$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t)$$ مهمترین اصل درس

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \Rightarrow P(t) = ce^{kt}$$ در یک نمونه خاص

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(t)P(t) \Rightarrow P(t) = e^{\int k(t)\,dt}$$ در حالت کلی کلی‌تر:

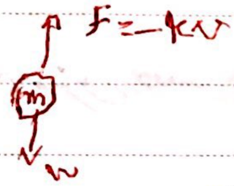
همگن: $P(t)$

غیرهمگن: $r(t)$ ، $P(t)$

اگر در حالت کلی‌تر سیستم غیرهمگن باشد

همگن: $\frac{dP(t)}{dt} - k(t)P(t) = 0$

غیرهمگن: $\frac{dP(t)}{dt} - k(t)P(t) = r(t)$



مثال دوم: به همراه مثال اول کل درس را پوشش می‌دهد.

$$\Rightarrow F = ma \Rightarrow mg - ky' = my'' \Rightarrow y'' + \frac{k}{m}y' = g \quad (v = y')$$

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

تعریف معادله دیفرانسیل: هر معادله که شامل مشتق مجهول باشد.

1) $y' - 2xy = e^x$ مرتبه اول

2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + 1$

$y^{(4)} - y = 0$ مرتبه چهارم

مرتبه معادله دیفرانسیل بالاترین مشتق موجود در معادله است.

میان ترم:
- فصل 0: ورود به درس
- فصل 1: معادلات مرتبه اول
- فصل 2: معادلات خطی مرتبه دوم و بالاتر

پایان ترم:
- فصل 3: حل معادلات به کمک سری‌های توانی
- فصل 4: تبدیل لاپلاس و کاربردها
- فصل 5: حل دستگاه معادلات خطی

Subject:
Date

بارم بندی:
- ~~میان ترم ۸ نمره از ۲۰~~
- پایان ترم ۱۲ از ۲۰
- TA: ۲۰ از ۲۰۰ + فعالیت کلاسی: میانگین ۲ نمره از ۲۰

فصل اول: حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
- صریح: $y' = f(x,y)$
- ضمنی: $F(x,y,y') = 0$
- دیفرانسیلی: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

هدف: پیدا کردن تابع $y = u(x)$ می‌باشد که در معادله صدق کند.

مهمترین دسته بندی: در حالت کلی:
1) خطی $y' + f(x)y = r(x)$
2) غیرخطی بی‌نهایت شکل دارد.

حل و تحلیل جواب معادله خطی مرتبه اول:

$$y' + \underbrace{f(x)}_{\text{تابع تناسب}}\, y = r(x)$$

اگر $f(x) = a$ ثابت باشد معادله با ضرایب ثابت نامیده می‌شود.

$$y' + \underbrace{a}_{\text{ضریب تناسب}}\, y = r(x)$$

اگر $r(x)$ صفر باشد معادله همگن نامیده می‌شود.

1) $y' + ay = 0 \Rightarrow y = ce^{-ax}$

2) $y' + f(x)y = 0 \Rightarrow y(x) = ce^{-\int f(x)dx}$

$y' + f(x)y = r(x)$ با ضرب طرفین در $e^{\int f(x)dx}$ داریم.

$$\Rightarrow y'e^{\int f(x)dx} + f(x)ye^{\int f(x)dx} = r(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow \left(ye^{\int f(x)dx}\right)' = r(x)e^{\int f(x)dx}$$

$\Rightarrow y e^{\int f(x)dx} = c + \int r(x) e^{\int f(x)dx} dx \Big) \; y = c e^{\int -f(x)dx} + \int r(x) e^{\int f(x)dx} dx \, e^{-\int f(x)dx}$

مثال: مطلوبست حل:

$y' - 2y = x - 1$

$F = e^{\int -2} = e^{-2x} \Rightarrow (ye^{-2x})' = (x-1)e^{-2x} \Rightarrow ye^{-2x} = c +$

$\int (x-1)e^{-2x}dx \; \frac{u = x-1 \quad dv = e^{-2x}dx}{du = dx \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}} \Rightarrow ye^{-2x} = c + (x-1)(-\frac{1}{2}e^{-2x})$

$-\frac{1}{2}e^{-2x}dx \Rightarrow y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

اما در حالت کلی: روش های حل معادله خطی مرتبه اول

۱- روش لایب نیتز ← $x e^{\int f(x)dx}$

۲- روش ضرایب نامعین برای معادلات با ضرایب ثابت و $r(x)$ خاص

۳- روش لاگرانژ

روش ضرایب نامعین: اگر معادله با ضرایب ثابت باشد: $y' + a_1 y = r(x)$

اگر $r(x)$ یک تابع چندجمله ای، نمایی یا مثلثاتی و یا ترکیب (جمع و ضرب) آن ها باشد پاسخ غیرهمگن از جنس $r(x)$ می باشد. توجه: در این جا صرفاً اشاره می کنیم و بعداً گسترش می دهیم.

$y' - 2y = x - 1$ با روش ضرایب نامعین $\Rightarrow y(x) = ce^{2x} + \underbrace{Ax + B}_{\text{باشد}}$ باید از همان جنس

که A و B دو ضریب نامعین هستند که با جایگذاری در معادله همگن داریم:

$\Rightarrow A - 2(Ax + B) = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ -2B + A = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Subject:
Date

روش لاگرانژ: اگر معادله با ضرایب ثابت نباشد یعنی ؛ $y' + f(x)y = r(x)$

فرض کنید معادله همگن حل شده است، $y(x) = ce^{-\int f(x)dx} + y_p(x)$

$y_p(x)$ قرار است به $r(x)$ پاسخ دهد لذا $y_p(x) = c(x)e^{-\int f(x)dx}$

با جایگزینی در معادله غیرهمگن تابع نامعین $c(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow c'(x)e^{-\int f(x)dx} - f(x)c(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)c(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = r(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int r(x)e^{\int f(x)dx}dx \Rightarrow$$

$$y_p(x) = \left(\int r(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)e^{-\int f(x)dx}$$

توجه: در اینجا روش لایب نیتز ساده‌تر است اما در حالت کلی روش لاگرانژ را ترجیح می‌دهیم چون به معادلات خطی مرتبه‌های بالا قابل تعمیم است.

مثال: $y' - 2xy = e^{x^2}$

حل: یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب متغیر غیرهمگن است.

با روش لایب نیتز: $F = e^{\int -2x} = e^{-x^2} \Longrightarrow (ye^{-x^2})' = e^0 = 1 \Rightarrow$

$$ye^{-x^2} = x + c \Rightarrow y(x) = xe^{x^2} + ce^{x^2}$$

حل با روش لاگرانژ: ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم. $y' - 2xy = 0 \Rightarrow y_h(x) = ce^{x^2}$

Subject:
Date

پس جواب کامل معادله

$$y(x) = \underbrace{c e^{x^2}}_{y_h(x)} + \underbrace{c(x) e^{x^2}}_{y_p(x)}$$

برای تعیین تابع نامعین $c(x)$ y_p را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$c'(x) e^{x^2} + 2x e^{x^2} c(x) - 2x e^{x^2} c(x) = e^{x^2} \Rightarrow c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x$$

مطلوبست حل معادله زیر:

$$\begin{cases} y' - y = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

حل: یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول که تابع بار در فضا بطه ای دارد جواب معادله دیفرانسیل باید پیوسته باشد.

چون برای داشتن y' و مشتق پذیر بودن باید پیوسته باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = c_1 e^{x} + A \rightarrow & \text{هم جنس از جنس فرمش در بالا} \\ y = c_2 e^{x} & \text{جایگذاری} \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

اکنون باید c_1 و c_2 را با توجه به دو شرط تعیین کنیم.

شرط اول: $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 e^0 - 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$

شرط دوم: پیوستگی در صفر: $2e^1 - 1 = c_2 e^1 \Rightarrow c_2 = 2 - \frac{1}{e} \Rightarrow y(x) = \begin{cases} 2e^{x} - 1 & ; 0 < x < 1 \\ (2 - \frac{1}{e}) e^{x} & ; x > 1 \end{cases}$

حل معادلات غیرخطی: هر معادله ای که خطی نباشد غیر خطی است. توجه هیچ مسئله ای در عمل رفتار خطی ندارد، ما فرض خطی سازی را انجام داده و مسئله را حل می کنیم. توجه: معادلات غیر خطی در حالت کلی حل تحلیلی ندارند.

در موارد خاص قابل حل هستند
1- معادلات جدایی پذیر
2- معادلات کامل
3- برخی معادلات با تغییر متغیر یا روش های خیلی خاص حل می شوند.

اگر $g(y) = y$ باشد سیستم خطی است. در غیر این صورت غیرخطی جدایی پذیر است.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$

Subject:
Date

$y' = f(x)y \Rightarrow y' = ce^{\int f(x)dx}$ در حالت خاص فرض کنید $g(y) = y$

حال با انتگرال از طرفین داریم: $\frac{dy}{dx} = f(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx \Rightarrow$

$\ln y + \cancel{c}^{-\ln c} = \int f(x)dx \Rightarrow \ln \frac{y}{c} = \int f(x)dx \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow$

$y(x) = ce^{\int f(x)dx}$

اگر معادله غیرخطی جدایی پذیر باشد با انتگرال از طرفین معادله حل می شود.
$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

آیا جواز انتگرال از طرفین را داریم: چون y به x وابسته است $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad y = u(x)$

$\int \frac{u'(x)dx}{g(u(x))} = \int f(x)dx$

مثال: یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی است اما جدایی پذیر است.
$y' = e^{x-y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y} \Rightarrow \int \frac{dy}{e^{-y}} = \int e^x dx \Rightarrow e^y = e^x + c$

جواب به صورت ضمنی می ماند.

مثال: $\frac{1+y^2}{x}dx + \ln x \tan^{-1} y\, dy = 0$

یک معادله غیرخطی مرتبه اول جدایی پذیر است. چون ضرایب dx و dy هر دو جدایی پذیر اند.

$\int \frac{1}{x\underbrace{\ln x}_{u}}dx = \int \frac{-\tan^{-1} y}{1+y^2}dy \Rightarrow \ln(\ln x) + c = -\frac{1}{2}(\tan^{-1} y)^2$

Subject:
Date

گاهی معادلات به طور مستقیم جدایی پذیر نمی باشند بلکه با یک تغییر متغیر جدایی پذیر می شوند.

مثال: یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی که جدایی پذیر هم نمی باشد: $y' = \frac{1}{x+y}$

نگرش ۱: درست است که y برحسب x خطی نمی باشد اما $\to x' = x+y$

نگرش ۲: با انتخاب $u = x+y \Rightarrow u' = 1+y' \Rightarrow u'-1 = \frac{1}{u} \Rightarrow$

$\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u} \Rightarrow \int \frac{u+1-1}{u+1} du = \int dx \Rightarrow$

$u - \ln(1+u) = x+c \Rightarrow x+y-\ln(x+y+1) = x+c$

توجه: روش تغییر متغیر نیاز به تجربه بیشتر و دسته بندی مناسب دارد که بعداً به آن می پردازیم.

معادلات همگن درجه n ام: این معادلات در نهایت به شکل زیر قابل نمایش هستند: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

که با تغییر متغیر $\frac{y}{x} = u$ داریم: $y = ux \to y' = u + xu'$ بعد جایگذاری $u + xu' = g(u) - u$

که یک معادله جدایی پذیر است: $\int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$

مثال: $xy' - y = x^2 e^{-\frac{y}{x}} \xrightarrow{\div x} y' = \frac{y}{x} + x e^{-\frac{y}{x}} \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} u + xu' = u + xe^{-u}$

$\Rightarrow u' = e^{-u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{e^u} \Rightarrow e^u du = dx \Rightarrow e^u = x+c \Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = x+c$

تعریف: گوییم تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n ام می باشد هرگاه: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

Subject:
Date

$f(x,y)=x^2+y^2-xy \to f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2-\lambda x\lambda y$

$=\lambda^2(x^2+y^2-xy)=\lambda^2 f(x,y)$ همگن از درجه ۲.

$f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x}) \to f(\lambda x,\lambda y)=\tan^{-1}(\frac{\lambda y}{\lambda x})=\lambda^0\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ از درجه صفر.

$f(x,y)=x^2-y \to$ همگن نیست

تعریف: گوییم معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن از درجه n ام است هرگاه هردو

تابع M و N باهم توابع همگن از درجه n ام باشند. به عنوان نمونه $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ (1

همگن از درجه اول است. حتی اگر به صورت صریح بیان کنیم $\to y'=\frac{x+y}{x-y}$ تابع درجه صفر / معادله دیفرانسیل درجه یک

2) $y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ صفر. معادله دیفرانسیل درجه 2.

لم: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن درجه n باشد آنگاه معادله را

می‌توان به صورت $y'=g(\frac{y}{x})$ درآورد.

برهان: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Rightarrow y'=\frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$

چون M و N معادله دیفرانسیل همگن درجه n ام است $f(x,y)$ یک تابع همگن درجه صفر است.

$y'=f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$ که با انتخاب $\lambda=\frac{1}{x}$ داریم.

λ یک پارامتر اختیاری است.

Subject:
Date

$$\Rightarrow y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

نتیجه: اگر یک معادله دیفرانسیل همگن از درجه n باشد با تقسیم طرفین یا صورت و مخرج بر x^n به صورت $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ خواهیم رسید.

مثال: $(x+y)dx - (x-y)dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y} \xrightarrow{\div x} y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \xrightarrow{\frac{y}{x}=u}$

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow xu' = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} \Rightarrow xu' = \frac{u^2+1}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{u^2+1}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln x + c \Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln x + c$$

مثال: $(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} \xrightarrow{\div x^2} y' = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} \Rightarrow y' =$

$$\frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow u + xu' = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} \Rightarrow xu' = \frac{1-u^2}{2u} \Rightarrow \frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\ln(1-u^2) = \ln x + \ln c \Rightarrow \frac{1}{1-u^2} = cx \Rightarrow 1-u^2 = \frac{1}{cx} \Rightarrow 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{cx}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{x}{c} \Rightarrow y^2 = x^2 - \frac{x}{c} \to y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{x}{c}}$$

معادلات دو خطی:
$$y' = \frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1}$$

اگر این معادله c_0 و c_1 نبود همگن از درجه $n=1$ است.

کافی است با انتقال محورهای مختصات به محل تقاطع دو خط c_0 و c_1 حذف می‌شوند.

Subject:
Date

با تغییر متغیر $\begin{cases} X = x+\alpha \\ Y = y+\beta \end{cases}$ داریم: $y' = \frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} \to y' = \frac{a_0 X + a_1 Y}{b_0 X + b_1 Y}$

اما اگر دو خط موازی باشند با تغییر متغیر $\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = m \Rightarrow \begin{cases} a_0 = m a_1 \\ b_0 = m b_1 \end{cases}$ داریم

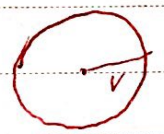
$$y' = \frac{m(a_1 x + b_1 y) + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} \to u = a_1 x + b_1 y$$

مثال: $(x+y-1)dx - (x-y+1)dy = 0 \to y' = \frac{x+y-1}{x-y+1}$, $\frac{a_0}{a_1} = 1 , \frac{b_0}{b_1} = -1$ موازی نیستند

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=x \\ Y=y+1 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{X+Y}{X-Y} \to \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

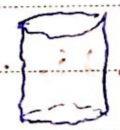
$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Y}{X^2}\right) = \ln X + C \xrightarrow[Y=y-1]{X=x}$$

مروری بر مفاهیم مشتق و انتگرال:



$S = \pi R^2$, $A = 2\pi R$ $\quad \frac{ds}{dr} = 2\pi r = A \quad \int A\,dr = \int 2\pi r\,dr = \pi r^2 = S$

$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \to S = \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \quad \underbrace{dV}_{\text{حجم}} = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{سطح}} \underbrace{dr}_{\text{طول}}$ همچنین دیفرانسیل

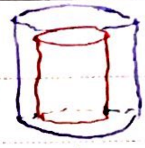
استوانه:  $V = \pi r^2 h$ به دو طریق می‌توانیم آن را بسازیم

$\to V_r = 2\pi r h$ مساحت جانبی $\qquad \to V_h = \pi r^2$ مساحت بالا

مشتق استوانه ـــ آهنگ تغییرات یک بردار است $\nabla V = (2\pi r h, \pi r^2)$

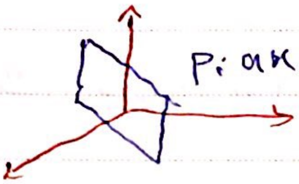
Subject:
Date

دیفرانسیل کل : $dV = 2\pi r h\, dr + \pi r^2 dh + (?)\, dr\, dh$



شیب خط : $m = a$

$y = ax + b$



$P: ax + by + cz = d$

(a, b, c) بردار شیب صفحه

شیب صفحه : $\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right) = (a, b, c) = \vec{N}$

$V = \pi r^2 h$

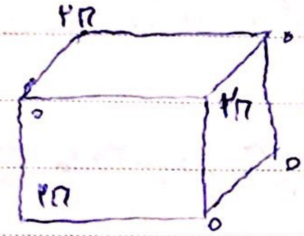
تانسور مرتبه یک

$DV = \nabla V = (2\pi r h, \pi r^2)$

تانسور مرتبه ۲

$D^2 V = \nabla^2 V = \begin{pmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{pmatrix}$

$D^3 V =$



تانسور مرتبه ۳ ← ۸ عضو - ماتریس مکعبی

تعریف : دیفرانسیل کامل : اگر $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد دیفرانسیل کامل آن $df = f_x dx + f_y dy$ است.

تعریف : معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل است اگر تابعی مانند $u(x,y)$ موجود باشد که $du = u_x dx + u_y dy = M dx + N dy = 0$ به عبارت دیگر

در این صورت $\begin{cases} u_x = M \\ u_y = N \end{cases}$

$u(x,y) = c$ جواب معادله دیفرانسیل است.

مثال :

الف) $y\,dx + x\,dy = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = c$

ب) $\frac{-y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = c \Rightarrow y = cx$

Subject:
Date

ج) $2xe^{x^2}\tan^{-1}y\,dx+\dfrac{e^{x^2}}{1+y^2}\,dy=0 \longrightarrow d(e^{x^2}\tan^{-1}y)=0$

سؤال: چگونه تشخیص دهیم کامل است. - چطور معادله کامل حل می‌شود.

قضیه: تحت شرایط مناسب معادله دیفرانسیل؛

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Longleftrightarrow M_y=N_x$$

برهان: فرض کنید معادله دیفرانسیل کامل است. => وجود دارد $u(x,y)=c$

طبق قضیه مشتق های آمیخته ترتیب مشتق مهم نیست

$$\begin{cases}u_x=M \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} u_{xy}=M_y\\ u_y=N \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} u_{yx}=N_x\end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{xy}=u_{yx} \Rightarrow M_y=N_x$$

تعبیر فیزیکی: معادلات کامل یا معادلات حاکم بر میدان های پایستار است.

چگالی چرخش $\mathrm{curl}(F)=(M_y-N_x)k$; if $\mathrm{curl}(F)=0 \Rightarrow M_y=N_x$

برعکس برهان با یک مثال؛

$$(\underbrace{2xe^y+\sin y-\sin x}_{M})dx+(\underbrace{x^2e^y+x\cos y}_{N})dy=0$$

$M_y=2xe^y+\cos y$ و $N_x=2xe^y+\cos y$ به عبارت فیزیکی چگالی چرخش صفر است.

