بسم الله الرحمن الرحیم

شورای صنفی دانشکده

مکانیک

Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic)

درس : ریاضی ۱

استاد : دکتر کیانی

آدرس :تهران-خیابان حافظ-دانشگاه صنعتی امیرکبیر
ساختمان ابوریحان-طبقه همکف-شورای صنفی دانشکده مکانیک
تلفکس : ۰۲۱-۶۴۵۴۳۴۸۲

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی: اگر $a,b \in R$ و $a>0$ در این صورت $n \in N$ موجود است که $na>b$

قضیه: اگر α و β اعداد حقیقی و مثبت باشند آنگاه $m,n \in N$ وجود دارند که

$(1+\alpha)^m > \beta$ (1) و $(1+\alpha)^{-n} < \beta$ (2)

(1) $(1+\alpha)^m = 1+m\alpha + $ مقداری مثبت $> m\alpha$

بنابه خ ارشمیدسی $m \in N$ وجود دارد که $m\alpha > \beta$

پس با در نظر گرفتن m مطلوب $(1+\alpha)^m$

نتیجه: به ازای هر عدد مثبت β عددهای m و n در اعداد طبیعی موجودند به طوری که

$10^m > \beta$ و $10^{-n} < \beta$ $(\alpha=9)$

نتیجه: اگر α و α' عددهای مثبت باشند به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $|\alpha-\alpha'|<10^{-n}$ در این صورت: $\alpha=\alpha'$

اثبات: فرض کنیم $\beta=|\alpha-\alpha'|$ اگر $\beta>0$ بنابه نتیجه قبل $m \in N$ موجود که $10^{-m}<\beta$ و این با فرض ما در تناقض است پس $\beta=0$

کوچکترین کران بالا

اگر H زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد گوییم H کران دار است هرگاه R یا $M \in N$ موجود که به ازای هر $h \in H$ داشته باشیم $h<M$ توجه نمایید که M را کران بالای H می‌نامیم

Dorna

عدد M_0 را کوچکترین کران بالای H گوئیم هرگاه:

۱. M_0 کران بالایی برای H باشد

۲. اگر M_1 کران بالایی برای H باشد در اینصورت $M_0 \leq M_1$

بنا به تعریف کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است

مثال: بازه $[2,4)$ دارای کوچکترین کران بالا است ولی ۵ و ۶ و ۷ همگی کران های بالا برای مجموعه اند

اصل تمامیت:

اگر زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی ناتهی کراندار باشد حتما کوچکترین کران بالا نیز دارد

توجه $Q \cap (1, \sqrt{2})$ در فضای اعداد گویا کوچکترین کران بالا ندارد

ندارد چون کوچکترین کران بالا در Q — که کوچکترین کران بالا در R، $\sqrt{2}$

اصول جبری برای R:

$(R, +, \times)$

$\forall a, b, c \in R$ $\quad a+b \in R$ بسته بودن

$a+b = b+a$ تعویض پذیری

$a+(b+c) = (a+b)+c$ شرکت پذیری

خواص ضرب (.)

$a.b \in R$ ضرب بسته $\quad a.b = b.a$ تعویض پذیر

$(a.b).c = a.(b.c)$ شرکت پذیر

$a.1 = 1.a$ عضو همانی $\quad a \neq 0 \quad \frac{1}{a} = a^{-1} \in R$

$a.a^{-1} = 1$

«خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع»

$a.(b+c) = a.b + a.c$

گرچه معادله $x^2+1=0$ جواب هایش در اعداد حقیقی نمی باشد

«اعداد مختلط»

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

$(x,y) \cdot (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

$z = (x,y)$, $z' = (x',y')$, $z'' = (x'',y'') \in \mathbb{C}$

$-(\mathbb{C}, +)$

1 $z + z' \in \mathbb{C}$

2 $z + z' = z' + z$

3 $(z+z') + z'' = z + (z' + z'')$

4 $z + (0,0) = z$

5 $z + (-z) = (0,0)$ $\quad (-z = (-x,-y))$

$-(\mathbb{C}, \cdot)$

1 $z \cdot z' \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

2 $z \cdot z' = z' \cdot z$

3 $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$

4 $(x,y) \cdot (1,0) = (1,0)(x,y) = (x,y)$ عضو همانی ضرب

5 $(x,y)(x',y') = (1,0)$ عضو وارون ضربی وجود دارد

Dorna Fo

$6-\ Z.(Z'+Z'') = ZZ' + ZZ''$ خاصیت پخشی

$$\begin{aligned} -y \times &\left\{ xx' - yy' = 1 \right. \\ x \times &\left\{ xy' + yx' = 0 \right. \end{aligned} \Rightarrow (y^2+x^2)y' = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = -yx' \quad , \quad x' = \frac{-x}{y(x^2+y^2)}$$

$$Z = (x,y) \Rightarrow Z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

تذکر: اعداد مختلط $(x,0)$ را با x نمایش می‌دهیم

همچنین $i = (0,1)$ نمایش می‌دهیم

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$$

توجه نمایید که $\pm i$ جواب معادله $z^2+1=0$ می‌باشد

$$\underbrace{(x,y) = (x,0)+(y,0)(0,1)}_{(0,y)} \Rightarrow Z = (x,y) = x+iy$$ نمایش

با توجه به نمایش های جبری ضرب اعداد مختلط را توجیه می‌کنیم

$$(x+iy)(x'+iy') = xx' + i^2yy' + xy'i + x'yi$$

$$xx' - yy' + (xy'+x'y)i = (xx'-yy', xy'+x'y)$$

قرینه $z = x + iy$ به صورت $-z = -x - iy$ تعریف می‌شود. اگر $r \in \mathbb{R}$

داریم $rz = rx + (ry)i$

توجه: اگر $x + iy = x' + iy'$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

قرارداد: اگر $z = x + iy$ بنویسیم:

$x = \mathrm{Re}\, z$ قسمت حقیقی

$y = \mathrm{Im}\, z$ قسمت موهومی

نرم یا قدر مطلق یک عدد مختلط:

اگر $z = x + iy$ باشد نرم یا قدر مطلق آن را به صورت $|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$

به عبارتی $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

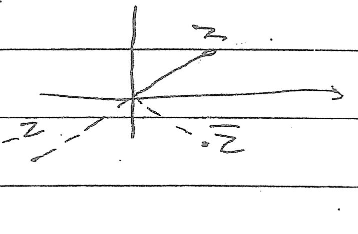
نتیجه: $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ $\qquad$ $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

توجه نمایید نرم تابعی است از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{R}^{\geq 0}$

مزدوج یک عدد مختلط:

اگر $z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$ در آن صورت مزدوج آن به صورت

$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i(\mathrm{Im}\, z)$



If $z, w \in \mathbb{C}$

1) $\bar{\bar{z}} = z$

2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

3) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

Dorna

$z = x + iy \;,\; w = x' + iy' \qquad zw = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$

$\overline{zw} = (xx' - yy') - (xy' + x'y)i \quad (1)$

$\bar{z} = x - iy \qquad \bar{w} = x' - iy' \qquad \Rightarrow 1, 2 \Rightarrow \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

$\Rightarrow \bar{z}\bar{w} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y) \quad (2)$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$(4)\; z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$5)\; z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$6)\; |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

مثال) عددمختلط $\frac{4+5i}{2-3i}$ را بصورت $A+Bi$ بنویسید.

$(4+5i)(2-3i)^{-1} = (4+5i)\left(\frac{2+3i}{13}\right)$

$= \frac{1}{13}(-7+22i) = \frac{-7}{13} + \frac{22}{13}i$

مثال) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

$(\overline{z^{-1}}) = \left(\overline{\frac{\bar{z}}{|z|^2}}\right) = \frac{1}{|z|^2}\bar{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} \quad (1)$

$(\bar{z})^{-1} = \frac{\bar{\bar{z}}}{|\bar{z}|^2} = \frac{z}{|z|^2} \quad (2) \qquad (1),(2) \Rightarrow (\overline{z^{-1}}) = (\bar{z})^{-1}$

$7)\; \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

$8)\; |zw| = |z||w|$

$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ چون نرم ها همگی مثبت اند کافی است نشان دهیم

$$|zw|^2 = zw\,(\overline{zw}) = zw(\bar z\bar w) = z\bar z\, w\bar w = |z|^2|w|^2$$

$$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$$

9) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar z}{\bar w} \qquad w \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{(zw^{-1})} = \bar z\,\overline{w^{-1}} = \bar z\,\bar w^{-1} = \frac{\bar z}{\bar w}$$

10) $\left|\frac{z}{w}\right| \qquad w \neq 0$

$$|zw^{-1}| = |z||w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}$$

توجه نمایید که $w \neq 0$ و $|w^{-1}| = \frac{1}{|w|}$ زیرا

$$ww^{-1} = 1 \xrightarrow{\text{از دو طرف } ||} |w||w^{-1}| = 1 \Longrightarrow |w^{-1}| = \frac{1}{|w|}$$

11) $|z+w| \leqslant |z| + |w|$

$|z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$ کافی است نشان دهیم

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar z + \bar w)$$

$$z\bar z + z\bar w + w\bar z + w\bar w = |z|^2 + |w|^2 + (\underbrace{z\bar w + w\bar z}_{\text{مزدوج هم}})$$

$$|z|^2 + |w|^2 + (z\bar w + \overline{z\bar w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z\bar w$$

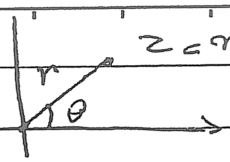
$$\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar w| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\underbrace{|\bar w|}_{|w|} = (|z|+|w|)^2$$

از اثبات واضح است که اگر $Im\, z\bar w \neq 0$ باشد در این صورت نامساوی اکید می‌شود

Dorna

مختصات قطبی:

$z = x + iy$



مختصات قطبی را با (r, θ) نمایش می‌دهیم برای z که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

و θ زاویه بین قسمت مثبت محور xها و خط واصل مبدأ و z است.

$$\begin{cases} Re\, z = r\cos\theta \\ Im\, z = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

توجه که جهت تعیین θ از قسمت مثبت محور x به خط واصل در خلاف عقربه‌های ساعت و اگر منفی بود در جهت عقربه‌ها و مقدار θ بستگی به این دارد که z در کدام ربع قرار گیرد θ یا $\pi+\theta$ می‌شود.

نمادگذاری: در حالتی که θ بین ۰ و 2π باشد $(0 \le \theta < 2\pi)$ آن را با $Arg\, z$ نمایش می‌دهیم و منظور از $arg\, z = \theta + 2k\pi$ یک مجموعه

مثال) $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $Arg(-1-i) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

توجه نمائید که در نمایش قطبی برای z داریم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $cis(\theta)$ یا $e^{i\theta}$ نمایش می‌دهیم

نمادگذاری: $e^{i\theta} \overset{def}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

بنابراین نمادگذاری $z = |z|e^{i\theta}$ یا $z = re^{i\theta}$

بنابر نکات گفته شده $n \in N$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

حال اگر $\alpha = -n$ $(n \in N)$ داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)^{-1} = (\cos n\theta + i\sin n\theta)^{-1}$$

$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

تعمیم دموآور اگر $\alpha \in Z$ و $z = re^{i\theta}$ در این صورت

$$(z)^{\alpha} = r^{\alpha} e^{i\alpha\theta}$$

مثال)

$$(1+i)^{1000} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1000}$$

$z = 1+i$

$$= 2^{500}\left(\cos 250\pi + i\sin 250\pi\right) = 2^{500}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال) مکان هندسی $|z+i| = |z-1|$ را بیابید. $z = x + iy$

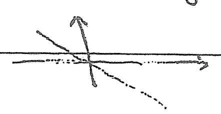
باهم برابرند

$$|x+iy-1| = |x+iy+i| \Rightarrow |(x-1)+iy| = |x+i(y+1)|$$

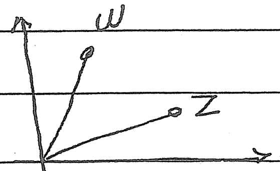
پس توان ۲ طرف هم برابر

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = x^2+(y+1)^2$$

$$1-2x = 2y+1 \Rightarrow y = -x$$



Dorna



نکته: در ضرب مختلط زاویه‌ها جمع می‌شوند

$z = r_1 e^{i\theta_1} \qquad \mathrm{Arg}\, z = \theta_1$

$w = r_2 e^{i\theta_2} \qquad \mathrm{Arg}\, w = \theta_2$

$z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$zw = r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)$

$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$|zw| = r_1 r_2 \qquad \underbrace{\arg zw}_{\text{مجموعه}} = \underbrace{\arg z}_{\text{عدد}} + \arg w$

ریشه‌های nام یک عدد مختلط

فرض کنیم $z \in \mathbb{C}$ اگر $w^n = z$ به صورت w ریشه nام z یا جواب معادله $x^n - z = 0$ است

فرض کنیم $re^{i\theta} \cong z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

اگر $w = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ در این صورت

$w^n = z \Rightarrow r_1^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|} \\ \cos n\alpha = \cos\theta \\ \sin n\alpha = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt[n]{|z|} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$z_0 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$

$z_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

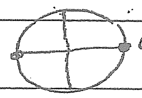
۱۲) z_k ها ریشه‌های nام z باشد داریم $z_k = z_0 e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

ریشه‌های nام واحد (عدد ۱) را بیابید.

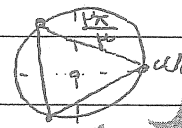
$Arg(1) = 0 \to \theta = 0$ $\qquad w_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$

$w_0 = 1 \qquad w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \qquad w_2 = w_1^2 \qquad w_k = w_1^k$

$n = 2 \to$ ریشه‌های دوم واحد $e^{\pi i} = w_1$

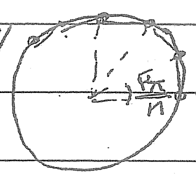


$n = 3 \qquad w_2 = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ ریشه‌های سوم



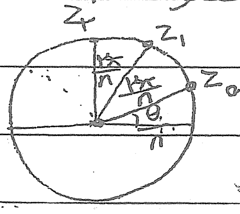
شعاع دایره ۱

ریشه‌های nام واحد روی n ضلعی منتظم



برای ریشه‌های nام واحد $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

نمایش ریشه‌های nام z: دایره به شعاع $\sqrt[n]{|z|}$ که عضو $\mathbb{R}^{+}$



$z_k = z_0 e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $w_1^k = w_k$

قضیه اساسی جبر: اگر $a_0, \dots$ و $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ که $a_i \in \mathbb{C}$ آنگاه $P(z)$ دارای دقیقاً n ریشه در اعداد مختلط است.

نتیجه: توجه نمائید که اگر $z_1, \dots, z_n$ ریشه‌های $P(z)$ باشد داریم

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

توجه نمائید که n ریشه ممکن است متمایز نباشند

Dorna

مثال: ریشه‌ی سوم $z=8i$ را بنویسید

$$z=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_0=2e^{\frac{i\pi}{6}},\quad z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)},\quad z_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)},\dots$$

ریشه‌های $x^n-1=0$ برابر $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$

$$\underbrace{x^n-1}_{1x^n+0x^{n-1}}=(x-1)(x-\omega_1)\dots(x-\omega_{n-1})$$

با مقایسه جمله ثابت دو طرف داریم $(-1)^n\omega_1\omega_2\dots\omega_{n-1}=-1$

$1+\omega_1+\dots+\omega_{n-1}=0$ زیرا ضریب x^{n-1} در چپ صفر و در طرف راست $-(1+\omega_1+\dots+\omega_{k-1})$ است.

$$\left.\begin{array}{l}1x^{n-1}+(-\omega_1)x^{n-1}+\dots+(-\omega_{n-1})x^{n-1}\\(-1-\omega_1-\dots-\omega_{n-1})x^{n-1}\end{array}\right\}$$ ضریب x^{n-1}

$$\omega_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

اتحادهای زیر را ثابت می‌کنیم

1) $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\dots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1$

$$1+\omega_1+\dots+\omega_{n-1}=0\Rightarrow 1+e^{\frac{2\pi}{n}i}+\dots+e^{\frac{2\pi(n-1)i}{n}}=0$$

$$\underbrace{1+\cos\frac{2\pi}{n}+\dots+\cos\frac{2\pi(n-1)}{n}}_{0}+i\underbrace{\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}_{0}=0$$

2) $\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$

مثال: مکان هندسی $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|<2$ را بیابید

$$\frac{|z-3|}{|z+3|}<2\longrightarrow\frac{|z-3|^2}{|z+3|^2}<4\qquad z=x+iy$$

$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2} < 4 \longrightarrow$ مکان را دقیقاً بیابید — داخل دایره

مثال: معادلات زیر را حل نمایید

$z^4+1-i\sqrt{3}=0$ A $\quad -(-1+i\sqrt{3})$

$z^4+z^2+1=0$ B همان روش Δ

A: $z^4=-1+i\sqrt{3}$

$x^n-z=0 \Rightarrow n=4,\ z=-1+i\sqrt{3}$

$w_k=\sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\theta i}{n}+\frac{2k\pi i}{n}}$

$\theta = Arg\, z = \frac{2\pi}{3}$

$w_k=\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi i}{6}+\frac{2k\pi i}{4}}$

$w_k=\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi i}{6}+\frac{k\pi i}{2}}$

B: $(z^2)^2+z^2+1=0 \longrightarrow \Delta=1-4=-3 \Rightarrow z^2=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$z^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = Arg(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2\pi}{3} \\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta'=\frac{4\pi}{3} \end{cases}$ $n=2$

$w=e^{\frac{2k\pi i}{2}+\frac{\pi i}{3}}$

$w'=e^{\frac{2k\pi i}{2}+\frac{2\pi}{3}i}$

مثال:

$1+\cos\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \qquad 0<\theta<2\pi$

$w=e^{i\theta}$

از روی اتحاد $1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

اتحاد بالا را با استقرا اثبات کنید.

