) = \int_{t-2}^{t-1} x(\tau)\cos(\tau)\,d\tau$

- حافظه دار است و به ورودی در $t-2$ تا $t-1$ بستگی دارد.

- علّی است و به گذشته بستگی دارد.

- پایدار است

if $|x(t)| < M \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t-1} x(\tau)\cos(\tau)\,d\tau = M'$ محدود

- تغییرپذیر با زمان است.

$$x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = \int_{t-2}^{t-1} x_1(\tau)\cos(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{t-2}^{t-1} x(\tau-t_0)\cos(\tau)\,d\tau \neq y(t-t_0) = \int_{t-t_0-2}^{t-t_0-1} x(\tau)\,dt$$

- خطی است:

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow y_3(t)$$

$$y_3(t) = \int_{t-2}^{t-1} x_3(\tau)\cos(\tau)\,d\tau = \alpha \int_{t-2}^{t-1} x_1(\tau)\cos(\tau)\,d\tau$$

$$+ \beta \int_{t-2}^{t-1} x_2(\tau)\cos(\tau)\,d\tau \stackrel{\checkmark}{=} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

3. $y_3(t) = x(t)\,\text{Sin}(x(t))$

- حافظه دار نیست و به ورودی در t بستگی دارد.

- علّی است.

- پایدار است

$$\text{if } |x(t)| < M \longrightarrow y(t) = x(t)\,\text{Sin}(x(t)) \overset{\checkmark}{<} N$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t)\,\text{Sin}(x_1(t))$$

$$= x(t-t_0)\,\text{Sin}(x(t-t_0)) \overset{\checkmark}{=} y(t-t_0)$$

- خطی نیست

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t)$$

$$y_3(t) = x_3(t)\,\text{Sin}(x_3(t)) = \alpha x_1(t)\,\text{Sin}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))$$

$$+ \beta x_2(t)\,\text{Sin}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

4. $[n] = \cos(n+3)x[n]$

سوال ۴)

* بی‌حافظه است چون خروجی در لحظه‌ی n_0، فقط به ورودی در لحظه‌ی n_0 وابسته است.

* معکوس پذیر است و سیستم معکوس برابر است با $Z[n] = \dfrac{y[n]}{\cos(n+3)} = x[n]$

* علی است چون خروجی در لحظه n_0 به مقدار ورودی در n_0 وابسته است.

* پایدار است:
$$\text{if } |x[n]| < N \;;\; \forall t \Rightarrow |y[n]| = |\cos(n+3)\,x[n]| = |\cos(n+3)|\,|x[n]| < N$$

*
$$x_1[n] = x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n] = \cos(n+3)\,x_1[n] = \cos(n+3)\,x[n-n_0]$$
$$y[n-n_0] = \cos(n-n_0+3)\,x[n-n_0] \qquad \Rightarrow y_1[n] \; ? \; y[n-n_0]$$

تساوی همیشه برقرار نیست پس تغییر پذیر است با زمان.

* خطی است.

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$$
$$\longrightarrow \underbrace{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]}_{x_3[n]} \longrightarrow \underbrace{\alpha y_1[n] + \beta y_2[n]}_{y_3[n]}$$

$$y_3[n] = \cos(n+3)\,x_3[n] = \alpha \underbrace{\cos(n+3)\,x_1[n]}_{y_1[n]} + \beta \underbrace{\cos(n+3)\,x_2[n]}_{y_2[n]} \quad \checkmark$$

5. $y(t) = x(\frac{t}{3})$

* با حافظه است.

* معکوس پذیر است $\quad z(t) = y(3t) = x(t)$

* اگر $t>0$ باشد علّی است ، اگر $t<0$ باشد علّی نیست!

* پایدار است.

