جزوه معادلات دیفرانسیل

دکتر سعیده پیرباوفا

تعریف : هر رابطه ای بین تابع، متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به این متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

متغیر مستقل x، متغیر وابسته y و مشتقات y $\Rightarrow$ هدف از حل این معادله دیفرانسیل، یافتن $y(x)$ است.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد و معادلات برحسب مشتقات نسبت به این متغیر ارائه شده باشند، در این صورت معادله مذکور را معادله دیفرانسیل معمولی یا ODE می‌گوییم.

۲- اگر معادله‌ای بیش از یک متغیر مستقل $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ داشته باشد و شامل مشتقات جزئی y نسبت به این متغیرها باشد، آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، پاره‌ای یا PDE می‌گوییم.

ODE

$$\begin{cases} y'' + 2y' = \sin x \\ y' + y'' = y''' \\ y' + e^{x-y} = 1 \end{cases}$$

PDE

$$\begin{cases} u_x + u_t = \sin x \cos t \\ u_{xx} + u_{tt} = 2 f(x, t) \\ \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 4x^2 t \end{cases}$$

هر پدیده فیزیکی وقتی با علائم ریاضی بیان شود، نتیجه یک معادله دیفرانسیل می باشد.

مثال/ معادله حرکت یک جسم:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

تعریف: بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را، مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم.

$$\frac{dx}{dy} + x \sin y = \cos y \Rightarrow$$ مرتبه 1

$$y'' + y' \sin x + y^2 = 0 \Rightarrow$$ مرتبه 2

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n-ام

تعریف: اگر بتوان یک معادله دیفرانسیل را به صورت یک چندجمله ای نسبت به متغیر وابسته y و مشتقات آن نوشت، در این صورت بالاترین درجه ی، بیشترین مرتبه مشتق موجود در معادله را، درجه معادله دیفرانسیل می نامیم.

$$y''^2 + 2y' + y = f(x) \Rightarrow$$ مرتبه 2، درجه 2

$$y''^3 + y'^2 + y''^4 = x \Rightarrow$$ مرتبه 2، درجه 4

$$y' + t^y = \sin y \Rightarrow$$ مرتبه 1، درجه ندارد.

با توجه به تعریف فوق، می توان دریافت که درجه معادله دیفرانسیل الزاماً وجود ندارد.

$$2y''' + \sqrt{xy' + y^2} = 0 \Rightarrow 2y''' = -\sqrt{xy' + y^2}$$

$$\Rightarrow 4y'''^2 = xy' + y^2$$ مرتبه 3، درجه 2

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n ، به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل را می توان به صورت خطی و غیر خطی دسته بندی کرد.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n: هر معادله دیفرانسیل به فرم کلی،

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \quad (\mathrm{I})$$

که در آن $f(x)$ و $a_i(x)$ $(0 \le i \le n)$ توابعی حقیقی مقدار، و $a_n(x) \neq 0$ را یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n می نامیم.

اگر معادله دیفرانسیل فرمی غیر از (I) داشته باشد، آن را معادله غیرخطی گوئیم.

تذکر: در معادله دیفرانسیل (I) اگر طرفین معادله را بر $a_n(x)$ تقسیم کنیم، فرم کانونی (استاندارد) معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n حاصل می شود که در این صورت ضریب بالاترین مرتبه مشتق برابر یک خواهد بود.

$$3y'' + 4y' + 6y = e^x$$ مرتبه ۲، درجه ۱، خطی

$$(y'-1)^2 = \sin x$$

$$\| $$

$$(y')^2 - 2y' + 1 = \sin x$$

مرتبه ۱، درجه ۲، غیرخطی (چون توان y' باید یک باشد)

$$y' + p(x) y = q(x) y^n$$ (معادله برنولی) برای $n=0$ یا ۱ خطی و برای بقیه مقادیر n غیرخطی است.

معادله دیفرانسیل (I) را همگن گوئیم هرگاه $f(x)=0$ ، در غیر این صورت آن را غیرهمگن گوئیم.

تذکر: در این درس معادلات دیفرانسیل معمولی را مورد بررسی قرار خواهیم داد، لذا منظور ما از معادله دیفرانسیل از این به بعد، معادله دیفرانسیل معمولی است.

جواب یک معادله دیفرانسیل : تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کند را جواب آن معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

مثال/ تابع $y=\sin x$ جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است.

به علاوه $y=\cos x$ نیز یک جواب دیگر این معادله است.

درنتیجه هر معادله دیفرانسیل از مرتبه n، می‌تواند n دسته جواب داشته باشد.

همچنین $y=\alpha\sin x+\beta\cos x$ $(\alpha,\beta\in \mathbb{R})$ نیز جواب معادله اخیر است.

تذکر : اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$، جواب های معادله دیفرانسیل مرتبه n-ام باشند، به شرط خطی و همگن بودن معادله، هر ترکیب خطی از آن‌ها به صورت

$$c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n \quad (c_1,c_2,\dots,c_n\in \mathbb{R})$$

نیز جواب معادله دیفرانسیل است.

انواع جواب برای یک معادله دیفرانسیل :
- جواب عمومی
- جواب خصوصی
- جواب غیر عادی (تکین، منفرد)

y_g : جواب عمومی برای همگن

y_G : جواب عمومی غیرهمگن

y_p : جواب خصوصی

جوابی از یک معادله دیفرانسیل که شامل یک یا چند پارامتر ثابت می باشد را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌گویند.

به طور مثال $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ $(c_1,c_2\in \mathbb{R})$ یک جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است.

جوابی از یک معادله دیفرانسیل که از روی جواب عمومی آن معادله دیفرانسیل به ازای مقداردهی مناسب به پارامترهای ثابت از جواب عمومی استخراج می شود را جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می‌گویند.

به طور مثال $y_1=\sin x$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است و یا

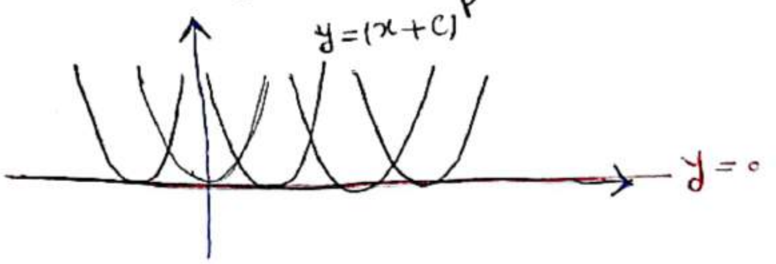
به طور مثال $y_2=\frac{3}{2}\sin x+2\cos x$ نیز یک جواب خصوصی معادله فوق است.

جوابی که تحت هیچ شرط اولیه ای از جواب عمومی معادله دیفرانسیل به دست نمی آید، علاوه بر این منحنی آن بر تمام منحنی های جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل، مماس است یک جواب منفرد معادله دیفرانسیل می باشد.

به طور مثال معادله دیفرانسیل $(y')^2 - 4y = 0$ دارای جواب عمومی

$$y=(x+c)^2$$

می باشد. علاوه بر این تابع $y=0$ نیز در این معادله دیفرانسیل صدق می کند که تحت هیچ شرط اولیه ای از جواب عمومی به دست نمی آید (به عبارتی به ازای هیچ مقدار دهی c از جواب های عمومی به دست نمی آید) و همچنین بر تمام منحنی های جواب عمومی معادله دیفرانسیل، مماس است، پس $y=0$ جواب تکین (منفرد) این معادله دیفرانسیل است.



- تذکر: ممکن است یک معادله دیفرانسیل جواب عمومی نداشته باشد. به طور مثال، معادله ی $(y')^2 + y^2 = 0$ تنها جواب بدیهی $y=0$ را دارد.

- تذکر: همان طور که بیان شد جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ عبارت است از:

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

از طرفی برای معادله دیفرانسیل $\underbrace{y'^2}_{\text{مرتبه ۱}} - 4x^2 = 0$ داریم:

$$(y'-2x)(y'+2x)=0 \quad \begin{cases} y'=2x \\ \text{یا} \\ y'=-2x \end{cases}$$

سؤال: آیا جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه n، دارای n پارامتر ثابت می باشد؟ خیر

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + c_1 \\ y = -x^2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow (y-x^2-c_1)(y+x^2-c_2)=0$$

که دو دسته جواب با دو پارامتر ثابت دلخواه

جواب عمومی، شامل دو پارامتر ثابت (دلخواه) می باشد.

ص۶

باتوجه به مثال‌های فوق می‌توان گفت:
یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n، دارای جواب عمومی با n پارامتر ثابت است.

تشکیل معادله دیفرانسیل با معلوم بودن جواب عمومی آن:
فرض کنید جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل شامل n پارامتر ثابت $c_1, c_2, \dots, c_n$
باشد، در این صورت برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن از جواب عمومی، n بار مشتق
گرفته و سپس از بین جواب عمومی و مشتقات آن تمامی پارامترهای ثابت $c_1, c_2, \dots, c_n$
را حذف و معادله دیفرانسیل را استخراج می‌کنیم.

به‌طور مثال، معادله دیفرانسیل نظیر منحنی $y = x^2 + c$، عبارت است از

$$\boxed{y' = 2x}$$

یک پارامتر c، یکبار مشتق می‌گیریم

مثال/ معادله دیفرانسیل نظیر جواب عمومی $(1)\ y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$ را استخراج کنید.

حل: چون معادله شامل دو پارامتر ثابت است، لذا داریم:

$$(2)\ y' = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}$$
$$(3)\ y'' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x}$$

$$\xrightarrow[(3)-(2)]{(2)-(1)} \left.\begin{array}{l} y' - y = c_2 e^{2x} \\ y'' - y' = 2c_2 e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow y' - y = \tfrac{1}{2}(y'' - y')$$

$$\Rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$$

هر تابع ناصفری که در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کند ، جواب آن معادله دیفرانسیل گوییم.

مثال/ آیا تابع $y(x)=e^{3x}$ جواب معادله دیفرانسیل

$$y''(x)+2y'(x)-3y(x)=0$$

می‌باشد؟

حل: داریم: $y'(x)=3e^{3x}$ و $y''(x)=9e^{3x}$ با جایگذاری در معادله

فوق داریم:

$$9e^{3x}+2(3e^{3x})-3(e^{3x})=9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$$

پس جواب معادله فوق می‌باشد.

مثال/ آیا تابع $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ می‌باشد؟ (c_1, c_2 پارامترهای ثابت دلخواهند)

حل: بله

$$y'(x)=c_1\cos x-c_2\sin x$$
$$y''(x)=-c_1\sin x-c_2\cos x$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}}\quad -\cancel{c_1\sin x}-\cancel{c_2\cos x}+\cancel{c_1\sin x}+\cancel{c_2\cos x}=0$$

در معادله صدق می‌کند و شامل ۲ پارامتر ثابت است، لذا جواب عمومی معادله فوق است.

مثال/ آیا تابع $y(x)=\sin x$ جواب خصوصی معادله $y''+y=0$ است؟

حل: بله - زیرا از روی جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ به ازای مقدارهای $c_1=1$ و $c_2=0$ استخراج شده است. دقت کنید برای اینکه مقادیر $c_1=1$ و $c_2=0$ استخراج شوند باید دو شرط روی جواب قرار دهیم یعنی: $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

$$0=y(0)=c_1\sin 0+c_2\cos 0=c_2$$
$$1=y'(0)=c_1\cos 0-c_2\sin 0=c_1$$

مثال ۱/ جواب $y=\pm 3$ از معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=9$ با شرط $y(0)=3$ چه نوع جوابی است؟

حل: بعدا نشان خواهیم داد که جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=9$، عبارت است از:

$$(x-c)^2+y^2=9$$

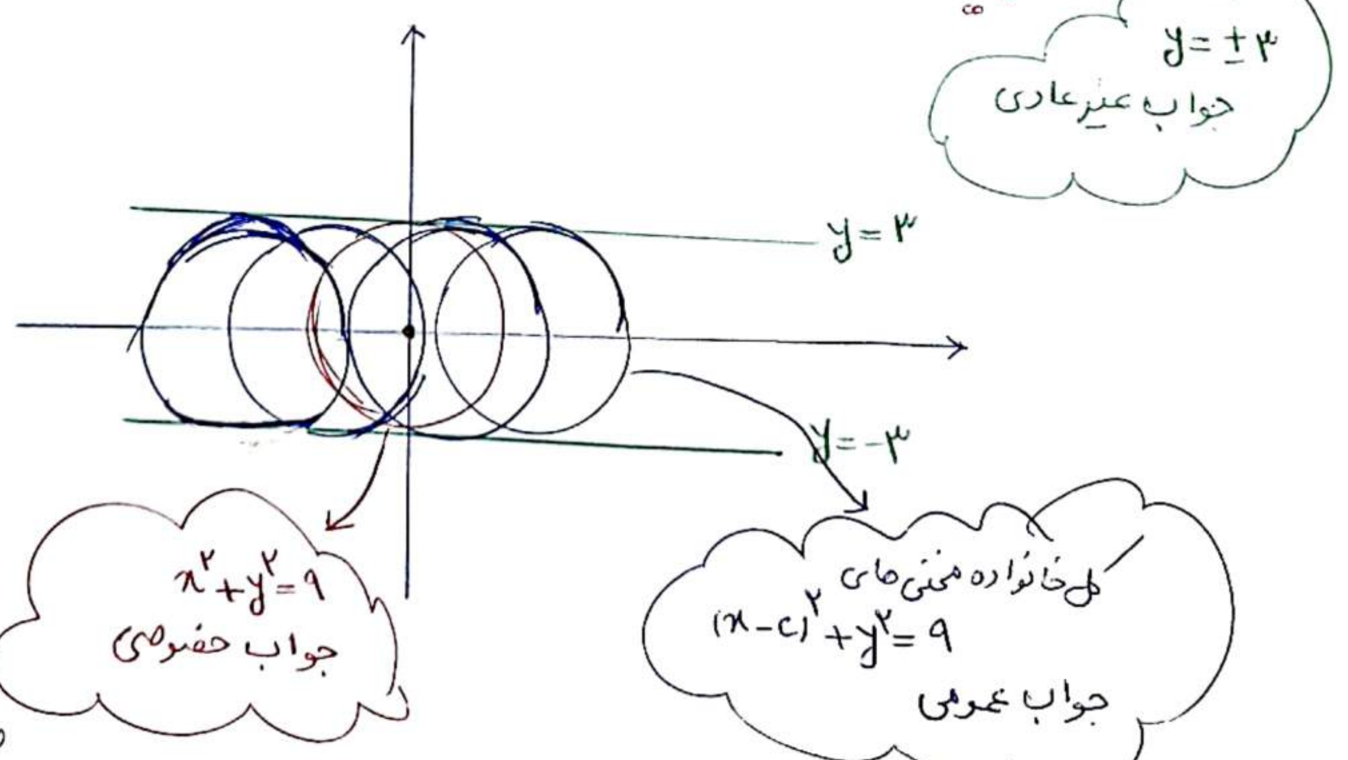
از طرفی طبق شرط $y(0)=3$ و جایگذاری در جواب عمومی معادله داریم:

$$(0-c)^2+3^2=9 \Rightarrow c^2=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

بنابراین $x^2+y^2=9$ جواب خصوصی معادله فوق می باشد. (زیرا به ازای $c=0$، از جواب عمومی معادله استخراج شده است.)

اما دو خط $y=\pm 3$، در معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=9$ صدق می‌کند و دقت کنید به ازای هیچ مقداردهی به c از روی جواب عمومی ($(x-c)^2+y^2=9$) به دست نمی‌آید. پس این جواب یک جواب غیرعادی (منفرد) می باشد.
(توجه کنید که c را نمی‌توانیم برابر با x قرار دهیم، زیرا x متغیر است و c یک عدد ثابت)

تعبیر هندسی جوابهای معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=9$ و $y(0)=3$:



دقت کنید که طبق شکل، جواب غیرعادی (پوش) جوابی است که بر تک تک اعضای جواب عمومی (دقیقا و فقط در یک نقطه) مماس است.

تذکر: دقت کنید برخی از معادلات دیفرانسیل فاقد جواب (غیرصفر) هستند، مثلاً

$$|y'| + |y| = 0$$

و برخی دیگر از معادلات، در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارند. به طور مثال:

$$y'^2 + 1 = 0$$

مثال/ معادله دیفرانسیل نظیر جواب عمومی $(x-c)^2 + (y-c)^2 = 2c^2$ را بیابید.

حل: چون در جواب عمومی داده شده فقط یک پارامتر (c) وجود دارد، لذا با یکبار مشتق‌گیری باید معادله دیفرانسیل مورد نظر را بیابیم:

$$2(x-c) + 2(y-c)y' = 0 \Rightarrow yy' - cy' + x - c = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{yy' + x}{1 + y'}$$

حال با جایگذاری c در جواب عمومی داریم:

$$\left(x - \frac{yy'+x}{1+y'}\right)^2 + \left(y - \frac{yy'+x}{1+y'}\right)^2 = 2\left(\frac{yy'+x}{1+y'}\right)^2$$

در ادامه به حل و بحث در مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم (و بالاتر) می‌پردازیم. اما قبل از پرداختن به روش‌های حل این دسته از معادلات، باید بدانیم که یک معادله جواب دارد یا خیر. لذا به بیان قضیه وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌پردازیم.

قضیه وجود و یکتایی مسائل مقدار اولیه:

این قضیه بیان می‌کند که اگر $f(x,y)$ در شرایطی صدق کند، آن‌گاه مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(x,y),$$
$$y(x_0) = y_0$$

در فاصله‌ای حاوی نقطه x_0 دارای جواب یکتا است.

قضیه: فرض کنید f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha < x < \beta$ و $\gamma < y < \delta$

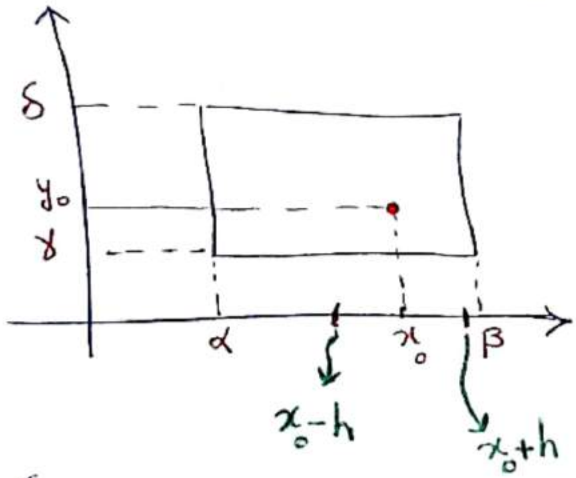
شامل نقطه (x_0, y_0) پیوسته باشند. آن‌گاه در فاصله‌ای مانند $x_0 - h < x < x_0 + h$

در ناحیه مستطیل شکل D از $\mathbb{R}^2$

مشمول $\alpha < x < \beta$، مسئله مقدار اولیه

$$* \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

دارای جواب یکتای $y = \phi(x)$ است.



(درواقع برای هر $(x_0, y_0) \in R$، یک و تنها یک تابع مانند $y(x)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ صدق می‌کند.)

(قضیه پیکارد)

ص ۱۰

مثال/ مسئله با شرط اولیه $y'(x) = y^2(x)$ و $y(0) = 1$ را در نظر بگیرید. در مورد وجود و یکتایی جواب این مسئله بحث کنید.

حل: $y' = y^2$، پس $f(x,y) = y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$، لذا طبق قضیه پیکارد معادله دیفرانسیل فوق دارای جواب یکتا می باشد. حال می خواهیم بازه جواب را استخراج کنیم.

$$y' = \frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}} -\frac{1}{y} = x + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x+c} \xrightarrow{y(0)=1} 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

لذا جواب این معادله دیفرانسیل به صورت $y(x) = \frac{1}{1-x}$ است.

چون برای $x = 1$ جواب بیکران می شود، لذا بازه جواب یا $1 < x$ یا $x < 1$.
از طرفی شرط اولیه در $x_0 = 0$ است ($y(0) = 1$) بنابراین بازه جواب $(-\infty, 1)$ می باشد.

مثال/ معادله دیفرانسیل $y' = -\frac{2}{x}y + 4x$ با شرط اولیه $y(1) = 2$ در چه بازه ای دارای جواب یکتا است؟ چنانچه شرط اولیه $y(-1) = 2$ باشد، بازه جواب مورد نظر چگونه است؟

حل: $f(x,y) = -\frac{2}{x}y + 4x$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{x}$.
تابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ برای $x > 0$ یا $x < 0$ پیوسته اند. بنابراین معادله مورد نظر طبق قضیه پیکارد در یکی از این دو بازه جواب یکتا دارد.

در حالتی که $y(1)=2$ ، چون $x_0=1$ لذا جواب معادله در بازه $x>0$ ، $(0,+\infty)$ وجود دارد و یکتا است.

در حالتی که $y(-1)=2$ در نظر گرفته شود، چون $x_0=-1$ ، لذا معادله فوق در بازه $x<0$ ، $(-\infty,0)$ جواب یکتا دارد.

مثال/ مسأله مقدار اولیه (معادله دیفرانسیل با شرط اولیه) $y'=1/x$ با شرط اولیه $y(1)=0$ را بیابید:

$$y'=1/x \Rightarrow dy=1/x\,dx \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}} y=\ln x+c$$

لذا $y=\ln x+c$ جواب معادله روی بازه $(0,+\infty)$ است.

$$y(1)=0 \Rightarrow 0=\ln 1+c \Rightarrow c=0$$

پس $y=\ln x$ جواب این معادله است.

($y=\ln x$ جواب خصوصی معادله $y'=1/x$)

دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x,y,y')=0$ (*) است. برای سهولت در تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول، دسته‌بندی مهم زیر را بیان می‌کنیم :

۱- معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر (جداشدنی) [یا معادلاتی که به جداشدنی تبدیل می‌شوند]

۲- معادله دیفرانسیل همگن [یا معادلاتی که به همگن تبدیل می‌شوند]

۳- معادله دیفرانسیل کامل [یا معادلاتی که به کامل تبدیل می‌شوند]

۴- معادله خطی مرتبه اول

۵- سایر معادلات معروف و خاص مرتبه اول

تذکر: برای جلوگیری از ابهام، می‌توان معادله (*) را به فرم استاندارد $y'=f(x,y)$ (**) در نظر گرفت. همچنین معادلات مرتبه اول را می‌توان به صورت

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (***)$$

نیز در نظر گرفت.

معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر: معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه بتوان تابع $f(x,y)$ را به صورت حاصلضرب مجزایی از دو تابع برحسب x و y نوشت. (یعنی $f(x,y)=h(x)\cdot g(y)$). همچنین در فرم (***)، اگر توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ را بتوان به صورت حاصلضرب مجزایی از x و y نوشت، معادله تفکیک‌پذیر است.

$$y' = f(x,y) = h(x)\,g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x)\,g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx + C_1$$

جواب عمومی معادله تفکیک‌پذیر

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

① $y' = e^{x-y}$

حل: $y' = f(x,y) = e^{x-y} = e^x/e^y \quad , \; h(x) = e^x , \; g(y) = 1/e^y$

$$\frac{dy}{dx} = e^x/e^y \Rightarrow e^y dy = e^x dy \Rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \boxed{e^y = e^x + c_1}$$

② $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

$$y' = f(x,y) = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = \underbrace{2\ln x - \ln(x^2+1)}_{\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} + 2c_1$$

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y}$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+y^2)(x^2+1) = c_2 x^2}$$

تذکر: معادله دیفرانسیل به فرم $y' = f(ax+by+c)$ که در آن a و b و c سه ثابت دلخواه هستند را درنظر بگیرید که درحالت کلی تفکیک پذیر نیست. حال با اعمال تغییر متغیر

$$ax+by+c=t$$

و مشتق گیری از طرفین برحسب x داریم:

$$a+by' = dt/dx$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{dt/dx - a}{b}}_{f(t)} \quad (b\neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = (\underbrace{bf(t)+a}_{\text{برحسب } t}) \times \underbrace{1}_{\text{برحسب } x}$$

معادله تفکیک پذیر شد و داریم:

$$\Rightarrow \frac{dt}{a+bf(t)} = dx \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} x+c = \int \frac{dt}{a+bf(t)}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = tg(x+y)-1$ را حل کنید.

$$x+y=t \Rightarrow dt/dx = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = dt/dx - 1 \xrightarrow{dy/dx = tg(t)-1}$$

$$\Rightarrow tg(t)-1 = dt/dx - 1$$

$$\Rightarrow dt/dx = tg(t) \Rightarrow dt/tg(t) = dx \Rightarrow \ln(\sin(t)) = x + c_1$$

$$\Rightarrow \sin t = c_2 e^x$$

$$\Rightarrow t = \sin^{-1}(c_2 e^x)$$

$$\xrightarrow{x+y=t} \boxed{y = \sin^{-1}(c_2 e^x) - x}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

(۱) $y' = \sin(x+y-1)$ (۲) $y' = 2(x+y)^2$

(۳) $(y - xy^2)\,dx - (x + x^2 y)\,dy = 0$

(۴) $(x^2y^2 + xy + 1)y\,dx + (xy - x^2y^2 - 1)x\,dy = 0$

معادله دیفرانسیل همگن:

تابع همگن: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن از درجه n $(n \in \mathbb{R})$ گوییم، هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

به طور مثال برای تابع $f(x,y) = x+y$ داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda f(x,y)$$

لذا f تابع همگن از درجه ۱ است.

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ غیرهمگن

$f(x,y) = x\, e^{\frac{y+x}{x-y}}$ همگن از درجه 1

$f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3}$ همگن از درجه -1

$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ همگن از درجه $-1/2$ (به شرط $\lambda > 0$)

تمرین : فرض کنید $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه r باشد. در این صورت نشان دهید:

$$f(x,y) = x^r g(y/x) = y^r h(x/y)$$

معادله دیفرانسیل همگن : معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را یک معادله دیفرانسیل همگن گوییم هرگاه تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد. همچنین معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

همگن است هرگاه M و N هردو توابعی همگن از درجه یکسان باشند. زیرا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

روش حل معادله دیفرانسیل همگن : تغییر متغیر : $\left(y/x = t \right.$ یا $\left. y = x\,t(x) \right)$

چون f همگن از درجه 0 : $f(x,y) = g(y/x)$ یا $h(x/y)$

$$\Rightarrow \quad y' = g(y/x)$$

تغییر متغیر مناسب $y/x = t \Rightarrow y = tx$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری نسبت به } x} y' = t'x + t$$

$$\Rightarrow x t' + t = g(t)$$

$$\Rightarrow x \frac{dt}{dx} = g(t) - t$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{g(t) - t}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \int \frac{1}{g(t) - t}\, dt$$

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $(x^2-y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

حل: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(x^2-y^2)}{2xy}$

تغییر متغیر: $y/x = t \Rightarrow y' = t'x + t$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\cdot x + t$

$$(x^2 - t^2x^2)dx + 2x^2t(x\,dt + t\,dx) = 0$$

طرفین تقسیم بر x^2 $\Rightarrow$ $\underbrace{(1-t^2)dx}$ $+ 2xt\,dt + \underbrace{2t^2dx} = 0$

$$\Rightarrow (1+t^2)dx + 2xt\,dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2t\,dt}{t^2+1} = 0$$

انتگرال گیری $\Rightarrow$ $\ln(x) + \ln(t^2+1) + c_1 = 0$

$$\Rightarrow c_2\,x\,(t^2+1) = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{c_3}{x} - 1$$

$$y/x = t \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{c_3}{x} - 1 \Rightarrow y^2 = c_3x - x^2$$

(2) $\dfrac{y}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dx = \left(\dfrac{x}{y}\sin(y/x) + \cos(y/x)\right)dy$

$$\Downarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y/x\,\cos(y/x)}{x/y\,\sin(y/x) + \cos\frac{y}{x}}$$

حل: معادله همگن از درجه $n=0$

$\dfrac{y}{x} = t \Rightarrow y' = t'x + t$

$$\Rightarrow x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t\cos(t)}{1/t\,\sin(t) + \cos(t)}$$

$$\Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t\cos t - \sin t - t\cos t}{1/t\,\sin(t) + \cos t} = -\frac{\sin t}{1/t\,\sin t + \cos t}$$

معادله جدا شدنی است، لذا داریم:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\frac{1}{t}\sin(t) + \cos(t)}{\sin t}\, dt$$

انتگرال $\Rightarrow$ می‌گیریم

$$\int \left(\frac{1}{t} + \cot t\right) dt = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(t) + \ln(\sin t) = -\ln(x) + c_1$$

$$\Rightarrow \ln(t \sin t) = \ln(x^{-1}) + c_1$$

$$\Rightarrow t \sin t = \frac{c_2}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} = \frac{c_2}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y \sin \frac{y}{x} = c_2 \ , x \neq 0}$$

$\ln(t\sin t) = -\ln x + c_1$

$t \sin t = e^{(\ln(x^{-1}) + c_1)}$

$= e^{\ln(x^{-1})} \cdot e^{c_1}$ c_2

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

① $2xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$

② $(x + \sqrt{y^2 - xy})\, dy - y\, dx = 0$

③ $y\, dx + x \ln(y/x)\, dy = 2x\, dy$

④ $x^3 \frac{dy}{dx} = y^3 + y^2 \sqrt{y^2 - x^2}$

* حل معادلاتی که در حالت کلی همگن نبوده ، اما با اعمال تغییر متغیر مناسب به معادله دیفرانسیل همگن تبدیل می‌شود :

معادله دیفرانسیل $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ در حالت کلی به خاطر c و γ همگن نبوده

ولی در حالات زیر می‌توان آن را به یک معادله دیفرانسیل جدا شدنی یا همگن تبدیل کرد :

برای این منظور وضعیت دو خط $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم .

۱- دو خط موازی باشند $\left(\dfrac{a}{b} = \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{b}{\beta}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = K \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha K \\ b = \beta K \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم : $y' = f\left(\dfrac{K(\alpha x+\beta y)+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ و با تغییر متغیر

$ax+by=t$ با تغییر متغیر

$\alpha x+\beta y = t$ داریم :

$$y = \frac{1}{\beta}(t-\alpha x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\beta}(t'-\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta}(t'-\alpha) = f\left(\frac{Kt+c}{t+\gamma}\right)$$

در این صورت معادله اخیر جدا شدنی است و داریم :

$$dx = \frac{dt}{\alpha+\beta f\left(\frac{Kt+c}{t+\gamma}\right)}$$

انتگرال می‌گیریم

$$\Rightarrow x + c_1 = \int \frac{dt}{\alpha+\beta f\left(\frac{Kt+c}{t+\gamma}\right)}$$

ص ۲۵

۲- دوخط در نقطه (x_0, y_0) متقاطع باشند (دوخط مذکور متقاطع باشند یعنی $\frac{a}{\alpha} \neq \frac{b}{\beta}$)

در این صورت با به کارگیری تغییر متغیرهای $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ و محاسبه dy/dx داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

ولذا:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY+\overset{0}{(ax_0+by_0+c)}}{\alpha X+\beta Y+\underset{0}{(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma)}}\right)$$

زیرا در نقطه (x_0, y_0) در هر دوخط مذکور صدق می کند

$$= f\left(\frac{aX+bY}{\alpha X+\beta Y}\right)$$

در این صورت معادله فوق همگن است و با تغییر متغیر $Y/X = t$ قابل حل است و در نهایت جواب عمومی معادله داده شده از جانشانی $x-x_0$ به جای X و $y-y_0$ به جای Y به دست می آید.

مثال / معادلات زیر را حل کنید.

(1) $y' = \frac{x+y}{x-1}$

حل: معادله فوق همگن نیست، پس وضعیت دوخط $\begin{cases} x+y=0 \\ x-1=0\end{cases}$ را در نظر می گیریم.

محل تلاقی این دو خط $(x_0,y_0)=(1,-1)$ می باشد. لذا قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y-1\end{cases}$$

و داریم:

$$\frac{dy}{dx} \overset{\frac{x+y}{x-1}}{=} \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X} = 1 + Y/X$$

$$Y/X = t \Rightarrow Y = tX \Rightarrow Y' = t'X + t$$

$$1+t = t'X + t \Rightarrow t'X = 1 \Rightarrow t' = \frac{dt}{dX} = \frac{1}{X}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dX}{X} \xRightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}} t = \ln(X)+c_1 \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \ln(x-1)+c_1$$

جواب اخیر یک جواب درست برای معادله فوق می باشد زیرا :

$$y = (x-1)\ln(x-1) + c_1(x-1) - 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \ln(x-1) + \cancel{(x-1)}\frac{1}{\cancel{(x-1)}} + c_1$$

$$, \quad x + y = (x-1)\ln(x-1) + c_1(x-1) - 1 + x$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{x+y}{x-1} = \ln(x-1) + c_1 + 1 \qquad \checkmark\checkmark$$

پس پاسخی که برای معادله فوق به دست آورده‌ام ، پاسخ درستی است .