$1+w+w^2+\dots+w^n=\frac{1-w^{n+1}}{1-w}$

$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\dots+e^{ni\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ **

$Re(1+e^{i\theta}+\dots+e^{ni\theta})=1+\cos\theta+\dots+\cos n\theta$

$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\times\frac{\overline{1-e^{i\theta}}}{\overline{1-e^{i\theta}}}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\times\frac{1-e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$

$=\frac{1-e^{-i\theta}-e^{i(n+1)\theta}+e^{in\theta}}{|1-e^{i\theta}|^2}$

Dorna

توجه: اتحادهایی که برای اعداد حقیقی صحیح است برای اعداد مختلط هم صحیح است)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{|1-e^{i\theta}|^2}\qquad |1-e^{i\theta}|^2=(1-\cos)^2+\sin^2\theta=2-2\cos\theta$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

توجه: اگر قسمت های موهومی تساوی ها $*$ مقایسه شود به اتحادی بر اساس $\sin$ کم داریم

مثال: برای m نشان دهید

$$\sin\frac{\pi}{m}\times\sin\frac{2\pi}{m}\times\dots\times\sin\frac{(m-1)\pi}{m}=\frac{m}{2^{m-1}}$$

$$\omega=e^{i\frac{\pi}{m}}\qquad x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+\dots+x+1)=(x-1)(x-\omega_1)\dots(x-\omega_{m-1})$$

$$*\ x^{m-1}+\dots+x+1=(x-\omega_1)\dots(x-\omega_{m-1})$$ با مقایسه دو رابطه بالا داریم

$$m=(1-\omega_1)\dots(1-\omega_k)\dots(1-\omega_{m-1})$$ $*$ در این معادله $x=1$ قرار می دهیم

$$1-\omega_k=1-e^{\frac{2k\pi i}{m}}=1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

$$=2\sin^2\frac{k\pi}{m}-i\,2\sin\frac{k\pi}{m}\cos\frac{k\pi}{m}=2\sin\frac{k\pi}{m}\underbrace{\left(\sin\frac{k\pi}{m}-i\cos\frac{k\pi}{m}\right)}_{S_k}$$

$|S_k|=1$ پس $$m=\underbrace{2\sin\frac{\pi}{m}S_1}_{(1-\omega_1)}\times\dots\times\underbrace{2\sin\frac{k\pi}{m}\times S_k}_{(1-\omega_k)}$$

$$m=2^{m-1}\sin\frac{\pi}{m}\times\dots\times\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\times S_1\dots S_k$$

از دو طرف نرم

$$m=\left|2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{m}\right|\overbrace{|S_1\dots S_k|}^{1}$$

$$m=2^{m-1}\sin\frac{\pi}{m}\times\dots\times\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\times 1\quad\checkmark$$

مکان هندسی $Re(z^2) \leq 0$ را بیابید

$z = x + iy$

$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \implies x^2 - y^2 \leq 0 \implies x \leq \pm y$

$Re(\frac{1}{z}) = 2 \implies z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) \implies \frac{x}{x^2+y^2} = 2$

$2x^2 + 2y^2 - x = 0 \longrightarrow (x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ دایره

معادله را حل کنید

$(z+1)^3 = (z-1)^3 \implies (\frac{z+1}{1-z})^3 = 1$

$\frac{1+z}{1-z} = \omega^t \quad t = 0, 1, 2 \implies \omega = e^{\frac{2\pi t}{3}}$

$1 + z = \omega^t (1 - z) \implies 1 + z = \omega^t - z\omega^t \implies z(1 + \omega^t) = \omega^t - 1$

$z = \frac{\omega^t - 1}{\omega^t + 1}, \quad t = 0, 1, 2$

معادله $(x-i)^n - (x+i)^n = 0$ را حل کنید

$(\frac{x-i}{x+i})^n = 1 \longrightarrow \frac{x-i}{x+i} = \omega^t, \quad t = 0, 1, \ldots, n-1$

$x - i = x\omega^t + i\omega^t \qquad \omega = e^{\frac{2\pi t}{n}}$

$x(1 - \omega^t) = i(1 + \omega^t) \implies x = \frac{i(1+\omega^t)}{1-\omega^t}$

مثال: فرض کنیم f چندجمله‌ای با ضرایب اعداد حقیقی باشد. اگر z ریشه f باشد آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشه‌ی f است.

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in R$

$f(z) = 0 \Rightarrow a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

$\overline{f(z)} = 0 \Rightarrow \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = 0$

$a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \Rightarrow f(\bar{z}) = 0$

? مثال: اگر $m \in N$ و $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و $(1+ix)^m = p(x) + iq(x)$ اگر a و b دو عدد حقیقی که هر دو همزمان صفر نباشند در نظر بگیریم ثابت کنید ریشه‌های $ap(x) + bq(x)$ همگی حقیقی اند.

$z = x + iy \qquad q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

فرض: $a \neq 0$ $\qquad$ کافی است نشان دهیم اگر z ریشه‌ی $ap + bq$ باشد آنگاه $z = \bar{z}$

$ap(z) + bq(z) = 0 \Rightarrow p(z) = -\frac{b}{a} q(z) \xRightarrow{-\frac{b}{a} = k} p(z) = kq(z)$

$(1+iz)^m = p(z) + iq(z) = (k+i)q(z) \Rightarrow q(z) = (k+i)^{-1}(1+iz)^m$

$|q(z)| = |\overline{q(\bar{z})}| \Rightarrow |(k+i)^{-1}||(1+iz)|^m = |\overline{(k+i)^{-1}}||\overline{(1+i\bar{z})^m}|$

$\in R^{\geq 0}$

$\Rightarrow |1+iz| = |1-iz| \Rightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \Rightarrow (1+iz)(1-i\bar{z})$

$= (1-iz)(1+i\bar{z}) \Rightarrow z - \bar{z} = 0 \Rightarrow z = \bar{z}$

$2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \Rightarrow 2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r} \qquad x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$

$2\cos\theta = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x^2 - 2\cos\theta x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{-4\sin^2\theta}}{2} = \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2}$

$x_1 = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow x^r = \cos r\theta + i\sin r\theta$

$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \frac{1}{x^r} = \cos r\theta - i\sin r\theta \Rightarrow 2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r}$

Dorna $\qquad x^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

فرض کنیم $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

① $\forall c\in R \quad \lim ca_n = ca$

② $\lim (a_n+b_n) = a+b$

③ $\lim a_nb_n = \lim a_n \lim b_n = ab$

④ $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \ , \ b\neq 0$ از یک جایی به بعد $b_n\neq 0$

مثال: اگر $\lim a_n = a$ و $a\neq 0$ در اینصورت N موجود که به ازای $n\geq N$ ، $a_n\neq 0$

اگر $a>0 \Rightarrow 0<\varepsilon < a \Rightarrow \exists N \ \forall n\geq N \ |a_n-a|<\varepsilon$

$-\varepsilon < a_n-a<\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon<a} a_n > 0 \ (\neq 0)$

به ازای $a<0$ در اینصورت $0<\varepsilon<-a$ میگیریم و به قیاس قبل N موجود که به ازای هر $n\geq N$ داریم $a_n<0 \ (\neq 0)$

(اگر دنباله مثبت $\lim$ آن از یک جایی به بعد مثبت است)

$\lim \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{n^2+2n-n^2}{|n|+n} = \frac{2}{2n} = 0$ ، $n\to\infty$

$\lim \sqrt{n^2+2n} - n = 1$

تذکر: اگر a_n دنباله‌ای کراندار باشد و $\lim b_n = 0$ در اینصورت $\lim a_nb_n = 0$

حکم $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n\geq N \ |a_nb_n|<\varepsilon$

a_n کراندار $\Rightarrow \exists k \ |a_n|<k$

$\lim b_n = 0$ به ازای $\frac{\varepsilon}{k}$ $\exists N_1 \ \forall n\geq N_1 \ |b_n|<\frac{\varepsilon}{k}$

حال $N = N_1 \ \forall n\geq N \quad |a_nb_n| = |a_n||b_n| < k\times\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

دنباله‌ها

منظور از یک بازه است قطعه‌ای مجموعه $S=\{k, k+1, \dots\}$ که در آن k عدد صحیح است:

هر تابع مانند $a: S \to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را یک دنباله می‌گوییم و با a_k، a_{k+1} و a_{k+2} و ... نمایش می‌دهیم.

همگرایی: گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به a همگراست هرگاه:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n\geq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

در این صورت گوییم حد a_n برابر a است یا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$a_n=n$ ، $a_n=(-1)^n$ ، $a_n=(i)^n$

- دنباله‌ی a_n را کران‌دار از پایین می‌گوییم هرگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n\geq l$ و l را کران پایین a_n گوییم.
- دنباله‌ی a_n را کران‌دار از بالا می‌گوییم هرگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n\leq u$ و u را کران بالا گوییم.
- دنباله‌ی a_n را کران‌دار می‌گوییم هرگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $|a_n|\leq L$
- دنباله‌ی a_n را صعودی گوییم اگر به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n\leq a_{n+1}$ (اکیداً صعودی $a_n<a_{n+1}$)
- دنباله‌ی a_n را نزولی گوییم هرگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n\geq a_{n+1}$.

گزاره: اگر a_n دنباله‌ای همگرا باشد در این صورت a_n کران‌دار است. $\big||a_n|-|a|\big| \leq |a_n-a|$

در اعداد مختلط نیز درست است

$\lim a_n = a$ به ازای $\varepsilon=1$ $\exists N \ \forall n\geq N \quad |a_n-a|<1 \Rightarrow |a_n|<|a|+1$

$k=\max(|a_1|,|a_2|,\dots,|a_N|,|a|+1) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad |a_n|\leq k$

Dorna

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \forall M>0\ \exists N\ \forall n\ge N\quad a_n > M$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \forall M>0\ \exists N\ \forall n\ge N\quad a_n < -M$

قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله باشند که به ازای هر n

$a_n\le b_n\le c_n \Rightarrow \lim a_n \le \lim b_n \le \lim c_n$

و اگر $\lim a_n = \lim c_n = L$ آنگاه داریم $\lim b_n = L$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\quad n\ge N \Rightarrow |b_n-L|<\varepsilon$

$\lim c_n = L \quad \exists N_1 \quad n\ge N_1 \Rightarrow |c_n-L|<\varepsilon$

$\lim a_n = L \quad \exists N_2 \quad n\ge N_2 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$

$\forall n \quad n\ge \max(N_1,N_2) \quad a_n\le b_n\le c_n$

$a_n-L\le b_n-L\le c_n-L<\varepsilon \Rightarrow \varepsilon<L-c_n\le L-b_n\le L-a_n$

$\Rightarrow |b_n-L|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}$ راه حل اول ← $|\cos n|\le 1$ و $\lim \frac{1}{n} = 0$ ←

راه حل دوم ← $-1\le\cos n\le 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n}\le\frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0$

تنبیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار باشد در اینصورت a_n همگراست

$\lim a_n = \sup\{a_n\} \quad 1\le n<\infty$

اگر $\{a_1,a_2,\dots\}\subseteq R$، $A=$ و A از بالا کراندار است $M=\sup A$ (از اصل تمامیت M موجود است)

به ازای هر $\varepsilon>0$ داریم $M-\varepsilon<M$ پس $\exists N \quad M-\varepsilon<a_N\le a_n \quad n\ge N$

دنباله صعودی $\forall n\ge N \quad a_n>M-\varepsilon$

$0\le M-a_n<\varepsilon \Rightarrow |a_n-M|<\varepsilon$

Dorna

تعمیم: اگر a_n دنباله‌ای نزولی و از پائین کراندار باشد در این صورت a_n همگراست

$\lim a_n = \inf\{a_n\} \quad , \quad 1\le n<\infty$

مثال:

اگر $n\in\mathbb{N}$ و $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ و $a_1=1$ نشان دهید $\{a_n\}$ همگراست و $\lim a_n$ را بیابید.

$1, \sqrt{7}, \ldots$ و صعودی $a_1=1$

همگراست $\Rightarrow$ $L=\sqrt{6+L} \Rightarrow L^2-L-6=0 \Rightarrow (L-3)(L+2)=0 \Rightarrow L=3$

$\forall n \quad a_n\le a_{n+1}$ فرض استقرا $a_{n-1}<a_n$

$6+a_{n-1}<6+a_n \Rightarrow \sqrt{6+a_{n-1}}<\sqrt{6+a_n} \Rightarrow a_n<a_{n+1}$ صعودی

$a_1<3$ به استقرا به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ $a_n<3$

فرض استقرا $a_n<3 \Rightarrow a_{n+1}<3$

$a_n<3 \Rightarrow a_n+6<9 \Rightarrow \sqrt{a_n+6}<3$

$a_{n+1}\le 3$ ✓

سؤال: اگر رابطه‌ای بازگشتی داشته باشیم که در آن به جای همه a_n ها $\lim a_n$ قرار دهیم و فرض کنیم نام آن L است در این صورت اگر معادله حل شود و جواب داشته باشد آیا $\lim a_n$ موجود است؟

نکته: اگر $\lim_{n\to+\infty} f(n) = a$ در اینصورت چنانچه $a_n = f(n)$ داریم $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

برعکس نکته صحیح نمی باشد

نتیجه:

1) $x>1$ $\quad \lim x^n = \infty$

2) $|x|<1$ $\quad \lim x^n = 0$

3) $\forall x\in R$ $\quad \lim \frac{x^n}{n!}=0$

$\exists N \Rightarrow |x|<N$ و $\frac{|x|}{N}<1$ ، $n\geq N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^N}{N!}\right| \frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n} \Rightarrow \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{x^N}{N!}\right|}_{k} \underbrace{\frac{|x|}{N}\times\cdots\times\frac{|x|}{N}}_{n-N}$$

$$0 \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq k\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N}$$

با توجه به اینکه $\frac{|x|}{N}<1$ پس $\lim k\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N}=0$ بنابه قضیه

$$\lim \left|\frac{x^n}{n!}\right|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}=0$$

نتیجه ← اگر $\lim|a_n|=0$ در اینصورت $-|a_n|\leq a_n\leq|a_n|$ پس $\lim a_n=0$

مثال: $\lim \sin(\sqrt{n+1})-\sin\sqrt{n} = \lim 2\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right)$

$\lim 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right) = 0\times$ کراندار $=0$

$$\lim \frac{2^n n^2}{n!} = \frac{2^n}{(n-2)!}\times\frac{n^2}{n(n-1)} = \underbrace{\frac{4\times 2^{n-2}}{(n-2)!}}_{0}\times\underbrace{\frac{n^2}{n(n-1)}}_{1} = 0$$

تمرین: به ازای هر $x\in R$ داریم $\lim\frac{[nx]}{n} = x$ زیرا

$nx-1\leq[nx]\leq nx \Rightarrow \frac{nx-1}{n}\leq\frac{[nx]}{n}\leq\frac{nx}{n}$

$x\in Z$ $\quad \Rightarrow x \leq \cdots \leq x$

Dorna

گزاره: به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله $q_n = \frac{[nr]}{n}$ در اعداد گویا موجود است که $\lim q_n = r$

دو گزاره معادلند

گزاره: به ازای هر دو عدد حقیقی a و b که $a<b$ عدد گویای q موجود است که $a<q<b$ می‌گوییم q در بین اعداد حقیقی چگال است

$q_n = \frac{[nb]}{n}$, $q_n < b$

$\lim q_n = b \Rightarrow \varepsilon = b-a \quad \exists n \geq N \quad |q_n - b| < b-a$

$b - q_n < b-a \Rightarrow q_n > a$

$q_n < b \rightarrow a < q_n < b$

سری‌ها

اگر a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد دنباله $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ در نظر می‌گیریم هر A_n را با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهیم و در صورتی که $\lim A_n$ موجود باشد می‌نویسیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و در غیر این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ واگراست

«سری هندسی»

$a_1 = a \quad a_2 = ar \quad a_3 = ar^2 \dots$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$= a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & |r|<1 \text{ همگرا } \\ 0 & a=0 \\ +\infty \text{ واگرا به } & r \geq 1 \text{ و } a>0 \\ -\infty \text{ واگرا به } & r \geq 1 \text{ و } a<0 \end{cases}$$

$r < -1$ همگرا نیست

سری تلسکوپی

اگر $b_n = a_{n+1} - a_n$ در اینصورت $\sum_{i=1}^{n} b_n = a_{n+1} - a_1$ بنابراین چنانچه $\lim a_n = a$

داریم $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim a_{n+1} - a_1$ یعنی $\sum b_n$ همگراست

مثال: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim \frac{1}{n+1} = 1$$

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در اینصورت $\lim a_n = 0$ است

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xrightarrow{\sum a_n < \infty} \lim S_n = S$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ که بیاد معنی نداره

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Longrightarrow \lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$$

مثال: آیا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ یا $\sum \frac{n}{2n+1}$ همگراند؟ خیر

قضیه: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا باشد

قضیه: اگر $N \in \mathbb{N}$ موجود که به ازای هر $n \geq N$ داریم $a_n \geq 0$ در اینصورت $\sum a_n$ یا همگراست
و یا واگرا به $+\infty$ است — یا $\sum_{i=1}^{n} a_i$ از بالا کراندار باشد

$$\forall n \geq N \quad S_{n+1} = S_n + \overset{\geq 0}{a_{n+1}} \Longrightarrow S_{n+1} \geq S_n$$

قضیه: اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به A و B همگرا باشند، در اینصورت:

1. $\forall c\in\mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A\pm B$

3. $\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\le b_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

مثال: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $a_n\ge 0$ نشان دهید: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

اثبات: پس به ازای $\varepsilon=1$ و $N\in\mathbb{N}$ موجود که به ازای $n\ge N$ داریم: $\lim a_n = 0$

$0\le a_n<1 \longrightarrow \forall n\ge N \quad 0\le a_n^2\le a_n \Longrightarrow 0\le \sum a_n^2 \le \sum a_n$

$\sum a_n^2$ همگرا است.

