به نام خدا

جزوه معادلات دیفرانسیل کامل

- پیش نیاز: دانستن مفهوم دیفرانسیل و انتگرال

$d(\tan y) = (1+\tan^2 y)$ ~~غ~~ $\rightarrow$ ص: $(1+\tan^2 y)\,dy$

$\int x^2$ نامفهوم $\longrightarrow \int x^2\,dx$ مفهوم دارد

- بارم بندی نمره (۸ نمره میان ترم / ۱۱ نمره پایان ترم)، 2 نمره TA که زمانی به طور کامل داده می‌شود که از ۱۹ نمره امتحان حداقل ۸ نمره را کسب کنید

- کتاب مرجع: بویس * نشر دانشگاهی

نمونه معادله دیفرانسیل سقوط آزاد اجسام — فرض کنید جسمی به جرم m به فاصله y از سطح زمین قرار دارد و تحت تاثیر هیچ نیرویی جز نقل زمین قرار نگیرد داریم:

$\vec{F}=m\vec{a} \rightarrow mg = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dfrac{dy}{dt} = gt + c_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}} y=\frac{1}{2}gt^2+c_1 t+c_2$

یعنی به سرعت وابسته نیست

c_1: S_0 ، c_1: S_0 ، c_2: S_1 ، $\dfrac{dy}{dt}$: V

حالت دیگر: $mg - k\dfrac{dy}{dt} = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \rightarrow$ علاوه بر ثقل زمین تحت تاثیر هوا قرار میگیرد که با سرعت متناسب می باشد

$\dfrac{dy}{dt}$: V

- هر معادله مشتمل بر متغیر وابسته (تابع) و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گوییم. در اینجا y تابعی برحسب x می باشد و گاها برحسب t جلوی رویم...

قالب ریاضی: $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ یا $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$

تذکر: $y^{(n)} \neq y^n$

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \longrightarrow$ مشتق مرتبه nام

- بالاترین مشتق موجود در هر معادله دیفرانسیلی را مرتبه آن معادله دیفرانسیلی گویند.

Ex) $y' - 2xy = e^{x^2}$ مرتبه (۱)   Ex) $y''' - 2y'' = \sin x$ مرتبه (۳)

Ex) $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$ مرتبه (۲) $\longrightarrow$ معروف به معادله بسل $\rightarrow$ روش حل از سری ها

α: ثابت

Ex) $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ مرتبه (۲) $\rightarrow$ معروف به معادله لژاندر $\rightarrow$ روش حل در سری ها

اطلاعات بیشتر مربوط به ریاضی (۲) * چند متغیره برای مفهوم بیشتر

if $U(x,y)$: اگر U تابعی برحسب x و y باشد (متغیر مستقل، متغیر تابع)

$F\left(x, y, U, \dfrac{\delta U}{\delta x}, \dfrac{\delta U}{\delta y}, U_{xx}, U_{yy}, \dots\right)=0$

δ: مشتق (رُند)

Ex) $U_{xx}+U_{yy}=0$ مرتبه (۲) $\rightarrow$ یعنی: $\dfrac{\delta^2 U}{\delta x^2}+\dfrac{\delta^2 U}{\delta y^2}=0$

$d(U) = U_x\,dx + U_y\,dy$

U: تابعی برحسب x و y

Ex) $x^2+y^2=5 \rightarrow d=?$ دیفرانسیل : $2x\,dx+2y\,dy=\cancel{d(5)} \xrightarrow{\text{طرفین} \div dx} y'=\dfrac{-2x}{2y}=-\dfrac{x}{y}$

- بزرگترین توان طبیعی بالاترین مشتق موجود در هر معادله‌ی دیفرانسیلی را درجه‌ی آن معادله گوییم. باید بتوان به صورت چندجمله‌ای برحسب بالاترین مرتبه نوشت

Ex) $y=\sin y'$ → مرتبه (1) → همچنین در بسط مک‌لورن $\sin y'$ توان به صورت صعودی ادامه دارد: $y'-\frac{1}{3!}(y')^3+\frac{1}{5!}(y')^5-\dots$

اما فاقد درجه است

- همه‌ی معادلات دارای مرتبه هستند اما ممکن است فاقد درجه باشند.

- انواع معادلات دیفرانسیلی | خطی: که اکثراً خطی می‌باشند. که اگر
غیرخطی

شکل کلی معادله‌ی دیفرانسیلی: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$

- معادله‌ی دیفرانسیل خطی: به معادله‌ای که نسبت به y و مشتقات y، درجه‌اش یک باشد؛ به متغیر مستقل کاری نداریم

شکل کلی معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n ام: $f_0(x)y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\dots+f_n(x)y=g(x)$ → if $\begin{cases} g(x)\neq 0 \to \text{خطی غیرهمگن} \\ g(x)=0 \to \text{خطی همگن} \end{cases}$

$f_0(x)\neq 0$

Ex) $y=\sin y'$ غیرخطی مرتبه (1)

Ex) $y'=xy'^2+\sin x$ غیرخطی مرتبه (1)

- نرم استاندارد هر معادله‌ی خطی مرتبه n ام غیرهمگن به صورت مقابل می‌باشد:

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=g(x)$ → ضریب بالاترین مرتبه‌ی موجود را یک در نظر می‌گیریم

مرتبه‌ی n ام

- اگر $y=\varphi(x)$ را در معادله‌ی دیفرانسیل صدق کند به آن جواب معادله‌ی دیفرانسیل گویند.

Ex) نشان دهید که $y=e^x$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y''-2y'+y=0$ می‌باشد؛ یا معادله‌ی $y'-y=0$

$y=e^x,\ y'=e^x,\ y''=e^x$: $e^x-2e^x+e^x=0 \to 0=0$ → در معادله صدق کرد

if $y=\cosh x,\ y'=\sinh x,\ y''=\cosh x$ → در معادله صدق نمی‌کند

$y=2e^x$ → باز هم صدق می‌کند → که → به طور کلی: $y=ce^x$ جواب عمومی

- معادله‌ی مرتبه‌ی اول به فرم $y'=F(x,y)$ یا $f(x,y,y')=0$ می‌باشد. هر دسته منحنی $\varphi(x,y,c)=0$ دارای c عددی ثابت است اگر در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول صدق کند به آن جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیلی گوییم.

Ex) نشان دهید که $y=ce^x$ جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیلی $y'-y=0$ است؛

$y'=ce^x \to y'-y=ce^x-ce^x=0$ ✓

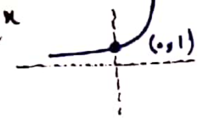
اگر به x مقدار بدهیم و y را بدست آوریم یک جواب خصوصی بدست می‌آید

- جواب خصوصی در معادله‌ی مرتبه‌ی اول: جوابی است که به ازای c های معین از جواب عمومی آن بدست می‌آید و این زمانی رخ می‌دهد که در شرط اولیه نیز صدق کند:

$y(x_0)=y_0$ یا $y_{(x=x_0)}=y_0$

عدد عدد

Ex) جواب خصوصی مثال قبل را با شرط اولیه $y(0)=1$ بیابید:



$x=0 \rightarrow y=1 \rightarrow 1=ce^{0} \rightarrow c=1 \rightarrow y=e^{x}$

— معادله مرتبه دوم به فرم $y''=F(x,y,y')$ یا $f(x,y,y',y'')=0$ می‌باشد. (دارای دو مقدار ثابت)

بی‌شمار جواب ← دارای ثابت

جایگزین
$y' \rightarrow c_1$
$y'' \rightarrow c_2$

فرض کنید
$y_1=\cos x$
$y_2=\sin x$
$\longrightarrow$ معادله: $y''+y=0 \longrightarrow$ هر دو در معادله صدق می‌کنند $\longrightarrow$ مجموع آنها نیز صدق می‌کند $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

جواب عمومی کلی

$y(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y'_0$

Ex) $x^2y'''(y'')^{\frac{3}{4}}+e^{4x}\sin y'=y^3+x(y')^5 \rightarrow$ فاقد درجه $\rightarrow$ سطح یک لوین

Ex) $y''^{3}+x(y')^{\frac{3}{2}}+y\sin y'=7x^2+1 \rightarrow$ فاقد درجه

نکته پایان جلسه اول

Ex) $y''+y'^{2}-(xy'')^{\frac{3}{4}}=0 \rightarrow (xy'')^{\frac{3}{4}}=(y''+y'^{2}) \xrightarrow[\text{رسانده}]{\text{به توان ۴}}$ از مرتبه (۲) درجه (۴) غیرخطی می‌باشد

نکته: بر حسب توان‌های طبیعی آن باید مقدار داشته باشیم

تعریف: $y=f(x)$ جواب معادله مرتبه اول می‌باشد که از روی جواب عمومی آن بدست نمی‌آید به آن جواب ویژه یا غیرعادی می‌گوییم.

همان پوش منحنی‌ها = دسته منحنی‌های مماس بر منحنی‌ها

$f(x,y,y')=0 \leftarrow$ فرم کلی معادله مرتبه اول

$\phi(x,y,c)=0 \leftarrow$ جواب آن

— برای بدست آوردن جواب ویژه از دسته منحنی یک پارامتری (یک ثابت دلخواه): یکبار نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم و سپس بین معادلات موجود پارامتر را در صورت امکان حذف می‌کنیم. معادلات خطی جواب ویژه ندارند، غیرخطی‌ها جواب ویژه دارند.

Ex) با فرض $y=cx+c^2$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد، جواب ویژه یا غیرعادی را بیابید.

همان پوش منحنی = دسته منحنی‌های مماس بر منحنی‌ها

$$\begin{cases} 0=x+2c \rightarrow -\frac{x}{2}=c \\ y=cx+c^2 \end{cases} \rightarrow y=x\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y=-\frac{x^2}{4}$$

— روش جداسازی یا تفکیک پذیر: تذکر: زمانی به انتگرال می‌توانید در عبارت دیفرانسیل هر متغیری که تابعی برحسب همان متغیر باشد داشته باشیم.

فرم مشتق معادله مرتبه اول

$y'=f(x,y)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$ فرم دیفرانسیلی هر معادله مرتبه اول $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \xrightarrow[\text{مقابل می‌توان نوشت}]{\text{به فرم}} H_1(x)dx+H_2(y)dy=0 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}}$

تابعی برحسب فقط y — تابعی برحسب فقط x باشد

$\int H_1(x)dx+\int H_2(y)dy=\int 0 \longrightarrow h_1(x)+h_2(y)=c$ (نامعینه)

Ex) معادله دیفرانسیلی زیر را حل کنید (از معادله دیفرانسیل زیر انتگرال بگیرید = جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید)

$y'-y=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=y \rightarrow \frac{dy}{y}=dx \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int dx \rightarrow \ln|y|=x+c_1 \rightarrow y=\pm e^{(x+c_1)}=\pm e^{c_1}e^{x}$

c می‌نویسیم

$\ln y=x+c_1 \rightarrow \ln y=x+\ln c \rightarrow \ln y-\ln c=x \rightarrow \ln\frac{y}{c}=x \rightarrow \frac{y}{c}=e^{x} \rightarrow y=ce^{x}$

$\ln c$ سهولت کار

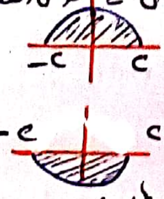
Ex) $y' = -\frac{x}{y}$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \to y\,dy + x\,dx = 0 \to \int y\,dy + \int x\,dx = \int 0 \to \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_1$

$y^2 + x^2 = 2c_1 \to y^2 = c^2 - x^2 \to y = \pm\sqrt{c^2 - x^2} \to \begin{cases} y = \varphi_1(x) = \sqrt{c^2-x^2} \\ y = \varphi_2(x) = -\sqrt{c^2-x^2} \end{cases}$

فرض c^2 باشد

باید همواره + باشد

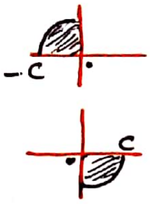
بالای دایره را می‌دهد



پایین دایره را می‌دهد

$$\left[\ \text{if}\ \ y = \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{c^2-x^2} & -c \le x \le 0 \\ -\sqrt{c^2-x^2} & 0 < x \le c \end{cases}\ \right]$$

فرض می‌کنیم



پس با توجه به شرط اولیه‌ای که در سؤال به ما می‌دهد به دنبال جواب می‌گردیم که باید آن را برحسب x به دست آوردیم

Ex) $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$: با شرط اولیه $y(0)=3,\ y \neq 1$ $\to \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \to 2(y-1)\,dy = (3x^2+4x+2)\,dx \to$

$\int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dx \to y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c \to y(0)=3 \to c=3$

طرف c $2x$

ساده‌سازی $\to (y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \to y = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \to$ با توجه به شرط اولیه در سؤال

غ ق ق

$\ominus$ غ ق ق است چون باید $y(0)=3$

Ex) $y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2} \to \int \left(\frac{1+2y^2}{y}\right) dy = \int (\cos x)\,dx \to \ln|y| + y^2 = \sin x + c$ جواب عمومی

if $y(0)=1 \to c=1 \to (\ln|y| + y^2 = \sin x + 1)$ جواب خصوصی در آن مسئله

به صورت جمع باشد

Ex) $y' = \sin(x+y) \to$ تغییر متغیر داره $\to x+y=z$ فرض $\to$ از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم $\to 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

غ ق تفکیک‌پذیر است

$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 = \sin z \to \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z \to \frac{dz}{1+\sin z} = dx \to \int \frac{dz}{1+\sin z} = \int dx$

در مزدوجش ضرب کرده

$\int \frac{(1-\sin z)\,dz}{(1+\sin z)(1-\sin z)} = \int dx \to \int (\sec^2 z - \tan z \sec z)\,dz = \int dx$

Ex) $y' = \sin(x+y)^3 \to$ با همین روش حل می‌شه $\to (x+y) = z \to$ از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم $\to \dots$

به طور کلی معادله دیفرانسیل $y' = f(ax+by+c)$ که در آن a و b و c اعداد ثابتی هستند با استفاده از تغییر متغیر $ax+by+c=z$ به معادله جدایی‌پذیر تبدیل می‌کنند $\leftarrow y' = f(z)$

$f(x,y) = g_1(x)\cdot g_2(y)$, $g_2(y) \neq 0$ $\to \frac{dy}{dx} = g_1(x)\cdot g_2(y) \to \int \frac{dy}{g_2(y)} = \int g_1(x)\,dx$

معادله همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n ام گوئیم اگر برای هر λ حقیقی داشته باشیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y)$$

$n \to$ هر عددی می‌تواند باشد

Ex) درجه همگن توابع زیر را مشخص کنید.

$$f(x,y)=\frac{y^2+2xy}{x^2} \Rightarrow y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2y^2+2\lambda^2xy}{\lambda^2x^2}=\frac{\cancel{\lambda^2}(y^2+2xy)}{\cancel{\lambda^2}x^2}=1\,\frac{y^2+2xy}{x^2}$$ → همگن از درجه صفر : $\lambda^0=1$

if y^3+2xy درصورت بود → غیر همگن → از λ خاصی نمی‌توان فاکتور گرفت

Ex) $f(x,y)=\cancel{\ln x-\ln y}=\ln\frac{x}{y}$ → همگن از درجه صفر

Ex) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-5x^2y}$ → همگن از درجه (1)

تعریف) معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را همگن گوئیم اگر $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد.

