پاسخ تمرین ۶ سیگنال‌ها و سیستم‌ها

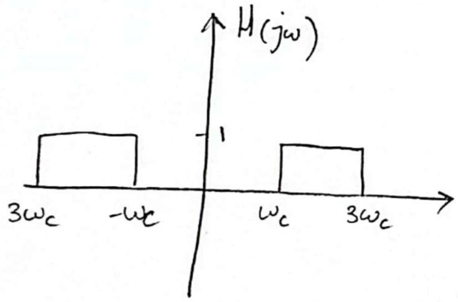
سوال ۱ -

فیلتر میان‌گذر پیوسته‌ـزمان ایده‌آلی را با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.

$$H(jw) = \begin{cases} 1, & \omega_c \le |\omega| \le 3\omega_c \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

آ) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه این فیلتر باشد، تابع $g(t)$ را طوری تعیین کنید که:

$$h(t) = \left(\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}\right) g(t)$$



الف)

از جمع دو پالس مربعی شیفت داده شده تشکیل شده است. پس:

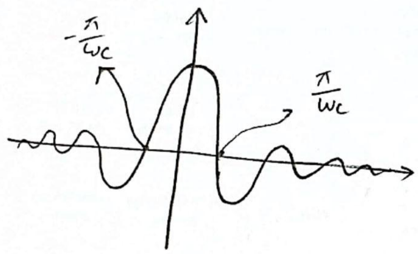
$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \overset{FT}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \times e^{j(2\omega_c)t} + \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \times e^{j(-2\omega_c)t} \overset{FT}{\Longleftrightarrow} H(j\omega)$$

$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \times \underbrace{\cos(2\omega_c t)}_{g(t)}$$

ب) با افزایش ω_c، پاسخ ضربه فیلتر نسبت به مبدا بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟

ب) شکل ضریب $g(t)$ در پاسخ ضربه به صورت زیر است.



همان طور که در شکل نیز نشان داده می‌شود، با افزایش ω_c مقدار $\frac{\pi}{\omega_c}$ کاهش پیدا می‌کند و نمودار فشرده‌تر می‌شود.

از طرفی چون $g(t)$ یک تابع متناوب بین -1 و 1 است پس $h(t)$ نیز با افزایش ω_c فشرده‌تر می‌شود.

سوال ۲-

آ) دنباله $x[n] = (-1)^n$ با نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته‌ـزمان سینوسی $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ در فاصله‌های ۱ میلی‌ثانیه‌ای بدست می‌آید. به عبارتی:

$$\cos(\omega_0 nT) = (-1)^n, \qquad T = 10^{-3}\ s$$

سه مقدار ممکن و متمایز برای ω_0 تعیین کنید.

If $\omega_0 = \pi \times 10^3$, then

$$\cos(\omega_0 n \times 10^{-3}) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

Similarly, for $\omega_0 = 3\pi \times 10^{-3}$ and $\omega_0 = 5\pi \times 10^{-3}$,

$$\cos(\omega_0 n \times 10^{-3}) = (-1)^n$$

ب) سیگنال $y(t)$ از کانولوشن دو سیگنال باند محدود[1] $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بدست می‌آید؛ یعنی:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

که در آن

$$X_1(j\omega) = 0 \quad for \ |\omega| > 1000\pi$$
$$X_2(j\omega) = 0 \quad for \ |\omega| > 2000\pi$$

با نمونه‌برداری با قطار ضربه روی $y(t)$ بدست می‌آوریم:

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)\delta(t-nT)$$

محدوده مقادیر را برای دوره نمونه برداری T مشخص کنید به طوری که تضمین شود $y(t)$ از $y_p(t)$ قابل بازیابی است.