آزمون مقایسه:

اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی مثبت باشند و k عددی حقیقی و مثبت به طوری که به ازای:

$\forall n\in\mathbb{N}$ داریم $0\le a_n\le kb_n$

در اینصورت اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز همگرا است و اگر $\sum a_n$ واگرا به $+\infty$ باشد

داریم $\sum b_n$ نیز واگرا است

آزمون مقایسه‌ی حدی:

اگر a_n و b_n دو دنباله‌ی مثبت باشند و $l=\lim \frac{a_n}{b_n}$:

1- $0<l<\infty$ در اینصورت چنانچه $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگرا است

2- اگر $l=0$ در اینصورت چنانچه $\sum b_n$ واگرا به $+\infty$ ، $\sum a_n$ نیز واگرا است

اگر $a=0$ در اینصورت چنانچه $\sum b_n$ واگرا، $\sum a_n$ می‌تواند همگرا یا واگرا باشد

مثال: همگرا $\sum \frac{1}{n^2}$ ، $\lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = 1$ ، $\sum \frac{1}{n^2+n} < \infty$

پس بنابر قضیه مقایسه حدی $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-5n+1} \qquad \lim \frac{\frac{n}{n^3-5n+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \Longrightarrow$$ واگراست

$$\sum \frac{1+\sin n}{n^2} \Longrightarrow 0 < \frac{1+\sin n}{n^2} < \frac{2}{n^2}$$

بنابراین $\sum \frac{1+\sin n}{n^2}$ همگراست

آزمون نسبت:

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت و $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ در اینصورت داریم:

1. $0 \le \rho < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ همگراست
2. $1 < \rho \le \infty$ $\sum a_n$ به ∞ واگراست
3. $\rho = 1$ در مورد $\sum a_n$ چیزی نمی‌توان گفت

مثال: $a_n = \frac{1}{n}$ ، $a_n = \frac{1}{n^2}$

اثبات ۱: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ $\quad 0 \le \rho < 1 \quad \exists r \quad \rho < r < 1$

$\varepsilon = r - \rho > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N$

$\exists N \ \forall n \ge N, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \varepsilon \Longrightarrow 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon = r$$

$n \geq N$ ، $a_{N+1} < r a_N < r a$ $\qquad a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a$

$a_{N+k} < r^k a$ $\qquad 0 \leq \sum_{i=N}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=N}^{\infty} a r^{i-N}$

طرفین همگرا $\qquad$ آزمون مقایسه $\qquad$ $|r|<1$ همگرا

همگرایی مطلق و مشروط

تعریف: گوییم $\sum a_n$ همگرای مطلق است هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

گوییم $\sum a_n$ همگرای مشروط است هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum |a_n|$ واگرا باشد.

قضیه: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همگرا است.

اثبات: اگر $b_n = a_n + |a_n|$ در اینصورت $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ $\xrightarrow{\text{بنابه آزمون مقایسه}}$

$\sum b_n$ همگرا است حال بنابه قضیه $\sum a_n = \sum b_n - |a_n|$ نیز همگرا است

آزمون ریشه

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت و $\alpha = \lim \sqrt[n]{a_n}$ در اینصورت:

1. $0 \leq \alpha < 1$ $\qquad$ $\sum a_n$ همگرا است

2. $1 < \alpha < \infty$ $\qquad$ $\sum a_n$ واگرا است

3. $\alpha = 1$ $\qquad$ چیزی نمی‌توان گفت

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$

$1/ \ \alpha = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{100}\right)^n} = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum \left(\frac{1}{100}\right)^n \xrightarrow[\text{همگرا است}]{\text{آزمون ریشه}}$

$2/ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100)^n}{n!} \Rightarrow \rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \frac{100}{n+1}$ $\qquad$ همگرا

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ $\quad \rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{n^5+5n^4+4n^3+3n^2+2n}{2n^5}$

$= \frac{1}{2}$ پس همگراست

مثال:

$\sum \frac{2n!}{(n!)^2}$ $\quad \rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{2n!}{(n!)^2}} = 4$

پس واگراست

تعریف: اگر $\{n_1, n_2, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد چنانچه $\{a_n\}$ یک دنباله باشد $\{a_{n_i}\}$ را زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ گوییم

نتیجه:

دنباله $\{a_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیردنباله آن همگرا باشد.

گزاره:

اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد به a در اینصورت $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ نیز به a همگرا اند
و همچنین اگر $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ به a همگرا باشند آنگاه خود $\{a_n\}$ نیز به a همگراست.

حکم: $\lim a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, \; n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$\lim a_{2n} = a \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon$

$\lim a_{2n-1} = a \quad \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_{2n-1} - a| < \varepsilon$

$N_3 = \max\{N_1, N_2\} \qquad N = 2N_3 \qquad \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Dorna

قضیه: اگر $a_n \geq 0$ ، a_n نزولی و $\lim a_n = 0$ در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگراست.

اثبات: فرض می‌کنیم $S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i$ ، $S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$

$S_{2n+2} \leq S_{2n}$

به همین قیاس دنباله‌های فرد صعودی است

$S_1 < S_3 < \dots < S_{2n+1} < S_{2n} < \dots < S_4 < S_2$

بنابراین زیر دنباله‌های فرد صعودی و از بالا به S_2 کراندار است پس همگراست

به همین قیاس $\lim S_{2n} = S_{even}$ ، $\lim S_{2n+1} = S_{odd}$

$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \Rightarrow \underbrace{\lim a_{2n}}_{=0} = \lim S_{2n} - \lim S_{2n-1}$

$S_{odd} = S_{eve} = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = S < \infty$

مثال) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ یا $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرااند

تعریف: اگر $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی ۱-۱ و پوشا باشد $\sum a_{\varphi(n)}$ را برای $\sum a_n$ یک تجدید آرایش گوییم

قضیه: اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد در اینصورت $\sum a_{\varphi(n)}$ هر تجدید آرایش $\sum a_n$ نیز به L همگراست.

قضیه: اگر $\sum a_n$ به طور مشروط همگرا باشد و a_n ، $\sum$ ... در اینصورت به ازای هر $A \in R$ تجدید آرایشی برای $\sum a_n$ موجود است که $\sum a_{\varphi(n)} = A$

اگر $a_n \geq 0$ همگراست از تجدید آرایش استفاده کنیم

Dorna

شهودی درمورد تغییر آرایش

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{2n}$ و $\sum \frac{1}{2n+1}$ همگی واگرا به $+\infty$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{2k-1}}_{>4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k'}\right)$$

>5

مثال:

$e = \sum \frac{1}{n!}$ ، $0 < e - S_n < \frac{1}{n\, n!}$ ، e نمی‌تواند گویا باشد $p,q \in Z$ ، $q \neq 0$

$$e = \frac{p}{q} \Rightarrow e = \frac{p(q-1)!}{q!} \Rightarrow eq! = \underbrace{p(q-1)!}_{\in Z} \qquad \in Q - \in Z \ \times$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \Rightarrow \underbrace{eq!}_{\in Q} = \underbrace{q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!}}_{\in Z} + \underbrace{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)(q+1)}}_{\in Q}$$

اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ نشان دهید $\lim r_n = 0$ ؟

$$\lim r_n = \lim(A - S_{n-1}) \Rightarrow \lim r_n = A - \lim S_{n-1} = A - A = 0$$

اگر $a_n > 0$ مثبت و $\sum a_n$ همگرا، نشان دهید $\sum \frac{a_n}{r_n}$ واگراست، $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$

می‌خواهیم بنابر مثال قبل ثابت کنیم:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}\ \forall N\ \exists n \geq N \quad \left|\sum_{i=n} \frac{a_i}{r_i}\right| > \frac{1}{2}$$

N را ثابت در نظر داریم برای اینکه به حکم بالا را نشان دهیم

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{r_N} = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N_1\ \forall n \geq N_1 \quad \frac{r_n}{r_N} < \frac{1}{2} \ *$$

$$n \geq N_1 \quad \frac{a_N}{r_N} + \frac{a_{N+1}}{r_{N+1}} + \dots + \frac{a_n}{r_n} > \frac{a_N + \dots + a_n}{r_N}$$

r_n دنباله‌ای نزولی است

$$\frac{a_N + \dots + a_n}{r_N} = \frac{r_N - r_{n+1}}{r_N} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_N} \overset{*}{>} \frac{1}{2}$$

چون $\frac{a_m}{r_m} > 0$

$$\Rightarrow \frac{a_N}{r_N} + \dots + \frac{a_n}{r_n} + \dots > \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\sum_{i=N}^{\infty} \frac{a_i}{r_i}\right| > \frac{1}{2}$$

$r_n = a_n + a_{n+1} + \dots \qquad r_{n+1} = a_{n+1} + \dots$

اگر $a_n \geq 0$ و $\sum a_n$ همگرا است نشان دهید $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگرا است.

$0 \le \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} \le 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$

$a_n = r_n - r_{n+1}$ $\qquad \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}} \le 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$

$r_n - r_{n+1} \le 2r_n - 2\sqrt{r_n}\sqrt{r_{n+1}} \Rightarrow 2\sqrt{r_n}\sqrt{r_{n+1}} \le r_n + r_{n+1}$

$\Rightarrow (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})^2 \geq 0$ روابط برگشت پذیر

بنابه روش تلسکوپی $2\sqrt{r_1} - 2\sqrt{r_{n+1}} = 0$ ، $\sum 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ پس همگراست

$\Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = 2\sqrt{r_1}$

حال بنا به آزمون مقایسه $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ نیز همگراست توجه $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ مثبت است.

آزمون دیریکله: فرض کنیم $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ به ازای هر n کراندار باشد و b_n دنباله‌ای نزولی و $\lim b_n = 0$ در این صورت $\sum a_n b_n$ همگراست

مثال: اگر $\lim a_n = a$ در این صورت $\lim S_n = \lim \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |S_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{a_1 - a}{n} + \dots + \frac{a_N - a}{n} + \dots + \frac{a_n - a}{n}\right|$ $\qquad (|a_n - a| \le |a_n| + |a| < 2M)$

می‌دانیم M موجود که به ازای هر n داریم $|a_n| < M$ ، $|a| < M$

$\le \frac{N_1 2M}{n} + \frac{(n - N)(\dots)}{n}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{N_1 \cdot 2M}{n} = 0$

$\exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ \left|\frac{2M \cdot N_1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad N = \max(N_1, N_2)$

$\forall n \geq N \ |S_n - a| \le \left(\frac{|a_1 - a|}{n} + \dots + \frac{|a_{N_1} - a|}{n}\right) + \left(\frac{|a_{N_1+1} - a|}{n} + \dots + \frac{|a_n - a|}{n}\right)$

$$< \underbrace{\frac{2MN_1}{n}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \times \underbrace{\frac{n-N}{n}}_{<1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

مثال: اگر $\lim a_n = a$ در اینصورت $a_n \neq 0 ,\ a \neq 0$ در اینصورت

$$\lim H_n = \lim \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = a$$

$$\lim \frac{1}{H_n} = \lim \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} = \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \Rightarrow \lim H_n = a$$

مثال: ثابت کنید $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 ,\ \alpha_n \geq 0 \qquad \sqrt[n]{n} = \alpha_n + 1 \to n = (\alpha_n + 1)^n$$

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \beta_n \geq 0$$

$$\alpha_n^2 = \frac{2n}{n(n-1)} - \frac{2}{n(n-1)}(1 + n\alpha_n + \beta_n) \to 0 \leq \alpha_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

$$\lim \alpha_n^2 = 0 ,\ \alpha_n \geq 0 \to \lim \alpha_n = 0$$

قضیه سری متناوب: $\Sigma (-1)^n a_n$

اگر دنباله $a_n \geq 0$ و $\{a_n\}$ نزولی باشد طوری که $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ سری متناوب $\Sigma (-1)^n a_n$ همگراست

قضیه:

$$\lim n^p a_n = A \to \begin{cases} p > 1 \text{ و } A \text{ متناهی} & \Sigma a_n \text{ همگراست} \\ p \leq 1 \text{ و } A \neq 0 \text{ یا } \infty+ \text{ [illegible]} & \Sigma a_n \text{ واگراست} \end{cases}$$

حدود یکطرفه

$$\lim_{x\to a} h(x) = L \quad \forall \varepsilon>0 \;\exists \delta>0 \;\forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a^+} h(x) = L \quad \forall \varepsilon>0 \;\exists \delta>0 \;\forall x \quad a<x<a+\delta \Longrightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a^-} h(x) = L \quad \forall \varepsilon>0 \;\exists \delta>0 \;\forall x \quad a-\delta<x<a \Longrightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$$

تذکر: $\lim_{x\to a} h(x) = L \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a^+} h(x) = L \\ \lim_{x\to a^-} h(x) = L \end{array} \right.$

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} h(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ در این صورت:

$$\lim_{x\to a} (h(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

$$\lim_{x\to a} (h(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

نکته) $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0 \quad \exists \delta \;\forall x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\} \quad g(x) \neq 0$

$$M>0 \longrightarrow \exists \delta \quad 0<|x-a|<\delta \longrightarrow g(x)>0$$

$$\varepsilon = \frac{M}{2} \quad \exists \delta \;\forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |g(x)-M| < \frac{M}{2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{M}{2} < g(x)-M \Longrightarrow g(x) > \frac{M}{2} > 0$$

Th: $m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$ $\quad \lim (f(x))^{\frac{m}{n}} = (L)^{\frac{m}{n}}$ اگر n زوج $L>0$

$L\neq 0$ اگر $m<0$

نظریه: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای های با ضرایب حقیقی باشند و $Q(a)\neq 0$ در اینصورت

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

قضیه فشار (ساندویچ):

اگر $a\in(\alpha,\beta)$ و به ازای هر $x\in(\alpha,\beta)$ داشته باشیم $h(x)\le g(x)\le f(x)$ (همچنین) $\lim_{\substack{x\to a\\ a^+\\ a^-}} h(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ a^+\\ a^-}} f(x) = L$ داریم

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a^+\\ a^-}} g(x) = L$$

مثال: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 0$ در اینصورت $\lim_{x\to 0} f(x)$ ؟ و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ؟

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad f(x) = x^2\times\frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim x^2 \cdot \lim\frac{f(x)}{x^2} = 0\times 0 = 0$

$$\frac{|f(x)|}{|x^2|}<\varepsilon \xrightarrow{|x|<\delta} \frac{|f(x)|}{|x|} < \varepsilon|x| < \varepsilon$$

نظریه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و به ازای هر $x\in(a-\delta, a+\delta)$ داشته باشیم $m\le |g(x)|\le M$ که m و M اعداد ثابت و مثبت است در اینصورت $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

$\lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0\times$ کراندار $= 0$

پیوستگی

گوییم $f(x)$ در نقطه‌ی c که درون دامنه‌اش می‌باشد پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

گوییم $f(x)$ در c پیوسته راست است هرگاه $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

چپ دارد $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

توجه: اگر $f(x)$ در c پیوسته است اگر و تنها اگر $f(x)$ در c پیوسته چپ و راست باشد

قضیه: اگر f و g در نقطه‌ی c پیوسته باشند آنگاه $f\pm g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ $g(c)\neq 0$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ ($f(c)>0$ اگر n زوج باشد) همگی پیوسته‌اند

$\lim f(x) = f(c) > 0$

$f(x)$ در بازه حول c همواره مثبت

نکته: اگر $g(x)$ در نقطه‌ی c پیوسته باشد و $f(x)$ در $L = g(c)$ پیوسته در این صورت $f(g(x))$ در c پیوسته است.

دنباله‌ها هم ... کوشی ... $\frac{p}{q}$ و $\frac{1}{n\pi}$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x & x\in Q \\ 1-x & x\notin Q \end{cases}$ نشان دهید $f(x)$ در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \cdot |x-\tfrac{1}{2}|<\delta \Rightarrow |f(x)-\tfrac{1}{2}|<\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x-\frac{1}{2}|<\varepsilon & x\in Q \\ |1-x-\frac{1}{2}|<\varepsilon & x\notin Q \end{cases}$$

$$\varepsilon = \delta \Leftarrow |x-\tfrac{1}{2}|<\varepsilon$$

قضیه: اگر $S\subset R$ و $f: S\to R$ و $a\in S$ داریم f در $x=a$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله a_n که $\lim a_n = a$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله a_n که $\lim a_n = a$ داریم $\lim f(a_n) = L$

Dorna

مثال: $f(x)=\begin{cases}3x & x\in\mathbb{Q}\\ 1-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ نشان دهید که به ازای هر $r\neq\frac{1}{4}$ نشان دهید $f(x)$ در r ناپیوسته است

$a_n=\frac{[rn]}{n}\in\mathbb{Q}$ $\quad \lim a_n=r \Rightarrow \lim f(a_n)=3a_n=3r$

$b_n=\frac{[rn]}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n}\notin\mathbb{Q}$ $\quad \lim b_n=r$

$\lim f(b_n)=\lim 1-b_n=1-r$

درحالیکه $3r\neq 1-r$ بوضوح $r\neq\frac{1}{4}$ است بنابه قضیه f در r پیوسته نمی باشد

تمرین ۱۱- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را چنان بیابید که هر نقطه $r\in\mathbb{R}$ را دقیقاً 2 بار بگیرد. (پوشا است)

مثال: $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$ $\quad \begin{cases} x>0 & x(\frac{1}{x}-1)\le x[\frac{1}{x}]\le x\cdot\frac{1}{x}\\ x<0 \end{cases}$

قضیه اکسترمم:

هر $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد آنگاه x_1, x_2 در $[a,b]$ موجودند که به ازای هر $x\in[a,b]$ داریم $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$

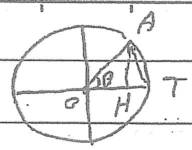
$f(x_2)=M$ را ماکزیمم مطلق f بر $[a,b]$ می نامیم

$f(x_1)=m$ را مینیمم مطلق f بر $[a,b]$ می نامیم

مثال: $f(x)=x$ در بازه $(0,1)$ ماکسیمم و مینیمم خود را نمی گیرد

- نشان می دهیم $f(\theta)=\sin\theta$ و $g(\theta)=\cos\theta$ پیوسته اند

ابتدا نشان می دهیم $f(\theta)=\sin\theta$ در $\theta=0$ پیوسته است



$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \quad |\theta|<\delta \Rightarrow |\sin\theta|<\varepsilon$

$\theta>0 \quad |\sin\theta| = AH < AT \leq \overset{\frown}{AT} = \theta \Rightarrow |\sin\theta|<|\theta|$

$\theta<0 \quad |\sin\theta|<|\theta|$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \quad |\theta|<\delta \Rightarrow |\cos\theta-1|<\varepsilon$

$|1-\cos\theta| = HT < AT < \overset{\frown}{AT} = \theta \Rightarrow |1-\cos\theta|<|\theta|$

حال اگر $\delta=\varepsilon$ کار صحیح است و $\sin\theta$ و $\cos\theta$ در $\theta=0$ پیوسته اند

حال برای $\cos\theta$ نشان می دهیم در $\theta=\theta_0$ پیوسته است

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \quad |h|<\delta \ (|\theta-\theta_0|<\delta) \Rightarrow |\cos(\theta_0+h)-\cos\theta_0|<\varepsilon$

$|\cos(\theta_0+h)-\cos\theta_0| = |2\sin(\frac{2\theta_0+h}{2})\sin(\frac{h}{2})| \leq 2|\sin\frac{h}{2}| \leq 2.\frac{|h|}{2} \leq |h|$

$\delta = \min(1,\varepsilon)$

به وضوح چون $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$ داریم $\sin\theta$ نیز پیوسته است.