یا

$$\ln X + c_1 = t \quad \Rightarrow \text{قرار دهیم} \quad \ln c_2 = c_1$$

$$\ln(c_2 X) = t$$

$$\ln c_2 + \ln(X)$$

(۲) $(x-2\sin y+3)\,dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$ همگن نیست

حل: $z=\sin y \Rightarrow dz=\cos y\,dy$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} (x-2z+3)\,dx+(2x-4z-3)\,dz=0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{x-2z+3}{-2x+4z+3} \qquad \frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}$$ (دو خط موازی اند)

تغییر متغیر

$$t=x-2z \Rightarrow t'=1-2z' \Rightarrow z'=\frac{1-t'}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1-t'}{2}=\frac{t+3}{-2t+3}$$

$$\Rightarrow 1-t'=\frac{2t+6}{-2t+3} \Rightarrow t'=1-\frac{2t+6}{-2t+3}$$

$$\Rightarrow t'=\frac{4t+3}{2t-3}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{4t+3}{2t-3}$$

$$\Rightarrow dx=\left(\frac{2t-3}{4t+3}\right)dt=\left(\frac{1}{2}-\frac{9/2}{4t+3}\right)dt$$

$$\xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{انتگرال}} x+c_1=\frac{1}{2}t-\frac{9}{8}\ln(4t+3)$$

$$\xrightarrow{\times(8)} 8x+8c_1=4t-9\ln|4t+3|$$

$$\xrightarrow[z=\sin y]{t=x-2z} 4(x-2\sin y)-9\ln(4x-8\sin y+3)=8x+c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{8\sin y+9\ln(4x-8\sin y+3)+4x+c_2=0}$$

ص ۲۳

تمرین : معادلات زیر را حل کنید :

① $y' - \tan\left(\frac{y-2x}{x+1}\right) = \frac{y+2}{x+1}$

② $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$

③ $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$

معادله دیفرانسیل کامل: معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را کامل گوییم، هرگاه تابع $\phi(x,y)$ موجود باشد به طوری که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

در این صورت جواب عمومی معادله عبارت است از $\phi(x,y) = c$.
$(c \in \mathbb{R})$

به طور مثال معادله دیفرانسیل

$$(2xy + \cos(x+y))\,dx + (x^2 + \cos(x+y))\,dy = 0$$

یک معادله دیفرانسیل کامل است، زیرا خانواده منحنی $\phi(x,y) = x^2 y + \sin(x+y) = c$ موجود است به طوری که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = M(x,y) = 2xy + \cos(x+y) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = N(x,y) = x^2 + \cos(x+y) \end{cases}$$

قضیه: (محک کامل بودن یا نبودن یک معادله دیفرانسیل) معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

را درنظر بگیرید. فرض کنید $M(x,y)$، $N(x,y)$ و $M_y(x,y)$ و $N_x(x,y)$ در ناحیه‌ای از صفحه مانند D پیوسته باشند، در این صورت معادله دیفرانسیل مذکور کامل است اگر و تنها اگر $\frac{\partial M}{\partial y} = M_y = N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$.

حل معادله دیفرانسیل کامل: فرض کنیم معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

کامل باشد، یعنی $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$، در این صورت طبق تعریف، خانواده منحنی $\phi(x,y) = C$ موجود است به طوری که

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = M(x,y) & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = N(x,y) & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق } (1)} \phi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \quad (3)$$

$$\xrightarrow[\text{به } y \text{ مشتق می‌گیریم}]{\text{از } (3) \text{ نسبت}} \phi_y \overset{(2)}{=} N(x,y) = \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx + g'(y)$$

در این صورت $g'(y)$ حاصل می‌گردد و بعد از آن $g(y)$ به دست می‌آید و با جایگذاری در (3) جواب عمومی استخراج می‌شود.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $\underbrace{(3x^2+6xy^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(6x^2y+4y^3)}_{N(x,y)}dy=0$

حل: بررسی کامل کردن: $\frac{\partial M}{\partial y}=12xy$, $\frac{\partial N}{\partial x}=12xy \Rightarrow$ معادله کامل است.

$$\begin{cases}\phi_x=M(x,y)=3x^2+6xy^2 & (1)\\ \phi_y=N(x,y)=6x^2y+4y^3 & (2)\end{cases} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} \phi(x,y)=3x^2y^2+y^4+g(x) \quad (3)$$

$$\phi_x=6xy^2+g'(x)$$

حال از معادله (1) داریم:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=3x^2+6xy^2=6xy^2+g'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=3x^2$$

$$\Rightarrow g(x)=x^3+c$$

در (3) جایگذاری می‌کنیم $\Rightarrow$

$$\boxed{\phi(x,y)=3x^2y^2+y^4+x^3+c}$$

(2) $((xy)\cos(xy)+\sin(xy))dx+(x^2\cos(xy)+e^y)dy=0$

حل: بررسی کامل بودن: $\frac{\partial M}{\partial y}=x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)+x\cos(xy)$

$$\parallel \qquad \Rightarrow \text{کامل است}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$$

$$\begin{cases}\phi_x=(xy)\cos(xy)+\sin(xy) & (1)\\ \phi_y=x^2\cos(xy)+e^y & (2)\end{cases}$$

$\longrightarrow$ چون در انتگرال‌گیری از (1) باید از روش جزء به جزء استفاده کنیم، راحت‌تر است که از (2) انتگرال بگیریم.

از رابطه ② انتگرال می‌گیریم $\longrightarrow$ $\phi(x,y) = \frac{x^2}{x} \sin(xy) + e^y + g(x)$ ④

حال از ④ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\phi_x = \sin(xy) + xy\cos(xy) + g'(x) \overset{\text{طبق ①}}{=} (xy)\cos(xy) + \sin(xy)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$$

④ جایگذاری می‌کنیم $\Rightarrow$ $\phi(x,y) = x\sin(xy) + e^y + c$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

① $(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0$

② $x(2x^2+y^2)\,dx + y(x^2+2y^2)\,dy = 0$

③ $y' = \dfrac{x^3 - y}{x}$

④ $(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)\,y' = 0$

نکات تستی حل معادله کامل :

۱- فرض کنید معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ کامل باشد. چنانچه انتگرال های توابع M نسبت به x و N نسبت به y هر دو ساده باشند، در این صورت از تابع M نسبت به x و از تابع N نسبت به y انتگرال می گیریم و جملات مشترک در جواب این دو انتگرال را شناسایی و یکی را حذف می کنیم. جواب عمومی استخراج می شود.

اگر یکی مثبت یکی منفی بود چه کار کنیم؟

۲- در این روش چنانچه یکی از انتگرال ها (مثلاً M نسبت به x یا N نسبت به y) انتگرالی ساده تر بود از آن شروع می کنیم، مثلاً فرض کنید $\int M\,dx$ ساده تر بود، از آن انتگرال گرفته و در N کلیه جملات شامل x را حذف کرده و از بقیه جملات نسبت به y انتگرال می گیریم. در این صورت جواب عمومی استخراج می شود.

به طور مثال :
$$(3ye^{3x}-2x)\,dx+e^{3x}\,dy=0$$

روش ۱ :
$$\int(3ye^{3x}-2x)\,dx+\int e^{3x}\,dy=c$$

$$(ye^{3x}-x^2)+(\cancel{ye^{3x}})=c \Rightarrow \boxed{ye^{3x}-x^2=c}$$

جمله مشترک

روش ۲ : از N نسبت به y انتگرال می گیریم

$$\int e^{3x}\,dy=ye^{3x}$$

در M کلیه جملات شامل x را حذف می کنیم (یعنی $3ye^{3x}$ را حذف می کنیم) و از بقیه جملات آن نسبت به x انتگرال می گیریم.

$$\int -2x\,dx=-x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{ye^{3x}-x^2=c}$$

معادلاتی که در حالت کلی کامل نیستند اما می توان آن ها را به معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کرد:

تعریف: اگر معادله دیفرانسیل $M\,dx + N\,dy = 0$ کامل نباشد (یعنی $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$) ممکن است بتوان تابع مناسبی مانند $\mu(x,y) \neq 0$ را پیدا کرد که اگر طرفین معادله مذکور را در $\mu(x,y)$ ضرب کنیم، معادله دیفرانسیل کامل شود. تابع $\mu(x,y)$ را عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرال ساز معادله دیفرانسیل فوق می نامند.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y\,dx - x\,dy = 0$ را در نظر بگیرید که کامل نیست.
با ضرب طرفین معادله فوق در $\mu(x) = -\frac{1}{x^2}$ داریم:

$$-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

کامل شد.
بنابراین $\mu(x) = -\frac{1}{x^2}$ یک عامل انتگرال ساز معادله فوق می باشد. به همین ترتیب می توان بررسی کرد که $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ، $\mu(x,y) = -\frac{1}{xy}$ و $\mu(x,y) = \frac{-1}{x^2+y^2}$ نیز فاکتور انتگرال ساز معادله فوق می باشند.

نتیجه: ۱- عامل انتگرال ساز یک تابع وجودی است، یعنی ممکن است معادله ای وجود داشته باشد که عامل انتگرال ساز نداشته باشد.
۲- در صورت وجود عامل انتگرال ساز، این عامل منحصر به فرد نیست.

استخراج عامل انتگرال ساز :

فرض کنید معادله دیفرانسیل $M\,dx + N\,dy = 0$ معادله دیفرانسیل غیر کامل باشد، چنانچه تابعی مانند $\mu(z)$ که در آن $z = z(x,y)$ موجود باشد که با ضرب آن در طرفین معادله فوق، معادله دیفرانسیل کاملی استخراج شود، در این صورت $\mu(z)$ از دستور زیر محاسبه می شود:

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y}\, dz}$$

نکته: ۱- فرض کنید عامل انتگرال ساز تابعی تنها برحسب x باشد یعنی $\mu = \mu(x)$ (یا $z = x$)

در این صورت عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\, dx}$$

۲- فرض کنید عامل انتگرال ساز تابعی تنها برحسب y باشد یعنی $\mu = \mu(y)$ (یا $z = y$)

در این صورت عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}\, dy}$$

۳- فرض کنید عامل انتگرال ساز تابعی برحسب xy باشد یعنی $\mu = \mu(xy)$ (یا $z = xy$)

در این صورت عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}\, d(xy)}$$

۴- فرض کنید عامل انتگرال ساز تابعی برحسب $x + y$ باشد یعنی $\mu = \mu(x+y)$ (یا $z = x+y$)

در این صورت عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(x+y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}\, d(x+y)}$$

به همین ترتیب می‌توان روابطی برای استخراج عامل انتگرال ساز در حالتی $z = x/y$ یا $z = y/x$ و ... باشد، یافت. برای یافتن عامل انتگرال ساز به ترتیب موارد ۱ تا ۴ را بررسی می‌کنیم و بعد از یافتن عامل، طرفین معادله را در عامل ضرب کرده و معادله‌ی کامل شده را حل می‌کنیم.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

$$(1)\quad (\underbrace{3xy + y^2}_{M})\,dx + (\underbrace{x^2 + xy}_{N})\,dy = 0$$

حل: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow$ معادله کامل نیست.

حال به دنبال عامل انتگرال ساز هستیم

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x+y)} = 1/x$$

چون تابع حاصل تابعی تنها برحسب x است، لذا عامل انتگرال ساز برحسب x است و داریم:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$$

حال طرفین معادله را در $\mu(x) = x$ ضرب می‌کنیم.

$$(\underbrace{3x^2y + xy^2}_{M})\,dx + (\underbrace{x^3 + x^2y}_{N})\,dy = 0$$

$$M_y = 3x^2 + 2xy = N_x = 3x^2 + 2xy \Rightarrow \text{معادله کامل است.}$$

$$\begin{cases} \phi_x = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad (1) \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \phi(x,y) = x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 + h(y) \\ \phi_y = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad (2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_y = x^3 + x^2y + h'(y) \quad (3)$$

از (۲)،(۳) داریم

$$\Rightarrow \phi_y = x^3 + x^2y = x^3 + x^2y + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = c \Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = x^3y + x^2/2\, y^2 + c}$$

(۲) $$(\underbrace{2xy^4 e^y + 2xy^3 + y}_{M})\,dx + (\underbrace{x^2y^4 e^y - x^2y^2 - 3x}_{N})\,dy = 0$$

$$M_y = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \neq N_x = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

کامل نیست

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{8xy^3e^y + \cancel{2xy^4e^y} + 6xy^2 + 1 - \cancel{2xy^4e^y} + 2xy^2 + 3}{-(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)}$$

$$= \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{-2xy^4e^y - 2xy^3 - y} = -4/y$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int 4/y\,dy} = e^{-4\ln y} = 1/y^4$$

حال طرفین معادله را در $\mu(y)$ ضرب می‌کنیم:

$$(\underbrace{2xe^y + 2x/y + 1/y^3}_{M})\,dx + (\underbrace{x^2e^y - x^2/y^2 - 3x/y^4}_{N})\,dy = 0$$

$$M_y = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - 3/y^4 = N_x = 2xe^y - 2x/y^2 - 3/y^4$$

معادله کامل است.

$$\begin{cases} \phi_x = M(x,y) = 2xe^y + 2x/y + 1/y^3 \quad (1) \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \phi(x,y) = x^2e^y + x^2/y + 1/y^3\,x + h(y) \\ \phi_y = N(x,y) = x^2e^y - x^2/y^2 - \frac{3x}{y^4} \quad (2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_y = x^2e^y - x^2/y^2 - \frac{3x}{y^4} + h'(y) \quad (3)$$

۱، (۲)، (۳) داریم

$$\Rightarrow \phi_y = x^2e^y - x^2/y^2 - \frac{3x}{y^4} = x^2e^y - x^2/y^2 - \frac{3x}{y^4} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = C \Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = x^2e^y + x^2/y + 1/y^3\,x + C}$$

(۳) $\underbrace{(y + x^4 y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{x}_{N}\,dy = 0$

$M_y = 1 + 2x^4 y \neq N_x = 1 \Rightarrow$ معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} = \frac{1 + 2x^4 y - 1}{x \underbrace{Z_x}_{y} - (y + x^4 y^2) \underbrace{Z_y}_{x}} \overset{Z = xy}{=} \frac{2x^4 y}{\cancel{yx} - \cancel{xy} - x^5 y^2}$$

$$= \frac{-2}{xy} = \frac{-2}{Z}$$

$$\Rightarrow \mu(Z) = \mu(xy) = e^{-\int \frac{2}{xy} d(xy)}$$

$$= e^{-\int \frac{2}{Z} dZ} = \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{x^2 y^2}$$

حال طرفین معادله را در $\mu(Z)$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2 y} + x^2\right)}_{M} dx + \underbrace{\frac{1}{x y^2}}_{N} dy = 0$$

$M_y = \frac{-1}{x^2 y^2} = N_x = \frac{-1}{x^2 y} \Rightarrow$ معادله کامل است.

$$\begin{cases} \phi_x = \frac{1}{x^2 y} + x^2 & (1) \\ \phi_y = \frac{1}{x y^2} & (2) \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} \phi(x,y) = \frac{-1}{xy} + g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_x = \frac{1}{x^2 y} + g'(x) \quad (3)$$

از (1) و (3) داریم $\Rightarrow \phi_x = \frac{1}{x^2 y} + x^2 = \frac{1}{x^2 y} + g'(x) \Rightarrow g'(x) = x^2$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \frac{-1}{xy} + \frac{x^3}{3} + C$$

نکته: در بعضی موارد با ضرب طرفین معادله غیرکامل $Mdx + Ndy = 0$ در $\mu(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ می‌توان یک معادله دیفرانسیل کامل تولید کرد، در این صورت مقادیری برای α و β به دست می‌آیند و به این ترتیب عامل انتگرال‌ساز به دست می‌آید.

مثال / معادله زیر را حل کنید.

$$x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$$

حل / ابتدا معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(\underbrace{4xy + 3y^4}_{M})dx + (\underbrace{2x^2 + 5xy^3}_{N})dy = 0 \quad (*)$$

$$M_y = 4x + 12y^3 \neq N_x = 4x + 5y^3$$ معادله کامل نیست

معادله را در $x^{\alpha} y^{\beta}$ ضرب می‌کنیم:

$$(\underbrace{4x^{\alpha+1} y^{\beta+1} + 3y^{\beta+4} x^{\alpha}}_{M})dx + (\underbrace{2x^{\alpha+2} y^{\beta} + 5x^{\alpha+1} y^{\beta+3}}_{N})dy = 0$$

$$\begin{cases} M_y = 4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 3(\beta+4)x^{\alpha}y^{\beta+3} \\ N_x = 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 5(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta+1 = 1/2(\alpha+2) \\ 3\beta + 12 = 5\alpha + 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 1$$

بنابراین عامل انتگرال‌ساز عبارت است از:

$$\mu(x,y) = x^2 y$$

لذا با ضرب طرفین معادله اصلی $(*)$ در μ، معادله کامل شده و آن را حل می‌کنیم.

تذکر: در برخی موارد ممکن است با ضرب طرفین معادله دیفرانسیل ناکامل در عامل $x^{\alpha}y^{\beta}$، مقادیر متفاوتی برای α و β به دست بیاید، در این صورت معادله عامل انتگرال سازی به صورت $x^{\alpha}y^{\beta}$ ندارد. لذا معادله دیفرانسیل مورد نظر عامل انتگرال سازی به صورت تابعی تنها برحسب x، تابعی تنها برحسب y و تابعی برحسب xy و ... نیز ندارد. در برخی موارد، اگر تشخیص دهیم عامل انتگرال ساز به صورت جمعی است با ضرب معادله دیفرانسیل در $\mu(x,y) = x^{\alpha} \pm y^{\beta}$ شاید بتوان عامل انتگرال ساز را یافت.

تمرین: با محاسبه فاکتور انتگرال ساز، هریک از معادلات زیر را حل کنید.

(۱) $(x+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

پاسخ (۱): عامل انتگرال ساز:
$\mu(x) = 1/x^2$

جواب معادله:
$\phi(x,y) = \ln x - y^2/x + c$

(۲) $xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$

پاسخ (۲):
$\mu(y) = 1/y$

$\phi(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} - \ln y + c$

(۳) $(x^4y^2 + y)dx + x\,dy = 0$

پاسخ (۳): $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2}$

$\phi(x,y) = \dfrac{-1}{xy} + x^3/3 + c$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به یکی از دو صورت $y' + p(x)y = q(x)$ یا $x' + p(y)x = q(y)$ می باشد که اولی برحسب y خطی است و دومی برحسب x خطی است.

(دقت کنید چنانچه در معادله دیفرانسیل عواملی مانند $\sin y$ ، e^y و $tg^{-1}(y)$ و ... موجود باشد به این معنی است که معادله دیفرانسیل مورد نظر نسبت به y (و y') خطی نیست و باید در صورت خطی بودن برحسب x , x' مرتب شود)

به طور مثال :

$$y' + y\cot x = a e^{\cos x} \Rightarrow$$ معادله خطی مرتبه اول برحسب y

$$(1+y^2)\,dx = (tg^{-1}y - x)\,dy \Rightarrow$$ جملاتی مانند y^2 ، $tg^{-1}y$ موجب می شود که معادله دیفرانسیل برحسب y خطی نباشد و برای حل باید برحسب x بازنویسی شود.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1}y - x}{1+y^2} = \frac{tg^{-1}y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$$

$$x' + \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{p(y)}\,x = \underbrace{\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}}_{q(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$x' + p(y)\,x = q(y)$$

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

روش حل: اگر $q(x)=0$ یعنی معادله همگن باشد آن گاه داریم:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

معادله جدایی پذیر است لذا با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\ln(y) = -\int p(x)dx + c_1$$

$$\Rightarrow y = c\, e^{-\int p(x)dx}$$

اگر معادله $(*)$ ناهمگن باشد، ابتدا آن را به فرم زیر بازنویسی می کنیم:

$$\underbrace{(p(x)y - q(x))}_{M}dx + \underbrace{1}_{N}dy = 0 \quad (**)$$

همان طور که ملاحظه می کنید معادله فوق جدایی پذیر، همگن و کامل نیست، اما قابل تبدیل به کامل است.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = p(x) \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \text{(کامل نیست)}$$

دقت کنید $\frac{M_y - N_x}{N}$ تابعی برحسب x است، لذا

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int p(x)dx}$$

عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $(**)$ می باشد. حال با ضرب طرفین معادله $(*)$ در $\mu(x)$ داریم:

$$e^{\int p(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = q(x)\, e^{\int p(x)dx} \quad (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx} + y\,p(x)e^{\int p(x)dx} \overset{\text{می دانیم}}{=} \frac{d}{dx}\left(y e^{\int p(x)dx}\right) \quad (\mathrm{II})$$

$$\left(e^{\int p(x)dx}\right)' = \underbrace{\left(\int p(x)dx\right)'}\, e^{\int p(x)dx}$$

$$= p(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

$\int f' \, dx = f$

حال از (I) و (II) داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int p(x)\,dx}\right) = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

از طرفین نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$y\, e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + c\right]$$

لذا جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر عبارت است از

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر به روش اول : $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\, \mu(x)\, dx + c\right]$

دقت کنید که روش بیان شده برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، تنها برای حالتی است که ضریب y' (یا ضریب $\frac{dy}{dx}$) ۱ باشد که فرم کانونی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

روش تغییر ضرایب ثابت لاگرانژ:

$$y' + p(x) y = q(x) \qquad (1)$$

شرط روش به این صورت است که ابتدا معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول داده شده را در حالت همگن در نظر می‌گیریم:

$$y' + p(x) y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -p(x) \Rightarrow \ln(y) = -\int p(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\,dx} \qquad (*)$$

حال عدد ثابت c را تابعی برحسب x در نظر می‌گیریم.

$$y = c(x) e^{-\int p(x)\,dx} \qquad (2)$$

بنابراین

$$y' = c'(x) e^{-\int p(x)\,dx} + c(x)(-p(x)) e^{-\int p(x)\,dx} \qquad (3)$$

حال با جایگذاری (2) و (3) در (1) داریم:

$$c'(x) e^{-\int p(x)dx} - \cancel{c(x) p(x) e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{c(x) p(x) e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

انتگرال می‌گیریم $\Rightarrow$ $$c(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx}\,dx + c_1 \qquad (4)$$

حال با جایگذاری (4) در (*) داریم:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c_1\right]$$

که همان جواب روش قبل می‌باشد.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

① $y' + y\underbrace{\tan x}_{p(x)} = \underbrace{\sin 2x}_{q(x)} \Rightarrow$ معادله خطی مرتبه اول

حل: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \tan x dx} = \frac{1}{\cos x}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx + c\right]$$

$$= \cos x\left[\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx + c\right]$$

$$= \cos x(-2\cos x + c)$$

② $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$

حل: ابتدا معادله را برحسب x بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y\ln y + y - x}{y}$$

$$\Rightarrow x' = \underbrace{2\ln y}_{\ln y^2} + \underbrace{1}_{\ln e} - x/y$$

$$\Rightarrow x' + \underbrace{\frac{x}{y}}_{p(y)} = \underbrace{\ln(ey^2)}_{q(y)}$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int 1/y\, dy} = e^{\ln y} = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{y}\left[\int \underbrace{\ln(ey^2)}_{u} \cdot \underbrace{y\,dy}_{dv} + c\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow x = y\ln y + 1/2\, y + c}$$

مثال/ جواب خصوصی مساله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$\begin{cases} y' \underbrace{-x}_{p(x)} y = \underbrace{x}_{q(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حل.

$$\mu(x) \doteq e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int x\,dx} = e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int q(x)\mu(x)\,dx + c \right]$$

$$= e^{x^2/2} \left[\int x e^{-x^2/2}\,dx + c \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -x^2/2 = t \\ -x\,dx = dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x e^{-x^2/2}\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{-x^2/2}$$

$$= e^{x^2/2} \left[-e^{-x^2/2} + c \right]$$

$$= -1 + c e^{x^2/2} \Rightarrow y(x) = -1 + c e^{x^2/2}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = -1 + c e^{0} \Rightarrow c = 1$$

جواب خصوصی : $\boxed{y = -1 + e^{x^2/2}}$

طرح

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

(۱) $ty' - 4y = t^6 e^t$

پاسخ (۱):

$$y = t^4[te^t - e^t + c]$$

(۲) $x\frac{dy}{dx} + (2y - xy + 1) = 0$

پاسخ (۲):

$$y = x^{-2}e^x[xe^{-x} + e^{-x} + c]$$

(۳) $y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$

پاسخ (۳):

$$x = 4 - 4\cos y + c e^{-\cos y}$$

(۴) $y' + y\cot x = 5e^{\cos x}$

پاسخ (۴):

$$y = \frac{-5e^{\cos x}}{\sin x} + \frac{c}{\sin x}$$

(۵) $(1+y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy$

پاسخ (۵):

$$x = \tan^{-1}y - 1 + ce^{-\tan^{-1}y}$$

معادلات دیفرانسیلی که در حالت کلی مرتبه اول نبوده ولی به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند:

معادله دیفرانسیل برنولی: فرم کلی این معادله به صورت

$$(*)\quad y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{n} \quad (n \neq 0, 1)$$

$$\left(x' + p(y)\,x = q(y)\,x^{n} \text{ یا}\right)$$

می‌باشد.

برای حل معادله دیفرانسیل برنولی $(*)$، ابتدا طرفین معادله را در y^{-n} ضرب می‌کنیم:

$$(**)\quad y' y^{-n} + p(x)\,y^{-n+1} = q(x)$$

سپس با تغییر متغیر $y^{-n+1} = t$ داریم:

$$t' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'$$

$$\xrightarrow[(**) \text{ در}]{\text{با جایگذاری}} \frac{t'}{1-n} + p(x)\,t = q(x) \Rightarrow t' + (1-n)\,p(x)\,t = (1-n)\,q(x)$$

تبدیل شد به معادله خطی مرتبه اول که قابل حل است.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $$\frac{dy}{dx} - y = xy^{2}$$

حل: $$\xrightarrow[y^{-2} \text{ در}]{\text{طرفین ضرب می‌کنیم}} \frac{dy}{dx}\,y^{-2} - y^{-1} = x \qquad \left(y^{-1} = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + \underbrace{t}_{p(x)} = \underbrace{-x}_{q(x)} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x}$$

$$\Rightarrow t = e^{-x}\left[\int -x e^{x}\,dx + c\right] = -x + 1 + c e^{-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y} = 1 - x + c e^{-x}}$$

ص ۴۳

(۲) $x' = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)\,x^{-2}$

حل: $x' - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(y+1)\,x^{-2}$

برای اینکه معادله فوق خطی شود، باید سمت راست معادله زیر تابعی تنها برحسب y شود، لذا طرفین معادله بازنویسی شده فوق را در x^2 ضرب می‌کنیم:

$$x'x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(y+1) \Rightarrow \frac{x^3}{3} = t \Rightarrow t' = x'x^2$$

$$\Rightarrow t' \underbrace{-}_{p(y)} t = \underbrace{\frac{1}{3}(y+1)}_{q(y)} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(y)dy} = e^{-y}$$

$$\Rightarrow t = e^{y}\left[\int \frac{1}{3}(y+1)e^{-y}\,dy + c\right]$$

$$\xRightarrow{t = x^3/3} x^3 = e^{y}\left[\int (y+1)e^{-y}\,dy + c\right]$$

$$= \dots$$

تذکر: معادلاتی به فرم $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)p(x) = q(x)$ با تغییر متغیر $f(y) = t$ به معادله خطی تبدیل می‌شود.

$$f(y) = t \Rightarrow f'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = t'$$

$$t' + t\,p(x) = q(x)$$

همچنین به طور مشابه برای معادله $f'(x)\frac{dx}{dy} + f(x)p(y) = q(y)$ داریم:

$$f(x) = t \Rightarrow f'(x)\frac{dx}{dy} = \frac{dt}{dy} = t'$$

$$t' + t\,p(y) = q(y)$$

③ $y'\cos y + \sin y = x$

حل: $\sin y = t \Rightarrow \cos y \cdot y' = t'$

$\underset{p(x)}{t'+t} = \underset{q(x)}{x}$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{x}$

$\Rightarrow t = e^{-x}\left[\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{x}dx}_{dv} + c\right]$

$= e^{-x}\left[xe^{x} - e^{x} + c\right]$

$= x - 1 + ce^{-x} \xrightarrow[t=\sin y]{} \sin y = x - 1 + ce^{-x}$

$\Rightarrow \boxed{y = \sin^{-1}(x - 1 + ce^{-x})}$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید:

① $y' - 2 = 2xe^{-y}$

پاسخ ①: $y = \ln(ce^{2x} - x - 1/2)$

② $(2xy^{5} - y)dx + 2x\,dy = 0$

پاسخ ②: $y^{-4} = 4/3\, x + \frac{1}{x^{2}}c$

معادله دیفرانسیل ریکاتی:

فرم کلی این معادله به صورت (*) $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$ $\quad (q(x) \neq 0)$

(یا $x' + p(y)x = q(y)x^2 + r(y)$ ، $(q(y) \neq 0)$)

می باشد.

برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی این معادله را داشته باشیم. در این صورت جواب عمومی معادله (*) به فرم

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

می باشد، که y_1 جواب خصوصی معادله (*) است و z تابعی از x است که از حل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به دست می آید.

$y_1' + p(x)y_1 = q(x)y_1^2 + r(x)$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

با جایگذاری در معادله (*) داریم:

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + p\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) = q\underbrace{\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2}_{y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}} + r$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + py_1 + \frac{p}{z} = qy_1^2 + \frac{2qy_1}{z} + \frac{q}{z^2} + r$$

y_1 جواب خصوصی معادله است

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{p}{z} = \frac{2qy_1}{z} + \frac{q}{z^2} \xrightarrow[(-z^2)]{\text{طرفین ضرب در}}$$

$$\Rightarrow z' - pz = -2qy_1 z - q$$

$$\Rightarrow z' + (2qy_1 - p)z = -q$$

$$\boxed{\Rightarrow z'(x) + (2y_1 q(x) - p(x))z(x) = -q(x)}$$

تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب z شده است. که $z(x)$ را می یابیم.

صفحه ۴۶

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

① $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, \qquad y_1 = x$

حل: $y' + \underbrace{2x}_{p}\, y = \underbrace{1}_{q}\, y^2 + (\underbrace{1 + x^2}_{r}) \Rightarrow$ معادله ریکاتی

$$y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 + (1 + x^2) - 2x\left(x + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} = \cancel{x^2} + \frac{1}{z^2} + \cancel{\frac{2x}{z}} + 1 + \cancel{x^2} - 2x^2 - \cancel{\frac{2x}{z}}$$

$$\Rightarrow z' = -1 \Rightarrow z = -x + c$$

جایگذاری در فرمول آخر صفحه قبل $\Rightarrow$ $\boxed{y = x + \frac{1}{c - x}}$

② $y' = (x + y)(x + y - 2) \qquad y_1 = 1 - x$

$$y' = x^2 + xy - 2x + xy + y^2 - 2y$$

$y' + (\underbrace{-2x + 2}_{p})\, y = \underbrace{\ }_{q} y^2 + (\underbrace{x^2 - 2x}_{r}) \Rightarrow$ معادله ریکاتی

$$y = (1 - x) + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -1 - \frac{z'}{z^2}$$

$$-1 - \frac{z'}{z^2} = \left((1 - x) + \frac{1}{z}\right)^2 + (x^2 - 2x) - (-2x + 2)\left((1 - x) + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow z' = -1 \Rightarrow z = -x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (1 - x) + \frac{1}{C - x}}$$

تذکره: برای حل یک معادله دیفرانسیل ریکاتی داشتن یک جواب خصوصی ضروری است، چنانچه در معادله‌ای جواب خصوصی را نداده باشند، خودمان باید y_1 را حدس بزنیم.

معمولاً در توابع مثلثاتی y_1 را می‌توان یکی از توابع مثلثاتی $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ یا $\csc x$ در نظر گرفت.

به علاوه برای حدس زدن یک جواب در حالات دیگر می‌توان فرض کرد $y_1 = ax^{\alpha}$ یا $y_1 = x^{\alpha}$ و با جایگذاری در معادله و یافتن a و α و حل معادله می‌توان جواب خصوصی معادله ریکاتی را استخراج کرد.

به طور مثال، در معادله ریکاتی $y' = \underbrace{2\tan x \sec x}_{r(x)} - \underbrace{\sin x}_{q(x)}\, y^2$ ،

$y_1 = \sec x$ یک جواب خصوصی این معادله است.

$$y_1' = \sec x \operatorname{tg} x \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} \sec x \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x \sec x - \sin x \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sec x}_{\frac{1}{\cos x}} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{\frac{\sin x}{\cos x}} - \sin x \sec^2 x = 0 \quad \checkmark$$

حال معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} y + y^2 = \frac{1}{x^2}$$

ادعا می‌کنیم $y_1 = x^{\alpha}$ ، داریم:

$$\alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-1} + x^{2\alpha} = x^{-2}$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)x^{\alpha-1} = -x^{2\alpha} + x^{-2} \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow y_1 = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

در جلسات قبل، در مورد حل معادلاتی به فرم $y'=f(x,y)$ بحث کردیم. حال فرض کنید y' به طور صریح برحسب x و y بیان نشود، لذا در این بخش در مورد چگونگی حل این معادلات صحبت می‌کنیم. ابتدا توضیح مختصری درباره جواب غیرعادی خواهیم داشت:

همان طور که قبلاً بیان کردیم، جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی است که منحنی آن بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس باشد. حال به دنبال راه حلی برای پیدا کردن جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستیم.

تعریف: پوش یک دسته منحنی $F(x,y,c)=0$، منحنی می‌باشد که بر کلیه منحنی‌های آن دسته منحنی (که به ازای c های مختلف به دست می‌آید) و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس است.

بنابراین برای یافتن جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل، ابتدا جواب عمومی (دسته منحنی) آن را پیدا می‌کنیم و از روشی که پوش یک دسته منحنی را به دست می‌آوریم، استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $F(x,y,c)=0$ معادله یک دسته منحنی باشد. پوش این دسته منحنی از حذف پارامتر c در دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

اگر حذف c ممکن نباشد، می‌توان مختصات پوش را نسبت به پارامتر c بیان کرد، یعنی مختصات معادله پوش را به فرم پارامتری بیان می‌کنیم.

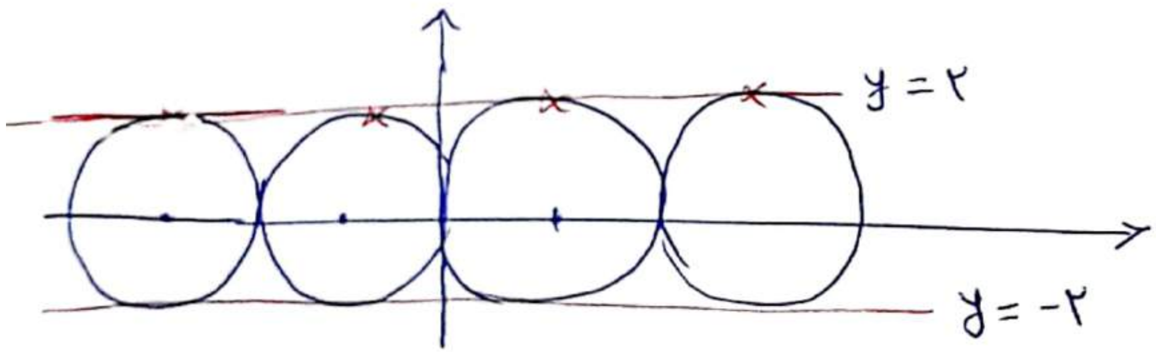
دقت کنید نتیجه‌ای که از حذف c در دستگاه اخیر به دست می‌آید، ممکن است پوش نباشد و یا قسمتی از آن پوش باشد.