با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه، بدست می‌آوریم:

$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\ X_2(e^{j\omega})$$

پس:

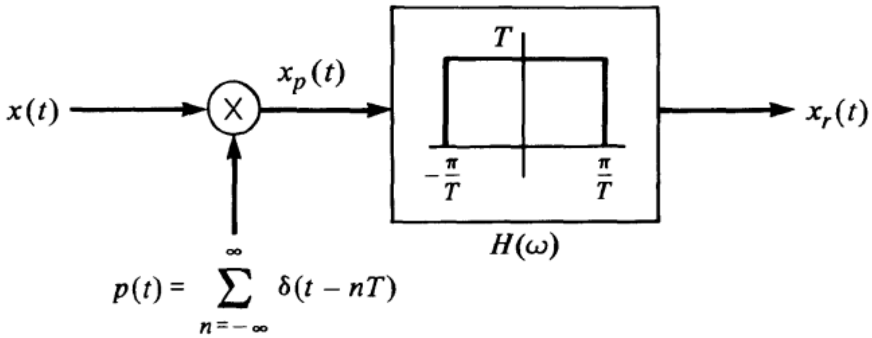
$$Y(e^{j\omega}) = 0 \text{ for } |\omega| > 1000\pi$$

در نتیجه نرخ نایکوئست برای $y(t)$ برابر با $2\times1000\pi = 2000\pi$ است. پس تناوب نمونه‌برداری حداکثر می‌تواند $2\pi/(2000\pi) = 10^{-3}\ s$ باشد؛ یعنی:

$$T < 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

سوال ۳-

در سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده است، سیگنال ورودی $x(t)$ با قطار ضربه متناوب نمونه‌برداری شده است و سیگنال بازسازی شده $x_r(t)$ توسط نمونه‌هایی از یک فیلتر پایین گذر بدست آمده است.



تناوب نمونه‌برداری T برابر با $1ms$ و $x(t)$ یک سیگنال سینوسی به شکل $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ است. برای هر یک از مقادیر f_0 و θ، سیگنال $x_r(t)$ را مشخص نمایید.

$a)\ \ f_0 = 250Hz,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

The signal $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$, where $\omega_0 = 2\pi f_0$, can be written as

$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t}$$

and the spectrum of $x(t)$ is given by

$$X(\omega) = \pi e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0)$$

The spectrum of $p(t)$ is given by

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Therefore, the spectrum of $x_p(t)$ is

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^2}{T}\right)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\theta}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T} - \omega_0\right) + e^{-j\theta}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T} + \omega_0\right)\right]$$

and the spectrum of $X_r(\omega)$ is given by

$$X_r(\omega) = H(\omega)X_p(\omega)$$

(a) $\quad \omega_0 = 2\pi \times 250, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad T = 10^{-3},$

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[e^{j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 250)$$
$$+ e^{-j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k + 2\pi \times 250)]$$

Hence, only the $k = 0$ term is passed by the filter:

$$X_r(\omega) = \pi[e^{j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 250) + e^{-j\theta}\delta(\omega + 2\pi \times 250)]$$

and

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{1}{2}e^{j\theta}e^{j2\pi\times 250t} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}e^{-j2\pi\times 250t} \\ &= \cos(2\pi \times 250t + \theta) \\ &= \cos\left(2\pi \times 250t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

b) $f_0 = 750Hz,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

(b) $\omega_0 = 2\pi \times 750$ Hz, $\quad T = 10^{-3}$,

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[e^{j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 750) + e^{-j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k + 2\pi \times 750)]$$

Only the $k = \pm 1$ term has nonzero contribution:

$$X_r(\omega) = \frac{\pi}{T}[e^{j\theta}\delta(\omega + 2\pi \times 250) + e^{-j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 250)]$$

Hence,

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \cos(2\pi \times 250t - \theta) \\ &= \cos\left(2\pi \times 250t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

c) $f_0 = 500Hz,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

(c) $\omega_0 = 2\pi \times 500, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad T = 10^{-3}$,

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[e^{j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 500) + e^{-j\theta}\delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k + 2\pi \times 500)]$$

Since $H(\omega) = 0$ at $\omega = 2\pi \times 500$, the output is zero: $x_r(t) = 0$.

سوال ۴-

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) + 4e^{3t}u(t)$$

آ) با محاسبه تبدیل فوریه این سیگنال، همگرایی یا عدم همگرایی تبدیل فوریه آن را بررسی کنید.