* تغییر پذیر با زمان $\quad x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = x_1(\frac{t}{3}) = x(\frac{t}{3} - t_0) \neq y(t-t_0) = x(\frac{t}{3} - \frac{t_0}{3})$

* خطی است $\quad y_3(t) = x_3(\frac{t}{3}) = \alpha x_1(\frac{t}{3}) + \beta x_2(\frac{t}{3}) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

6. $y(t) = Re\{x(t)\}$

* بی‌حافظه است . * معکوس ناپذیر ، چون با داشتن قسمت حقیقی یک عدد مختلط نمی‌توان آن را یافت . * علی است . * پایدار است .

* تغییر ناپذیر با زمان

$$x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = Re\{x_1(t)\} = Re\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$$

* خطی

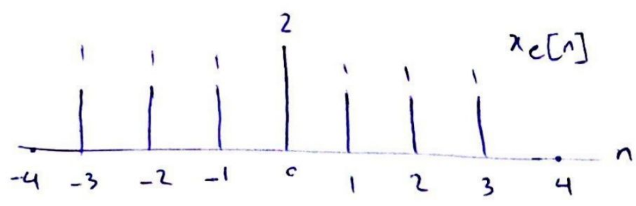
$$y_3(t) = Re\{x_3(t)\} = Re\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha \underbrace{Re\{x_1(t)\}}_{y_1(t)} + \beta \underbrace{Re\{x_2(t)\}}_{y_2(t)}$$

سوال ۵)

الف)

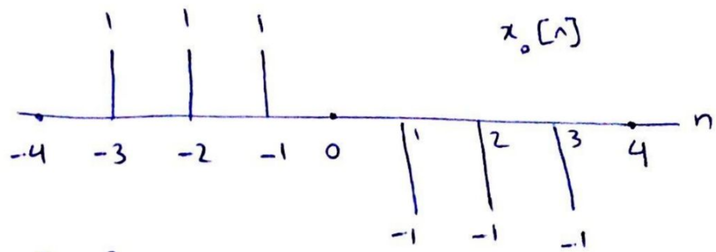
$$Ev\{x[n]\} = x_e[n] = y[n] \quad \text{for } n \geq 0$$

$$x_e[n] = x_e[-n] \Rightarrow$$

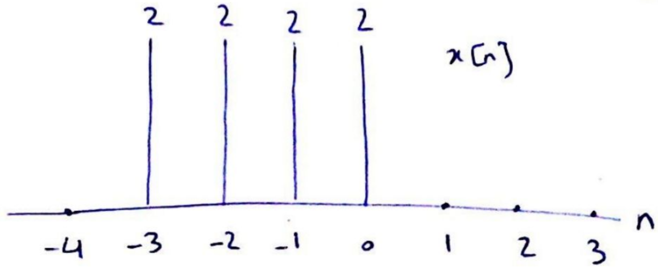


$$Od\{x[n]\} = x_o[n] = y[n] \quad \text{for } n < 0$$

$$x_o[n] = -x_o[-n] \quad \text{for } n < 0 \Rightarrow$$

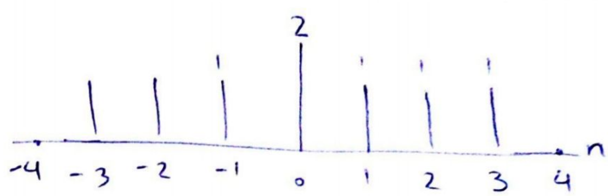


$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$



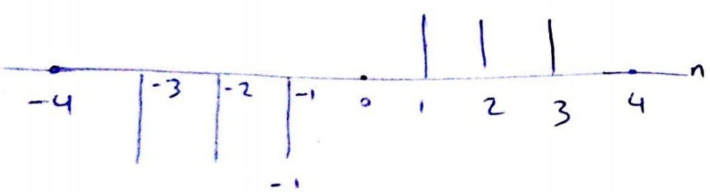
ب)

$Ev\{w[n]\} = w_e[n] = y[n]$ for all n

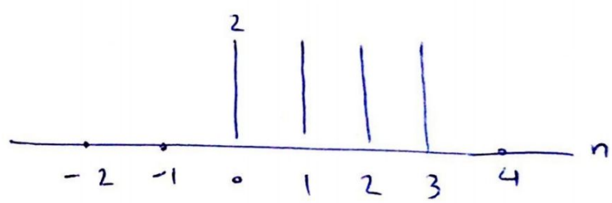


چون $n<0$ $w[n]=0$ پس $w_o[n]$ باید به شکل زیر باشد.