به طور مثال، پوش دسته منحنی $(x-c)^2+y^2=4$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = (x-c)^2+y^2-4=0 & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = -2(x-c)=0 \Rightarrow x=c \end{cases}$$

جایگذاری در (1)
$$\Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$$

بنابراین $y=\pm 2$ پوش دسته منحنی $(x-c)^2+y^2=4$ می‌باشد که جواب غیرعادی معادله دیفرانسیلی است که جواب عمومی آن $(x-c)^2+y^2=4$ است.



حال به حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ (*) می‌پردازیم که در آن y' به‌طور صریح برحسب x و y بیان نشود. حالات زیر را درنظر می‌گیریم:

① اگر $F(y') = 0$ (مستقل از x و y) باشد، با فرض اینکه معادله جبری $F(x) = 0$ دارای ریشه حقیقی مثل K باشد (یعنی $F(K) = 0$)، می‌توان نوشت: $y' = K$ و لذا

$$y = Kx + C \Rightarrow K = \frac{y - C}{x}$$

لذا $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ جواب عمومی معادله مذکور است.

مثال/ جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(y')^5 - (y')^3 + y' + 1 = 0$$

$$F(y') = 0$$

قرار می‌دهیم $y' = K$، لذا داریم:

$$K^5 - K^3 + K + 1 = 0$$

طبق قضیه اساسی جبر، این معادله جبری ۵ ریشه دارد که به علت فرد بودن تعداد ریشه‌ها، می‌توان گفت حداقل یک ریشه حقیقی دارد

$$\Rightarrow y = Kx + C \Rightarrow K = \frac{y-C}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب عمومی معادله}} \left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - \left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right) + 1 = 0$$

② اگر معادله (*) به فرم $F(y, y') = 0$ باشد (مستقل از x) اگر این عبارت نسبت به y' قابل حل باشد، در این صورت

$$y' = f(y) \Rightarrow dy = f(y)\, dx \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx$$

معادله جدایی‌پذیر است، لذا

$$\int dx = x + C = \int \frac{dy}{f(y)}$$

اگر y' به سادگی برحسب y بیان نشود، اما y را برحسب y' بتوان بیان کرد یعنی

$$y = f(y')$$

آن‌گاه با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = f(p)$$

دیفرانسیل می‌گیریم $\Longrightarrow$

$$dy = f'(p)\,dp$$

از طرفی $y' = p$ لذا $dy = p\,dx$ بنابراین

$$p\,dx = f'(p)\,dp \Rightarrow dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c$$

بنابراین جواب عمومی از حذف p در دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c \end{cases}$$

اگر حذف p ممکن نباشد، در این صورت جواب عمومی اخیر را به فرم پارامتری، با پارامتر p بیان می‌کنیم.

اگر معادله اولیه (*) به سادگی برای y و y' حل نشود، فرض می‌کنیم

$$y = f_1(p) \quad , \quad y' = f_2(p)$$

چون $dy = y'dx$ لذا

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{f_1'(p)\,dp}{f_2(p)}$$

بنابراین

$$x = \int \frac{f_1'(p)}{f_2(p)}\,dp + c$$

با حذف p در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y=f_1(p) \\ x=\int \frac{f_1'(p)}{f_2(p)}\,dp+c \end{cases}$$

جواب عمومی معادله مورد نظر به دست می‌آید. واگر حذف پارامتر p ممکن نباشد، جواب عمومی به فرم پارامتری با پارامتر p بیان می‌شود.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

1) $y=(y')^2 e^{y'}$

$y'=p \Rightarrow dy=p\,dx \; (*)$

از طرفی $y=p^2e^p$ لذا

$$dy=(2pe^p+p^2e^p)\,dp \xRightarrow{\text{طبق } (*)} p\,dx=p(2+p)e^p\,dp$$

$$\Rightarrow p\left(e^p(2+p)\,dp-dx\right)=0 \quad \begin{cases} e^p(2+p)\,dp=dx \\ p=0 \end{cases}$$

$$e^p(2+p)\,dp=dx \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} x=e^p+pe^p+c$$

بنابراین جواب عمومی به فرم پارامتری عبارت است از

$$\begin{cases} y=p^2e^p \\ x=e^p+pe^p+c \end{cases}$$

و به علاوه داریم:

$p=0 \Rightarrow y=p^2e^p \Rightarrow \boxed{y=0}$ جواب غیرعادی (منفرد)

(۲) $y = y' \ln y'$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx \quad (*)$

از طرفی $y = p \ln p$ لذا داریم:

$$dy = \left(\ln p + p\left(\frac{1}{p}\right)\right) dp$$

$$\xRightarrow{\text{طبق } (*)} \quad p\,dx = (\ln p + 1)\, dp$$

$$\Rightarrow dx = \left(\frac{1+\ln p}{p}\right) dp \Rightarrow x = \int \frac{1}{p}\, dp + \underbrace{\int \frac{\ln p}{p}\, dp}_{\substack{\ln p = t \\ 1/p\, dp = dt}}$$

$$\Rightarrow x = \ln p + \frac{1}{2}(\ln p)^2 + c$$

بنابراین جواب عمومی معادله فوق به فرم پارامتری:

$$\begin{cases} y = p \ln p \\ x = \ln p + \frac{1}{2}(\ln p)^2 + c \end{cases}$$

حال اگر از طرفین $y = p \ln p$ نسبت به p مشتق بگیریم داریم:

$$0 = \ln p + 1 \Rightarrow \ln p = -1$$

$$\Rightarrow p = e^{-1}$$

حال با حذف p از دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} y = p \ln p \\ p = e^{-1} \end{cases} \Rightarrow y = -e^{-1} \Rightarrow y' = 0$$

که این جواب در معادله $y = y' \ln y'$ صدق نمی‌کند، لذا این معادله جواب غیرعادی ندارد.

(۳) $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$

قرار می‌دهیم $y' = \sinh p \Rightarrow y = \cosh p$

$\Rightarrow dy = \sinh p \, dp$

از طرفی می‌دانیم $dy = y' dx \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{\sinh p \, dp}{\sinh p} = dp$

$\xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} x = p + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \cosh p \\ x = p + c \quad \Rightarrow p = x - c \end{cases}$$

بنابراین جواب عمومی معادله مورد نظر عبارت است از:

$$y = \cosh(x - c)$$

(۳) اگر معادله (*) به فرم $F(x, y') = 0$ باشد (مستقل از y). اگر این عبارت نسبت به y' قابل حل باشد، در این صورت

$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x) dx + c$ معادله جدایی پذیر است.

اگر y' بسادگی برحسب x بیان نشود، اما بتوان x را برحسب y' بیان کرد، یعنی

$x = f(y')$

آن‌گاه با فرض $y' = p$ داریم:

$x = f(p) \Rightarrow dx = f'(p) dp$

از طرفی $y' = p$، لذا $dx = \frac{1}{p} dy$. بنابراین

$$\frac{1}{p} dy = f'(p) dp \Rightarrow dy = p f'(p) dp$$

$$\Rightarrow y = \int p f'(p) dp + c$$

بنابراین جواب عمومی از حذف p در دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\, dp + c \end{cases}$$

اگر حذف p ممکن نباشد، یک جواب عمومی پارامتری با پارامتر p خواهیم داشت.

مثال/ معادله زیر را حل کنید.

$$x = \ln y' + \sin y'$$

حل $y' = p \Rightarrow dx = \frac{1}{p}\, dy$

از طرفی $x = \ln p + \sin p$ ، لذا داریم:

$$dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$$

بنابراین

$$\frac{1}{p}\, dy = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp \Rightarrow dy = (1 + \underbrace{p}_{u}\underbrace{\cos p\, dp}_{dv})$$

انتگرال می‌گیریم

$$\Rightarrow y = p + p\sin p + \cos p + C$$

در نتیجه جواب عمومی معادله فوق به فرم پارامتری زیر است:

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p \\ y = p + p\sin p + \cos p + c \end{cases}$$

تذکر: اگر معادله $F(x, y') = 0$ به سادگی برحسب x یا y' حل نشود، آن‌گاه فرض می‌کنیم $x = f_1(p)$ و $y' = f_2(p)$ و چون $dy = y'\, dx$ و $dx = f_1'(p)\, dp$ لذا

$$dy = f_2(p) f_1'(p)\, dp \Rightarrow y = \int f_2(p) f_1'(p)\, dp + c$$

در نتیجه جواب عمومی معادله مورد نظر از حذف p از دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = f_1(p) \\ y = \int f_2(p) f_1'(p)\, dp + c \end{cases}$$

در صورت عدم امکان حذف p، جواب عمومی به صورت پارامتری با پارامتر p بیان می‌گردد.

۴) اگر معادله (*) به فرم $x=f(y,y')$ باشد (یعنی به سادگی بر حسب x بیان شود)
آن‌گاه با فرض $y'=p$ داریم:

$$x=f(y,p)$$

$$\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \quad dx=\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

از طرفی چون $y'=p$، لذا $dx=1/p\,dy$. بنابراین

$$\frac{1}{p}dy=\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

درنتیجه جواب عمومی معادله فوق از حذف p در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x=f(y,p) \\ \frac{1}{p}=\partial f/\partial y+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \end{cases}$$

مثال/ معادله زیر را حل کنید.

$$y=2xy'-yy'^2$$

حل: $y'=p$ قرار می‌دهیم $\Rightarrow dx=\frac{1}{p}dy$ (*)

به علاوه داریم:

$$y=2xp-yp^2 \Rightarrow 2x=y/p+yp$$

$$\xrightarrow{\text{دیفرانسیل می‌گیریم}} \quad 2\,dx=\frac{p\,dy-y\,dp}{p^2}+y\,dp+p\,dy$$

با جایگذاری (*) در رابطه اخیر داریم:

$$2\,\frac{1}{p}dy=\frac{p\,dy-y\,dp}{p^2}+y\,dp+p\,dy$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } dy]{\text{طرفین ضرب در } p^2} \quad 2p=p-y\frac{dp}{dy}+yp^2\frac{dp}{dy}+p^3$$

$$\Rightarrow \quad -p - y\frac{dp}{dy} + p^2\left(p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(p + y\frac{dp}{dy}\right)\left(p^2 - 1\right) = 0 \quad \begin{cases} p^2 - 1 = 0 \Rightarrow p = \pm 1 \\ p + y\dfrac{dp}{dy} = 0 \quad \text{معادله جدایی‌پذیر} \end{cases}$$

حل معادله جدایی‌پذیر : $\dfrac{dp}{p} + \dfrac{dy}{y} = 0 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} \ln p + \ln y = c_1 \Rightarrow \ln(py) = c_1$

$$\Rightarrow py = e^{c_1} = c$$

$$\Rightarrow py = c \Rightarrow \boxed{p = c/y}$$

بنابراین جواب عمومی از حذف p در دستگاه زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} 2x = y/p + yp \\ p = c/y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \quad 2x = y/_{c/y} + y \times c/y$$

$$= y^2/c + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = c(2x - c)}$$

حال از حذف p در دستگاه زیر جواب غیرعادی معادله به دست می‌آید :

$$\begin{cases} 2x = y/p + yp \\ p = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2x = 2y \\ 2x = -2y \end{matrix}$$

لذا $y = \pm x$ جواب‌های غیرعادی معادله است.

۵ اگر معادله دیفرانسیل (*) یعنی معادله $F(x,y,y')=0$ به فرم $y=f(x,y')$ باشد، آن‌گاه با فرض $y'=p$ داریم:

$$y=f(x,p) \xrightarrow[\text{دیفرانسیل}]{\text{گیری}} dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \circledast$$

از طرفی $\frac{dy}{dx}=y'=p$ لذا $dy=p\,dx$ که با جایگذاری در رابطه $\circledast$ داریم:

$$p\,dx=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } dx} p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

بنابراین جواب عمومی معادله مورد نظر از حذف p در دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=f(x,p) \\ p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \end{cases}$$

اگر حذف p ممکن نباشد، جواب عمومی به فرم پارامتری با پارامتر p بیان می‌شود.

مثال/ معادله زیر را حل کنید.

$$y=\underbrace{\frac{y'^2}{2}+2xy'+x^2}_{f(x,y')}$$

حل: $y'=p \Rightarrow dy=p\,dx$

از طرفی داریم: $y=\frac{p^2}{2}+2xp+x^2$

$$\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \underset{p\,dx}{dy}=p\,dp+2p\,dx+2x\,dp+2x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } dx} (p+2x)\frac{dp}{dx}+(p+2x)=0 \Rightarrow (p+2x)\left(\frac{dp}{dx}+1\right)=0$$

$$\begin{cases} p+2x=0 \Rightarrow p=-2x \\ \frac{dp}{dx}+1=0 \Rightarrow p=c-x \end{cases}$$

ص ۵۹

بنابراین جواب عمومی معادله از حذف p در دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} y = \frac{p^2}{2} + 2xp + x^2 \\ p = c - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}(c-x)^2 + cx}$$

جواب غیرعادی از حذف p در دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} y = \frac{p^2}{2} + 2xp + x^2 \\ p = -2x \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -x^2}$$

جواب غیرعادی

در معادله دیفرانسیل مهم:

معادله کلرو: فرم کلی معادله دیفرانسیل کلرو به صورت

$$y = xy' + f(y')$$

می باشد. برای حل این معادله قرار می دهیم: $y' = p$. لذا داریم:

$$y = xp + f(p) \xrightarrow{\text{مشتق می گیریم}} p = y' = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0 \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

با حذف p از دستگاه زیر جواب عمومی معادله کلرو به دست می آید:

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ p = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx + f(c)}$$

یک دسته خطوط مستقیم

و با حذف p از دستگاه زیر جواب غیرعادی معادله کلرو به دست می آید:

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

دقت: برای یافتن جواب عمومی معادله کلرو، کافیست در معادله به جای y'، مقدار c قرار دهیم.

درصورت عدم امکان حذف p، جواب غیرعادی به صورت پارامتری بیان می شود.

مثال/ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y = xy' + \frac{1}{y'} \qquad = xy' + f(y')$$

حل: معادله کلرو است $\Rightarrow y' = c \Rightarrow \boxed{y = cx + 1/c}$ جواب عمومی

برای جواب غیرعادی، باید c را از دستگاه زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} y = cx + 1/c & \left(f(c) = 1/c \Rightarrow f'(c) = -1/c^2\right) \\ x - 1/c^2 = 0 & \Rightarrow c^2 = 1/x \Rightarrow y^2 = c^2x^2 + 1/c^2 + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$$

معادله لاگرانژ: فرم کلی معادله دیفرانسیل لاگرانژ به صورت

$$y = x f(y') + g(y')$$

می باشد. با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = x f(p) + g(p) \xrightarrow[x \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} p = y' = f(p) + x f'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow (p - f(p)) = (x f'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - x\frac{f'(p)}{p - f(p)} = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به تابع x و متغیر p است و معادله اخیر را حل خواهیم کرد.

$$x' - x f(p) = q(p)$$

مثال/ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y = xy'^{2} + y'^{3} = x f(y') + g(y')$$ معادله لاگرانژ

حل: $y' = p \Rightarrow y = xp^{2} + p^{3}$

$$\xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{نسبت به } x} \quad p = y' = p^{2} + (2xp + 3p^{2})\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p(1-p) = p(2x + 3p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{2x}{1-p} = \frac{3p}{1-p} \qquad (\cancel{x}' - x f(p) = g(p))$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$f(p) = -\frac{2}{1-p}, \quad g(p) = \frac{3p}{1-p}$$

$$\xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \mu(p) = e^{\int -\frac{2}{1-p}dp} = e^{2\ln|1-p|} = (1-p)^{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\mu(p)}\left[\int g(p)\mu(p)\,dp + c\right]$$

$$= \frac{1}{(1-p)^{2}}\left[\int \frac{3p}{1-p}(1-p)^{2}\,dp + c\right]$$

$$= \frac{1}{(1-p)^{2}}\left(\frac{3}{2}p^{2} - p^{3} + c\right)$$

بنابراین جواب عمومی به صورت:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(1-p)^{2}}\left(\frac{3}{2}p^{2} - p^{3} + c\right) \\ y = xp^{2} + p^{3} = \dfrac{p^{2}}{(1-p)^{2}}\left(\frac{3}{2}p^{2} - p^{3} + c\right) + p^{3} \end{cases}$$

$$p = p^{2} + (2xp + 3p^{2})\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} - x\frac{2p}{p-p^{2}} = \frac{3p^{2}}{p-p^{2}}$$

با فرض $p - p^{2} \neq 0$

دقت کنید که این معادله دو جواب غیرعادی نیز دارد که مربوط به ریشه‌های $p-p^2=0$ است.

$$p(1-p)=0 \begin{cases} p=0 \\ p=1 \end{cases} \quad \text{و} \quad y=xp^2+p^3$$

$$\begin{cases} p=0 & y=0 \\ p=1 & y=x+1 \end{cases}$$

که هر دو در معادله دیفرانسیل مورد نظر نیز صدق می‌کنند، لذا جوابهای غیرعادی معادله مورد نظر هستند.

مسیرهای قائم (متعامد): دو دسته منحنی $y=mx$ و $x^2+y^2=c$ ($m,c\in\mathbb{R}$) را در نظر بگیرید. واضح است که هر منحنی از یک دسته یا یک خانواده، بر تمام منحنی‌های خانواده‌ی دیگر عمود است.

هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته از منحنی‌ها وجود داشته باشد، یک دسته را مسیرهای متعامد دسته دیگر می‌گویند.

برای یافتن مسیرهای قائم یک دسته از منحنی‌ها، کافی است با مشتق گیری و حذف ثابت موجود، معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده را به دست آوریم، سپس در آن y' را با $-1/y'$ جایگزین می‌کنیم. جواب معادله دیفرانسیل جدید، مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه می‌باشد.

به طور مثال برای یافتن مسیرهای قائم دسته منحنی $x^2+y^2=c$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2x+2yy'=0 \xrightarrow{y'\to -1/y'} 2x-\frac{2y}{y'}=0 \Rightarrow x=y/y'$$

$$\Rightarrow y'=y/x \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+c_1 \Rightarrow \ln(y/x)=c_1$$

$$\Rightarrow y/x=e^{c_1}=c_2 \Rightarrow \boxed{y=c_2x}$$

مسیرهای قائم در دستگاه مختصات قطبی: در مختصات قطبی $r=f(\theta,c)$، ابتدا نسبت به θ مشتق می‌گیریم و c را حذف می‌کنیم. در این صورت معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده برحسب r و r' و θ به دست می‌آید، به جای r'/r، قرار می‌دهیم: $-\frac{r}{r'}$.
معادله دیفرانسیل به دست آمده را حل می‌کنیم، جواب معادله اخیر، مسیرهای قائم بر دسته منحنی اولیه است.

$$\begin{cases} m=r\dfrac{d\theta}{dr} & \text{شیب خط مماس} \\ m'=-\dfrac{dr}{r\,d\theta} & \text{" " قائم} \end{cases}$$

به طور مثال، برای یافتن مسیرهای قائم بر دسته منحنی $r^{-1}=\sin^2\theta+c$ داریم:

$$-r^{-2}r'=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)=\sin 2\theta \quad \Rightarrow -\frac{1}{r}\left(-\frac{r}{r'}\right)=\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow r'\sin 2\theta=1 \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=\frac{1}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow dr=\frac{1}{\sin 2\theta}d\theta \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} r=\int\frac{d\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\begin{cases} tg\theta=t \\ (1+tg^2\theta)d\theta=dt \end{cases} \Rightarrow d\theta=\frac{dt}{1+tg^2\theta}=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\,tg\theta\,\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{1+tg^2\theta}}=2t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{1+t^2}{2t}$$

$$\Rightarrow r=\int\frac{dt}{\cancel{1+t^2}}\times\frac{\cancel{1+t^2}}{2t}==\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(tg\theta)+c$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، به صورت

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

می باشد.

فرم خطی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، به صورت

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = r(x)$$

می باشد.

* اگر $r(x)=0$، معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن گویند.
* اگر $a_0(x)$، $a_1(x)$، ...، $a_{n-1}(x)$ ثابت باشند، آن گاه معادله را خطی با ضرایب ثابت گویند.

- معادلات دیفرانسیل مرتبه n
  - معادلات دیفرانسیل خطی
    - با ضرایب ثابت
    - با ضرایب متغیر
  - معادلات دیفرانسیل غیرخطی

توجه: برای یافتن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، به n شرط اضافی نیاز است. اگر این n شرط در یک نقطه روی تابع و مشتقات آن مشخص شوند، مسأله حاصل را مسأله مقدار اولیه می نامند و اگر این شرایط اضافی روی تابع و مشتقات آن در دو نقطه متمایز داده شده باشند، مسأله را مسأله مقدار مرزی گویند.

تعریف: توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را در بازه $[a,b]$ مستقل خطی گوییم هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$، رابطه‌ی

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

نتیجه دهد $c_1 = c_2 = 0$. در غیر این صورت f_1 و f_2 را وابسته خطی گوییم.

بنابراین اگر یکی از این توابع، ضریبی از دیگری باشد وابسته خطی اند و در غیر این صورت مستقل خطی هستند. (تابع $y=0$، با هر تابع دیگری وابسته خطی است)

به طور مثال توابع $\sin x$ و $\cos x$ مستقل خطی اند. اما توابع $f_1=\sin x$ و $f_2 = 2\sin x$ وابسته خطی هستند زیرا با انتخاب $c_1=-2$ و $c_2=1$ داریم:

$$-2\sin x + 2\sin x = 0$$

رونسکین (دترمینان رونسکی): فرض کنید توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ در بازه $[a,b]$ حداقل $n-1$ بار مشتق پذیر باشد، در این صورت رونسکین Wronskian $f_1, \dots, f_n$ را با نماد $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: توابع f و g مستقل خطی اند $\Longleftrightarrow$ $W(f,g) \neq 0$

(توابع f و g وابسته خطی اند $\Longleftrightarrow$ $W(f,g)=0$)

تذکر: قضیه فوق برای n تابع $f_1, \dots, f_n$ نیز برقرار است.

به طور مثال توابع $\sin x$ و $\cos x$ مستقل خطی اند، زیرا

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

تعمیم: معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (*)$$

را در نظر بگیرید:

۱- اگر $y_1 = G(x)$ یک جواب این معادله دیفرانسیل باشد، آن گاه $y = cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز جواب معادله خواهد بود.

۲- اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله باشند، آن گاه $y_1 + y_2$ نیز جواب معادله است. به علاوه به ازای هر دو ثابت دلخواه c_1 و c_2، $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ نیز جواب معادله می باشد. (اصل برهم نهی یا انطباق جواب ها)

نکته: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله (*) باشند آن گاه جواب عمومی معادله فوق عبارت است از

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

که این نکته قابل تعمیم برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n نیز می باشد.

تذکره:

$$\begin{cases} y_g : \text{جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن} \\ y_G : \text{جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیرهمگن} \\ y_p : \text{جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن} \end{cases}$$

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت :

$$(*)\quad y'' + ay' + by = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

با فرض اینکه $y = e^{tx}$ جواب معادله فوق باشد، داریم:

$$y' = te^{tx}, \quad y'' = t^2 e^{tx}$$

با جایگذاری در معادله

$$\Rightarrow \quad e^{tx}(t^2 + at + b) = 0$$

لذا برای تعیین t، باید معادله $t^2 + at + b$ را حل کنیم. (معادله مفسر یا معادله مشخصه)

سه حالت رخ می دهد.

(۱) معادله مشخصه دو ریشه حقیقی متمایز t_1, t_2 داشته باشد. (یعنی $a^2 - 4b > 0$)

بنابراین $y_1(x) = e^{t_1 x}$ و $y_2 = e^{t_2 x}$ دو جواب معادله $(*)$ هستند و چون

$$W(y_1, y_2)(x) = (t_2 - t_1)e^{(t_2 + t_1)x} \neq 0$$

لذا y_1 و y_2 مستقل خطی اند و جواب عمومی معادله $(*)$ به صورت زیر است:

$$y_g(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$$

(۲) معادله مشخصه دو ریشه مختلط ومتمایز $t_1 = \alpha + \beta i$ ، $t_2 = \alpha - \beta i$ داشته باشد (یعنی $a^2 - 4b < 0$) . در این صورت

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} \quad , \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$$

دو جواب مختلط معادله $(*)$ هستند. قرار می دهیم:

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

در این صورت Y_1 و Y_2 نیز جواب های معادله $(*)$ هستند و چون

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Y_1, Y_2 مستقل خطی اند و لذا جواب عمومی معادله $(*)$ به صورت زیر می باشد:

$$y_g(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

(۳) معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد (یعنی $a^2-4b=0$) . در این صورت ریشه های معادله مشخصه مساوی هستند یعنی $t_1=t_2=t$. بنابراین یک جواب معادله به صورت $y_1=e^{tx}$ $(t=-a/2)$ است. برای پیدا کردن جواب دوم معادله (*) که مستقل خطی با y_1 باشد، از روش کاهش مرتبه استفاده می کنیم. به این منظور فرض می کنیم $y_2(x)=\underbrace{r(x)}_{\text{غیرثابت}}\, y_1(x)$. تابع $r(x)$ را به گونه ای می یابیم که y_2 جواب معادله $y''+ay'+by=0$ باشد.

$$y_2' = r'y_1 + ry_1'$$

$$y_2'' = r''y_1 + r'y_1' + r'y_1' + ry_1''$$

$$= r''y_1 + 2r'y_1' + ry_1''$$

با جایگذاری y_2، y_2' و y_2'' در معادله مورد نظر داریم:

$$r''y_1 + 2r'y_1' + ry_1'' + ar'y_1 + ary_1' + bry_1 = 0$$

$$r(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{\text{۰ (} y_1 \text{ جواب معادله است)}}) = 0$$

If $r'=u$, $\frac{2y_1'}{y_1}+a_1 = Q(x)$

$\Rightarrow u'(x) + Q(x)u(x) = 0$

$\Rightarrow$ مرتبه معادله دیفرانسیل یک واحد کاهش پیدا کرد

$\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بر حسب u

$$\Rightarrow r''y_1 + 2r'y_1' + ar'y_1 = 0$$

تقسیم بر y_1

$$\Rightarrow r'' + 2r'\frac{y_1'}{y_1} + ar' = 0 \Rightarrow r'' + \underbrace{\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a\right)r'}_{} = 0$$

دقت کنید $\frac{2y_1'}{y_1} + a = 0$ ، زیرا: $y_1 = e^{tx}$ و t ریشه مضاعف معادله مشخصه $t^2+at+b=0$ است

$$\Rightarrow t = -\frac{a}{2} \Rightarrow 2t + a = 0$$

از طرفی $y_1 = e^{tx} \Rightarrow \ln y_1 = \ln e^{tx} = tx$

$\Downarrow$ مشتق می گیریم

$$\frac{y_1'}{y_1} = t = -a/2 \Rightarrow \boxed{2\frac{y_1'}{y_1} + a = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{2y_1'}{y_1} + a = 0 \Rightarrow r'' = 0 \Rightarrow r(x) = c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y_g = K_1 y_1 + K_2 \overbrace{y_2}^{r y_1}$$

$$= (K_1 + K_2 r) y_1 = (K_1 + c_1 K_2 x + K_2 c_2) e^{tx}$$

$$= (K_1 + K_2 c_2) e^{tx} + (c_1 K_2) e^{tx}$$

$$\Rightarrow y_g(x) = C_1 e^{tx} + C_2 x e^{tx}$$

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(۱) $y'' - 2y' - 3y = 0$

حل: معادله مشخصه: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-3) = 16 > 0$

$\Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = -1$

جواب عمومی معادله: $y_g(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

(۲) $y'' - y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = -4$

حل: معادله مشخصه: $t^2 - t - 6 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$

جواب عمومی: $y_g(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \quad (*)$

مشتق می‌گیریم: $\Rightarrow y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \quad (**)$

$$\begin{aligned} y(0) = 3 &\xRightarrow[(*)]{\text{طبق}} \\ y'(0) = -4 &\xRightarrow[(**)]{\text{طبق}} \end{aligned} \begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ -4 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 13/5,\ c_2 = 2/5$$

جواب عمومی: $y = \frac{13}{5} e^{-2x} + \frac{2}{5} e^{3x}$

(۳) $y'' + 10y' + 25y = 0$

حل: معادله مشخصه: $t^2 + 10y + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 100 = 0 \Rightarrow t = -5$

جواب عمومی: $y_g(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$

$= e^{-5x}(c_1 + c_2 x)$

④ $y'' - y' + y = 0$

حل: معادله مشخصه: $t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$$t_1, t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} = \underbrace{1/2}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{3}/2}_{\beta}\, i$$

جواب عمومی: $y_g(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

روش کاهش مرتبه: برای حل معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

فرض کنید y_1 یک جواب از معادله دیفرانسیل مذکور باشد. جواب دوم معادله فوق را که مستقل خطی با y_1 باشد را می توان به صورت

$$y_2(x) = r(x)\, y_1(x)$$

در نظر گرفت. که با محاسبات و جایگذاری در معادله مورد نظر، مرتبه معادله یک درجه کاهش می یابد. $r(x)$ از طریق فرمول زیر که به فرمول آبل معروف است محاسبه می شود:

$$r(x) = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

لذا

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

در نتیجه جواب عمومی معادله مذکور به صورت:

$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ می باشد.

مثال/ - جواب عمومی معادله زیر را بیابید:

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad , \quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$$

حل: دقت کنید ابتدا ضریب y'' را یک می‌کنیم و سپس معادله را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow y'' + \overset{P(x)}{\frac{2}{x}} y' + \overset{q(x)}{1}\, y = 0 \quad , \quad y_2(x) = r(x) \frac{\sin x}{x}$$

$$r(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{\sin^2 x} e^{-\int 2/x \, dx} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = -\cot x \times \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_g(x) = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}}$$

حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضریب ثابت همگن:

فرم کلی این معادلات به صورت

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R})$$

با فرض اینکه e^{tx} جواب معادله فوق باشد، آنگاه معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$$

حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- فرض کنیم معادله مشخصه دارای n ریشه حقیقی و متمایز $t_1, \dots, t_n$ باشد، در این صورت جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$y_g(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \dots + c_n e^{t_n x}$$

۲- فرض کنیم معادله مشخصه دارای n ریشه حقیقی باشد که m تا از آن تکراری باشند، یعنی

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_m = t \\ t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n \quad \text{متمایز} \end{cases}$$

آن‌گاه جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$y_g(x) = (c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}) e^{tx} + c_{m+1} e^{t_{m+1} x} + \dots + c_n e^{t_n x}$$

۳- فرض کنیم معادله مشخصه دارای ۲ ریشه مختلط غیرتکراری $t_1 = \alpha + \beta i$ و $t_2 = \alpha - \beta i$ باشد و بقیه ریشه‌ها حقیقی باشد، آن‌گاه جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$y_g(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) + \text{جواب‌های متناظر با سایر ریشه‌ها}$$

۴- فرض کنیم معادله مشخصه دارای m ریشه مختلط تکراری باشد، یعنی

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_m = \alpha + \beta i \\ t_{m+1} = t_{m+2} = \dots = t_{2m} = \alpha - \beta i \\ t_{2m+1}, \dots, t_n \quad \text{متمایز} \end{cases}$$

آن‌گاه جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$y_g(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) + x e^{\alpha x}(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x) + \dots$$
$$+ x^{m-1} e^{\alpha x}(c_{2m-1} \cos\beta x + c_{2m} \sin\beta x) + \text{جواب‌های متناظر با سایر ریشه‌ها}$$

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 0$

حل: معادله مشخصه: $t^3 - 2t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t(t+1)(t-3) = 0 \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \\ t=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{y_g(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}}$$

(2) $y^{(3)} - y'' = 0$

حل: معادله مشخصه: $t^3 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2(t-1) = 0 \begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ t=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_g(x) = (c_1 + c_2 x)e^{0x} + c_3 e^{x}$$

$$\boxed{= c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}}$$

(3) $y^{(4)} - y = 0$

حل: معادله مشخصه $t^4 - t = (t^2+1)(t^2-1) = 0 \begin{cases} t=i \\ t=-i \\ t=1 \\ t=+1 \end{cases}$ $\alpha=0,\ \beta=1$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$$

(4) $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

حل: معادله مشخصه $t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^4(t^2+1) - (t^2+1) = 0 \Rightarrow (t^2+1)(t^4-1) = 0$

$$\begin{cases} t=1,\ t=-1 \\ t=i,\ t=-i \quad (\alpha=0, \beta=1) \\ t=i,\ t=-i \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + x(c_5 \cos x + c_6 \sin x)$$

تذکر: با انتخاب نماد زیر:

$$D=\frac{d}{dx}\ ,\ D^2=\frac{d^2}{dx^2}\ ,\ \dots\ ,\ D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

معادله دیفرانسیل خطی همگن

$\frac{dy^n}{dx^n}$

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\underbrace{\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1D+a_0\right)}_{\text{اپراتور دیفرانسیل}\ F(D)}y=0$$

به طور مثال معادله $y^{(4)}-y^{(3)}-4y''+4y'=0$ را می‌توان به صورت

$$\left(D^4-D^3-4D^2+4D\right)y=0$$

نوشت. در این صورت ریشه‌های معادله مشخصه

$$t^4-t^3-4t^2+4t=0$$

و اپراتور دیفرانسیل

$$D^4-D^3-4D^2+4D=0$$

یکی است.