تعمیم مقدار میانی

اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ و c مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد در این صورت $c\in[a,b]$ موجود است که $f(c)=$

مثال: اگر f و g دو تابع پیوسته باشند از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ چنانچه به ازای هر $q\in\mathbb{Q}$ داشته باشیم $f(q)=g(q)$ نشان دهید $f=g$.

حکم $\forall r\in\mathbb{R} \ f(r)=g(r)$

$\exists \ a_n = \frac{[nr]}{n} \in \mathbb{Q} \quad \lim a_n = r$

$\forall n \ f(a_n)=g(a_n) \quad a_n\in\mathbb{Q} \Rightarrow \lim f(a_n) = \lim g(a_n)$ چون f و g پیوسته اند $\Rightarrow$

$f(\lim a_n) = g(\lim a_n) \longrightarrow f(r)=g(r)$

مثالی ارائه دهید که نشان دهد پیوستگی f و g نیاز است:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

مثال: اگر $f(x)$ پیوسته و به ازای هر x داشته باشیم $f(x)\in\mathbb{Q}$ نشان دهید f تابعی ثابت است.

اثبات: اگر f ثابت نباشد پس x_1 و x_2 موجودند که $q_1=f(x_1)\neq f(x_2)=q_2$

حال چون اعداد اصم چگال است متمایز q_1 و q_2 عدد اصمی مانند r موجود است حال از پیوستگی f و قضیه مقدار میانی x_3 موجود که $f(x_3)=r$

$f(x_3)=r\notin\mathbb{Q}$. X $\Rightarrow$ f تابع ثابت

مسئله: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته از $[0,+\infty)$ چنانچه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ در این صورت f بر $[0,+\infty)$ کراندار است.

$\varepsilon=1\ \exists N\quad x\geq N\quad |f(x)-L|<1$

$\forall x\in[N,+\infty)\quad |f(x)|<|L|+1$

حال f بر $[0,N]$ پیوسته پس max می‌گیرد یعنی M_1 موجود که به ازای $x\in[0,N]$ داریم $|f(x)|<M_1$

If $M=\max(M_1,|L|+1)\quad \forall x\in[0,+\infty)\Longrightarrow |f(x)|<M$

مثال: اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داریم $f(x+y)=f(x)+f(y)$ چنانچه f در $x=a$ پیوسته باشد داریم $f(x)=cx$ $(c=f(1))$

اثبات داریم: $f(0)=f(0+0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x-x)=0\Rightarrow f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(n)=f(\underbrace{1+\dots+1}_{n})=f(1)+\dots+f(1)=nf(1)$

$\Rightarrow f(n)=nf(1)=cn\Rightarrow f(n)=cn$

به ازای منفی این اعداد نیز برقرار است.

$f(\frac1n)=? \longrightarrow f(1)=f(\underbrace{\frac1n+\dots+\frac1n}_{n \text{ بار}}) = \underbrace{f(\frac1n)+\dots+f(\frac1n)}_{n \text{ بار}}$

$f(\frac1n)=f(1)\cdot\frac1n=c\frac1n \Longrightarrow f(\frac1n)=c\cdot\frac1n$

$\frac mn\in\mathbb{Q} \longrightarrow f(\frac mn)=f(\underbrace{\frac1n+\dots+\frac1n}_{m \text{ بار}}) = m f(\frac1n)=mc\cdot\frac1n$

$f(\frac mn)=mc\cdot\frac1n$

پس به ازای هر $q\in\mathbb{Q}$ داریم $f(q)=cq$

$\forall r\in\mathbb{R} \quad f(r)=cr \qquad a_n=\frac{[nr]}{n}\in\mathbb{Q} \quad \lim a_n=r$

$\lim(a_n-r)=0 \xrightarrow{f \text{ در صفر پیوسته}}$ ① $\lim f(a_n-r)=f(0)=0$

② $\lim f(a_n-r)=\lim(f(a_n)-f(r)) \overset{a_n\in\mathbb{Q}}{=} \lim(ca_n-f(r))=cr-f(r)$

بنابر ① و ② داریم $cr-f(r)=0 \Longrightarrow$ پس $f(r)=cr$ (در واقع r مبهم است)

مسئله: تمام توابع پیوسته $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ را بیابید که به ازای هر $x\in(0,+\infty)$ داریم $f(x^2)=\frac{f(x)}{x}$ مثل تابع $\frac1x$

$f(x)=\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\frac{f(\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}=\dots=\frac{f(\sqrt[2^n]{x})}{x^{\frac12+\frac14+\dots+\frac1{2^n}}} \quad a_n$

x ثابت است و n تغییر می‌کند

$\therefore \forall n\in\mathbb{N} \quad f(x)=a_n \longrightarrow \lim a_n=\frac{\lim f(\sqrt[2^n]{x})}{x^{\lim(\frac12+\dots+\frac1{2^n})}}=\frac{f(1)}{x}$

$n\to\infty$

$f(1)=c \longrightarrow f(x)=\lim a_n=\frac cx \Longrightarrow f(x)=\frac cx$

$x\in(0,+\infty) \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{x}=1$

مسئله: فرض کنیم $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید $c\in[0,1]$ موجود است که $f(c)=c \Leftarrow f(c)-c=0$

اثبات: فرض کنیم $g(x)=f(x)-x$ با توجه به اینکه $f(0),f(1)\in[0,1]$ داریم $g(1)\le 0$ و $g(0)\ge 0$

پس صفر مقداری بین $g(1)$ و $g(0)$ بنابراین $c\in[0,1]$ پس بنا به قضیه مقدار میانی c موجود

که $g(c)=0 \Leftarrow g(c)=f(c)-c=0 \Leftarrow f(c)=c$

Dorna

مسئله: اگر h تابعی پیوسته بر بازه $[0,1]$ باشد و $h(0)=h(1)$ نشان دهید $a\in[0,\frac12]$ موجود که $h(a+\frac12)=h(a)$

$g(x)=h(x+\frac12)-h(x)$, $x\in[0,\frac12]$

پیوسته است زیرا ترکیب دو تابع پیوسته

توضیح: g تابعی پیوسته بر بازه $[0,\frac12]$ است حال $g(0)=h(\frac12)-h(0)$

$g(\frac12)=h(1)-h(\frac12) \Rightarrow g(\frac12)+g(0)=0 \Rightarrow g(\frac12)=-g(0)$

اگر $g(\frac12)=0$ آنگاه $a=0$ جواب مسئله است در غیر اینصورت 0 مقداری بین $g(\frac12)$ و $g(0)$ و g پیوسته پس بنابه قضیه مقدار میانی $a\in[0,\frac12]$ موجود که

$g(a)=0 \Rightarrow h(a+\frac12)-h(a)=0 \Rightarrow$ ✓

سؤال: اگر h بر $[0,1]$ پیوسته باشد و $h(0)=h(1)$ نشان دهید $a\in[0,\frac{n-1}{n}]$ موجود که $h(a+\frac1n)=h(a)$ ؟

سؤال: اگر $h:[0,a]\to[0,b]\subseteq\mathbb{R}$ بطوریکه h پوشا و پیوسته باشد آیا $c\in[0,a]$ موجود که $h(c)=c$ ؟

جواب در صفحه بعد

$g(x)=h(x+\frac1n)-h(x)$

$g(0)=h(\frac1n)-h(0)$

$\vdots$

$g(\frac{n-1}{n})=h(1)-h(\frac{n-1}{n})$

$\Big\}\ g(0)+g(\frac1n)+\dots+g(\frac{n-1}{n})=0$

اگر به ازای هر $0\le i\le n-1$ داشته باشیم $g(\frac in)=0$ مسئله حل است فرض کنیم i که $0\le i\le n-1$ که $g(\frac in)\neq 0$ مثلاً $g(\frac in)>0$ حال $\sum_{i=0}^{n-1}g(\frac in)=0$ پس حتماً $0\le j\le n-1$ موجود که $g(\frac jn)<0$ حال چون g پیوسته است بنابه قضیه مقدار میانی a بین $\frac in$ و $\frac jn$ موجود که $g(a)=0$ پس $h(a+\frac1n)=h(a)$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

مثال: اگر h تابعی پیوسته و $1-1$ باشد در اینصورت h یکنوا است (صعودی یا نزولی)

اثبات: اگر h یکنوا نباشد در اینصورت $[x,y]\subseteq\mathbb{R}$ موجود که $x_1<x_2<x_3$

حال فرض میکنیم h بر $[x,y]$ در دو سر بازه مینیمم باشد یعنی $z\in(x,y)$ موجود باشد که

$h(z)>h(x)$

$h(z)>h(y)$

چون تابع $1-1$ است $h(x)$, $h(y)$, $h(z)$ دو به دو متمایزند.

$M=\max(h(x),h(y)) \Rightarrow M<h(z)$

$\exists t\ \ M<t<h(z) \Rightarrow h(x)<t<h(z) \rightarrow \exists x_1\in(x,z),\ h(x_1)=t$

$h(y)<t<h(z) \rightarrow \exists x_2\in(z,y),\ h(x_2)=t$ تناقض

تناقض رسیدیم پس یکنوا است

ج) سؤال قبل: $f(0)\geq 0$ $g(x)=f(x)-x$

$x_1\in[0,a] \Rightarrow g(x_1)=0-x_1<0$ و $f(0)\geq 0$

طبق قضیه مقدار میانی

$\exists\, \alpha\in(0,x_1)\subseteq[0,a] \Rightarrow g(\alpha)=0$

بنابراین [illegible] $f(\alpha)=\alpha$ پس حتماً $\alpha\in[0,b]$

مثال: اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{m}(x)=x$ (تابع همانی f^m) در این صورت [illegible]

$f\circ f(x)=x$ (همانی f^2) $f(x)=f(y)$ نشان (f یک به یک)

کنیم $f^{m-1}\circ f(x)=f^{m-1}\circ f(y)$ $f^m(x)=f^m(y)$ معکوس f همانی $x=y$ (1-1) f

مثال: اگر $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ ... $f(x)=a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_{2n}>0$) نشان دهید $x_0\in\mathbb{R}$ موجود که $f(x_0)\leq f(x)$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$.

$f(0)=a_0$ $M=|a_0|+1$

اثبات: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

$x\to+\infty$ $M\ \exists N_1\ \ x\geq N_1\ \ f(x)>M$

$x\to-\infty$ $\exists N_2\ \ x\leq -N_2\ \ f(x)>M$

$f(x)>M>f(0)$ $-N_2$ 0 N_1 $f(x)>f(0)$

حال f بر بازه بسته $[-N_2, N_1]$ پیوسته است و مینیمم خود را می‌گیرد یعنی $x_0\in[-N_2,N_1]$ موجود که

$f(x_0)\leq f(x)$ به ازای هر $x\in[-N_2,N_1]$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-N_2,N_1] \Rightarrow f(x)>M\geq f(0)\geq f(x_0)$

$x\in[-N_2,N_1] \Rightarrow f(x)\geq f(x_0) \Rightarrow$ حکم

مثال: نشان دهید $f(x)=x^5-\sin x\, x^4+x^3-\cos x\sin x$ در $\mathbb{R}$ ریشه دارد.

$f(x)$ پیوسته است

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ } مقدار میانی

$$\lim_{x\to+\infty} x^5\left(1-\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x\sin x}{x^5}\right)=+\infty$$

Dorna

مشتق

تعریف: فرض کنیم $f: S \to R$ تابعی باشد که $\delta > 0$ برای $a \in S$ موجود باشد بطوریکه $(a-\delta, a+\delta)$ حال گوییم f در a مشتق پذیر است هرگاه $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

یا $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود و در اینصورت حد فوق را با $f'(a)$ نمایش می دهیم

گوییم f در a مشتق راست دارد هرگاه $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود و آن را با $f'_+(a)$ نشان دهیم

$f'_-(a)$ مشتق چپ 0^-

نتیجه: $f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و با هم برابر باشند

اگر $f'(a)$ موجود باشد در اینصورت شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $P(a, f(a))$ برابر $f'(a)$ و خط مماس بر f به صورت $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ می باشد بدیهی است

معادله خط عمود بر نقطه P در منحنی f در صورتی که $f'(a) \neq 0$ برابر $-\frac{1}{f'(a)}$

مثال: اگر $f(x) = |x|$، f در چه نقاطی مشتق پذیر، مشتق را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad x \neq 0 \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \begin{cases} 1 & 0^+ \\ -1 & 0^- \end{cases} \neq$ با استفاده از تعریف پیش برویم.

در صفر مشتق پذیر نیست

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ بررسی تابع مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$ وجود ندارد

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\frac{1}{h}$

$a_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \quad f(a_n) = \sin 2\pi n = 0$ مشتق پذیر

$b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \quad f(b_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \quad 0 \neq 1$ نیست

مثال: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ ? \text{ وجود دارد} & x=0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$\Rightarrow f'(0)=0$

f' پیوسته نمی‌باشد زیرا:

$a_n=\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim f'(a_n)=0-0=0$

$\neq$

$b_n=\frac{1}{2\pi n} \Rightarrow \lim f'(b_n)=0-1=-1$

نمادگذاری

$y=f(x)$

$D_x y=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=Df(x)$

$dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx=f'(x)\,dx$

نتیجه: اگر f در نقطه x مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در x پیوسته است.

$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ $\qquad \lim_{h\to 0} f(x+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times h\right)$

چون f در x مشتق‌پذیر $\Rightarrow f(x)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\times\lim_{h\to 0} h=f(x)+f'(x)\times 0=f(x)$

نتیجه: اگر f و g در x مشتق‌پذیر باشند $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

$\forall c\in R \quad (cf)'(x)=cf'(x)$

$(f.g)'(x)=f'g+g'f$

$f(x)\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$g(x)\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

قضیه: اگر $g(x)$ در x مشتق‌پذیر و $h(u)$ در $u=g(x)$ مشتق‌پذیر آنگاه $(h\circ g)(x)$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(h\circ g)'(x)=h'(g(x))\,g'(x)$$

اثبات قاعده زنجیره‌ای را بنویسید.

If $y=h(u)=h(g(x))$, $u=g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \qquad u=g(x)$$

$$\frac{dh(g(x))}{dx}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h(g(x+h))-h(g(x))}{h}\right)$$

$\underrightarrow{u\ \text{fix}}$ $\quad E(k)=\begin{cases}0 & k=0\\ \dfrac{h(u+k)-h(u)}{k} & k\neq 0\end{cases}$

$$k=k(h)=g(x+h)-g(x) \qquad \lim_{h\to 0}k(h)=0$$

$$u=g(x)\longrightarrow g(x+h)=u+k$$

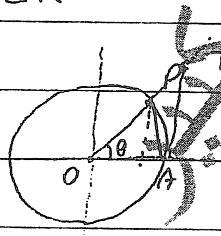
$$h(g(x+h))-h(g(x))=h(u+k)-h(u)=k\left(h'(u)+E(k)\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(g(x+h))-h(g(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\left(h'(g(x))+\underset{\to 0}{E(k)}\right)$$

$$=g'(x)\,h'(g(x))$$

اگر u تابعی برحسب x باشد:

$$\frac{du^{\alpha}}{dx}=\alpha u' u^{\alpha-1}$$



قضیه: نشان می‌دهیم $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAP}}<S_{\overset{\frown}{OAP}}<S_{OAT}$$

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta \longrightarrow 1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta \longrightarrow \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

چون $h(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ $(\theta\neq 0)$ زوج است پس $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

به راحتی داریم $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

با استفاده از تعریف مشتق:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

و همچنین:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

مثال: مشتق $\cos(x + \cos(x + \sin x))$ را محاسبه نمایید.

قضیه‌ی مقدار میانگین

اگر f تابعی پیوسته بر روی $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر روی (a,b) باشد در این صورت $c \in (a,b)$ موجود که $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

تعریف:

f صعودی: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

f نزولی: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

f غیرنزولی: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

f غیرصعودی: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Dorna

تعریف: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و f روی (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه
به ازای هر $x\in(a,b)$

1) $f'(x)>0 \Rightarrow$ f صعودی

2) $f'(x)<0 \Rightarrow$ f نزولی

3) $f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ f غیرنزولی

4) $f'(x)\leq 0 \Rightarrow$ f غیرصعودی

Pf $\quad x_2>x_1 \,,\; x_2,x_1\in[a,b]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad c\in(a,b)$$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\,\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$$

حال به ازای هر یک از موارد نتیجه می‌شود

تعریف: اگر f تابعی پیوسته باشد و مشتق پذیر باشد بر بازه (a,b) و به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=0$ آنگاه f تابع ثابت است.

Pf $\quad x_0\in(a,b) \,,\; f(x_0)=c$

$$\forall x\neq x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\alpha)=0 \qquad \alpha\in(a,b)$$
$$\Rightarrow f(x)=c$$

تعریف: اگر f تابعی مشتق پذیر بر (a,b) باشد و $f'(x)=0$ به ازای $x\in(a,b)$، x را نقطه بحرانی گوییم

قضیه: اگر f روی بازه‌ی (a,b) ~~تعریف شده باشد~~ مشتق پذیر باشد و max یا min خود را در $c\in(a,b)$

بگیرد، اگر $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$ است. اثبات: فرض کنیم $f'(c)\neq 0$ و $f'(c)>0$

باشد، از تعریف مشتق: $\quad f'_+(c)=f'_-(c)=f'(c)$

$$a<x<c \qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \rightarrow \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \rightarrow f'_-(c)\geq 0 \rightarrow f'(c)\geq 0$$

$$c<x<b \qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \rightarrow \lim\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \rightarrow f'_+(c)\leq 0$$

$\Rightarrow f'(c)=0$

$g(a) = g(b)$

قضیه رل:

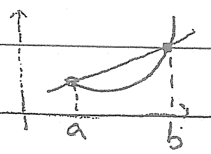
اگر g تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $g(a)=g(b)$ آنگاه $c \in (a,b)$ موجود است که $g'(c)=0$

اثبات: اگر به ازای هر $x \in (a,b)$، $g(x) = g(a)$ حکم واضح است در غیر این صورت اگر $x_0 \in (a,b)$ که $g(x_0) \neq g(a)$ بدون خللی در کلیت اگر $g(x_0) > g(a)$

چون g پیوسته بر $[a,b]$ حتماً دارای max است. اگر c ماکزیمم g روی $[a,b]$ باشد بدیهی است $c \neq a,b$ پس $c \in (a,b)$ بنابراین از قضیه قبل داریم $g'(c)=0$

اثبات قضیه مقدار میانگین:

$$g(x) = h(x) - \left(h(a) + \frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)\right)$$



$g(a) = g(b) = 0$ ، g روی $[a,b]$ همه شرایط رل را دارد

$\xrightarrow{\text{رل}} \exists c \quad g'(c) = 0 \qquad h'(c) - \left(\frac{h(b)-h(a)}{b-a}\right) = 0$

$$h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$$

تعمیم قضیه مقدار میانگین:

اگر h و g دو تابع پیوسته روی $[a,b]$ و مشتق‌پذیر روی (a,b) باشند چنانچه $g'(x) \neq 0$ به ازای هر $x \in (a,b)$ آنگاه $c \in (a,b)$ موجود است که

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

(اگر $g(x) = x$ خود مقدار میانگین)

به وضوح $g(a) \neq g(b)$ اگر چنین باشد $c \in (a,b)$ موجود است که $g'(c) = 0$ این با فرض در تناقض است.