پس وجود دارد: $u(x,y)$ ها که $\begin{cases}u_x=M\\ u_y=N\end{cases}$ از بالایی نسبت به x و از پایینی نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

Subject:
Date

$f(x,y)=x^2+y^2+1 \Rightarrow F_x = 2x \xrightarrow{\int} f = x^2+c(y)$

با جایگذاری در شرط یک
$u_y = N \xrightarrow{\int} u = x^2e^y + x\sin y + \underbrace{c(x)}_{\text{مجهول}}$

$\Rightarrow u_x = \cancel{2xe^y} + \cancel{\sin y} + c'(x) = \cancel{2xe^y} + \cancel{\sin y} - \sin x \Rightarrow c'(x) = -\sin x \Rightarrow$

$c(x) = \cos x + c \Rightarrow$ جواب معادله کامل: $u(x) = x^2e^y + x\sin y + \cos x + c_0 = C$

که همان تابع پتانسیل همان F می باشد.

سؤال: آیا معادلاتی که کامل نمی باشند را می توان کامل نمود؟

مثال: $2x\tan^{-1}y\,dx + \frac{1}{1+y^2}dy = 0 \Rightarrow M_y = \frac{2x}{1+y^2},\ N_x = 0 \Rightarrow M_y \neq N_x$

$\Rightarrow 2xe^{x^2}\tan^{-1}y\,dx + \frac{e^{x^2}}{1+y^2}dy = 0$ اما با ضرب در e^{x^2} کامل می شود.

سؤالات: ۱- عامل یا فاکتور انتگرال ساز چیست؟ ۲- چگونه بدست می آید؟ ۳- آیا همیشه وجود دارد و در صورت وجود یکتاست؟ ۴- جواب معادله کامل شده چه ارتباطی با جواب معادله ناکامل متناظر دارد؟

۵- ارزش این مطلب چقدر است؟

توضیح: عامل انتگرال ساز تابعی مانند $f(x,y)$ می باشد که با ضرب در معادله ناکامل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ به معادله کامل شده می رسیم.

$FMdx + FNdy = 0 \xrightarrow{\text{کامل شده است}} (FM)_y = (FN)_x \Rightarrow F_yM + FM_y = FN_x + F_xN$ (۳

Subject:
Date

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) است که در درس ریاضی مهندسی آن را می خوانیم.

توجه کنید در حالت کلی قابل حل نمی باشد.

فرض کنید $F=F(z)$ که $z=g(x,y)$ معلوم می شود، از قاعده زنجیره ای داریم.

با این فرض که معادله جدایی پذیر است داریم:

$$\frac{dF}{dz} z_y M + F M_y = \frac{dF}{dz} z_x N + F N_x$$

در صورتی فرض درست است که

$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = -\frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N}\, dz$$

$$-\frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N} = f(z) \rightarrow$$ تابعی برحسب z باشد

در این صورت داریم $\rightarrow F(z) = e^{\int f(z)\,dz}$

توجه: در معادله $z=g(x,y)$ باید داده شود یا حدس آن خیلی ساده باشد. در این صورت دو حالت خاص باید بررسی شود.

حالت اول: فرض کنید $F=F(x)$ اگر تابع صرفاً برحسب x باشد.

$$\rightarrow +\frac{1}{N}(M_y - N_x) = F(x)$$

حالت دوم: فرض کنید $F=F(y)$ اگر تابع صرفاً برحسب y باشد.

$$-\frac{1}{M}(M_y - N_x) = F(y)$$

مثال: $2x\tan^{-1}y\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy = 0$

Subject:
Date

حل: آیا عاملی برحسب x دارد؟

$$\frac{1}{N}(M_y - N_x) = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}}\left(\frac{2x}{1+y^2} - 0\right) = 2x$$

لذا فرض ما درست است.

$$\Rightarrow F = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$\times e^{x^2} \Rightarrow 2xe^{x^2}\tan^{-1}y\,dx + \frac{e^{x^2}}{1+y^2}dy = 0 \Rightarrow d(e^{x^2}\tan^{-1}y) = 0 \Rightarrow e^{x^2}\tan^{-1}y = C$$

آیا تابعی برحسب y دارد.

$$\rightarrow -\frac{1}{M}(M_y - N_x) = \frac{1}{2x\tan^{-1}y}\left(\frac{2x}{1+y^2}\right) - 0 = \frac{-1}{(1+y^2)\tan^{-1}y}$$

$$\Rightarrow F(y) = e^{-\int \frac{1}{(1+y^2)\tan^{-1}y}} = e^{-\ln(\tan^{-1}y)} = \frac{1}{\tan^{-1}y}$$

پس این حدس هم درست است.

$\times \Longrightarrow$

مثال: تحت چه شرایطی معادله دیفرانسیل زیر عاملی برحسب $z = xy$ دارد. $3y^2dx + 4xy\,dy = 0$

$$\rightarrow -\frac{M_y - N_x}{Z_y M - Z_x N} \Rightarrow -\frac{M_y - N_x}{xM - yN} = f(xy) = f(z)$$ شرط

$$\rightarrow -\frac{6y - 4y}{x(3y^2) - y(4xy)} = \frac{-2y}{-xy^2} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{z} \xrightarrow{\text{فاکتور انتگرال‌ساز}} F(z) = e^{\int F(z)dz}$$

$$= e^{\int \frac{2}{z}dz} = e^{2\ln z} = z^2 = x^2y^2 \xrightarrow{\text{معادله} \times x^2y^2} 3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy = 0 \Rightarrow$$

$$d(x^3y^4) = 0 \Rightarrow x^3y^4 = C$$

تمرین: α و β را طوری بیابید که $F(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال‌ساز معادله زیر باشد.

$$3y^2dx + 4xy\,dy = 0$$

Subject:
Date

روش‌های حل:

$$y' = f(x,y) \begin{cases} f(x,y) = p(x)y + r(x) & \text{:تا این جا} \\ f(x,y) = g(x)\,h(y) \\ f(x,y) = \dfrac{-M(x,y)}{N(x,y)} \end{cases}$$

یک معادله خطی

در غیر این صورت با یک تغییر متغیر یا تبدیل معادله را به یکی از صورت‌های فوق در آورده و حل می‌کنیم.

تغییر متغیر:
- هوش زده شود
- داده شده است
- معروف هستند.

مثال: $\underbrace{y'\cos y}_{u'} = \underbrace{\sin y}_{u} + \sin x \Rightarrow u' = u + \sin x$ ، معادله نسبت به y یا x خطی نیست.

$$\Rightarrow u' - u = \sin x \Rightarrow F = e^{\int -1} = e^{-x} \Rightarrow (ue^{-x})' = e^{-x}\sin x \Rightarrow ue^{-x} = \int e^{-x}\sin x$$

$$\frac{u = \sin x \quad dv = e^{-x}dx}{du = \cos x\,dx \quad v = -e^{-x}} \cdot -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx \quad \frac{u = \cos x \quad dv = e^{-x}dx}{du = -\sin x\,dx \quad v = -e^{-x}}$$

$$-e^{-x}\cos x - \underbrace{\int e^{-x}\sin x}_{I} - e^{-x}\sin x \Rightarrow I = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$$

مثال: $y(1+xy)\,dx + x(1+xy+x^2y^2)\,dy = 0$ معادله را با تغییر متغیر $u = xy$ حل کنید.

$u = xy \Rightarrow u' = y + xy'$ ، $y = \frac{u}{x}$ ، برحسب u حل می‌کنیم.

جایگزینی $\rightarrow$ $y' = \dfrac{-y(1+xy)}{x(1+xy+x^2y^2)} \Rightarrow \dfrac{u'}{x} - \dfrac{u}{x^2} = \dfrac{-\frac{u}{x}(1+u)}{x(1+u+u^2)} \Rightarrow$

Subject:
Date

$\xrightarrow{\times x^2} xu' = \dfrac{-u(1+u)}{1+u+u^2} + u \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-u-u^2+u+u^2+u^3}{1+u+u^2} \Rightarrow$

$\int \dfrac{1+u+u^2}{u^3}du = \int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}u^{-2} - u^{-1} + \ln u = \ln x + \ln c$

...

مثال: معادله زیر را با تغییر متغیر $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ حل کنید.

$(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0 \qquad dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta$

$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta \longrightarrow r^2(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) - 2r^2\sin\theta\cos\theta \times$

$(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta(1-3\sin^2\theta)dr - r\sin\theta(1+\cos^2\theta)d\theta = 0$

$\dfrac{dr}{r} = \dfrac{\sin\theta(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta(1-\sin^2\theta)}d\theta \dots$

مثال: با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$y' = \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}}$ سه روش حل: $\begin{cases} \text{همگن درجه } \frac{1}{2} \\ u = \sqrt{x^2-y^2} \text{ و ضرب مزدوج } x \\ u = x+y,\ v = x-y \end{cases}$ $\dfrac{u^2+\sqrt{1-u^2}-1}{u} = x\dfrac{du}{dx}$

Subject :
Date

تغییر متغیرهای معروف :

الف) معادله برنولی : صورت کلی : $y'+f(x)y=y^{\alpha}r(x)$ $\qquad \alpha \neq 0,1$

حل معادله برنولی ساده است. طرفین را بر y^{α} تقسیم می‌کنیم.

با انتخاب $u=y^{1-\alpha} \Rightarrow u'=(1-\alpha)y'y^{-\alpha}$ $\qquad y'y^{-\alpha}+f(x)y^{1-\alpha}=r(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}u'+f(x)u=r(x)$$ معادله خطی

مثال : $y'=\dfrac{y}{xy+\sqrt{xy}}$ حل : با توجه $\Rightarrow x'=\dfrac{xy+\sqrt{xy}}{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'-\underbrace{x}_{f(y)}=\underbrace{y^{-\frac{1}{2}}x^{+\frac{1}{2}}}_{r(y)} \xrightarrow{\div x^{\frac{1}{2}}} x'x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}=y^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[u'=\frac{1}{2}x'x^{-\frac{1}{2}}]{u=x^{\frac{1}{2}}} u'-\frac{1}{2}u=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

معادله ریکاتی : $y'=f(x)y^{2}+g(x)y+r(x)$ $\qquad y'=f(x)y+r(x)$ خطی

معادله ریکاتی در بهینه‌سازی و کنترل بهینه کاربرد زیادی دارد.

برای حل معادله ریکاتی حتماً باید یک جواب معادله معلوم باشد. در این صورت با تغییر متغیر $y=y_1+\frac{1}{u}$

به جواب می‌رسیم. مطلب تابع ricati، برای حل این توابع دارد.

مثال : معادله ریکاتی را با یک جواب $y_1=x$ حل کنید. $\qquad y'+xy=y^{2}+1$

$$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2} \Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} + x\left(x + \frac{1}{u}\right) = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{1} - \frac{u'}{u^2} + \cancel{x^2} + \frac{x}{u} = \cancel{x^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{2x}{u} + \cancel{1} \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{x}{u} \xRightarrow{\times -u^2}$$

$+u' = -1 - xu \Rightarrow u' + xu = -1$ خطی ... $y = \frac{-3}{x} + x$

معادله کلرو: صورت کلی معادله: $y = xy' + f(y')$

برای حل ابتدا y' را p در نظر می‌گیریم. $y' = p \Rightarrow y = xp + f(p)$

با مشتق از طرفین نسبت به x داریم: $\cancel{y'}^{\,p} = p + xp' + \frac{df}{dp}p'$

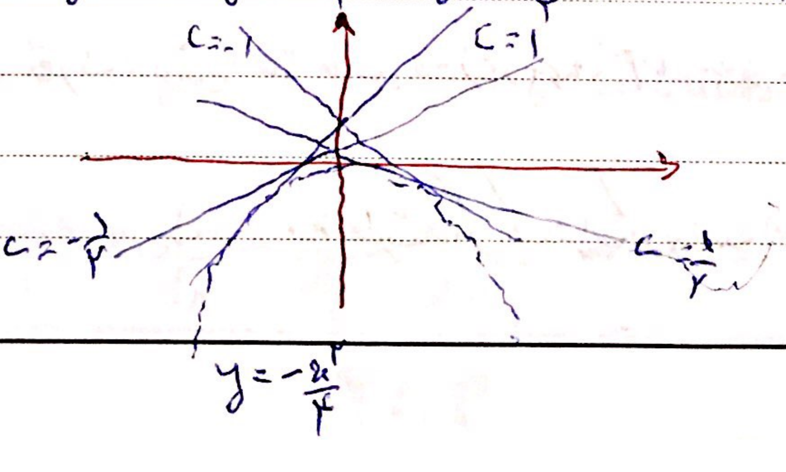
و لذا: $p'\left(x + \frac{df}{dp}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = xc + f(c) \\ x + \frac{df}{dp} = 0 \Rightarrow y = \psi(x) \text{ جواب غیرعادی} \end{cases}$

که پوشش دسته جواب عمومی $y = xc + f(c)$ می‌باشد.

مثال: $y = xy' + y'^2$

$$y = xp + p^2 \Rightarrow y' = p + xp' + 2pp' \Rightarrow p'(x + 2p) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = xc + c^2 \\ x + 2p = 0 \Rightarrow x + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} \end{cases}$$ جواب غیرعادی



Subject:
Date

کاربردهای معادله دیفرانسیل: موارد زیر را بررسی می کنیم

مسیرهای متعامد

پوش دسته منحنی

میدان عینی

در فیزیک یا هندسی خطوطی وجود دارند که بر خطوط میدان بردهم عمود هستند.

فرض کنید میدان اولیه $\varphi(x,y,c)=0$ معلوم است.

گام اول: معادله دیفرانسیل میدان اولیه را پیدا کنید.

$$\begin{cases}\varphi_x(x,y,c)=0\\ \varphi(x,y,c)=0\end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } c} F(x,y,y')=0$$

گام دوم: معادله دیفرانسیل دسته منحنی متعامد را پیدا کنید.

$$\to F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0$$

گام سوم: با حل معادله دیفرانسیل جدید دسته منحنی متعامد حاصل می شود.

مثال: $y=cx^2 \to \begin{cases} y'=2cx\\ y=cx^2\end{cases} \to y=\frac{y'}{2x}x^2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}y'x$

گام دوم: $y=-\frac{1}{2y'}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{2y}x \Rightarrow 2y\,dy=-x\,dx$

$y^2=-\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow \frac{x^2}{2}+y^2=\cancel{c}\,c^2$ دسته بیضی

$x^2-y^2=cy$ تمرین: مسیرهای متعامد دسته دایره‌ای $(x-c)^2+y^2=c^2$ را بیابید.

$r=c(1-\cos\theta)$ تمرین: مسیرهای متعامد $r=2+2\cos\theta$ را بیابید.

پوش دسته منحنی: تعریف: پوش دسته منحنی $\varphi(x,y,c)=0$ یک منحنی مانند $y=\varphi(x)$ است که بر

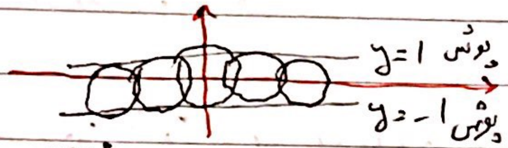
منحنی های φ در یک نقطه مماس است، به عبارت دیگر یک جواب که نماینده دسته جواب $\varphi(x,y,c)=0$ است.

می باشد. برای تعیین پوش کافی است از طرفین رابطه فوق مشتق بگیریم،

$$\varphi(x, y, c(x,y)) = 0 \Rightarrow \varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_c c_x + \varphi_c c_y y' = 0 \Rightarrow \underbrace{(\varphi_x + \varphi_y y')}_{=0} + \varphi_c \times$$

$$(\underbrace{c_x}_{\neq 0} + c_y y') = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_c(x, y, c) = 0 \\ \varphi(x, y, c) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \psi(x)$$

مثال: پوش دسته دایره $(x-c)^2 + y^2 = 1$ را بیابید.



مشتق نسبت به c

$$\begin{cases} \cancel{y} - 2(x-c) = 0 \\ (x-c)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \xRightarrow[x=c]{} 0^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

تمرین: پوش معادله کلرو $y = xy' + F(y')$ را بیابید.

$$y = xc + F(c) \to \begin{cases} x + F'(c) = 0 \\ y = xc + F(c) \end{cases} \xRightarrow[\text{تراپوش}]{} y = \psi(x)$$

روش های کاهش مرتبه: برخی از معادلات دیفرانسیل فقط با روش کاهش مرتبه حل می شود.

حالت اول: معادله فاقد y باشد.　　$F(x, y', y'') = 0$

با انتخاب $y' = u$

$$\to \begin{cases} y' = u \\ y'' = u' \end{cases} \Rightarrow F(x, u, u') = 0$$

حالت دوم: معادله فاقد x باشد.　　$F(y, y', y'') = 0$

$$y' = u \ , \ y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx} = u' \cdot u \Rightarrow F(y, u, u'u) = 0$$

$$\left(u' = \frac{du}{dy}\right)$$

مثال: $y''-y'e^{y}=0 \Rightarrow u\cdot u'-ue^{y}=0 \Rightarrow u'=e^{y} \Rightarrow u=\int e^{y}dy \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=e^{y}+c_1 \Rightarrow \int\frac{dy}{e^{y}+c_1}=\int dx \Rightarrow \frac{e^{-y}}{1+c_1e^{-y}}=x+c_2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c_1}\ln(1+c_1e^{-y})=x+c_2$$

حالت سوم: اگر معادله دیفرانسیل نسبت به متغیرهای y و y' و y'' و ... همگن از درجه n ام باشد

$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^{n}F(x,y,y',y'')$ با تغییر متغیر $y=e^{\int u\,dx}$ به یک معادله دیفرانسیل مرتبه پایین‌تر برحسب

تبدیل میکنیم.

مثال: $yy''+y'^{2}+2xyy'=0$ $\quad y=e^{\int u\,dx}$, $y'=ue^{\int u\,dx}$ جاگذاری

$$y''=u'e^{\int u\,dx}+u^{2}e^{\int u\,dx} \Rightarrow u'e^{2\int u\,dx}+u^{2}e^{2\int u\,dx}+u^{2}e^{2\int u\,dx}+2xue^{2\int u\,dx}$$

$=0 \Rightarrow (u'+2u^{2}+2xu)=0$ یک معادله برنولی با $\alpha=2$ است. $\Rightarrow y=e^{\int u\,dx}$

حالت چهارم: اگر معادله بر حسب y و y' و y'' کامل باشد به یک معادله مرتبه پایین‌تر تقلیل می‌یابد.

مثال: $yy''-y'^{2}-2xy^{2}=0 \Rightarrow \frac{yy''-y'^{2}}{y^{2}}=2x \Rightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)'=2x \Rightarrow \int$

$$\frac{y'}{y}=x^{2}+c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y}=(x^{2}+c_1)dx \Rightarrow \ln y=\frac{x^{3}}{3}+c_1x+c_2$$

تمرین: $y'^{2}+yy''+xe^{y}=0 \Rightarrow (yy')'=-xe^{y} \Rightarrow yy'=-\int xe^{y}dx \Rightarrow$

$$\cancel{yy'=-\frac{x^{2}}{2}e^{y}+c_1 \Rightarrow \frac{y\,dy}{e^{y}}=-\frac{x^{2}}{2}dx+c \Rightarrow \frac{-(y+1)}{e^{y}}=-\frac{1}{6}x^{3}+c_1x+c_2}$$

تمرین: تحت چه شرایطی معادله خطی مرتبه دوم داده شده خطی مرتبه اول می‌شود $y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)$

$$(y'+p(x)y)'=r(x) \Rightarrow y''+f(x)y'+g(x)y=y''+p'(x)y+p(x)y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=p(x) \Rightarrow f'(x)=p'(x) \\ g(x)=p'(x) \end{cases} \Rightarrow g(x)=f'(x)$$

معادلات خطی مرتبه دوم و بالاتر:

تا این جا با معادلات خطی مرتبه اول به طور کامل آشنا شده اید.