مثال/ جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$\underbrace{D(D-1)(D+3)}_{F(D)}y=0$$

⇐ ریشه‌های معادله مشخصه
$$\begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=-3 \end{cases}$$

جواب عمومی ⇐
$$y_g(x)=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-3x}$$

ص ۷۹

حل معادلات خطی ناهمگن مرتبه n :

فرض کنیم $y_p(x)$ جواب خصوصی معادله زیر باشد :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x) \quad (*)$$

و $y(x)$ نیز جواب دلخواهی برای معادله (*) باشد. در این صورت

$$y(x) - y_p(x)$$

جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله (*) می باشد. لذا داریم :

$$y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$$ جواب عمومی معادله (*)

جواب خصوصی معادله (*) + جواب عمومی برای فرم همگن معادله (*) =

حال برای یافتن جواب خصوصی معادله (*) یعنی $y_p(x)$ ، از دو روش زیر استفاده می کنیم :

۱- روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ)

۲- روش ضرایب نامعین

۱- روش تغییر پارامتر : فرض کنیم $y_g = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ جواب عمومی فرم همگن معادله (*) باشد. فرض کنیم :

$$y_p(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \cdots + u_n(x)y_n$$

و توابع $u_1(x)$ تا $u_n(x)$ را به گونه ای می یابیم که $y_p(x)$ در معادله * صدق کند.

$$y_p'(x) = u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n + u_1y_1' + \cdots + u_ny_n'$$

فرض کنیم : $u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n = 0$ ،

$$y_p''(x) = u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' + u_1y_1'' + \cdots + u_ny_n''$$

فرض می کنیم : $u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' = 0$ ، لذا با ادامه این روند ، داریم :

⋮

$$y_p^{(n-1)} = u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} + u_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)}$$

فرض می‌کنیم $u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0$ ، لذا

$$y_p^{(n)} = u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} + u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}$$

حال با جایگذاری y_p ، y_p' ، ... ، $y_p^{(n)}$ در معادله (*) داریم:

برای حالت دوتایی: ؟؟ $u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = R(x)$

بنابراین یک دستگاه n معادله ، n مجهول به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = R(x) \end{cases}$$

حال برای یافتن u_i' ها $(1 \leq i \leq n)$ از روش کرامر استفاده می‌کنیم.

$$u_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

ستون i ام

که $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$ و $W_i(x)$ همان $W(x)$ است که به جای ستون i ام آن بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(x) \end{bmatrix}_{n\times 1}$ را قرار می‌دهیم.

(y_i ها جواب‌های مستقل خطی معادله همگن هستند)

ولذا $u_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx$ ، و $y_p(x)$ براحتی بدست می‌آید.

ص ۷۸

مثال / معادلات زیر را حل کنید.

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

حل. ابتدا جواب عمومی م.م همگن را می‌یابیم: $y'' + 2y' + y = 0$

معادله مشخصه: $t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{t=-1}_{\text{ریشه مضاعف}}$

$$\Rightarrow y_g = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{x e^{-x}}_{y_2}$$

جواب خصوصی معادله مورد نظر: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$= u_1 e^{-x} + u_2 x e^{-x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -x\ln x\, e^{-2x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x \end{vmatrix} = \ln x\, e^{-2x}$$

$$\Rightarrow u_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx = \int -x\ln x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$$

$$u_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx = \int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) + x^2 e^{-x}(\ln x - 1) = x^2 e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4}\right)$$

جواب عمومی معادله مذکور: $y_G = y_g + y_p = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)$

(۲) $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 3x$

حل:
$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{(1+x^2)}y = \frac{x^3+3x}{(1+x^2)} \qquad (*)$$

ابتدا جواب عمومی معادله همگن شده (*) را می یابیم. $y_1 = x$ یک جواب معادله همگن

$$y'' - \underbrace{\frac{2x}{(1+x^2)}}_{p(x)}y' + \underbrace{\frac{2}{(1+x^2)}}_{q(x)}y = 0$$

(روش کاهش مرتبه)

است و طبق فرمول آبل داریم:

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$= x\int \frac{1}{x^2}(1+x^2)\,dx = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2(x^2-1)$$

حال برای یافتن $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ داریم:

$$w(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}, \quad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ \frac{x^3+3x}{1+x^2} & 2x \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x^3+3x}{1+x^2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int \frac{w_1}{w}dx = \int \frac{-(x^2-1)\frac{x^3+3x}{1+x^2}}{x^2+1}dx = \cdots$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w}dx = \int \frac{\frac{x^3+3x}{1+x^2}\times x}{x^2+1}dx = \cdots$$

$$\Rightarrow \quad y_G = c_1x + c_2(x^2-1) + u_1x + u_2(x^2-1)$$

۳) $y^{(3)} - 2y'' + y' = e^{x}$

حل: ابتدا جواب عمومی فرم همگن معادله را می‌یابیم : معادله مشخصه

$$t^{3} - 2t^{2} + t = 0 \qquad t(t-1)^{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0, \quad t_2 = t_3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y_g(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$$

جواب خصوصی معادله مذکور $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = u_1 + u_2 e^{x} + u_3 x e^{x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+1)e^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+1)e^{x} \\ e^{x} & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix} = e^{3x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & xe^{x} \\ 0 & 0 & (x+1)e^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix} = -(x+1)e^{2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = e^{x}, \quad u_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right), \quad u_3 = \int \frac{W_3}{W} dx = x$$

ص ۸۱

$$\Rightarrow y_p = e^{x} + \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) e^{x} + x\left(x e^{x}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) e^{x}$$

$$\Rightarrow y_G = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) e^{x}$$

$$= (c_1) + (c_2 + 1) e^{x} + (c_3 - 1) x e^{x} + \frac{x^2}{2} e^{x}$$

$$= K_1 + K_2 e^{x} + K_3 x e^{x} + \frac{x^2}{2} e^{x}$$

$$= e^{x}\left(K_1 e^{-x} + K_2 + K_3 x + \frac{x^2}{2}\right)$$

۲- روش ضرایب نامعین: از این روش برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات خطی با ضرایب ثابت استفاده می‌شود. حال معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x) \quad (*)$$

دقت کنید در این روش تابع $R(x)$ باید از جنس توابع خاصی مانند چندجمله‌ای‌ها، تابع نمایی و ... باشد که حالات زیر را برای آن در نظر می‌گیریم:

(۱) فرض کنیم $R(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه مثلاً n باشد، $R(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$

در این حالت، y_p یعنی جواب خصوصی معادله $(*)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_p(x) = \text{چندجمله‌ای کامل از درجه } n \times x^{m}$$

که m تعداد ریشه‌های صفر در معادله مشخصه است.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $y'' + 2y' + y = \underbrace{x^2+1}_{R(x)}$

حل: ابتدا جواب عمومی نرم همگن معادله را می یابیم.

$t^2+2t+1=0 \Rightarrow (t+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{t_1=t_2=-1}$

$\Rightarrow y_g(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

تعداد ریشه های صفر در معادله مشخصه $\underset{m}{\underset{\|}{\text{صفر}}}$ و $R(x)$ از درجه ۲ است

$\xRightarrow[\text{معادله مذکور}]{\text{جواب خصوصی}} y_p(x) = (ax^2+bx+c)\times x^0 = ax^2+bx+c$

$y'_p(x) = 2ax+b$

$y''_p(x) = 2a$

$\xRightarrow[\text{جایگذاری می کنیم}]{\text{در معادله}} 2a+4ax+2b+\underline{\underline{a}}x^2+bx+c = \underline{\underline{\ }}x^2+1$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ 4a+b=0 \Rightarrow b=-4 \\ 2a+2b+c=1 \Rightarrow c=7 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(x) = x^2-4x+7$

$\Rightarrow y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$
$= c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2-4x+7$

(۲) $y'' - y' = \underbrace{2x}_{R(x)}$

حل: ابتدا جواب عمومی جزء همگن معادله را می‌یابیم.

$\underbrace{t^2 - t = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 + c_2 e^x$$

تعداد ریشه‌های صفر در معادله مشخصه $m=1$ و $R(x)$ از درجه ۱

$$\Rightarrow y_p(x) = (ax+b)x^1 = ax^2 + bx$$

$$y'_p(x) = 2ax + b$$

$$y''_p(x) = 2a$$

$\xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم}]{\text{در معادله}}$ $2a - 2ax - b = 2x$

$$\begin{cases} -2a = 2 \rightarrow a = -1 \\ 2a - b = 0 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = -x^2 - 2x$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی معادله مذکور $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$

$$= c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

Scanned with CamScanner

۲) فرض کنیم $R(x)$ به فرم $M(x)\, e^{px}$ باشد که در آن $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه مثلاً n و p یک عدد ثابت باشد. در این حالت، y_p به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_p(x) = \text{چندجمله‌ای کامل از درجه } n \times e^{px} \times x^m$$

که m تعداد ریشه‌های p در معادله مشخصه است.

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(1) $y'' - 5y' + 4y = \underbrace{(x-2)}_{M(x)} e^{\overset{p}{1}x}$

حل: ابتدا جواب عمومی همگن معادله را می‌یابیم.

$$\underbrace{t^2 - 5t + 4 = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

تعداد ریشه‌های $p=1$ در معادله مشخصه $m=1$ است. و e^x و $M(x)$ از درجه 1

جواب خصوصی معادله مذکور $\Longrightarrow$ $y_p(x) = (ax+b)e^x x^1 = (ax^2+bx)e^x$

$$y_p'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x$$
$$= e^x(ax^2 + (2a+b)x + b)$$

$$y_p''(x) = (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x$$

جایگذاری در معادله $\Longrightarrow$ $(ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x + (-5ax^2 + (-10a-5b)x - 5b)e^x +$

$$+ (4ax^2 + 4bx)e^x = (x-2)e^x$$

$$\Rightarrow (4a + b - 10a - 5b + 4b)x + (2a + 2b - 5b) = 1x - 2$$

$$\Rightarrow a = -1/10 \;,\; b = 9/25$$

ص ۸۵

$$\Rightarrow y_p(x) = \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)e^x$$

$$\Rightarrow y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$$
$$= c_1e^x + c_2e^{4x} + \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)e^x$$

(۲) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$

$M(x) = 3, \quad p = 2$

حل: معادله مشخصه فرم همگن $t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

تعداد ریشه‌های $p=2$ در معادله مشخصه $m=2$ است. ، e^{2x} ، $M(x)$ از درجه ۰

$$\Rightarrow y_p(x) = a \times e^{2x} \times x^2 = ax^2e^{2x}$$

$$y_p'(x) = (2ax^2 + 2ax)e^{2x}$$

$$y_p''(x) = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$$

جایگذاری در معادله مذکور

$$(4ax^2 + \underline{8ax} + \boxed{2a})e^{2x} + (-8ax^2 - \underline{8ax})e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$$
$$= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

(۳) فرض سوم $R(x)=M(x)\cos(qx)+N(x)\sin(qx)$ که $M(x)$ ، $N(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای هایی از درجه مثلاً m و n باشند ، در این حالت ، y_p به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود :

$$y_p(x)=x^t\,(T(x)\cos(qx)+S(x)\sin(qx))$$

که در آن $T(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای کامل از درجه $\max\{m,n\}$ می‌باشند و t تعداد ریشه‌های qi در معادله مشخصه است .

مثال / معادلات زیر را حل کنید .

(۱) $y''+4y=\cos 5x$

$M(x)=1$ ، $N(x)=0$

$q=5$

حل :
$\underbrace{t^2+4t=0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow t=\pm 2i \Rightarrow y_g=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

تعداد ریشه‌های $\overset{qi}{=}5i$ ، در معادله مشخصه برابر $t=0$

$S(x)$, $T(x)$ باید از درجه ۰ یعنی ثابت باشند

$$\Rightarrow y_p(x)=A\cos 5x+B\sin 5x$$

$$y'_p(x)=-5A\sin 5x+5B\cos 5x$$

$$y''_p(x)=-25A\cos 5x-25B\sin 5x$$

جایگذاری در معادله مذکور : $-21A\cos 5x-21B\sin 5x=\cos 5x$

$$\Rightarrow A=-1/21\ ,\ B=0 \Rightarrow y_p(x)=-1/21\cos 5x$$

$$\Rightarrow y_G(x)=y_g(x)+y_p(x)$$

$$=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-1/21\cos 5x$$

(۲) $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$

$M(x)=0\ ,\ N(x)=x^2,\ q=2$

حل. $\underbrace{t^2+4=0}_{\text{معادله مشخصه نرم همگن}} \Rightarrow t_1, t_2 = \pm 2i \Rightarrow y_g(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$qi = 2i$ تعداد ریشه‌های در معادله مشخصه برابر $t=1$ است.

$T(x), S(x)$ و باید از درجه ۲ باشد.

$$\Rightarrow y_p(x) = x\left((ax^2+bx+c)\cos 2x + (dx^2+ex+f)\sin 2x\right)$$

$$= (ax^3+bx^2+cx)\cos 2x + (dx^3+ex^2+fx)\sin 2x$$

با محاسبه $y_p'(x)$ و $y_p''(x)$ و جایگذاری در معادله (۲)، مقادیر a, b, c و d, e, f را به دست می‌آوریم:

$a = -1/12\ ,\ d=0\ ,\ b=0\ ,\ e=1/16\ ,\ c=1/32\ ,\ f=0$

$$\Rightarrow y_p(x) = (-1/12\, x^3 + 1/32\, x)\cos 2x + (1/16\, x^2 \sin 2x)$$

$$\Rightarrow y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

$$= (-1/12\, x^3 + 1/32\, x + c_1)\cos 2x + (1/16\, x^2 + c_2)\sin 2x$$

۴) فرض کنیم $R(x) = e^{px}(M(x)\cos(qx) + N(x)\sin(qx))$ که در آن $N(x), M(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌هایی از درجه مثلاً m و n باشند. در اینحالت، y_p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_p(x) = e^{px}(T(x)\cos(qx) + S(x)\sin(qx))x^t$$

که در آن $T(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای کامل از درجه $\max\{m,n\}$، t تعداد دفعات تکرار ریشه‌ی $p+qi$ در معادله مشخصه است.

مثال/ جواب خصوصی معادلات زیر را به دست آورید:

(1) $y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x}\sin x$

e^{2x}, $(p=2)$, $M(x)=0$, $N(x)=(x+2)$, $q=1$

حل: $\underbrace{t^2 - 4t + 5 = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow t_1, t_2 = 2 \pm i$

$$\Rightarrow y_g(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

تعداد دفعات تکرار ریشه $p+qi = 2+i$، برابر $t=1$ است، $S(x), T(x)$ باید از درجه یک باشند

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{2x}x((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x)$$

حال y'_p و y''_p را محاسبه کرده و با جایگذاری y_p، y'_p و y''_p در (1) داریم:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + d = 0 \\ -4a = 1 \\ 2(c-b) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ a = -1/4 \\ b = -1 \\ d = 1/4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y_G(x) = y_p(x) + y_g(x)$$
$$= xe^{2x}\left((-1/4\,x - 1)\cos x + 1/4 \sin x\right) + e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin x)$$

(۲) $y''' + y' = x^2 + 4\sin 2x + xe^{3x}$

حل: $\underbrace{t^3+t=0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow t_1=0\ ,\ t_2=i\ ,\ t_3=-i$

جواب عمومی معادله همگن $\Rightarrow y_g(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$

حال جواب خصوصی مربوط به x^2 را محاسبه می‌کنیم.

حالت (۱) $\underline{x^2}$

چندجمله‌ای کامل از درجه ۲ ، $m=1$ تعداد ریشه‌های صفر در معادله مشخصه

$$\Rightarrow y_{p_1} = x(ax^2+bx+c)$$

$$\Rightarrow y'_{p_1} = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y''_{p_1} = 6ax + 2b\ ,\ y'''_{p_1} = 6a$$

در (۲) به جای y''' و y' مقادیر به دست آمده را قرار می‌دهیم و متحد با x^2 قرار می‌دهیم:

$$6a + 3ax^2 + 2bx + c \equiv x^2$$

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 2b=0 \\ 6a+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=1/3\ ,\ b=0\ ,\ c=-2$$

$$\Rightarrow y_{p_1} = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x$$

حال جواب خصوصی مربوط به $4\sin 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

حالت (۳) $M(x)=0\ ,\ N(x)=4\ ,\ q=2$

$qi=2i$ در معادله مشخصه برابر است با تعداد ریشه‌های $t=0$ است. ، $S(x), T(x)$ باید از درجه ۰ باشند

$$y_{p_2} = (A_1\cos(2x) + B_1\sin(2x))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'_{p_2} = -2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x \\ y''_{p_2} = -4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x \\ y'''_{p_2} = 8A_1 \sin 2x - 8B_1 \cos 2x \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله (۲) و متحد قرار دادن با $6\sin 2x$

$$8A_1 \sin 2x - 8B_1 \cos 2x - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x \equiv 6 \sin 2x$$

$$\begin{cases} 6A_1 = 6 \\ -6B_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ B_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_{p_2} = \cos 2x$$

حال جواب خصوصی مربوط به xe^{3x} را می‌یابیم.

حالت (۲)

$M(x) = x$, $P = 3$

$m = 0$ تعداد ریشه‌های $P=3$ در معادله مشخصه ، چندجمله‌ای کامل از درجه 1

$$y_{p_3} = (A_2 x + B_2)\cdot e^{3x}$$

$$y'_{p_3} = 3e^{3x}(A_2 x + B_2) + A_2 e^{3x}$$

$$y''_{p_3} = 9e^{3x}(A_2 x + B_2) + 6A_2 e^{3x}$$

$$y'''_{p_3} = 27e^{3x}(A_2 x + B_2) + 27A_2 e^{3x}$$

با جایگذاری در معادله (۲) و متحد قرار دادن با xe^{3x}

$$27A_2 e^{3x} + 30e^{3x}(A_2 x + B_2) + A_2 e^{3x} \equiv xe^{3x}$$

$$\begin{cases} 30A_2 = 1 \\ 28A_2 + 30B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{30} \quad , \quad B_2 = -\frac{14}{450}$$

$$\Rightarrow y_{p_3} = \frac{1}{30} e^{3x}\left(x - \frac{14}{15}\right)$$

ص ۹۱ $\Rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$, $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$

حل چند حالت خاص در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

① فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت زیر باشد:

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (m<n)$$

در این صورت، این معادلات را با تغییر متغیر $p(x) := y^{(m)}(x)$ به معادله‌ای با مرتبه $n-m$ تبدیل کرده و حل می‌کنیم.

مثال / معادله زیر را حل کنید.

$$x y^{(4)} - y^{(3)} = 0$$

حل:
$n=4,\ m=3$
$p(x) = y^{(3)}(x)$

$$\Rightarrow x p' - p = 0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = p$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln x + c$$

$$\xrightarrow{exp} p = c_1 x \Rightarrow y^{(3)} = c_1 x \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{} y'' = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} y' = \frac{c_1}{6}x^3 + c_2 x + c_3$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} y = \frac{c_1}{24}x^4 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3 x + c_4$$

$$\Rightarrow y_g(x) = k_1 x^4 + k_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

۲) فرض کنیم معادله دیفرانسیل به صورت $F(y, y', y'')=0$

باشد. در این صورت با تغییر متغیر $y'=p$ معادله به صورت

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0$$

تبدیل می‌شود که با حل آن p برحسب y به صورت $p=g(y)$ خواهد شد. در نهایت با حل این معادله y بر حسب x به دست می‌آید.

$$y'=\frac{dy}{dx}=p, \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=y'\cdot dp/dy$$
$$=p\frac{dp}{dy}$$

مثال/ معادله زیر را حل کنید.

$$yy''+(y+1)y'^2=0$$

حل: $y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} yp\frac{dp}{dy}+(y+1)p^2=0$$

If $p\neq 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy}+(y+1)p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}+\frac{dy\,(y+1)}{y}=0$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p}=-(1+1/y)\,dy \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} \ln p=-y-\ln y+c_1$$

$$\Rightarrow p=1/y\, e^{-y}\cdot c_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}=c_3\, y e^{y} \xrightarrow{p=y'=dy/dx} dx=c_3\, \underbrace{y}_{u}\, \underbrace{e^{y}dy}_{dv}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال جزء به جزء می‌گیریم}} x+c_4=c_3(y-1)e^{y}$$

$$\Rightarrow (y-1)e^{y}=1/c_3\, x+\frac{c_4}{c_3}=K_1x+K_2$$

جواب عمومی

If $p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=c$

جواب غیرعادی

۳) معادلاتی که نسبت به y و y' و y'' همگن باشند، یعنی داشته باشیم $F(x,y,y',y'')=0$ هرگاه معادلات به فرم

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^n F(x,y,y',y''),$$

آنگاه با انتخاب $y=e^{\int z\,dx}$ (که در آن z تابعی مجهول برحسب x می‌باشد)، معادله دیفرانسیل مورد نظر به یک معادله مرتبه اول برحسب z تبدیل می‌شود.

مثال/ معادله زیر را حل کنید.

$$yy''-y'^2-4xy^2=0$$

حل: $F(x,y,y',y'')=yy''-y'^2-4xy^2$

$\Rightarrow F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2 F(x,y,y',y'')\Rightarrow$ پس معادله نسبت به y و y' و y'' همگن است.

$$y=e^{\int z(x)\,dx}\Rightarrow y'=z(x)\,e^{\int z(x)\,dx}=zy$$

y

$$\Rightarrow y''=z'y+zy'=(z'+z^2)y$$

zy

$\xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم}]{\text{در معادله اصلی}}$ $(z'+z^2)y^2-z^2y^2-4xy^2=0$

$y^2(z'+\cancel{z^2}-\cancel{z^2}-4x)=0$ ⟶ $y^2=0\Rightarrow y=0$ جواب غیرعادی (تکین)

⟶ $z'-4x=0$

$$\Rightarrow z'=4x\xrightarrow{\text{انتگرال}}z(x)=2x^2+c_1$$

$$\Rightarrow y=e^{\int z(x)\,dx}=e^{\int(2x^2+c_1)dx}=e^{x^3+c_1x+c_2}=e^{x^3+c_1x}\times e^{c_2}$$

$$y_g(x)=c_3\,e^{x^3+c_1x}$$

تمرین: معادله دیفرانسیل

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

را حل کنید.

پاسخ: جواب عمومی: $y = \dfrac{c_2}{\cos^2(x + c_1)}$.

(۴) معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$ کامل باشد، یعنی

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$$

آنگاه داریم

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)y' + (Q(x) - P'(x))y\right) = f(x)$$

با انتگرال‌گیری

$$P(x)y' + (Q(x) - P'(x))y = \int f(x)\,dx + c$$

که تبدیل به یک معادله خطی مرتبه اول برحسب y

مثال/ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\underbrace{(x^2-2x)}_{P}\, y'' + \underbrace{4(x-1)}_{Q}\, y' + \underbrace{2}_{R}\, y = \underbrace{e^{2x}}_{f}$$

حل:

$$P'' - Q' + R = (2 - 4 + 2) = 0 \Rightarrow$$ معادله کامل است

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left((x^2-2x)y' + (4x - 4 - 2x + 2)y\right) = e^{2x}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} (x^2-2x)y' + (2x-2)y = \tfrac{1}{2}e^{2x} + c_1$$

$$y' + \overbrace{\frac{2x-2}{x^2-2x}}^{p(x)}\, y = \overbrace{\frac{e^{2x} + c_1}{2(x^2-2x)}}^{q(x)}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx = \ln(x^2-2x)} = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow y_g = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, q(x)\, dx + c\right] = \frac{1}{x^2-2x}\left[\tfrac{1}{2}\int (e^{2x} + c_1)\, dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x^2-2x}\left(\tfrac{1}{4}e^{2x} + c_2 x + C\right)$$

معادله دیفرانسیل کوشی ـ اویلر :

صورت کلی این معادله به فرم

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

یا

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = f(x)$$

می باشد که در آن a ، b و a_i ها $(0 \leq i \leq n-1)$ اعدادی ثابت هستند.

که به ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای $x = e^t$ و $ax+b = e^t$ تبدیل به یک معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت می شوند.

حال حل این نوع معادلات را ، برای معادله کوشی ـ اویلر مرتبه دوم ارائه می دهیم.

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{dt}{dx}\right)}_{1/x} \frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

حال با جایگذاری y'' و y' در معادله اصلی داریم

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - 1) \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t)$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت است .

معادله مشخصه

در حالت همگن

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0$$

که سه حالت را در نظر می گیریم :

۱) $(\Delta>0)$ اگر λ_1 و λ_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله مشخصه باشند، آن گاه

$$y_g(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xRightarrow{t=\ln x} y_g(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

۲) $(\Delta=0)$. اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ریشه مضاعف معادله مشخصه باشند، آن گاه

$$y_g(x) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \xRightarrow{t=\ln x} y_g(x) = c_1 x^{\lambda} + c_2 \ln x \,.\, x^{\lambda}$$

۳) $(\Delta<0)$ اگر $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ و $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ریشه‌های مختلط معادله مشخصه باشند، آن گاه

$$y_g(x) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right)$$

$$\xRightarrow{t=\ln x} y_g(x) = x^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right)$$

در نهایت :

$y_G = y_g + y_p$ جواب عمومی معادله مذکور

مثال/ معادلات زیر را حل کنید.

(۱) $x^2y'' + xy' - y = 0$ $\quad a_1 = 1 \quad a_0 = -1$

معادله کوشی اویلر مرتبه ۲ $\quad x = e^t$

معادله مشخصه فرم همگن: $\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 0\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

(۲) $x^3 y'' - 2xy = 4\ln x$

حل: $(*)\ x^2 y'' - 2y = \dfrac{4\ln x}{x}$ $\quad a_1 = 0, a_0 = -2$ $\quad$ معادله کوشی اویلر ناهمگن مرتبه ۲ $\quad (x = e^t)$

معادله مشخصه فرم همگن

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$= c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$$

با جایگذاری $x = e^t$ در معادله * y'' و y' داریم: $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + (\underset{0}{a_1} - 1)\dfrac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t)$

$$(D^2 - D - 2)y = 4te^{-t}$$

$$\Rightarrow y_p = t(At + B)e^{-t} = (At^2 + Bt)e^{-t}$$

$\dfrac{dy}{dt} = Dy \Leftarrow y_p' = (-At^2 + (2A - B)t + B)e^{-t}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = D^2y \quad y_p'' = (At^2 + (B - 4A)t + (2A - 2B))e^{-t}$

ص ۹۸ $\Rightarrow (D^2 - D - 2)y = (-6At + 2A - 3B)e^{-t} = 4te^{-t}$

$$\Rightarrow \quad A=-1 \,, \quad B=-۲/۳$$

$$y_p = -(t^۲ + ۲/۳\, t)\, e^{-t}$$

$$= -(\ln^۲ x + ۲/۳ \ln x)\ ۱/x$$

$$\Rightarrow y_G = y_p + y_g$$

$$= \frac{-\ln^۲ x - ۲/۳ \ln x}{x} + c_۱ x^۲ + ۱/x\, c_۲ .$$

تمرین: معادله دیفرانسیل

$$(۱+x)^۲ y'' + (۱+x) y' + y = ۲ \cos(\ln(x+۱))$$

را حل کنید.

پاسخ:

$$y_G(x) = c_۱ \cos(\ln(۱+x)) + c_۲ \sin(\ln(۱+x)) + \ln(۱+x) \sin(\ln(۱+x))$$

ادامه جزوه معادلات

سمیه پیراوفا

یادآوری :

تعریف: فرض کنید a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... یک دنباله از اعداد حقیقی باشند، در این صورت مجموع جملات این دنباله که با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهند را یک سری نامتناهی می‌نامیم و a_n را جمله عمومی این سری می‌گوییم. مجموع n جمله اول این سری یعنی

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

را مجموع جزئی nام سری می‌گویند. اگر دنباله S_n همگرا به عددی مانند ℓ باشد اصطلاحاً می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به ℓ همگرا است و اگر S_n واگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

دقت کنید به این دسته از سری‌ها، سری عددی می‌گوییم.

قضیه: (شرط لازم همگرایی سری‌ها): اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

تعریف: هرگاه جمله عمومی یک سری تابعی به صورت $a_n(x-x_0)^n$ باشد، به آن سری، سری توانی می‌گوییم. یعنی یک سری توانی به صورت

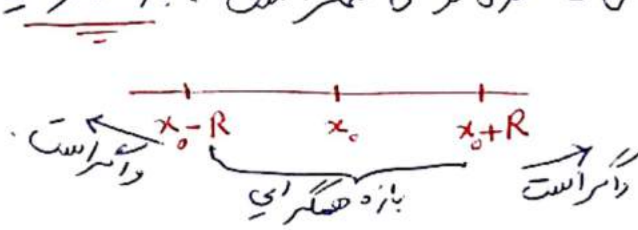
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

که در آن a_i ها و x_0 اعداد حقیقی می‌باشند.

دقت کنید x_0 را مرکز همگرایی سری و a_n را ضرایب سری توانی گوییم.

تعریف: فرض کنید $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ یا $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ وجود داشته باشد یا ∞ شود، در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ دارای شعاع همگرایی $R = 1/L$ می‌باشد.

به علاوه مجموعه مقادیر x که به ازای آن‌ها سری توانی همگرا است، بازه همگرایی سری توانی نامیده می‌شود.



$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{یا} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

قضیه: فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ یک سری توانی باشد. در این صورت $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ موجود است به طوری که

الف) به ازای هر x ای که $|x-x_0|<R$ سری توانی به طور مطلق همگرا است و به ازای هر x ای که $|x-x_0|>R$ سری توانی واگرا است.

ب) اگر $R=+\infty$، آن‌گاه سری توانی به ازای هر عدد حقیقی x همگرا است.

ج) اگر $R=0$، آن‌گاه سری توانی فقط در $x=x_0$ همگرا است.

تذکر: بعد از یافتن شعاع همگرایی و بازه همگرایی برای سری توانی فوق، باید وضعیت نقاط مرزی را به طور جداگانه به کمک آزمون‌های همگرایی بررسی کرد.

مثال/ شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{1}{n2^n} \quad , \quad x_0 = -1$$

$$\text{شعاع همگرایی}: R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2$$

$$\Rightarrow |x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2 \Rightarrow -3<x<1$$

$$\text{if } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \Rightarrow \text{واگرا است}$$

$$\text{if } x=-3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{آزمون سری متناوب}} \text{همگرا است}$$

بازه همگرایی $[-3,1)$

قضیه: اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ بر بازه (x_0-R, x_0+R) همگرا باشد، آن‌گاه f بر این بازه مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \quad (|x-x_0|<R)$$

به همین ترتیب: $$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n (x-x_0)^{n-2} \quad (|x-x_0|<R)$$

تعریف: اگر $f(x)$ در نقطه $x=x_0$ از همه مرتبه‌هایش مشتق‌پذیر باشد، یعنی $f^{(n)}(x_0)$ $(n=0,1,2,\dots)$ موجود باشد آن‌گاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

را سری تیلور f حول نقطه $x=x_0$ گویند و اگر $x_0=0$، آن را سری مک‌لوران تابع f گویند.

تعریف: نقطه x_0 را نقطه تحلیلی تابع $f(x)$ می‌نامیم هرگاه تابع $f(x)$ در x_0 بسط تیلور داشته باشد و ضمناً در حوالی x_0، بسط تابع با خود تابع برابر باشد.

(e^x، $\sin x$ و $\cos x$ و چندجمله‌ای‌های از درجه n در هر نقطه از اعداد حقیقی تحلیلی‌اند)

قضیه: اگر در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = P_3(x)$$

توابع P_1، P_2 و P_3 هرسه در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند، آن‌گاه هر جواب این معادله در نقطه $x=x_0$ تحلیلی خواهد بود.

(یعنی به صورت سری توانی (تیلور) قابل نمایش است)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

در واقع a_n ها مجهول‌اند و باید آنها را محاسبه کنند.

دقت کنید که هدف اصلی در این بخش، حل دو معادله دیفرانسیل مهم زیر می باشد:

معادله لژاندر: $(m \in \mathbb{R})$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

معادله بسل: $(\nu \in \mathbb{R})$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

($P_1, P_2, P_3 \Rightarrow$ چندجمله‌ای)

تعریف: x_0 را نقطه عادی (معمولی) برای معادله

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

گوییم، هرگاه $P_1(x_0) \neq 0$، در غیر این صورت x_0 را نقطه تکین (غیرعادی، منفرد) معادله دیفرانسیل فوق گوئیم. (اگر توابع $\frac{P_2}{P_1}$ و $\frac{P_3}{P_1}$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه x_0 نقطه عادی این معادله است)

حال قضیه زیر را که از قضیه بیان شده در صفحه قبلی، ضعیف‌تر است و جوابگوی حل دو معادله دیفرانسیل مهم این بخش است را بیان خواهیم کرد.

قضیه: فرض کنید x_0 یک نقطه عادی برای معادله‌ی

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

باشد، آنگاه جواب عمومی معادله مذکور برحسب یک سری توانی حول $x = x_0$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \overset{a_0}{\alpha}\, y_0(x) + \overset{a_1}{\beta}\, y_1(x)$$

که در آن y_0 و y_1 دو سری توانی مستقل خطی حول x_0 هستند. دقت کنید که شعاع همگرایی این دو سری، برابر است با مینیمم شعاع همگرایی سری‌های $\frac{P_3(x)}{P_1(x)}$ و $\frac{P_2(x)}{P_1(x)}$ حول x_0.

تذکر: معمولاً در مسائل x_0 را صفر اختیار می‌کنیم مگر آنکه مقدار دیگری برای آن داده شده باشد.

برای تعیین a_nها:
- روش مستقیم
- روش مشتقات متوالی

ص ۲۶۶
Boyce

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

معادله دیفرانسیل
x_0 نقطه معمولی نامیده می‌شود هرگاه
توابع $\frac{P_2}{P_1}$ و $\frac{P_3}{P_1}$ در x_0
تحلیلی باشند.