اثبات: می‌خواهیم $(h(b)-h(a))g'(c) - (g(b)-g(a))h'(c) = 0$

$$H(x) = (h(b)-h(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(h(x)-h(a))$$

$H(a) = H(b) = 0$ ، H همه شرایط را با h و g را دارد

رل $\exists c \quad H'(c) = 0 \Longrightarrow (h(b)-h(a))\, g'(c) = (g(b)-g(a))\, h'(c)$

Dorna

مسئله: اگر h تابعی مشتق پذیر بر $[c,d]$ باشد و $a,b \in (c,d)$ و عددی مانند λ بین $h'(a)$ و $h'(b)$ باشد در این صورت $\alpha \in (a,b)$ موجود است که $h'(\alpha) = \lambda$

(h' در مقدار میانی صدق می‌کند با اینکه ممکن است پیوسته نباشد)

فرض کنیم $a<b$ و بدون کاستن کلیت $h'(a) < \lambda$

اگر $g(x) = h(x) - \lambda x$ به وضوح g روی $[c,d]$ مشتق پذیر و $g'(a) < 0$ و $g'(b) > 0$

$a<t<b$

$a<x<t \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) < 0$

$\exists \delta_1 \quad a<x<a+\delta_1<t \quad \forall x \quad \frac{g(x)-g(a)}{x-a} < 0 \longrightarrow g(x) < g(a)$

$g(a)$ دیگر min نیست

$\lim_{x \to b^-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = g'(b) > 0$ از طرفی برای $t<x<b$

$\exists \delta_2 \quad t<b-\delta_2<x<b \quad \forall x \quad \frac{g(x)-g(b)}{x-b<0} > 0$

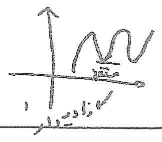
پس در این بازه $g(x) < g(b)$ پس با توجه به نکات بیان شده g مینیمم خود را در دو سر بازه $[a,b]$ نمی‌گیرد از طرفی g بر $[a,b]$ پیوسته پس می‌نیمم هم خود را در نقطه $\alpha \in (a,b)$ می‌گیرد

حال بنابه قضیه‌ای

$g'(\alpha) = 0 \Longrightarrow h'(\alpha) - \lambda = 0 \Rightarrow h'(\alpha) = \lambda$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )



* در هر بازه‌ی f را هم می‌توان صعودی گرفت.

تعاریف:

(۱) x_0 را بحرانی گوییم هرگاه $f'(x_0)=0$.

(۲) x_0 را منفرد گوییم هرگاه $f'(x_0)$ موجود نباشد.

(۳) x_0 را انتهایی (مرزی) گوییم اگر $\delta>0$ موجود نباشد که $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f$.

قضیه: اگر f بر بازه‌ی I تعریف شده و در نقطه‌ی x_0 از I مقدار Max یا (Min) نسبی داشته باشد، آنگاه x_0 باید یک نقطه بحرانی یا منفرد یا انتهایی باشد.

اثبات: از قضایای قبل اگر x_0 منفرد و انتهایی نباشد پس بر بازه (x_0-h, x_0+h) max خود را در x_0 می‌گیرد پس بنا به قضایای قبل $f'(x_0)=0$.

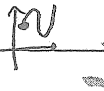
آزمون مشتق اول:

فرض کنید f در x_0 پیوسته و x_0 یک نقطه انتهایی یا مرزی نباشد.

(۱) اگر بازه‌ی بازی چون (a,b) شامل x_0 باشد که به ازای $x\in(a,x_0)$، $f'(x)>0$ و به ازای $x\in(x_0,b)$، $f'(x)<0$ آنگاه x_0 یک Max نسبی است.

(۲) 〃 〃 〃 〃 $f'(x)<0$ 〃 $f'(x)>0$ 〃 〃 min نسبی است.

نقاط انتهایی:



اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر و در a و b پیوسته است، پس:

(۱) اگر به ازای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)>0$ داریم a، min نسبی

(۲) 〃 〃 〃 $f'(x)<0$ a max نسبی

(۳) 〃 〃 〃 $f'(x)>0$ b max نسبی

(۴) 〃 〃 〃 $f'(x)<0$ b min نسبی

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

قضیه: اگر f بر بازه‌ی باز (a,b) پیوسته و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=M$

اگر $c\in(a,b)$ که $f(c)>L , M$

آنگاه f دارای Max مطلق است.

(توجه: اگر $a=-\infty$ به جای $\lim\limits_{x\to a^+}$ داریم $\lim\limits_{x\to -\infty}$ و برای $b=+\infty$ به همین قیاس)

* به همین قیاس برای min مطلق قضیه داریم.

تمرین ۱۲: قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

تقعر و نقاط عطف:

تعریف: f بر بازه‌ی I به بالا مقعر است اگر f' صعودی باشد.
" " پایین " " f' نزولی باشد.

گوییم $(x_0, f(x_0))$ یک نقطه عطف منحنی است اگر نمودار $y=f(x)$ در x_0 مماس و تقعر $f(x)$ در دو طرف x_0 مخالف باشد.

قضیه: تقعر و مشتق دوم:

۱) هرگاه f بر بازه‌ی I با این خاصیت باشد که به ازای هر x داریم $f''(x)>0$ تقعر رو به بالاست.
۲) " " " " " $f''(x)<0$ " " پایین
۳) اگر x_0 نقطه عطف باشد و $f''(x_0)$ موجود، آنگاه $f''(x_0)=0$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

آزمون مشتق دوم:

قضیه:

۱) $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)<0$ آنگاه x_0 یک max موضعی است

۲) $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)>0$ " " min موضعی است

۳) $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)=0$ آنگاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت، ممکن است max موضعی یا min موضعی یا نقطه عطف داشته باشیم.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f''(x_0)<0$$

$$\lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f'(x_0+h)}{h}<0$$

$$\exists \delta \quad |h|<\delta \to \frac{f'(x_0+h)}{h}<0$$

$$0<h<\delta \to f'(x_0+h)<0$$

$$-\delta<-h<0 \to \frac{f'(x_0-h)}{-h}<0 \to f'(x_0-h)>0$$

پس x_0 max موضعی است.

آزمون مشتق kام:

اگر f تابعی در بازه I با مشتق kام و a متعلق به بازه I و $f'(a)=\dots=f^{(k-1)}(a)=0$ و $f^{(k)}(a)\neq 0$

داریم است اگر

۱) k زوج باشد $f^{(k)}(a)>0$ ($f^{(k)}(a)<0$) a یک min موضعی (max موضعی)

۲) اگر k فرد باشد a نه max موضعی نه min موضعی.

STAEDTLER

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

تمرین ۱۳/۳: آزمون مشتق علام ثابت کنید.

مثال) اگر f بر یک بازه مقعر رو به بالا باشد نمودار تابع بالای خط مماس است.

در نقطه x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$H(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

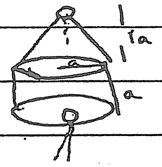
$$H'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\text{صعودی}} - f'(x_0)$$

H' صعودی است و $H'(x_0) = 0$, $H'' > 0$

پس x_0 برای H اکسترمم min نسبی است

$H(x_0) = 0 \to H(x) \geq 0$ حول بازه

مثال)



$t = 2V_0 s$ زمان خالی

دائماً خالی می‌شود

نمودار تغییر ارتفاع

$$\frac{dh}{dt}$$ خالی ... نمودار $H(t)$ ؟ به عنوان یک بازی دو رسم نمودار

~~مثال~~

$$H(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

$$H'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\text{صعودی}} - f'(x_0) \Rightarrow H'' > 0,\ H'(x_0) = 0$$ و H' صعودی

x_0 یک min نسبی برای H

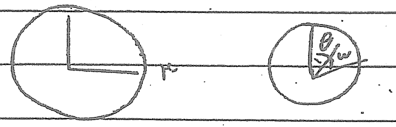
$H(x_0) = 0$ حول بازه $H(x) \geq 0$

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

تمرین: ثابت کنید $f(x)=x^2-\cos x$ و $g(x)=۲x^2-x\sin x-\cos^2 x$

(صفحه ۹۸) دو ریشه دارد.

مثال) اگر ساعت ۳ باشد، بعد از چند ثانیه عقربه بزرگ روی عقربه کوچک قرار می‌گیرد.



$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\pi}{۳۰}=\frac{۲\pi}{۶۰}\ \frac{rad}{min}$$

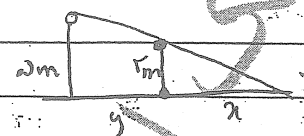
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{۱۲}\times\frac{\pi}{۳۰}=\frac{\pi}{۳۶۰}\ \frac{rad}{min}$$

$$\int d\theta=\int\frac{\pi}{۳۰}\,dt\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳۰}t+0$$

$$\int d\omega=\int\frac{\pi}{۳۶۰}\,dt\rightarrow\omega=\frac{\pi}{۳۶۰}t+\frac{\pi}{۲}$$

$$\omega=\theta\Rightarrow t=\frac{۱۸۰}{۱۱}$$

مثال) مردی به قد ۲m با سرعت $\frac{1m/s}{۲}$ به سمت چراغ برقی به ارتفاع ۵m حرکت می‌کند. طول سایه مرد وقتی در ۳m چراغ است با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ همچنین سرعت حرکت سایه سر مرد در آن لحظه چقدر است؟



مسئله ۱) قسمت اول: $\frac{dx}{dt}=$ ✓   تالس: $\frac{x}{۲}=\frac{x+y}{۵}$

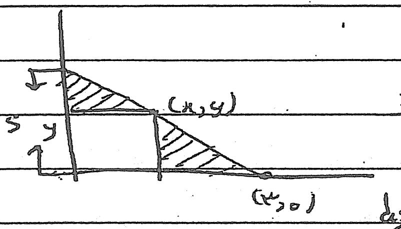
قسمت دوم: $\frac{d(x+y)}{dt}$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال) یک لامپ در (۳،۰) قرار دارد. حشره‌ای در ربع اول صفحه حرکت می‌کند و لامپ سایه اش را روی محور y می‌اندازد. سرعت حرکت سایه حشره در امتداد محور y وقتی حشره در نقطه (۱،۲) است که به طوری حرکت می‌کند که سرعت x‌ش با $\frac{1}{2}$ واحد بر ثانیه افزایش و سرعت yش با $\frac{1}{4}$ متر بر ثانیه کاهش می‌یابد چقدر است؟



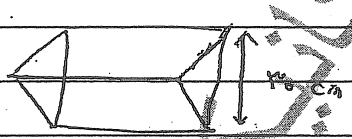
به $\frac{dS}{dt}$ نیاز داریم برای سایه

$$\frac{S-y}{x} = \frac{y}{3-x} \Rightarrow S = \frac{3y}{3-x}$$

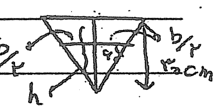
$$\frac{dS}{dt} = \frac{3\frac{dy}{dt}(3-x) + 3y\frac{dx}{dt}}{(3-x)^2} \qquad \underline{x=1, y=2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}$$

مثال) مقطع عرضی یک ظرف آب مثلثی متساوی الاضلاع با ضلع فوقانی افقی است. اگر طول ظرف ۱۰ متر و عمق آن ۳۰cm باشد و آب به میزان $\frac{1}{4}\,\frac{m^3}{min}$ وارد آن شود، سطح آب وقتی عمق آب در گودترین جا ۲۰cm است با چه سرعتی بالا می‌آید؟



$$V = \left(\frac{1}{2}bh\right)(10)$$



$$\sqrt{3} = \tan 60 = \frac{h}{\frac{b}{2}} \Rightarrow b = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$V(h) = \frac{10h^2}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{20h}{\sqrt{3}} \times \frac{dh}{dt}$$

$\underline{h = 0.2m}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\,\frac{m^3}{min}$

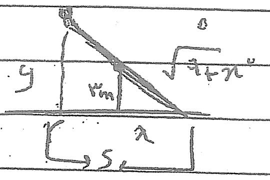
مثال) یک نردبان به طول 10m روی زمین بوده و نردبان به یک دیوار به ارتفاع 3m تکیه داده، اگر پای نردبان از پای دیوار 4m فاصله داشته باشد و از دیوار با سرعت $2\,m/s$ روی زمین دور شود، انتهای فوقانی آزاد نردبان با چه سرعتی

الف) به طور قائم حرکت می‌کند؟

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

ب) بصورت افقی حرکت می‌کند؟



$$\frac{y}{10} = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}} \to y = \frac{30}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-30x}{(9+x^2)^{3/2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{x=4}{\frac{dx}{dt}=\frac{1}{5}} \quad -\frac{24}{125}\ m/s$$

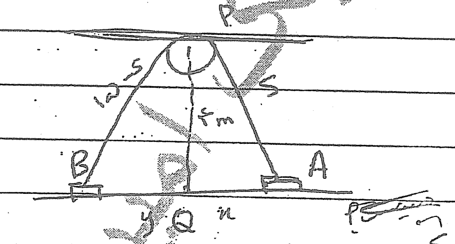
$$\frac{s}{10} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{90}{(9+x^2)^{3/2}}\frac{dx}{dt} \quad \frac{x=4}{\frac{dx}{dt}=\frac{1}{5}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{18}{125}$$

سرعت [illegible] سایه
[illegible] است

سرعت سر [illegible] $= \frac{1}{5} - \frac{18}{125} = \frac{7}{125}\ m/s$

مثال) ۲ صندوق A و B که در یک امتداد قرار دارند صندوق‌ها را با یک طناب به طول 15m به هم وصل می‌کنیم سپس طناب را کشیده و مانند شکل به قرقره P در سقف به فاصله 4m وصل می‌کنیم. اگر صندوق A در 3m Q باشد و مستقیماً با سرعت 4m/s از Q دور گردد سرعت حرکت B به سمت Q چقدر است؟



$$\begin{cases} s^2 = 16 + x^2 \\ (15-s)^2 = 16 + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$-(15-s)\frac{ds}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

با جایگذاری $\frac{dy}{dt}$ حاصل می‌شود

STAEDTLER

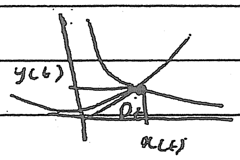
SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال) نقطه P طوری حرکت می‌کند که در لحظه t در نقاط اشتراک منحنی‌های

$\begin{cases} xy=t \\ y=tx^2 \end{cases}$ قرار دارد. فاصله P(t) تا مبدأ در لحظه $t=2$ با چه سرعتی تغییر خواهد

مختصات P



$\begin{cases} D^2=x^2+y^2 \\ \dfrac{dD}{dt} \end{cases}$

$\begin{cases} x(t)=1 \\ y=t \end{cases}$

مقادیر اکسترمم مطلق:

* تابع f در نقطه x_0 از دامنه‌اش دارای ماکزیمم مطلق $f(x_0)$ هرگاه به ازای $x\in D_f$

$f(x)\le f(x_0)$

* " " " " می‌نیمم مطلق $f(x_0)$ " " " $f(x)\ge f(x_0)$

قضیه: اگر f در یک بازه‌ی بسته پیوسته باشد، max مطلق و min مطلق خود را می‌گیرد
یا انتهای از بازه‌ی بسته

تعریف max و min نسبی:

گوییم f در نقطه x_0، Max (min) نسبی دارد اگر $h>0$ موجود [باشد] به ازای هر $x_0-h<x<x_0+h$
داشته باشیم $f(x)\le f(x_0)$

$f(x)\ge f(x_0)$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مسئله: اگر برای هر x داشته باشیم $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ و اگر f و g روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و روی بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(a)=f(b)=0$ نشان دهید g روی بازه‌ی $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

اثبات: اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\neq 0$ پس $H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مشتق‌پذیر است و $H(a)=H(b)=0$ طبق قضیه رل $\alpha\in(a,b)$ موجود است که $H'(\alpha)=0$

$$\Rightarrow H'(\alpha)=0 \Rightarrow \frac{f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}=0 \Rightarrow$$

$f'(\alpha)g(\alpha)=f(\alpha)g'(\alpha)$ با فرض در تناقض است پس حکم ثابت می‌شود.