(a) The Fourier transform of the signal does not exist because of the presence of growing exponentials. In other words, $x(t)$ is not absolutely integrable.

ب) برای کدام یک از مقادیر σ زیر، تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ همگرا می‌شود؟

i) $\sigma = 1$

ii) $\sigma = 2.5$

iii) $\sigma = 3.5$

(b) (i) For the case $\sigma = 1$, we have that

$$x(t)e^{-\sigma t} = 3e^{t}u(t) + 4e^{2t}u(t)$$

Although the growth rate has been slowed, the Fourier transform still does not converge.

(ii) For the case $\sigma = 2.5$, we have that

$$x(t)e^{-\sigma t} = 3e^{-0.5t}u(t) + 4e^{0.5t}u(t)$$

The first term has now been sufficiently weighted that it decays to 0 as t goes to infinity. However, since the second term is still growing exponentially, the Fourier transform does not converge.

(iii) For the case $\sigma = 3.5$, we have that

$$x(t)e^{-\sigma t} = 3e^{-1.5t}u(t) + 4e^{-0.5t}u(t)$$

Both terms do decay as t goes to infinity, and the Fourier transform converges. We note that for any value of $\sigma > 3.0$, the signal $x(t)e^{-\sigma t}$ decays exponentially, and the Fourier transform converges.

پ) تبدیل لاپلاس $X(s)$ را برای $x(t)$ محاسبه کنید. نمودار ناحیه همگرایی آن را رسم و محل صفرها و قطب‌های آن را مشخص کنید.

(c) The Laplace transform of $x(t)$ is

$$X(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-3} = \frac{7(s-\frac{17}{7})}{(s-2)(s-3)},$$

and its pole-zero plot and ROC are as shown in Figure S20.1.

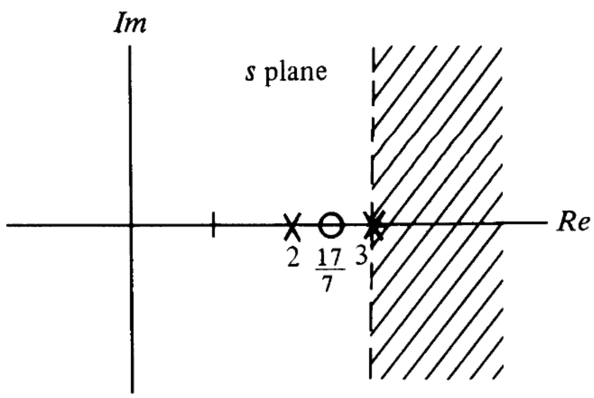


Figure S20.1

Note that if $\sigma > 3.0$, $s = \sigma + j\omega$ is in the region of convergence because, as we showed in part (b)(iii), the Fourier transform converges.

سوال ۵-

تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر_قطب را برای سیگنال‌های زیر تعیین کنید.

$a)$ $x(t) = (t-3)e^{-2t}u(t-3)$

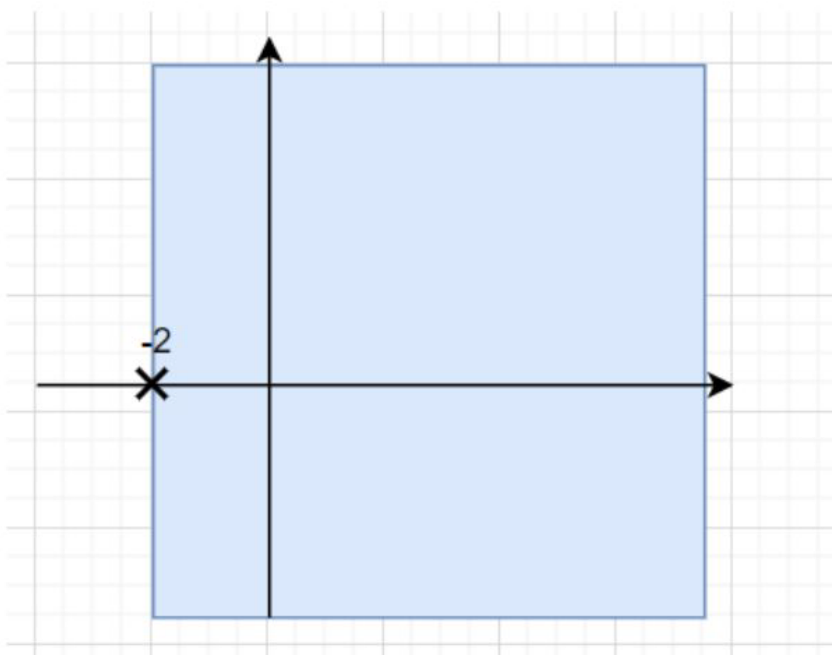
$$x(t) = (t-3)e^{-2t}u(t-3) = (t-3)e^{-2(t-3)}u(t-3)e^{-6}$$