مثال / آیا نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل

$$\underbrace{(1-x^2)}_{P_1} y'' - \underbrace{2x}_{P_2} y' + \underbrace{}_{P_3} y = 0$$

می‌باشد ؟

$P_1(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ لذا صفر نقطه عادی این معادله است

یا

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{1}{1-x^2} y = 0$$

حال چون توابع $\frac{1}{1-x^2}$ و $\frac{-2x}{1-x^2}$ در $x_0 = 0$ تحلیلی‌اند بنابراین $x_0 = 0$ نقطه عادی این معادله دیفرانسیل است . به علاوه $x = \pm 1$ نقطه غیرعادی یا منفرد این معادله دیفرانسیل است.

مثال/ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''(x) + y(x) = 0$ را به روش سری توانی به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، مجموعه نقاط عادی این معادله دیفرانسیل است.

$(P_1(x) = 1 \ , \ \forall x \ \ P_1(x) \neq 0 \ \Rightarrow$ مجموعه نقاط عادی $= \mathbb{R})$

پس برای هر x_0 دلخواه می توان جواب را استخراج کرد. اما برای راحتی قرار می دهیم $x_0 = 0$.

طبق قضایای بیان شده معادله دارای یک جواب برحسب سری توانی حول $x=0$ است، یعنی

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

با روش مستقیم ضرایب a_n ها را محاسبه می کنیم.

$$\Rightarrow \ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

برای اینکه بتوانیم a_i ها را محاسبه کنیم، باید اندیس پایین هر دو سری را یکسان کنیم، در ضمن توان x هم باید یکسان شود. لذا با تغییر اندیس $n \longrightarrow n+2$ در سری اول داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

حال که اندیس پایین سری و توان x یکی شدند، داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n \right) x^n = 0$$

چون برای هر x رابطه فوق برقرار است، پس برای هر n، ضریب x^n باید صفر باشد یعنی

$$\forall n \geq 0 \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

به رابطه به دست آمده رابطه بازگشتی می گوییم. چون مقادیر a_i به مقادیر قبل آن وابسته است، یعنی می توانیم برای $n = 0, 1, 2, \dots$ مقادیر a_n ها را محاسبه کنیم.

$$n=0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2\times 1} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3\times 2} = -\frac{a_1}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4\times 3} \xrightarrow[a_2 = -\frac{a_0}{2!}]{\text{جایگذاری}} +\frac{a_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5\times 4} \xrightarrow[a_3]{\text{با جایگذاری}} \frac{a_1}{5!}$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6\times 5} \xrightarrow[a_4]{\text{جایگذاری}} -\frac{a_0}{6!}$$

به همین ترتیب مقادیر a_i محاسبه می‌شوند. لذا جواب این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 - \cdots$$

$$= a_0 \overbrace{\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}_{R=\infty}}^{y_0(x)} + a_1 \overbrace{\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}_{R=\infty}}^{y_1(x)}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

$$\Rightarrow R_{y_g} = \infty$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق $y_g = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ می‌باشد.

مثال/ معادلات زیر را به روش سری توانی حول نقطه x_0 داده شده، حل کنید.

① $y'' - xy' - y = 0 \,, \qquad x_0 = 0$

② $y'' - xy = 0 \,, \qquad x_0 = 1$

حل: ① $x_0 = 0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مذکور است، پس جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برحسب یک سری توانی حول $x_0 = 0$ می‌باشد، یعنی

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

در این صورت داریم:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله ① داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \underbrace{x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

برای حل:

در سری اول تغییر اندیس نیاز داریم: $(n \to n+2)$ در این صورت توان x، n می‌شود و اندیس پایه سری، صفر خواهد شد.

در سری دوم اگر بخواهیم اندیس پایه سری از صفر شروع شود توان x به $n+1$ تبدیل می‌شود و مشکل ایجاد می‌کند.

اما دقت کنید اگر در سری دوم به جای $n=1$، $n=0$ قرار دهیم، چون جمله اول سری دوم به ازای $n=0$، صفر خواهد بود مجموع سری تغییری نمی‌کند. لذا با این تفاسیر داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n\Big)x^n=0$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 0 \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n=0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{a_n}{n+2} \quad n\geq 0}$$

$$n=0 \Rightarrow a_2=\frac{a_0}{2}$$
$$n=1 \Rightarrow a_3=\frac{a_1}{3}$$
$$n=2 \Rightarrow a_4=\frac{a_2}{4}=\frac{a_0}{4\times 2}$$
$$n=3 \Rightarrow a_5=\frac{a_3}{5}=\frac{a_1}{5\times 3}$$
$$n=4 \Rightarrow a_6=\frac{a_4}{6}=\frac{a_0}{6\times 4\times 2}$$
$$n=5 \Rightarrow a_7=\frac{a_5}{7}=\frac{a_1}{7\times 5\times 3}$$
$$, \dots$$

بنابراین جواب حول $x_0=0$ عبارت است از:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$
$$=a_0+a_1x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_1}{3}x^3+\frac{a_0}{4\times 2}x^4+\dots$$
$$=a_0\Big(1+\underbrace{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\times 2}+\frac{x^6}{6\times 4\times 2}+\dots}_{y_0(x)}\Big)+a_1\Big(\underbrace{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\times 3}+\dots}_{y_1(x)}\Big)$$

شعاع همگرایی $R_0=\infty$

$R_1=\infty$

$R_{y_g}=\infty$

تذکر: برای نوشتن جواب حول نقطه $x_0\neq 0$ برای سهولت قرار می‌دهیم

$$x-x_0=t$$

و مسأله را حل می‌کنیم.

$$y'' - xy = 0 \quad , \qquad x_0 = 1$$

حل: ②

$x_0=1$ یک نقطه عادی برای معادله فوق است لذا جواب عمومی این معادله به صورت یک سری توانی حول $x_0=1$ است، یعنی

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$\xrightarrow[x=1+t]{x-1=t} \quad y_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow y'_t = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y''_t = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$y''(x) - xy(x) = 0 \xrightarrow{x=1+t} y''_t - (t+1) y_t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - (t+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

حال برای اینکه توان های سری اول و سوم که با سری دوم برابر نیستند را حل کنیم جملات اول سری اول و سوم را می نویسیم:

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n+2)(n+1) a_{n+2}}_{n \to n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{n \to n+1} t^n = 0$$

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow (2a_2 - a_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n - a_{n+1} \right) t^{n+1} = 0$$

بنابراین

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 1/2\, a_0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n - a_{n+1} = 0, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

$$n=0 \Rightarrow 4a_3 - a_0 - a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \tfrac{1}{4}(a_0 + a_1)$$

$$n=1 \Rightarrow 12a_4 - a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \tfrac{1}{12}(a_1 + a_2)$$

$$= \tfrac{1}{12}(a_1 + \tfrac{1}{2}a_0)$$

$$= \tfrac{1}{12}a_1 + \tfrac{1}{24}a_0$$

$\vdots$

بنابراین

$$y_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 t + (\tfrac{1}{2}a_0)t^2 + \tfrac{1}{4}(a_0 + a_1)t^3 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + t^2/2 + t^3/4 + \frac{t^4}{24} + \cdots\right) + a_1\left(t + \tfrac{1}{4}t^3 + \tfrac{1}{12}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \cdots\right)$$

$$t = x - 1$$

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots\right) + a_1\left((x-1) + \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots\right)$$

تذکر: برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل حول نقطه عادی x_0 به روش مشتقات متوالی، چون می‌دانیم جواب معادله دیفرانسیل یعنی $y(x)$ حول نقطه x_0 دارای بسط تیلوری باشد

یعنی

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

بنابراین چنانچه بتوان $y(x_0)$ ، $y'(x_0)$ و $y''(x_0)$ و ... را به دست آوریم، جواب معادله دیفرانسیل حاصل می‌شود، که این روش با مشتق‌گیری مستقیم از معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود. (معمولا از این روش زمانی استفاده می‌شود که معادله با شروط اولیه داده شده باشد)

مثال / معادله دیفرانسیل

$$(*)\quad (1-x^2)y''-5xy'-3y=0 \qquad y(0)=1\ ,\ y'(0)=1$$

را حل کنید.

صفر یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل فوق می‌باشد. بنابراین جواب این معادله دیفرانسیل حول نقطه $x_0=0$ دارای بسط تیلور زیر است:

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+y''(0)\frac{x^2}{2!}+y'''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

در معادله اصلی

$$\xRightarrow{x=0}\quad (1-0)y''(0)-5\times0\times\underbrace{y'(0)}_{1}-3\underbrace{y(0)}_{1}=0$$

$$y''(0)=3$$

از معادله (*) مشتق می‌گیریم:

$$-2xy''+(1-x^2)y'''-5y'-5xy''-3y'=0$$

$$\xRightarrow{x=0}\quad 0+y'''(0)-5\underbrace{y'(0)}_{1}-0-3\underbrace{y'(0)}_{1}=0$$

$$\Rightarrow y'''(0)=8 \quad ,\ \ldots$$

$$\Rightarrow\quad y(x)=1+x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\cdots$$

حل چند نمونه معادله دیفرانسیل به کمک سری های توانی

مثال/ معادلات زیر را به کمک سری های توانی حل کنید.

(1) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

حل (1): فرض کنیم معادله دارای جوابی به فرم سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ باشد.

قرار می دهیم $\underset{\text{با توجه به شرط اولیه}}{\underline{x_0 = 0}}$. به علاوه می دانیم $\underset{\text{با توجه به شرط اولیه}}{\underline{a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}}}$. لذا

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$y' = x^2 + y^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'' = 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 2\times 0 + 2\underbrace{y(0)}_{1}\underbrace{y'(0)}_{1}$$

$$y'(0) = 0 + (\underbrace{y(0)}_{1})^2 \Rightarrow \boxed{y'(0) = 1} \qquad \Rightarrow \boxed{y''(0) = 2}$$

و ...

بنابراین جواب معادله به فرم

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

می باشد.

(2) $\begin{cases} y' - ye^x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$x=0$ نقطه عادی این معادله است زیرا جواب در $x=0$ تحلیلی است.

حل (2): فرض کنیم معادله جوابی به فرم زیر باشد:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$y'(x) - y(x)e^x = 0 \Rightarrow y'(0) - \underbrace{y(0)}_{1}e^0 = 0 \Rightarrow \boxed{y'(0) = 1}$$

$$y''(x) - y'(x)e^x - y(x)e^x = 0 \Rightarrow y''(0) - \underbrace{y'(0)}_{1}e^0 - \underbrace{y(0)}_{1}e^0 = 0$$

$$\Rightarrow y''(0) = 2$$

با ادامه فرآیند داریم:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{15}{24}x^4 + \dots$$

($\sin x$ و e^x در صفر تحلیلی‌اند .)

③ $y'' + y'\sin x + e^x y = 0$

حل ③ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق به صورت

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

می باشد.

$$y''(0)+y'(0)\underbrace{\sin 0}_{0}+\underbrace{e^0}_{1}y(0)=0 \Rightarrow \boxed{y''(0)=-y(0)}$$

مشتق می‌گیریم

$$y''' + y''\sin x + y'\cos x + e^x y + e^x y' = 0$$

$$y'''(0) + \underbrace{y''(0)}_{-y(0)}\underbrace{\sin 0}_{0} + y'(0)\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{e^0}_{1} y(0) + \underbrace{e^0}_{1} y'(0) = 0$$

$$y'''(0) + 2y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2y'(0) - y(0)$$

با ادامه این روند جواب معادله دیفرانسیل برحسب $y(0)$ و $y'(0)$ خواهد بود:

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}\underbrace{y''(0)}_{-y(0)}+\frac{x^3}{3!}\underbrace{y'''(0)}_{-2y'(0)-y(0)}+\cdots$$

$$\Rightarrow y(x) = y(0)\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\cdots\right)+y'(0)\left(x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\cdots\right)$$

The Legender Equation:

(تمرینات فصل ۵، بخش ۳ کتاب بویس 5.3)

معادله لژاندر:

$$(*) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

چون $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مذکور است، لذا این معادله دارای جواب به فرم زیر است:

$$y_g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad y_g' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y_g'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری در معادله لژاندر (*)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

n=0 یا n=1 ⇐ جمله اول صفر — جمله اول صفر

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2n a_n + \alpha(\alpha+1)a_n \Big) x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2n a_n + \alpha(\alpha+1)a_n = 0$$

$$-\alpha(\alpha+1) + 2n + n(n-1) = -\alpha^2 - \alpha \underbrace{-\alpha n}_{\text{از } \alpha \text{ فاکتورگیری}} + n^2 + n \underbrace{+\alpha n}_{\text{از } n \text{ فاکتورگیری}}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2!} a_0$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{-(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-(\alpha-2)(\alpha+3)}{12} a_2 = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}a_1$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{-(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}a_0$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow y_g = \overbrace{a_0\left(1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4+\cdots\right)}^{y_0} \qquad (|x|<1 \quad (R=1))$$

$$+\underbrace{a_1\left(x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5+\cdots\right)}_{y_1}$$

دقت کنید که در اغلب مسائل کاربردی، پارامتر α یک عدد صحیح نامنفی است. حال فرض می‌کنیم $\alpha = n \in \mathbb{N}$،

- اگر n عددی زوج باشد، y_0 تبدیل به یک چندجمله‌ای از درجه n می‌شود.
- اگر n عددی فرد باشد، y_1 تبدیل به یک چندجمله‌ای از درجه n می‌شود.

y_0 و y_1 چندجمله‌ای‌های لژاندر

$$n=0 \Rightarrow L_0(x)=a_0$$

$$n=2 \Rightarrow L_2(x)=a_0-a_0\frac{2\times(2+1)}{2!}x^2=a_0(1-3x^2)$$

$$n=4 \Rightarrow L_4(x)=a_0\left(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right)$$

$$\vdots$$

$$n=1 \Rightarrow L_1(x)=a_1x$$

$$n=3 \Rightarrow L_3(x)=a_1\left(x-\frac{(3-1)(3+2)}{3!}x^3+0\cdots\right)$$
$$=a_1\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$$

$$n=5 \Rightarrow L_5(x)=a_1\left(x-\frac{14}{3}x^3+\frac{63}{15}x^5\right)$$

$$\vdots$$

در حالت کلی زمانی که α عددی طبیعی نباشد، دو جواب y_0 و y_1 به فرم سری نامتناهی هستند. اگر α یک عدد طبیعی باشد، آنگاه یک جواب به صورت یک چندجمله‌ای از درجه α و دیگری همچنان یک سری نامتناهی است. جواب از معادله دیفرانسیل لژاندر که به صورت یک چندجمله‌ای از درجه n است را چندجمله‌ای لژاندر می‌نامند و با $L_n(x)$ نمایش می‌دهند.

در چند جمله‌ای لژاندار ضرایب a_0 و a_1 را طوری می‌یابیم که $L_n(1)=1$.

$$L_0(1)=1 \Rightarrow a_0 = L_0(1) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$L_2(1)=1 \Rightarrow L_2(1) = a_0(1-3\times 1^2) = -2a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = -1/2$$

$$L_4(1)=1 \Rightarrow L_4(1) = a_0\left(1-10+\frac{35}{3}\right) = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{3}{4\times 2}$$

$\vdots$

$$a_0 = \begin{cases} 1, & n=0 \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\times 3\times \cdots \times (n-1)}{2\times 4\times \cdots \times n}, & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$L_1(1)=1 \Rightarrow L_1(1) = a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$L_3(1)=1 \Rightarrow a_1 = -3/2$$

$$L_5(1)=1 \Rightarrow a_1 = \frac{3\times 5}{4\times 2}$$

$\vdots$

$$a_1 = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\times 3\times \cdots \times n}{2\times 4\times \cdots \times (n-1)}, & n=3,5,7,\ldots \end{cases}$$

لذا

$L_0(x)=1$, $L_1(x)=x$

$L_2(x) = -1/2\,(1-3x^2)$, $L_3(x) = -3/2\,(x - 5/3\, x^3)$

, ,

$\vdots$ $\vdots$

خواص چندجمله‌ای های لژاندر :

۱- به ازای n های زوج ، $L_n(x)$ تابعی زوج و به ازای n های فرد ، $L_n(x)$ تابعی فرد است.

۲- $L_n(x)$ در بازه $(-1,1)$ دقیقاً دارای n ریشه حقیقی و متمایز است.

۳- به ازای n های فرد ، $L_n(0)=0$ و به ازای n های زوج $L_n'(0)=0$.

۴- چندجمله‌ای های $L_n(x)$ در بازه $(-1,1)$ دو به دو برهم عمودند : صفحه ۳۲۱ دکتر نیکوکار اثبات شده است.

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,L_m(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

تعامد چندجمله‌ای های لژاندر :
(صفحه ۳۲۰ دکتر نیکوکار تعریف تعامد)

مثال / $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_1(x)L_2(x)\,dx \overset{\text{طبق خاصیت}}{\underset{\text{تعامد}}{=\!=}} 0$

بدون خاصیت تعامد : $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_1(x)\,L_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{x \times \tfrac{1}{2}(3x^2-1)}_{\text{تابع فرد}}\,dx = 0$

مثال / $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_2(x)L_0(x)\,dx = 0$ (خاصیت تعامد)

بدون خاصیت تعامد $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_2(x)L_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\tfrac{1}{2}(3x^2-1) \times 1}_{\text{تابع زوج}}\,dx = 2\int_{0}^{1} \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = 0$

مثال / $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_1(x)\,L_1(x)\,dx = \frac{2}{3}$ (خاصیت تعامد)

بدون خاصیت تعامد $\displaystyle\int_{-1}^{1} (L_1(x))^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3$

(Rodrigues's formula)

۵- فرمول رودریگز :

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

$(n=0,1,2,3,\dots)$

(اثبات در ص ۳۱۲ / دکتر نیکوکار)

۶- رابطه بازگشتی زیر برای $L_n(x)$ برقرار است :

$$\begin{cases}(n+1)\,L_{n+1}(x)=(2n+1)\,x\,L_n(x)-n\,L_{n-1}(x) & (n\in\mathbb{N})\\ L_0(x)=1\\ L_1(x)=x\end{cases}$$

به طور مثال :

$$n=1 \Rightarrow 2\,L_2(x)=3x\,\underbrace{L_1(x)}_{x}-\underbrace{L_0(x)}_{1}$$

$$\Rightarrow L_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

۷- (بسط لژاندار) فرض کنید تابع f قطعه‌ای هموار بر بازه $[-1,1]$ باشد (f و مشتق آن قطعه‌ای پیوسته باشند)، در این صورت این تابع را می‌توان برحسب چند جمله‌ای های لژاندار بسط داد . به بیان دیگر می‌توان نوشت :

(سری فوریه) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,L_n(x)$$

که در آن

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,L_n(x)\,dx$$

اثبات : طرفین سری فوریه را در $L_m(x)$ ضرب کرده و بعد انتگرال می‌گیریم .

مثال/ چندجمله‌ای $f(x)=x^2+2x+1$ را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بیان کنید.

حل: چون f یک چندجمله‌ای از درجه ۲ است، لذا

$$f(x)=x^2+2x+1=c_0L_0(x)+c_1L_1(x)+c_2L_2(x)$$

با استفاده از فرمول بسط لژاندر، ضرایب c_0، c_1 و c_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$n=0 \Rightarrow c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\times 1\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_0=\frac{4}{3}}$$

$$n=1 \Rightarrow c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\times x\,dx=2 \Rightarrow \boxed{c_1=2}$$

$$n=2 \Rightarrow c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\times\left(\frac{1}{2}(3x^2-1)\right)dx=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{c_2=\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=\frac{4}{3}+2x+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

راه حل دوم: $f(x)=x^2+2x+1=c_0L_0(x)+c_1L_1(x)+c_2L_2(x)$

طرفین را در $L_i(x)$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم و از خواص تعامد استفاده می‌کنیم. به طور مثال/

$$\int_{-1}^{1}f(x)\underbrace{L_0(x)}_{1}dx=\underbrace{\int_{-1}^{1}c_0(L_0(x))^2dx}_{\frac{2}{2n+1}\Big|_{n=0}=2}+\underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1}c_1L_0(x)L_1(x)dx}}_{0}+\underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1}c_2L_0(x)L_2(x)dx}}_{0}$$

$$\frac{8}{3}=2c_0 \Longrightarrow c_0=\frac{4}{3}$$

مثال/ دو ضریب اول سبط لژاندر تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & -1<x<0 \end{cases}$ را بیابید.

حل: با استفاده از فرمول سبط لژاندر داریم:

$$c_0 = \frac{2\times 0+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, \underbrace{L_0(x)}_{1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int_{-1}^{0} 0\times 1\, dx}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{1} 1\times 1\, dx}_{x|_0^1=1}\Big] = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{2\times 1+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, \underbrace{L_1(x)}_{x}\, dx = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \cdots$$

سؤال/ آیا می‌توان جواب معادله $y' = \frac{1}{x}$ را به فرم سری توانی برحسب توان‌های x بیان کرد؟

حل: فرض کنیم معادله دارای جواب به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ باشد در این صورت

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow[xy'=1 \text{ داریم}]{\text{با جایگذاری در معادله}} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 1$$

$$a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots = 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 2a_2 = 3a_3 = \cdots = 0 \\ 1 = 0 \quad \times \end{cases}$$

بنابراین این معادله دارای جوابی برفرم سری توانی برحسب توان‌های x نیست.

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x} \xrightarrow[\text{میگیریم}]{\text{انتگرال}} y = \ln|x| + c$$

$\frac{1}{x}$ در $x=0$ تحلیلی نیست

انواع نقاط تکین (منفرد) : تکین منظم / تکین نامنظم

تعریف: نقطه x_0 را یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$ (x_0 نقطه غیرعادی (تکین))

گوییم هرگاه $P(x_0)=0$ و توابع $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ در $x=x_0$ تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از توابع مذکور در x_0 تحلیلی نباشد، x_0 نقطه تکین نامنظم می باشد.

(در حالت کلی فرض کنیم x_0 : نقطه غیرعادی (تکین) معادله دیفرانسیل

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y = f(x)$$

باشد، در این صورت چنانچه توابع

$$\begin{cases} (x-x_0)P_1(x) \\ (x-x_0)^2 P_2(x) \\ (x-x_0)^2 f(x) \end{cases}$$

در نقطه x_0 تحلیلی و دارای بسط تیلور باشند، آنگاه x_0 نقطه تکین (غیرعادی) منظم معادله مذکور است. و چنانچه حداقل یکی از توابع یادشده در $x=x_0$ بسط تیلور نداشته باشد، نقطه مذکور، نقطه منفرد نامنظم می باشد)

مثال/ آیا نقطه $x_0=-2$ یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل

$$\underbrace{(x+2)^2}_{P} y'' + \underbrace{(x^2-4)}_{Q} y' + \underbrace{2x}_{R} y = 0$$

می باشد؟

حل: دقت کنید $x_0=-2$ نقطه عادی معادله مذکور نیست. (زیرا $P(-2)=0$).

حال چون توابع:

$$\begin{cases} (x+2)\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2} = x-2 \\ (x+2)^2 * \dfrac{2x}{(x+2)^2} = 2x \end{cases}$$

در $x_0=-2$ تحلیلی اند، لذا $x_0=-2$ یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیل مذکور می باشد.

تعریف حدی نقطه منفرد منتظم: اگر در معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$P(x_0) = 0$ و هر دو حدود زیر

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \dfrac{Q(x)}{P(x)} \\ \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \dfrac{R(x)}{P(x)} \end{cases}$$

موجود و متناهی باشند، x_0 یک نقطه تکین منتظم برای معادله دیفرانسیل مذکور خواهد بود.
در غیر این صورت x_0 یک نقطه تکین نامنظم می باشد.

(در حالت کلی فرض کنیم x_0 یک نقطه تکین (منفرد) برای معادله دیفرانسیل

$$y''(x) + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x)$$

باشد. این نقطه را تکین منظم می نامیم هرگاه کلیه حدهای

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) P_1(x) \\ \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 P_2(x) \\ \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 f(x) \end{cases}$$

موجود و متناهی باشند و در غیر این صورت x_0 را نقطه تکین نامنظم گوییم.)

مثال/ نوع نقاط تکین معادلات زیر را تعیین کنید.

1) $$\underbrace{(1-x^2)}_{P} y'' - \underbrace{2x}_{Q} y' + \underbrace{m(m+1)}_{R} y = 0$$

$0 = P(x_0) = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1$ نقطه تکین

$$x_0 = 1 \begin{cases} \lim_{x \to 1} (x-1) \dfrac{-2x}{\underbrace{1-x^2}_{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x \to 1} \dfrac{2x}{1+x} = 2 \\ \lim_{x \to 1} (x-1)^2 \dfrac{m(m+1)}{1-x^2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(1-x)\, m(m+1)}{1+x} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ نقطه تکین منظم

$$x_0=-1\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1}(x+1)\dfrac{-2x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{x-1}=1\\[2ex]\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2\dfrac{m(m+1)}{(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\,m(m+1)}{1-x}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$x_0=-1$ نقطه تکین منظم

(۲) $$\underbrace{2x(x-2)^2}_{P}\,y''+\underbrace{3x}_{Q}\,y'+\underbrace{(x-2)}_{R}\,y=0$$

$$0=P(x_0)=2x(x-2)^2\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$ نقاط تکین

$$x_0=0\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}x\,\dfrac{3x}{2x(x-2)^2}=0\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0}x^2\,\dfrac{(x-2)}{2x(x-2)^2}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$x_0=0$ نقطه تکین منظم

$$x_0=2\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}(\cancel{x-2})\dfrac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}(x-2)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{2(x-2)}\begin{cases}x\to 2^+\Rightarrow +\infty\\x\to 2^-\Rightarrow -\infty\end{cases}\\[2ex]\lim\limits_{x\to 2}\cancel{(x-2)^2}\dfrac{x-2}{2x\cancel{(x-2)^2}}=0\end{cases}\Rightarrow$$

لذا $x_0=2$ نقطه تکین نامنظم

(۳) $$x^2y''+\operatorname{tg}x\,y'+(x+2)\,y=x^3\cos x$$

$x^2=0\Rightarrow x=0$ نقطه تکین

$$y''+\underbrace{\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}}_{P_1}y'+\underbrace{\frac{x+2}{x^2}}_{P_2}y=\underbrace{\frac{x^3\cos x}{x^2}}_{f}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^2}=1\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0}x^2\,\dfrac{x+2}{x^2}=2\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0}x^2\,\dfrac{x^3\cos x}{x^2}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$x_0=0$ نقطه تکین منظم

سری فروبنیوس: فرم تعمیم یافته سری توانی، سری فروبنیوس نام دارد که به فرم کلی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r} = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

دقت کنید وقتی $r=0$، سری فروبنیوس به سری توانی تبدیل می‌شود.

تذکر: دقت کنید برخلاف سری توانی، با مشتق گیری از سری فروبنیوس، اندیس پایین حرکت نمی‌کند

یعنی اگر $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$، آنگاه

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(x-x_0)^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)\, a_n (x-x_0)^{n+r-2}$$

و ...

قضیه: فرض کنیم x_0 یک نقطه تکین منتظم برای معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد. آنگاه این معادله دارای جواب به فرم

(در $x_0=0$ تکین منتظم)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r} \quad (a_0 \neq 0)$$

(r طوری انتخاب می‌شود که)

می‌باشد که در آن $a_0 \neq 0$ و r عددی حقیقی یا مختلط است.

فرم کانونی معادله دیفرانسیل مذکور

$$y'' + \frac{Q}{P}y' + \frac{R}{P}y = 0 \xrightarrow{\times x^2} x^2y'' + x\Big(\underbrace{x\frac{Q}{P}}_{\text{تحلیلی}}\Big)y' + \Big(\underbrace{x^2\frac{R}{P}}_{\text{تحلیلی}}\Big)y = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\dfrac{Q}{P} = \sum_{n=0} p_n x^n \\ x^2\dfrac{R}{P} = \sum_{n=0} q_n x^n \end{cases}$$

لذا، حال با فرض اینکه $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جوابی برای معادله فوق باشد

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

حال با جایگذاری این مقادیر در معادله $(*)$، ضرایب x های هم توان را مساوی قرار می‌دهیم تا r و a_i ها را به دست آوریم.

(کمترین توان x در عبارت به دست آمده r است، لذا ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهند.)

ضریب x^r: $(r(r-1) + rp_0 + q_0)a_0 = 0 \xrightarrow{(a_0\neq 0)} r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0$

ص ۲۲۹ Boyce

(**) $a_0\left(r(r-1)+p_0 r+q_0\right)x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left((r+n)(r+n-1)+p_0(r+n)+q_0\right)a_n+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right)\right]x^{n+r}=0$

معادله شاخص یا معادله مفسر $r(r-1)+p_0 r+q_0=r^2+(p_0-1)r+q_0$ (که در آن حول نقطه منفرد منظم صفر باشد.)

$$\begin{cases} a_0\left(r(r-1)+p_0r+q_0\right)=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0 \quad \text{معادله شاخص} \\ (۲)\quad F(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right)=0 \quad (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

با حل معادله شاخص r به دست می آید و با جایگذاری r در (**) و با مساوی قرار دادن ضرایب x ها هم توان a_i ها به دست می آید. حال با توجه به اینکه معادله شاخص یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی است حالات زیر را در نظر می گیریم: (هم می تواند حقیقی باشد و هم مختلط)

حالت اول: معادله شاخص دارای دو ریشه متمایز باشد که تفاضل آن ها عدد صحیح نباشد.

(IF $r_1,r_2\in\mathbb{R}$: $r_1\geq r_2 \Rightarrow r_1-r_2$ عدد طبیعی نباشد)

به ازای $r=r_1$ در رابطه (۲) ضرایب a_n مشخص می شود و

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

یک جواب برای معادله دیفرانسیل $Py''+Qy'+Ry=0$ خواهد بود. به علاوه به ازای $r=r_2$ در رابطه (۲) ضرایب a_n های جدید مشخص می شوند و جواب دیگر معادله دیفرانسیل مذکور که مستقل خطی با y_1 است به صورت

$$y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

می باشد.

a_i هایی که با جایگذاری $r=r_2$ در (۲) به دست می آیند.

جواب عمومی معادله مذکور $y_g=Ay_1(x)+By_2(x)$

$R\geq\min\{R_1,R_2\}$

حالت دوم : معادله شاخصی دارای ریشه مضاعف باشد یعنی $r_1 = r_2 = r^*$. در این صورت ضرایب a_n به ازای $r = r^*$ در رابطه (۲) حاصل می‌شود و یک جواب معادله به صورت

$$y_1(x) = x^{r^*} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

و برای یافتن جواب دوم ، از روش کاهش مرتبه استفاده خواهیم کرد :

$y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x)$
(کاهش مرتبه یا تغییر پارامتر)

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r^*} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad (x>0)$$

(با جایگذاری y_2 در معادله تعیین می‌شوند)

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی} \quad y_g = A y_1(x) + B y_2(x)$$

حالت سوم : اگر تفاضل ریشه های معادله شاخصی عدد صحیح باشد. یعنی اگر $r_1 > r_2$ (حقیقی) به طوری که $r_1 - r_2 = n$ $(n \in \mathbb{N})$ ، آنگاه یک جواب معادله به صورت

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

و برای یافتن جواب دوم ، از روش کاهش مرتبه استفاده خواهیم کرد :

$$y_2(x) = K y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (x>0)$$

که در آن ثابت K و ضرایب b_n با جایگذاری y_2 در معادله تعیین می‌شوند.

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی} \quad y_g = A y_1(x) + B y_2(x)$$

تذکر: فرض کنید $x = x_0$ نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x)$$

باشد. در این صورت چنانچه قرار دهیم:

$$\begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)P_1(x) \\ q_0 = \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)^2 P_2(x) \end{cases}$$

آنگاه معادله مفسر یا شاخص نظیر معادله دیفرانسیل مذکور حول نقطه منفرد منظم x_0 به صورت

$$r^2 + (P_0 - 1)r + q_0 = 0$$ می باشد.

مثال) معادله مفسر نظیر نقطه منفرد منظم $x_0 = 0$ را برای معادله

$$x^2(x^2+1)y'' + 2xy' + (x+1)y = 0$$

را بیابید.

حل: $$y'' + \underbrace{\frac{2x}{x^2(x^2+1)}}_{P_1} y' + \underbrace{\frac{(x+1)}{x^2(x^2+1)}}_{P_2} y = 0$$

$$\begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x\to 0} x \dfrac{2x}{x^2(x^2+1)} = 2 \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \dfrac{(x+1)}{x^2(x^2+1)} = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{معادله مفسر یا شاخص}} r^2 + (2-1)r + 1 = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0$$

مثال/ جواب عمومی معادلات زیر را حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید.

(1) $\underbrace{4x}_{P} y'' + \underbrace{2(1-x)}_{Q} y' - \underbrace{y}_{R} = 0$

$P(x) = 4x \Rightarrow P(0) = 0 \quad x_0 = 0$ تکین

$$\begin{cases} x \dfrac{2(1-x)}{4x} = \dfrac{1-x}{2} \\ x^2 \dfrac{-1}{4x} = -x/4 \end{cases}$$

در $x=0$ تحلیلی اند لذا $x=0$ نقطه تکین منظم است.

پس معادله دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ می باشد.

با جایگذاری y، y' و y'' در معادله (1) داریم:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری در (1):

$$\Rightarrow 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} (4n+4r-4+2) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} (2n+2r+1) = 0 \quad (*)$$

حال ضریب کمترین توان x که به ازای $n=0$ در سری اول می باشد را برابر صفر قرار می دهیم:

$$a_0 r (4r-2) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} \begin{cases} r = 0 \\ r = 1/2 \end{cases}$$

$$y'' + \frac{2(1-x)}{4x} y' - \frac{1}{4x} y = 0$$

معادله شاخص

$$\begin{cases} P_0 = \lim_{x \to 0} x \dfrac{2(1-x)}{4x} = 1/2 \\ q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 (-\frac{1}{4x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow r^2 + (P_0 - 1) r + q_0 = 0$$

$$r^2 - 1/2\, r = 0$$

$$r(r - 1/2) = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = 1/2 \end{cases}$$

حال در رابطه (*) به جای r=1/۲ قرار می دهیم،

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/۲)(۴n)a_n x^{n-1/۲}-\sum_{n=0}^{\infty}(۲n+۲)a_n x^{n+1/۲}=0$$

$۲a_0 x^{1/۲}+\dots$

برای پیدا کردن a_1 ها ضرایب جمله‌های هم توان را مساوی قرار می دهیم.