صورت کلی: $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=d(x)$

با تقسیم طرفین بر $a(x)\neq 0$ داریم: $\Rightarrow y''+\underbrace{f(x)}_{\text{تابع هزینه - تنظیم}}y'+\underbrace{g(x)}_{\text{تابع تناسب}}y=\underbrace{r(x)}_{\text{تابع بار}}$

توجه: معادله با این ارزش حل تحلیلی ندارد. به غیر از موارد خاص: $y''+ay'+by=r(x)$

صورت کلی جواب: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$

y_1 و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن هستند. $\Rightarrow y=\underbrace{y_h(x)}_{\text{جواب معادله همگن}}+\underbrace{y_p(x)}_{\text{پاسخ به تابع بار}}$

دو تابع y_1 و y_2 مستقل خطی هستند هرگاه $c_1y_1+c_2y_2=0 \Leftrightarrow c_1=c_2=0$

به عبارت دیگر دترمینان رونسکین آن‌ها باید مخالف صفر باشد. $w(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0$

Scanned by CamScanner

حل چند مسئله با روش صحیح و غلط

مثال: $y''+y=0 \rightarrow y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=\cos x$ معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x\neq k$ یا $\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

ب) $y''-4y=0 \rightarrow y_1=e^{2x},\ y_2=e^{-2x}$ $\quad w(x)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x}\\ 2e^{2x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ ، *: جواب بدیهی صفر نمی‌تواند جزو پایه‌ها باشد چون با همه وابسته است.

یا $y_1=\sinh 2x$ ، $y_2=\cosh 2x$

توجه: پایه‌های فضا یکتا نمی‌باشند.

ج) $y''-3y'+2y=0$

چون مجموع ضرایب صفر است یکی از جواب‌ها حتماً e^x است.

$\Rightarrow y_2=e^{2x} \Rightarrow y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

توجه: بدیهی است که جواب از جنس $y=e^{mx}$ است.

$\Rightarrow m^2e^{mx}-3me^{mx}+2e^{mx}=0 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow m=1,2$

حل کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت:

$y''+ay'+by=0$

ابتدا قسمت همگن را حل می‌کنیم.

بدیهی و منطقی است که جواب از جنس $y=e^{mx}$ باشد. جایگزین $\Rightarrow m^2e^{mx}+ame^{mx}+be^{mx}=0$

$=e^{mx}(m^2+am+b)=0 \Rightarrow \boxed{m^2+am+b=0}$ معادله مشخصه یا مفسر

حالت اول: $\Delta>0$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد. $\begin{cases}y_1=e^{m_1x}\\ y_2=e^{m_2x}\end{cases}$

Subject
Date

چون m_1 و m_2 دو ریشه‌ی متمایز هستند پس y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی هستند. لذا جواب کامل به صورت مقابل است.

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

مثال: $y'' - 5y' + 6y = 0 \longrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow \underbrace{m = 2, 3}_{\text{مقادیر ویژه}} \Rightarrow \underbrace{y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x}}_{\text{توابع ویژه}}$

$$\Rightarrow y(x) = \cancel{y_1 e^{2x} + y_2 e^{3x}}\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

حالت ۲: $\Delta = 0$: ریشه مضاعف داریم.

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad m_1 = m_2 = \frac{a}{2}$$

$y_2(x) = ?$ و $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$ پس $y_2(x)$ را طوری می‌یابیم که $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = v(x) \neq c$.

با جایگزینی در معادله درمی‌یابیم که $v(x) = x$ است. لذا جواب کامل معادله: $y(x) = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$

مثال: $y'' + 4y' + 4y = 0 \longrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2 \Rightarrow y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$

حالت ۳: $\Delta < 0$: در این حالت معادله دو جواب مختلط دارد.

ابتدا چند نکته: ۱) قضیه اساسی جبر: هر چند جمله‌ای درجه nام دقیقاً n ریشه دارد.

۲) اگر z ریشه $P_n(x)$ باشد $\bar{z}$ نیز ریشه‌ی آن است.

۳) قضیه فرما: تعیین ریشه‌های چند جمله‌ای‌های درجات بالاتر از ۴ غیرممکن است.

$$\Rightarrow m_1 = p + iq,\ m_2 = p - iq \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{(p+iq)x} \\ y_2(x) = e^{(p-iq)x} \end{cases}$$

Subject
Date

از فرمول اویلری داریم: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{px}(\cos qx + i\sin qx) \\ y_2(x) = e^{px}(\cos qx - i\sin qx) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ Y_2 = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$$

مثال: $y''-4y'+5=0 \rightarrow m^2-4m+5=0 \rightarrow \Delta = 16-4\times 5=-4 \quad m=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=2\pm i$

$$\Rightarrow p=2,\ q=1 \Rightarrow y(x)=e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

حل معادلات خطی مراتب بالاتر:

برای یک معادله مرتبه سوم:

$$y''' + f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = r(x)$$

جواب $\longrightarrow$ $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + y_p(x)$

که y_1، y_2 و y_3 سه جواب مستقل خطی هستند.

$$\begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0 \\ c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3' = 0 \\ c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3'' = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جواب داشتن: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \neq 0$

مثال: $y''' - 3y'' + 2y' = 0 \qquad y_1(x) = e^{x}$ ، $y_2(x) = 1$ با روش صحیح و نقطه حل کنید.

$$, \ y_3(x) = e^{2x} \qquad \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 2e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 1\times(4e^{3x} - 2e^{3x}) = 2e^{3x} \neq 0$$

PAPCO

Subject
Date

لذا: $y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} = c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_1$

ب) $y^{(4)} - y = 0 \rightarrow y_1(x) = \sin x,\ y_2(x) = \cos x \quad y_3(x) = \sinh x,\ y_4(x) = \cosh x$

$$m^4 - 1 = 0 \Rightarrow (m^2-1)(m^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \rightarrow \cosh x, \sinh x \\ m = \pm i \rightarrow \cos x, \sin x \end{cases}$$

مثال: الف) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \Rightarrow m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^3 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 1$

$\Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} = e^{x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$

ب) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow m^4 - 2m^2 + 1 = 0 \Rightarrow (m^2-1)^2 = 0 \Rightarrow \cancel{\begin{cases} m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \\ m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm i \end{cases}}$

$p = 0, q = 1$

$\Rightarrow \cancel{y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x},\ y_3,\ y_4 =}$

$$\rightarrow \begin{cases} m_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_1(x) = \sinh x,\ y_2(x) = \cosh x \\ m_{3,4} = \pm 1 \Rightarrow y_3(x) = x \sinh x,\ y_4(x) = x \cosh x \end{cases}$$

$\Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)\cosh x + (c_3 + c_4 x)\sinh x$

پاسخ به تابع بار: چون $y_p(x)$ باید از جنس ورودی باشد لذا اگر ورودی از جنس ۱) چند جمله ای ۲) نمایی ۳) مثلثاتی

و یا ترکیب جمع و ضرب آن ها باشد y_p هم از همان جنس است.

مرحله اول: با جایگذاری در معادله ضرایب نامعین تعیین می شوند.

مرحله دوم: اگر ضرایب معین نشدند با ضرب متوالی x ها اجزای مرحله اول تعیین می شوند.

Scanned by CamScanner

مثال $y''-3y'+2y=x^2+1$

$\Rightarrow y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+(A_2x^2+A_1x+A_0) \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$2A_2-3(2A_2x+A_1)+2(A_2x^2+A_1x+A_0)=x^2+1 \longrightarrow$ معادل قرار دادن

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2: & 2A_2=1 \Rightarrow A_2=\frac{1}{2} \\ \text{ضریب } x: & -4A_2+2A_1=0 \Rightarrow A_1=\frac{3}{2} \\ \text{ضریب } 1: & 2A_2-3A_1+2A_0=1 \Rightarrow 1-\frac{9}{2}-1=-2A_0 \Rightarrow A_0=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

مثال: $y''-3y'=x^2+1$

$\rightarrow y(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{3x}+x(A_2x^2+A_1x+A_0)$

اصلاح کننده

طرف معادله درجه ۲ داریم ولی طرف راست درجه یک => به دست نمیاد. پس $x\times$ می‌کنیم

$\Rightarrow (6A_2x+2A_1)-3(3A_2x^2+2A_1x+A_0)=x^2+1$

$\Rightarrow \{$

$y''-3y'+2y=2e^{-x}$

$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+Ae^{-x} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} Ae^{-x}+3Ae^{-x}+2e^{-x}=2e^{-}$

Subject
Date

$\Rightarrow 6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x}$

$y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

جواب کلی $\Rightarrow y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + {}^{\times x}Ae^{x}$ از جنس جواب‌ها = اصلاح می‌کنیم

$\Rightarrow -3A(xe^{x} + e^{x}) + A(2e^{x} + xe^{x}) + 2Axe^{x} = e^{x} \Rightarrow A = -1$

$y'' - 2y' + y = 2e^{x} \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$

$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + \underbrace{{}^{\times x^2}Ae^{x}}_{y_p}$ با دو بار ضرب x جواب می‌گیریم.

y_p درست

$\Rightarrow \underbrace{(Ax^2e^{x})''}_{A(2xe^{x} + x^2e^{x})'} - 2(Ax^2e^{x})' + (Ax^2e^{x}) = 2e^{x} \Rightarrow A(2e^{x} + 2xe^{x} + 2xe^{x} + x^2e^{x})$

$-2A(2xe^{x} + x^2e^{x}) + Ax^2e^{x} = 2e^{x} \Rightarrow A(x^2 + 4x + 2) - 2A(x^2 + 2x)$

$+ Ax^2 = 2 \Rightarrow A(0 + 0 + 2) = 2 \Rightarrow A = 1$

$y'' - 2y' + y = 2\sin x$

حل: جواب کلی: $c_1e^{x} + c_2xe^{x} + A\sin x + B\cos x$

$\Rightarrow -A\sin x - B\cos x - 2(A\cos x - B\sin x) + (A\sin x + B\cos x) = 2\sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$y'' + y = 2\sin x$

$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i \Rightarrow p = 0, q = 1 \Rightarrow y_h(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(A\cos x + B\sin x) \longrightarrow$ جواب نمیده

$y_p' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$

$y_p'' = \cancel{A\cos x} - A\sin x + B\cos x + (-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x)$

$\Rightarrow 2A_2 = 2,\ 2B = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow A = -1$

تعمیم روش ضرایب نامعین: ۱- معادلات مراتب بالاتر با ضرایب ثابت
۲- توابع بار ترکیبی

مثال: $y'' - 3y' + 2y = x + 2e^x - \sin x$

حل: سه نوع پاسخ داریم: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \underbrace{(Ax + B)}_{y_{p_1}} + \underbrace{xCe^x}_{y_{p_2}} + \underbrace{(D\cos x + E\sin x)}_{y_{p_3}}$

$y_{p_1} = ? \Rightarrow 0 - 3A + 2Ax + 2B = x \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ -3A + 2B = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{4} \end{cases}$

$y_{p_2}:\ (2Ce^x + Cxe^x) - 3(Ce^x + Cxe^x) + 2Cxe^x = 2e^x \Rightarrow C = -2$

$y_{p_3}:\ -D\cos x - E\sin x - 3(-D\sin x + E\cos x) + 2(D\cos x + E\sin x) = -\sin x$

Subject

Date

$$\Rightarrow \begin{cases} E + 3D = -1 \\ -3E + D = 0 \end{cases}$$

$$y^{(4)} - y = \cosh x - \sin x$$

$$y(x) = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \underbrace{(A\cosh x + B\sinh x)}_{y_{p_1}} \times x$$

از همان جنس هیچ وجود ندارد.

← وجود دارد => باید اصلاح کنیم.

$$+ \underbrace{(E\cos x + D\sin x)}_{y_{p_2}}$$

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

y_{p_2} ساده می‌شود، در مورد y_{p_1} بحث می‌کنیم:

$$\rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = A\cosh x + B\sinh x \end{cases} \Rightarrow \left(x(A\cosh x + B\sinh x)\right)^{(4)} = \binom{4}{0} x \,(\text{خودش})$$

$$+ \binom{4}{1} \times 1 \times (A\sinh x + B\cosh x) + 0$$

$$y'' - 2y' + y = xe^{x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + (Ax + B)e^{x} \times x^2$$

← در حالت اولیه هر دو نوع را در سمت چپ داریم ~~x~~ کنیم با xe^{x} در طرفین

یکسان است => x^2 ضرب می‌کنیم.

تمرین: جواب‌های خصوصی معادلات زیر را بدست آورید.

$$(D^4 y - 2D^2 y + y) = \cosh x - \sin x \quad (c_1 + c_2 x)\sinh x + (c_3 + c_4 x)\cosh x + \times$$

Subject
Date

$- x^2(A\cosh x + B\sinh x) + (C\cos x + D\sin x)$

۲) $(D^2-4D+5)^2 y = x^2 e^{2x}\cos x$

$y = e^{2x}[(c_1+c_2x)\cos x + (c_3+c_4x)\sin x] + x^2 e^{2x}[(A_0x^2+A_1x+A_2)\cos x$

$+ (B_0x^2+B_1x+B_2)\sin x]$

روش کاهش مرتبه: فرض کنید یکی از جواب های معادله همگن $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ مانند y_1

معلوم باشد. برای تعیین رفتار سیستم باید یک جواب مستقل خطی دیگر پیدا کنیم. $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = v(x) \neq k$

با جایگزینی $y_2(x)=v(x)y_1(x)$ داریم:

$y_2''+f(x)y_2'+g(x)y_2=0 \Rightarrow (vy_1)''+f(x)(vy_1)'+g(x)(vy_1)=0$

$\Rightarrow (v''y_1+2v'y_1'+vy_1'')+f(x)(v'y_1+vy_1')+g(x)vy_1=0 \Rightarrow$

$y_1v''+(2y_1'+f(x)y_1)v'+\underbrace{(y_1''+f(x)y_1'+g(x)y_1)}_{0}=0 \xrightarrow{v'=u}$

$u'+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+f(x)\right)u=0$ معادله خطی مرتبه اول $u(x)=e^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+f(x)\right)dx} = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f(x)dx}$

$\Rightarrow v(x)=\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f(x)dx}\,dx$ فرمول آبل

Subject
Date

- یادآوری: در معادله با ضرایب ثابت $y''+ay'+by=0$ داشتیم: $y_1=e^{-\frac{a}{2}x}$ ، $y_2=xe^{-\frac{a}{2}x}$

$$v(x)=\int \frac{1}{e^{-ax}}e^{-\int a\,dx}=\int dx=x$$

مثال: اگر $y_1=x$ یکی از جواب های معادله زیر باشد جواب دیگر آن را به دست آورید.

$$x^2y''-xy'+y=0 \longrightarrow y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0$$

$$v(x)=\int \frac{1}{x^2}e^{-\int -\frac{1}{x}dx}=\int \frac{1}{x}dx=\ln x \Rightarrow y(x)=c_1x+c_2x\ln x$$

تمرین: معادله زیر را حل کنید، یکی از جواب ها e^x است چون مجموع ضرایب صفر است.

$$y''-xy'+(x-1)y=0$$

حل معادله غیرهمگن مرتبه دوم:

ابتدا مروری بر معادله خطی مرتبه اول داریم: $\boxed{y_h(x)=ce^{\int -f(x)dx}} \xrightarrow{r(x)} y_p(x)=c(x)e^{-\int f(x)dx}$

$$\Rightarrow c(x)=\int r(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

به همین ترتیب لاگرانژ نشان داد: $y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)$

جواب کل: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$

با جاگذاری داریم: $c_1(x)=\int\frac{-y_2\,r(x)}{w(x)}dx$ ، $c_2(x)=\int\frac{y_1\,r(x)}{w(x)}dx$

برهان : در جزوه

شرط لاگرانژ برای حل معادله $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$

نتیجه‌ی حاصل از برهان : $c_1' y_1' + c_2' y_2' = r(x)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

کرامر

$$c_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad c_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

مثال : مطلوبست حل :

$$y'' - 2y' + y = e^{2x} \ln x$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت که تابع بار آن از دسته توابع خاص روش ضرایب نامعین نمی‌باشد. لذا باید از روش پارامترهای نامعین استفاده شود.

$$\rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2' (x+1) e^x = e^{2x} \ln x \end{cases} \Rightarrow e^x c_2' = e^{2x} \ln x \Rightarrow c_2 = \int e^x \ln x$$

$$= \int \ln(x)\, dx = x \ln x - x$$

$$c_1(x) = -\int x \ln x \, dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$$

Subject
Date

معادله کوشی اویلر: صورت کلی مرتبه دوم همگن $x^2y''+axy'+by=r(x)$

یا در حالت کلی تر اگر اثر ضرائب خطی باشد: $(Ax+B)^2y''+a(Ax+B)y'+by=r$

روش حل:
- منطقی است جواب از دسته توابع $x^m=y(x)$ باشد بعد ← معادله مشخصه ← جایگذاری
- با روش تغییر متغیر $\ln x=u$ به یک معادله با ضرایب ثابت می رسیم.

روش تغییر متغیر: $u=\ln x$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{du}=\frac{1}{x}Dy \quad ; \quad D:\frac{d}{du}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\underbrace{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)}_{\frac{1}{x}\frac{d^2y}{du^2}}\Rightarrow$$

$$y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)=\frac{1}{x}D(D-1)y$$

جایگذاری $\longrightarrow D(D-1)y+aDy+by=r(e^u)$ یا $D^2y+(a-1)Dy+by=s(u)$

مثال: $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-\ln x^2$

$u=\ln x\Rightarrow D^2y-3Dy+2y=u^2-2u$ معادله مشخصه: $m_1=1$ و $m_2=2$

$$\Rightarrow y(u)=\overbrace{c_1e^u+c_2e^{2u}}^{y_h}+\overbrace{(A_2u^2+A_1u+A_0)}^{y_p}$$

جایگذاری $\longrightarrow 2A_2-3(2A_2u+A_1)+2(A_2u^2+A_1u+A_0)=u^2-2u\Rightarrow$

$$\begin{cases}2A_2=1\\-6A_2+2A_1=-2\\2A_2-3A_1+2A_0=0\end{cases}\Rightarrow y=c_1x+c_2x^2+\underbrace{A_2}_{\frac{1}{2}}\ln^2x+\underbrace{A_1}_{\frac{1}{2}}\ln x+\underbrace{A_0}_{\frac{1}{4}}$$

Subject

Date

تعمیم معادله کوشی اویلر: الف) صورت لاگرانژ دقیق:

$$(Ax+B)^2y''+a(Ax+B)y'+by=r(x)$$

که با تغییر متغیر $t=Ax+B$ به یک معادله کوشی اویلر t برحسب y می رسیم و با تغییر متغیر $u=\ln t$ به یک معادله با ضرایب ثابت برحسب u می رسیم. یا به صورت ترکیبی $u=\ln(Ax+B)$ استفاده می کنیم.

ب) کوشی اویلر مراتب بالاتر:

$$x^3y'''+ax^2y''+bxy'+cy=r(x)$$

با تغییر متغیر $u=\ln x$

$$y'=\frac{1}{x}Dy \qquad y''=\frac{1}{x^2}D(D-1)y \qquad y'''=\frac{1}{x^3}D(D-1)(D-2)y$$

مثال:

$$(x+1)^2y''+y'=\ln(x+1)$$

روش ۱: $y'=u \longrightarrow (x+1)^2u''+u=\ln(x+1)$ کوشی اویلر مرتبه دوم

روش ۲: $\xrightarrow{\times x+1} (x+1)^3y''' \overset{+2(x+1)^2y''}{+} (x+1)y' \overset{+y}{=} (x+1)\ln(x+1) \xrightarrow{u=\ln(x+1)}$

Subject
Date

روش مستقیم: بدیهی است که جواب $x^2y''+axy'+by=0$ از جنس x^m ، $y=x^m$ باشد.