$$y(t) = (t)e^{-2t}u(t)e^{-6}, z(t) = e^{-2t}u(t)e^{-6}$$

$$Z(s) = \frac{e^{-6}}{s+2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}\big(Z(s)\big) = \frac{e^{-6}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$X(s) = e^{-3s}Y(s) = \frac{e^{-6-3s}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$



درنقطه منفی دو، دو عدد قطب دارد، یک عدد هم صفر در بینهایت دارد،

$$b)\ x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{1} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}(e^{-st}]_1^0) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \text{RoC} = \mathbb{R}^2.$$

در نقطه صفر، هم صفر دارد و هم قطب که با هم خنثی می‌شوند.

$$c)\ x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT),\ a > 0$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, \delta(t - kT),$$

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-skT} = \frac{1}{1 - ae^{-sT}},$$

with ROC such that $|ae^{-sT}| < 1$. Now

$$a^2 e^{-2sT} < 1 \rightarrow 2 \log a - 2sT < 0 \rightarrow s > \frac{1}{T} \log a$$

سوال ۶-

سیگنال $x(t)$ هر یک از تبدیل لاپلاس‌های $X(s)$ زیر را بیابید.

$a)\ X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\ , \qquad Re\{s\} > -1$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Consider

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} \rightarrow y(t) = \cos(2t)u(t) \qquad \text{from part (c)}$$

Now

$$f(t)e^{-at} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} F(s+a),$$

so

$$x(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$$

$b)\ X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}\ , \qquad \text{for every possible ROC}$

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

$$A = \frac{(s-1)}{(s+3)(s^2+s+1)}|_{s=-2} = -1$$

$$B = \frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+s+1)}|_{s=-3} = \frac{4}{7}$$