$0+(1+1/۲)۴x^{1/۲}a_1+\dots$

ضریب $x^{1/۲}$

$$۴(1+1/۲)a_1-۲a_0=0 \Rightarrow a_1=\frac{a_0}{۳}$$

ضریب $x^{۳/۲}=x^{1+1/۲}$

$$۸(۲+1/۲)a_۲-(۲+۲)a_1=0 \Rightarrow a_۲=\frac{a_1}{۵}=\frac{a_0}{۳\times۵}$$

⋮

ضریب $x^{۲+1/۲}$، یعنی

$$a_۳=\frac{a_۲}{۷}=\frac{a_0}{۳\times۵\times۷}$$

به همین ترتیب ضریب $x^{n+1/۲}$،

$$(n+1+1/۲)(۴(n+1))a_{n+1}-۲(n+1)a_n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{۲n+۳}$$ رابطه بازگشتی

(برای پیدا کردن رابطه بازگشتی به صورت زیر نیز می توان محاسبه کرد:

به ازای n=0، جمله اول سری اول را کنار می گذاریم معادله شاخص و برابر صفر قرار می دهیم. و اندیس سری دوم را از یک می نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}(۴n+۴r-۲)-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}(۲n+۲r-1)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+r-1}\Big(\underbrace{a_n(n+r)(۴n+۴r-۲)-a_{n-1}(۲n+۲r-1)}_{0}\Big)=0$$

$$\Downarrow$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{۲n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{۲n+۳}$$)

$$y = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

بنابراین

$$y = x^{1/2} a_0 \left(1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{x^2}{3\times 5} + \frac{x^3}{3\times5\times7} + \cdots\right)$$

(شعاع همگرایی این سری $\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Rightarrow R_1 = \infty$)

برای به دست آوردن جواب دوم، در ⊛ قرار می دهیم $r=0$ و با روند مشابه به

ضریب x^0 : $a_1 = \frac{a_0}{1\times2}$

ضریب x $a_2 = \frac{a_0}{2^2\times 2!}$

ضریب x^2 $a_3 = \frac{a_0}{2^3\times 3!}$, ...

ضریب x^n : $a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}$

$$\Rightarrow y_2(x) = x^{r_2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$= x^0 a_0\left(1 + \frac{x}{2\times1!} + \frac{x^2}{2^2\times2!} + \cdots\right)$$

$\sum a_n$ $\sum b_n$

R_1, R_2

$\sum(a_n+b_n)$

$R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$

(شعاع همگرایی سری دوم $\frac{1}{R_2} = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Rightarrow R_2 = \infty$)

$$\Rightarrow y = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$ جواب عمومی

که به ازای جمیع مقادیر x همگرا است.

(۲) $4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0$

$P \qquad Q \qquad R$

$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ نقطه تکین

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x \dfrac{-8x^2}{4x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 \dfrac{(4x^2+1)}{4x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ نقطه تکین منظم}$$

پس معادله دارای جواب به فرم $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ است.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}$$

باجایگذاری در معادله (۲) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 8(n+r) a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 8(n+r)a_n x^{n+r+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} 8(n+r-1) a_{n-1} x^{n+r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r+2} \to \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^{n+r}$$

$n=0 \qquad n=1 \qquad n=1$

$$\Rightarrow 4r(r-1)a_0x^r + 4(r+1)r a_1 x^{r+1} - 8r a_0 x^{r+1} + \underbrace{a_0 x^r + a_1 x^{r+1}}_{n=0,\, n=1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(4(n+r)(n+r-1)a_n - 8(n+r-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} + a_n \right) x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow (4r^2-4r+1)a_0x^r + (4r^2+4r+1)a_1x^{r+1} - 8ra_0x^{r+1} + \;〃\; = 0$$

ضریب x^r: $(4r^2-4r+1)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} 4r^2-4r+1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1/2$

ضریب x^{r+1}: $(4r^2+4r+1)a_1 - 8ra_0 = 0 \xrightarrow{r=1/2} a_1 = a_0$

ضریب x^{n+r}: $4(n+r)(n+r-1)a_n - 8(n+r-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} + a_n = 0$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-4a_{n-2}}{4(n+r)(n+r-1)+1} + \frac{8(n+r-1)a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+1} \qquad (n=2,3,4,\dots)$$

در $r=1/2$ قرار می‌دهیم

$$\Longrightarrow a_n = \frac{-4a_{n-2}}{4(n+1/2)(n-1/2)+1} + \frac{8(n-1/2)a_{n-1}}{4(n+1/2)(n-1/2)+1}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2} + (2n-1)a_{n-1}}{n^2} \qquad (n=2,3,4,\dots)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{-a_0+3a_1}{4} \overset{a_0=a_1}{=} \frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1+5a_2}{9} = \frac{a_0}{3!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1/2}(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)$$

$$= x^{1/2}\left(a_0+a_0x+\frac{a_0}{2!}x^2+\dots\right)$$

$$= a_0x^{1/2}\left(1+x+x^2/2!+\dots\right)$$

$$= a_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = a_0x^{1/2}e^x$$

با قرار دادن $a_0=1$

$$\Rightarrow y_1(x) = \sqrt{x}\,e^x$$

روش اول

$$\Rightarrow y_2 \begin{cases} y_2 = y_1\ln x + x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \\ \text{یا} \\ y_2 = v(x)\cdot y_1(x) \end{cases}$$

به روش دوم: y_2 را با روش کاهش مرتبه به دست می‌آوریم

در این روش y_2' و y_2'' را محاسبه می‌کنیم و در معادله (۲) جایگذاری کرده و با مساوی قرار دادن ضرایب xهای هم‌توان ضرایب b_n را پیدا می‌کنیم

y_2 ⟨ فرمول / کاهش مرتبه / محاسبات قبلی

تذکر: معمولا در مسائلی که جواب اول معادله به فرم یک سری شناخته شده ای باشد، برای تعیین y_1 جواب دوم از روش دوم استفاده می کنند.

$$y_2 = v(x)\,\overbrace{y_1(x)}^{\sqrt{x}\,e^x} \Rightarrow$$

y_2' و y_2'' را محاسبه کرده و در معادله دیفرانسیل ② قرار می دهیم و $v(x)$ را بدست می آوریم.

$$y_2' = v'\sqrt{x}\,e^x + v\left(\frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y_2'' = v''\sqrt{x}\,e^x + v'\left(\frac{(2x+1)e^x}{\sqrt{x}}\right) + v\left(\frac{e^x(4x^2+4x-1)}{4x}\right)$$

$\xRightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}}$ $v(x) = \ln x \Rightarrow y_2(x) = \sqrt{x}\,e^x \ln x$

$\Rightarrow$ جواب عمومی $y_g = A y_1(x) + B y_2(x) = A\sqrt{x}\,e^x + B\sqrt{x}\,e^x \ln x$

③ $xy'' + 2y' + xy = 0$ (ص ۳۴۷ کتاب دکتر نیکوکار)

$\xRightarrow[\text{برای انجام محاسبات راحتر}]{\times x}$ $x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$ ④

$P(x) = x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ نقطه تکین

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} x\,\dfrac{2x}{x^2} = 2 \\ \lim_{x\to 0} x^2\,\dfrac{x^2}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ نقطه تکین منظم}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\,a_n x^{n+r-2}$$

حال y ، y' و y'' را در معادله ④ جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}}_{\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}}=0$$

$$\Rightarrow r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{r+1}+2ra_0x^r+2(r+1)a_1x^{1+r}+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left((n+r)(n+r-1)a_n+2(n+r)a_n+a_{n-2}\right)x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow r(r+1)a_0x^r+(r+1)(r+2)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left((n+r)(n+r+1)a_n+a_{n-2}\right)x^{n+r}=0$$

ضریب x^r : $r(r+1)a_0=0 \xRightarrow{a_0\neq 0} r(r+1)=0 \rightarrow r_1=0,\ r_2=-1$

ضریب x^{r+1} : $(r+1)(r+2)a_1=0$ I

$\vdots$

ضریب x^{r+n} $(n+r)(n+r+1)a_n+a_{n-2}=0 \Rightarrow a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)}$ $(n=2,3,\dots)$ II

I $\xRightarrow{r_1=0}$ $2a_1=0 \Rightarrow a_1=0$

II $\Rightarrow$ $a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \Rightarrow a_2=-\dfrac{a_0}{3\times 2}=-\dfrac{a_0}{3!}$

$a_3=\dfrac{-a_1}{3(3+1)}=0\ ,\ a_5=0\ ,\ \dots$

می‌دانیم
$\sin x=x-x^3/3!+x^5/5!-\dots$
$\forall x$

$a_4=\dfrac{-a_2}{4\times 5}=\dfrac{a_0}{5\times 4\times 3\times 2}=a_0/5!$

$\vdots$

$a_{2n}=\dfrac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}$

$$\Rightarrow y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \overset{r_1=0}{=} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

$$=a_0\left(1-x^2/3!+x^4/5!-\dots\right)$$

$$y_1(x) = a_0 \frac{\sin x}{x}$$

با قرار دادن $a_0 = 1$ $\Rightarrow y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$

y_2:

$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

با روش کاهش مرتبه بدست می آید

با استفاده از محاسبات کاملاً مشابه روند محاسبه y_1 عمل می کنیم $\Rightarrow$

در رابطه (I)، با قرار دادن $r_2 = -1$ داریم:

$$0 \times a_1 = 0 \Rightarrow a_1 \in \mathbb{R}$$

به دلخواه $a_1 = 0$ در نظر می گیریم.

$$\text{(II)} \xrightarrow{r_2 = -1} a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)} \quad n = 2, 3, \ldots \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4 \times 3} = \frac{a_0}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{a_0}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$y_2 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_0 x^{-1} + \underbrace{a_1}_{0} + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

می دانیم $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \forall x$

$$= a_0 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots \right)$$

$$= a_0 \left(\frac{\cos x}{x} \right)$$

با قرار دادن $a_0 = 1$ $\Rightarrow y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$\Rightarrow y_g(x) = A y_1(x) + B y_2(x) = A \frac{\sin x}{x} + B \frac{\cos x}{x}$$

Scanned with CamScanner

* تابع گاما:

* تعریف: تابع گامای x را با $\Gamma(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

در واقع تابع گاما، یک تابع انتگرالی است و انتگرال فوق وقتی همگرا است که حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt$$

دقت کنید که انتگرال اخیر برای $x>0$ همگرا است.

با به کارگیری روش انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x} e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{0} \qquad \underbrace{\int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt}_{x\underbrace{\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(x)}}$$

جزء به جزء $\begin{cases} u = t^x \Rightarrow du = x t^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \quad v = -e^{-t} \end{cases}$, ...

هم‌ارزی

$$\boxed{\text{دقت:}\quad \lim_{t \to \infty} t^x e^{-t} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0}$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (x>0)}$$

به علاوه داریم:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t} dt}_{-e^{-t}\big|_0^{\infty} = 0-(-1)=1} = 1$$

بنا بر رابطه $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$، داریم:

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2\times 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3\times 2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\times(n-1)! = n! \qquad (n\in\mathbb{N})$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n)$$
$$= (x+n)(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\, x\, \Gamma(x)$$

در نتیجه:

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x)}$$

تذکر: دقت کنید که در حالت کلی برای هر $p \in \mathbb{R}^+$ ، داریم

$$\begin{cases} \Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 0! \\ \Gamma(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0! = 1}$$

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p!}$$

$$(3/2)! = \Gamma(5/2) = 3/4\sqrt{\pi}$$

تذکر: برای $x<0$ و غیر صحیح می‌توان از رابطه زیر $\Gamma(x)$ را محاسبه کرد:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (x<0,\ x \notin \mathbb{Z})$$

$$(\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x>0)$$

$$\Gamma(5/3) = \Gamma(4/3+1) = 4/3\,\Gamma(4/3)$$
$$= 4/3 \times 3/3\ \Gamma(3/3)$$
$$= 4/3 \times 3/3 \times 2/3\ \Gamma(2/3)$$
$$= 4/3 \times 3/3 \times 2/3 \times 1/3\ \underbrace{\Gamma(1/3)}_{\text{از روی جدول به دست می‌آید.}}$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = 1/2\ \underbrace{\Gamma(1/2)}_{\text{از جدول داریم}} = \sqrt{\pi}/2$$

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{-1/2} = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-3/2+1)}{-3/2} = -2/3\,\Gamma(-1/2) = -2/3(-2\sqrt{\pi}) = 4/3\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1} e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \overset{t=x^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$(\Gamma(1/2))^2 \overset{?}{=} 4\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy \leftarrow$$ در ریاضی ۲ روش حل را خوانده‌ایم

Bessel differential Equation :

معادله دیفرانسیل بسل :

هر معادله دیفرانسیل به فرم کلی

$$\underbrace{x^2}_{P} y'' + \underbrace{x}_{Q} y' + (\underbrace{x^2 - \nu^2}_{R}) y = 0$$

که در آن $\nu \in \mathbb{R}$ به معادله دیفرانسیل بسل معروف است. دقت کنید که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله بسل است، زیرا

(1) $P(x_0) = P(0) = 0 \Rightarrow$ $x_0 = 0$ منفرد است

(2)
$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x \to 0} x \dfrac{x}{x^2} = 1 \\ q_0 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \dfrac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2 \end{cases} \Rightarrow$$ $x_0 = 0$ نقطه منفرد منظم است

بنابراین یک جواب این معادله حول نقطه $x_0 = 0$ به فرم سری فروبنیوسی می باشد. یعنی

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$\xRightarrow[\text{معادله}]{\text{جایگذاری در}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}}_{n=0,\ n=1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}}_{n=0,\ n=1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}}_{\sum_{n=2} a_{n-2} x^{n+r}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+r}}_{n=0,\ n=1} = 0$$

$$\Rightarrow r(r-1) a_0 x^r + (r+1) r a_1 x^{r+1} + r a_0 x^r + (r+1) a_1 x^{r+1} - \nu^2 a_0 x^r - \nu^2 a_1 x^{r+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) a_n + (n+r) a_n + a_{n-2} - \nu^2 a_n \right] x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow (r^2 - \nu^2) a_0 x^r + \left((r+1)^2 - \nu^2\right) a_1 x^{r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((n+r)^2 - \nu^2\right) a_n + a_{n-2} \right] x^{n+r} = 0$$

ضریب x^r : $(r^2-\nu^2)a_0=0 \xRightarrow{a_0\neq 0} r^2-\nu^2=0 \Rightarrow r=\pm\nu$

ضریب x^{r+1} : $\boxed{((r+1)^2-\nu^2)a_1=0}$ (I)

معادله مفسر (شاخص) $\boxed{\begin{array}{c} r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \\ r^2-\nu^2=0 \end{array}}$

ضریب x^{r+n} : $[((n+r)^2-\nu^2)a_n+a_{n-2}]=0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2-\nu^2} \qquad n=2,3,\ldots} \quad \text{(II)}$$

فرض کنیم $\nu>0$، در (I) قرار می‌دهیم $r=\nu$، لذا داریم:

$$((\nu+1)^2-\nu^2)a_1=0$$

$$(\nu^2+2\nu+1-\nu^2)a_1=0 \Rightarrow (2\nu+1)a_1=0 \xRightarrow{\nu>0} a_1=0$$

(II) در $\xRightarrow{r=\nu}$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \qquad n=2,3,\ldots$$

$$\begin{cases} a_3=\dfrac{-a_1}{3(3+2\nu)}=0 \\ a_5=\dfrac{-a_3}{5(5+2\nu)}=0 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2=\dfrac{-a_0}{2(2+2\nu)}=\dfrac{-a_0}{2^2(1+\nu)} \\ a_4=\dfrac{-a_2}{\underbrace{4(4+2\nu)}_{2^2\times 2(2+\nu)}}=\dfrac{a_0}{2^4\times 2!(1+\nu)(2+\nu)} \\ \vdots \end{cases}$$

قرار می‌دهیم: (a_0 پارامتر اختیاری)

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$ می دانیم

لذا داریم:

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2(1+\nu)} = \dfrac{-1}{2^{\nu+2}\underbrace{(1+\nu)\Gamma(1+\nu)}_{\Gamma(\nu+2)}} = \dfrac{-1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)} \\[2ex] a_4 = \dfrac{1}{2^{\nu+4}(2!)\Gamma(\nu+3)} \\ , \\ \vdots \\ a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^{\nu+2n}(n!)\Gamma(\nu+n+1)} \end{cases}$$

پس ضرایب فرد همگی صفر $(a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0)$ و ضرایب زوج از رابطه بالا به دست می آیند.

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$\xRightarrow[r=\nu]{\text{قرار می دهیم}} \quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+\nu} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{2n+1}}_{0} x^{2n+1+\nu}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} = J_\nu(x) \quad \forall x}$$

y_1 را تابع بسل نوع اول از مرتبه ν می نامیم و با $J_\nu(x)$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم ν غیر صحیح باشد، در این صورت به ازای $r=\nu$، در این صورت به ازای $r=-\nu$

جواب زیر برای معادله بسل حاصل می‌شود:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} = J_{-\nu}(x)$$

تابع بسل مرتبه $-\nu$.

ولذا

$$y_g(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

(دقت کنید وقتی $\nu>0$ غیر صحیح باشد، آنگاه $J_{-\nu}(x)$ ، $J_\nu(x)$ مستقل خطی اند لذا جواب عمومی معادله بسل به فرم y_g خواهد بود)

تذکر: دقت کنید اگر $\nu=m$ عددی صحیح باشد، آنگاه

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

(در این حالت $J_m(x)$ و $J_{-m}(x)$ مستقل خطی نمی‌باشند، لذا دیگر جواب عمومی معادله بسل به فرم بیان شده نخواهد بود)

لذا جواب دوم معادله بسل به فرم

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\left(J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)\right)$$

(ν صحیح و غیر صحیح)

حالت کلی تابع بسل نوع دوم از مرتبه ν:

که در آن $Y_\nu(x)$ تابع بسل نوع دوم از مرتبه ν نامیده می‌شود. ولذا جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل عبارت است از:

$$y_g(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

ص ۳۶۷ کتاب دکتر نیکوکار

در حالتی که $\nu = m$ عدد صحیح باشد، دو حالت زیر را برای عدد صحیح m در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $\nu = m = 0$ ، در این صورت

(حالت دوم معادله مشخصه ریشه مضاعف دارد)

$$y_2(x) = (\ln x)\, \overbrace{J_0(x)}^{y_1(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_0(x) = a\left(y_2(x) + b\, J_0(x)\right)}$$ تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر

$a = 2/\pi\,, \quad b = \gamma - \ln 2 \quad (\gamma = 0{,}577$ ثابت اویلر)

&

$$\boxed{y_g(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)}$$

حالت دوم : $\nu = m \neq 0$ ، در این صورت

(حالت سوم در معادله مشخصه تفاضل ریشه‌ها، عدد صحیح شود)

$$y_2(x) = K \ln x\, \overbrace{J_m(x)}^{y_1(x)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-m}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_m(x) = a\left(y_2(x) + b\, J_m(x)\right)}$$ تابع بسل نوع دوم مرتبه m

&

$$\boxed{y_g(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)}$$

حال تابع $J_{1/2}(x)$ را می‌نویسیم:

$$J_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1/2+1)}\left(x/2\right)^{2n+1/2}$$

از طرفی داریم:

$$\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)\,\Gamma(\underbrace{n+1/2}_{n+1-1/2})$$

$$=(n+1/2)(n-1/2)\,\Gamma(n-1/2)$$

$$=\dots$$

$(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots\times 2$ در

ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$=(n+1/2)(n-1/2)\overset{(n-3/2)}{\times}\dots\times 1/2\,\Gamma(\underbrace{1/2}_{\sqrt{\pi}})$$

$$\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\times\dots}{2^n(\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots}_{n!})}=(1/2)^{n+1}(2n+1)(2n-1)\times\dots\times 1\times\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{(2n+1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\times 2^n\times n!}=\frac{(2n+1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\,n!}$$

بنابراین

$$J_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(2n+1)!\,\sqrt{\pi}}\underbrace{\left(x/2\right)^{2n+1/2}}$$

$x^{1/2}\cdot x^{2n}\cdot(1/2)^{2n}\cdot(1/2)^{1/2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^{2n+1/2}$ $\quad (1/2)^{2n+1/2}$ $\quad (x/2)^{2n+1/2}$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{x}{2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $\quad \sqrt{2}$

$$=\sqrt{2/x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\cancel{2^{2n+1}}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!\,\sqrt{\pi}\times\cancel{2^{2n+1}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x}$$

به همین ترتیب $J_{-1/2}(x)$ را می‌یابیم:

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-1/2+1)} (x/2)^{2n-1/2}$$

از طرفی داریم:

$$\Gamma(n-1/2+1) = (n-1/2)\,\Gamma(\underbrace{n-1/2}_{n-3/2+1})$$
$$= (n-1/2)(n-3/2)\,\Gamma(n-3/2)$$
$$= \cdots$$
$$= (n-1/2)(n-3/2) \times \cdots \times 1/2\,\Gamma(1/2)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 1 \times \sqrt{\pi}$$

$(2n)(2n-2)\times\cdots\times 2$ در ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$= (1/2)^n \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^n \times n!}$$

بنابراین:

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n} \cancel{\times n!}}{\cancel{n!}\,(2n)!\,\sqrt{\pi}} (x/2)^{2n-1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \cancel{2^{2n}}\, x^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{\pi}\, \cancel{2^{2n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}_{\cos x}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x}$$

خواص مهم توابع بسل :

ص ۳۶۲ دکتر نیکوکار

① $$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

اثبات ①: $$x^{\nu} J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)\, 2^{2n}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2\nu)\, x^{2n+2\nu-1}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)\, 2^{2n}}$$

سری فروبنیوس

$$= x^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{(n+\nu)}}{n!\,\underbrace{\Gamma(n+\nu+1)}_{\cancel{(n+\nu)}\Gamma(n+\nu)}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)}$$

سوال امتحان $\Longrightarrow$ تکراری مهم

$$\boxed{\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\, dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C}$$

۲) $$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

اثبات ۲: $$x^{-\nu} J_\nu(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)\, 2^{2n+\nu}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n\, x^{2n-1}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)\, 2^{2n+\nu}}$$

سری توانی

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{(-1)(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\,(2n+2)\, x^{2n+1}}{(n+1)!\,\Gamma(n+\nu+2)\, 2^{2n+\nu+2}}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \cancel{2}\cancel{(n+1)}\, x^{2n+1}}{\underbrace{\cancel{(n+1)}!}_{n!}\,\Gamma(n+\nu+2)\, 2^{2n+\nu+1} \times \cancel{2}}$$

$$= -x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+2)\, 2^{2n+\nu+1}}\, x^{2n+\nu+1}$$

$$= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)}$$

انتگرال سوال دوم

$$\boxed{\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\, dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C}$$

با مشتق گیری از روابط ① و ② داریم:
و ساده سازی

③ $$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$$

④ $$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

اثبات ③ : طبق ① داریم: $\left(x^\nu J_\nu(x)\right)' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

$$\Rightarrow \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J_\nu'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$\times x^{-\nu}$

$$\Rightarrow \nu x^{-1} J_\nu(x) + J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x)$$

$$\Rightarrow J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \nu/x \, J_\nu(x) \quad \checkmark\checkmark$$

رابطه ④ نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

با کم کردن دو رابطه ③ و ④ داریم:

⑤ $$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

با جمع کردن دو رابطه ③ و ④ داریم:

⑥ $$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J_\nu'(x)$$

⑦ در بین توابع بسل نوع اول، توابع $J_{m+1/2}(x)$ $(m\in\mathbb{Z})$ را می‌توان به فرم مشخص نوشت

تمرین‌های فصل ۴ کتاب دکتر نیکوکار / ۶.۴
فصل ۴، بخش ۶.

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \,, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right), \quad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)$$

,

$\vdots$

تذکر: برخی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، با تغییر متغیر مناسب به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل می‌شوند.

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

مثال/ جواب عمومی هریک از معادلات زیر را به دست آورید.

① $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0$

$x^2-\nu^2$	x^2-4
	$\nu=2$

حل:

قرار می‌دهیم: $\boxed{\lambda x = t} \Rightarrow x = t/\lambda$

$dt/dx = \lambda$

اصلی در معادله

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \lambda\cdot\dfrac{dy}{dt} = \lambda y'_t \\ y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \lambda\dfrac{d}{dx}(dy/dt) \\ \quad = \lambda\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dt}{dx}\right)(dy/dt) \\ \quad = \lambda^2\dfrac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2 y''_t \end{cases}$$

$$(t/\lambda)^2\cdot\lambda^2 y''_t + (t/\lambda)\cdot\lambda y'_t + (t^2-\nu^2)y_t = 0$$

$$t^2y''_t + ty'_t + (t^2-\nu^2)y_t = 0$$

$$\Rightarrow y_t = c_1J_\nu(t) + c_2Y_\nu(t)$$

$$\xRightarrow{t=\lambda x} y_g(x) = c_1J_\nu(\lambda x) + c_2Y_\nu(\lambda x)$$

② $4x^2y'' + 4xy' + (x-\nu^2)y = 0$

حل: $\boxed{t=\sqrt{x}}$ قرار می‌دهیم

$$t = x^{1/2} \Rightarrow dt = 1/2\, x^{-1/2}dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1/2\, x^{-1/2}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = 1/2\, x^{-1/2}\dfrac{dy}{dt} \\ y'' = \dfrac{dy'}{dx} = -1/4\, x^{-3/2}\dfrac{dy}{dt} + 1/2\, x^{-1/2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) \\ \quad = -1/4\, x^{-3/2}\dfrac{dy}{dt} + 1/4\, x^{-1}\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم: $(t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2)$

$$x y''_t + x^{1/2} y'_t + (x-\nu^2) y_t = 0$$

$$t^2 y''_t + t y'_t + (t^2-\nu^2) y_t = 0$$

$$\Rightarrow y_t = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{x}} \boxed{y_g(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{x}) + c_2 Y_\nu(\sqrt{x})}$$

(۳) $x^2 y'' + x y' + 4(x^4-\nu^2) y = 0$

حل: $\boxed{t=x^2}$ قرار دهیم

$$\begin{cases} dt = 2x\,dx \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = 2x \\ y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = 2x\dfrac{dy}{dt} \\ y'' = \dfrac{dy'}{dx} = 2\dfrac{dy}{dt} + 2x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = 2\dfrac{dy}{dt} + 4x^2\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

جایگذاری در معادله اصلی $\Rightarrow$

$$t\left(2\frac{dy}{dt} + 4t\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \sqrt{t}\left(2\sqrt{t}\frac{dy}{dt}\right) + 4(t^2-\nu^2) y = 0$$

$$4t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 4(t^2-\nu^2) y = 0$$

$$\Rightarrow t^2 y''_t + t y'_t + (t^2-\nu^2) y_t = 0$$

$$\Rightarrow y_t = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

$$\xrightarrow{t=x^2} \boxed{y_g(x) = c_1 J_\nu(x^2) + c_2 Y_\nu(x^2)}$$

۴) $xy'' + (1+2\nu)y' + xy = 0$

حل:

قرار میدهیم

$\boxed{y = x^{-\nu}u}$ (که u تابعی از x است)

$$y = x^{-\nu}u \Rightarrow y' = -\nu x^{-\nu-1}u + x^{-\nu}u'$$

$$y'' = \nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u - \nu x^{-\nu-1}u' - \nu x^{-\nu-1}u' + x^{-\nu}u''$$

$$= \nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u - 2\nu x^{-\nu-1}u' + x^{-\nu}u''$$

با جایگذاری y ، y' و y'' در معادله اصلی داریم:

$$\nu(\nu+1)x^{-\nu-1}u - 2\nu x^{-\nu}u' + x^{-\nu+1}u'' + (1+2\nu)(-\nu x^{-\nu-1}u + x^{-\nu}u') + x^{-\nu+1}u = 0$$

$$\Rightarrow x^{-\nu-1}(x^2u'' + xu' + x^2u - \nu^2u) = 0$$

$$\Rightarrow x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0$$

$$\Rightarrow u = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$$

$$y = x^{-\nu}u \Rightarrow \boxed{y = x^{-\nu}(c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x))}$$

مثال/ معادله دیفرانسیل

$$y'' + xy = 0$$

را با تغییر متغیر $\begin{cases} z = \frac{2}{3} x^{3/2} \\ y = \sqrt{x}\, u_{\to z \to x} \end{cases}$ حل کنید. (z برحسب x، و u هم برحسب z)

حل:

$$\begin{cases} y = x^{1/2} u \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} u + x^{1/2} u' \\ \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2} u + \frac{1}{2} x^{-1/2} u' + \frac{1}{2} x^{-1/2} u' + x^{1/2} u'' \\ = -\frac{1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2} u' + x^{1/2} u'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{2}{3} x^{3/2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = x^{1/2} \\ u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = x^{1/2} \frac{du}{dz} \\ u'' = \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{du}{dz} + x^{1/2} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right)}_{\frac{d}{dz} \underbrace{\left(\frac{dz}{dx}\right)}_{x^{1/2}} \left(\frac{du}{dz}\right)} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{du}{dz} + x \frac{d^2u}{dz^2} \end{cases}$$

جایگذاری در معادله اصلی (y, y', y'')

$$-\frac{1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2} u' + x^{1/2} u'' + x (x^{1/2} u) = 0$$

ضرب در $x^{1/2}$

$$\frac{-u}{4x} + u' + x u'' + x^2 u = 0$$

جایگذاری u' و u'' در معادله

$$\frac{-u}{4x} + \sqrt{x}\, u'_z + x^2 u''_z + \frac{1}{2} \sqrt{x}\, u'_z + x^2 u = 0$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{x}\, u'_z$$

تقسیم بر $x^{3/2}$ و جایگذاری $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$ $\left(x = \frac{3}{2} z^{2/3}\right)$

$$\frac{-u}{4x \cdot \frac{3}{2} z} + \frac{3}{2} u'_z + \frac{3}{2} z u''_z + \frac{3}{2} z u = 0$$

Scanned with CamScanner

طرفین رابطه اخیر ضرب در $\frac{2}{3}z$ $\Longrightarrow$ $-\frac{1}{9}u + zu'_z + z^2u''_z + \underbrace{z^2}u = 0$

$$z^2u''_z + zu'_z + (z^2 - 1/9)\,u = 0$$

یادآوری:

فرم کلی معادله دیفرانسیل بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

یادآوری: وقتی ν غیرصحیح باشد، جواب عمومی معادله بسل، عبارت است از:

$$y_g(x) = c_1J_\nu(x) + c_2J_{-\nu}(x)$$

با تابع u و متغیر z، معادله دیفرانسیل بسل

$\nu = 1/3 \notin \mathbb{Z}$

$$u(z) = c_1J_{1/3}(z) + c_2Y_{1/3}(z)$$

$y = x^{1/2}u \Rightarrow u = \frac{y}{x^{1/2}}$

$\Longrightarrow$ $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$

$$\frac{y(x)}{\sqrt{x}} = c_1J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + c_2Y_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{x}\left(c_1J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + c_2Y_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right)$$

ادامه جزوه معادلات

تبدیل لاپلاس

سعیده پیریاوفا

تبدیل لاپلاس:

فرض کنید $f(x)$ به ازای $x \geq 0$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس تابع f را با نماد $F(S)$ یا $L\{f(x)\}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$L\{f\} = F(S) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

اگر این انتگرال موجود باشد، تابع $F(S)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ می نامند و تابع $f(x)$ را تبدیل معکوس $F(S)$ گویند و آن را با نماد $L^{-1}(F)$ نمایش می دهند.
(یا تبدیل لاپلاس معکوس $F(S)$)

$$L^{-1}\{F(S)\} = f(x)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید:

(1) $f(x) = 1$

$$L\{f(x)\} = L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \times 1\, dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{\infty} \overset{(S>0)}{=} \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s} \quad (S>0)$$

$$\Rightarrow F(S) = \frac{1}{s}$$

دامنه تابع $F(S)$ یا دامنه تابع لاپلاس

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

(2) $f(x) = x$

$$L\{f(x)\} = L\{x\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x\, dx = -\frac{1}{s} \cancel{e^{-sx} \cdot x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx} dx \overset{(S>0)}{}$$

جزء به جزء $\begin{cases} x = u \Rightarrow du = dx \\ e^{-sx} dx = dv \quad v = -\frac{1}{s} e^{-sx} \end{cases}$

$$= \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow L\{x\} = \frac{1}{s^2} \quad (S>0)$$

$$F(S) = \frac{1}{s^2}$$

(۳) $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{R})$

$$L\{f(x)\} = L\{x^n\} = \int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dx \overset{sx=t\ (s>0)}{\underset{s\,dx=dt}{=}}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{s}$$

یادآوری

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt}$$

$x>0$ مجاز است.

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt}$$

$n+1>0$

$n>-1$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$\Rightarrow L\{x^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad n>-1 \quad (*)$$

$$\underset{(n \in \mathbb{N})}{L\{x^n\}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

به طور مثال / $L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = L\{x^{-1/2}\} \overset{\text{طبق}}{\underset{(*)}{=}} \frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{-1/2+1}} = \frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}}{s^{1/2}} = \sqrt{\pi/s}$

$s>0$.

(۴) $f(x) = e^{ax} \quad (a \in \mathbb{R})$

$$L\{f(x)\} = L\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{ax} \cdot e^{-sx}\, dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)x}\Big|_0^\infty$$

$$\frac{1}{a-s}\left(\underset{\underset{e^{-\infty}=0}{s-a>0}}{e^{-(s-a)\infty}} - \overset{1}{e^{-(s-a)0}}\right)$$

$$\overset{s>a}{=} \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$$\Rightarrow L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a} \quad (s>a)$$

به طور مشابه :

$$L\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a} \quad a>-s$$

Scanned with CamScanner

خواص تبدیل لاپلاس :

۱_ خاصیت خطی بودن : تبدیل لاپلاس و معکوس آن، عملگرهای خطی هستند، یعنی:

الف) $L\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 L\{f(x)\} + c_2 L\{g(x)\}$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

ب) $L^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 L^{-1}\{F(s)\} + c_2 L^{-1}\{G(s)\}$

به طور مثال/ به کمک این خاصیت می‌توانیم تبدیل لاپلاس توابع $f(x)=\cos(ax)$، $g(x)=\sin(ax)$ که $a\in \mathbb{R}$ را بیابیم.