جایگذاری $\Rightarrow$ $m(m-1)x^m+amx^m+bx^m=0 \Longrightarrow (m^2+(a-1)m+b)\underbrace{x^m}_{\neq 0}=0$

$\Longrightarrow m^2+(a-1)m+b=0 \quad *$

حالت اول: $\Delta>0$ ، دو ریشه متمایز

$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$

حالت دوم: $\Delta=0$ ، ریشه مضاعف

$m=m_1=m_2=-\frac{(a-1)}{2} \qquad y_1(x)=x^m=x^{-\frac{(a-1)}{2}}$

$y_2(x)=v(x)y_1 \to v(x)=\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f(x)dx}=\int \frac{1}{x^{-(a-1)}}e^{-\int \frac{a}{x}dx}dx$

$=\ln x \Longrightarrow y(x)=c_1x^{-\frac{(a-1)}{2}}+c_2x^{-\frac{(a-1)}{2}}\cdot \ln x$

حالت سوم: $\Delta<0$ ، ریشه موهومی

$m_1=p+iq \,,\; m_2=p-iq \Longrightarrow$

$y_1=x^{p+iq} \qquad y_2=x^{p-iq} \xrightarrow{\text{با فرمول اویلر}} \begin{cases} y_1=x^p\cos(q\ln x) \\ y_2=x^p\sin(q\ln x)\end{cases}$

$\Longrightarrow y=x^p\left(c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\sin(q\ln x)\right)$

مثال:

$x^2y''-2xy'+2y=x^3e^x+x^2 \longrightarrow m^2+(-2-1)m+2=0 \Longrightarrow m_1=1 \,,\; m_2=2$

$y(x)=c_1x+c_2x^2+c_1(x)x+c_2(x)x^2$

معادله با شرایط نیست که فرم کلی بنویسیم و از روش شرایط نامعین استفاده کنیم.

Subject
Date

$\int xe^x dx \; \frac{u=x}{du=dx} \; \frac{dv=e^x dx}{v=e^x} \quad xe^x-\int e^x dx = e^x(x-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' x^2 = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = xe^x+1 \end{cases}$

برای نوشتن $r(x)$ معادله باید به فرم استاندارد باشد تقسیم بر x^2

$\Rightarrow \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = xe^x+1 \end{cases} \Rightarrow c_2'(x) = xe^x+1 \Rightarrow c_2' = e^x+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow c_2 = e^x + \ln x \;\}\; c_1' = -xe^x - 1 \Rightarrow c_1(x) = -xe^x + e^x - x$

$(D^2-4D+5)^2 y = xe^{2x}\cos x$

$y' + f(x)y = r(x) \xrightarrow{\text{به صورت عملگری}} Dy + f(x)y = r(x) \Rightarrow (D+f(x))y = r(x)$

عملگر دیفرانسیل

$\Rightarrow y = \frac{1}{D+f(x)} r(x)$ عملگر معکوس دیفرانسیل

مثال: $y'' - 3y' - 2y = e^{-x}$

حل: $y = \frac{1}{D^2-3D+2} e^{-x} = \frac{1}{(D-1)(D-2)} e^{-x} = \frac{1}{-2x-3} e^{-x} = \frac{1}{6} e^{-x}$

حالت های مهم: $\frac{1}{P(D)} e^{\lambda x} = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x} \quad (p(\lambda) \neq 0)$

اگر λ ریشه k ام معادله مشخصه باشد. $\frac{1}{P(D)} e^{\lambda x} = x^k \frac{1}{p^{(k)}(\lambda)} e^{\lambda x}$

حالت دوم: $\frac{1}{P(D)} P_m(x) = (a_0 + a_1 D + \dots + a_m D^m + \dots) P_m(x)$

حالت سوم: اگر $\frac{1}{P(D)} \cos\lambda x$ یا $\frac{1}{P(D)} \sin\lambda x \rightarrow \frac{1}{P(D)} e^{i\lambda x} \longrightarrow$ مشابه قبل

Subject
Date

مثال: $y''-3y'+2y=e^{x}$ $\quad \lambda=1$ ریشه مفرد $\Rightarrow y_p=\frac{x}{2(1)-3}e^{x}=-xe^{x}$

خواص: خاصیت انتقال: $\quad \frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}r(x)=e^{\lambda x}\frac{1}{P(D+\lambda)}r(x)$

خاصیت مشتق: $\quad \frac{1}{P(D)}xr(x)=x\frac{1}{P(D)}r(x)$

مثال: $(D^2-4D+5)^2y=xe^{2x}\cos x \rightarrow e^{ix}$

مشتق $\quad$ انتقال

مثال $x^3y'''-3x^2y''-6xy'-6y=\ln(x^3)+3$ $\quad$ معادله کوشی اویلر

$u=\ln x \quad y'=\frac{1}{x}Dy \quad y''=\frac{1}{x^2}D(D-1)y \ , \ y'''=\frac{1}{x^3}D(D-1)(D-2)y$

$\Rightarrow \big(D(D-1)(D-2)-3D(D-1)+6(D-1)\big)y=3u+3 \Rightarrow$

$(D-1)(D^2-5D-6)y=3u+3 \Rightarrow y(u)=c_1e^{u}+c_2e^{2u}+c_3e^{3u}+Au+B$

وقتی یکی از جواب ها را می دهند یا روش کاهش مرتبه داریم و استفاده از فرمول آبل ۲ یا معادله ریکاتی داریم

$x^4y''+2x^3y'-y=16e^{\frac{3}{x}}$ $\quad$ اگر $y_1=e^{-\frac{1}{x}}$ یک جواب باشد

$y(x)=c_1e^{-\frac{1}{x}}+c_2v(x)e^{-\frac{1}{x}}+c_1(x)e^{-\frac{1}{x}}+c_2(x)v(x)e^{-\frac{1}{x}}$

$y''\cos y+y'^2\sin y-y'=0 \quad y(-1)=\frac{\pi}{6} \quad y'(-1)=2$ $\quad$ مطلوب است حل

P4PCO

قاعده $\quad y'=p \quad y''=p'p \quad p'=\frac{dp}{dy}$

Subject
Date

مثال: از دسته جواب زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله $y''' + ay'' + by' + cy$ باشد.

الف) $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x + c_4}$

ب) $y(x) = c_1 \sin x + c_2 e^{x} \cos x + c_3 \tan x$ ← جواب های از جنس فوق شس ندارد و نمی‌تواند جواب باشد.

ج) $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos x + c_3 \sin x \cos x$

Scanned by CamScanner

مروری بر سری‌های توانی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1 (x-x_0) + c_2 (x-x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

با انتخاب $X = x - x_0$ حول $x_0 = 0$

$x_0 - R$ بازه همگرایی $x_0 + R$

x_0

واگرا — با بررسی شود — واگرا

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$ آزمون نسبت

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$ آزمون ریشه

تا این جا تجربه نشوحید که معادله‌ی $y'' + p(x) y' + q(x) y = \cancel{r(x)}$ در حالت کلی قابل حل نیست.

حتی اگر بازه همگرایی مشخص باشد در حالت کلی نمی‌توان گفت سری توانی به کدام تابع همگرا است.

عکس آن سری تیلور است.

سری تیلور: اگر f در همسایگی نقطه x_0 بی نهایت بار مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad , \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

اگر $x_0 = 0$ باشد به سری مکلورن معروف است.

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{cases}$$

چند نمونه مهم:

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\cos x = \cosh ix = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

مثال: سری تیلور تابع زیر را حول یک نقطه اختیاری بنویسید

$$f(x) = x^4-2x+1$$

سری تیلور آن حول هر نقطه x_0 خودش است چون هدف تیلور نوشتن به فرم چند جمله‌ای بوده است.

حل معادلات به کمک سری‌های توانی:

تا این جا تجربه نمودید که حل معادلات $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ در حالت کلی قابل حل نمی‌باشد هر چند صورت

کلی جواب $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ چون نمی‌توان دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 را پیدا کرد. سؤال اصلی:

آیا می‌توان به سری توانی y_1 و y_2 را پیدا کنیم؟

باید جواب را در معادله دیفرانسیل جایگذاری کنیم.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

حل: به کمک سری توانی حل کنید.

$$y'+xy=0$$

می دانیم جواب این معادله $y=ce^{-\frac{x^2}{2}}$ است.

حال جواب را به صورت سری فرض می‌کنیم.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0 \Rightarrow$$

Subject
Date

مرحله اول: همواره توان های x را یکسان می کنیم.

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

مرحله دوم: اندیس های سیگما را یکی می کنیم.

$$\rightarrow c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) c_{n+1} + c_{n-1} \right) x^n = 0$$

چون به ازای هر x صفر است لذا تمام ضرایب صفر است.

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ (n+1) c_{n+1} + c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

حال جواب را می توانیم برحسب این ضرایب بازگشتی بنویسیم.

$$y(x) = \overset{\text{آزاد}}{c_0} + 0x - \frac{c_0}{2} x^2 + 0x^3 - \frac{c_2}{4} x^4 + 0x^5 + \dots \Rightarrow$$

$$y(x) = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \times 2} - \frac{x^6}{6 \times 4 \times 2} \dots \right)$$ سری جواب

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$ از تیلور می دانیم.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری توانی حل کنید.

$$y'' + xy = 0$$

این معادله حل تحلیلی ندارد، جواب را به صورت سری فرض می کنیم (معادله ایری)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Subject
Date

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0 \Rightarrow$$

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + c_{n-1}\right)x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \dfrac{-c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

حل جواب نهایی
$$y(x) = c_0 + c_1x + 0x^2 - \frac{c_0}{6}x^3 - \frac{c_1}{12}x^4 + 0x^5 - \frac{c_3}{30}x^6 - \frac{c_4}{42}x^7 + 0x^8 + \cdots$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{1}{42\times 12}x^7 + \cdots\right)$$

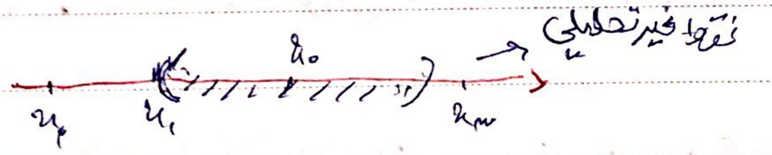
به این نوع حل‌ها حل نیمه تحلیلی می‌گویند جواب بسته ندارد.

قضیه وجود جواب به صورت سری: اگر توابع f و g در معادله $y''+f(x)y'+g(x)y=0$

در نقطه x_0 تحلیلی (دارای بسط تیلور) باشند آن‌گاه جواب معادله به صورت سری وجود دارد. یعنی

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

و بازه اعتبار جواب به شعاع R که فاصله x_0 تا اولین نقطه‌ای که f یا g تحلیلی نباشد.



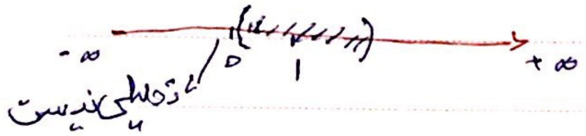
مثال: چون $f=0$ و $g(x)=x$ همه‌جا تحلیلی هستند لذا جواب حول هر نقطه x_0 $\qquad y''+xy=0$

وجود دارد. پس بازه اعتبار جواب $\mathbb{R}$ می‌باشد.

مثال: معادله زیر را در نظر بگیرید. $xy'' + y = 0$ به صورت متعارف $y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} y = 0$

ملاحظه می‌کنید که سری جواب حول هر نقطه ای به جز $x=0$ وجود دارد.

تمرین: سری جواب را حول نقطه $x=1$ بیابید.



بازه اعتبار جواب از $(0,2)$ است.

مثال: مطلوبست تحلیل و حل معادله زیر به کمک سری توانی حول $x=0$. $y'' + e^x y = 0$

$g(x)$ همه جا تحلیلی است که همه جا می توان سری تیلور آن را نوشت که لذا در هر نقطه x جواب به صورت سری وجود دارد

بازه اعتبار جواب کل $\mathbb{R}$ است. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

با جایگذاری جواب و سری e^x داریم. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = 0$$

برای تعیین چند جمله از جواب سری ها را باز می کنیم $\Rightarrow (2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \dots) +$

حال باید تمام ضرایب صفر باشند چون به ازای هر x صفر است. $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \times (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$

$$\begin{cases} \text{ضریب ثابت}: 2c_2 + c_0 = 0 \\ x: 6c_3 + c_0 + c_1 = 0 \\ x^2: 12c_4 + c_1 + c_2 + \frac{c_0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \overset{\text{آزاد}}{c_0} + \overset{\text{آزاد}}{c_1} x - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_0 + c_1}{6}x^3 + \dots$$

با مرتب کردن: $y(x) = c_0\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right)}_{y_0(x)} + c_1\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)}_{y_1(x)}$

روش دوم: چون جواب حول $x_0 = 0$ تحلیلی است لذا داریم.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$y(0) = c_0$ آزاد $y'(0) = c_1$ آزاد $y''(0) = -e^0 y(0) = -c_0$

$y'''(0) = -\left(e^0 y(0) + e^0 y'(0)\right) = -c_0 - c_1$ $\xrightarrow{\text{با جایگزینی و فاکتورگیری}}$

$$y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

معادلات خطی

- با ضرایب ثابت → سری توانی
- معادله کوشی اویلر → سری فروبنیوس (توانی اصلاح شده)

زیروند را صفر نگه می داریم: $y=\sum_{n=0} c_n x^{n+r} \Rightarrow y''=\sum_{n=0} n(n-1)c_n x^{n+r-2}$

حل معادلات با روش فروبنیوس:

اگر f یا g در نقطه x_0 تحلیلی نباشند، x_0 یک نقطه تکین یا منفرد می نامند $y''+f(x)y'+g(x)y=0$

یعنی جواب حول x_0 به صورت سری وجود ندارد، مانند $xy''+y=0$

نقطه $x_0=0$ یک نقطه منفرد است. $\xrightarrow{\text{به صورت متعارف}} y''+\frac{1}{x}y=0$

توجه: یک دسته خاص از معادلات حول نقطه سری، جواب به صورت سری می توان به دست آورد.

نقطه منفرد منتظم: گوییم نقطه غیر تحلیلی x_0 در معادله $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ منفرد منتظم است اگر بتوان

معادله را به شکل مقابل درآورد. $y''+\frac{p(x)}{x-x_0}y'+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y=0$

که p و q در نقطه x_0 تحلیلی باشند، به عبارت دیگر می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$y''+\frac{a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots}{x-x_0}y'+\frac{b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots}{(x-x_0)^2}y=0$$

در مقایسه با معادله کوشی اویلر، $y''+\frac{a_0}{x-x_0}y'+\frac{b_0}{(x-x_0)^2}y=0$ ،

چون جواب معادله کوشی به صورت $y(x)=c_0(x-x_0)^m$ بود منطقی است جواب معادله ما به صورت زیر باشد.

$$y(x)=(x-x_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل و قرار دادن کمترین توان $x-x_0$ معادله مشخصه به دست می آید.

$m^2 + (a_0 - 1)m + b_0 = 0$

برای تعیین a_0 و b_0 از معادلهٔ:

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) f(x) = \lim_{x \to x_0} p(x)$$

$$b_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 g(x) = \lim_{x \to x_0} q(x)$$

اگر یکی از a_0 و b_0 موجود نباشد تکین اساسی است.

(I) $\Delta \geq 0$: دو ریشهٔ حقیقی $\qquad m_1 - m_2 = k \geq 0$

اگر k یک عدد غیر صحیح باشد،

$$y_1(x) = (x - x_0)^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

با جایگزینی y_1 و y_2 ضرایب نامعین c_n و d_n به دست می‌آید. $\quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

اما اگر k یک عدد صحیح مثبت باشد، یکی از جواب‌ها $\quad y_1(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x) \ldots$$

مثال: $\quad xy'' + y = 0$

$x_0 = 0$ یک نقطهٔ تکین منظم است. $\Rightarrow y'' + \frac{1}{x} y = 0 \to y'' + \frac{\overset{p(x)}{0}}{x} y' + \frac{\overset{q(x)}{x}}{x^2} y = 0$

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} x\, p(x) = 0 \qquad b_0 = \lim_{x \to x_0} x^2 q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{1}{x} \xrightarrow{x_0 = 0} 0$$

برای اندیس گذاری زیر Σ به توالی n ها توجه کنیم،

Subject

Date

لذا جواب به صورت سری فروبنیوس موجود است: $y(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

$m^2+(0-1)m+0=0 \Rightarrow m^2-m=0 \Rightarrow m_1=0 , m_2=1$

لذا چون $m_1-m_2=1$ داریم یکی از جواب‌ها: $y_1(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0x+c_1x^2+c_2x^3+\dots$

$y_2(x)=y_1(x)v(x)$ با جایگزینی $y_1(x)$ داریم:

$xy''+y=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_nx^{n}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0 \Rightarrow \cancel{\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0}$

اندیس ها همه باید یکی شوند در این روش

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$

چون به ازای هر x درست است لذا

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(n(n+1)c_n+c_{n-1}\right)x^n=0$

رابطه بازگشتی. $c_n=\frac{-c_{n-1}}{n(n+1)} , n\geq1$

حال جواب اول را می‌نویسیم: $y_1(x)=c_0x-\frac{c_0}{2}x^2+\frac{c_0}{12}x^3-\frac{c_0}{144}x^4+\dots$

$=c_0\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{144}+\dots\right)$

حال جواب دوم:

$y_2(x)=v(x)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{144}+\dots\right)$

$v(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f(x)dx}dx \Rightarrow y_2(x)=\int\frac{1}{x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{144}\right)^2}$

ضرب طولانی

$\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{144}\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{144}\right)=1-x+\frac{5}{12}x^2+\dots$

Subject
Date

مثال تقسیم طولانی: طرفین وسطین

$$\frac{1}{1-x+\frac{5}{12}x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(1 - x + \frac{5}{12}x^2 + \cdots\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 1 \\ \frac{5}{12}a_0 - a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x) = \int \frac{1}{x^2}\left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 + \cdots\right) dx = -\frac{1}{x} + \ln x + \frac{5}{12}x + \cdots$$

$$= \ln x + \left(-\frac{1}{x} + \frac{5}{12}x^2 + \cdots\right)$$

لذا جواب دوم:

$$y_2(x) = (\ln(x))\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \cdots\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{x} + \frac{5}{12}x^2 + \cdots\right) \cdot x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \cdots\right)$$

لذا در حالت کلی جواب دوم به صورت:

$$y_2(x) = k \ln(x)\, y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m_2}$$

با جایگذاری مستقیم k و c_n را می‌یابیم.

حالت ۳ که در این کلاس بحث نمی‌شود.

Subject
Date

دو نمونه مهم از معادلات :

$$\begin{cases} \text{معادله لژاندر} : (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0 \\ \text{معادله بسل} : x^2y'' + xy' + (x^2-\lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

این دو معادله کاربرد های وسیعی در فیزیک و مهندسی دارند.

حل معادله لژاندر و بررسی خواص جوابهای آن :

جوابهای این معادله به ازای λ = عدد صحیح غیر منفی باشد صورت کلی : $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda(\lambda+1)y=0$ اهمیت دارد.

$$\Rightarrow y'' + \frac{-2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}y = 0$$

ملاحظه می کنید که $x=0$ یک نقطه تحلیلی آن است لذا جواب حول $x=0$ به صورت سری توانی وجود دارد.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

بازه اعتبار جواب : $(-1, 1)$ واگرا واگرا $-1 \quad 0 \quad 1$

با جایگذاری سری در معادله لژاندر داریم.