$$s-1 = A(s+3)(s^2+s+1) + B(s+2)(s^2+s+1) + (Cs+D)(s+2)(s+3)$$

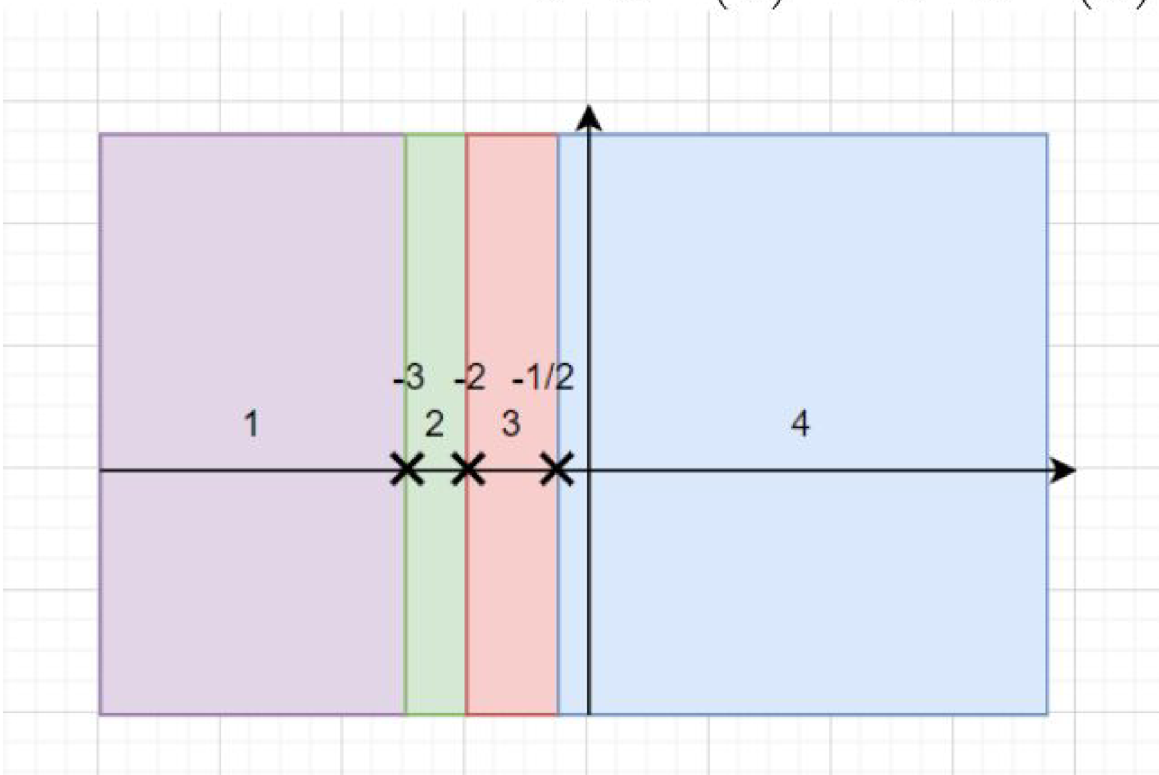
$$A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + (Cs+D)(s^2+5s+6)$$
$$= A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + Cs^3 + 5Cs^2 + Ds^2 + 5Ds + 6Cs + 6D$$

$$A+B+C = 0 \rightarrow C = -(A+B) = \frac{3}{7}$$

$$3A+2B+6D = -1 \rightarrow 6D = -1+3-\frac{8}{7} \rightarrow D = \frac{1}{7}$$

$$-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{\frac{3}{7}s+\frac{1}{7}}{s^2+s+1}=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{21}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$



$$1: x(t)=e^{-2t}u(-t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

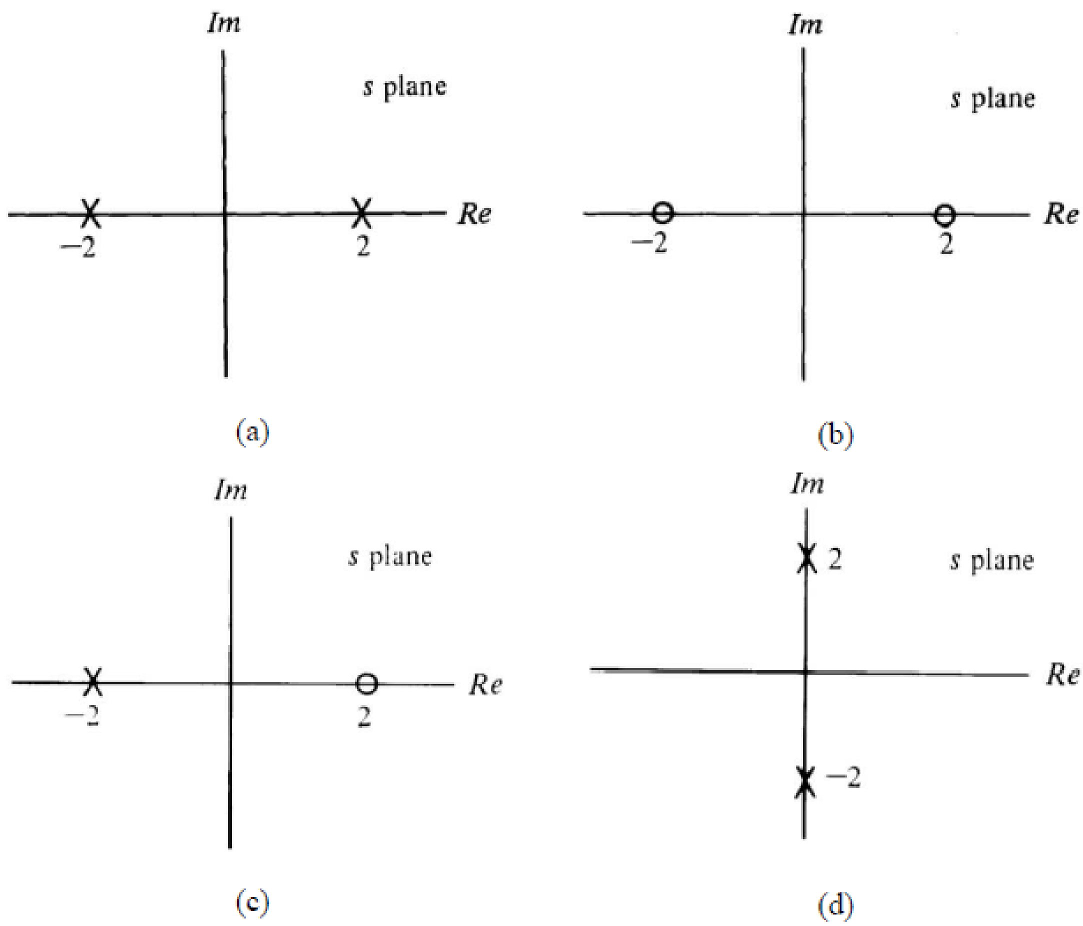
$$2: x(t)=-e^{-2t}u(t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