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$$

$$L\{e^{iax}\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{iax}e^{-sx}}_{e^{(ia-s)x}}\,dx = -\frac{1}{s-ia}e^{-(s-ia)x}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s-ia}e^{-sx}\cdot\underbrace{e^{iax}}_{\cos(ax)+i\sin(ax)}\Big|_0^\infty$$

کراندار

$$-\frac{1}{s-ia}\Big(\underbrace{e^{-s\infty}}\underbrace{(\cos(\infty)+i\sin(\infty))}_{\text{کراندار}} - \overset{1}{e^{-s0}}(\overset{1}{\cos(0)}+i\overset{0}{\sin(0)})\Big)$$

باید صفر شود پس باید $s>0$

$$s>0 \ \overset{\text{باید}}{=} \ \frac{1}{s-ia}\times\frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\Rightarrow L\{\underbrace{e^{iax}}_{\cos(ax)+i\sin(ax)}\} = \underbrace{\frac{s}{s^2+a^2}}_{F(s)} + i\underbrace{\frac{a}{s^2+a^2}}_{G(s)}$$

$$\| \qquad \qquad //$$

$$L\{\cos(ax)\} + L\{i\sin(ax)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\{\cos(ax)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \\ L\{\sin(ax)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \end{cases} \quad (s>0)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

(۱) $f(x) = \sinh(ax) \quad (a \in \mathbb{R})$

$$L\{f(x)\} = L\{\sinh(ax)\} = L\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{۲}\right\}$$

طبق خاصیت خطی بودن

$$= \frac{1}{۲} L\{e^{ax}\} - \frac{1}{۲} L\{e^{-ax}\}$$

$(s>a) \quad \frac{1}{s-a} \qquad (-s<a) \quad \frac{1}{s+a}$

$$= \frac{1}{۲}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{a}{s^۲ - a^۲} \quad (|a| < s)$$

$$\Rightarrow L\{\sinh(ax)\} = \frac{a}{s^۲ - a^۲} \quad (|a|<s)$$

(۲) $f(x) = \cosh(ax) \quad (a \in \mathbb{R})$

بطور مشابه داریم:

$$L\{f(x)\} = L\{\cosh(ax)\}$$

$$= L\left\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{۲}\right\}$$

$$= \frac{1}{۲} L\{e^{ax}\} + \frac{1}{۲} L\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{s}{s^۲ - a^۲} \quad (|a|<s)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = 4\cancel{x}^2 - 2\cos(3x) + 5e^{-x} - 3\sinh(2x) + 1$$

$$L\{f(x)\} = 4L\{x^2\} - 2L\{\cos(3x)\} + 5L\{e^{-x}\} - 3L\{\sinh(2x)\} + L\{1\}$$

$$= 4 \times \frac{2!}{s^3} - 2 \times \frac{s}{s^2+9} + 5 \times \frac{1}{s+1} - 3 \times \frac{2}{s^2-4} + \frac{1}{s}$$

مثال/ تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s) = \frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)}$$

$$\frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow A(s-1)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + (Cs+D)(s(s-1)) \equiv 5s-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-3 \\ D=-2 \end{cases} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{3s+2}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 + 2e^x - 3\cos x - 2\sin x$$

۲- اگر $L\{f(x)\} = F(s)$ ، آنگاه:

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L\{f(ax)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(ax)\,dx \quad \begin{cases} ax = t \\ a\,dx = dt \end{cases} = \int e^{-s(t/a)} f(t) \tfrac{1}{a} dt = \tfrac{1}{a} F(s/a)$$

۳- خاصیت انتقال: (نوع اول) اگر $L\{f(x)\} = F(s)$ ، آنگاه:

(قضیه انتقال نوع اول)

(انتقال بر روی s ها)

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

$$\left(L^{-1}\{F(s)\} = f(x) \Downarrow L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax} f(x) \right)$$

به طور مثال: با کمک خاصیت انتقال داریم:

$$s \longrightarrow s-a \qquad s>0 \qquad s-a>0$$

$$L\{1\} = 1/s = F(s) \;\; (s>0) \;, \quad L\{e^{ax} \times \underbrace{1}_{f(x)}\} = F(s-a) = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{\sin(3x)\} = \underbrace{\frac{3}{s^2+9}}_{= F(s)} \Rightarrow \underbrace{L\{e^{-2x} \sin(3x)\}}_{= F(s-a)} = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$s-(-2)$$

در واقع:

$$L\{e^{ax} f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} . e^{ax} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)x} f(x)\,dx$$

$$= L\{f(x)\}_{s \to s-a} = F(s-a)$$

تمرین: تبدیل لاپلاس $f(x) = e^{2x}(3\sin x - 4\cos 3x)$ را بیابید.

$$L\{f(x)\} = 3L\{e^{2x}.\sin x\} - 4L\{e^{2x}\cos 3x\}$$

$$= 3\frac{1}{(s-2)^2+1} - 4\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}$$

می‌دانیم:

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Downarrow$$

$$L\{e^{2x}\sin x\} = \left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s \to s-2} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

تابع پله‌ای واحد: (Unit step function)

$$u_c(x) = \begin{cases} 0 & \underset{\text{معمولاً}}{0 \le} x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases} \qquad (c \geq 0)$$

$(x \geq 0)$

$c=0$
$\Downarrow$
$u_0(0)=1/2$
$u_0(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

(Heaviside step function)

تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را بیابید.

$$L\{u_c(x)\} = \int_0^\infty u_c(x)\, e^{-sx}\, dx$$

$$= \int_{0}^{c} \underbrace{u_c(x)}_{0} e^{-sx} dx + \int_c^\infty \underbrace{u_c(x)}_{1} e^{-sx} dx$$

$(x<c) \qquad (x>c)$

$$= \int_c^\infty e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_c^\infty$$

$$= \frac{1}{s} e^{-cs} \qquad (s>0)$$

$$\Rightarrow L\{u_c(x)\} = \frac{e^{-sc}}{s} \quad (s>0)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-sc}}{s}\right\} = u_c(x)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & 0\le x<\pi/4 \\ \sin x+\cos(x-\pi/4) & x\ge \pi/4 \end{cases}$$

را بیابید.

برای حل این مسئله، لازم است که خاصیت انتقال نوع دوم را بیان کنیم.

۴- خاصیت انتقال نوع دوم: اگر $L\{f(x)\}=F(S)$ آنگاه:

انتقال بر محور x ها.

$$\boxed{L\{u_c(x)\,f(x-c)\}=e^{-cS}F(S)}$$

در واقع:

$$L\{u_c(x)f(x-c)\}=\int_0^\infty u_c(x)f(x-c)e^{-sx}dx \quad \to \int_0^c + \int_c^\infty$$

$$=\int_c^\infty f(x-c)e^{-sx}dx=\int_0^\infty f(t)\,e^{-s(t+c)}dt$$

$$\begin{cases} x-c=t \to x=t+c \\ dx=dt \end{cases}$$

$$=e^{-Sc}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt}_{F(S)}$$

$$=e^{-Sc}F(S)$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{u_c(x)\,f(x-c)\}=e^{-Sc}F(S)} \quad **$$

If $L\{f(x)\}=F(S)$

$$g(x)=\begin{cases} f(x-c) & x\ge c \\ 0 & x<c \end{cases} \qquad g(x)=u_c(x)\,f(x-c)=\begin{cases} 0 & \underbrace{x<c}_{u_c=0} \\ f(x-c) & \underbrace{x\ge c}_{u_c=1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L\{g(x)\}=e^{-Sc}F(S)$$

تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < \pi/4 \\ \sin x + \cos(x - \pi/4) & x \ge \pi/4 \end{cases}$ را حال تبدیل لاپلاس بیابید.

$$f(x) = \sin x + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{محل تغییر ضابطه تابع}}}{u_{\pi/4}(x)} \cos(x - \pi/4) = \begin{cases} \sin x & x < \pi/4 \Rightarrow u_{\pi/4}(x) = 0 \\ \sin x + \cos(x - \pi/4) & x \ge \pi/4 \Rightarrow u_{\pi/4}(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L\{f(x)\} = L\{\sin x\} + L\{u_{\pi/4}(x) \cos(x - \pi/4)\}$$

طبق (**)

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi/4\, s} \frac{s}{s^2+1}$$

مثال) لاپلاس وارون $F(s) = \dfrac{1 - e^{-2s}}{s^2}$ را بیابید.

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{1/s^2\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$$

$$L^{-1}\{e^{-sc} F(s)\} = u_c(x) f(x-c)$$

$$= x - u_2(x)(x-2)$$

$$= \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \Rightarrow u_2(x) = 0 \\ 2 & x \ge 2 \Rightarrow u_2(x) = 1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\{1/s^2\} = x = f(x)$$

$$L^{-1}\left\{e^{-sc} \frac{1}{s^2}\right\} = u_c(x) f(x-c) = u_c(x)(x-c)$$

در اینجا $c = 2$.

تمرین: معادله دیفرانسیل

$$y'' + 3y' + 2y = g(x) \qquad y(0)=0 \,,\ y'(0)=0$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

را حل کنید.

(ص ۴۲۴ دکتر نیکوکار مشابه این مساله هست)

تمرین: تبدیل لاپلاس $f(x) = \cos^2 x \sinh x$ را بیابید.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

فرض: f و f' تبدیل لاپلاس داشته باشند.

تبدیل لاپلاس مشتق: فرض کنید $L\{f(x)\} = F(s)$ ، در این صورت

$$L\{f'(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)\,dx = e^{-sx} f(x)\Big|_0^{\infty} + s\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx}_{F(s)}$$

جزء به جزء
$$\begin{cases} e^{-sx} = u \\ f'(x)\,dx = dv \end{cases} \Rightarrow \quad du = -s e^{-sx} dx \qquad v = f(x)$$

$$= -f(0) + sF(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{cases} L\{f''(x)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \\ L\{f'''(x)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \\ \vdots \\ L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{cases}$$

مثال/ تبدیل لاپلاس $f(x) = \cos^2 x$ را با استفاده از مشتق به دست آورید.

$$f(x) = \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$L\{f'(x)\} = L\{-\sin 2x\} = \frac{-2}{s^2+4}$$

$$L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0) = sL\{\cos^2 x\} - 1 = \frac{-2}{s^2+4} \Rightarrow L\{\cos^2 x\} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

مثال) معادله های زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

(۱) $y''-2y'-3y=0 \quad , \quad y(0)=1, \quad y'(0)=7$

حل: فرض کنیم جواب مساله، $y(x)$ باشد و تبدیل لاپلاس تابع مجهول $y(x)$، $L\{y(x)\}$ یا $Y(S)$ باشد، یعنی $L\{y(x)\}=Y(S)$ ، لذا داریم:

$L\{0\}=0$

$$L\{y''-2y'-3y\}=L\{y''\}-2L\{y'\}-3L\{y\}=0$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-s\overbrace{y(0)}^{1}-\overbrace{y'(0)}^{7}-2sY(s)+2\overbrace{y(0)}^{1}-3Y(s)=0$$

$$Y(s^2-2s-3)=s+5$$

$$Y=\frac{s+5}{s^2-2s-3}=\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

می‌دانیم: $L^{-1}\{Y(s)\}=y(x)$

$$\Rightarrow y(x)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=2e^{3x}-e^{-x}$$

$y''-2y'-3y=0 \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=7$

$\downarrow$

معادله مشخصه $\lambda^2-2\lambda-3=0$ ، $\lambda=3$ ، $\lambda=-1$ $\Rightarrow y_g(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$

$y'(x)=-c_1e^{-x}+3c_2e^{3x}$

$$\begin{cases} y(0)=1 \Rightarrow 1=c_1+c_2 \longrightarrow c_1=-1 \\ y'(0)=7 \Rightarrow 7=-c_1+3c_2 \end{cases}$$

$4c_2=8 \Rightarrow c_2=2$

$$\Longrightarrow y=-e^{-x}+2e^{3x}$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x} \qquad y(0) = 2 \,, \quad y'(0) = -1$

حل: فرض کنیم $y(x)$ جواب معادله و $Y(S)$ تبدیل لاپلاس آن باشد.

$$L\{y'' - 3y' + 2y\} = \underbrace{L\{2e^{-x}\}}_{2L\{e^{-x}\}} \longrightarrow \frac{1}{S+1}$$

$$\Rightarrow L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 2/(S+1)$$

$$\Rightarrow S^2Y - S\underbrace{y(0)}_{2} - \underbrace{y'(0)}_{-1} - 3SY + 3\underbrace{y(0)}_{2} + 2Y = \frac{2}{S+1}$$

$$Y(S^2 - 3S + 2) = \frac{2}{S+1} + 2S - 7$$

$$\Rightarrow Y = \frac{2S^2 - 5S - 5}{(S+1)(S-1)(S-2)} = \frac{1/3}{S+1} + \frac{4}{S-1} + \frac{(-7/3)}{S-2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \tfrac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\} + 4 L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\} - \tfrac{7}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{S-2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3} e^{-x} + 4e^{x} - \tfrac{7}{3} e^{2x}$$

تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع: فرض کنید $L\{f(x)\}=F(S)$ ، در این صورت

$$L\left\{\int_0^x f(r)\,dr\right\}=\frac{F(S)}{S}$$

قرار می‌دهم:

$$g(x)=\int_0^x f(r)\,dr \Rightarrow g'(x)=f(x) \Rightarrow \underbrace{L\{g'(x)\}}_{\parallel}=L\{f(x)\}=F(S)$$

$$S\,L\{g(x)\}-\underbrace{g(0)}_{0}$$

$$\Rightarrow L\{g(x)\}=\frac{F(S)}{S}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^x f(r)\,dr\right\}=\frac{F(S)}{S}\ (*1) \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{F(S)}{S}\right\}=\int_0^x f(r)\,dr\ (*2)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع $h(x)=\int_0^x \sin r\,dr$ را بیابید.

$$L\{h(x)\}=?$$

$$f(x)=\sin x \quad , \quad F(S)=\frac{1}{S^2+1}$$

$$\xRightarrow{\text{طبق } (*1)} L\left\{\int_0^x \sin r\,dr\right\}=\frac{F(S)}{S}=\frac{1}{S(S^2+1)}$$

مثال/ تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{S(S+2)}$ را بیابید.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}=e^{-2x}=f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{طبق } (*2)} L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{S+2}}{S}\right\}=\int_0^x e^{-2r}\,dr=-\frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^x$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2x})$$

مثال/ به کمک تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' = 1 \quad , \quad y(0)=0 \, , \, y'(0)=0$$

را حل کنید. فرض کنیم $y(x)$ جواب معادله و $L\{y(x)\} = Y(s)$ ،

$$L\{y''\} - 4L\{y'\} = L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} - 4sY + 4\underbrace{y(0)}_{0} = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 - 4s)\,Y = \frac{1}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2(s-4)}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-4)}\right\}$$

حال می‌دانیم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = \underset{f(x)}{\overset{\parallel}{e^{4x}}} \, , \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-4}\right)\right\} \overset{\text{طبق (*۲)}}{=} \int_0^x e^{4r}\,dr$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{4x} - 1\right) = g(x)$$

$$L^{-1}\{G(s)\} = g(x) \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^x g(r)\,dr$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right)\right\} = \frac{1}{4}\int_0^x \left(e^{4r} - 1\right)dr$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4} - x\right)$$

پیچش Convolution :

پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را با نماد $(f*g)(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$$

در g، $t \to t-x$

خواص Convolution :

① $f*g=g*f$ خاصیت جابه‌جایی

② $f*(g+h)=f*g+f*h$ خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی)

③ $f*(g*h)=(f*g)*h$ خاصیت شرکت‌پذیری

④ $f*0=0*f=0$

⑤ $f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$

دقت کنید که $1*f=f*1$ می‌باشد اما در حالت کلی لزوماً $1*f=f$ نیست.

$$\begin{cases} 1*\cos t=\int_0^t 1\times\cos(t-x)\,dx=\int_t^0-\cos u\,du=\int_0^t\cos u\,du \\ \begin{cases} t-x=u \\ -dx=du \end{cases} \end{cases}$$

$$=\sin u\Big|_0^t=\sin t$$

بنابراین در حالت کلی $1*f\neq f$

قضیه: اگر $L\{f(x)\} = F(s)$, $L\{g(x)\} = G(s)$ آنگاه

$$L\{(f*g)(x)\} = L\{f(x)\} \cdot L\{g(x)\} = F(s)G(s)$$

و

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f*g)(x)$$

مثال/ تبدیل معکوس تابع $\dfrac{1}{(s-2)(s+3)}$ را بیابید.

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad G(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(x) = e^{2x} \qquad g(x) = e^{-3x}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s+3)}\right\} = (f*g)(x)$$

$$= \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$\Rightarrow = \int_0^x e^{2t} e^{-3(x-t)} dt = e^{-3x} \underbrace{\int_0^x e^{5t} dt}_{\frac{1}{5} e^{5t} \Big|_0^x = \frac{1}{5}(e^{5x} - 1)}$$

$$= \frac{1}{5} e^{-3x} (e^{5x} - 1)$$

مثال / تبدیل معکوس تابع $F(s) = \dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ را بیابید.

می‌دانیم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(ax)$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2}\right\}$$

$$= x * \sin(ax)_{\,x \mapsto x-t}$$

$$= \int_0^x t \sin(a(x-t))\,dt$$

جزء به جزء $\begin{cases} t = u \\ \sin(a(x-t))dt = dv \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} dt = du \\ \frac{1}{a}\cos(a(x-t)) = v \end{matrix}$

$$= \frac{t}{a}\cos(a(x-t))\Big|_0^x - \frac{1}{a}\int_0^x \underbrace{\cos(a(x-t))\,dt}_{-\frac{1}{a}\sin(a(x-t))\big|_0^x}$$

بازه تغییرات t ← 0

$-\frac{1}{a}(0 - \sin(ax))$ بازه تغییرات t

$$= \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\sin(ax)$$

$$= \frac{ax - \sin(ax)}{a^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = \frac{ax - \sin(ax)}{a^2}$$

مثال/ معادله دیفرانسیل $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ ، $y''+4y=2\sin(3x)$ را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

فرض کنیم $y(x)$ جواب این معادله دیفرانسیل باشد و $L\{y(x)\}=Y(S)$

$$L\{y''+4y\}=L\{2\sin(3x)\}$$

$$\Rightarrow L\{y''\}+4L\{y\}=2L\{\sin(3x)\}=2\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$\Rightarrow s^2Y-s\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+4Y=\frac{6}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow Y(s^2+4)=\frac{6}{s^2+9}\Rightarrow Y=\frac{6}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$\Rightarrow y(x)=L^{-1}\{Y\}=L^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{3}{s^2+9}}_{F(S)}\cdot\underbrace{\frac{2}{s^2+4}}_{G(S)}\Big\}$$

می دانیم: $L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}=\sin 3x$ و $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\sin 2x$

بنابراین: Convolution طبق قضیه

$$(f*g)(x)=\int_0^x \sin(3t)\sin(2(x-t))\,dt$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\sin(2x)-\sin(3x)\right)$$

تذکره: معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد.
و معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز باشد.

مثال/ معادله

$$y(x) = e^{-x} - 2\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\, dt$$

را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$L\{y(x)\} = L\{e^{-x}\} - 2L\underbrace{\left\{\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\, dt\right\}}_{}$$

$$L\left\{\int_0^x y(t) \cos(x-t)\, dt\right\}$$

$$\parallel$$

$$L\{y * \cos x\} = L\{y\} \cdot L\{\cos x\}$$

Convolution طبق قضیه

$$Y(S) = \frac{1}{S+1} - 2Y\frac{S}{S^2+1}$$

$$Y + 2Y\frac{S}{S^2+1} = \frac{1}{S+1} \Rightarrow Y = \frac{S^2+1}{(S+1)^3} = \frac{A}{S+1} + \frac{B}{(S+1)^2} + \frac{C}{(S+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 1,\quad B = -2,\quad C = 2}$$

$$y(x) = L^{-1}\{Y(S)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^3}\right\}$$

$$= e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\frac{x^2}{2!} e^{-x}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-x}(x-1)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(S+1)}}_{F(S)}\ \underbrace{\frac{1}{(S+1)}}_{G(S)}\right\} = (f*g)(x) = e^{-x} * e^{-x} = \cdots$$

?

:

مثال / معادله دیفرانسیل انتگرالی

$$y''(x)+y'(x)=\cos x+\int_0^x \sin(x-t)\,y'(t)\,dt$$

$y(0)=0\ ,\ y'(0)=0$ را حل کنید.

فرض کنیم $y(x)$ جواب معادله فوق باشد و $L\{y(x)\}=Y(S)$.

حل: از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{y''\}+L\{y'\}=L\{\cos x\}+L\left\{\int_0^x \sin(x-t)\,y'(t)\,dt\right\}$$

$$s^2Y-s\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+sY-\underbrace{y(0)}_{0}=\frac{s}{s^2+1}+L\{y'(x)*\sin x\}$$

$$L\{y'(x)*\sin x\} = \underbrace{L\{y'\}}_{sY-y(0)}\cdot \underbrace{L\{\sin x\}}_{\frac{1}{s^2+1}} \qquad y(0)=0$$

$$\Rightarrow s^2Y+sY=\frac{s}{s^2+1}+\frac{sY}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

$$y(x)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+s+1}}_{G(s)}\right\}$$

$$=(f*g)(x)$$

$$=(1*g)(x)$$

حال باید g را بیابیم، یعنی $L^{-1}\{G(s)\}=g(x)$،

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} \qquad (a=-\tfrac{1}{2})$$

$(S-(-\frac{1}{2}))^2$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

خاصیت انتقال نوع اول:

$$L\{f(x)\}=F(s)$$

$$\Rightarrow L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$$

$$\Downarrow$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{ax}f(x)$$

$$s\longrightarrow s-a$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin(ax)$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+s+1}\right\}$$

$$= 1 * \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \stackrel{1}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) * 1$$

$$= \int_0^x \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) dt$$

در نهایت با انتگرال گیری جزء به جز انتگرال فوق را محاسبه کرده و جواب نهایی یعنی $y(x)$ را می‌یابیم.

تعریف: تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T گوئیم، هرگاه

$$\forall x \in D_f ; \quad f(x+T) = f(x)$$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

برای $f(x)=\sin x$ ، $T=2\pi$.

قضیه: فرض کنید f تابعی قطعه‌ای پیوسته و متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه

$$\boxed{L\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx}$$

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^\infty e^{-sx} f(x)\,dx}$$

تغییر متغیر $\begin{cases} x = t+T \Rightarrow t = x-T \\ dx = dt \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-s(t+T)} f(t+T)\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{f(t+T)}_{\substack{f \text{ متناوب} \\ \| \\ f(t)}}\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx + e^{-sT} \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx}_{L\{f(x)\}}$$

$$\Rightarrow \quad (1-e^{-sT})\, L\{f(x)\} = \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx}$$

مثال/ تبدیل لاپلاس $f(x)=\sin x$ را پیدا کنید.

با استفاده از دوره تناوب $T=2\pi$

می‌دانیم: $L\{f(x)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx$

$$L\{\sin x\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{-sx}}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}}_{I} \quad (*)$$

جزء به جزء
$$\begin{cases} e^{-sx}=u \\ \sin x\,dx=dv\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} du=-se^{-sx}dx \\ v=-\cos x\end{array}$$

$$\Rightarrow I=-\cos x\, e^{-sx}-s\underbrace{\int e^{-sx}\cos x\,dx}_{I_1}$$

جزء به جزء I_1
$$\begin{cases} e^{-sx}=u \\ \cos x\,dx=dv\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} du=-se^{-sx}dx \\ v=\sin x\end{array}$$

$$\Rightarrow I_1=\sin x\, e^{-sx}+s\underbrace{\int e^{-sx}\sin x\,dx}_{I}$$

$$\Longrightarrow I=-\cos x\, e^{-sx}-s\left(\sin x\, e^{-sx}+sI\right)$$

$$\Rightarrow (1+s^2)I=-\cos x\, e^{-sx}-s\sin x\, e^{-sx}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow (1+s^2)I=\left(-e^{-2\pi s}-(-1)\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1-e^{-2\pi s}}{1+s^2}$$

$(*)$ طبق

$$\Longrightarrow L\{\sin x\}=\frac{1}{\cancel{1-e^{-2\pi s}}}\times\frac{\cancel{1-e^{-2\pi s}}}{1+s^2}=\frac{1}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow L\{\sin x\}=\frac{1}{1+s^2}$$

Scanned with CamScanner

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس :

قضیه : فرض کنیم $L\{f(x)\} = F(s)$ ، در این صورت

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx\right)$$

$$= \int_0^\infty -x e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= L\{-x f(x)\}$$

$$\overset{\text{خاصیت خطی بودن}}{=} -L\{x f(x)\}$$

به همین ترتیب ، داریم:

$$F''(s) = L\{x^2 f(x)\}$$

,

$\vdots$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n L\{x^n f(x)\}$$

یا

$$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n x^n f(x)$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع $g(x) = x\cos(ax)$ را بیابید.

$$f(x) = \cos ax \quad \Rightarrow \quad L\{\cos ax\} = F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

می‌دانیم

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

بنابراین

$$L\{x\cos(ax)\} = (-1)^1 F'(s) = (-1) \times \frac{(s^2+a^2) - 2s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\{x\cos(ax)\} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

تمرین: تبدیل لاپلاس تابع $g(x) = x^2 e^{-2x}\sin x$ را بیابید.

مثال/ تبدیل لاپلاس $g(x) = xe^{-x}\cos x$ را بیابید.

$$L\{x\underbrace{e^{-x}\cos x}_{f(x)}\} = L\{x\,f(x)\} = ??$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x}\cos x \\ F(s) = L\{e^{-x}\cos x\} \end{cases}$$

یادآوری: اگر $L\{f(x)\} = F(s)$

$$L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$$

$$L\{\cos x\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

در $F(s)$ باید $s \to s-(-1) = s+1$:

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$\Rightarrow L\{x\,f(x)\} = -F'(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$= \frac{s^2+2s}{\left((s+1)^2+1\right)^2}$$

مثال/ مقدار انتگرال $\int_0^\infty xe^{-2x}\sin x\,dx$ را بیابید.

$$\int_0^\infty e^{\overset{s=2}{-2x}}(\underbrace{x\sin x}_{f(x)})\,dx = F(2)$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = F(s) = L\{f(x)\}$$

$$\begin{cases} F(s) = L\{x\sin x\} \\ = (-1)\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) \quad \dfrac{-2s}{(s^2+1)^2} \\ = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2} \end{cases}$$

$$= \frac{2\times 2}{(2^2+1)^2} = \frac{4}{25}$$

مثال/ اگر $F(s)=\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$ ، آنگاه $f(x)$ را بیابید.

$$\Downarrow$$

$$F'(s)=\frac{-1}{s(s-1)} \qquad (\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=(-1)^n x^n f(x):$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1}{s(s-1)}\right\}=(-1)x\,f(x) \Rightarrow -\frac{1}{x}L^{-1}\left\{\frac{-1}{s(s-1)}\right\}=f(x)$$

$$\frac{-1}{s(s-1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1}{s(s-1)}\right\}=L^{-1}\{1/s\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$=1-e^{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{e^{x}-1}{x}$$

انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس :

قضیه : فرض کنید $L\{f(x)\}=F(s)$ ، در این صورت :

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-sx}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_s^{\infty}F(x)\,dx$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع $g(x)=\frac{\sin ۳x}{x}$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(x)=\sin ۳x \\ F(s)=L\{\sin ۳x\}=\frac{۳}{s^۲+۹} \end{cases}$$

$$L\left\{\frac{\sin ۳x}{x}\right\}=\int_s^{\infty}\frac{۳}{x^۲+۹}\,dx$$

$$=tg^{-1}(x/۳)\Big|_s^{\infty}$$

$$=\pi/۲-tg^{-1}(s/۳)$$

مثال/ مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x - \cos(2x)}{x}\, dx$$

حل: ابتدا انتگرال زیر را محاسبه کرده و در نهایت $s=0$ قرار دهیم.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\cos x - \cos(2x)}{x}\, dx$$

$$= L\left\{ \frac{\overbrace{\cos x - \cos(2x)}^{f(x)}}{x} \right\}$$

$$f(x) = \cos x - \cos(2x)$$

$$L\{f(x)\} = F(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}$$

طبق قضیه بیان شده

$$= \int_s^{\infty} F(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(x^2+1) - \ln(x^2+4) \right) \Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 - \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right)$$

بنابراین

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\cos x - \cos(2x)}{x}\, dx = L\left\{ \frac{\cos x - \cos(2x)}{x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right) \Bigg|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos x - \cos(2x)}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln 2$$

مثال/ تبدیل لاپلاس تابع

$$e^{x}\int_0^{x} e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$$

را بیابید

$$L\left\{e^{x}\underbrace{\int_0^{x} e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt}_{f(x)}\right\} = L\{e^{x} f(x)\} \underset{\text{خاصیت انتقال نوع اول}}{=} F_1(S-1)$$

$$\underset{\text{تبدیل لاپلاس تابع } f(x)}{F_1(S)} = L\left\{\int_0^{x} e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} = \frac{F_2(S)}{S}$$

یادآوری:

$$L\left\{\int_0^{x} f(r)\,dr\right\} = \frac{F(S)}{S}$$

$$F_2(S) = L\left\{e^{-2t}\underbrace{\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)}_{g}\right\} \underset{\text{خاصیت انتقال نوع اول}}{=} F_3(S+2)$$

$$\underset{\text{تبدیل لاپلاس تابع } g}{F_3(S)} = L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} \underset{\text{انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس}}{=} \int_S^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

می‌دانیم

$$L\{1-e^{-t}\} = \frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Big|_S^{\infty}$$

$$= 0-\ln\left(\frac{S}{S+1}\right) = \ln\left(\frac{S+1}{S}\right)$$

$$\Rightarrow F_2(S) = F_3(S+2) = \ln\left(\frac{S+3}{S+2}\right)$$

و $F_1(S) = \frac{F_2(S)}{S} = \frac{1}{S}\ln\left(\frac{S+3}{S+2}\right)$

$$\Rightarrow L\left\{e^{x}\int_0^{x} e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} = F_1(S-1)$$

$$= \frac{1}{S-1}\ln\left(\frac{S+2}{S+1}\right)$$

مثال/ معادلات زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

(1) $xy' - y = x^2, \quad y(1)=2$

فرض کنیم $y(x)$ جواب معادله باشد و $L\{y(x)\} = Y(s)$.

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

یادآوری: $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

F لاپلاس f است

بنابراین

$$L\{x y'\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(L\{y'\}\right) = (-1)\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) = -\left(Y(s) + sY'(s) - 0\right)$$

$$L\{xy'\} - L\{y\} = L\{x^2\}$$

$$-sY'(s) - Y(s) - Y(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow sY'(s) + 2Y(s) = -2/s^3$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow Y'(s) + \underbrace{\frac{2}{s}}_{p} Y(s) = \underbrace{-2/s^4}_{q}$$

$$\mu(s) = e^{\int 2/s \, ds} = e^{2\ln s} = s^2$$

$$Y = \frac{1}{\mu(s)}\left[\int \mu(s) q(s) + c\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}\left[\int s^2(-2/s^4) + c\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}\left[2/s + c\right] = 2/s^3 + \frac{c}{s^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{2/s^3\} + L^{-1}\{c/s^2\}$$

$$= x^2 + cx$$

$$\Rightarrow y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1^2 + c \times 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 + x$$

۲) $xy'' - xy' + y = ۲ \quad , \quad y(0)=۲ \, , \; y'(0) = -٤$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$L\{xy''\} - L\{xy'\} + L\{y\} = L\{۲\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^۲ Y(s) - s\,y(0) - y'(0)\right) + \frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = ۲/s$$

$$\Rightarrow -۲sY(s) - s^۲Y'(s) + \underbrace{y(0)}_{۲} + Y(s) + sY'(s) + Y(s) = ۲/s$$

$$\Rightarrow Y'(s)\left(s - s^۲\right) + Y(s)(۲ - ۲s) + ۲ = ۲/s$$

طرفین تقسیم بر $(s-s^۲)$ $\Rightarrow$

$$Y'(s) + \underbrace{\frac{۲}{s}}_{p} Y(s) = \underbrace{\frac{۲}{s^۲}}_{q}$$

$$\begin{cases} \mu(s) = e^{\int ۲/s\, ds} = s^۲ \\ Y(s) = \dfrac{1}{\mu(s)}\left[\int \mu(s) q(s)\, ds + c\right] \\ \quad = \dfrac{1}{s^۲}\left[\underbrace{\int s^۲ (۲/s^۲)\, ds + c}_{۲s + c}\right] = ۲/s + \dfrac{c}{s^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{۲/s\} + L^{-1}\{c/s^۲\}$$

$$= ۲ + cx$$

$$\begin{cases} y(x) = ۲ + cx \\ y'(x) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y(0) = ۲ \\ y'(0) = -٤ \end{matrix} \Rightarrow c = -٤ \Rightarrow \boxed{y(x) = ۲ - ٤x}$$

مثال/ تبدیل لاپلاس $J_0(x)$ را بیابید.