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را همگن گوئیم اگر توابع M و N همگن هم درجه باشند.

تمرین) نشان دهید معادله دیفرانسیل همگن را می‌توان به صورت $y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ نوشت.

نقش تغییر متغیر دارد

راه حل معادله همگن: هر معادله همگن با استفاده از تغییر متغیر $\frac{y}{x}=v$ یا $y=xv$ به معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

$$y'=v+x\frac{dv}{dx}=\phi(v)\to x\frac{dv}{dx}=\phi(v)-v \xrightarrow[x\,dx]{\div x(\phi(v)-v)\neq 0} \frac{dv}{\phi(v)-v}=\frac{dx}{x}$$ → انتگرال می‌گیریم

$$\int\frac{dv}{\phi(v)-v}=\int\frac{dx}{x}$$ → پس از حل انتگرال فوق باید به جای v ها $\frac{y}{x}$ را قرار دهیم →

باید به این عامل در حل‌ها برسیم

این روش همگن بود

Ex) معادله زیر را حل کنید.

$$(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0$$

$$\xrightarrow{\div(1+x^2)(1+y^2)}\int\frac{1}{1+y^2}dy+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int 0\to\tan^{-1}y+\tan^{-1}x=\tan^{-1}c$$ از طرفین tan می‌گیریم با توجه به اینکه → $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

$$\frac{y+x}{1-xy}=c\to y+x=c-cxy\to y(1+cx)=c-x\to y=\frac{c-x}{1+cx}\to$$ if $y(0)=1$ فرض کنیم

آنگاه $1=\frac{c-0}{1+0}\to c=1\to$ جواب خصوصی $y=\frac{1-x}{1+x}$

Ex) حل معادله $y'=\frac{y-x}{y+x}$ را بررسی کنید. به راحتی تفکیک پذیر نیست ← معادله همگن از درجه صفر ← تغییر متغیر $v=\frac{y}{x}$ استفاده و جواب باید عامل را در جواب داشته باشیم.

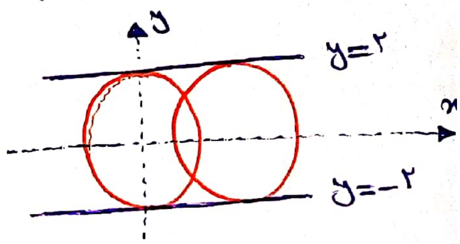
$$y=xv \rightarrow y'=v+x\frac{dv}{dx}=\frac{xv-x}{xv+x} \rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1}-v \rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2-1}{v+1} \rightarrow$$ جدایی پذیر

$$\int\frac{v+1}{v^2+1}dv=\int-\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{v}{v^2+1}dv+\int\frac{1}{v^2+1}dv=-\int\frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{2}\ln(v^2+1)+\tan^{-1}v=-\ln x+c$$

$$\ln x\sqrt{v^2+1}+\tan^{-1}v=c \rightarrow \ln\sqrt{y^2+x^2}+\tan^{-1}\frac{y}{x}=c$$

Ex) اگر $y^2+(x-c)^2=4$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اولی باشد، جواب ویژه آن را در صورت امکان بیابید؟

$$\begin{cases} -2(x-c)=0 \rightarrow x-c=0 \rightarrow x=c \\ (x-c)^2+y^2=4 \end{cases} \rightarrow y^2=4 \rightarrow y=\pm 2$$



هرکدام از این دو دوایر جواب هستند اما خطوط $y=\pm 2$ جواب ویژه اند

Ex) معادله زیر را حل کنید.

$$(2xy)dy+(x^2-y^2)dx=0$$

معادله جدایی پذیر نیست ولی ← معادله همگن (هم درجه M و N) ← پس قرار می دهیم $\frac{y}{x}=v$ و داریم:

$$y=xv \rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \rightarrow dy=x\,dv+v\,dx \rightarrow 2\cancel{x}(\cancel{x}v)(x\,dv+v\,dx)+(\cancel{x^2}-\cancel{x^2}v^2)dx=0 \rightarrow$$

$$2xv\,dv+(1+v^2)dx=0 \xrightarrow{\div x(1+v^2)} \int\frac{2v}{1+v^2}dv+\int\frac{dx}{x}=\int 0 \rightarrow \ln(1+v^2)+\ln x=\ln c \rightarrow$$

$$\ln(x+xv^2)=\ln c \rightarrow \ln\left(x+x\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\ln c \rightarrow x^2+y^2=cx$$

Ex) با استفاده از تغییر متغیر مناسب، معادله زیر را به معادله همگن تبدیل نموده و سپس حل کنید.

وجود c_1 و c_2 غیر همگن می کند معادله را

$$y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$
$a_1x+b_1y+c_1$ → خط L_1
$a_2x+b_2y+c_2$ → خط L_2

(اعداد ثابت اند: $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$)

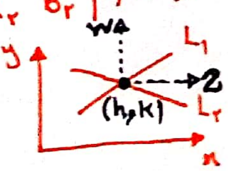
$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$: به نام غیر همگن

صورت و مخرج هر دو بیان کننده یک خط راست هستند و دو خط در صفحه ← موازی یا متقاطع ← برای حل پس دو حالت خواهیم داشت:

حالت اول: متقاطع دو خط ← دترمینان ضرایب مخالف صفر

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

باید c ها از بین بروند پس مبدأ را به تقاطع دو خط می آوریم



برای حل معادله قرار می دهیم $Z=x-h$ ، $W=y-k$ که در آن (h,k) محل برخورد ۲ خط راست می باشد.

$$W+k=y \qquad h+Z=x$$

$$y' = \frac{dw}{dz} = \frac{a_1(z+h)+b_1(w+k)+c_1}{a_2(z+h)+b_2(w+k)+c_2} \to y' = \frac{a_1 z + b_1 w + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 z + b_2 w + (a_2 h + b_2 k + c_2)}$$

معادله غیر همگن

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{cases}$$

برای اینکه معادله‌ی اخیر، معادله همگن تبدیل شود باید قرار دهیم:

چون طبق فرض $\Delta \neq 0$ است از حل دستگاه فوق جواب منحصر به فردی برای (h,k) بدست می‌آوریم بنابراین معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a_1 z + b_1 w}{a_2 z + b_2 w}$$

معادله همگن در متغیرهای جدید

این معادله همگن و برای حل آن $\frac{w}{z} = v$ • پس از حل معادله اخیر به جای v مقدار $\frac{w}{z}$ و به جای w مقدار آن یعنی $y-k$ و برای z مقدار $x-h$ را قرار می‌دهیم.

حالت دوم) با فرض $\Delta = 0$: یعنی ۲ خط موازی‌اند پس $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ و داریم: $a_1 = \lambda a_2$ ، $b_1 = \lambda b_2$

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \to y' = \frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{(a_2 x + b_2 y) + c_2} \to$$

با قرار دادن $t = a_2 x + b_2 y$ معادله فوق مستقیماً (بدون تبدیل به همگن) به معادله جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود.

Ex) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \to y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \xrightarrow[\frac{y}{x}=v]{\text{معادله همگن}} y' = v + x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v \to x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

$$\int \frac{dv}{v^2+v} = \int \frac{dx}{x} \to \int \frac{A}{v}dv + \int \frac{B\,dv}{v+1} = \int \frac{dx}{x} \to \ln v - \ln(v+1) = \ln x + \ln c \to$$

$A = 1$ ، $B = -1$

$$\ln\frac{v}{v+1} = \ln cx \to \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = cx \to \frac{y}{y+x} = cx \to y = cxy + cx^2 \to y = \frac{cx^2}{1-cx}$$

مشتق نسبت به x از طرفین

Ex) $y' = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$ ، $2(x+y)$ → ۲ خط موازی‌اند $\Delta = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$\to x+y = t \to 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \to \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{t+1}{2t+3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t+1}{2t+3} + 1 = \frac{3t+4}{2t+3} \to \int \frac{2t+3}{3t+4}dt = \int dx \to$$

* پس از حل انتگرال به جای مقدار t مقدار $x+y$ را جایگزین می‌کنیم

Ex) $y' = \dfrac{2y+5-x}{2x-y-4}$: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

۲ خط متقاطع می‌باشند

$$\to \begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases} \to y' = \frac{2Y - X + (2k - h + 5)}{2X - Y + (2h - k - 4)}$$

باید صفر شود

$h = 1$ ، $k = -2$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y - X}{2X - Y} \xrightarrow{\text{معادله همگن}} \frac{Y}{X} = v \to \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} = \frac{2\cancel{X}v - \cancel{X}}{2\cancel{X} - \cancel{X}v} \to$$

$Xv = Y$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{2v-1}{2-v} - v = \frac{v^2-1}{2-v} \to \int \frac{2-v}{v^2-1}dv = \int \frac{dX}{X} \to v = \frac{Y}{X} = \frac{y+2}{x-1}$$

در آخر حل باید به جای ... قرار داد

Scanned by CamScanner

Ex) با استفاده از تغییر متغیر $y=z^{\alpha}$ معادله روبرو را حل کنید:

$$(y^4-3x^2)\,dy + xy\,dx = 0$$

$$dy=\alpha z^{\alpha-1}dz \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (z^{4\alpha}-3x^2)(\alpha z^{\alpha-1}dz)+xz^{\alpha}dx=0 \longrightarrow \text{ضرب پرانتزها}$$

$$(\alpha z^{5\alpha-1} - 3\alpha x^2 z^{\alpha-1})\,dz + x^1 z^{\alpha}\,dx = 0 \longrightarrow \overset{\text{هم درجه باشند}}{5\alpha-1=\alpha+1} \longrightarrow \text{جایگذاری و } \times 2z^{\frac12}$$

$(5\alpha-1)$ $(\alpha+1)$ $(\alpha+1)$ درجه = مساوی درجات کل عبارت همگن x,y,z $\qquad \alpha=\frac12$

$$\left(\frac12 z^{\frac32} - \frac32 x^2 z^{-\frac12}\right)dz + xz^{\frac12}dx = 0 \longrightarrow (z^2-3x^2)\,dz + 2xz\,dx = 0 \xrightarrow{\text{معادله همگن شده}} \frac{z}{x}=v \;....$$

در آخر $z=y^2$

تمرین) معادلات زیر را حل کنید.

* $y' - \tan\left(\frac{y-2x}{x+1}\right) - \frac{y+2}{x+1}=0$ تغییر متغیر u
* $y(1+\sqrt{x^2y^4+1})\,dx+2x\,dy=0 \;:\; y=z^{\alpha}$

Ex) $2xy\,dx + (x^2-1)\,dy=0 \longrightarrow$ معادله جدایی‌پذیر $\longrightarrow$ به روش دیگر حل شود

معادله دیفرانسیل کامل:

$y=f(x) \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dy=f'(x)\,dx$ غیر همگن

$z=f(x,y) \longrightarrow dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \longrightarrow f(x,y)=\underset{\text{ثابت}}{C} \xrightarrow{\text{مشتق}} \underset{M(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}}dx+\underset{N(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}}dy=0$

z که تابع دو متغیر باشد

باید در معادله صدق کند

حالا $f=?$

شرط لازم و کافی برای اینکه معادله $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ در ناحیه‌ای مانند D کامل باشد آن است که $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (M_y ، N_x) می‌دانیم M و N در D پیوسته هستند. شرط لازم معادله کامل:

$$M\,dx+N\,dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \Longrightarrow \text{شرط}\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=M\\[4pt] \frac{\partial f}{\partial y}=N\end{cases} \quad (1)$$

$M_y=2x$ ، $N_x=2x$ ● معادله بالا کامل

از طرفین اولین شرط ردیف (1) نسبت به y و دومین شرط ردیف (1) نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

می‌دانیم $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ پس نتیجه می‌گیریم که $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (لازم) . شرط کفایت: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ تابعی مانند $f(x,y)$ وجود

لا باید چنان f بدست آوریم که داشته باشیم: $M\,dx+N\,dy=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$ ، ...