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \overset{(n+1)(n+2)}{n(n-1)}\, c_{n+2}\, x^{\overset{n}{n-2}} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{\overset{n}{n-2}} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{\overset{n}{n-1}} + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

برای فاکتورگیری در تمام جملات اندیس های شروع را یکسان می کنیم.

$$\Rightarrow 2c_2 + 6c_3x - 2c_1x + \lambda(\lambda+1)c_0 + \lambda(\lambda+1)c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)c_{n+2} + \big(\lambda(\lambda+1) - n(n+1)\big)c_n\Big)x^n = 0$$

ضریب x^0 : $2c_2 + \lambda(\lambda+1)c_0 = 0$

ضریب x^1 : $6c_3 + (\lambda(\lambda+1)-2)c_1 = 0$

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}\, c_n \quad ; \quad n \geq 2$$

حالت $\lambda = 0$

$$c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 = c_6 = 0 \Rightarrow c_{2k} = 0$$

لذا جواب

$$y(x) = c_0(\underbrace{1+0}_{1=P(x)}) + c_1(x + \underbrace{\tfrac{1}{3}x^3 + \dots}_{\text{سری فرد}})$$

حالت $\lambda = 1$

$$c_3 = c_5 = c_7 = \dots = c_{2k+1} = 0$$

$$y(x) = c_0(\underbrace{1 - x^2 + \dots}_{\text{سری زوج}}) + c_1(\underbrace{x+0}_{P_1(x)=x})$$

حالت $\lambda = 2$

$$c_4 = c_6 = c_8 = \dots = c_{2k} = 0$$

$$y(x) = c_0(\underbrace{\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}}_{P(x)}) + c_1(x + \underbrace{\tfrac{2}{3}x^3 + \dots}_{\text{سری فرد}})$$

حالت کلی : $\lambda = k$ ..

k زوج $\quad y(x) = c_0 P_k(x) + c_1(\text{سری فرد})$

k فرد $\quad y(x) = c_0(\text{سری زوج}) + c_1 P_k(x)$

Subject
Date

بحث روی جواب ها: تعریف چند جمله ای های لژاندر:

$P_0(x)=1$

روی بازه (۱ و ۱-) معتبر هستند.

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

خاصیت اول: ساخت چندجمله ای های لژاندر

روش اول: فرمول رودریگس:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \quad n=0,1,2,\dots$$

روش دوم: فرمول بازگشتی:

$P_1(x)=1$, $P_2(x)=x$

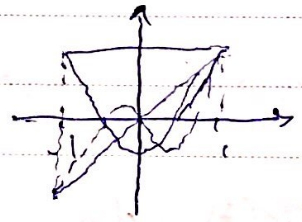
$$P_{k+1}(x)=\frac{2k+1}{k+1}xP_k-\frac{k}{k+1}P_{k-1}$$

روش سوم: بسط دو جمله ای

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

$P_n(1)=1$

خاصیت دوم: زوج یا فرد بودن



$$P_n(-1)=\begin{cases}1 & \text{زوج } n\\ -1 & \text{فرد } n\end{cases}$$

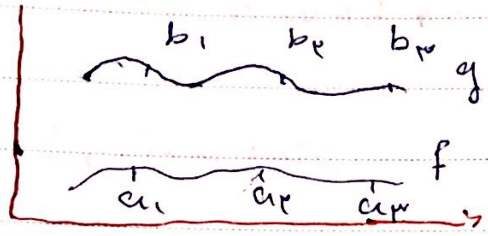
توجه: $P_k(x)$ به ازای kهای زوج تابع زوج و به ازای kهای فرد تابع فرد است.

تمرین: اگر $P_4(x)$ و $P_5(x)$ چندجمله ای های لژاندر باشند مطلوب است:

$$I=\int_{-1}^{1}\underbrace{P_4(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin x}_{\text{فرد}}+\underbrace{P_5(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\cos x}_{\text{زوج}}\,dx$$

لذا تابع کلی فرد است و حاصل صفر می شود.

خاصیت سوم: تعامد توابع لژاندر:

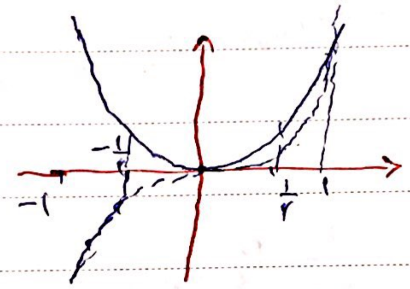


$$\underset{dot}{f.g} = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$A \perp B \iff A.B = 0$$

نمونه: $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ (روی بازه $[-1,1]$) $\quad x^2.x^3 = \int_{-1}^{1} x^2.x^3 = \int x^5 = 0$

$$\Rightarrow x^2 \perp x^3$$



به صورت هندسی چیزی نمی‌بینیم

سه نمونه برداری

اما $f(-\frac{1}{2}).g(-\frac{1}{2}) + f(0)g(0) + f(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2}) = 0$

با توجه به:
$$P_n(x).P_m(x) = \int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & , n = m \end{cases}$$

$\{P_0(x), P_1(x), \ldots\}$ دو به دو عمود بر هم هستند و پایه فضای $\mathbb{R}^\infty$ می‌باشند.

تمرین:
$$I = \int_{-1}^{1} P_4(x)\left(P_4(x) - 2P_5(x)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} P_4^2(x).\,P_4(x) - 2\cancel{\int_{-1}^{1} P_4(x)\,P_5(x)} = \frac{2}{9}$$

خاصیت چهارم: $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ پایه فضای توابع با انرژی متناهی می‌باشند.

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx < \infty$$

Subject
Date

$$f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\dots+c_nP_n(x)+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$$

$$\xrightarrow{P_n(x)}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx=0+c_n\frac{2}{2n+1}+0\Rightarrow c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx$$

مثال: تابع $f(x)=e^x$ مفروض است. الف) سری تیلور حول $x=0$. در جه دوم.

ب) سری لژاندر در بازه $(-1,1)$ در جه دوم.

$$\text{الف)}=\sum\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\text{ب)}\quad c_0+c_1(x)+c_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\qquad c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x\times1=\frac{1}{2}e^x\Big]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}xe^x=\frac{3}{2}\left[e^x(x-1)\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}\left[e(\cancel{1-1})-\frac{1}{e}(-1-1)\right]=\frac{3}{e}\quad,\quad c_2=\frac{5}{2}\alpha$$

$$\int_{-1}^{1}e^x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{3}{2}\left(x(x-1)e^x\right)-\frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{3}{2}\times0-\frac{1}{2}e\right)-\left(\frac{3}{e}-\frac{1}{2e}\right)$$

حل معادله بسل و بررسی خواص جواب های آن:

صورت کلی: $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=0$ که λ یک پارامتر ثابت است.

با توجه به صورت متعارف $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{(x^2-\lambda^2)}{x^2}y=0$ $x_0=0$ یک نقطه تکین منظم است، لذا جواب در $x_0=0$

به صورت سری فروبنیوس موجود است. $y(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\;,\;m=?$

$$m^2+(a_0-1)+b_0=0\qquad a_0=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot x=1\qquad b_0=\lim_{x\to0}x^2\frac{(x^2-\lambda^2)}{x^2}=-\lambda^2$$

$$\Rightarrow m^2-\lambda^2=0\Rightarrow m=\pm\lambda$$ جواب اول: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\lambda}=c_0x^\lambda+c_1x^{\lambda+1}+\dots$

Subject
Date

$$\Rightarrow x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n x^{n+\lambda-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$+ x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} - \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(\lambda-1) c_0 x^{\lambda} + \lambda(\lambda+1) c_1 x^{\lambda+1} + \lambda c_0 x^{\lambda} + (\lambda+1) c_1 x^{\lambda+1} - \lambda^2 c_0 x^{\lambda}$$

$$- \lambda^2 c_1 x^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n+2\lambda) c_n + c_{n-2} \right] x^{n+\lambda} = 0 \quad \div x^{\lambda}$$

$x^0 \to 0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^1: (2\lambda+1) c_1 = 0 \\ x^{i} \geq 0 \quad c_n = \dfrac{-1}{n(n+2\lambda)} c_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$\underline{\lambda \neq -\frac{1}{2}} \quad c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = c_5 = \dots = 0$ با توجه به ضرایب :

c_0 : آزاد $\qquad c_2 = \dfrac{-1}{4(1+\lambda)} c_0 \qquad c_{2\times 2} = \dfrac{-1}{8(2+\lambda)} c_2 = \dfrac{1}{2 \times 2^4 (1+\lambda)(2+\lambda)}$

$$c_{2\times 3} = \frac{-1}{12(3+\lambda)} c_4 = \frac{-1}{3!\, 2^6 (3+\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda)}$$

$$\Rightarrow c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!\, 2^{2k} (k+\lambda) \cdots (2+\lambda)(1+\lambda)} c_0$$

جواب اول معادله بسل :
$$\Rightarrow y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, 2^{2k} (k+\lambda) \dots (2+\lambda)(1+\lambda)} x^{2k+\lambda}$$

اکنون با توجه به تابع گاما (که تعریف) می توان این جواب را خلاصه تر می توان نوشت.

Subject
Date

تعریف تابع گاما : $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,dx$

اهمیت این تابع این است که با جزء به جزء داریم . $\to \Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \Rightarrow \Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

$$\Gamma(1)=0!=\int_0^{\infty} x^0 e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big]_0^{\infty}=1$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

مقادیر تابع $\Gamma(\alpha)$ در انتهای کتاب ها به ازای $0<\alpha<1$ جدول شده است.

تمرین : نشان دهید $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مثال : $\left(-\frac{5}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}\times-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}}$

توجه : فاکتوریل فقط برای اعداد صحیح منفی تعریف نشده است .

برگشت به ادامه درس : تعریف تابع بسل :

$$y(x)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,2^{2k}(k+\lambda)\cdots(2+\lambda)(1+\lambda)}$$

حال با انتخاب $c_0=\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$ داریم :

Subject

Date

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda}$$ تابع بسل نوع اول مرتبه λ می باشد.

جواب دوم به ازای $m=-\lambda$

$$J_{-\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\lambda}$$

لذا جواب کامل معادله

$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 J_2(x)$$

$J_m(x)$ و $J_m(-x)$ دو جواب وابسته خطی هستند

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

و جواب دوم را باید با روش کاهش مرتبه به دست آوریم.

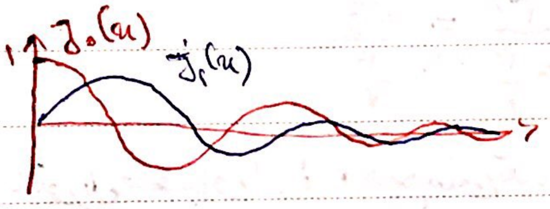
خواص توابع بسل:

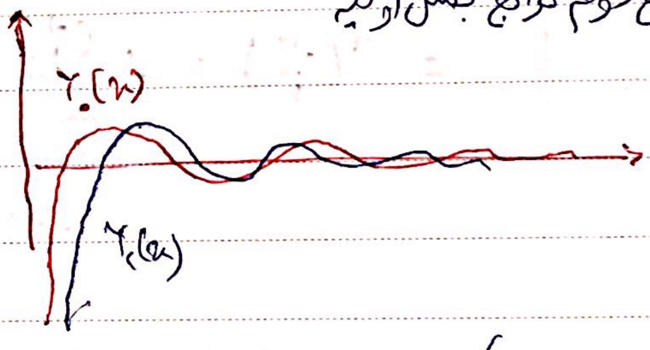
توابع بسل اولیه مهم:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \lambda=0$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \qquad \lambda=1$$

نوع دوم توابع بسل اولیه





توابع بسل کروی به ازای $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \frac{\sin}{\quad}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \frac{\cos}{\quad}$$

Subject
Date

$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x\pi}} \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x\pi}}$ تمرین: ثابت کنید.

خاصیت دوم: مشتق و انتگرال توابع بسل:

$$\begin{cases} (x^{\lambda} J_{\lambda}(x))' = x^{\lambda} J_{\lambda-1}(x) \\ (x^{-\lambda} J_{\lambda}(x))' = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (J_0(x))' = -J_1(x) \\ (x J_1(x))' = x J_0(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int x^{\lambda} J_{\lambda-1}(x)\,dx = x^{\lambda} J_{\lambda}(x) + C \\ \int x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)\,dx = -x^{-\lambda} J_{\lambda}(x) + C \end{cases}$$

مثال: مطلوبست: $I = \int J_3(x)\,dx$

$$= \int x^3 (x^{-3} J_3(x))\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} x^2(-x^{-2} J_2(x)) + 2\int x^{-1} J_2(x)\,dx$$

$$= -J_2(x) + 2(-x^{-1} J_1(x)) + C$$

PAPCO

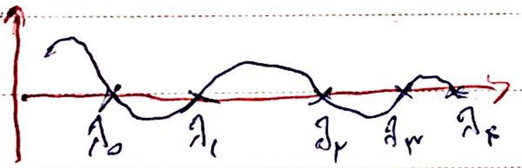
خاصیت سوم (فرمول های بازگشتی):

$$\begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} J_\lambda(x) + x^\lambda J'_\lambda(x) = x^\lambda J_{\lambda-1}(x) \\ -\lambda x^{-\lambda-1} J_\lambda(x) + x^{-\lambda} J'_\lambda(x) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2J'_\lambda(x) = J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) \\ 2\lambda x^{-1} J_\lambda(x) = J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) \end{cases}$$

تمرین: $J_{\frac{3}{2}}(x)$ و $J_{\frac{5}{2}}(x)$ را برحسب sin و cos بسط دهید.

خاصیت چهارم: (بسط بسل):



برای هر تابع بسل $J_\lambda(x)$

$$J_\lambda(\lambda_n x) \cdot J_\lambda(\lambda_m x) = \int_0^1 \underbrace{x}_{\text{تابع وزن}} J_\lambda(\lambda_n x)\, J_\lambda(\lambda_m x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{J'^2_\lambda(\lambda_n)}{2} & n = m \end{cases}$$

بنابراین اگر f یک تابع روی بازه $(0,1)$ با انرژی متناهی باشد،

Subject

Date

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\gamma(\lambda_n x) \\ c_n = \dfrac{2}{J'^{2}_\gamma(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_\gamma(x)\, dx \end{cases}$$

تمرین: $f(x) = e^x$ را برحسب $J_0(\lambda_n x)$ به صورت نمایی بسط دهید

تبدیل لاپلاس و کاربردها

تمرین: نشان دهید که جواب معادله $y'' - \lambda^2 y = r(x)$ به صورت زیر است:

$$y(x) = \int_0^{x} \cosh\lambda(x-u)\, r(u)\, du = \int_0^{x} \cosh\lambda u\, r(x-u)\, du$$

تمرین ۲: همچنین نشان دهید که جواب معادله $y'' + \lambda^2 y = r(x)$ به شکل زیر است،

$$y(x) = \int_0^{\infty} \cos\lambda(x-u)\, r(u)\, du = \int_0^{+\infty} \cos\lambda u\, r(x-u)\, du$$

در حالت کلی $r(x) \longrightarrow \boxed{h(x)} \longrightarrow y(x)$ برای معادلات با ضرایب ثابت نشان داده می‌شود.

$$y(x) = \int_0^{\infty} h(x-u)\, r(u)\, du$$

حال اگر $r(x) = e^{sx}$ تابع ویژه باشد لذا

$$y(x) = \int_0^{+\infty} h(u)\, e^{s(x-u)}\, du$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} h(u)\, e^{-su}\, du \right)}_{H(s)} e^{sx}$$

$H(s)$ مقدار ویژه با همان تبدیل لاپلاس h می‌باشد.

تعریف تبدیل لاپلاس: اگر $f(x)$ یک تابع تعریف شده در بازه $(0, \infty)$ باشد آن‌گاه (در صورت وجود):

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx = L\{f(x)\}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ می‌باشد.

از زاویه دیگر: با روش سری داشتیم، $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در حالت گسسته

$\int_0^{\infty} c(t)\, x^t\, dt$ در حالت پیوسته $\underline{\text{if } x=e^{-s}}$ $\int_0^{+\infty} c(t) e^{-st} dt$

بحث های این فصل: ۱- فرمول های اولیه تبدیل لاپلاس

۲- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال ۳- مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس

۴- فضاهای انتقال (حوزه زمان و حوزه انتقال) ۵- تابع ضربه و پیچش

فرمول های اولیه تبدیل لاپلاس: با توجه به توابع با چند جمله ای، مثلثاتی و نمایی که اهمیت ویژه ای در روش منزایب

تا همین جا داشتیم ابتدا تبدیل لاپلاس این توابع را بررسی می کنیم.

۱) تابع ثابت: $L(c) = \frac{c}{s}$

$$L(c) = \int_0^{\infty} c e^{-sx} dx = -\frac{c}{s} e^{-sx} = \frac{c}{s}$$

۲) توابع توانی: $L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ n یک عدد صحیح مثبت.

$$L\{x^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}$$ اگر n عدد حقیقی غیرصحیح باشد

۳) توابع نمایی: $L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$; $Re(s) > 0$

$$L(e^{ax}) = \int_0^{+\infty} e^{ax} e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} dx = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

PAPCO

توجه: در فرمول دیگر رابطه مستقیم با s دارند.

۴) توابع هذلولی : $L\{\cosh ax\} = \frac{s}{s^2-a^2}$

$L\{\sinh ax\} = \frac{a}{s^2-a^2}$

برهان : $\rightarrow L\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right) = \frac{1}{2}L(e^{ax}) + \frac{1}{2}L(e^{-ax}) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2-a^2}$

5) توابع مثلثاتی : $L(\cos ax) = \frac{s}{s^2+a^2}$

$L(\sin ax) = \frac{a}{s^2+a^2}$

برهان : $L(\cos ax) = L(\cosh iax) = \frac{s}{s^2-(ia)^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 2 + x^2 - \sqrt{x} + e^{-x}$

$\xrightarrow{L} F(s) = \frac{2}{s} + \frac{2!}{s^3} - \frac{(\frac{1}{2})!}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s-(-1)}$

ب) $g(t) = 3\cos 2t - 2\sinh 3t \xrightarrow{L} G(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - 2\frac{3}{s^2-9}$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس را بیابید.

الف) $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s+2}$

$$\Rightarrow f(s) = ۲ + \frac{1}{۲!}x^۲ - ۲e^{-۲x}$$

ب) $G(p) = \frac{p+1}{p^۲+۲}$; $p = s$ $= \frac{p}{p^۲+۲} + \frac{1}{p^۲+۲} \xrightarrow{L} g(t) = \cos\sqrt{۲}t + \frac{1}{\sqrt{۲}}\sin\sqrt{۲}t$

ج) $F(s) = \frac{s+1}{s^۲-۳s+۲} = \frac{s+1}{(s-1)(s-۲)} \equiv \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-۲)} \Rightarrow A(s-۲) + B(s-1) \equiv s-1$

$\xrightarrow{s=۲} \cdot A + B = ۳ \Rightarrow B = ۳$ $\quad \underline{s=1} \; -A = ۲ \xrightarrow{L^{-1}} f(x) = -۲e^{x} + ۳e^{۲x}$

د) $H(s) = \frac{s}{s^۴-1} = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s^۲+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^۲+1}$

$\xrightarrow{L^{-1}} h(t) = Ae^{t} + Be^{-t} + C\cos t + D\sin t$

(۱۱): تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال :

قضیه: فرض کنید $L\{f(x)\} = F(s)$ آنگاه در صورت وجود :

$$L(f'(x)) = sL\{f(x)\} - f(0)$$

$$L\left(\int_0^x f(u)du\right) = \frac{1}{s}L\{f(x)\}$$

برهان : $L\{f'(x)\} = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} f(x)e^{-sx}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}$

$$= 0 - f(0) + sL\{f(x)\}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y' - y = e^{-x} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با روش حل قبلی داشتیم.

$$y(x) = ce^{x} + Ae^{-x} \Longrightarrow y(x) = e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$$

حال با تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L} L(y') - L(y) = L(e^{-x})$$

یک معادله جبری در حوزه فرکانس برحسب

$$\Rightarrow sL(y) - y(0) - L(y) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$\to (s-1)Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \Rightarrow Y = \frac{1}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} \qquad Y = L(y),$$

$$\Rightarrow Y = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} \xrightarrow{L^{-1}} y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x} + e^{x}$$

بدیهی است که: $L\{f''(x)\} = L\{(f'(x))'\} = sL\{f'(x)\} - f'(0) = s^2 L\{f(x)\} - sf(0) - f'(0)$

$$, \; L(f'''(x)) = s^3 L\{f(x)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

مثال: حل مستقیم: از طرفین مشتق می‌گیریم

$$\begin{cases} y'' - 2y = -\int_0^x y(u)\,du \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

روش دوم: با روش سری‌ها.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

روش سوم: لاپلاس

$$\Rightarrow s^2 L\{y\} - s\,y(0) - y'(0) - 2L\{y\} = -\frac{1}{s}L\{y\}$$

$$\Rightarrow \left(s^2 - 2 + \frac{1}{s}\right)L\{y\} = 1 \Rightarrow L\{y\} = \frac{s}{s^3 - 2s + 1}$$

حال با عکس تبدیل لاپلاس y حاصل می شود ... تجزیه کسر.