$$3: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

$$4: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)+\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

سوال ۷-

شکل‌های زیر، چهار نمودار صفر_قطب را نشان می‌دهند. در هر یک از موارد جدول برای سیگنال حوزه زمان $x(t)$، ناحیه همگرایی معادل آن را هاشور بزنید.



(d)	(c)	(b)	(a)	$x\left(t\right)$
				تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ همگرا شود.
				$x(t) = 0, \quad t > 10$
				$x(t) = 0, \quad t < 0$

(a) (i) Since the Fourier transform of $x(t)e^{-t}$ exists, $\sigma = 1$ must be in the ROC. Therefore only one possible ROC exists, shown in Figure S20.3-1.

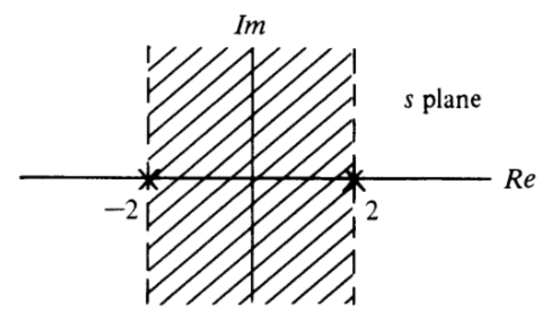


Figure S20.3-1

(ii) We are specifying a left-sided signal. The corresponding ROC is as given in Figure S20.3-2.

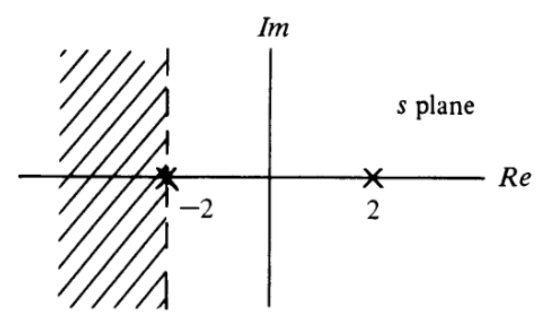


Figure S20.3-2

(iii) We are specifying a right-sided signal. The corresponding ROC is as given in Figure S20.3-3.

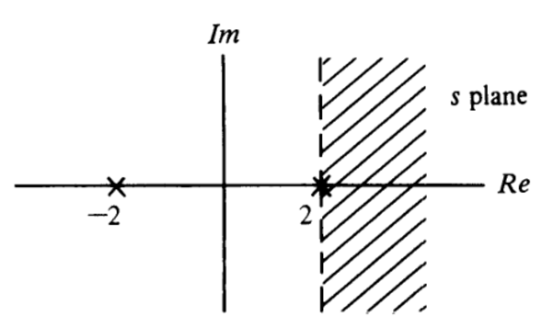


Figure S20.3-3

(b) Since there are no poles present, the ROC exists everywhere in the s plane.