$w_o[n]$



$\Rightarrow$



سوال ۶) الف) فرض کنید $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = S$ ، تعریف می‌کنیم $m=-n$ ، پس داریم :

$$S=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m] = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] = -S \Rightarrow S=-S \Rightarrow \boxed{S=0}$$

ب) $$y[n] = x_1[n]\cdot x_2[n] \xrightarrow{n\to -n} y[-n] = x_1[-n]\cdot x_2[-n] \xrightarrow[x_2[-n]=x_2[n]]{x_1[-n]=-x_1[n]} y[-n] = -x_1[n]x_2[n]$$

$$\Rightarrow y[-n] = -y[n] \longrightarrow$$ پس $y[n]$ فرد است

ج) می‌دانیم $x[n] = x_e[n]+x_o[n]$

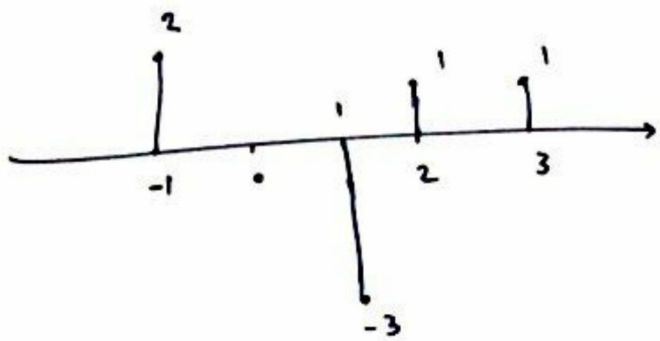
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e[n]+x_o[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \underbrace{2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x_e[n]x_o[n]}_{\text{تابع فرد}}}_{\text{صفر}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

سوال ۷-

$$x(t) = 2u(t+1) - 3u(t-1) + u(t-2) + u(t-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t+1) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$$



سوال ۸)

1) $x[n] = \sin(\frac{5\pi}{3}n) \longrightarrow \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5} \longrightarrow = 6$

2) $x(t) = \sin(\frac{5\pi}{3}t) \longrightarrow \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5} \longrightarrow T = \frac{6}{5}$

3) $x(t) = \sin(3t+2) - 3\cos(12t-6)$

$T_1 = \frac{2\pi}{3}$, $T_2 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow T = [T_1, T_2] = \frac{\text{ک.م.م صورت ها}}{\text{ب.م.م مخرج ها}} = \frac{2\pi}{3}$

4) $x[n] = e^{j(\frac{4\pi}{3}n)} + e^{j(\frac{3\pi}{4}n)}$ $\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2} \rightarrow N_1 = 3$ $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3} \rightarrow N_2 = 8$

$\Rightarrow N = 24$

5) $x[n] = e^{j\left(\frac{4n}{3}\right)} + e^{j\left(\frac{3}{4}n\right)}$

$\frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$ کسر گویا نیست $\rightarrow$ نامتناوب

$\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ 〃 〃

6) $x(t) = e^{j\left(\frac{4t}{3}\right)} + e^{j\left(\frac{3t}{4}\right)}$

$\frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2} = T_1 \quad , \quad \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3} = T_2 \qquad T = \frac{24\pi}{1} = 24\pi$

7) $x(t) = e^{j\left(\frac{4\pi t}{3}\right)} + e^{j\left(\frac{3}{4}t\right)}$

$\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2} = T_1 \quad , \quad \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3} \longrightarrow$ دوره تناوب ندارد