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع زیر

$$f(x) = xe^x$$

حل: روش اول: مستقیم با تعریف:

$$L\{xe^x\} = \int_0^\infty xe^x e^{-sx}\,dx$$

$$= \int_0^\infty xe^{-(s-1)x}\,dx = \frac{1}{(s-1)^2}$$

روش دوم: از طرفین مشتق می گیریم.

$$f'(x) = e^x + \underbrace{xe^x}_{f(x)} \xrightarrow{L} sL\{f(x)\}$$

$$-f(0) = \frac{1}{s-1} + L\{f(x)\} \xrightarrow{\text{حل معادله جبری}} L\{f(x)\} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

مثال: مطلوبست عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

روش اول: تجزیه کسرها:

$$\Rightarrow F(s) = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s-1}$$

- از داخل شروع کرده و لاپلاس معکوس می گیریم تا به بیرون برسیم.

روش دوم : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s(s-1)}\right)\right\} = \int_0^x L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}du$

$\int_0^x L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}du = \int_0^x e^u\,du = e^x-1$ ، $= \int_0^x (e^u-1)du = e^x-1-x$

III) مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس :

داشتیم :

$$\begin{cases} L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0) \\ L\left\{\int_0^x f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}L\{f(x)\} \end{cases} \quad , \quad F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

با مشتق از طرفین نسبت به s داریم :

$$\Rightarrow F'(s) = \int_0^\infty (-xf(x))e^{-sx}dx = L(-xf(x)) \Rightarrow L(xf(x)) = -F'(s) = -(L\{f(x)\})'$$

به همین ترتیب : $L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$

البته باید $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ موجود باشد.

مثال : مطلوبست .

الف) $L\{xe^x\} = -\left(L\{e^x\}\right)' = -\left(\frac{1}{(s-1)}\right)' = \frac{1}{(s-1)^2}$

ب) $L(t^2 \sin t) = (L\{\sin t\})'' = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' =$

مثال : مطلوبست تبدیل لاپلاس های زیر :

الف) $F(s) = \tan^{-1}s$

بامشتق از طرفین: $\Rightarrow F'(s) = \frac{1}{1+s^2} \xrightarrow{L^{-1}} -xf(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{-\sin x}{x}$

ب) $G(s) = \ln\frac{s+1}{s-1} \longrightarrow G(s) = \ln(s+1) - \ln(s-1) \Rightarrow G'(s) = \frac{1}{s+1}$

$-\frac{1}{s-1} \xrightarrow{L^{-1}} -xG(x) = e^{-x} - e^{x} \Rightarrow G(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{x} = \frac{2\sinh x}{x}$

ج) $H(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$ با انتگرال از طرفین داریم:

$\longrightarrow \cancel{\int_s^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^2}} \quad \int_s^{+\infty} H(u)\,du = \int_s^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^2}\, du = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+u^2}\Big|_s^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+s^2}$

$\xrightarrow{L^{-1}} \frac{h(t)}{t} = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow h(t) = \frac{t}{2}\sin t$

روش دوم: قسمت ج: $H(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+s^2}\right)' \xrightarrow{L^{-1}} h(t) = +\frac{x}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}$

مثال: تابع زیر مفروض است. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

الف) تبدیل لاپلاس f را بیابید.

ب) نشان دهید که $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

ج) حل مسئله $\begin{cases} y''+y = \int_0^x f(u)\,du \\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$

الف) $L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \int_s^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du = \tan^{-1}u\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s$

ب) از انتگرال لاپلاس استفاده می‌کنیم. $L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-sx}\,dx \xrightarrow{s=0}$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(II)

تبدیل لاپلاس مشتق

قسمت الف

ج) $\xrightarrow{L} s^2 L\{y\} + 0 + 0 + L\{y\} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s\right) \Rightarrow L(y) = \frac{\frac{\pi}{2}}{s(s^2+1)}$ ساده است

$- \frac{1}{s(s^2+1)} \tan^{-1}(s)$ بحث جلسه بعد

مثال: انتگرال‌های لاپلاس:

الف) $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \cos x\,dx = \frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2}$

ب) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin 2x\,dx = \frac{2}{s^2+4}\Big|_{s=1}$

مفهوم تبدیل لاپلاس: برای تابع $f(x)$ توابع ویژه e^{sx} و مقادیر ویژه متناظر $F(s)$ می باشد.

به صورت شهودی: چقدر e^{sx} در $f(x)$ وجود دارد $\Leftarrow$ $F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(x) e^{-sx}\,dx$

۲) قضایای انتقال:
- انتقال روی محورها
- انتقال روی محورها.

انتقال روی محورها: با توجه به مفهوم تبدیل لاپلاس اگر f در e^{ax} ضرب شود مقدار ویژه به اندازه a انتقال می‌یابد.

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

مثال: حل با روش چهارم

$f(x) = xe^{x} \rightarrow L\{f(x)\} = L\{e^{x} x\}$

و $L\{x\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L\{e^{x} x\} = \frac{1}{(s-1)^2}$

مثال: مطلوبست عکس تبدیل لاپلاس مقابل

$$F(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}=\frac{s+1-1}{(s+1)^2+1}$$

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\xrightarrow{L^{-1}} e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$$

مثال: مطلوبست $L\{\cos x\cosh 2x\}$. با توجه به صورت نمایی $\cosh 2x$ داریم.

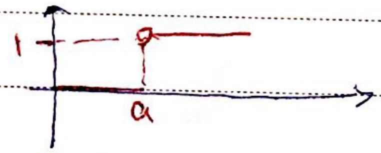
$$\cosh 2x=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\longrightarrow \frac{1}{2}L\{e^{2x}\cos x\}+\frac{1}{2}\{e^{-2x}\cos x\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

تمرین: $f(x)=xe^{2x}\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du$

قضیه دوم انتقال: انتقال روی محورها: قبل از ورود به بحث تابع پله‌ای واحد را بررسی می‌کنیم.

$u(x-a)=u_a(x)$



$$=\begin{cases}0 & ; \ 0<x<a\\ 1 & ; \ x>a\end{cases}$$

تابع هویساید

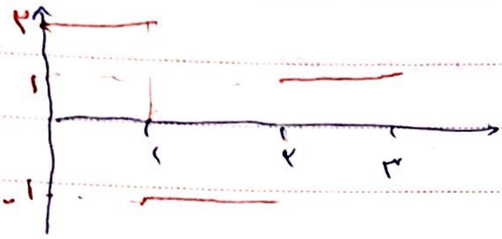
$$L\{u_a(x)\}=\int_0^\infty u_a(x)e^{-sx}\,dx=\int_a^\infty e^{-sx}\,dx=\frac{e^{-as}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{u_a(x)\}=\frac{e^{-as}}{s}$$

اگر $a=0$ همان تابع پله $f(x)=u_0(x)=1$ است.

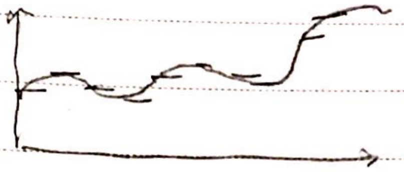
$$L\{f(x)\}=L\{1\}=\frac{1}{s}$$

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس شکل زیر



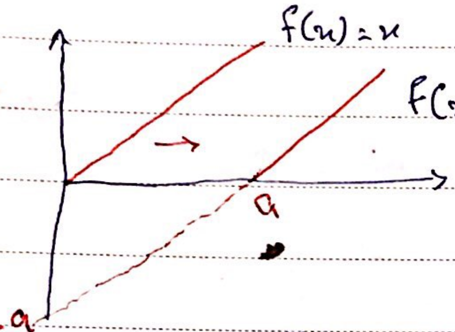
$$f(x) = 2u_0(x) - 3u_1(x) + 2u_2(x)$$

$$\xrightarrow{L} F(s) = 2\frac{e^{-0s}}{s} - 3\frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s}$$



به صورت شهودی: تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال $h \to 0$

صورت قضیه دوم انتقال: فرض کنید $L\{f(x)\} = F(s)$ آن گاه:



$$L\{u_a(x) f(x-a)\} = e^{-as} F(s)$$

$$\xrightarrow[\text{shift}]{+a} L\{u_a(x) f(x)\} = e^{-as} L\{f(x+a)\}$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس مقابل:

$$F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

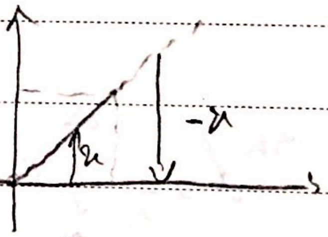
ریشه در قضیه دوم انتقال دارد.

$$\longrightarrow L^{-1}\{F(s)\} = u_\pi(x)\sin(x-\pi)$$

$$= -u_\pi \sin x$$

مثال: حل با روش دوم: تابع بار

$$\begin{cases} y'' + y = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(x) = x u_0(x) - x u_1(x) \Rightarrow y'' + y = (x-0)u_0(x) - (x-1)u_1($$

Scanned by CamScanner

$$-u_1(x) \xrightarrow{L} s^2 L\{y\} + L\{y\} = \frac{e^{-0s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin x \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^x \sin u\,du = 1-\cos x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^x 1-\cos u\,du = x-\sin x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} \overset{\text{انتقال}}{=} u_1(x)\left(1-\cos(x-1)\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}\right\} = u_1(x)\left((x-1)-\sin(x-1)\right)$$

تمرین: مطلوبست $L\{[x]\}$ راهنمایی: $[x] = 0u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\dots$

$$\to L\{u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\dots\} = \frac{e^{-0s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\dots = \frac{1}{s}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+\dots\right)$$

$$a_1 = 1,\ q = e^{-as} \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right)$$

تمرین: اگر f یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد ثابت کنید.

$$L\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(x)e^{-sx}\,dx$$

سپس مسأله زیر را حل کنید. به صورت یک سری می‌شود که ضرایب آن هندسی است،

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

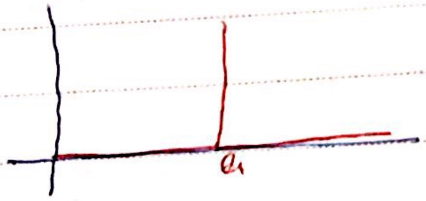
Date

تابع ضربه و قضیه پیچش :

تعریف تابع ضربه یا شوک

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0 & ; x\neq a\\ \infty & ; x=a\end{cases}$$

صورت هندسی :



خاصیت مهم :

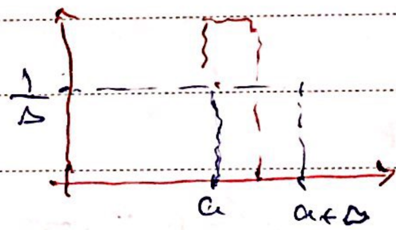
$$\int_0^\infty \delta(x-a)\,dx=1$$

$$\frac{d}{dx}u(x-a)=\begin{cases}0 & ; x\neq a\\ \infty & ; x=a\end{cases}$$

دیدگاه ریاضی : ابتدا تابع دلتای دیراک

$$\delta_\Delta(x-a)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & ; a\leq x\leq a+\Delta\\ 0 & x\leq a\ ,\ a+\Delta<x\end{cases}$$

$$\delta(x-a)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(x-a)$$



با این تعریف تابع حدی بدیهی است که

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_0^\infty \delta_\Delta(x-a)\,dx=1$$

تبدیل لاپلاس ضربه :

$$L(\delta(x-a))=L\{u'(x-a)\}$$

$$=sL\{u(x-a)\}-u(0-a)=s\left(\frac{e^{-as}}{s}\right)$$

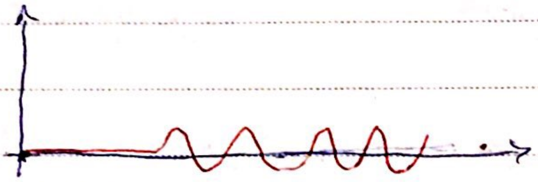
$$\Rightarrow L\{\delta(x-a)\}=e^{-as}$$

Subject
Date

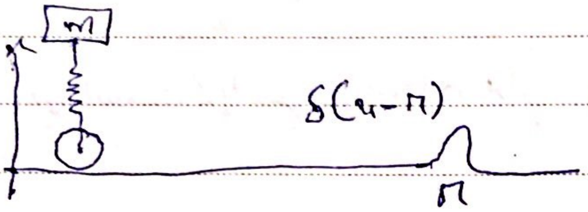
مثال: مطلوبست

$$L^{-1}\{1\} = \qquad L^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(x-a) \xrightarrow{a=0}$$

$$L^{-1}\{1\} = \delta(x-0) = \delta(x)$$



مثال: مطلوبست سیستم تعلیق خودرو



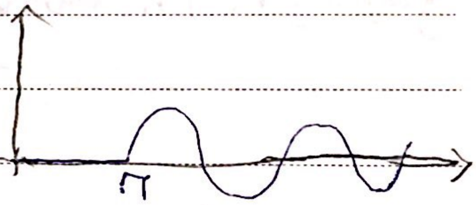
$$\begin{cases} y''+y = \delta(x-\pi) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

با تبدیل لاپلاس از طرفین:

$$s^2L\{y\}+L\{y\}=e^{-\pi s} \Rightarrow L\{y\} = \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

قضیه دوم انتقال

$$y(x)=u_\pi(x)\sin(x-\pi) = -u_\pi(x)\sin x$$



تا این جا متوجه شدیم که

$$\int_0^\infty \delta(x-a)\,dx=1$$

در حالت کلی

$$\int_0^\infty f(x)\,\delta(x-a) = f(a)$$

لذا در حالت کلی برای هر تابع $f(x)$ می توان نوشت

$$f(x)=\int_0^\infty f(u)\,\delta(u-x)\,du$$

هر سیگنال از بی‌نهایت ضربه تشکیل شده، حال فرض کنید پاسخ سیستم زیر مورد نظر است.

$$\begin{cases} y''+4y'+by = r(x) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y''+ay'+by=\int_0^{\infty} f(u)\,\delta(u-x)\,du = \delta(x) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس:

$$L\{y\}=\frac{1}{as^2+bs+c}=H(s)$$ تابع تبدیل سیستم می‌باشد

با لاپلاس معکوس داریم:

$$y(x)=L^{-1}\{H(s)\}=h(x)$$ تابع پاسخ ضربه

بدیهی است که پاسخ به $\delta(x-u)$ برابر $h(x-u)$ می‌باشد. چون سیستم خطی است لذا جواب نهایی

$$y(x)=\int_0^{\infty} r(u)\,h(u-x)\,dx$$

چون سیستم‌های مهندسی پیش‌بینی‌ناپذیر می‌باشند لذا $h(u-x)=0 \quad u>x$

$$y(x)=\int_0^{\infty} r(u)\,h(u-x)\,dx = r*h$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر در می‌آید:

- تعریف پیچش تابع f و g

$$f*g=\int_0^{\infty} f(u)\,g(u-x)\,dx$$

- خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری دارد. $f*g=g*f$ = خاصیت جابجایی

قضیه پیچش: اگر $L\{f(x)\}=F(s)$ و $L\{g(x)\}=G(s)$ آنگاه

$$L\{f*g\}=F(s)\,G(s)$$

مثال:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = x * \sin x$$

$$= \int_0^x u\sin(u-x)\,du = \int_0^x (u-x)\sin u\,du$$

ب) $$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= \sinh x * (\cos x * \cos x)$$

ج) $$\begin{cases} y' = x - e^{-x}\int y(u)e^{u}\,dy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف پیچش داریم:

$$y' = x - \int y(u)e^{u-x}\,du = x - y * e^{x}$$

$$\xRightarrow{L} sL\{y\} = \frac{1}{s^2} - L\{y\}\cdot\frac{1}{s-1} \xrightarrow{\text{در}} L\{y\}\left(s+\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$L\{y\} = \frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)} \xrightarrow{L^{-1}} y(x) = \ldots$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل:

تا این جا با حل معادلات دیفرانسیل که برحسب مجهول $y(x)$ بوده است آشنا شدیم.

در کاربردها اغلب با دستگاه معادلات دیفرانسیل سروکار داریم، برای نمونه

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$$

مسئله شکار و شکارچی: فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب میزان شکار و شکارچی باشد

$x(t)$ خرگوش و $y(t)$: روباه

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) - by(t)x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

مدل رقابتی: فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ از یک منبع تغذیه مشترک تغذیه می کنند.

$x(t)$: روباه $\quad$ $y(t)$: شغال

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) - by(t)x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

توجه کنید: مسأله های آونگ مرکب، مدارهای RLC مرکب، فنرهای میراساز و ... به همین صورت مدل سازی می شوند.

برای حل ابتدا فرم کلی را می نویسیم.

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

با انتخاب $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ به صورت برداری داریم : $\dot{X} = F(t, x)$

صورت خطی :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + r_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) + r_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + r_n(t) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + a_{12}(t) + \dots + a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{2n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t) + a_{n2}(t) + \dots + a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dot{X} = A(t) X + R(t)$

(۱) واگر $A(t) = A$ مستقل از t باشد معادله با ضرایب ثابت است

(۲) واگر $R(t) = 0$ باشد دستگاه همگن نامیده می‌شود.

$\dot{X} = A(t) X \xrightarrow{\text{ض ثابت}} \dot{X} = AX$

دستگاه در حالت کلی قابل حل نیست. روش های: تحلیلی، توصیفی، تقریبی

در این درس حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت را در حالت های خاص حل می کنیم.

روش های حل:
- روش های کلاسیک: حذفی، لاپلاس
- روش ماتریس اساسی ← اپراتوری
- روش مقادیر و توابع ویژه

روش های کلاسیک: با دو مثال این ۳ روش را توضیح می دهیم.

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = -x_2(t) \\ \dot x_2(t) = x_1(t) \end{cases} , \quad x_1(0)=1 , \quad x_2(0)=0$$

روش تبدیل لاپلاس:

$$\longrightarrow \begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = X_1(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} sX_1 + X_2 = 1 \\ -X_1 + sX_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1(s) = \frac{s}{1+s^2} \\ X_2(s) = \frac{1}{1+s^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = \cos t \\ x_2(t) = \sin t \end{cases}$$

روش دوم: با روش حذفی:

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = -x_2(t) \\ \dot x_2(t) = x_1(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{با حذف } x_2} \begin{cases} -\ddot x_1(t) = +\dot x_2(t) \\ \dot x_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow +\ddot x_1(t) + x_1(t) = 0$$

و به همین ترتیب با حذف x_1 $\Longrightarrow \ddot x_2 + x_2 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1\cos t + c_2 \sin t \\ x_2(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t \end{cases}$$

برای ~~...~~ بررسی میزان وابستگی جواب ها این دو جواب را در یکی از معادلات دستگاه قرار می دهیم.

$$\Longrightarrow -c_1 \sin t + c_2 \cos t = -c_3 \cos t - c_4 \sin t$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_4 = c_1 \\ c_3 = -c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ x_2(t) = -c_2 \cos t + c_1 \sin t \end{cases} \xrightarrow[c_1 = 1 ,\ c_2 = 0]{\text{جایگذاری شرایط اولیه}} \begin{cases} x_1(t) = \cos t \\ x_2(t) = \sin t \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

روش اپراتورها: مسأله غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید $x_1(0)=1$ و $x_2(0)=0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_2 = 1 \\ \dot{x}_2 - x_1 = e^t \end{cases}$$

(۱) ابتدا به صورت اپراتوری می‌نویسیم

$$\begin{cases} Dx_1 + x_2 = 1 \\ Dx_2 - x_1 = e^t \end{cases}$$

(۲) به صورت ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{pmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

روش کرامر: $x_1(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^t & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix}} = \dfrac{0 - e^t}{D^2+1}$

$$x_2(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix}} = \dfrac{e^t + 1}{D^2+1}$$

(۳) طرفین وسطین می‌کنیم $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = -e^t \\ \ddot{x}_2 + x_2 = 1 + e^t \end{cases}$$

ضرایب نامعین

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + Ae^t \\ x_2(t) = c_3\cos t + c_4\sin t + B + Ce^t \end{cases}$$

گام اول: ضرایب نامعین A و B و C را با روش ضرایب نامعین به دست میاوریم.