(c) (i) $\sigma = 1$ must be in the ROC. Therefore, the only possible ROC is that shown in Figure S20.3-4.

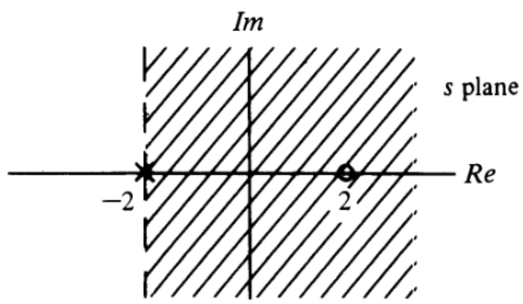


Figure S20.3-4

(ii) We are specifying a left-sided signal. The corresponding ROC is as shown in Figure S20.3-5.

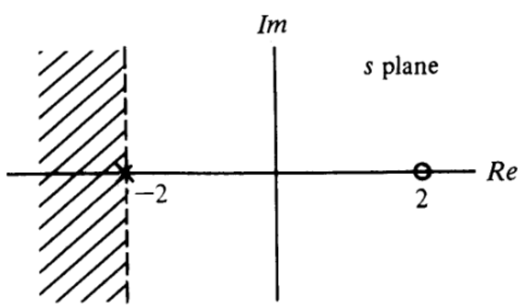


Figure S20.3-5

(iii) We are specifying a right-sided signal. The corresponding ROC is as given in Figure S20.3-6.

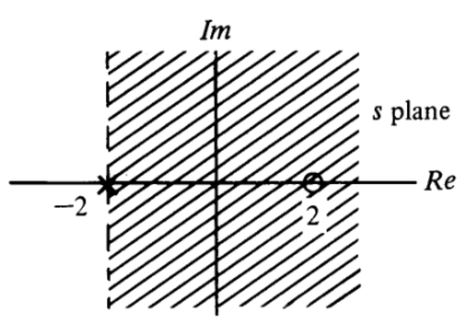


Figure S20.3-6

(d) (i) $\sigma = 1$ must be in the ROC. Therefore, the only possible ROC is as shown in Figure S20.3-7.

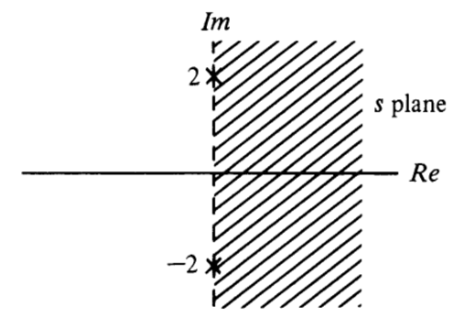


Figure S20.3-7

(ii) We are specifying a left-sided signal. The corresponding ROC is as shown in Figure S20.3-8.

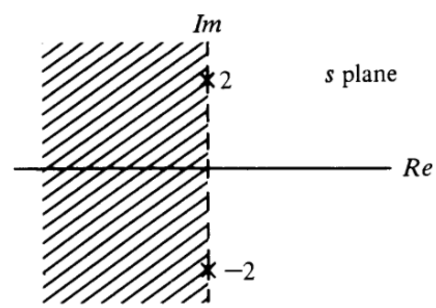


Figure S20.3-8

(iii) We are specifying a right-sided signal. The corresponding ROC is as shown in Figure S20.3-9.