مثال) اگر f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر، $f(0)=f(1)=0$ و $f'(0)>0$, $f'(1)>0$ نشان دهید f' حداقل دو ریشه دارد.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0 \Rightarrow \exists \delta_1,\ 0<x<\delta_1<\tfrac{1}{2},\ \frac{f(x)}{x}>0 \longrightarrow f(x)>0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>0 \Rightarrow \exists \delta_2,\ \delta_2<\tfrac{1}{2},\ 1-\delta_2<x<1 \longrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{\underbrace{x-1}_{<0}}>0 \longrightarrow f(x)<0$$

$\exists x_1\in(0,\tfrac{1}{2}),\ f(x_1)>0$

$\exists x_2\in(\tfrac{1}{2},1),\ f(x_2)<0 \xrightarrow{\text{مقدار میانی}} \exists\, \alpha\in(0,1)\ f(\alpha)=0$

$f(0)=f(\alpha)=0$ رل $f'(c)=0$ $\quad 0<c<\alpha$

$f(\alpha)=f(1)=0$ رل $f'(c_1)=0$ $\quad \alpha<c_1<1$

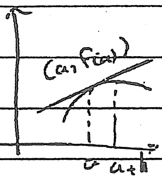
STAEDTLER

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اثبات بدیم

تقریب خطی:



$y = f(a) + f'(a)h$

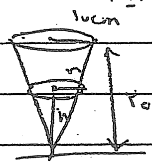
$\Delta y = f(a+h) - f(a) \simeq y - f(a) = f'(a)h$

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$

مثال) مقدار تقریبی $\sqrt[3]{1/012}$ را بیابید

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $a=1$, $h=0/012$

مثال) ظرف قیفی شکلی مانند شکل زیر مفروض است. اگر آب با سرعت $2\,cm^3/s$ در این ظرف بریزیم آهنگ افزایش ارتفاع آب وقتی ارتفاع آب $6\,cm$ است را بیابید.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{r}{h} = \frac{10}{20} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$

$\frac{dV}{dt} = 2$, $\frac{dh}{dt} = ?$

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \Rightarrow 2 = (\frac{1}{4}\pi h^2)\times\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow$ If $h=6 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi}$

مسئله: ظرف مانند شکل بالا در نظر بگیرید، آب را درون ظرف می‌ریزیم تا ارتفاع آب به $6\,cm$ با خطای احتمالی $\pm 0/1\,cm$ باشد. اگر حجم آب موجود برحسب ارتفاع اندازه‌گیری شده باشد خطای ممکن در محاسبه حجم چقدر است؟

$\Delta V \simeq \frac{\pi}{4}\times 36\times\Delta h$ $\pm 0/1\,cm \Rightarrow |\Delta h| \le 0/1$

$|\Delta V| \le 0/9\pi$ $r = \frac{h}{2}$

$V = \frac{1}{3}\pi\times\frac{h^2}{4}\times h \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\times\frac{3h^2}{4}\frac{dh}{dt}$

$dV = \frac{\pi h^2}{4}dh$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تمرین ۲: اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ۲ بار مشتق‌پذیر و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)|\leq 1$

و $f(0)^2+f'(0)^2=4$ ثابت کنید نقطه‌ای مانند x_0 موجود است که $f(x_0)+f''(x_0)=0$

$f'(a)=\left|\frac{f(-2)-f(0)}{-2}\right| \leq f'(?) \leq 1$

راهنمایی: $g(x)=f(x)^2+f'(x)^2 \Rightarrow g(0)=4$

حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین $g(a)<2$ st $-2<a<0$ موجود

$\exists b$ $0<b<2$ st $g(b)<2$

حال بنابه قضیه‌ای g ماکزیمم دارد در نقطه‌ای بین a و b یعنی $g'(x_0)=0$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\mathbb{Q}\\ x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ نشان دهید f در صفر مشتق‌پذیر است $f'(0)=1$

* کمان‌های مربوط به ($\lim \frac{\sin x}{x}=1$)

* با تعریف مشتق حل می‌شود.

تمرین: اگر f در نقطه c مشتق‌پذیر باشد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=f'(c)$$

تمرین: اگر $f(x)$ بر (a,b) پیوسته باشد و $x_1,\dots,x_n\in(a,b)$ آنگاه $c\in(a,b)$ موجود است که

$$f(c)=\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$$

حال قضیه مقدار میانی $\exists i,j$ $\underbrace{f(x_i)}_{\min} < \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n} < \underbrace{f(x_j)}_{\max}$

$\frac{\Delta x}{x}$ خطای نسبی در نقطه

$\frac{\Delta y}{y}$ " " تابع

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: می‌دانیم شعاع کره زمین $64\times10^{5}\,m$ است و ۸۰٪ کره زمین را آب می‌پوشاند. اگر تمام کوه‌های یخ به حجم 8×10^{6} میلیون تن به طور ناگهانی ذوب شوند و آب آن‌ها در اقیانوس‌ها بریزد، تخمین بزنید سطح آب چقدر بالا می‌آید؟ همچنین اگر در تخمین حجم کوه یخ ۶٪ خطا وجود داشته باشد، در تخمین افزایش سطح آب چند درصد خطا ممکن است؟

$8\times10^{6} = \Delta V$ است.

$\Delta R \leftarrow$ جرم آب ، چقدر آب باید بریزیم

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 \Rightarrow \Delta V = (\frac{4}{5}) \times 4\pi R^2 \times \Delta R$

توجه نمایید $4\pi R^2$ مساحت کره زمین است. اگر همه‌ی یخ ذوب شده همه‌ی کره‌ی خاک را بپوشاند از فرمول $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta R$ استفاده می‌کنیم ولی طبق فرض ΔV فقط بر $\frac{4}{5}$ سطح کره‌ی خاک توزیع می‌شود، پس باید ΔR را در $\frac{4}{5}$ ضرب نماییم.

$$\Delta R = \frac{5}{4} \times \frac{\Delta V}{4\pi r^2} \Rightarrow \Delta R = \frac{5}{4} \times \frac{8\times10^{12}}{4\pi\times64\times64\times10^{10}}$$

$$\Delta R = \left(\frac{5}{2\pi}\right)\left(\frac{10}{64}\right)^2 \simeq 0.02\,m = 2\,cm$$

ب)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{4}{5}\cdots = \frac{16}{5}\pi R^2 \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} \times \frac{5}{12} = \frac{6}{100} \times \frac{5}{12} = 2.5\%$$

مثال) اگر $C_0, \dots, C_n$ اعداد حقیقی متمایز باشند و $C_0 + \frac{C_1}{2} + \dots + \frac{C_n}{n+1} = 0$

ثابت کنید معادله $f(x) = C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n = 0$

حداقل یک ریشه دارد. $g(x) = C_0x + \frac{C_1x^2}{2} + \dots + \frac{C_n}{n+1}x^{n+1}$

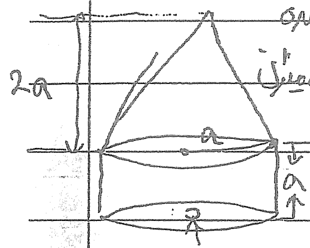
$g(0) = g(1) = 0$ such that

$\exists\, \alpha \in (0,1)$ s.t $g'(\alpha) = 0$

STAEDTLER

$\rightarrow f(\alpha) = 0$

X



یک مخروط به یک استوانه متصل شده و ظرفی خالی مطابق شکل ساخته شده. در لحظه $t=0$ آب با سرعت ثابت به میزان $6\ lit/s$ از بالا وارد ظرف شده و به میزان $2\ lit/s$ از پایین ظرف خارج می‌شود. در لحظه‌ای که ظرف پر آب می‌شود جریان آب قطع می‌شود. اگر در لحظه $t=270$ ظرف مجدداً خالی شود و اولاً مقدار a را محاسبه، ثانیاً نمودار $h(t)$ را در جوری که داده‌های مسئله اجازه می‌دهد رسم کنید.

ارتفاع آب داخل ظرف در لحظه t $h(t)$ و $0 \le t \le 270$

در حال پر شدن $\frac{dv}{dt} = 6-2 = 4\ lit/s$ در حال خالی شدن $\frac{dv}{dt} = 2\ lit/s$

با توجه به روابط بدون زمان خالی شدن آب دو برابر زمان پر شدن آن می‌باشد پس از 90 ثانیه پر می‌شود و در 180 ثانیه خالی می‌شود

کل $V = \pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3$

از طرفی داریم V پر شدن $= 90 \times 4 = 360$

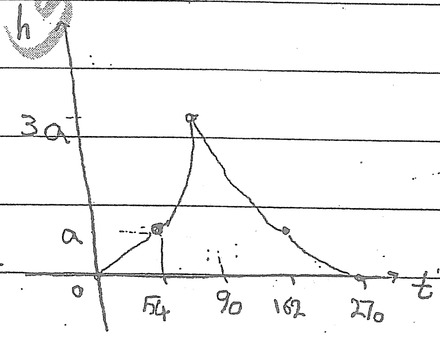
$\frac{5}{3}\pi a^3 = 360 \rightarrow a = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$

t_1 زمان پر شدن استوانه $= 90 \times 3/5 = 54$

t_2 زمان پر شدن مخروط $= 90 \times 2/5 = 36$

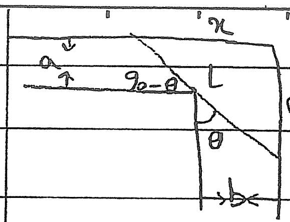
t_3 زمان خالی شدن مخروط $= 180 \times 2/5 = 72$

t_4 زمان خالی شدن استوانه $= 180 \times 3/5 = 108$



به وضوح چون سطح مقطع استوانه ثابت است $h(t)$ در بازه $0 \le t \le 54$ خطی است و $\frac{dH}{dt} > 0$ و همچنین در بازه‌ی $162 \le t \le 270$ باز هم $h(t)$ خطی است و $\frac{dH}{dt}$ همچنین در بازه $54 \le t \le 90$ به وضوح $\frac{dH}{dt} > 0$ و چون سطح مقطع کم می‌شود $\frac{dH}{dt}$ افزایش می‌یابد یعنی $\frac{d^2h}{dt^2} > 0$ و تقعر رو به بالا است و در بازه‌ی $90 \le t \le 162$ به وضوح $\frac{dH}{dt} < 0$ و سطح مقطع افزایش می‌یابد یعنی سرعت کاهش ارتفاع کم می‌شود به عبارتی $-\frac{dh}{dt}$ نزولی یعنی $\left(-\frac{dh}{dt}\right)' < 0 \rightarrow -\frac{d^2h}{dt^2} < 0 \Rightarrow \frac{d^2h}{dt^2} > 0$

Dorna



مثال: طول طولانی‌ترین تیری که بتوان به طور افقی از پیچ یک راهرو به عرض a متر به راهروی با عرض b متر حمل شود بیابید.

حالتی که min می‌شود همان max حالتی است که رد می‌شود

$$L = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{\theta \to 0^+, \frac{\pi}{2}^-} L(\theta) = +\infty$$

پس min باید در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ است

$$L'(\theta) = 0$$

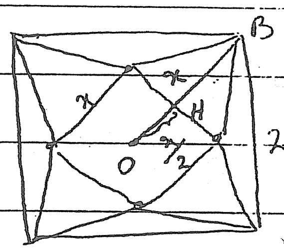
توجه: این حالتی که شکل رسم شده حالتی است که میله رد می‌شود پس باید min حالتی را بیابیم که میله رد می‌شود

$$L'(\theta) = 0 \Longrightarrow \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0 \Longleftrightarrow \frac{a\sin^3\theta - b\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = 0$$

$$tg^3\theta = \frac{b}{a} \longrightarrow \theta = Arctg\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}$$

$$L(\theta) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$



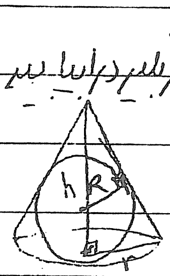
مسئله: یک هرم با قاعده مربع و چهار وجه که هر یک مثلث متساوی الساقین هستند که با بریدن یک قطعه مربعی 20×20 مانند شکل و از تا کردن مثلث‌ها حاصل می‌شود. برای ساخته شدن دیواره‌های هرم حجم max هرم چقدر باشد.

$$OB = 10\sqrt{2} \qquad HB = 10\sqrt{2} - \frac{x}{2} \qquad 0 \le x \le 10\sqrt{2}$$

$$h^2 = (10\sqrt{2} - \frac{x}{2})^2 - (\frac{x}{2})^2 \qquad V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{200 - 10\sqrt{2}x}$$

$\frac{dV}{dx} = 0$ ... به همراه دو سر بازه چک شود max

مثال: کمترین حجم یک مخروط قائم را که می‌توان درون آن یک کره به شعاع R قرار داد را بیابید.



$$\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{R}{h-R}$$ از تشابه دو مثلث قائم الزاویه

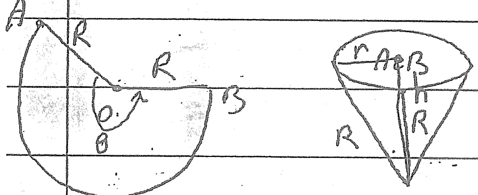
$$h = \frac{2r^2R}{r^2 - R^2} \qquad R < r < \infty$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi R \frac{r^4}{r^2 - R^2}$$

$r \to R^+$ ، $+\infty$ $\quad V \to +\infty$ پس بوضوح می‌بینیم در یک بازه ماکزیمم نمی‌دهد

$$\frac{dv}{dr} = 0 \Longrightarrow \frac{2}{3}\pi r\left(\frac{(r^2 - R^2)(4r^3) - r^4 \times 2r}{(r^2 - \pi^2)^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow 4r^5 - 4r^3R^2 - 2r^5 = 0 \Longrightarrow r = R\sqrt{2} \qquad V_{min} = \frac{8}{3}\pi R^3$$



مثال ۲: می‌خواهیم مخروطی بسازیم که حجم آن max شود

$2\pi r = R\theta \Rightarrow r = \frac{R\theta}{2\pi}$

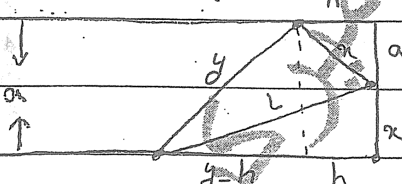
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \longrightarrow V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2}\underbrace{\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}_{f(\theta)}$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$ $0 \le \theta \le 2\pi$ r متغیر

$$f(\theta) = \theta^2\left(\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\right) \longrightarrow f'(\theta) = 0 \Longrightarrow 2(4\pi^2 - \theta^2) = \theta^2$$

$$\theta^2 = \frac{8}{3}\pi^2 \Longrightarrow V_{max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \qquad f(0) = f(2\pi) = 0$$

مثال ۳: یک گوشه‌ی نوار کاغذی به عرض a سانتی‌متر را برمی‌داریم که در امتداد ضلع مقابل قرار بگیرد کمترین طول ممکن را برای خط تا خورده بیابید



$\frac{a}{2} < x \le a$ $L = \infty \longleftarrow x = a/2$ اگر

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 = h^2 + (a - x)^2 \longrightarrow h^2 = 2ax - a^2 \\ y^2 = a^2 + (y - h)^2 \longrightarrow h^2 = 2hy - a^2 \end{cases} \Longrightarrow hy = ax \longrightarrow y = \frac{ax}{h}$$

$$L^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{h^2} = x^2 + \frac{a^2x^2}{2ax - a^2} \qquad a/2 < x \le a$$

$$\lim_{x \to \frac{a}{2}^+} L(x) = +\infty$$

$k(x) = (L(x))^2 \qquad L(a) = \sqrt{2}\,a$

Dorna

$\frac{dL}{dx}=0 \Longrightarrow x=\frac{3}{4}a \qquad L(\frac{3}{4}a)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a \qquad L(\frac{3}{4}a)<L(a) \longrightarrow L_{min}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$

چندجمله‌ای‌های تیلور، حول نقطه‌ی $x=a$ برای تابع $f(x)$

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a) \longrightarrow \begin{cases} P_1(a)=f(a) \\ P_1'(a)=f'(a) \end{cases}$$

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$P_2^{(\alpha)}(a)=f^{(\alpha)}(a)$$

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n^{(\alpha)}(a)=f^{(\alpha)}(a) \qquad \alpha=0,1,\dots,n$$

قضیه‌ی تیلور:

اگر $n+1$ مشتق اول f حول a یعنی $f^{(n+1)}(b)$ موجود باشد در این صورت $f(x)=P_n(x)+E_n(x)$ که در آن

$$E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

برای c_x بین a و x.

$n=0 \longrightarrow f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ همان قضیه‌ی مقدار میانگین

$n=1 \longrightarrow$ اثبات می‌کنیم $\quad f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$

c بین a و x است

فرض کنیم $a<x$، قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته را برای $E_1(t)$ و $(t-a)^2$ روی بازه‌ی $[a,x]$ به کار می‌بریم

$$\frac{E_1(x)}{(x-a)^2}=\frac{E_1(x)-E_1(a)}{(x-a)^2-(a-a)^2}=\frac{E_1'(c_1)}{2(c_1-a)} \qquad a<c_1<x$$

$$=\frac{f'(c_1)-f'(a)}{2(c_1-a)} \underset{\text{قضیه میانگین}}{=} \exists c \; \frac{1}{2}f''(c) \quad \text{برای} \quad a<c<x$$

$$\Longrightarrow E_1(x)=\frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$$

حال حکم را برای $k \geq 2$ نشان می‌دهیم با استقرا الم $n = k - 1$ حکم صحیح است

حال اگر g تابعی باشد که مشتق k ام آن موجود باشد بر بازه $[a, x]$ از فرض استقرا داریم:

$$E_{k-1}(x) = \frac{g^{k}(c)}{k!}(x-a)^{k} \qquad a<c<x$$

$$E_k(b) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) \dots \frac{f^{k}(a)}{k!}(b-a)^{k}$$

$$E'_k(c_1) = f'(c_1) - f'(a) - f''(a)(c_1-a) - \frac{f'''(a)(c_1-a)^2}{2!} \dots \frac{f^{k}(a)(c_1-a)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$g(x) = f'(x)$

$$g(c_1) - g(a) - g'(a)(c_1-a) \dots - \frac{g^{(k-1)}(c_1)}{(k-1)!}(c_1-a)^{k-1}$$

$$E_{k-1}(c_1) = E'_k(c_1)$$ حال برای $g(x) = f'(x)$ و $x = c_1$ داریم

از فرض استقرا داریم $E_{k-1}(c_1) = \frac{g^{k}(c)(c_1-a)^{k}}{k!}$ c بین a و x

$$E'_k(c_1) = E_{k-1}(c_1) = \frac{f^{k+1}(c)(c_1-a)^{k}}{k!}$$

$$\Rightarrow E_k(x) = \frac{E'_k(c)(x-a)^{k+1}}{(k+1)(c-a)^{k}} = \frac{f^{k+1}(c)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

حول $x=0$ (1) $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + E_n(x)$ $\quad f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}(x)$ $\quad E'_{2n+1}(x) = E_{2n}(x)$

(3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_{2n+1}(x)$

(1) $\rightarrow \frac{1}{1-x} = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} \dots + E_n(x) \rightarrow$ از طرفین مشتق می‌گیریم

(3) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$ $\qquad f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \dots + E_{2n+1}(x)$

$f''(x) = -\sin x \quad f''(0) = 0$ $\qquad f(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(0) = -1$ (2) $f(x) = \cos x \rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + E_{2n}(x)$

قضیه: قاعده اول هوپیتال :

اگر f و g بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در آن $g'(x)\neq 0$ از طرفی

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ چنانچه $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L می‌تواند $\pm\infty$ نیز باشد)

آنگاه داریم

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

اگر به جای $\lim_{x\to a^+}$ داشته باشیم $\lim_{x\to b^-}$ یا $\lim_{x\to c}$ $(a<c<b)$ باز هم حکم صحیح است.