گام دوم: با جایگزینی این جواب در یک معادله دستگاه میزان وابستگی c_3 و c_4 برحسب c_1 و c_2 را می‌یابیم.

گام سوم: با دو شرط اولیه $x_1(0)=1$ و $x_2(0)=0$ ضرایب ثابت c_1 و c_2 را می‌یابیم.

Subject
Date

تشکیل و حل دستگاه معادلات همگن:

$$\dot{x} = A(t)x \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

صورت کلی جواب:

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

که X_1 و X_2 تا X_n، n جواب مستقل خطی معادله هستند. به صورت ماتریسی:

$$X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi(t).C$$

$\Phi(t)$ ماتریس اساسی جواب نامیده می‌شود که $\det(\Phi(t)) \neq 0$ ؛ چون دترمینان رونسکین جواب‌های مستقل خطی X_1 و X_2 و ... و X_n می‌باشند.

توجه: تعیین $\Phi(t)$ در حالت کلی غیر ممکن است. مگر برای معادلات با ضرایب ثابت.

روش ماتریس نمایی: یادآوری می‌کنیم که:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t) \Rightarrow x(t) = ce^{\lambda t}$$

حال:

$$\dot{X} = AX(t) \longrightarrow X(t) = e^{At}.C$$

تعریف ماتریس نمایی: اگر A یک ماتریس مربعی باشد

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

روش تعیین e^{At}:
- استفاده از قطری
- استفاده از:
  - تبدیل لاپلاس
  - کیلی همیلتون

فرض کنید

$$\dot{X} = AX,\quad X(0)=I \xrightarrow{\text{جواب}} X(t) = e^{At} I = e^{At}$$

تبدیل لاپلاس از طرفین:

$$sL\{X\} - X\{0\} = AL\{X\} \longrightarrow L\{X\}(sI-A) = I$$

$$\Rightarrow L\{X\} = (sI-A)^{-1} \Rightarrow X = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$\Rightarrow e^{At} = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

مثال:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

به صورت ماتریسی $\longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad x(t) = e^{At}\cdot C,\ x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow e^{At} = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} \longrightarrow sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+2-2} \begin{pmatrix} s+2 & \cancel{-1}\ 1 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-e^{-t} & -1+e^{-t} \\ 2-2e^{-t} & -1+2e^{-t} \end{pmatrix} = e^{At}$$

روش دوم: روش مقادیر و بردارهای ویژه:

منطقی است که جواب معادله‌ی $\dot{X} = AX$ به فرم $X = \lambda e^{\lambda t}$ باشد. با جایگذاری در معادله داریم،

Subject
Date

$$ke^{\lambda t} = Ake^{\lambda t} \Rightarrow (AkI - Ak)e^{\lambda t} = 0$$ لذا معادله مشخصه به صورت برداری

$$\Rightarrow (\lambda I - A)k = 0 \Rightarrow Ak = \lambda k$$

λ مقدار ویژه A

k بردار ویژه A

حالت اول: اگر A، n مقدار ویژه‌ی متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ با بردارهای ویژه متناظر (داشته باشد)

$k_1, \dots, k_n$ و $k_A =$ خواهیم داشت.

$$X(t) = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 (t)} + \dots + c_n k_n e^{\lambda_n (t)}$$

حالت دوم: اگر A مقدار ویژه‌ی $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ داشته باشد با بردار ویژه k_1

$$\begin{cases} X_1 = k_1 e^{(\alpha + i\beta)t} \\ X_2 = \bar{X}_1 = \bar{k}_1 e^{(\alpha - i\beta)t} \end{cases}$$

دو جواب مستقل خطی هستند که صورت حقیقی متناظر

$$\bar{X}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} = Re(X_1)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{X_1 - X_2}{2i} = Im(X_1)$$

حالت سوم: اگر مقادیر ویژه تکراری $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ باشد.

I: اگر متناظر با این مقدار ویژه تکراری دو بردار ویژه متمایز k_1 و k_2 باشد در این صورت $X_1 = k_1 e^{\lambda t}$

$X_2 = k_2 e^{\lambda t}$ مستقل خطی هستند.

II: اما چنانچه بردار ویژه متناظر نیز تکراری باشد ($k_1 = k_2 = k$) در این صورت $X_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}$ و

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$X_1 = k_1 t e^{\lambda_1 t}$ می باشد که با جایگزینی X فوق در معادله داریم :

$(\lambda_1 I - A) P = k_1 \longrightarrow P = ?$

نوکته : چنانچه سه مقدار ویژه تکراری با سه بردار ویژه متمایز داشته باشیم

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

$X_1 = k_1 e^{\lambda t} \qquad X_2 = k_2 e^{\lambda t} \qquad X_3 = k_3 e^{\lambda t}$

II. اما چنانچه بردارهای ویژه $k = k_1 = k_2 = k_3$ تکراری باشند

$X_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad X_2 = k_1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 I - P) = k_1$

$X_3 = k_1 \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + P t e^{\lambda_1 t} + Q e^{\lambda_1 (t)} \Rightarrow (\lambda_1 I - A) Q = P \longrightarrow P = ?$

مثال :

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$$

ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را به دست می آوریم .

$A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

$P_2 = SI - A = \begin{vmatrix} S-3 & -18 \\ 2 & S+9 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ریشه تکراری

$A k_1 = -3 k_1 \longrightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = k_2 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \\ X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} e^{-3t} \end{cases}$

که با حل دستگاه زیر :

$(A + 3I) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

جواب نهایی : $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$

Subject
Date

حل دستگاه‌های غیرهمگن:

$X' = A(t)X + R(t)$

اگر دستگاه با ضرایب ثابت و $R(t)$ توابع خاص (نمایی، چند جمله‌ای، مثلثاتی و یا ترکیب آن‌ها) باشد از روش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم.

مثال: دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1 \\ y' = -x + y + e^{-t} - 5t + 7 \end{cases}$$

حل: به صورت ماتریسی:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ جواب کامل: $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-t}}_{X_{p_1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t}_{X_{p_2}} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ با جایگذاری $X_p(t)$ در معادله

ادامه دهید

روش لاگرانژ یا تغییر پارامتر: اگر دستگاه با ضرایب غیرثابت یا $R(t)$ توابع خاص نباشند روش تغییر پارامتر مناسب است.

$X' = A(t)X + R(t) \Longrightarrow X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)c(t)$

با جایگذاری $X_p(t)$ در معادله $c(t) = \int \Phi^{-1}(t) R(t)\,dt$

Subject
Date

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \ln t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t>0$$

حل: ابتدا معادله همگن متناظر را حل می کنیم.

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x$$

جواب این معادله با روش ماتریس نمایی یا مقادیر و بردارهای ویژه تعیین می شود.

با روش ضرایب نامعین

$$x_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

$$x_p(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

که بعد از جایگذین کردن داریم:

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$y' = \sqrt{x-y}$ $\quad x-y = u^2 \Rightarrow 1-y' = 2u\,u' \quad 1-2uu' = u \Rightarrow 2uu' = 1-u$

$u' = \frac{1-\cancel{2}u}{2u}$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$

$\Rightarrow u + xu' = f(u) \Rightarrow x\underbrace{u'}_{\frac{du}{dx}} = f(u) - u \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$

$f(x, y, y') = 0$

- $y' = f(x, y)$
  - معادله‌های جدایی‌پذیر
    $y' = f(x)g(y)$
  - قابل تبدیل به جدایی‌پذیر
    $y' = f(\underbrace{ax + by + c}_{\to u})$
    $y' = f\left(\underbrace{\frac{y}{x}}_{\to u}\right)$
- $x = f(y, y')$
  $y = f(x, y')$

$y' = \frac{5x+y+1}{x-2y} = \frac{5X+Y}{X-2Y} \longrightarrow \begin{cases} 5x+y+1 = 5X+Y \\ x-2y = X-2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = Y + \ldots \\ x = X + \ldots \end{cases}$

$$y' = \frac{x^2+y^2+2}{x^2-y^2-4} \cdot \frac{x}{y} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+2 = X+Y \\ x^2-y^2-4 = X-Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2+6 = 2Y \\ 2x^2-2 = 2X \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = Y-3 \\ x^2 = X+1 \end{cases} \xrightarrow{d} \begin{cases} 2y\,dy = dY \\ 2x\,dx = dX \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

جایگذاری در معادله

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}\cdot\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}} \xrightarrow[y' = u + xu']{u = \frac{Y}{X}} u + Xu' = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow$$

$$X u' = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{u^2+1}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{u^2+1}du = \frac{dX}{X} \Rightarrow \tan^{-1}\underset{\frac{Y}{X}}{u} - \frac{1}{2}\ln(\underset{\frac{Y}{X}}{u}^2+1)$$

جایگذاری

$$= \ln X + \ln C \Rightarrow$$

$$x^2 = X+1$$

$$x\left(e^{\frac{y}{x}} + y'\right) = y \Rightarrow y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow u + xu' = u - e^u \Rightarrow xu' = -e^u$$

$$y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)dx + \underbrace{2x\,dy}_{\text{درجه یک}} = 0 \quad \xrightarrow[dy = \alpha z^{\alpha-1}dz]{y = z^\alpha} z^\alpha\left(1+\sqrt{x^2 z^{4\alpha}+1}\right)dx + 2x \times \underbrace{\alpha z^{\alpha-1}}_{\alpha} dz$$

باید در همه درجه یک فرض شود.

$$2 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\div z^{\alpha-1} \Rightarrow z\left(1+\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+1}\right)dx - x\,dz = 0 \Rightarrow \left(1+\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+1}\right)dx - \frac{x}{z}dz = 0 \xrightarrow{\frac{x}{z} = u}$$

$$(x-2y^3)dx + 3y^2(2x-y^3)dy = 0 \qquad y = z^\alpha \Rightarrow (x-2z^{3\alpha})dx + 3z^{2\alpha} \times$$

$$(2x - z^{3\alpha}) \times \alpha z^{\alpha-1} dz = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow (x-2z)dx + (2x-z)dz$$

$$\xrightarrow[dz = x\,du + u\,dx]{z = xu} (x - 2xu)dx + (2x - xu)(x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow$$

PAPCO

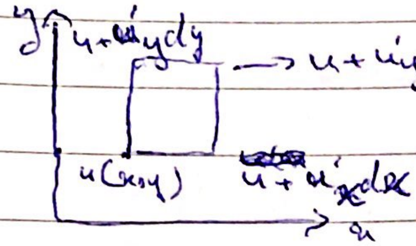
Scanned by CamScanner

$\int \frac{2-u}{1-u^2}du + \int \frac{dx}{x} = 0 \longrightarrow \frac{2-u}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$ تجزیه کسر

$(x+y-1)^2 dy = 2(y+2)^2 dx \longrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=x+3 \\ Y=y+2 \end{cases}$

$\Rightarrow (X+Y)^2 dy = 2Y^2 dx$

یادآوری :



$\longrightarrow u+u_y dy+u_x dx$ $\quad du(x,y)=u_x dx+u_y dy$

$M dx + N dy = du$ شرط $\begin{cases} u_x=M \\ u_y=N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xy}=M_y \\ u_{xy}=N_x \end{cases} \Rightarrow M_y=N_x$

معادلات کامل گفته می‌شود

$(\underbrace{2x+y^2\cos x}_{M})dx+(2y\sin x-\sin y)dy=0$

$u_{xy}=2y\cos x = 2y\cos x \to 0$ ✓ کامل است

$M=u_x=2x+y^2\cos x$ و $N=u_y=2y\sin x-\sin y$

$\int \Rightarrow u = x^2+y^2\sin x + c(y) \Rightarrow$ تابعی از متغیر دیگر $\Rightarrow u_y = 0+2y\sin x+c'(y)$

$=2y\sin x-\sin y \Rightarrow c'(y)=-\sin y \Rightarrow c(y)=\cos y$

$(2x+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-\sin y)dy=0$

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2) \qquad x\,dy + y\,dx = d(xy)$$

$$x\,dy - y\,dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y\,dx - x\,dy = y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \xrightarrow{\int} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y x^2} + \frac{dx}{x^2 y} = \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2y^2} = \frac{d(xy)}{x^2y^2} \xrightarrow{\int} \frac{-1}{xy} + C$$

$$(x^3 - y)\,dx + (x + x^2 y)\,dy = 0 \Rightarrow x^3 dx - y\,dx + x\,dy + x^2 y\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 dx + x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 y\,dy = 0 \xrightarrow{\div x^2} x\,dx + d\left(\frac{y}{x}\right) + y\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$(x + 3x^2\sqrt{x^2-y^2})\,dx - y\,dy = 0 \Rightarrow \underbrace{x\,dx - y\,dy}_{\frac{1}{2}d(x^2-y^2)} + 3x^2\sqrt{x^2-y^2}\,dx = 0$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}} + \int 3x^2\,dx = 0$$

$(x^2-y^2-y)dx+(y^2-x^2+x)dy=0 \Rightarrow F(x^2-y^2)$

$F(z)$

$\frac{F'}{F}=\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y} \Rightarrow \frac{-2y-1+2x-1}{(y^2-x^2+x)2x-(x^2-y^2-y)(-2y)}=$

$\frac{2(x-y-1)}{2xy^2-2x^3+2x^2+2x^2y-2y^3-2y^2}=\frac{-1}{x^2-y^2}$

$\Rightarrow F=e^{\int F(z)dz}=e^{\int -\frac{1}{z}dz}=e^{-\ln z}=\frac{1}{z} \Rightarrow F=\frac{1}{x^2-y^2} \Rightarrow$

$(1-\frac{y}{x^2-y^2})dx+(-1+\frac{x}{x^2-y^2})dy=0 \Rightarrow dx+\frac{xdy-ydx}{x^2-y^2}-dy=0$

خطی سازی

$\tan x\, y'+y=3x\sec x \Rightarrow y'+\frac{\cos x}{\sin x}y=\frac{3x}{\sin x} \quad F=e^{\int \tan x}=e^{\ln \sin x}=\sin x$

$\Rightarrow (y\sin x)'=3x \Rightarrow y\sin x=\frac{3}{2}x^2+c \Rightarrow y=\frac{\frac{3}{2}x^2+c}{\sin x}$

$y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x} \xrightarrow{y'=\frac{1}{x'}} \frac{1}{x'}=\frac{y}{2y\ln y+y-x} \Rightarrow yx'+x=2y\ln y+y$

فرم استاندارد $\Rightarrow x'+\frac{1}{y}x=2\ln y+1 \Rightarrow F=e^{\int \frac{1}{y}dy}$ ← انتگرال عوض شد $=e^{\ln y}=y$

$\Rightarrow (xy)'=2y\ln y+y \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} xy=y^2\ln y+c \Rightarrow x=y\ln y+$ [illegible]

معادله درجه دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت

$y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=f_3(x)$

$y=y_h+y_p$

روش ضرایب نامعین

به دست آوردن y_h (جواب معادله همگن نظیر)

1- معادله مفسر ریشه حقیقی دارد. ($t_1 \neq t_2$) $\quad y_h=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}$

2- معادله مفسر ریشه موهومی دارد، $t_{1,2}=p\pm iq \quad y_h=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$

3- معادله مفسر دارای ریشه مضاعف باشد، $t_1=t_2=t=\frac{a}{2} \quad y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-\frac{a}{2}x}$

4- معادله مفسر دارای ریشه مختلط تکراری باشد. $\quad e^{px}(c_1+c_2x+c_3x^2)\cos qx + e^{px}(c_4+c_5x+c_6x^2)\sin qx$

به دست آوردن y_p

1- اگر $f(x)$ به فرم چندجمله‌ای از درجه n باشد و m تعداد ریشه‌های صفر معادله مفسر باشد.

$y_p=x^m$ (چندجمله‌ای درجه n)

$f(x)=x^3+1 \to Ax^3+Bx^2+Cx+D$

2- اگر $f(x)$ به فرم $f(x)=M(x)e^{px}$ باشد $M(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد و m تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مفسر می‌باشد.

$y_p=x^me^{px}\times$ (چندجمله‌ای کامل درجه n)

$y^{(4)}+2y'''+y''=(x^2+3)e^{-x} \to y_p=x^2e^{-x}(Cx^2+Dx+E)$

3- اگر $f(x)$ به فرم $f(x)=M(x)\cos qx+N(x)\sin qx$ باشد و M و N دو چندجمله‌ای باشند.

m: تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مفسر است. $\quad y_p=x^m(R(x)\cos qx+S(x)\sin qx)$

$R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه‌ی بیشتر

$y''+4y=x\sin 2x \to x[(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x]$

4- اگر $f(x)=e^{px}(M(x)\cos qx+N(x)\sin qx)$ باشد تلفیق دو حالت بالا می‌شود.

m: تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مفسر $\quad y_p=x^me^{px}(R(x)\cos qx+S(x)\sin qx)$

1- $2y'(x+\sin x)y^2+x \rightarrow \boxed{y'y^2 \mid 1}$

$x^2y'+2xy=0 \xrightarrow{y} \boxed{y' \mid y \mid 1}$

$y\,dx+x(x^2y-1)dy=0 \rightarrow yx'+x(x^2y-1)=0 \quad \boxed{x' \mid x^3 \mid 1}$

(۴) $y'=\dfrac{xy^2-\sin x\cos x}{2y(1-x^2)} \rightarrow \boxed{\underbrace{yy'}_{u'} \mid \underbrace{y^2}_{u} \mid 1}$

$4y^3y'+y=2xy'+2y^2 \xrightarrow{\times x'} 4y^3+x'y=2xy'+3x'y^2 \quad \boxed{1 \mid x' \mid x}$

$\dfrac{1}{x'} \qquad \dfrac{1}{x'}$

ج۴ : $2yy'(1-x^2)=xy^2-\sin x\cos x \xrightarrow{y^2=u} (1-x^2)u'=xu-\sin x\cos x$

$\Rightarrow u'-\dfrac{x}{1-x^2}=-\dfrac{\sin x\cos x}{1-x^2}$ که معادله خطی است.