چنین تابعی نیز باید در (1) صدق کند $\left(\frac{\partial f}{\partial x}=M \ \text{و}\ \frac{\partial f}{\partial y}=N\right)$ به فرض $(x_0,y_0)\in D$ (ناحیه پیوستگی) طرفین اولین تساوی (1) را در dx ضرب می‌کنیم و سپس از x_0 تا x انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int_{x_0}^{x}M\,dx \longrightarrow \Big[f(x,y)\Big]\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}M\,dx \longrightarrow f(x,y)-f(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}M\,dx \longrightarrow$$

x_0 ، y مقداری ثابت — x_0 مقداری — تابعی بر حسب y می‌باشد

مجهول

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M\,dx+\phi(y) \qquad (2) \longrightarrow$$

از طرفین رابطه (2) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(\int_{x_0}^{x}M\,dx\right)}{\partial y}+\frac{\partial(\phi(y))}{\partial y}\longrightarrow$$

* وقتی که انتگرال نسبت به یک متغیر می‌گیریم (رابطه) عدد ثابت چون بر حسب متغیر دیگری است

انتگرال نسبت به x ، مشتق نسبت به y — می‌توانم داخل ببرم

(x نسبت به x ← عدد ثابت بر حسب y) $\frac{\partial N}{\partial x}$ =

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\phi'(y)\longrightarrow \cancel{N(x,y)}=\cancel{N(x,y)}-N(x_0,y)+\phi'(y)\longrightarrow$$

$$\phi'(y)=N(x_0,y)\longrightarrow \phi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy \qquad (3)\longrightarrow$$

تابعی بر حسب y چون x_0 مقداری ثابت است

رابطه

با قرار دادن رابطه (3) در رابطه (2) این تست قضیه نیز اثبات می‌شود

نتیجه

$$\boxed{f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy}\longrightarrow \text{if } df=0:\ f(x,y)=c$$

در معادله صدق می‌کند

پایان جلسه سوم

برای شروع حل مسائل : $f(x,y)=\int M\,dx+\phi(y)$ ⟵ مشتق نسبت به y ⟵ $\phi'(y)$: تابعی بر حسب y بدست می‌آید ⟵ $\int$ نسبت به y (معرفی)

x در این مرحله نباید وجود داشته باشد

یا $f(x,y)=\int N\,dy+\phi(x)$?

Ex) $\underbrace{2xy}_{M}\,dx+\underbrace{(x^2-1)}_{N}\,dy=0$

معادله زیر را حل کنید غیر از روش جدایی پذیر هم ($\div\ (x^2-1)y$ می‌کنید)

روش (1)

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}$: معادله دیفرانسیل کامل است $\longrightarrow f(x,y)=\int M\,dx+\phi(y)\longrightarrow f=\int 2xy\,dx+\phi(y)$ (y مقداری ثابت)

$f=x^2y+\phi(y)\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\phi'(y)\longrightarrow \cancel{x^2}-1=\cancel{x^2}+\phi'(y)\xrightarrow{\int \text{ نسبت به } y}\phi(y)=-y+c_1$

$f=x^2y-y+c_1\longrightarrow df=0:\ f=c_2$ (ثابت) $\longrightarrow c_2=x^2y-y+c_1\longrightarrow x^2y-y=c\ :\ c=c_2-c_1$

روش (2) $f=\int(x^2-1)\,dy+\phi(x)$ (x مقداری ثابت) $\longrightarrow f=(x^2-1)y+\phi(x)\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} M=2xy=\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+\phi'(x)\longrightarrow\phi'(x)=0$ (انتگرال نسبت به x)

پس $\phi(x)=c_1\longrightarrow f=x^2y-y+c_1\longrightarrow df=0\ \ f=c_2\longrightarrow x^2y-y=c\ :\ c=c_2-c_1$

Scanned by CamScanner

Ex) $(\underbrace{e^{2y} - y\cos xy}_{M})dx + (\underbrace{2xe^{2y} - x\cos xy + y}_{N})dy = 0$

$M_y = 2e^{2y} - \cos xy + xy\sin xy \rightarrow N_x = 2e^{2y} - \cos xy + xy\sin xy \rightarrow M_y = N_x$ معادله کامل می‌باشد

$f(x,y) = \int M\,dx + \phi(y) = \int (e^{2y} - y\cos xy)\,dx + \phi(y) = xe^{2y} - \sin xy + \phi(y) \rightarrow$ مشتق نسبت به y

y عددی ثابت

$2xe^{2y} - x\cos xy + y = N = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + \phi'(y) \rightarrow \phi'(y) = y \xrightarrow{\int \text{نسبت به } y} \phi(y) = \frac{1}{2}y^2 + c_1$

$f(x,y) = xe^{2y} - \sin xy + \frac{1}{2}y^2 + c_1 \rightarrow df = 0 \rightarrow f = c_2 \rightarrow$ جواب آخر: $xe^{2y} - \sin xy + \frac{1}{2}y^2 = c$

$c = c_2 - c_1$

این را به یاد آورید / یادآوری

دیفرانسیل $d(uv) = v\,du + u\,dv \rightarrow$ سمت راست را به ما می‌دهند ← سمت چپ را می‌خواهند

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$d\left(\tan^{-1}\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2 + v^2}$

• هر معادله دیفرانسیل کاملی را که حل کنید اگر از جواب آن دیفرانسیل بگیرید باید خود معادله به دست آید. اون معادله df می‌باشد.

Ex) $(e^{2y}dx + 2xe^{2y}dy) - (y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy) + y\,dy = 0$ روش دسته‌بندی

انتگرال $\int d(xe^{2y})$ $\quad \int d(\sin xy)$ $\quad \int d(\frac{1}{2}y^2)$ $\quad \int$

$xe^{2y} - \sin xy + \frac{1}{2}y^2 = c$

باید بتوانیم جملات مناسب را در مجاورت هم قرار بدهیم

تمرین) معادلات زیر را حل کنید.

$y' = \frac{xy^2 - \sin x\cos x}{y(1-x^2)}$: $y(0) = 2$ شرط اولیه

* $(y\cos x + 2xe^{y}) + (\sin x + x^2e^{y} + 2)y' = 0$ حل شده توسط تدریس یار

تعریف) اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد ولی در تابعی مانند $\mu(x,y)$ (میو) ضرب شود و به معادله دیفرانسیل کامل تبدیل گردد. در این صورت $\mu(x,y)$ را فاکتور انتگرال یا عامل انتگرال‌ساز معادله فوق گوییم.

$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$: کامل $\rightarrow$ شرط کامل بودن : $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

از ضریب dx باید نسبت به y مشتق بگیریم و از ضریب dy باید نسبت به x مشتق بگیریم

$$M\frac{\delta\mu}{\delta y}+\mu\frac{\delta M}{\delta y}=N\frac{\delta\mu}{\delta x}+\mu\frac{\delta N}{\delta x}\rightarrow \mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=N\frac{\delta\mu}{\delta x}-M\frac{\delta\mu}{\delta y}\xrightarrow{\div\mu}$$

$M_y - N_x$

$$(*)\quad \frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}=\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\delta\mu}{\delta x}-M\frac{\delta\mu}{\delta y}\right)\rightarrow$$ در چند حالت خاص μ را بدست می آوریم

الف) μ فقط تابعی برحسب x باشد در این صورت $(*)$ به صورت زیر در می آید:

حفظ باشید

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}\rightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\phi(x)dx\rightarrow \ln\mu=\int\phi(x)dx\rightarrow \mu=e^{\int\phi(x)dx}$$

$\frac{\delta\mu}{\delta y}=0$

$= \phi(x)$ که تابعی برحسب x می باشد

یا

فاکتور انتگرال $\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}$

ب) μ فقط تابعی برحسب y باشد داریم:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{-M}\rightarrow \mu=e^{\int g(y)dy}$$

$\frac{\delta\mu}{\delta x}=0$

$g(y)$ تابعی برحسب y می باشد

یا

فاکتور انتگرال $\mu=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}$

اثبات حفظ شود برای هر ۲ عامل انتگرال ساز

Ex) فاکتور انتگرال را برای معادله زیر را بنویسید. (روش آزمون و خطا را انجام می دهیم / μ را از یکی از ۲ فرمول یافته)

$$(x^2+y^2-1)dx-2xy\,dy=0$$

$M_y=2y\neq -2y=N_x$ معادله غیر کامل

$$\phi(x)=\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{2}{x}\rightarrow \mu=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}\rightarrow$$ طرفین معادله را در $\frac{1}{x^2}$ ضرب کرده

از جای درست هم قرار داده

$$\underbrace{\left(1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}_{M}dx-\underbrace{\left(\frac{2xy}{x^2}\right)}_{N}dy=0\rightarrow\left(\begin{matrix}M_y=\frac{2y}{x^2}\\ N_x=\frac{2y}{x^2}\end{matrix}\right)\rightarrow$$ معادله کامل شد $\rightarrow f(x,y)=\int M dx+\phi(y)$

....

Ex) $y\,dx-x\,dy=0$ $\quad\mu=\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2+y^2}\rightarrow$ فاکتور انتگرال منحصربه فرد نمی باشد

$$\frac{y}{x^2}dx-\frac{x}{x^2}dy=0\rightarrow\int d\left(-\frac{y}{x}\right)=\int dc\rightarrow -\frac{y}{x}=c\rightarrow y=-cx$$: دسته خطوطی که از مبدأ می گذرد

$$\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dy=0\rightarrow\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{y}dy=\int 0\rightarrow \ln x-\ln y=\ln c\rightarrow \frac{x}{y}=c$$: دسته خطوطی که از مبدأ می گذرد

(ظاهراً متفاوت اما مفهوم یکسان) ← جواب ها را می توان با انتخاب c مناسب یکسان کرد

Ex) تحت چه شرایطی معادله غیر کامل $Mdx+Ndy=0$ دارای فاکتور انتگرال به صورت تابع (y^2-x^2) است؟

به فرض اینکه $z=y^2-x^2$

$$\mu(x,y)=\mu(y^2-x^2) \rightarrow \frac{1}{\mu}\left(N\frac{\delta\mu}{\delta x}-M\frac{\delta\mu}{\delta y}\right)=\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x} \quad (*)$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=-2x\frac{d\mu}{dz}$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=\frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=2y\frac{d\mu}{dz}$$

کمک قاعده زنجیره‌ای

مقادیر به دست آمده را در رابطه (*) جایگذاری کرده

$$\rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}=\underbrace{\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{-2xN-2yM}}_{H(z)}$$

باید تابعی بر حسب z باشد

$$\mu=e^{\int H(z)dz}$$

سمت راست رابطه * برای همه یکسان است اما سمت چپ وابسته به μ می‌باشد و بر حسب چی است

Ex) معادله زیر را حل کنید

$(x^2+y^2-1)dx-2xy\,dy=0$ ؛ با شرط $\mu(x,y)=\mu(y^2-x^2)$

$$\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{-2xN-2yM}=\frac{4y}{4x^2y-2yx^2-2y^3+2y}=\frac{4y}{-2y(-x^2+y^2-1)}=\frac{-2}{(\underbrace{y^2-x^2}_{z}-1)}=\frac{-2}{z-1}$$

$$\mu=e^{\int\frac{-2dz}{z-1}=-2\ln(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(y^2-x^2-1)^2}$$

فاکتور انتگرال $\rightarrow M_y=N_x$ معادله کامل $\rightarrow f(x,y)=\int M dx+\phi(y)$

...

پایان جلسه چهارم

Ex) α و β را چنان بیابید که $(x^\alpha y^\beta)$ فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل زیر باشد؟

$$(2y^2-9xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$$

$\mu\times$ معادله سوال $=$ کامل شدن معادله

$$\rightarrow (2x^\alpha y^{\beta+2}\underbrace{-9x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}_{M\text{ جدید}})dx+(\underbrace{3x^{\alpha+1}y^{\beta+1}-6x^{\alpha+2}y^\beta}_{N\text{ جدید}})dy=0$$

$$M_y=(\beta+2)2x^\alpha y^{\beta+1}-(\beta+1)9x^{\alpha+1}y^\beta$$

$$N_x=(\alpha+1)3x^\alpha y^{\beta+1}-(\alpha+2)6x^{\alpha+1}y^\beta$$

شرط معادله کامل $M_y=N_x$ $\rightarrow$

$$2(\beta+2)=3(\alpha+1)$$
$$6(\alpha+2)=9(\beta+1)$$

$$\begin{cases}2\beta-3\alpha=-1 & \times 3\\ 3\beta-2\alpha=1 & \times -2\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=1\end{matrix}\rightarrow \mu=xy$$

معادله را ضرب کرده و $M_y=N_x$ را چک کرده

$\rightarrow$ با توجه به روش‌های قبل معادله کامل را حل می‌کنیم

$$f(x,y)=\int M dx+\phi(y)$$

معادله خطی: $\Rightarrow f_0(x)y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g(x)$ if $g(x)=0 \rightarrow$ خطی همگن

$g(x)\neq 0 \rightarrow$ خطی غیرهمگن

فرم کلی معادله خطی مرتبه n ام و $f_0(x)\neq 0$

برای بدست آوردن فرم استاندارد معادله خطی غیرهمگن کافی است ضریب بزرگترین مشتق را یک در نظر بگیریم:

$$f_0(x)=1 \rightarrow y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g(x)$$

- اگه فرم استاندارد نبود، تبدیل به فرم استاندارد کرده (طرفین بر ضریب $f_0(x)$ تقسیم شده)

● معادله خطی مرتبه اول: $\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$: $n=1 \leftarrow$ اگر $g(x)$ صفر باشد معادله جدایی پذیر می باشد.