حل/ می‌دانیم $J_0(x)$ جواب معادله

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 0)y = 0$$

تقسیم بر x $\Rightarrow$ $(x \neq 0)$

$$xy'' + y' + xy = 0$$

$$\begin{cases} J_0(x) = y_0(x) \\ \Downarrow \\ J_0(0) = y_0(0) = 1 \end{cases}$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم $\Rightarrow$

$$-\frac{d}{ds}L\{y''\} + L\{y'\} - \frac{d}{ds}L\{y\} = L\{0\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0}\right) + \left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}\right) - Y'(s) = 0$$

یادآوری: $\begin{cases} J_0(0) = 1 \\ J_1(0) = 0 \end{cases}$

$$\left(-2sY(s) - s^2Y'(s) + \cancel{1}\right) + \left(sY(s) - \cancel{1}\right) - Y'(s) = 0$$

$$Y'(s)(-s^2-1) + Y(s)(-s) = 0$$

$$\Rightarrow Y'(s)(1+s^2) = -sY(s) \Rightarrow Y'(s) + \underbrace{\frac{s}{1+s^2}}_{p}Y(s) = \underbrace{0}_{q}$$

$$\mu(s) = e^{\int \frac{s}{1+s^2}ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+s^2)} = \sqrt{1+s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\mu(s)}\left[\int \mu(s)\overset{0}{\cancel{q(s)}}\,ds + c\right] = \frac{c}{\sqrt{1+s^2}} \quad (*)$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y_0(x) \Rightarrow L\{y_0(x)\} = L\{J_0(x)\} = Y(s)$$

$c = ?$

۱) $$\left(L\{J_0'(x)\} = s\underbrace{L\{J_0(x)\}}\, - \overset{1}{\cancel{J_0(0)}} \overset{(*)\ \text{طبق}}{=} \frac{cs}{\sqrt{1+s^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{s\to+\infty}(L\{J_0'(x)\}) = 0 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1$$

۲) $$\begin{cases} L\{y(x)\} = L\{J_0(x)\} = Y(s) = \frac{c}{\sqrt{1+s^2}} \\ \text{قضیه مقدار ابتدایی}: \quad \lim_{s\to+\infty} sY(s) = c = \lim_{x\to 0^+} y(x) = J_0(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}}$$

قضیه مقدار ابتدایی و مقدار انتهایی :

فرض کنید $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود و متناهی باشند، در این صورت :

① $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{S\to +\infty} SF(S)$ (قضیه مقدار ابتدایی)

② $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{S\to 0} SF(S)$ (قضیه مقدار انتهایی)

$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$

حال برای محاسبه $L\{J_1(x)\}$ داریم :

$\underset{\nu=0}{\Longrightarrow} -J'_0(x) = J_1(x)$

$$\Rightarrow L\{J_1(x)\} = -L\{J'_0(x)\}$$
$$= -(SL\{J_0(x)\} - \overset{1}{J_0(0)})$$
$$= 1 - \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} = \frac{\sqrt{1+S^2} - S}{\sqrt{1+S^2}}$$

حال $J_0(\sqrt{x})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$J_0(\sqrt{x}) \underset{\nu=0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2\, 2^{2n}}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(\sqrt{x})\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)}{(n!)^2\, 2^{2n}\, S^{n+1}}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(\sqrt{x})\} = \frac{1}{S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4S}\right)^n}{n!} = \frac{1}{S} e^{-1/4S}$$

حال $J_0(2x)$ را محاسبه میکنیم.

یادآوری : $L\{f(x)\} = F(s)$

$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

$$L\{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(2x)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+s^2}}$$

و در حالت کلی داریم :

$$L\{J_0(ax)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

تمرین :

$$L\{J_n(x)\} = \frac{\left(\sqrt{1+s^2}-s\right)^n}{\sqrt{1+s^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال/ معادله دیفرانسیل را حل کنید.

$$xy'' + y' + 4xy = 0 , \quad y(0)=3, \; y'(0)=0$$

لاپلاس می‌گیریم

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)+4\left(-\frac{d}{ds}(Y(s))\right)=0$$

$$-\underline{\underline{2sY(s)}} - s^2Y'(s) + \underbrace{\cancel{y(0)}}_{3} + \underline{\underline{sY(s)}} - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{3} - 4Y'(s)=0$$

$$Y'(s)(-s^2-4) - sY(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y'(s) + \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{p} Y(s) = \underbrace{0}_{q}$$

$$\Rightarrow \mu(s) = e^{\int \frac{s}{s^2+4}ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+4)} = \sqrt{s^2+4}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{\mu(s)}\left[\int \cancel{\mu(s)q(s)}^{\,0} + c\right] = \frac{c}{\sqrt{4+s^2}}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{c}{\sqrt{4+s^2}}\right\} = c\,L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{4+s^2}}\right\}$$

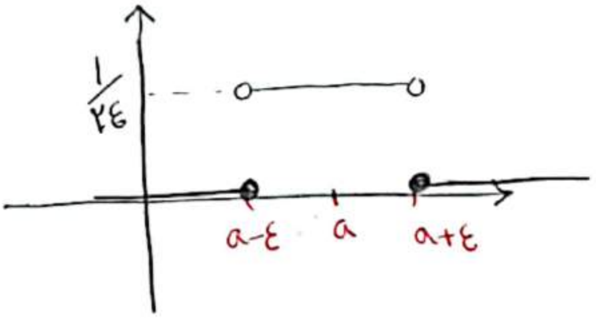
$$= c\,J_0(2x)$$

$$\xRightarrow{y(0)=3} \quad 3 = c\,\underbrace{J_0(2\times 0)}_{J_0(0)=1} \Rightarrow c=3$$

$$y(x) = 3\,J_0(2x)$$

تابع ضربه (تابع دلتای دیراک):

$$\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & |x-a|<\varepsilon\\ 0 & |x-a|\geqslant \varepsilon\end{cases}$$



در این صورت $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-a)$ را تابع ضربه یا تابع دلتای دیراک می‌نامند و با نماد $\delta(x-a)$ نمایش می‌دهند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x-a)\,dx=\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}0\,dx+\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\,dx+\int_{a+\varepsilon}^{\infty}0\,dx$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\,x\Big|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}=1$$

$$\delta(x-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}\infty & x=a\\ 0 & x\neq a\end{cases}$$

قضیه: فرض کنید $L\{\delta(x-a)\}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}L\{\delta_\varepsilon(x-a)\}$ در این صورت

$$L\{\delta(x-a)\,f(x)\}=e^{-as}f(a)$$

$$L\{\delta(x-a)\}=e^{-as}$$

$$L\{\delta(x)\}=1$$

تمرین: اگر f تابع پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,f(x)\,dx=f(a)$$

تذکر: طریقه‌ی نوشتن تابع چند ضابطه‌ای برحسب تابع پله‌ای :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & 0\leq x < c \\ f_2(x) & x\geq c \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f_1(x)+\left(f_2(x)-f_1(x)\right)u_c(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} f_1 & 0\leq x < a_1 \\ f_2 & a_1\leq x < a_2 \\ f_3 & a_2\leq x < a_3 \\ f_4 & a_3\leq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f_1+(f_2-f_1)u_{a_1}(x)+(f_3-f_2)u_{a_2}(x)+(f_4-f_3)u_{a_3}(x)$$

به طور مثال/ تبدیل لاپلاس

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & 0\leq x < \pi \\ 0 & \pi\leq x < 2\pi \\ \sin x & x\geq 2\pi \end{cases}$$

را بیابید

$$\Rightarrow\ f(x)=\cos x-\cos x\, u_\pi(x)+\sin x\, u_{2\pi}(x)$$

$$=\cos x+\cos(x-\pi)\,u_\pi(x)+\sin(x-2\pi)\,u_{2\pi}(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل :

روش های حل دستگاه :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

۱- روش تبدیل لاپلاس

۲- روش حذفی

۳- روش مقادیر ویژه

۴- روش ضرایب نامعین ۵- روش اپراتورها

در اینجا درس این ۳ روش را بررسی می‌کنیم

۱- روش حذفی :

مثال/ جواب عمومی دستگاه
$$\begin{cases} x' = -6x + 4y \\ y' = -2x \end{cases}$$
را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = x(t) = ? \\ y = y(t) = ? \end{cases}$$

دقت کنید در روش حذفی، با حذف کردن تابع های مجهول و مشتقات این توابع، معادله ای به دست می‌آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد و با حل این معادله، یکی از توابع مجهول به دست می‌آید و سپس سایر تابع های مجهول را به دست می‌آوریم.

حل : از معادله اول نسبت به t مشتق می‌گیریم
$$\Rightarrow x''(t) = -6x'(t) + 4y'(t)$$

حال طبق معادله دوم، $y'(t) = -2x(t)$، لذا

$$x''(t) = -6x'(t) + 4(-2x(t))$$

$$\Rightarrow x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = 0$$
(معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ خطی، با ضرایب ثابت)

معادله مشخصه: $r^2 + 6r + 8 = 0$ $\begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -4 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}}$

حال از معادله دوم، داریم:

$$y'(t) = -2x(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t})$$

$$\Rightarrow dy = \left(-2(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t})\right) dt$$

انتگرال می‌گیریم

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{-2t} + \frac{c_2}{2} e^{-4t}$$

مثال/ دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y_1'' = y_2 + 1 \\ y_2'' = y_1 + x \end{cases}$$

را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1(x) = ? \\ y_2(x) = ? \end{cases}$$

حل: از معادله اول دو بار مشتق می‌گیریم، داریم:

$$y_1^{(4)} = y_2'' \quad (*)$$

همچنین از معادله دوم، $y_2'' = y_1 + x$، لذا در $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$y_1^{(4)} = y_1 + x \Rightarrow y_1^{(4)} - y_1 = x$$

$\alpha+\beta i, \alpha-\beta i$

$\hookrightarrow e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$

$$\lambda^4 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda = -i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{1g} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \\ y_{1p} = (ax+b) \times x^{0} \end{cases}$$

$x^0 \rightarrow$ تعداد ریشه‌های صفر در معادله مشخصه

$$\Downarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{1p} = -x}$$

$$\Rightarrow y_{1G} = y_{1g} + y_{1p}$$

$$\Rightarrow y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - x$$

حال با دو بار مشتق‌گیری از y_1 و جایگذاری در معادله اول یعنی $y_2 = y_1'' - 1$، داریم:

$$y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x - 1$$

۲- روش تبدیل لاپلاس :

مثال/ دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^x \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y_1(0)=2, & y_1'(0)=3 \\ y_2(0)=1, & y_2'(0)=2 \end{matrix}$$

حل: فرض کنیم $L\{y_1(x)\}=Y_1(s)$ و $L\{y_2(x)\}=Y_2(s)$. حال از طرفین دستگاه مورد نظر لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} L\{y_2''\} - 4L\{y_1\} = -4L\{e^x\} \\ L\{y_1''\} - L\{y_1\} = 3L\{y_2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(s^2Y_2 - s\underbrace{y_2(0)}_{1} - \underbrace{y_2'(0)}_{2}\right) - 4Y_1 = \dfrac{-4}{s-1} \\ \left(s^2Y_1 - s\underbrace{y_1(0)}_{2} - \underbrace{y_1'(0)}_{3}\right) - Y_1 = 3Y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2Y_2 - 4Y_1 = \dfrac{-4}{s-1} + s + 2 = \dfrac{s^2+s-6}{s-1} \\ -3Y_2 + (s^2-1)Y_1 = 2s+3 \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s^2+s-6}{s-1} & s^2 \\ 2s+3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2-1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = L^{-1}\{Y_1(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$y_1(x) = e^x + e^{2x}$$

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & \dfrac{s^2+s-6}{s-1} \\ s^2-1 & 2s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2-1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = L^{-1}\{Y_2(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = e^{2x}$$

تمرین: دستگاه معادله دیفرانسیل مورد نظر را با روش حذفی نیز حل کنید.

مثال/ دستگاه معادلات زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2\sinh x \\ y_2' + y_3' = e^x \\ y_3' + y_1' = 2e^x + e^{-x} \end{cases} \qquad y_1(0)=1,\ y_2(0)=1,\ y_3(0)=0$$

فرض کنیم:

$L\{y_1(x)\} = Y_1,\ L\{y_2(x)\} = Y_2,\ L\{y_3(x)\} = Y_3$

حل: از طرفین دستگاه فوق لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} (sY_1 - \underbrace{y_1(0)}_{1}) + (sY_2 - \underbrace{y_2(0)}_{1}) = \dfrac{2}{s^2-1} \\ (sY_2 - \underbrace{y_2(0)}_{1}) + (sY_3 - \underbrace{y_3(0)}_{0}) = \dfrac{1}{s-1} \\ (sY_3 - \underbrace{y_3(0)}_{0}) + (sY_1 - \underbrace{y_1(0)}_{1}) = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sY_1 + sY_2 - 2 = \dfrac{2}{s^2-1} \\ sY_2 + sY_3 - 1 = \dfrac{1}{s-1} \\ sY_3 + sY_1 - 1 = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق داریم:

$$Y_1 = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s(s^2-1)} + \frac{1}{s}$$

$$\begin{cases} L\{f(x)\} = F(s) \\ L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \displaystyle\int_0^x f(r)\,dr \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = L^{-1}\{Y_1(s)\} = \sinh x + \int_0^x \sinh(r)\,dr + 1$$

$$\boxed{y_1(x) = \underbrace{\sinh x + \cosh x}\ \cancel{-1+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = e^x}$$

$$Y_{۲} = \frac{1}{s(s^{۲}-1)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^{۲}-1}$$

$$y_{۲}(x) = L^{-1}\{Y_{۲}(s)\} = \cosh x \cancel{-1} \cancel{+1} - \sinh x$$

$$\Rightarrow \quad y_{۲}(x) = e^{-x}$$

$$Y_{۳} = \frac{۲}{s^{۲}-1}$$

$$y_{۳}(x) = L^{-1}\{Y_{۳}(s)\} = ۲\sinh x$$

$$\Rightarrow \quad y_{۳}(x) = ۲\sinh x$$

روش مقادیر ویژه :

$A_{n\times n}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$ ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه ماتریس A است و بردار ناصفر v $(v\neq 0)$ که $Av=\lambda v$

یادآوری:

یا به عبارتی $(A-\lambda I)v=0$ ، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه را گویند.

$A_{n\times n} \rightarrow v=\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}_{n\times 1}$

دقت کنید که بردار ویژه یکتا نیست و هر مضربی از v نیز می‌تواند بردار ویژه متناظر با λ باشد.

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)+g_1(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)+g_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)+g_n(t) \end{cases}$$

که می‌توان دستگاه را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\underbrace{X'(t)=AX(t)+G(t)}_{\text{ناهمگن}} \qquad (1)$$

که در آن:

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t)=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad G(t)=\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

در حالت همگن، یعنی وقتی $G(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ، داریم:

$$X'(t)=AX(t) \qquad (2)$$

در حالت همگن، $X(t)=Ve^{\lambda t}$ جواب دستگاه (۲) می باشد.

$$\boxed{X'(t)=AX(t) \quad (۲)}$$

$$X(t)=Ve^{\lambda t} \Rightarrow X'(t)=\lambda Ve^{\lambda t}$$

با جایگذاری در (۲) داریم:

$$\lambda Ve^{\lambda t}=AVe^{\lambda t} \Rightarrow \lambda V=AV$$

که طبق تعریف بردار ویژه، تساوی فوق برقرار است و λ مقادیر ویژه ماتریس A می باشد.

حال برای مقادیر ویژه A که از رابطه $\underbrace{\det(A-\lambda I)=0}_{\text{معادله مشخصه یا مفسر}}$ استخراج می شود، ۳ حالت زیر رخ می دهد:

۱- مقادیر ویژه ماتریس A متمایز باشند: فرض کنیم λ_1، λ_2، ...، و λ_n مقادیر ویژه متمایز ماتریس A باشند، در این صورت $X_i(t)=V_ie^{\lambda_i t}$ $\quad i=1,2,\dots,n$ که در آن V_iها بردارهای ویژه های نظیر مقادیر ویژه λ_i می باشد و از رابطه $AV_i=\lambda_iV_i$ استخراج می شود و در این صورت جواب عمومی دستگاه (۲) عبارت است از:

$$X(t)=c_1V_1e^{\lambda_1 t}+c_2V_2e^{\lambda_2 t}+\dots+c_nV_ne^{\lambda_n t}$$

مثال/ جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - 3y \\ y'(t) = -x + 5y \end{cases}$$

را به روش مقادیر ویژه به دست آورید.

حل: ابتدا دستگاه فوق را به فرم ماتریسی بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 6$$

چون مقادیر ویژه متمایز هستند، دو جواب مستقل خطی این دستگاه به صورت:

$$X_1(t) = V_1 e^{2t} \quad , \quad X_2(t) = V_2 e^{6t}$$

خواهند بود که V_1 و V_2 از دستگاه $AV_1 = 2V_1$ و $AV_2 = 6V_2$ استخراج می‌شوند، که

$V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ و $V_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 = 2v_1 \\ -v_1 + 5v_2 = 2v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 3v_2$$

بنابراین $V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ، حال برای سهولت قرار می‌دهیم $v_2 = 1$ ، لذا

$$V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

with CamScanner

$A\vec{V}_2 = 4\vec{V}_2$

به همین ترتیب $\vec{V}_2$ را می‌یابیم:

$$\begin{bmatrix}3 & -3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4w_1\\ 4w_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3w_1 - 3w_2 = 4w_1\\ -w_1 + 5w_2 = 4w_2\end{cases} \Rightarrow w_1 = -w_2$$

$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_1\\ -w_1\end{bmatrix}$ ، برای سهولت قرار می‌دهیم $w_1 = 1$ ، لذا

و بنابراین

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \Rightarrow X_2(t) = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{4t}$$

در واقع w_1 و w_2 را طوری قرار می‌دهیم که $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مستقل خطی شوند یعنی $\det[\vec{V}_1 | \vec{V}_2] \neq 0$

در نهایت جواب عمومی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = X(t) = c_1\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{4t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x(t) = 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}\\ y(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{4t}\end{cases}$$

۲- مقادیر ویژه ماتریس A تکراری باشند: فرض کنیم $\lambda = \lambda_1$ مقدار ویژه تکراری از مرتبه دوم باشد، یعنی دو بار تکرار شده باشد، در این صورت دو جواب مستقل خطی را به صورت

$$X_1(t) = \vec{V}_1 e^{\lambda_1 t}$$

و

$$X_2(t) = (\vec{V}_2 + \vec{V}_3 t)e^{\lambda_1 t}$$

در نظر می‌گیریم و با جایگذاری در $X'(t) = AX(t)$ بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ استخراج می‌شوند و جواب عمومی آن به صورت

$$X(t) = c_1\vec{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(\vec{V}_2 + \vec{V}_3 t)e^{\lambda_1 t}$$

می‌باشد.

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

مثال/ جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} x'(t) = x - 2y \\ y'(t) = 2x + 5y \end{cases}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا دستگاه داده شده را به فرم ماتریسی بازنویسی می‌کنیم:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \xRightarrow{\text{معادله مشخصه}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

چون مقدار ویژه $\lambda = 3$ تکراری است، بنابراین $X_1(t) = V_1 e^{3t}$ که $V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$،

$$\Rightarrow AV_1 = 3V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 - 2v_2 = 3v_1 \\ 2v_1 + 5v_2 = 3v_2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -v_1$$

بنابراین $V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix}$ ، بنابراین

$$= v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{v_1=1}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

حال قرار می‌دهیم $X_2(t) = (V_2 + V_3 t)e^{3t}$ و با جایگذاری در معادله $X'(t) = AX(t)$ داریم:

$$X_2'(t) = V_3 e^{3t} + 3(V_2 + V_3 t)e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$V_3 \cancel{e^{3t}} + 3(V_2 + V_3 t)\cancel{e^{3t}} = A(V_2 + V_3 t)\cancel{e^{3t}}$$

$$\Rightarrow \underline{V_3 + 3V_2} + 3V_3 t = \underline{AV_2} + AV_3 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A v_۳ = ۳ v_۳ \xrightarrow{\text{مشابه قبل داریم}} v_۳ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \\ A v_۲ = v_۳ + ۳ v_۲ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ v_۱ \\ ۳ v_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_۱ - ۲ v_۲ = ۱ + ۳ v_۱ \\ ۲ v_۱ + ۵ v_۲ = -۱ + ۳ v_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_۲ = -۱/۲ - v_۱}$$

بنابراین $v_۲ = \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_۱ \\ -۱/۲ - v_۱ \end{bmatrix}$ ، به عبارت دیگر

$$v_۲ = \begin{bmatrix} v_۱ \\ -v_۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱/۲ \end{bmatrix} = v_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱/۲ \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم $v_۱ = ۱$ و لذا

$v_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱/۲ \end{bmatrix}$ ، در نتیجه

$$X_۲(t) = (v_۲ + v_۳ t) e^{۳t}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱/۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} t \right) e^{۳t}$$

$$\Rightarrow \underset{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}{X(t)} = c_۱ X_۱(t) + c_۲ X_۲(t) = c_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} e^{۳t} + c_۲ \left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳/۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} t \right) e^{۳t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_۱ e^{۳t} + c_۲ (۱ + t) e^{۳t} \\ y(t) = -c_۱ e^{۳t} + c_۲ (-۳/۲ - t) e^{۳t} \end{cases}$$

۳- مقادیر ویژه ماتریس A مختلط باشند: مشابه به حالت مقادیر ویژه متمایز عمل می‌کنیم، فرض کنیم

$\lambda_1 = \alpha+\beta i$ و $\lambda_2 = \alpha-\beta i$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند، در این صورت جوابهای

نظیر این مقادیر ویژه به صورت $X_1(t) = \vec{V}_1 e^{(\alpha+\beta i)t}$ و $X_2(t) = \vec{V}_2 e^{(\alpha-\beta i)t}$ خواهد بود

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ استخراج می‌شوند و جواب عمومی دستگاه

عبارت است از:

$$X(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2 \vec{V}_2 e^{(\alpha-\beta i)t}$$

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X_1+X_2}{2} = u_1 \\[2ex] \dfrac{X_1-X_2}{2i} = u_2 \end{cases} \Rightarrow X(t) = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

مثال/ جواب عمومی دستگاه
$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}x + y \\ y'(t) = -x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$
را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{X'(t)}_{=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}} = A\,X(t)$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \xRightarrow{\text{معادله مشخصه}} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \vec{V}_1 e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \\ X_2 = \vec{V}_2 e^{(-\frac{1}{2}-i)t} \end{cases}$$

چون مقادیر ویژه مختلط هستند، بنابراین $\Uparrow$

که $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ از دستگاه $A\vec{V}_1 = \lambda_1 \vec{V}_1$ و $A\vec{V}_2 = \lambda_2 \vec{V}_2$ استخراج می‌شوند.

$$A\vec{V}_1 = (-\tfrac{1}{2}+i)\vec{V}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}+i)v_1 \\ (-\frac{1}{2}+i)v_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-\tfrac{1}{2} v_1} + v_2 = \cancel{-\tfrac{1}{2} v_1} + v_1 i \\ -v_1 - \tfrac{1}{2} v_2 = -\tfrac{1}{2} v_2 + v_2 i \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_2 = v_1 i}$$

بنابراین (*) $V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 i \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ و لذا با قرار $v_1 = 1$ ، $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

درنتیجه :

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1/2+i)t}$$

$$\lambda_2 = -1/2 - i$$

به همین ترتیب V_2 را می‌یابیم :

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1/2-i)\, w_1 \\ (-1/2-i)\, w_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-1/2\, w_1} + w_2 = \cancel{-1/2\, w_1} - w_1 i \\ -w_1 - 1/2\, w_2 = -1/2\, w_2 - w_2 i \end{cases} \Rightarrow \boxed{w_2 = -w_1 i}$$

بنابراین (**) $V_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ -w_1 i \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ ، قرار می‌دهیم $w_1 = +1$ ، لذا

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

دقت کنید X_1 و X_2 باید مستقل خطی شوند یعنی

$\det(X_1 \mid X_2) \neq 0$ ،

$$\Rightarrow X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1/2-i)t}$$

لذا باید V_1 و V_2 مستقل خطی باشند یعنی

$\det(V_1 \mid V_2) \neq 0$.

پس v_1 از (*) و w_1 از (**) را طوری انتخاب می‌کنیم که V_1 و V_2 مستقل خطی شوند .

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{bmatrix} \\ X_2(t) = e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \cos t - i \sin t \\ -\sin t - i \cos t \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_۱ = \dfrac{X_۱ + X_۲}{۲} = e^{-۱/۲\, t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \\ \\ u_۲ = \dfrac{X_۱ - X_۲}{۲i} = e^{-۱/۲\, t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = X(t) = c_۱ u_۱ + c_۲ u_۲$$

$$= e^{-۱/۲\, t} \begin{bmatrix} c_۱ \cos t + c_۲ \sin t \\ -c_۱ \sin t + c_۲ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-۱/۲\, t} \left(c_۱ \cos t + c_۲ \sin t \right) \\ y(t) = e^{-۱/۲\, t} \left(-c_۱ \sin t + c_۲ \cos t \right) \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و غیرهمگن

دستگاه معادلات دیفرانسیل $X'(t) = A\,X(t) + G(t)$ (*) را در نظر بگیرید.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

کلیه روش‌های یاد شده که برای حل دستگاه همگن شده فوق (یعنی وقتی $G(t)=0$) به کار برده شد، در اینجا زمانی که $G(t) \neq 0$ باشد نیز قابل به کارگیری است. حال به روش تغییر پارامتر (روش مقادیر گرد) می‌پردازیم:

روش مقادیر دیروزه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن: فرض کنیم جواب عمومی بخش همگن معادله (*) به صورت

$$X_g(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t)$$

باشد. در این صورت جواب عمومی معادله (*) عبارت است از:

$$X_G(t) = X_g(t) + X_p(t)$$

که در آن $X_p(t)$ جواب خصوصی معادله (*) است. قرار می‌دهیم: (همانند روش لاگرانژ در تغییر پارامتر)

$$X_p(t) = V_1(t)\,X_1(t) + V_2(t)\,X_2(t) + \cdots + V_n(t)\,X_n(t)$$

که در آن V_i ها توابعی برحسب t می‌باشند و مجهولند. می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow X_p(t) = \Phi(t)\,V(t), \qquad \Phi(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \end{bmatrix}$$

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ \vdots \\ V_n(t) \end{bmatrix}$$

که $\Phi(t)$ ماتریسی است که ستون‌هایش $X_1(t)$ و ... و $X_n(t)$ می‌باشد و به آن ماتریس اساسی دستگاه (*) می‌گویند.

حال مانند روش لاگرانژ ، $X_p(t)$ در معادله (*) صدق می‌کند و با جایگذاری $V(t)$ را بدست می‌آوریم :

$$X'(t) = A\,X(t) + G(t)$$

$$\Rightarrow \Phi'(t)V(t) + \Phi(t)V'(t) = A\Phi(t)V(t) + G(t)$$

حال چون $\Phi(t)$ جواب بخش همگن معادله (*) است ، لذا $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

بنابراین $\Phi'(t)V(t) = A\Phi(t)V(t)$ ، لذا خواهیم داشت :

$$\Phi(t)V'(t) = G(t) \Rightarrow V'(t) = \Phi(t)^{-1}G(t)$$

$$\xRightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} V(t) = \int \Phi(t)^{-1}G(t)\,dt$$

($\Phi(t)^{-1}$: معکوس ماتریس $\Phi(t)$)

درنتیجه با قرار دادن $V(t)$ در جواب خصوصی $X_p(t) = \Phi(t)V(t)$ ، جواب عمومی به صورت

$$X_G(t) = X_g(t) + X_p(t)$$

استخراج خواهد شد.

مثال/ جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2'(t) = 3x_1 - 2x_2 + e^{-3t} \end{cases}$ را بیابید.

حل: ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق را به فرم ماتریسی بازنویسی می‌کنیم :

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

که $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

حال ابتدا جواب بخش همگن معادله را می‌یابیم.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \xRightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = -1$$

وطبق روش‌های بیان شده :

$$\begin{cases} x_۱ = v_۱ e^{t} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} e^{t} \\ x_۲ = v_۲ e^{-t} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & ۳e^{-t} \end{bmatrix}$$

دترمینان

$$|\Phi(t)| = ۲$$

$$\Rightarrow \Phi(t)^{-۱} = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{bmatrix}$$

حال قرار می‌دهیم : $x_p(t) = \Phi(t)\, v(t)$.

$$\Rightarrow v(t) = \int \Phi(t)^{-۱} G(t)\, dt$$

$$= ۱/۲ \int \begin{bmatrix} ۳e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{۲t} \\ e^{-۳t} \end{bmatrix} dt$$

$$= ۱/۲ \int \begin{bmatrix} ۳e^{t} - e^{-۴t} \\ -e^{۳t} + e^{-۲t} \end{bmatrix} dt$$

$$= ۱/۲ \begin{bmatrix} ۳e^{t} + ۱/۴\, e^{-۴t} \\ -۱/۳\, e^{۳t} - ۱/۲\, e^{-۲t} \end{bmatrix}_{۲\times۱}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \Phi(t)\, v(t) = \begin{bmatrix} ۴/۳\, e^{۲t} + ۱/۸\, e^{-۳t} \\ e^{۲t} - ۵/۸\, e^{-۳t} \end{bmatrix}$$

ولذا در نهایت :

$$x_G(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

$$= c_۱ x_۱(t) + c_۲ x_۲(t) + x_p(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} = X_G(t) = c_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} e^{t} + c_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} e^{۲t} + \frac{۱}{۸} e^{-۳t} \\ e^{۲t} - \frac{۵}{۸} e^{-۳t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱(t) = c_۱ e^{t} + c_۲ e^{-t} + ۲/۳\, e^{۲t} + ۱/۸\, e^{-۳t} \\ x_۲(t) = c_۱ e^{t} + ۳c_۲ e^{-t} + e^{۲t} - ۵/۸\, e^{-۳t} \end{cases}$$

$$X' = AX$$

$X = v e^{\lambda t}$ جواب دستگاه فوق است.

می‌توان جایگذاری کرد

$$\Rightarrow \lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t} \Rightarrow Av = \lambda v$$

بردار v، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ برای ماتریس A می‌باشد.

$$(*)\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \Rightarrow X'(t) = AX(t)$$

در واقع باید n بردار X_1، X_2، ...، X_n پیدا بکنیم که هر کدام جواب دستگاه $(*)$ بوده و مستقل خطی باشند یعنی $\det(X_1|X_2|\cdots|X_n) \neq 0$.

جواب عمومی دستگاه

$$* \Rightarrow X_G = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n.$$

$$\begin{cases} X_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ X_n = v_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \xrightarrow{\det(X_1|\cdots|X_n) \neq 0} \underbrace{e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \det(v_1|\cdots|v_n) \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

لذا باید $\det(v_1|\cdots|v_n) \neq 0$

در واقع اگر v_1، ...، v_n، n بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه λ_1، ...، λ_n باشند، آنگاه $X_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}$، ...، $X_n = v_n e^{\lambda_n t}$ n جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ خواهد بود و داریم:

حل

$$X_G = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$$

تذکر ۵

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+x^2/2!+\cdots$$

$A_{n\times n}$

$$\Rightarrow\quad e^{A}=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots$$

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\cdots$$

$$A=I\ \Longrightarrow\ \underline{\underline{e^{It}}}=I+It+\frac{I^2t^2}{2!}+\cdots$$

$$\underline{\underline{I^n=I}}\Longrightarrow\ =I\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)=\underline{\underline{Ie^{t}}}=\begin{bmatrix} e^{t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t}\end{bmatrix}$$

به ازای هر بردار دلخواه V ، $X=e^{At}V$ ، جواب دستگاه $X'=AX$ است.

زیرا:

$$\frac{d}{dt}(e^{At})=Ae^{At}\ \Rightarrow\ \underbrace{\frac{d}{dt}(\underbrace{e^{At}V})}_{X'}=A\underbrace{e^{At}V}=AX$$

$$\xRightarrow{X=e^{At}V}\quad X'=AX$$

بنابراین:

$$e^{(A-\lambda I)t}=I+(A-\lambda I)t+\frac{(A-\lambda I)^2t^2}{2!}+\cdots$$

$$\xRightarrow{\times e^{\lambda It}}\quad e^{At}=\underbrace{e^{\lambda It}}_{Ie^{\lambda t}}\left(I+(A-\lambda I)t+\frac{(A-\lambda I)^2t^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$\xRightarrow{\times V}\quad e^{At}V=e^{\lambda t}\left(V+\underbrace{(A-\lambda I)V}_{\bar{0}}t+\frac{(A-\lambda I)^2Vt^2}{2!}+\cdots\right)$$

حل

$$=e^{\lambda t}V$$

$$\Rightarrow X=e^{At}V=e^{\lambda t}V\ \Rightarrow\ \boxed{X=e^{\lambda t}V}$$

تذکر: اگر نتوانیم یک بردار ویژه ی مستقل خطی با V ، متناظر با مقدار ویژه λ_2 بیابیم ،

آن گاه می توان به صورت زیر عمل کرد :

V بردار ویژه متناظر با λ $\Rightarrow (A-\lambda I)V=0$

فرض کنیم

$$V=(A-\lambda I)N \longrightarrow \underbrace{(A-\lambda I)V}_{0} = (A-\lambda I)^2 N$$

$$(A-\lambda I)\overbrace{(A-\lambda I)N}^{V} = 0$$

$$\Rightarrow X_2 = e^{At}N = e^{\lambda t}\left(N + \underbrace{(A-\lambda I)N}_{V}t + \frac{(A-\lambda I)^2 N t^2}{2!} + \dots\right)$$

به ازای بردار دلخواه N ، $e^{At}N$ جواب دستگاه است.

$$= Ne^{\lambda t} + Vte^{\lambda t}$$

به همین ترتیب اگر λ_3 با λ_1 و λ_2 برابر باشد ، برای یافتن بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه λ_3 داریم :

$$N=(A-\lambda I)M \longrightarrow (A-\lambda I)N = (A-\lambda I)^2 M$$

$$\Rightarrow V = (A-\lambda I)^2 M$$

$V \rightarrow \lambda_1$

$N \rightarrow \lambda_2$

$M \rightarrow \lambda_3$

$$\Rightarrow X_3 = Me^{\lambda t} + Nte^{\lambda t} + X\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$$

همین طور برای X_4 ،

$$(A-\lambda I)P = M \Rightarrow X_4 = Pe^{\lambda t} + mte^{\lambda t} + N\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} + X\frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}$$

$P \rightarrow \lambda_4$

$\vdots$

حل ۳