$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\tan y}{1+x}=(1+x)e^x\sec y \rightarrow \boxed{y' \mid \tan y \mid \sec y}$ بضرب اولی رو ۸ می‌کنیم

$\times\cot y \rightarrow \boxed{\cot y\, y' \mid 1 \mid \underbrace{\frac{1}{\sin y}}_{u}} \rightarrow u'=\dfrac{\cos y}{\sin t} \rightarrow$ نشد $\rightarrow$ دومی رو یکی می‌کنیم،

$\times \dfrac{1}{\sec y}=\cos y$ $\quad \boxed{\underbrace{\cos y\, y'}_{u'} \mid \underbrace{\sin y}_{u} \mid 1}$ $\quad \xrightarrow{\times\cos y} \cos y\cdot y'-\dfrac{\sin y}{1+x}=(1+x)e^x$

$\Rightarrow u'-\dfrac{u}{1+x}=(1+x)e^x \qquad F=e^{\int -\frac{1}{1+x}dx}=\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{1+x}u\right)'=e^x$

$\dfrac{1}{1+x}=e^x+C \Rightarrow \sin y=(e^x+C)(1+x)$

$\sin y\dfrac{dy}{dx}=\cos y(1-x\cos y) \quad \boxed{\sin y\, y' \mid \cos y \mid \cos^2 y} \xrightarrow{\div\cos^2 y} \boxed{\frac{\sin y}{\cos^2 y}y' \mid \frac{1}{\cos y} \mid 1}$

$\xrightarrow{\div\cos y}\ \underbrace{\frac{\sin y}{\cos^2 y}}_{u'} y' = \underbrace{\frac{1}{\cos y}}_{u} - x \Rightarrow u' - u = -x \to F = e^{\int -dx} = e^{-x}$

$\Rightarrow (ue^{-x})' = -xe^{-x} \Rightarrow ue^{-x} = \int -xe^{-x} \dots$

$y\,dx + x(x^2y - 1)\,dy = 0 \xrightarrow{y} \boxed{y \mid yy' \mid y'}$ ز مشتق‌ها نسبت به y داریم

$\xrightarrow{x} \boxed{x' \mid x^3 \mid x} \xrightarrow{\div x^3} \boxed{\underbrace{\frac{1}{x^3}x'}_{u'} \mid 1 \mid \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u}}\quad yx' + x^3y - x = 0$

$\xrightarrow{\div x^3} \frac{y}{x^3}x' + y - \frac{1}{x^2} = 0 \xrightarrow[u' = -2x^{-3}]{u = \frac{1}{x^2}} -\frac{y}{2}u' + y - u = 0 \Rightarrow u' + \frac{2}{y}u = 2$

$F = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{\ln y^2} = y^2 \Rightarrow (y^2u)' = 2y^2 \Rightarrow y^2u = \frac{2}{3}y^3 + c$

$y' + \sin y + x\cos y + x = 0 \longrightarrow \boxed{y' \mid \sin y \mid \cos y \mid 1}$ باید تشابه کنیم

$\Rightarrow y' + \sin y + x(1+\cos y) = 0 \Rightarrow y' + \sin y + x\left(2\cos^2\frac{y}{2}\right) = 0$

$\boxed{y' \mid \sin y \mid 2\cos^2\frac{y}{2}} \xrightarrow{\div 2\cos^2\frac{y}{2}} \boxed{\underbrace{\frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}y'}_{u'} \mid \underbrace{\sin y\cdot\sec^2\frac{y}{2}}_{u} \mid 1} \Rightarrow$

$2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$

$\xrightarrow{\times\sec^2\frac{y}{2}} \sec^2\frac{y}{2}\cdot y' + 2\tan\frac{y}{2} + 2 = 0 \Rightarrow u' + u = -2x$

$y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)x + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \qquad y' = p \Rightarrow y = 2xp + y^2p^3 \Rightarrow 2xp = y - y^2p^3$

$\Rightarrow 2x = \frac{y}{p} - y^2p^2 \xrightarrow{d} 2dx = \left(\frac{1}{p} - 2py^2\right)dy + \left(\frac{-y}{p^2} - 2y^2p\right)dp \Rightarrow$

$\frac{2dy}{p} = \left(\frac{1}{p} - 2yp^2\right)dy + \left(\frac{-y}{p^2} - 2y^2p\right)dp \Rightarrow \left(\frac{1}{p} + 2yp^2\right)dy = \frac{-y}{p} \times$

$\left(\frac{1}{p} + 2yp^2\right)dp \Rightarrow (1)\ \frac{1}{p} - 2yp^2 = 0 \qquad (2)\ dy = \frac{-y}{p}dp \Rightarrow \frac{dy}{-y} = \frac{1}{p}dp$

(2)

$\Rightarrow yp = +c \quad 1, 2 \Rightarrow \quad 2x\frac{c}{y} = y - \frac{c^3}{y}$

معادله‌های مرتبه بالا
- خطی
  - با ضرایب ثابت
  - با ضرایب متغیر
- غیرخطی

$y = y_p + y_h \qquad D = \frac{d}{dx} \qquad Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$

$D^2(D^2+1)^2(D^2+2D+5)(D^2-1)y = 0$

$D^2 = 0 \xrightarrow{D=0} e^{0x}\{1, x\} \Rightarrow c_1 + c_2x$

$(D^2+1)^2 = 0 \xrightarrow{D=\pm i} \begin{matrix}\cos x\{1, x\} \\ \sin x\{1, x\}\end{matrix} \Rightarrow c_3\cos x + c_4 x\cos x + c_5\cos x + c_6 x\cos x$

$D^2 + 2D + 5 = 0 \qquad \Delta = 4 - 4\times1\times5 = -16 \Rightarrow D = \frac{-2 \pm \sqrt{+16i^2}}{2} = -1 \pm 2i$

$\Rightarrow \begin{matrix} e^{-x}\cos 2x \\ e^{-x}\sin 2x \end{matrix} \Rightarrow y_{h_3} = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\sin 2x$

$D^2-1=0 \Rightarrow D=\pm 1 \rightarrow y_{h_4}=c_3e^{x}+c_4e^{-x}$ $\qquad y_h=y_{h_1}+y_{h_2}+y_{h_3}+y_{h_4}$

$a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_n=0$

$P=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$ جوابها باید مقسوم علیه های P باشد.

مثال $D^3-2D^2-5D+6=0 \xrightarrow{\text{مقسوم علیه ها}} \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\} \xrightarrow{\text{جوابها}} \{1,-2,3\}$

$D^n=D_1 \qquad D_1=re^{i\theta} \Rightarrow D=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{r}\,cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

مثال $D^4+16=0 \Rightarrow D^4=-16=16e^{i(\pi+2k\pi)}$

$\Rightarrow D=2cis\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \qquad k=0 \Rightarrow D=2cis\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$=\sqrt2 \pm i\sqrt2 \qquad k=1 = 2cis\frac{3\pi}{4}=-\sqrt2\pm i\sqrt2$

$k=3 \qquad k=2$ چون می دانیم $\bar{z}$ هم باید جواب باشد

$4y''-3y'+y=0 \Rightarrow 4D^3-3D^2+1=0 \rightarrow \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مقسوم علیه}} \left\{\frac{1}{\pm1},\frac{1}{\pm2},\frac{1}{\pm4}\right\}$

$\xrightarrow{D=-1} (D+1)(2D-1)^2=0 \Rightarrow c_1e^{-x},\ c_2e^{\frac{x}{2}}\{1,x\} \rightarrow e^{\frac{x}{2}},\ xe^{\frac{x}{2}}$

$y^{(4)}-4y^{(3)}+5y''+a(y'-y)=0$ a چند باشد تا xe^{2x} یک جواب معادله باشد.

$\rightarrow \{1,x\}e^{2x} \xrightarrow{\text{یک ریشه}} (D-2)^2 \Rightarrow D^4-4D^3+5D^2+a(D-1)=0 \xrightarrow{D=2} a=$

می توانست یک مجهول دیگر هم بدهد. در این جا ما فقط از $D=2$ استفاده کردیم اما از توان ۲ استفاده نکردیم.

برای مجهول دیگر باید یکبار مشتق گرفته و $D=2$ قرار دهیم تا معادله جدید حاصل شود.

$y''-2y'+y=\ln(\sin(e^{x+2}))$ $\quad y_1$ و y_2 جوابها $\quad y_1(0)=y_2(0)$

و $y_1'(0)=y_2'(0)+1$ ، y_1 و y_2 چه ارتباطی باهم دارند.

$y_1''-2y_1'+y_1=R(x) \Rightarrow (y_1-y_2)''-2(y_1'-y_2')+(y_1-y_2)=0$

$y_2''-2y_2'+y_2=R(x)$ $\quad$ معادله همگن نظیر

$\Rightarrow y_1-y_2=y_3 \qquad (D-1)^2y=0 \Rightarrow e^x, xe^x \Rightarrow y_3=(c_1+c_2x)e^x$

از طرفی $\quad y_3(0)=y_1(0)-y_2(0)=0$ و $y_3'(0)=y_1'(0)-y_2'(0)=1$

با جایگذاری $\longrightarrow c_1=0$ و $c_2=$

1) $D^n f=f'$ $\qquad \frac{1}{D}f=\int f\,dx$ $\qquad$ (2) $D^n f=\frac{d^n f}{dx^n}$, $\frac{1}{D^n}(1)=\frac{x^n}{n!}$

(3) $\frac{1}{F(D)}\left[e^{\alpha x}f(x)\right]=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}(f(x))$

$\frac{1}{D-a}[f(x)]=e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$

$y''-2y'+y=e^x\sec^2x \Rightarrow (D-1)^2y=e^x\sec^2x \Rightarrow y_p=\frac{1}{(D-1)^2}[e^x\sec^2x]$

به خاطر وجود e^{1x} ، D را یک واحد شیفت میدهیم $\Rightarrow e^x\frac{1}{D^2}[\sec^2x] \Rightarrow y_p=e^x\ln -\cos x=e^x\ln\sec$

$$(D-1)^2 (D+1)^3 y = 16e^{x} + 24e^{-x}$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{(D-1)^2} \cdot \frac{1}{(D+1)^3} (16e^{x}) = \frac{16}{8} e^{x} \cdot \frac{1}{D^2} (1) \overset{\frac{x^2}{2}}{=} x^2 e^{x}$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{(D-1)^2} \cdot \frac{1}{(D+1)^3} (24e^{-x}) = \frac{24}{4} e^{-x} \cdot \frac{1}{D^3} 1 = x^3 e^{-x}$$

$$y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = e^{x}$$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{D^4 - D^3 - 3D^2 + 5D - 2} (e^{x}) \Rightarrow y_p = x \frac{1}{4D^3 - 3D^2 - 6D + 5} (e^{x})$$

$$\rightarrow y_p = x^2 \frac{1}{12D^2 - 6D - 6} (e^{x}) \rightarrow y_p = x^3 \frac{1}{24D - 6} (e^{x}) = \frac{x^3 e^{x}}{18}$$

$$y'' + y' - 2y = \cos x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2} (e^{ix}) = \frac{e^{ix}}{i^2 + i - 2} = \frac{e^{ix}}{i - 3} \times \frac{i+3}{i+3}$$

باید فقط قسمت real آن را بر داریم تا چون اینجا cos فقط real بود.

$$\rightarrow y_p = -\frac{1}{10} Re\left[(\cos x + i\sin x)(i+3)\right] = -\frac{1}{10} (3\cos x - \sin x)$$

$$\frac{1}{D^2+1} [\sin x] = \frac{1}{(D+i)(D-i)} (e^{ix}) = \frac{1}{2i} e^{ix} \frac{1}{D} 1 = \frac{x e^{ix}}{2i}$$

$$\xrightarrow{Im} y_p = \frac{-x}{2} \cos x$$

$$2y'' + 3y' + y = t^2 \Rightarrow y_p = \frac{1}{2D^2 + 3D + 1}(t^2)$$

$$1 \;\Big|\; \frac{1 + 3D + 2D^2}{1 - 3D + 7D^2}$$

$$\Rightarrow y_p = (1 - 3D + 7D^2 \ldots)(t^2) = t^2 - 3 \times 2t + 7 \times 2 + 0$$

سری های توانی :

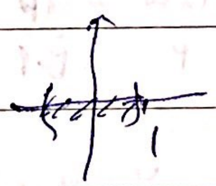
$$y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ حول صفر

تابع تحلیلی $\longrightarrow R > 0$ ، $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad \frac{1}{R} = \lim \_\_\_ \Rightarrow R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad R = 1$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$ تابع فرد ← جملات فرد $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \int$$

$$f(x) = c + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \qquad c = ? \rightarrow f(0)$$

Scanned by CamScanner

به همین صورت $f(x) = \tan^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$xy' - \underbrace{(x+2)y}_{\to -xy-2y} - 2x^2 - 2x = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} -2a_n x^n = 2x^2 - 2x \Longrightarrow -2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -a_{n-1} x^n$$

$$+ \sum_{n=1} -2a_n x^n = -2a_0 + \sum x^n (n a_n - a_{n-1} - 2a_n) = 2x^2 - 2x$$ برابر قرار دادن توان ها

$$\Rightarrow \begin{cases} x^0: -2a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ x^1: -a_1 - a_0 = -2 \Rightarrow a_1 = 2 \\ x^2: 0a_2 - a_1 = 2 \Rightarrow a_2 \text{ دلخواه} \\ x^n, n \geq 3: (n-2)a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n-2} \end{cases}$$

(x^n و $n \geq 3$: سمت راست توان های بیشتر از ۲ نداریم، ضریبش را صفر می‌گذاریم)

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{1}, \quad a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_2}{2\times 1} \qquad a_5 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_3}{3\times 2} = \frac{a_2}{3\times 2\times 1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{a_2}{(n-2)!} \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$= 0 + 2x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + \frac{a_2}{2!} x^4 + \frac{a_2}{3!} x^5 + \dots$$

$$\Rightarrow y = 2x + a_2 x^2 \Big(\underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{e^x} \Big) \Rightarrow y = 2x + a_2 x^2 e^x$$

$y' = y \quad , y(0) = 1 \quad \rightarrow y'(0) = y(0) = 1 \qquad y'' = y' \Rightarrow y''(0) = 1$

$$y = \sum \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

اگر سری را حول نقطه‌ای که غیر از صفر خواستند تغییر متغیری دهیم و باز هم حول صفر حل می‌کنیم.

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

$a_1(x)$ و $a_2(x)$ تحلیلی نباشد ← $x=0$ منفرد است

$p = \lim_{x \to 0} x\, a_1(x) \quad , \quad q = \lim_{x \to 0} x^2 a_2(x) \Rightarrow$ وجود داشته باشد ← منفرد منظم

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad r^2 + (p-1) r + q_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_2 - r_1 = \Delta r \notin Z \\ r_1 = r_2 \\ 0 \neq r_1 - r_2 \in Z \end{cases}$$

جواب اول y به ازای ریشه‌ی بزرگتر بدست می‌آید.

تبدیل به معادله بسل با تغییر متغیر:

$$y'' + (\underbrace{m^2 e^{2rx}}_{z^2} - \nu^2) y = 0 \qquad z^2 \propto m^2 e^{2rx} \Rightarrow z \propto m e^{rx} \Rightarrow z = \frac{m}{r} e^{rx}$$

$$y(x) \rightarrow y(z) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Scanned by CamScanner

تیپ دوم سؤال ۵ بسل: خواص توابع بسل:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$(x^{\nu} J_{\nu})' = x^{\nu} J_{\nu-1} \quad , \quad (x^{-\nu} J_{\nu})' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}$$

مثال: ثابت کنید $\left(x J_{\alpha}(x) J_{\alpha+1}(x)\right)' = x\left(J_{\alpha}^2 - J_{\alpha+1}^2\right)$

$$\Rightarrow \left(x^{-\alpha} J_{\alpha}(x) \cdot x^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(x)\right)' = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)\, x^{\alpha+1} = \ldots$$

$$\int x^{m} J_n(x) = \int x^{n} J_n(x)\, x^{m-n}\, dx \qquad \underline{u = x^n J_n(x)} \quad dv = x^{m-n}$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$\int x^{m} J_n(x) \longrightarrow \int x^{m+1} J_{n-1}(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} x^{n} P_m(x)\, dx \overset{\text{فرض } n+m}{=\!=\!=} 0 \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x) = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n=m \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) = \int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n\neq 0 \\ 2 & n=0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} x^n P_m(x)\, dx = (a_0 P_0 + \dots + a_n P_n)\times P_m(x) = 0 \qquad \forall\, n<m$$

مثال: $\int_{-1}^{1} (\cos x^3 + ax + b)\, P_2(x)\, dx = 0$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, P_n(\sin x)\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{u}\,\underbrace{\cos x}_{du}\, P_n(\underbrace{\sin x}_{u})\, dx = \int_{-1}^{1} u P_n(u)\, du$$

$$= \begin{cases} 0 & n=1 \\ \frac{2}{3} & n\neq 1 \end{cases}$$

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + a_4 P_4(x) = f(x) = 5x^3 - 3x^2 - x - 1$$

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

زوج‌ها جدا، فردها جدا:
$$\begin{cases} a_0 P_0 + a_2 P_2 = -3x^2 - 1 \\ a_1 P_1 + a_3 P_3 = 5x^3 - x \end{cases} \longrightarrow \text{ضریب } x^3:\ \frac{5}{2} a_3 = 5 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 2 \end{cases} \qquad a_1 x + 2\times\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 5x^3 - x \Rightarrow \int_0^1 (-2P_0 + 2P_1 - 2P_2 + 2P_3)\dots$$

$$dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\times\frac{1}{5} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & n \geq 4 \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{L} & F(s) \\ f(t) & \xleftarrow{L^{-1}} & F(s) \end{array}$$

$$x\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\int_0^{x} e^{-t}\,\frac{1-\cos t}{t}\,dt\right)$$

$t^{\alpha} = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}$ $\quad e^{\alpha} = \frac{1}{s-\alpha}$ $\quad \sin\alpha t = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ $\quad \cos\alpha t = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

f	$F(s)$
$1-\cos t$	$\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$
$\frac{1-\cos t}{t}$	به ازای هر t در مخرج یک بار انتگرال می گیریم. $\int_s^{\infty}\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\,ds = \ln s-\frac{1}{2}\ln\frac{2s}{s^2+1} = \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\Big]_s^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$
$e^{-t}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ $s \to s+1$	$\ln\sqrt{\frac{(s+1)^2+1}{s+1}}$ shift
$\int_0^{x} e^{-t}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$	$\frac{1}{s}\ln\sqrt{\frac{(s+1)^2+1}{s+1}}$
$e^{2x}\int_0^{x} e^{-t}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ $s \to s-2$	$= \frac{1}{s-2}\ln\sqrt{\frac{(s-1)^2+1}{s-1}}$

$$-\left[\frac{1}{s-2}\ln\sqrt{\frac{(s-1)^2+1}{s-1}}\times s\right]'$$

$\frac{d^n}{dx^n} \longrightarrow s^n \qquad e^{\alpha t} : s \longrightarrow s-\alpha$

$\frac{1}{t} \longrightarrow \int_s^{\infty} \qquad t^n \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}$

$\int_0^{\infty} \int_0^{t} \longrightarrow \frac{1}{s^n}$

$y'' + \int_0^{t} \int_0^{x} y(z)\,dz\,dx + t y' = 0 \qquad Ly \longrightarrow Y$

$\overset{L}{\Longrightarrow} s^2 Y - s y(0) - s^2 y'(0) + \frac{1}{s^2} Y - (sY - y(0))' = \dots$

شرط اولیه را نداریم

$L[y'] = sY - y(0) \Rightarrow 0 = \lim_{s\to\infty} sY(s) - y(0) \Rightarrow y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s)$

طبق تعریف: $\lim_{s\to\infty} L\{y(s)\} = 0$

$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} \qquad A: s=0 \ \lim \to 0$

$B: s=0 \ \lim \to 0 \qquad C: s=1 \ \lim \to 1$

$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)^3(s+1)}$

e^{0t} باید عامل را داشته باشیم $\to a_0 + at$

$e^{t} \to (\circ + \circ t + \circ t^2)e^{t}$

e^{-t}

این ضریب‌ها را داریم که مشخص شوند

Subject
Date

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$x' = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}\ln t\\ e^{-t}\end{pmatrix}, \quad t>0$$

حل: ابتدا معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم.

$$x' = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}x$$

جواب این معادله با روش ماتریس نمایی یا مقادیر و بردارهای ویژه تعیین می‌شود.

$$x_h(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-5t}$$

با روش ضرایب نامعین

$$x_p(t) = c_1(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2(t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-5t}$$

که بعد از جایگزین کردن داریم:

$$\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln t\\ e^{-t}\end{pmatrix}dt$$