- برای حل این معادله چند حالت زیر را داریم:

الف) به دست آوردن فاکتور انتگرال

$$y'=\frac{dy}{dx} \rightarrow (\underset{M}{1})dy + (\underset{N}{f(x)y - g(x)})dx = 0 \rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{f(x) - 0}{1} = f(x) \rightarrow$$

تابعی از x

$\mu = e^{\int f(x)dx}$ فاکتور انتگرال $\rightarrow$ فاکتور انتگرال را در معادله ضرب می کنیم تا کامل شود $\rightarrow$

$$\underbrace{e^{\int f(x)dx}dy + f(x)y e^{\int f(x)dx}}_{\int d(ye^{\int f(x)dx})} = \int g(x) e^{\int f(x)dx}$$

همان — روش دسته بندی — انتگرال

$$\rightarrow ye^{+\int f(x)dx} = c + \int g(x) e^{\int f(x)dx}dx \rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}\left(c + \int g(x) e^{\int f(x)dx}dx\right)$$

اگه فرمول رو حفظ بودن قابل استفاده است

Ex) معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y' - 2xy = x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

خطی ✓ مرتبه اول ✓ معادله مقدار اولیه می باشد ✓

$$y = e^{-\int -2x dx}\left(c + \int x e^{\int -2x dx}dx\right) = e^{x^2}\left(c + \int x e^{-x^2}dx\right) = e^{x^2}\left(c + \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

جواب عمومی

جواب خصوصی $\rightarrow y(0)=1 \rightarrow 1 = ce^0 - \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{3}{2} : y = \frac{3}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$

ب) روش تغییر متغیر: در این روش ابتدا جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله $y' + f(x)y = g(x)$ را بدست می آوریم یعنی

برای معادلات درجه بالاتر نیز کاربرد دارد

معادله $y' + f(x)y = 0$ را حل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -f(x)dx \rightarrow \ln y = -\int f(x)dx + \ln c_1$$

معادله ای جدایی پذیر می باشد

$y = c_1 e^{-\int f(x)dx} \rightarrow$ به فرض اینکه c_1 تابعی برحسب x باشد $\rightarrow y = U(x)e^{-\int f(x)dx}$: جواب عمومی رابطه * باشد

باید بدست آوریم

$$\to \begin{cases} y' = u' e^{-\int f(x)dx} - f(x)\, u\, e^{-\int f(x)dx} \\ y = u(x)\, e^{-\int f(x)dx} \end{cases} \to$$

* این دو رابطه را در معادله قرار می‌دهیم ← جواب عمومی و مشتق آن باید در معادله صدق می‌کند

$$u' e^{-\int f(x)dx} - \cancel{f(x)\, u\, e^{-\int f(x)dx}} + \cancel{f(x)\, u\, e^{-\int f(x)dx}} = g(x) \to u' = g(x)\, e^{\int f(x)dx} \to$$

از دو طرف انتگرال گرفتیم

$$u(x) = c + \int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx \to y = \underbrace{c\, e^{-\int f(x)dx}}_{y_h} + \underbrace{e^{-\int f(x)dx} \int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx}_{y_p}$$

جواب عمومی معادله خطی مرتبه ۱

ترکیبی از (particolar) جواب خصوصی معادله و جواب عمومی معادله همگن نظیر *

* چون ثابتی در آن به کار نرفته / غیر همگن

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(c + \int g(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx\right) \to$$

صفحه قبل داشتیم: $y = \underbrace{c e^{x^2}}_{y_h} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_p}$

تمرین) $u(x)$ و $v(x)$ را چنان بیابید که $y(x) = u(x).v(x)$ جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول $y' + f(x)y = g(x)$ باشد.

EX) با استفاده از روش تغییر متغیر (پارامتر) معادله $y' - 2xy = x$ را حل کنید.

$$y' - 2xy = 0 \to \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \to \ln y = x^2 + \ln c_1 \to y = c_1 e^{x^2}$$

به جز اینکه c_1 تابعی برحسب x باشد

$y = u(x) e^{x^2}$ جواب عمومی معادله داده شده باشد

$y' = u' e^{x^2} + 2xu e^{x^2}$ ← قرار دادن مقادیر به دست آمده در معادله داده شده ← $u' e^{x^2} + 2xu e^{x^2} - 2xu e^{x^2} = x$

$$u' = x e^{-x^2} \to u = \int x e^{-x^2} dx + c \to u = c - \frac{1}{2} e^{-x^2} \to y = u(x) e^{x^2}$$

مقدار u را در قرار داده و y را به دست می‌آوریم

EX) معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y' + y = f(x) \\ y(0) = 0 \\ f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

برای حل ثابت در روش نیاز به محاسبات داریم؟ با قرار دادن نقطه در معادله اول به کار شرط اولیه را به ما می‌دهد

محاسبات ← توی صفر تعریف شده

در اولی نمی‌گذاریم

(ناپیوستگی در نقطه $x=1$ داریم) ← باید ۲ معادله حل کنیم

$$\begin{cases} y' + y = 1 & 0 \le x \le 1 \\ y' + y = 0 & x > 1 \end{cases} \to \ldots$$

معادله‌ی اول : $y'+y=1$ → معادله‌ی خطی ✓ معادله‌ی جدایی‌پذیر ✓ → $y=e^{-\int dx}\left(c_1+\int (1)e^{\int dx}dx\right)=c_1e^{-x}+1$

$0=c_1e^0+1 \rightarrow c_1=-1 \rightarrow \boxed{y_1=-e^{-x}+1}$

معادله‌ی دوم : $y'+y=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-y \rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int dx \rightarrow \ln y=-x+\ln c_2 \rightarrow \boxed{y_2=c_2e^{-x}}$

$\lim_{x\to 1^+} y_2(x)=y(1) \rightarrow c_2e^{-1}=1-e^{-1}$ ✓ $c_2=e-1$ → $y=\begin{cases}-e^{-x}+1 & 0\leq x\leq 1\\ (e-1)e^{-x} & x>1\end{cases}$ → $x\in[0,\infty)$ روی بازه پیوسته شد

* باید نقطه‌ی ناپیوستگی را به پیوستگی تبدیل کنیم *

EX) معادله‌ی زیر را به معادله‌ی خطی تبدیل کرده و سپس حل کنید.

غیرخطی

$x^2y'+2xy-y^3=0$

$\div x^2$: ① $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}y^3$ → $\div y^3$: $y'y^{-3}+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^2}$ → $\begin{cases}u=y^{-2}\\ u'=-2y'y^{-3} \rightarrow y'y^{-3}=\frac{u'}{-2}\end{cases}$ تغییر متغیر می‌دهیم

منجر به ① می‌شود — تا خطی شود

$-\frac{u'}{2}+\frac{2}{x}u=\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\times -2} u'-\underbrace{\frac{4u}{x}}_{f(x)}=\underbrace{-\frac{2}{x^2}}_{g(x)}$ خطی مرتبه اول → حل کنید

حتما منفرد باشد

$\boxed{① \; y'+f(x)y=g(x)y^n}$ → $\div y^n$: $\frac{y'}{y^n}+f(x)(y)^{1-n}=g(x)$

معادله‌ی برنولی

خطی

$n\neq 0, 1$ → جدایی‌پذیر

$u=y^{1-n}$ → تبدیل به معادله‌ی خطی شده

EX) $y'+\tan y=x\sec y$ ($\frac{1}{\cos y}$ مهم) → شبه برنولی نیست → اما از طریق برنولی حل می‌شود

$y'\cos y+\sin y=x$ (u' , u)

$u=\sin y$

خودتان حل کنید

اگر در یک معادله‌ی غیرخطی، مشتق‌ش در مجاورتش باشد، احتمال اینکه به معادله‌ی خطی تبدیل شود وجود دارد.

شرط $f,g\neq 0$

❋ فرم کلی معادله‌ی ریکاتی :

$*\; y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$ → معادله‌ی برنولی $n=2$

به همراه یک جواب معادله (y_0)

* برای حل معادله‌ی فوق داشتن یک جواب آن الزامی است

به فرض اینکه y_0 یک جواب آن باشد با تغییر متغیر $y=\frac{1}{u(x)}+y_0$ معادله

ریکاتی را به معادله‌ی خطی مرتبه اول تبدیل می‌کنیم.

Ex) $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$ $\longrightarrow$ $y = \dfrac{1}{u(x)} + x$, $\quad y' = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} + 1$

$y = x$ در معادله بالا صدق می‌کند

برای حل این دو را در معادله قرار می‌دهیم $\longrightarrow$ $-\dfrac{u'}{u^2} + 1 = \left(\dfrac{1}{u} + x\right)^2 - 2x\left(\dfrac{1}{u} + x\right) + x^2 + 1$ $\longrightarrow$

پس از ساده‌سازی $\longrightarrow u' = -1 \longrightarrow u = -x + c \longrightarrow y = \dfrac{1}{c - x} + x$

برای مراتب بالاتر چه کنیم؟ $\longrightarrow$ $n > 1$: $(1)\, y'^{n} + f_1(x)\, y'^{n-1} + \dots + f_n(x)\, y = 0$: (به توان n)

شبیه یک معادله مرتبه یک $\longrightarrow$ از درجه n ام برخورد می‌کنیم با آن

یا

$y'^{n} + f_1(x,y)\, y'^{n-1} + \dots + f_n(x,y) = 0$ (توان n)

$(y' - a_1)(y' - a_2) \dots (y' - a_n) = 0$

با فرض اینکه به n عامل درجه اول تجزیه شود

که در آن (a_i) توابعی برحسب x و y و یا اعداد ثابتی هستند $1 \le i \le n$

جواب اول $\qquad$ جواب دوم $\qquad \dots$

$\phi_1(x, y, c) \qquad \phi_2(x, y, c)$

c = برای همگی یک باشد چون معادله مرتبه یک دارای فقط یک ثابت c است

جواب عمومی معادله داده شده به صورت مقابل است: $\phi_1(x,y,c) \cdot \phi_2(x,y,c) \cdots \phi_n(x,y,c) = 0$

Ex) (معادله درجه دو) $y y'^2 + 2x y' + y = 0 \longrightarrow y' = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \longrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \\ y' = \dfrac{-x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \end{cases}$

همگن از درجه صفر

حل کنید معادله فوق را

معادله درجه ۲ تجزیه نمی‌شود اما معادله را چه جوری حل کنم

حل تحت (+) آن:

$\dfrac{y}{x} = v \rightarrow y = xv \rightarrow y' = v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + x^2 v^2}}{xv} \longrightarrow v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - v^2}}{v}$

$x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - v^2}}{v} - v \longrightarrow x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - v^2} - v^2}{v} \longrightarrow \displaystyle\int \dfrac{v\, dv}{\sqrt{1 - v^2} - (1 + v^2)} = \int \dfrac{dx}{x} \longrightarrow$

$1 - v^2 = z^2$ (تغییر متغیر) $\longrightarrow$ تجزیه کسرها $\longrightarrow$ حل انتگرال با شما

$-\cancel{2}v\, dv = \cancel{2}z\, dz$

$v\, dv = -z\, dz$

درجات بالا را تجزیه کنید

if $yy'^2+2xy'-y=0$: $ydy+xdx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx \to \int\frac{ydy+xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int dx \to \int\frac{du}{u}=\int d\ldots$

$y'=\frac{-x\pm\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

Ex) $y=xf(y')+g(y')$ معادله‌ی لاگرانژ (۱) رابطه‌ی

درهم x و y یک معادله شد

به فرض اینکه $y'=p$

$y=xf(p)+g(p)$ بازنویسی رابطه (۲) رابطه‌ی $\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق طرفین}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{d(xf(p))}{dx}+\frac{d}{dx}(g(p)) \to$

$p(y')= f(p)+x\frac{df(p)}{d\cancel{x}p}\frac{dp}{dx}+\frac{dg(p)}{d\cancel{x}p}\frac{dp}{dx}$

(x را با p تبدیل کردیم قاعده‌ی زنجیره‌ای را اجرا کرده)

$\to$ * $p-f(p)=(xf'(p)+g'(p))\frac{dp}{dx}$ $\to$ چه جوری حل این معادله؟

طرفین رابطه‌ی * را بر $(p-f(p)\neq 0)$ تقسیم کرده و در $\frac{dx}{dp}$ ضرب کرده $\to \frac{dx}{dp}=\frac{1}{p-f(p)}xf'(p)+\frac{g'(p)}{p-f(p)} \to$ یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول است که در آن x متغیر تابع و p متغیر مستقل است به فرض اینکه $x=\phi(p,c)$ جواب آن باشد

$\to$ به صورت فرم جواب عمومی رابطه‌ی (۱) با پارامتر p به شکل

$$\begin{cases} x=\phi(p,c) \\ y=xf(p)+g(p) \end{cases}$$

: دیگر که در هم حذف p از دستگاه فوق نمی‌توانیم

اگر $p-f(p)=0$ دارای جواب‌های $p_1, p_2, \ldots$ باشد با قرار دادن هر یک از آنها در رابطه‌ی (۲) جواب‌های دیگر (۱) را بدست می‌آید.

Ex) $y=-xy'+y'^2$ $\xrightarrow{\text{لاگرانژ}}$ $y=-xp+p^2$ $\xrightarrow[\text{به } x]{\text{مشتق نسبت}}$ $\underset{p}{y'}=-p-x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx} \to 2p=(-x+2p)\frac{dp}{dx}$

$y'=p$

$\div\ 2p\neq 0$ $\times\frac{dx}{dp}$ $\to \frac{dx}{dp}=-\frac{x}{2p}+1 \to \frac{dx}{dp}+\frac{1}{2p}x=1$ خطی مرتبه‌ی اول (x متغیر تابع، p متغیر مستقل) $\to x=e^{-\int\frac{1}{2p}dp}\left(c+\int(1)\,e^{\int\frac{1}{2p}dp}dp\right)$

$x=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(c+\int\sqrt{p}\,dp\right) \to \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(c+\frac{2}{3}p^{\frac{3}{2}}\right) \\ y=-xp+p^2 \end{cases}$ $\to$ و اگر $2p=0$ آنگاه $p=0 \leftarrow y=0$

جواب عمومی که در هم حذف p نباشیم

جواب ویژه

if تنها شامل x $\to y=\phi(y')$ تابعی برحسب y'

ص ۱۷ $\frac{1}{4}$

Ex) $y = xy' + y'^2 \rightarrow \begin{cases} y' = p \\ y = xp + p^2 \end{cases} \rightarrow \cancel{y'} = \cancel{p} + x\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx} \rightarrow (x+2p)\dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow$

if $\dfrac{dp}{dx} = 0$: $p = c \rightarrow y = cx + c^2$: جواب عمومی

if $x + 2p = 0$: $p = -\dfrac{x}{2} \rightarrow y = -\dfrac{x^2}{4}$: جواب ویژه

* $y = xy' + g(y')$ معادله کلرو
حالت خاص لاگرانژ
$\rightarrow y = cx + \phi(c)$ جواب عمومی

$y = (\dots)$ جواب ویژه را پیدا کرده ؟ $\rightarrow$ نسبت به پارامتر مشتق گرفته سعی می‌کنیم پارامتر حذف کنیم

* $4y = x^2 + y'^2 \rightarrow$ ایده لاگرانژ است $\rightarrow$ $y' = p$ چون درجه y یک است از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$\cancel{y' = \pm\sqrt{4y - x^2}}$

این روش غ ق ک

انتگرال غ ق حل است

یعنی انتگرال ها را باید مشتق بگیریم

معادله را می‌خواهند

جواب را ما داریم

● تشکیل معادله دیفرانسیل : در این قسمت می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی را بیابیم که $\phi(x, y, c) = 0$ جواب آن باشد. به این ترتیب از دسته منحنی یک پارامتری (یک ثابت دلخواه) یکبار نسبت به متغیر مستقل مشتق می‌گیریم و سپس بین معادلات موجود پارامتر را حذف می‌کنیم.