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & a<x<b \\ 0 & x=a \end{cases} \Rightarrow F(x) \text{ در } a \text{ پیوسته است}$$

$a<x<b$

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & a<x<b \\ 0 & x=a \end{cases} \Rightarrow G(x) \text{ در } a \text{ پیوسته است}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a<c<x \text{ چون}$$

$$\text{If } x\to a^+ \Rightarrow c\to a^+ \qquad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

قضیه: قاعده دوم هوپیتال :

اگر f و g بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در آن $g'(x)\neq 0$ از طرفی $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$

(حتی $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ممکن است موجود نباشد)

چنانچه $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L می‌تواند $\pm\infty$ هم باشد)

آنگاه داریم

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

اگر به جای $\lim_{x\to a^+}$ داشته باشیم $\lim_{x\to b^-}$ یا $\lim_{x\to c}$ $(a<c<b)$ باز هم حکم صحیح است

توجه: [illegible] $a=-\infty$, $b=+\infty$ باشد

تمرین 13. قاعده‌ی دوم هوپیتال اثبات شود.

مثال: اگر f دوبار مشتق‌پذیر باشد نشان دهید:

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}_{\alpha(h)} = f''(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) \overset{Hop}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h} \quad (1)$$

$$\overset{Hop}{=} \lim \frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$$

نمی‌شود f'' پیوسته است

$$\text{ادامه } (1) = \lim \frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h} + \lim \frac{f'(a-h)-f'(a)}{2(-h)}$$

$$= \frac{1}{2}f''(a) + \frac{1}{2}f''(a) = f''(a)$$

مثال:

اگر f در $x=a$ دوبار مشتق‌پذیر و $f'(a)=0$ [illegible] $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h^2}=0$

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) \overset{Hop}{=} \lim \frac{f'(a+h)+f'(a-h)}{2h}$$

$$= \lim \frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h} - \frac{f'(a-h)-f'(a)}{2(-h)} = \frac{1}{2}f''(a) - \frac{1}{2}f''(a) = 0$$

Dorna

توابع متعالی :

تابع f را (۱-۱) گوییم اگر از $f(x_1)=f(x_2)$ بتوان نتیجه گرفت $x_1=x_2$.

اگر f را (۱-۱) باشد تابع f^{-1} موجود است و داریم

$$y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$$

نتیجه: اگر f اکیداً صعودی یا نزولی باشد f (۱-۱) است

تابع f^{-1} قرینه‌ی تابع f نسبت به خط $y=x$ است

خواص تابع وارون :

$$f\circ f^{-1}(x)=I_{R_f}$$ همانی

$$f^{-1}\circ f(x)=I_{D_f}$$

1) $y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$

2) $D_{f^{-1}}=R_f$

3) $R_{f^{-1}}=D_f$

4) $f(f^{-1}(x))=x \quad \forall x\in R_f$

5) $f^{-1}(f(x))=x \quad \forall x\in D_f$

6) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

7) نمودار f^{-1} انعکاس نمودار f تحت $y=x$ است

قضیه: اگر $f: I\to R$ تابعی مشتق‌پذیر و مشتق آن همه جا مثبت یا منفی باشد در اینصورت مشتق f^{-1} نیز در همه جا موجود است و داریم

$$\frac{d(f^{-1}(x))}{dx}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad y=f^{-1}(x)\iff x=f(y)$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx} \times f'(y) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

$$\longrightarrow \frac{d f^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

مثال: اگر f تابعی دوبار مشتق‌پذیر و $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}$ همچنین $f'(0)=f'(1)=0$ نشان دهید c ای موجود که $|f''(c)|>4$

می‌خواهیم تقریب تیلور را برای $f(\frac{1}{2})$ حول $x=0$ و $x=1$ بدست آوریم

$$\exists c_1 \quad f(\tfrac{1}{2}) = f(0) + \cancel{f'(0)(\tfrac{1}{2})} + \frac{f''(c_1)}{2}(\tfrac{1}{2})^2$$

$$\exists c_2 \quad f(\tfrac{1}{2}) = f(1) + \cancel{f'(1)(-\tfrac{1}{2})} + \frac{f''(c_2)}{2}(\tfrac{1}{4})$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) \Longrightarrow 1 + \frac{f''(c_2)}{8} = \frac{f''(c_1)}{8}$$

$$f''(c_2) + 8 = f''(c_1)$$

بنابراین $|f''(c_1)|>4$ یا $|f''(c_2)|>4$

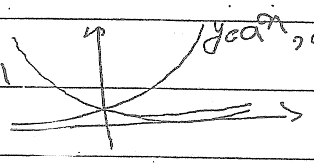
توابع نمایی یا لگاریتمی:

هرگاه $a>0$ می‌خواهیم a^x را برای $x\in R$ تعریف کنیم

If $r = \frac{m}{n} \in Q \longrightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m}$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$ $\quad (\lim r_n = x$ ، r_n گویا$)$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$



$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

پس به وضوح می‌توان دید که $y=a^x$ تابعی ۱-۱ است و $(a\neq 1, a>0)$

Dorna

حال $y=a^x$ یک تابعی (1-1) است و $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(0,+\infty)$ بنابراین این تابع معکوس دارد که آن را با $\log_a$ نمایش دهیم. $\log_a$ تابعی است با دامنه $(0,+\infty)$ و برد $\mathbb{R}$.

خواص log: $y=\log_a^x \iff x=a^y$

$a,b>0$ و $x,y>0$

1) $a^{\log_a^x}=x$

2) $\log_a^1=0$

3) $\log_a(xy)=\log_a^x+\log_a^y$

4) $\log_a\frac{1}{x}=-\log_a^x$

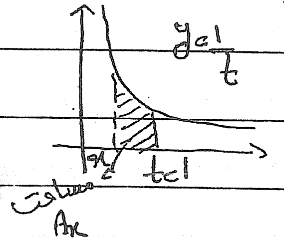
5) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a^x-\log_a^y$

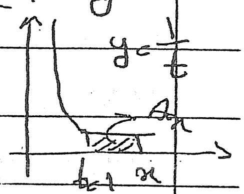
6) $\log_a x^y=y\log_a^x$

7) $\log_a^x=\dfrac{\log_b^x}{\log_b^a}$

log طبیعی یا ln:

$$\ln x=\begin{cases}-A_x & 0<x<1\\ A_x & x\geq 1\end{cases}$$





به وضوح داریم $\ln 1=0$ و اگر $x\neq y$ داریم $\ln x\neq\ln y$

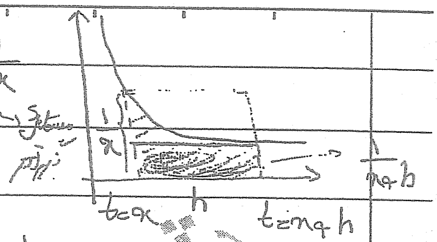
بنابراین $y=\ln x$ تابعی 1-1 است.

مشتق: $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$$

$h>0 \quad \frac{h}{x+h} < \ln(x+h) - \ln(x)$ مساحت زیر نمودار $< \frac{h}{x}$

مستطیل کوچکتر $\leftarrow x+h$



$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} < \frac{1}{x}$$

$$h \to 0^+ \quad \frac{1}{x+h} \to \frac{1}{x} \qquad h \to 0^+ \quad \frac{1}{x} \to \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

به همین قیاس $\lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$

(وجود دارد) پس $y = \ln x$ تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته است $x>0$

تعمیم برای x, y مثبت داریم

1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2) $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$

3) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

4) $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in R)$

اثبات 1) $\forall x>0 ,\ y$ ثابت $\Rightarrow \ln xy - \ln x = \ln y$

$h(x) = \ln xy - \ln x$

از قاعده‌ی زنجیره‌ای $\frac{d(\ln xy)}{dx} = \frac{y}{xy}$

$h'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

پس $h(x)$ تابعی ثابت است $h(x) = c$

پس $h(1) = c$ یعنی $c = \ln y$ پس $h(x) = \ln y$ حکم ثابت می‌شود

نکته: $x \neq 0 ,\ \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$

$x>0 \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$x<0 \quad \frac{d}{dx} \ln(-x) = -1 \times \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

مثال: $\frac{d}{dx}\ln|\cos x| = ?$ $\qquad -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

تابع $\ln x$ یک به یک و پیوسته و صعودی (صعودی) از $(0,\infty)$ به R است. تابع معکوس آن را با $\exp(x)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln y$$

واضح است

$$\forall x \in R \quad \ln(\exp(x)) = x$$
$$\forall x > 0 \quad \exp(\ln x) = x$$

آشنایی با خواص تابع نمایی:

1) $(\exp(x))^r = \exp(rx)$

2) $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$

3) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$

4) $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

اثبات 1)

$u = (\exp(x))^r \Longrightarrow \ln u = \ln(\exp(x))^r = r\ln\exp(x) = rx$

$\Longrightarrow u = \exp(rx) \Longrightarrow (\exp(x))^r = \exp(rx)$

قرار می‌دهیم $e = \exp(1)$.

$\exp(r) = \exp(r1) = (\exp(1))^r \Longrightarrow \exp(r) = e^r$

$e = 2.7$

$x = e^y = \exp(y) \Longleftrightarrow y = \ln x$

$x = e^y \Longrightarrow y = \log_e^x = \ln x$

If $y = e^x \Longrightarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\Rightarrow x = \ln y \xrightarrow{\text{ازطرفین مشتق میگیریم}} 1 = \frac{dx}{dx} = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y$

$y' = e^x \quad , \int e^x dx = e^x + C$

If $a>0 \quad \frac{d}{dx} a^x = ? \Rightarrow y = a^x \Rightarrow e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{(\ln a)x})}{dx} = \ln a \, e^{(\ln a)x} = (\ln a) a^x$

$$\boxed{\frac{d a^x}{dx} = (\ln a) a^x}$$

$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{(\ln a)x} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{\frac{1}{x}\ln a - 0}{(\ln a)^2} = \frac{1}{(\ln a)x}$

مثال: اگر $h(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ نشان دهید h در $x=\pi$ شیب منفی دارد.

$h'(x) = \pi x^{\pi-1} - (\ln \pi)\pi^x \Rightarrow h'(\pi) = \pi \times \pi^{\pi-1} - (\ln\pi)\pi^{\pi}$

$h'(\pi) = \pi^{\pi}(1 - \ln \pi)$

$\ln x$ تابعی صعودی $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \quad , x>0$

$e < \pi \Rightarrow \ln e = 1 < \ln \pi$

پس $h'(\pi) < 0$

مشتق‌گیری لگاریتمی:

$y = (h(x))^{g(x)} \qquad (h(x) > 0)$

$\ln y = g(x) \ln(h(x)) \Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \ln(h(x)) + g(x)\frac{h'(x)}{h(x)}$

$y' = (h(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln h(x) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)} \right)$

Dorna

مثال: $y=(\sin t)^{\ln t}$ ، $0<t<\pi$ ، $\frac{dy}{dt}=?$

$$\ln y = \ln t \ln(\sin t) \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{t}\ln(\sin t) + \frac{\cos t}{\sin t}\ln t$$

$$y' = (\sin t)^{\ln t}(A)$$

مثال: کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟

$e^{\pi} \square \pi^{e}$ $\xrightarrow{\text{چون ln صعودی}}$ $\pi \ln e \boxed{>} e \ln \pi \Longrightarrow \frac{\ln e}{e} \boxed{>} \frac{\ln \pi}{\pi}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Longrightarrow f(e) \boxed{>} f(\pi)$

$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow x=e$

$0<x<e \longrightarrow f'(x)>0$ ، $x>e \longrightarrow f'(x)<0$

بنابراین e نقطه max است پس $f(e)>f(\pi)$

مثال: به ازای $a>0$ معادله $x^{x^{x^{\cdots}}} = a$ را حل کنید.

$x^a = a$ پس $\ln a = a\ln(x)$ پس $\ln x = \frac{\ln a}{a} = \ln(a)^{\frac{1}{a}}$

یعنی $x = a^{\frac{1}{a}}$

مثال: $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$ ، $f'(2)$ را بیابید.

$$f(2) = \frac{3\times2\times1}{5\times6\times7} = \frac{1}{35}$$

$$\ln f(x) = \ln(x^2-1) + \ln(x^2-2) + \ln(x^2-3) - \ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) - \ln(x^2+3)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+3}\right)$$

$$f'(2) = \frac{1}{35}\times 4(\qquad)$$

مثال: اگر $x>0$ آنگاه $\ln x < x-1$

$g(x) = \ln(x) - x + 1$, $g(1) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1$, $0<x<1 \to g'(x)>0$; $x>1 \to g'(x)<0$ $\to x=1$ max

$\forall x>0$ $\quad g(x) < g(1) = 0 \Longrightarrow \ln x < x-1$

تعمیم exp و ln ، $a>0$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$

اثبات 1) $x>1 \Rightarrow x \to +\infty$

$0 < s = \frac{a}{2} < a$

$0 < \ln x^s < x^s - 1 < x^s$

$0 < s \ln x < x^s \Longrightarrow 0 < \ln x < \frac{x^s}{s} \Longrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{x^s}{s x^{2s}} = \frac{1}{s x^s} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

قضیه ساندویچ $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

اثبات 2)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \ln x \xrightarrow[t\to+\infty]{x=\frac{1}{t}} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^a} \times \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t^a} \overset{(1)}{=} 0$

اثبات 3)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} \xrightarrow{x=\ln t} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^a}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln t}{t^{\frac{1}{a}}}\right)^a \overset{(1)}{=} 0$

Dorna

اثبات (a: $\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} |t|^a e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{|t|^a}{e^t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^a}{e^t} \overset{(3)}{=} 0$

قضیه: برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{\alpha}{n})}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\frac{\alpha}{n}=h} \lim_{h\to0}\alpha\frac{\ln(1+h)}{h} = \alpha\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}$$

$$=\alpha \frac{d}{dx}(\ln x)\Big|_{x=1} = \alpha$$

چون $\ln$ پیوسته است

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\right) = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

از روی اثبات داریم: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$

$\lim_{t\to0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

مثال: حد مقابل را اثبات کنید:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

راه دوم: به تعریف مشتق

$$\lim_{x\to1} (x)^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim e^{\ln x^{\frac{1}{x^2-1}}} = e^{\frac{\ln x}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

راه اول: ما داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{3}{x}}}\right)^{x\sin\frac{3}{x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x$$

$a,b>0$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{a^x-1-(b^x-1)}{x} = \frac{da^x}{dx}\Big|_{x=0} - \frac{db^x}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$=\ln a - \ln b$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x|^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln|x|} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x|^x = \lim_{x\to 0^-} e^{x\ln|x|} = \lim_{x\to 0^-} e^{x\ln -x} = \lim_{x\to 0^-} e^{-(-x)\ln(-x)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\underbrace{\left(\frac{\sin x - x}{x}\right)}_{t(x)}\right)^{\frac{1}{t(x)}}\right)^{\frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

با توجه به اینکه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{Hop}{=} \lim \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{t\to 0}(\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln\cos 2t}{t^2}} = \lim e^{\frac{\frac{-2\sin 2t}{\cos 2t}}{2t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{-\frac{2}{\cos 2t}\times\frac{\sin 2t}{2t}} = e^{-2}$$

معکوس توابع مثلثاتی

تعریف می‌کنیم $\text{Sin}\,x = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ روشن است که $\text{Sin}\,x$ در این دامنه ۱-۱ است و بعد روی x یک با دامنه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

آنگاه معکوس x را برابر $\sin^{-1}$ x باشد

$$y = \sin^{-1}x \Longleftrightarrow x = \sin y$$

$$\frac{dx}{dx} = y'\cos y \Longrightarrow y' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C$$

Dorna

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

(تابع معکوس $tg\,x$)

$$Tan\,x = tg\,x \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

$$y = tg^{-1}x \Longleftrightarrow x = tg\,y \Longrightarrow 1 = y'(1+tg^2 y)$$

$$y' = \frac{1}{1+tg^2(tg^{-1}x)} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = tg^{-1}x+C$$

مثال: $tg^{-1}x - \frac{\pi}{4} = tg^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$f(x) = tg^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - tg^{-1}x$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow \exists c \quad f(x) = c$$

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow c = -\frac{\pi}{4}$$

معکوس $y = \cos x \quad 0<x<\pi$

$$y = \cos^{-1}x \Longleftrightarrow x = \cos y \qquad x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Longrightarrow \frac{\pi}{2}-y = \sin^{-1}x$$

$$\Longrightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$$

$$\Longrightarrow \frac{d\cos^{-1}x}{dx} = -\frac{d\sin^{-1}x}{dx} \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1}x+C$$

* معکوس $\sec x$ را با $\sec^{-1}x$ نمایش می‌دهیم

$$y = \sec^{-1}x \Longleftrightarrow x = \sec y \qquad x = \frac{1}{\cos y}$$

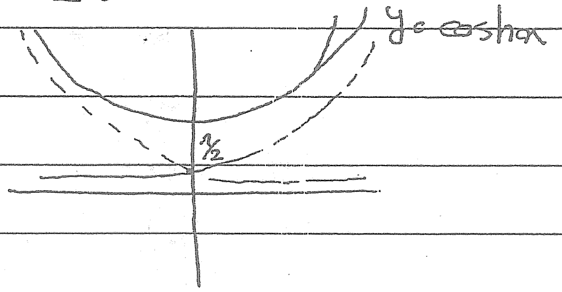
$$\cos y = \frac{1}{x} \Longrightarrow y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\times\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

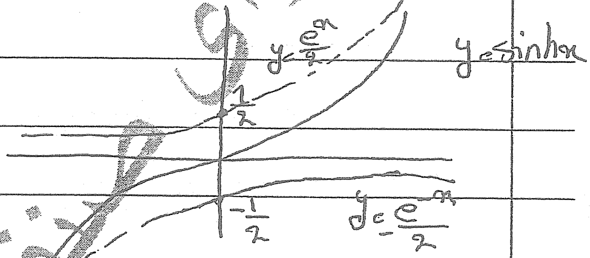
$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x+C$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh x$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$:نتائج





$$\text{tgh } x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$\text{cosech } x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$$

:نتائج

$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{tgh } x = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{tgh } x = -1$

:روابط

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

مثال: نشان دهید $h(x)=x^x$ بر بازه $(e^{-1},+\infty)$ اکیداً صعودی است و اگر تابع معکوس h بر $(e^{-1},+\infty)$ باشد نشان دهید:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)\,(\ln \ln y)}{\ln y}=1$$

$$y=h(x)\Rightarrow \ln h(x)=x\ln x \Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)}=\ln x+1$$

$$h'(x)=x^x(1+\ln x)$$

به وضوح اگر $x>\frac{1}{e}$ داریم $\ln x+1>0$ و بس $h'(x)>0$

پس h اکیداً صعودی و بنابراین $g=h^{-1}$ موجود است همچنین اگر $y\to+\infty$ داریم $x\to+\infty$

$$y=h(x)=x^x \Longleftrightarrow x=g(y)$$

$$y=x^x \Rightarrow \ln y=x\ln x$$

$$\Rightarrow \ln(\ln y)=\ln x+\ln\ln x$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)\,(\ln\ln y)}{(\ln y)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x+\ln(\ln(x)))}{x\ln x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=1$$

توابع هذلولوی

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\qquad \sinh(0)=0$$

$$\cosh(0)=1$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x}{2}+\left(-\frac{e^{-x}}{2}\right)$$

$\cosh(t)$ و $\sinh t$ روی منحنی هذلولی $x^2-y^2=1$ قرار دارند یعنی

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

$$\sinh(-x)=-\sinh x$$

$$\cosh(-x)=\cosh x$$

Dorna

$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x$
$= 2\cosh^2 x - 1$
$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

مشتقات

$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$

$\frac{d}{dx} (\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

نکته:

$y = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y$
$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Longrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$
$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \Longrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$
$e^y > 0 \longrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ $\quad (\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}))$

$y = \operatorname{tgh}^{-1} x \iff x = \operatorname{tgh} y$
$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Longrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Longrightarrow xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$
$e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \Longrightarrow \operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

Dorna

$$\frac{d \sinh^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y=\sinh^{-1}x \longrightarrow x=\sinh y \longrightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx}\cosh y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$$

انتگرال

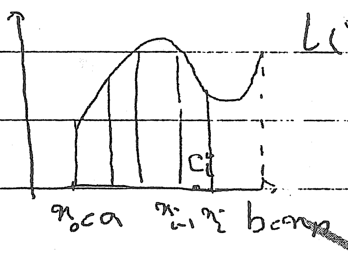
تعریف: $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ را یک افراز روی $[a,b]$ گوئیم توجه نمایید که $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته باشد پس f بر $[x_{i-1},x_i]$ پیوسته و مقدار min و max خود را در بازه $[x_{i-1},x_i]$ در نقاط t_i و u_i یعنی $f(t_i)=m_i$ و $f(u_i)=M_i$.