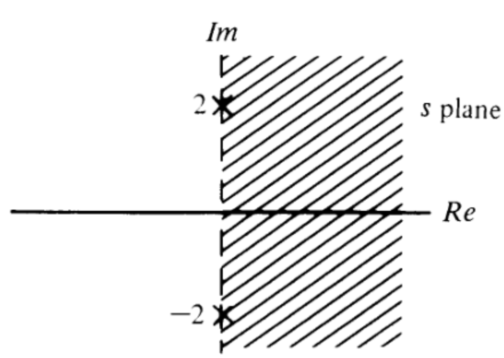


Figure S20.3-9

$x(t)$	Constraint on ROC for Pole-Zero Pattern (a)	(b)	(c)	(d)
(i) Fourier transform of $x(t)e^{-t}$ converges	$-2 < \sigma < 2$	Entire s plane	$\sigma > -2$	$\sigma > 0$
(ii) $x(t) = 0$, $t > 10$	$\sigma < -2$	Entire s plane	$\sigma < -2$	$\sigma < 0$
(iii) $x(t) = 0$, $t < 0$	$\sigma > 2$	Entire s plane	$\sigma > -2$	$\sigma > 0$

Table S20.3

سوال ۸-

یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیلی زیر توصیف می‌شود.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

آ) تابع سیستم این سیستم LTI را بدست آورید و نمودار صفر_قطب آن را رسم کنید.

ب) پاسخ ضربه این سیستم را در هر یک از شرایط زیر به دست آورید.

۱ - سیستم پایدار باشد.

۲ - سیستم علی باشد.

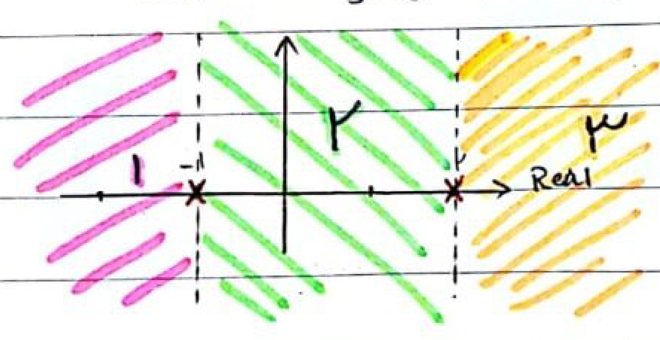
۳ - سیستم نه علی و نه پایدار باشد.

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - \frac{d}{dt} y(t) - 2y(t) = x(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

الف) $s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$



ب) $H(s) = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$ $\rightsquigarrow$ ROC

۱: سیستم LTI پایدار است $\longleftrightarrow$ ROC برای H(s)، شامل محور jω باشد

$\Rightarrow$ ناحیه دوم: $-1 < Real\{s\} < 2$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۲: ROC برای H(s) در یک سیستم علّی، سمت راستی است.

$\Rightarrow$ ناحیه سوم: $Real\{s\} > 2$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۳: ناحیه اول: $Real\{s\} < -1$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$

سوال ۹ (امتیازی)-

تبدیل-z دنباله زیر را محاسبه کنید. نمودار صفر-قطب آن را رسم کرده و ناحیه همگرایی را مشخص کنید. آیا تبدیل فوریه دنباله زیر موجود است؟

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|} = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{2})^{-n} u[-n-1]$. But

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \qquad |z| > \frac{1}{2},$$

and

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \frac{-z}{z-2}, \qquad |z| < 2$$

Summing the two z-transforms, we have

$$X(z) = \frac{-\frac{3}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(See Figure S22.12-2.) The Fourier transform exists.

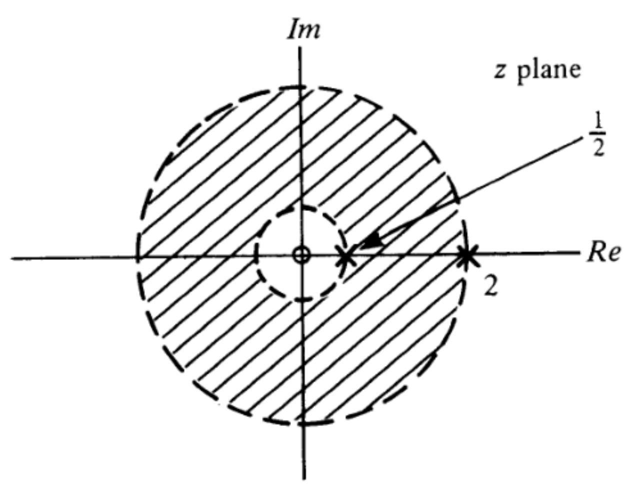


Figure S22.12-2