Ex) معادله دیفرانسیلی دسته منحنی $\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ را تشکیل دهید.

$\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{2x}{a^2} - 2yy' = 0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = yy'x \\ \dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow xyy' - y^2 = 1 \rightarrow$ شبیه معادله برنولی شد

با استفاده از تغییر متغیر $t = y^2$ به خطی تبدیل می‌شود

x متغیر مستقل می‌باشد

a را باید حذف کنیم

چون ۲ تا ثابت داریم ۲ بار مشتق می‌گیریم

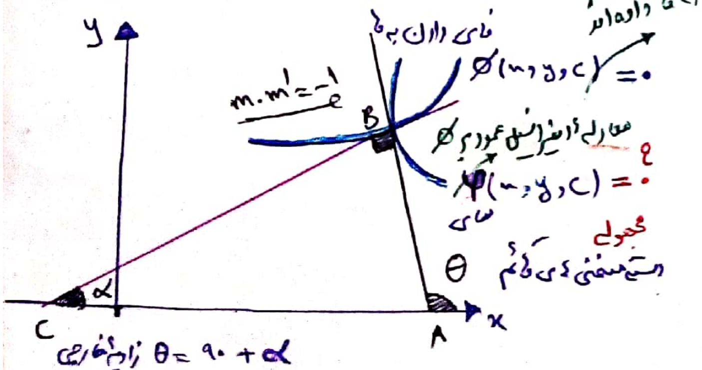
Ex) $y = \underline{c_1}\cos x + \underline{c_2}\sin x$ باید c_1 و c_2 حذف شوند

$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x \rightarrow y'' + y = 0$

$y'' = -c_1\cos x - c_2\sin x$

مفهوم مسیر قائم :

برای بدست آوردن مسیر قائم یک دسته منحنی مفروض در دستگاه مختصات دکارتی ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض را تشکیل داده و سپس به جای y' قرار می‌دهیم $-\dfrac{1}{y'}$ و معادله دیفرانسیل جدید را حل می‌کنیم.



زاویه خارجی $\theta = 90 + \alpha$

ص ۱۸ $\tan\theta = \tan(90 + \alpha) = -\cot\alpha = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$ ، $\tan\alpha = y'$

Ex) مسیرهای قائم دسته منحنی $y=kx$ را بیابید.

معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض : $y = x y'$, $y'=k$ $\xrightarrow[k \text{ باید حذف شود}]{y' \to -\frac{1}{y'}}$ $y = -\frac{x}{y'}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم

$$yy' = -x \rightarrow \int y\,dy + \int x\,dx = \int 0 \rightarrow y^2 + x^2 = c^2$$

Ex) مسیرهای قائم دسته منحنی $x^2+y^2=2cx$ را بیابید. (دوایری به مرکز آنها روی محور xها)

$x^2+y^2=2cx$

$\cancel{2}x + \cancel{2}yy' = \cancel{2}c$ $\xrightarrow{c \text{ باید حذف شود}}$ $x^2+y^2 = 2x(x+yy') \rightarrow x^2+y^2 = 2x^2+2xyy' \rightarrow y^2-x^2 = 2xyy'$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض

$\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}}$ $y^2 - x^2 = -\frac{2xy}{y'} \rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$: معادله همگن $\xrightarrow[\text{حل با توجه}]{\frac{y}{x}=v}$ جواب نهایی : $x^2+y^2=2cy$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم

دوایری به مرکز آنها روی محور yها

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

* حال اگر مختصات قطبی داشته باشیم، به جای دکارتی (یعنی $r=f(\theta)$)

$y' = \frac{r}{r'} = \tan\varphi \rightarrow$ $\frac{r}{r'} \xrightarrow{\text{جایگزین}} -\frac{r'}{r}$ یا $r' \xrightarrow{\text{جایگزین}} -\frac{r^2}{r'}$

عکس و قرینه می‌شود

Ex) مسیرهای قائم بر دسته منحنی $r = 2c\cos\theta$ را بیابید.

$r' = -2c\sin\theta$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض $\xrightarrow{c \text{ باید حذف شود}}$ $\frac{r}{r'} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$ $\xrightarrow{\frac{r}{r'} \to -\frac{r'}{r}}$ $-\frac{r'}{r} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\longrightarrow$

جدایی‌پذیر می‌باشد

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta \rightarrow \ln r = \ln\sin\theta + \ln c \rightarrow r = c\sin\theta$$

Ex) بنا بر قانون نیوتون درجه تبرید یک جسم در هوا با تفاضل دمای جسم یعنی T و دمای هوا یعنی T_0 متناسب است. اگر دمای هوا $20^\circ C$ باشد و جسم در مدت ۲۰ دقیقه از ۱۰۰ به $60^\circ C$ برسد، در چه مدت دمای جسم به $30^\circ C$ تنزل می‌کند.

درجه تبرید : $\frac{dT}{dt} = k(T - \cancel{T_0})$, $T_0 \to 20^\circ C$ $\longrightarrow$ باید k را پیدا کنیم به معادله با جدایی‌پذیر $\rightarrow$ $\int_{100}^{60} \frac{dT}{T-20} = \int_{0}^{20} k\,dt \rightarrow \ln(T-20)\Big|_{100}^{60} = kt\Big|_{0}^{20}$

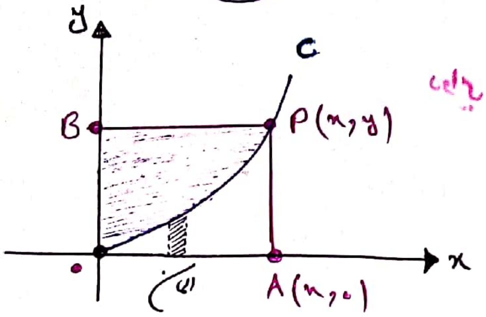
شروع

$\ln 40 - \ln 80 = 20k \rightarrow k = \frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}$

جدایی‌پذیر $\int_{100}^{30} \frac{dT}{T-20} = \int_{0}^{t} \frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}\,dt \rightarrow$ ☺ حل با شما

تغییرات دمای جسم در زمان = درجه تبرید یک جسم

EX) از نقطه P واقع بر منحنی C که گذشتن از مبدأ مختصات می‌گذرند خطوط PA و PB به ترتیب موازی محور yها و xها رسم می‌کنیم. قوس OP مستطیلی را که از محورهای مختصات و خطوط PA و PB تشکیل می‌شود به ۲ قسمت تقسیم می‌کند. منحنی C را چنان بیابید که مساحت یکی از قسمت‌ها سه برابر سطح قسمت دیگر باشد.



y تابعی برحسب x می‌باشد

یا

$$S_{OPB} = 3\, S_{OPA}$$

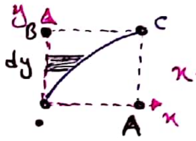
$$xy - \int_0^x y\,dx = 3\int_0^x y\,dx \rightarrow xy = 4\int_0^x y\,dx \rightarrow$$ مشتق گرفته تا انتگرال از بین برود

$$y + xy' = 4y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{x}dx \rightarrow \ln y = 3\ln x + \ln c$$

$$xy' = 3y$$

$$y = cx^3$$

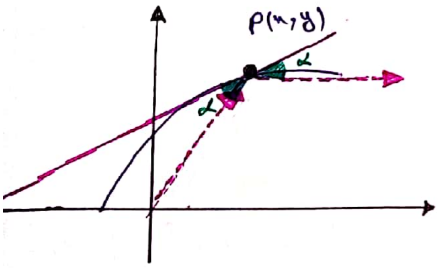
* حالت دیگرش می‌توان به صورت زیر گرفت که $x = cy^3$



← در امتحان هر کدام را بنویسی قابل قبول است

$$xy - \int_0^y x\,dy = ?$$

EX) شکل آینه‌ی مقعر را چنان تعیین کنید که نوری که از منبع واقع در مبدأ مختصات بر آن می‌تابد به صورت ستونی از پرتوها به موازات محور xها منعکس گردد؟



* معادلات مرتبه دوم: فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$f(x, y, y', y'') = 0 \;\; یا \;\; F(x, y, y') = y''$$

روش کاهش مرتبه: برای حل معادله فوق چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم: معادله‌ها ؟

الف) فاقد y و y' باشد

$y'' = g(x)$

$$y'' = g(x) \rightarrow y' = \int g(x)\,dx + c_1 \rightarrow y = \int\left(\int g(x)\,dx\right)dx + c_1x + c$$

$\frac{dy'}{dx}$ حل — تابعی برحسب متغیر مستقل — درجه بالاترین

$$EX)\; y'' = 4x - \cos x \rightarrow y' = 2x^2 - \sin x + c_1 \rightarrow y = x^3 + \cos x + c_1x + c_2$$

ب) فاقد یک متغیر تابع باشد

$y'' = h(x, y')$

$$y'' = h(x, y') \xrightarrow[\text{برای حل قرار می‌دهیم}]{y' = P} \overset{\frac{dy'}{dx}}{y''} = h(x, P) \rightarrow \frac{dP}{dx} = h(x, P)$$

پس از حل معادله مرتبه اول فوق برحسب P به جای P مقدار y' را جایگزین و سپس معادله مرتبه اول زیر را حل می‌کنیم

که تابعی برحسب x — y تابعی برحسب x می‌باشد

Scanned by CamScanner

e) فاقد x باشد: $y''=h(y,y')$ ، $\frac{dy'}{dx}$ ، متغیر مستقل

$$y''=h(y,y') \xrightarrow[\text{زنجیره‌ای}]{\text{استفاده از قاعده}} \frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p}=h(y,p)$$
$y'=p$

مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم ولی باید دقت داشته باشیم که در اینجا به جای y'' باید $p\frac{dp}{dy}$ قرار دهیم. ← x که یعنی بر حسب y می‌شود

Ex) معادله زیر را حل کنید.

$$y''+y'^2=2e^{-y} \xrightarrow[\text{می‌باشد}]{\text{حالت e}} y'=p \quad p\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y} \xrightarrow{t=p^2} \frac{dt}{dy}=2p\frac{dp}{dy} \to p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2}\frac{dt}{dy} \to$$

$\times 2$: (در این معادله) $\frac{1}{2}\frac{dt}{dy}+t=2e^{-y} \longrightarrow \frac{dt}{dy}+\overset{f(y)}{2}t=\overset{g(x)}{4e^{-y}} \to t=e^{-\int 2dy}\left(c_1+\int 4e^{-y}e^{\int 2dy}dy\right) \to$

خطی مرتبه اول

متغیر مستقل ما y می‌باشد در این معادله

متغیر تابع t می‌باشد

$$p^2=t=c_1e^{-2y}+4e^{-y} \to y'=p=\pm\sqrt{c_1e^{-2y}+4e^{-y}} \to \int dx=\pm\int\frac{dy}{\sqrt{c_1\underbrace{e^{-2y}}_{\frac{1}{e^{2y}}}+4e^{-y}}}$$

$\to \dots$

EX) با استفاده از تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2yy''=(y-xy')^2$

ب) $yy''-y'^2=12xy^2$

تمرین) $\phi(x)$ را باید به طوری که داشته باشیم: $\int_0^1\phi(\alpha x)\,d\alpha=x\phi(x)$

د) معادله زیر را در نظر بگیرید: $F(x,y,y',y'')=0$ ، اگر معادله فوق همگن باشد نسبت به y,y',y'' یعنی:

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^n F(x,y,y',y'')$$

در این صورت تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ ممکن است به حالت کرده و مرتبه معادله را یکی کم کند.

حل الف) معادله نسبت به y,y',y'' همگن است $\to y=e^{\int zdx} \to y'=ze^{\int zdx} \to y''=z'e^{\int zdx}+z^2e^{\int zdx} \to$ مقادیر را جایگزین کرده در معادله

$$x^2\cancel{(e^{2\int zdx})}(z'+z^2)=(1-xz)^2\cancel{(e^{2\int zdx})} \to x^2z'+x^2z^2=1-2xz+x^2z^2 \to z'+\overset{f(x)}{\frac{2}{x}}z=\overset{g(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$z=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(c_1+\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right) \to z=\frac{1}{x^2}(c_1+x) \to y=e^{\int\left(\frac{c_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx} \longrightarrow y=e^{\left(-\frac{c_1}{x}+\ln x+\ln c_2\right)}$$

$$y=c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$$

حل ب) معادله نسبت به y,y',y'' همگن می‌باشد $\to y=e^{\int zdx} \to y'=ze^{\int zdx} \to y''=(z'+z^2)e^{\int zdx} \to$ مقادیر بدست آمده را در معادله جایگزین

$$e^{2\int zdx}(z'+z^2-z^2-12x)=0 \to z'-12x=0 \to z=6x^2+c_1 \to y=e^{\int(6x^2+c_1)dx}=e^{(2x^3+c_1x+\ln c_2)} \longrightarrow$$

$$y=c_2e^{(2x^3+c_1x)}$$

(راه حل دوم) : $\div y^2 \to \frac{yy''-y'^2}{y^2}-12x=0 \to d\frac{y'}{y}=12x\,dx \to \frac{y'}{y}=6x^2+c_1 \to \frac{dy}{y}=(6x^2+c_1)dx \to$

$$y=e^{6x^2+c_1+\ln c_2} \longrightarrow y=c_2e^{6x^2+c_1}$$

معادلات خطی مرتبه دوم و بالاتر:

* توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ را روی بازه‌ی I وابسته‌ی خطی گوئیم هرگاه ثابت‌های $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ چنان موجود باشد که لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد و داشته باشیم:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad , \forall x \in I$$

* توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ را مستقل خطی گوئیم که هرگاه:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad , \forall x \in I \longleftarrow$$

تمام ثوابت $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n =$ صفر باشند

Ex) مستقل خطی و یا وابستگی خطی توابع زیر را مشخص کنید.

$$f_1(x) = 1 \; , \; f_2(x) = x \; , \; f_3(x) = x^2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \longrightarrow \text{مستقل خطی}$$

if) اگر مشتقات متوالی موجود باشد به احتمال زیاد مستقل خطی

$$\longrightarrow x^2 \xrightarrow{:2} x \longrightarrow 1$$

کاری به ضریب‌ها نداریم

(تعریف) توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ وابسته‌ی خطی هستند اگر و تنها اگر لااقل یکی از آنها ترکیب خطی از توابع دیگر باشد.

Ex) $f_1 = x^2 - x \; , \; f_2 = 2x^2 \; , \; f_3 = 3x \longrightarrow f_1 = \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{3} f_3$

Ex) $f_1 = e^{k_1 x} , \; f_2 = e^{k_2 x} , \; f_3 = e^{k_3 x} \longrightarrow \alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} = 0 \longrightarrow$ مستقل خطی $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

همواره + است

$$k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq 0$$

برای اثبات مثال فوق از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

به فرض وابسته‌ی خطی باشند آنگاه با فرض اینکه $\alpha_1 \neq 0 \Longleftarrow$

$$\div e^{k_2 x} : \alpha_1 e^{(k_1 - k_2)x} + \alpha_2 + \alpha_3 e^{(k_3 - k_2)x} = 0$$

مشتق نسبت x: $\alpha_1 (k_1 - k_2) e^{(k_1 - k_2)x} + \alpha_3 (k_3 - k_2) e^{(k_3 - k_2)x} = 0$

$$\div e^{(k_3 - k_2)x} : \alpha_1 (k_1 - k_2) e^{(k_1 - k_3)x} + \alpha_3 (k_3 - k_2) = 0$$

مشتق نسبت x: $\alpha_1 (k_1 - k_2)(k_1 - k_3) e^{(k_1 - k_3)x} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$ تناقض

تناقض با فرض اولیه

* اگر $k_1 \neq k_2 \neq \cdots \neq k_n \neq 0$ آنگاه توابع $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_{n-1} x}, e^{k_n x}$ مستقل خطی هستند.

وابسته اند ← $e^{2x}, \cancel{x}e^{2x}$ به شرط عدد وابسته

اگر مستقل خطی و یا وابستگی خطی تنها دو تابع مورد سوال باشد به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{f_1}{f_2} \begin{cases} = \text{ثابت عدد} \rightarrow \text{وابسته خطی} \\ \neq \text{ثابت عدد} \rightarrow \text{مستقل خطی} \end{cases}$$

Ex) $\underbrace{e^{kx}, e^{kx}, \ldots e^{kx}}_{\text{تابع } n} \rightarrow$ وابسته خطی

Ex) $e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{n-1} e^{kx} \rightarrow$ مستقل خطی

Ex) $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \cot\beta x \neq$ ثابت
مستقل خطی

* فرض کنید توابع $y_1(x)$ ، $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ در بازه I دارای مشتق تا مرتبه $(n-1)$ ام باشد در این صورت دترمینان زیر را که با نماد $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ نشان می دهیم دترمینان رانسکین یا رانسکین آن توابع گوییم:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$y^{n-1} \neq y^{(n-1)}$

y به توان $n-1$ ، مشتق مرتبه $n-1$ ام

Ex) $W(e^{2x}, 5e^{2x})$: $\begin{vmatrix} e^{2x} & 5e^{2x} \\ 2e^{2x} & 10e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ وابسته

اگر توابع خطی وابسته باشیم، رانسکین صفر می شود ولی *عکس آن برقرار نیست همیشه

Ex) $W(\sin x, \cos x)$: $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ مستقل خطی اند

از این به بعد تمام معادلات فرم استاندارد هستند (ضریب بالاترین مرتبه یک می باشد)

فرض کنید

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$ (1)

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$ (2)

② را همگن نظیر ① گوییم ←

الف) اگر y_1 و y_2 دو جواب غیر صفر (۲) باشد آنگاه $y_1 \pm y_2$ نیز جواب آن است. (مجموع یا تفاضل آنها)

$$(y_1 \pm y_2)'' + f_1(x)(y_1 \pm y_2)' + f_2(x)(y_1 \pm y_2) = \underbrace{(y_1'' + f_1(x)y_1' + f_2(x)y_1)}_{\text{صفر}} \pm \underbrace{(y_2'' + f_1(x)y_2' + f_2(x)y_2)}_{\text{صفر}} = 0$$

ب) اگر y_1 یک جواب غیر صفر (۲) باشد و c عدد ثابتی باشد آنگاه $cy_1 \neq y_2$ نیز جواب آن معادله است.

ج) اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله (۲) باشد و c_1 و c_2 اعداد ثابتی باشند آنگاه $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز جواب عمومی آن معادله است

تعمیم دادن مراتب بالاتر : $\underset{\text{جواب های مستقل خطی}}{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ ، $\underset{\text{اعداد ثابت}}{c_1, c_2, \ldots, c_n} \rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$

(Ex نشان دهید که $y_1=\cos x$ و $y_2=\sin x$ جواب‌های معادله $y''+y=0$ هستند. پس جواب‌های عمومی آن را بنویسید.

$$y_1'=-\sin x \rightarrow y_1''=-\cos x \rightarrow y_1''+y_1=0$$

$$y_2'=\cos x \rightarrow y_2''=-\sin x \rightarrow y_2''+y_2=0$$

عدد ثابت $\neq \frac{y_1}{y_2}=\cot x$

y_1 و y_2 مستقل خطی هستند که بتوانیم تشکیل جواب عمومی به صورت $y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$ می‌باشد.

(Ex اگر y جواب عمومی ① و y_p جواب خصوصی ① باشد نشان دهید که $(y-y_p)$ جواب ② می‌باشد.

در فضای صدق می‌کند

$$y=y_h+y_p \leftarrow y_h$$

$$(y-y_p)''+f_1(x)(y-y_p)'+f_2(x)(y-y_p)=\underbrace{(y''+f_1(x)y'+f_2(x)y)}_{g(x)}-\underbrace{(y_p''+f_1(x)y_p'+f_2(x)y_p)}_{g(x)}=0$$

مرتبه اول

$$y'+f(x)y=g(x)$$

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left(c+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)=\underbrace{ce^{-\int f(x)dx}}_{y_h}+\underbrace{e^{-\int f(x)dx}\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx}_{y_p}$$

پس جواب عمومی معادله خطی غیرهمگن برابر است با حاصل جمع جواب عمومی معادله همگن نظیر آن ① (y_h) و جواب خصوصی معادله غیرهمگن (y_p) می‌باشد یعنی: $y=y_h+y_p$

- داشتن یک جواب ② برای یافتن جواب دوم آن:

اگر y_1 یک جواب غیرصفر (۲) باشد برای یافتن جواب دوم آن قرار می‌دهیم:

$$y_2=U(x)\,y_1 \quad ③$$

$$y_2'=U'y_1+Uy_1' \quad ④$$

$$y_2''=U''y_1+2U'y_1'+Uy_1'' \quad ⑤ \xrightarrow[\text{را در رابطه ② قرار می‌دهیم}]{\text{روابط ۳ و ۴ و ۵}} U''y_1+(2y_1'+f_1(x)y_1)U'+(y_1''+f_1(x)y_1'+f_2(x)y_1)U=0$$

$=0$ چون y_1 یک جواب ② است

نسبت به U' جدایی پذیر ← معادله مرتبه صفر است

$$U''y_1+(2y_1'+f_1(x)y_1)U'=0 \quad ⑥ \xrightarrow{\div y_1} \left(U''+\frac{2y_1'}{y_1}+f_1(x)\right)U'=0 \quad ⑦$$

نسبت به U' جدایی پذیر می‌باشد

$$\int\frac{dU'}{U'}+\int\left(\frac{2dy_1}{y_1}\right)=-\int f_1(x)dx \longrightarrow \ln U'+2\ln y_1=-\int f_1(x)dx$$

که ثابت انتگرال گیری را صفر در نظر می‌گیریم چون می‌خواهیم جواب دوم ② را بیابیم

$$\ln U'y_1^2=-\int f_1(x)dx$$

$$U'y_1^2=e^{-\int f_1(x)dx} \rightarrow U'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx} \rightarrow U=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx \quad ⑧$$

با جایگذاری ⑧ در ③ جواب دوم ② بدست می‌آید

EX) $y_1 = x$ یک جواب معادله زیر باشد جواب عمومی آن را بیابید

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

مرتبه دوم

چون معادله داده شده خطی همگن است پس برای یافتن جواب دوم آن قرار می‌دهیم: $y_2 = U(x)\, y_1 = x\, U(x)$

برای یافتن $U(x)$ از رابطه ⑧ کمک گرفته

$$\div x^2 : \; y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$$

باید فرم استاندارد داشته باشیم

$$U(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{2}{x}dx} dx \to U(x) = \int \frac{1}{x^2} x^2 dx = \int dx = x \to y_2 = x \cdot x = x^2$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 x^2$$

EX) * اگر $y_1 = x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد جواب عمومی آن را بیابید:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$$

گام اول)

$$y = U(x)\, y_1 = x\, U(x) \xrightarrow[\text{جایگذاری در معادله غیر همگن}]{\text{با دو بار مشتق گرفتن}} y' = U(x) + xU'(x) \to y'' = 2U' + xU''$$

گام دوم) توی این مرحله U ها باید حذف شوند حتماً:

$$x^3 U'' + 2x^2 U' - 2xU - 2x^2 U' + 2xU = 4x^2 \to x^3 U'' = 4x^2$$

گام سوم) دو بار انتگرال گرفته

$$U'' = \frac{4}{x} \to U' = 4\ln x + c_1 \to U = 4\int \ln x\, dx + c_1 x + c_2 \to U = \overbrace{4x^2 \ln x - 4x^2}^{y_p} + \underbrace{c_1 x^2 + c_2 x}_{y_h}$$

تمرین) نشان دهید اگر $y_1 = x$ یک جواب معادله* زیر باشد آنگاه $f_1(x) + x f_2(x) = 0$

$\div x^2$

$$y'' \underbrace{-\frac{2}{x}}_{f_1(x)} y' + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{f_2(x)} y = 4 \to f_1 + x f_2 = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 0 \to y_1 = x$$

EX) معادله زیر را حل کنید

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0 \to y'' \underbrace{- \frac{2x}{1-x^2}}_{f_1} y' + \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{f_2} y = 0 \to f_1 + x f_2 = 0 \to y_1 = x$$

چون معادله داده شده همگن است پس جواب دوم آن را از تغییر متغیر $y_2 = x\, U(x)$ به دست می‌آوریم که $U(x)$ را می‌توانیم از فرمول زیر بیابیم:

$$U(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x) dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} dx = \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx$$

$$y_2 = U(x)\, x \to y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

معادله لژاندر $* \;(1-x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1) y = 0 \to$ حل آن در سری ها

تمرین) نشان دهید اگر $y_1 = e^{\lambda x}$ که در آن λ عددی ثابت است یک جواب معادله (۲) باشد آنگاه:

$$\lambda^2 + \lambda f_1(x) + f_2(x) = 0$$

(۲) $y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = 0$ [illegible]

Scanned by CamScanner

Ex معادله زیر را حل کنید

$$(x+1)y'' + (2x+1)y' + xy = 0 \longrightarrow y_1 = x \quad \text{صدق نمی‌کند}$$

$$\div(x+1) \longrightarrow y'' + \underbrace{\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)}_{f_1} y' + \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{f_2} y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + \lambda\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) + \frac{x}{x+1} \longrightarrow \frac{\lambda^2 x + \lambda^2 + 2x\lambda + \lambda + x}{x+1} = 0$$

$$(\lambda^2+2\lambda+1)x + (\lambda^2+\lambda) = 0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda^2+2\lambda+1=0\\ \lambda^2+\lambda=0\end{cases} \longrightarrow \underbrace{\lambda = -1}_{\text{مشترک}} \longrightarrow y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = U(x)\, y_1 = e^{-x} U(x) \longrightarrow U(x) = \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-\int \frac{2x+1}{x+1}} dx \longrightarrow U(x) = \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-2x + \ln(x+1)} dx$$

$$\frac{2x+1}{x+1} = \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \int (x+1)\, dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \longrightarrow y_2 = \frac{e^{-x}}{2}(x+1)^2 \longrightarrow y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 e^{-x} + \underbrace{\frac{c_2}{2}}_{c_3} e^{-x}(x+1)^2$$

ثابت به کار نمی‌بریم چون آن را خودمان اضافه می‌کنیم

$$\text{if } (x+1)y'' + (2x+1)y' + xy = (x+1)^2 \longrightarrow \text{با روش دوم تغییر} \longrightarrow \text{U را حذف کرده} \longrightarrow U, U', U''$$ ✓ جانشین در معادله

* معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت: معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1) \text{ رابطه}$$

که در آن p و q اعداد ثابتی هستند. در این قسمت می‌خواهیم جواب عمومی (۱) را بدون استفاده از سری بدست آوریم بدین منظور به جستجوی جوابی به صورت زیر هستیم $y = e^{\lambda x}$ (۲) رابطه، که در آن λ مقدار ثابت است و رابطه

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad (3)$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad (4)$$

آنگاه ۲ و ۳ و ۴ را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \longrightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (5)$$ معادله کمکی یا مفسر

به فرض اینکه λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله کمکی باشند برای نوشتن جواب عمومی (۱) سه حالت زیر را باید بررسی کنیم:

الف) λ_1 و λ_2 حقیقی و غیر مساوی ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) ب) λ_1 و λ_2 حقیقی و مساوی ($\lambda_1 = \lambda_2$) ج) λ_1 و λ_2 مختلط

بررسی حالت الف) در این حالت دارای ۲ جواب مستقل خطی به صورت زیر هستیم:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$ پس فرم جواب عمومی

در این قسمت به صورت زیر است:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Ex) معادله زیر را حل کنید

$$y''-3y'+2y=0 \to \underbrace{\lambda^2-3\lambda+2=0}_{\text{معادله کمکی}} \to \begin{matrix}\lambda=1\\ \lambda=2\end{matrix} \to y_h=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$$

$\lambda_1\neq\lambda_2$

$$y'''-3y''+2y'=0 \to \lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=0 \to \begin{matrix}\lambda=1\\ \lambda=2\\ \lambda=0\end{matrix} \to y_h=c_1\cancel{e^{0x}}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$$

$\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

1

حالت ب) $\lambda_1=\lambda_2$ و $y_1=e^{\lambda_1 x}=y_2$ ← ۲ جواب مستقل خطی نیستند چون $\frac{y_1}{y_2}=1$

برای یافتن جواب دوم قرار می‌دهیم $y_2=u(x)y_1=e^{\lambda_1 x}u$ و برای یافتن u از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx=\int\frac{1}{e^{2\lambda_1 x}}e^{-\int p\,dx}dx=\int\frac{1}{\cancel{e^{2\lambda_1 x}}}\cancel{e^{-px}}dx=\int dx=x$$

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \to \lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$$

$$y_2=xe^{\lambda_1 x}$$

فرم جواب عمومی (۱) در این حالت به صورت زیر است:

$$y_h=c_1y_1+c_2y_2=(c_1+c_2x)e^{\lambda_1 x}$$

Ex) معادله زیر را حل کنید

$y''+4y'+4y=0$ معادله کمکی: $\lambda^2+4\lambda+4=0 \to \lambda_1=\lambda_2=-2$

$$\downarrow$$

$$y_h=(c_1+c_2x)e^{-2x}$$

اگر معادله (۱) از مرتبه n ام باشد معادله کمکی از درجه n می‌باشد. به فرض اینکه معادله کمکی دارای k ریشه مکرر حقیقی باشد فرم جواب عمومی (۱) برای این k ریشه به صورت زیر است

$$y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2+\dots+c_kx^{k-1})e^{\lambda x}\ ;\ k\leq n$$

Ex) $y^{(4)}+3y'''+3y''+y'=0 \to \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+\lambda=0 \to \lambda(\lambda+1)^3=0 \to \lambda=0$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

$k=3$

$$y_h=c_1\cancel{e^{0x}}+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{-x}$$

1

حالت ج) λ_1 و λ_2 مختلط هستند: با فرض $\lambda_1=\alpha+i\beta$ ، $\lambda_2=\alpha-i\beta$

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}$$

$$y_1=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

رابطه اویلر

تا دو تای آخر را یکبار با هم جمع کرده و بر (۲) تقسیم می‌کنیم ← و دو جواب به دست آمده به ترتیب $e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $e^{\alpha x}\sin\beta x$ هستند
یکبار دیگر از هم کم کرده و بر (۲i) تقسیم می‌کنیم

که مستقل خطی می‌باشند ($\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\cot\beta x \neq$ ثابت) ← بنابراین فرم جواب عمومی در این حالت به صورت زیر است:

$$y_h=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

Ex) $y''+16y=0$: $\lambda^2+16=0$ معادله‌ی مشخصه $\rightarrow \lambda^2=-16=i^2\times 16$ $\rightarrow y_h=\cancel{e^{0x}}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$

$\lambda_1=4i$

$\lambda_2=-4i$

$\alpha=0\,,\ \beta=4$

نکته) هر معادله از درجه‌ی فرد دارای یک ریشه‌ی حقیقی است

اگر معادله‌ی مشخصه از درجه‌ی n ام باشد که دارای k ریشه‌ی مختلط موهومی باشد فرم جواب عمومی (۱) در این حالت به صورت زیر است

$$y_h=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_kx^{k-1})\cos\beta x+(c_{k+1}+c_{k+2}x+\cdots+c_{2k}x^{k-1})\sin\beta x\right]$$

Ex) $y^{(4)}+y^{(3)}-y'-y=0 \rightarrow \lambda^4+\lambda^3-\lambda-1=0$ (معادله‌ی مشخصه) $\rightarrow \lambda^3(\lambda+1)-(\lambda+1)=0 \rightarrow$

$(\lambda^2+1)(\lambda^4-1)=0$

$(\lambda^2+1)(\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \rightarrow$

$\lambda_1=\lambda_2=i$

$\lambda_3=\lambda_4=-i$ ($k=2$)

$\lambda_5=1$

$\lambda_6=-1$

$\alpha=0\,,\ \beta=1$

$\rightarrow y_h=e^{0x}[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x]+c_5e^{x}+c_6e^{-x}$

تعریف) D: عملگر دیفرانسیل / اپراتور مشتق

$$Dy=\frac{dy}{dx}=y'$$

$$D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}=y''$$

$$\vdots$$

$$D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}$$

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \rightarrow D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0 \rightarrow \underbrace{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)}y = 0$

$F(D)$ چند جمله‌ای اپراتور

$F(D)y = 0 \rightarrow (D-b_1)(D-b_2)\cdots(D-b_n)\, y \overset{?}{=} 0$

آیا خاصیت جابجایی برقرار است

$F(\lambda) = 0$ معادله‌ی مشخصه (مفسر)

$(D-1)(D-x)\,y = (D-x)(D-1)\,y \xrightarrow{\text{بررسی}}$ سمت چپ $= (D-1)(Dy - xy) = D^2y - D(xy) - Dy + Dx$

سمت چپ $= D^2y - y - (x+1)Dy + xy$

سمت راست $= D^2y - Dy - xDy + xy$

(۵)

* برابر نبودند 2 طرف تساوی

Ex) $(D^2-1)(D^2+1)^3 y = 0 \rightarrow$ معادله‌ی مشخصه $F(\lambda) = 0 \rightarrow (\lambda^2+1)^3(\lambda^2-1)\,y = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 ,\ \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = \lambda_4 = i$

$\lambda_5 = \lambda_6 = -i$

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \cancel{e^{0x}}\,[(c_3 + c_4 x)\cos x + (c_5 + c_6 x)\sin x]$

Ex) $D^2(D^2+4)^3(D^2-2D+5)^6 y \rightarrow$ معادله‌ی مشخصه $F(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda^2+4)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2i$

$\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -2i$

$\lambda_9 = \cdots = \lambda_{14} = 1 + 2i$

$\lambda_{15} = \cdots = \lambda_{20} = 1 - 2i$

$y_h = \cancel{e^{0x}}(c_1 + c_2 x) + \cancel{e^{0x}}[(c_3 + c_4 x + c_5 x^2)\cos x + (c_6 + c_7 x + c_8 x^2)\sin x] + e^x[\cdots]$

یادآوری $\begin{cases} z = \alpha + i\beta \\ \bar{z} = \alpha - i\beta \end{cases} \rightarrow$ ریشه‌ی مزدوج

* معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت :

معادله‌ی مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم : رابطه‌ی (۱) $y'' + py' + qy = f(x)$ که معادله‌ی همگن نظیر آن به صورت

(۲) $y'' + py' + qy = 0$ می‌باشد می‌دانیم جواب عمومی (۱) به صورت زیر است :

$y = y_h + y_p$

جواب عمومی (۲) ، جواب خصوصی (۱)

در این قسمت می‌خواهیم جواب خصوصی (۱) را بدون انتگرال‌گیری بدست آوریم ؛ به این منظور چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم :

به فرض اینکه سمت راست ① به صورت مقابل باشد ← $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ ③ که در آن

$P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n به صورت زیر باشد: $P_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n$

به فرض اینکه ④ $y_p=e^{\alpha x}Q_n(x)$ جواب خصوصی ① باشد که در آن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای به صورت $Q_n(x)=B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_n$ است که ضرایب B_i ($0\le i\le n$) مجهول هستند.

رابطه ⑤ $y_p'=\alpha e^{\alpha x}Q_n(x)+e^{\alpha x}Q_n'(x)$

رابطه ⑥ ← $y_p''=\alpha^2 e^{\alpha x}Q_n(x)+2\alpha e^{\alpha x}Q_n'(x)+e^{\alpha x}Q_n''(x)$

روابط ۴ و ۵ و ۶ را در ① که سمت راست آن ③ می‌باشد قرار می‌دهیم و در سمت چپ از $e^{\alpha x}$ فاکتور می‌گیریم به دست می‌آوریم

رابطه ⑦ $\cancel{e^{\alpha x}}\left[Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n(x)\right]=\cancel{e^{\alpha x}}P_n(x)$

برای نوشتن جواب خصوصی سه حالت زیر را باید بررسی کنیم:

الف) α ریشه معادله مشخصه نیست ← در این حالت اگر ④ را به عنوان جواب خصوصی در نظر بگیریم ⑦ تشکیل یک اتحاد را می‌دهد که برای تعیین ضرایب Q_n باید ضرایب جملات هم درجه ⑦ را متحد قرار داد و یک دستگاه (n+1) معادله و (n+1) مجهول را حل کنیم

EX) $y''-2y'+y=xe^{0x}$: $y''-2y'+y=0 \longrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$

x درجه ۱ P_n ، $e^{0x}: \alpha=0$

$y_h=(c_1+c_2x)e^x$

$\alpha=0$ ریشه معادله مشخصه نیست پس ← $y_p=e^{0x}(A_1+A_0x)$ ← $y_p'=A_0$

$y_p''=0$

$0-2A_0+(A_0x+A_1)=x$

$A_0x+(A_1-2A_0)=x \longrightarrow$ ضریب x^1: $A_0=1$ ، ضریب x^0: $A_1-2A_0=0\to A_1=2$ $\longrightarrow$ $y_p=x+2$

$y=y_h+y_p$

جواب خصوصی معادله $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$ به صورت $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\dots+y_{p_n}$ که در آن y_{p_1} جواب خصوصی معادله $y''+py'+qy=f_1(x)$ و y_{p_2} جواب خصوصی معادله $y''+py'+qy=f_2(x)$ و ... و y_{p_n} جواب خصوصی معادله $y''+py'+qy=f_n(x)$ هستند.

ب) $\alpha=0$ ریشه معادله کمکی است ← در این حالت اگر ④ را به عنوان جواب خصوصی ① در نظر بگیریم ② دیگر شکل را ایجاد نمی‌کند زیرا ضریب $Q_n(x)$ در سمت چپ ② صفر می‌شود برای رفع این اشکال باید ④ را به صورت زیر اختیار کنیم:

$$y_p = x e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ج) α ریشه مضاعف معادله کمکی است ← فرم جواب خصوصی ④ در این حالت باید به صورت زیر اختیار شود:

$$y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$$

به طور کلی اگر معادله ① از مرتبه n ام باشد و α ریشه معادله کمکی باشد که k مرتبه تکرار شده باشد فرم جواب خصوصی باید به صورت زیر اختیار شود:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

$k=0,1,\dots,n$

EX) $y''-2y'+y=2e^x$: $y_h=(c_1+c_2x)e^x \rightarrow$ $\alpha=1$ ریشه معادله کمکی است که ۲ بار تکرار شده است $\rightarrow$

$y_p=x^2e^x(A) \rightarrow y_p'=2Axe^x+Ax^2e^x \rightarrow y_p''=2Ae^x+4Axe^x+Ax^2e^x \rightarrow$

$Ae^x[\cancel{x^2}+4x+2-4x-\cancel{2x^2}+\cancel{x^2}]=2e^x \rightarrow$ $A=1$

$y_p=x^2e^x$

$y=y_h+y_p$

$\downarrow$

if $2e^x \rightarrow x^{-1}e^x$: با این روش حل نمی‌شود

به جای — داشتیم

EX) فقط فرم جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید.

تک تک ۳ تا

$$(D^2-1)^2(D^2+2D+5)^3y=x^2e^{2x}+5x^3e^{-x}+10e^{0x}$$

معادله کمکی : $(\lambda^2-1)^2(\lambda^2+2\lambda+5)^3=0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=\lambda_4=-1$ ، $\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=-1+2i,\ \lambda_8=\lambda_9=\lambda_{10}=-1-2i \rightarrow y_h=?$ با شما

$y_{p_1}=e^{2x}(A_0x^2+A_1x+A_2)$ ← $\alpha=2$ ریشه معادله کمکی نیست پس

$y_{p_2}=x^2e^{-x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)$ ← $\alpha=-1$ ریشه معادله کمکی است که ۲ بار تکرار شده

$y_{p_3}=e^{0x}C$ ← $\alpha=0$ ریشه معادله کمکی نیست پس

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

حالت (۲) به فرض اینکه سمت راست رابطه ۱ بصورت زیر باشد:

(۱) $y''+ay'+by=f(x)$ → اگر مثلثاتی باشد

$$*\ f(x)=e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right] \quad (۲)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هایی برحسب x هستند. در اینجا

$$\cos\beta x=\frac{e^{\beta x i}+e^{-\beta x i}}{۲}$$

$$\sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{۲i}$$

پس رابطه * بصورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$f(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}\left[\frac{p(x)}{۲}+\frac{q(x)}{۲i}\right]+e^{(\alpha-\beta i)x}\left[\frac{p(x)}{۲}-\frac{q(x)}{۲}\right]$$

برای نوشتن جواب خصوصی (۱) در این قسمت دو حالت زیر را باید بررسی کنیم:

الف) $\alpha+\beta i$ ریشه معادله مشخصه نیست:

رابطه ③

$$y_p=e^{\alpha x}\left[U(x)\cos\beta x+V(x)\sin\beta x\right]$$

فرم جواب خصوصی در این حالت بصورت مقابل می‌باشد که در آن درجه $U(x)$ و $V(x)$ برابر است با بزرگترین درجه $p(x)$ و $q(x)$

Ex) $y''+y=\sin ۲x\, e^{0x}$

$y''+y=0$ → معادله مشخصه $\lambda^۲+1=0$: $\lambda_1=i$, $\lambda_۲=-i$ → $y_h=c_1\cos x+c_۲\sin x$

$\alpha+\beta i=0+۲i$ ریشه معادله مشخصه نیست

پس $y_p=A\cos ۲x+B\sin ۲x$

$y_p'=-۲A\sin ۲x+۲B\cos ۲x$

$y_p''=-۴A\cos ۲x-۴B\sin ۲x$

جایگذاری می‌کنیم در معادله

$-۴A\cos ۲x-۴B\sin ۲x+A\cos ۲x+B\sin ۲x=\sin ۲x$

$-۳A\cos ۲x-۳B\sin ۲x=\sin ۲x$

ضریب $\cos ۲x$: $-۳A=0$ → $A=0$

ضریب $\sin ۲x$: $-۳B=1$ → $B=-\frac{1}{۳}$

→ $y_p=-\frac{1}{۳}\sin ۲x$ → $y=y_h+y_p$ ← ۲ فرم دارد

Ex) $y''+۲y'+y=\sin ۲x$

تمرین

Scanned by CamScanner

ب) α+βi ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است، فرم جواب خصوصی در این حالت:

$$y_p = x e^{\alpha x}[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x]$$ رابطه (۴)

(تذکر) فرم جواب‌های خصوصی (۳) و (۴) به صورت خودکار است حتی اگر سمت راست (۲) به یکی از ۲ شکل زیر باشد

$$e^{\alpha x}p(x)\cos\beta x \;:\; q(x)=0 \qquad \text{یا} \qquad e^{\alpha x}q(x)\sin\beta x \;:\; p(x)=0$$

به طور کلی اگر معادله‌ی (۱) از مرتبه‌ی nام باشد و α+iβ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی باشد که k مرتبه تکرار شده باشد فرم جواب خصوصی در این حالت به صورت زیر اختیار می‌شود

$$y_p = x^k e^{\alpha x}[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x]$$

به تعداد f ها باید جواب خصوصی بدست آوریم

یعنی نیازی به جواب عمومی نداریم

Ex) فقط فرم جواب خصوصی معادله‌ی زیر را بنویسید:

$$D^2(D^2-2D+5)^3 y = \underbrace{x}_{f_1} + \underbrace{x^2e^x\cos 2x}_{f_2} + \underbrace{xe^{-x}\sin 2x}_{f_3} + \underbrace{x^3\sin x}_{f_4} + 1$$

$D^2(D^2-2D+5)^3 y = 0 \to$ معادله‌ی کمکی: $\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+5)^3=0 \to \lambda_1=\lambda_2=0$ ۲ بار تکرار

$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=1+2i$ ۳ بار تکرار

$\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=1-2i$ ۳ بار تکرار

مرتبه‌ی ۸ ← ۸ ریشه بدست آوریم

f_1: $(x+1)e^{0x}$: $\alpha=0$ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است که ۲ بار تکرار شده پس

$$y_{p_1} = x^2 e^{0x}(A_0x+A_1)$$

f_2: $\alpha+i\beta=1+2i$ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است که ۳ بار تکرار شده پس

$$y_{p_2} = x^3 e^{x}[(B_0x^2+B_1x+B_2)\cos 2x + (C_0x^2+C_1x+C_2)\sin 2x]$$

f_3: $\alpha+i\beta=-1+2i$ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی نیست پس ← x اضافه نمی‌کنیم

$$y_{p_3} = e^{-x}[(D_0x+D_1)\cos 2x + (E_0x+E_1)\sin 2x]$$

f_4: $\alpha+i\beta=0+i$ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی نیست پس

$$y_{p_4} = e^{0x}[(F_0x^3+F_1x^2+F_2x+F_3)\cos x + (G_0x^3+G_1x^2+G_2x+G_3)\sin x]$$

$$\boxed{y_p = y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}}$$

۳ نمره دارد

هر دو جزء cos x و sin x بود باید از تغییر پارامتر بروی (روش ضرایب نامعین مخصوص sin x و cos x)

حال سؤال این است که معادله‌ی $y''+y=\sec x$ را چگونه حل خواهید کرد؟

روش تغییر متغیر

● معادله‌ی مرتبه‌ی دوم زیر را در نظر بگیرید:

① $y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=g(x)$

در این روش ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن نظیر معادله‌ی ① را بدست آوریم یعنی معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم

② $y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=0$

به فرض y_1 و y_p دو جواب مستقل خطی ② باشند پس جواب عمومی آن ② به صورت $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

می‌باشد؛ فرض اینکه c_1 و c_2 توابعی برحسب x باشند و رابطه‌ی

③ $y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2$

جواب خصوصی ① باشد

$$y_p' = u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

با قرار دادن آن

④ $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$

⑤ $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$

⑥ $y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$

۳، ۵ و ۶ را در ① قرار می‌دهیم که به دست می‌آید

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + \underbrace{\left(y_1'' + P_1(x) y_1' + P_2(x) y_1\right)}_{0} u_1 + \underbrace{\left(y_2'' + P_1(x) y_2' + P_2(x) y_2\right)}_{0} u_2 = g(x)$$

چون y_1 و y_2 جواب‌های ② هستند

⑦ $u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$

برای به دست آوردن u_1 و u_2 باید دستگاه معادلات ④ و ⑦ را حل کنیم یعنی دستگاه زیر را

⑧ $\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2 = g(x) \end{cases}$

رونسکین $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-y_2\, g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1\, g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

دستگاه را از روش کرامر

⑨ $u_1 = -\int_0^x \frac{y_2(s)\, g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\, ds$ ⑩ $u_2 = \int_0^x \frac{y_1(s)\, g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\, ds$

البته چون می‌خواهیم جواب خصوصی ① را بیابیم پس در ⑨ و ⑩ ثابت‌های انتگرال‌گیری را به کار نمی‌بریم

با قرار دادن ⑨ و ⑩ در ③ جواب خصوصی ① به دست می‌آید پس

$y = y_h + y_p$ جواب عمومی ①

به طور کلی اگر معادله‌ی ① از مرتبه‌ی n ام باشد دستگاه ⑧ به صورت مقابل است:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$u_1' y_1^{(i)} + u_2' y_2^{(i)} + \dots + u_n' y_n^{(i)} = 0$$
$$\vdots$$
$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(x)$$

که در آن $i = 0, 1, \dots, n-2$

$n-1$ شرط اعمال می‌شود

استفاده از روش تغییر پارامتر

Ex) $y'' + y = \sec x$ $g(x)$

حل معادله همگن نظیر $\longrightarrow y''+y=0 \longrightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^2+1=0$ ، $\lambda_1 = i$ ، $\lambda_2=-i$ $\longrightarrow y_h = c_1\cos x + c_2 \sin x$

به فرض اینکه c_1 و c_2 توابعی بر حسب x باشند و جواب خصوصی معادله داده شده $y_p = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$ ($y_1 = \cos x$ ، $y_2 = \sin x$)

برای به دست آوردن u_1 و u_2 دستگاه زیر را تشکیل داده و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ u_1'(-\sin x) + u_2'(\cos x) = \sec x \end{cases}$$

از روش کرامر $\longrightarrow$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x \sec x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \longrightarrow u_1 = \ln \cos x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}}{1} = 1 \longrightarrow u_2 = x$$

$$y_p = (\cos x)(\ln \cos x) + x \sin x$$

* توجه داشته باشید که ضریب (y'') یک باشد.
حال اگر ضریب آن x^2 بود چه باید کرد؟ می‌رویم سراغ معادلات خاص:

معادلات کوشی یا کوشی اویلر:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$ کوشی اویلر مرتبه n ام

که در آن a_i ها $i \le n$ اعداد ثابت و $a_n \neq 0$

(مرتبه ۲): $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 \longrightarrow$ معادله کوشی با استفاده از تغییر متغیر $x = e^z$ ($z = \ln x$) به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d\frac{dy}{dz}}{d\cancel{x}\,z}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

مقدار y' و y'' را در معادله داده شده قرار داده $\longleftarrow$

$$a_2 \cancel{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + a_1 \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\frac{dy}{dz} + a_0 y = 0$$

$$a_2 \frac{d^2y}{dz^2} + (a_1 - a_2)\frac{dy}{dz} + a_0 y = 0$$ برای مرتبه (۲)

Ex) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \longrightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (-3-1)\frac{dy}{dz} + 4y = 0$ ($x = e^z$ ، $a_2 = 1$ ، $a_1 = -3$ ، $a_0 = 4$) $\longrightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ، $(\lambda-2)^2 = 0$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$y = (c_1 + c_2 \cancel{x}\,z)e^{2\cancel{x}\,z} \longrightarrow y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^2$$

Ex) با استفاده از تغییر متغیر $y=x^r$ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2y''+5xy'+4y=0$$

$y'=rx^{r-1}$

$y''=r(r-1)x^{r-2}$ → قرار دادن مقادیر y' و y'' در معادله و فاکتورگرفتن از x^r → $x^r\left[r(r-1)+5r+4\right]=0$ → $y_2=u(x)\,y_1$

$r^2+4r+4=0$

$r_1=r_2=-2$

$$y_2=x^{-2}\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int f(x)dx}dx=x^{-2}\int\frac{1}{x^{-4}}\overbrace{e^{-\int\frac{5}{x}dx}}^{\frac{1}{x^5}}dx=x^{-2}\int\frac{1}{x}dx=x^{-2}\ln x$$

$$y=(c_1+c_2\ln x)\,x^{-2}$$

Ex) $x^3y'''+5x^2y''+7xy'+8y=0$ (اویلر مرتبه ۳) → $x=e^z$ روش حل

یا $y=x^r$ ✓

$y'=rx^{r-1}$, $y''=r(r-1)x^{r-2}$ → مقادیر را در معادله قرار دادن و فاکتور گرفتن : $x^r\left[r(r-1)(r-2)+5r(r-1)+7r+8\right]=0$ →

$y'''=r(r-1)(r-2)x^{r-3}$

$(r+2)(r^2+4)=0$ → $r_1=-2$, $r_2=2i$, $r_3=-2i$ →

یادآوری : $x^{\beta i}=(e^{\ln x})^{\beta i}=e^{\beta i\ln x}=\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)$

$$y=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln x)+c_3\sin(2\ln x)$$

Ex) با استفاده از تغییر متغیر $y=u(x)\cdot v(x)$ شرطی را بیابید که معادله زیر تبدیل به یک معادله با ضرایب ثابت شود:

$$y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=g(x)$$

* $y'=u'v+uv'$, $y''=u''v+2u'v'+uv''$ → مقادیر y' و y'' را در معادله داده شده جایگزین کرده

** $u''v+\underbrace{(2v'+f_1(x)v)}_{\text{ضریب } u'}u'+(v''+f_1(x)v'+f_2(x)v)u=g(x)$ → $2v'+f_1(x)v=0$ معادله جدایی‌پذیر

باید این برابر صفر باشد

$$\int\frac{dv}{v}=\int-\frac{1}{2}f_1(x)dx$$

$$\ln v=-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx$$

$$\boxed{v=e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}}$$

ثابت انتگرال گیری را صفر می‌گیریم

$v'=-\frac{1}{2}f_1(x)e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}=-\frac{1}{2}f_1(x)\,v$

$v''=-\frac{1}{2}f_1'(x)\,v-\frac{1}{2}f_1(x)\,v'=-\frac{1}{2}f_1'(x)\,v+\frac{1}{4}f_1^2(x)\,v$

مقادیر v و v' و v'' را در معادله * جایگزین کرده و از v فاکتور گرفته

Scanned by CamScanner

$$v\left[u''+\left(-\frac{1}{2}f_1'+\frac{1}{4}f_1^2-\frac{1}{2}f_1^2+f_2\right)u\right]=g(x)\rightarrow u''+\left(f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2\right)u=\frac{g(x)}{v}$$

رابطه‌ی بدست آمده

$f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=$ ثابت : اگر ثابت شود : به معادله خطی تبدیل می‌شود با ضرایب ثابت

$f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=\frac{\text{ثابت}}{x^2}$: اگر شود : به معادله کوشی تبدیل می‌شود

$a_2(bx-c)^2y''+a_1(bx-c)y'+a_0y=0$: فرم کلی‌تر معادله کوشی *

$b=1,\ c=0\ ,\ e^z=bx-c$

$$u''+\frac{a}{x^2}u=\frac{g(x)}{v}\rightarrow x^2u''+au=\frac{x^2g(x)}{v}$$

Ex) $y''-2y'\tan x-10y=xe^x\sec x$ بخاطر وجود tan ← NO

$f_1=-2\tan x\ ,\ f_2=-10\ ,\ g(x)=xe^x\sec x$

$$f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=-10-\frac{1}{2}(-2\sec^2x)-\frac{1}{4}(-2\tan x)^2=-10+\sec^2x-\tan^2x=-9$$

پس می‌توانیم از تغییر متغیر $y=u(x).v(x)$ جواب معادله را بدست آوریم برای یافتن $v(x)$:

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int-2\tan x\,dx}=e^{\ln\sec x}=\sec x$$

برای بدست آوردن u باید معادله‌ی بدست آمده بالا را حل کنیم یعنی ←

$$u''-9u=xe^x.\frac{\sec x}{\sec x}$$

جزوه‌ی شنبه ۹۸/۱/۲۴ نیز برای امتحان میان‌ترم مورد نیاز است و باید خوانده شود

ص ۳۷