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ مجموع ریمان پایینی

$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ مجموع ریمان بالایی

واضح است که چون $m_i \le M_i$ داریم $L(f,P)\le U(f,P)$



تعریف: اگر $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ در این صورت برای افراز P داریم

$R(f,P,C)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ $\quad C=\{c_1,\dots,c_n\}$

اگر P یک افراز باشد عدد n را با $n(P)$ نمایش می‌دهیم و داریم $\|P\|=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i$

تعریف: گوییم افراز P_1 تظریفی از افراز P است هرگاه $P\subseteq P_1$

نکته: توجه نمایید که اگر P_1 تظریفی از P باشد

$L(f,P)\le L(f,P_1)\le U(f,P_1)\le U(f,P)$

مثال: $P=\{x_0=0,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=1\}$ P_1 را تظریفی از P

$P_1=\{x_0=0,\ x_1'=\frac{1}{4},\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=1\}$

حکم را با استقرا روی $t=|P_1|-|P|$ ثابت کنیم. کافی است برای $t=1$ حکم ثابت شود

$L(f,P)\le L(f,P_1)$

$P=\{x_0=a,\ x_1,\ \dots,\ x_n=b\}$ $P_1=\{x_0=a,\ x_1,\ \dots,\ x_{i-1},\ y,\ x_i,\ \dots,\ x_n=b\}$

فرض کنیم m_i مقدار مینیمم f بر $[x_{i-1},x_i]$ باشد و m_1' و m_2' مقادیر مینیمم f بر $[x_{i-1},y]$ و $[y,x_i]$ باشند

$L(f,P)=m_1\Delta x_1+\dots+m_{i-1}\Delta x_{i-1}+m_i\Delta x_i+\dots+m_n\Delta x_n$

$L(f,P_1)=m_1\Delta x_1+\dots+m_{i-1}\Delta x_{i-1}+m_1'(y-x_{i-1})+m_2'(x_i-y)+\dots$

$m_i\le m_1' \Longrightarrow (y-x_{i-1})m_i\le (y-x_{i-1})m_1'$

$m_i\le m_2' \Longrightarrow (x_i-y)m_i\le (x_i-y)m_2'$

$m_i\Delta x_i\le m_1'(y-x_{i-1})+m_2'(x_i-y)$

پس بوضوح $L(f,P)\le L(f,P_1)$

تعریف: اگر عدد I موجود باشد که به ازای هر افراز P از $[a,b]$ داشته باشیم

$L(f,P)\le I\le U(f,P)$

در این صورت گوییم f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است

$$\int_a^b f(x)\,dx=I$$

حال اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد داریم

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,C)=\int_a^b f(x)\,dx$$

و $n(P)\to\infty$

در محاسبه طول بازه‌ها برابر است $\|P\|\to 0$ داریم $n(P)\to\infty$

Dorna

تعمیم:
اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت f انتگرال پذیر است.

مثال: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{i-1}{n} < \frac{i}{n}-\frac{1}{2n} < \frac{i}{n}$$

$a=0,\ b=1$ $\quad 0 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{i-1}{n} \quad \frac{i}{n}$ $\quad c_i = \frac{i}{n}-\frac{1}{2n}$ $\quad \Delta x_i = \frac{1}{n}$

$c_i \in [x_{i-1} = \frac{i-1}{n},\ x_i = \frac{i}{n}]$

$$\lim_{n\to\infty} R(f,P,c) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\tan^{-1}(c_i) \xrightarrow[\text{ریمان}]{\text{طبق قضیه}} \int_0^1 \tan^{-1}(x)\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

توجه نمائید اگر f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد و افراز P به گونه‌ای باشد که $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ در این صورت

$$R(f,P,c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum f(c_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

تعمیم: خواص انتگرال:
اگر f و g بر بازه‌ای شامل نقاط a و b و c انتگرال پذیر باشند موارد زیر را داریم:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b (Af(x)+Bg(x)) = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx \qquad A,B\in R$

4) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

5) If $a \le b$, $\forall x$ $a \le x \le b$ $f(x) \le g(x)$ دراینصورت داریم

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

6) If $a < b \longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

7) $\int_{-a}^{a} f = 0$ اگر f فرد باشد

8) $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$ اگر f زوج باشد

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته دراینصورت $c \in [a,b]$ موجود که

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

چون f پیوسته فرض کنیم $f(\alpha) = m$ و $f(\beta) = M$ ، min و max f روی $[a,b]$ باشند دراینصورت به ازای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$m \le f(x) \le M \longrightarrow \int_a^b m \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b M$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

چون f پیوسته از قضیه مقدار میانی c بین a و b موجود که

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dorna

تعریف: میانگین تابع f روی بازه $[a,b]$ را با $\bar{f}$ نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

توابع قطعه‌ای پیوسته:

فرض کنیم $c_0<c_1<\dots<c_n$ مجموعه‌ای متناهی از نقاط روی R باشند. f بر $[c_0,c_n]$ تعریف شده به جز احتمالاً در نقاط c_i که $0\le i\le n$ و به ازای $1\le i\le n$ تابع پیوسته F_i بر $[c_{i-1},c_i]$ موجود باشد که به ازای هر $x\in(c_{i-1},c_i)$ داشته باشیم

$$f(x)=F_i(x)$$

در اینصورت f بطور قطعه‌ای پیوسته است. در اینصورت:

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$$

مثال:

$$\int_0^3 x^2[x]+\sin x\,dx = \int_0^3 \sin x\,dx + \int_0^3 x^2[x]$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{sgn}(x-1)\,dx = \int_0^1 -\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)-\bar{f})\,dx = \int_a^b f - \bar{f}\int_a^b dx = \int_a^b f - \bar{f}(b-a)$$
$$= \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

مثال: اگر $a<b$ و f بر $[a,b]$ پیوسته، k را چنان بیابید که مقدار $\overbrace{\int_a^b (f(x)-k)^2}^{A(k)}$ می‌نیمم باشد.

$$A(k) = \int_a^b (f(x))^2 - \left(2\int_a^b f(x)\right)k + k^2(b-a)$$

$$\lim_{k\to\pm\infty} A(k) = +\infty$$ پس min دارد

$$A'(k)=0 \Rightarrow -2\int_a^b f + 2k(b-a) = 0 \Rightarrow k=\bar{f}$$

قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f بر بازه‌ی I شامل نقطه a پیوسته باشد. اگر $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ در این صورت F بر I مشتق‌پذیر است و داریم $F'(x) = f(x)$ یعنی

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

همچنین اگر $G(x)$ تابعی باشد که به ازای هر $x \in I$ داریم:

$$G'(x) = f(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

که $G(b) - G(a)$ را با $G(x)\Big]_a^b$ نمایش می‌دهیم.

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

خواص انتگرال $\lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \overset{\text{قضیه‌ی مقدار میانگین انتگرال}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{h f(c)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) \overset{\text{پیوستگی}}{=} f(x)$

$c \to x$ داریم $h \to 0$ یعنی $x < c < x+h$ $\exists$

یعنی $F'(x) = f(x)$

قسمت دوم: فرض کنیم $G(x)$ — $T(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ داریم

$$T'(x) - f(x) - G'(x) = 0 \qquad \text{ثابت} \quad T(x) - G(x) = c$$

$$T(x) - G(x) = c \Longrightarrow T(b) - G(b) = c \Longrightarrow T(b) - G(b) = -G(a)$$

$$T(b) = \int_a^b f(t)\,dt - G(b) = -G(a) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

از قاعده‌ی زنجیره‌ای روابط زیر را داریم

اگر $g(x)$ و $h(x)$ مشتق‌پذیر و f پیوسته باشد

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = g'(x)\, f(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = g'(x)\, f(g(x)) - h'(x)\, f(h(x))$$

Dorna

$F(x)=\int_a^x h(t)\,dt$ (1) $\frac{d}{dx}F(g(x))$

(2) $\frac{d}{dx}\left(F(g(x))-F(h(x))\right)=---$

مثال: تابع $F(x)$ را چنان بیابید که مشتق آن $\frac{\sin x}{1+x^2}$ و $F(\pi)=0$

$$F(x)=\int_\pi^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$$

مثال: آیا تابع $F(x)=\int_0^{2x-x^2}\cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ دارای مقدار max یا min مطلق است؟

$$0<\frac{1}{1+t^2}\leq 1 \xrightarrow[\text{نزولی}]{\cos \text{ در بازه } [0,\frac{\pi}{2}]} \underbrace{\cos(1)}_{\alpha>0}\leq\cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\leq 1$$

برای x های به مقدار کافی بزرگ عبارت همواره $2x-x^2<0$

$$\int_{2x-x^2}^{0}\alpha\,dt\leq\int_{2x-x^2}^{0}\cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$-\alpha(2x-x^2)\leq -F(x)\Rightarrow F(x)\leq\alpha(2x-x^2)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}F(x)=-\infty$$

پس فقط نقطه max دارد و max نسبی مطلق نیز هست

$$F'(x)=0\Rightarrow(2-2x)\cos\left(\frac{1}{1+(2x-x^2)^2}\right)=0\Rightarrow x=1$$

(توضیح: بدون بدست آوردن $\lim_{x\to\pm\infty}F(x)$ می‌توان با استفاده از مشتق نشان داد که در $x=1$ نقطه max مطلق است توجه نمائید

$$F'(x)=(2-2x)\underbrace{\cos\left(\frac{1}{1+(2x-x^2)^2}\right)}_{>0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\dots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)=\int_0^1(1+x)^5\,dx$$

$u=1+x$, $dx=du$ $\Rightarrow\int_1^2 u^5\,du=\frac{1}{6}u^6\Big]_1^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\dots+\sin\frac{\pi n}{n}\right)=\int_0^\pi\sin x\,dx$$

$a=0$ $b=\pi$ $\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}}_{a_n}=?$$

$$\underbrace{\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+1}+\dots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+1}}_{b_n}\leqslant a_n\leqslant\underbrace{\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\dots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}}_{c_n}$$

$$\lim b_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\right)=\int_0^1 2^x\,dx=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim c_n=\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\times\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\right)=\int_0^1 2^x\,dx=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{\ln 2}$$

مثال: اگر $f(x)=2+3\int_4^x f(t)\,dt$ در اینصورت $f(x)$ را با این شرط آنگاه بیابید.

$$\begin{cases} f'(x)=3f(x)\\ f(4)=2\end{cases}\Longrightarrow \frac{df(x)}{dx}=3f(x)$$

$$\frac{df(x)}{f(x)}=3\,dx\Longrightarrow\int\frac{df}{f}=\int 3\,dx\Longrightarrow \ln(f(x))=3x+c_1$$

$$f(x)=ce^{3x}\qquad f(4)=2\Longrightarrow ce^{12}=2\Longrightarrow c=2e^{-12}$$

$$f(x)=2e^{3x-12}$$

مثال: اگر f و g روی $[a,b]$ پیوسته باشند ← 1) ثابت کنید $c\in[a,b]$ موجود که $f(c)\int_a^b g(t)\,dt=g(c)\int_a^b f(t)\,dt$:

2) اگر به ازای هر t، $g(t)\neq 0$ نشان دهید موجود c:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt$

تابع کمکی // $H(x) = F(x)G(b) - F(b)G(x)$

بوضوح H مشتق پذیر

$\begin{cases} H(a) = 0 \\ H(b) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{رل}]{\text{تقضیه}} \exists c \,;\, H'(c) = 0$

$H'(c) = F'(c)G(b) - G'(c)F(b) = 0$

$f(c)\int_a^b g(t)dt - g(c)\int_a^b f(t)dt = 0$ ✓

2) درقسمت (1) بجای $f(t)$ قرار دهید $h(t) = f(t)g(t)$

$g(c)\int_a^b h(t)dt = f(c)g(c)\int_a^b g(t)dt$

$\Longrightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

مثال: اگر $f: R \to R$ مشتق پذیر و تقعر آن رو به بالا باشد و $f(0)=0$ ثابت کنید به ازای هر $x>0$ داریم

($f'(x)$ صعودی)

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{1}{2}f(x)$$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{x}{2}f(x)$

$H(x) = \frac{x}{2}f(x) - \int_0^x f(t)dt \Longrightarrow H'(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{xf'(x)}{2} - f(x)$

$\Longrightarrow H'(x) = \frac{xf'(x)}{2} - \frac{f(x)}{2}$

$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(c)$

$0 < c < x$ مقدار میانگین

$= \frac{xf'(x)}{2} - \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) \overset{\text{مقدار میانگین}}{=} \frac{xf'(x)}{2} - \frac{1}{2} \times xf'(c)$

$= \frac{x}{2}\underbrace{(f'(x) - f'(c))}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \Longrightarrow H'(x) \geqslant 0 \,,\, H(0) = 0$

$\Longrightarrow \forall x > 0 \quad H(x) \geqslant H(0) = 0 \Longrightarrow H(x) \geqslant 0$ ✓

مثال: اگر f بر $[0,1]$ پیوسته و $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$ ثابت کنید c ای $\in [0,1]$ موجود که $f(c)=c$

$$h(x) = f(x) - x \implies \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

قضیه میانگین انتگرال

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 h(x)dx = h(c) = 0 \qquad \exists c\in[0,1]$$

$$\implies h(c)=0 \implies f(c)=c$$

تعریف:

$$\int f(g(x))g'(x)dx \xrightarrow[du=g'(x)dx]{u=g(x)} \int f(u)du = F(u)+C$$

تغییر متغیر برای انتگرال معین:

اگر g تابعی مشتق پذیر بر $[a,b]$ باشد و داشته باشیم $g(a)=A$, $g(b)=B$ و f بر g پیوسته باشد داریم

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_A^B f(u)du$$

اثبات: $x\in D_f$, $\alpha\in D_f$

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \implies F'(x) = f(x)$$

$$d(F(g(x))) = f(g(x))g'(x)dx \implies \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int d(F(g(x)))$$

$$= F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(B) - F(A) = \int_A^B f(u)du$$

مثال:

$$\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}dx \xrightarrow[du=\frac{3}{x}dx]{u=3\ln x} \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} \xrightarrow[du=-e^{-x}dx]{u=1+e^{-x}} -\int\frac{du}{u} = -\ln|u|+C$$

راه دوم

$$\int \frac{dx}{1+e^x} \xrightarrow[du=e^x dx]{u=1+e^x} \int\frac{du}{(u-1)u} = \int\frac{du}{u-1} - \int\frac{du}{u} = \ln|u-1| + \ln|u| + C$$

Dorna

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \quad \frac{u=e^x}{du=e^x dx} \quad \int \frac{du}{1+u^2} = tg^{-1}u + C = \dots$$

$$\int \frac{(1+x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + C = \dots$$

$$= \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} \quad \frac{x+3=2u}{dx=2du} \quad \frac{1}{4}\int \frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2} tg^{-1}u + C$$

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx \quad \frac{u=\cos x}{du=-\sin x\,dx} \quad -\int u^5(1-u^2)\,du = \dots$$

$$\int \sqrt{tg x}\,\sec^4 x\,dx \quad \frac{u=tg x}{du=\sec^2 x\,dx} \quad \int \sqrt{u}\,(1+u^2)\,du = \dots$$

$$\int \sin^6 x\,dx = \int (\sin^2 x)^3\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\,\,dx$$

فرد

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx \quad \frac{\sin 2x = u}{du = 2\cos 2x\,dx} \quad \int (1-u^2)\,du = \dots$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \frac{u=a^2-x^2}{du=-2x\,dx} \quad -\frac{1}{2}\int (a^2-u)\sqrt{u}\,du = \dots$$

تغییر متغیر

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} \quad \frac{x=a\sin\theta}{dx=a\cos\theta\,d\theta} \quad \int \frac{a\cos\theta\,d\theta}{a^2\sin^2\theta\,(a\cos\theta)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \csc^2\theta\,d\theta \quad \text{جدول انتگرال} \quad \dots$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cot^2\theta + C$$

الزامی نداریم بجای x متغیر دیگری بگذاریم باید در domain باشد

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4}\,dx \quad \frac{x=a\,tg\theta}{\begin{gathered}dx=a\sec^2\theta\,d\theta\\ dx=a(1+tg^2\theta)\,d\theta\end{gathered}} \quad \int \frac{a\sec\theta \times a\sec^2\theta\,d\theta}{a^4\,tg^4\theta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec^3\theta\,d\theta}{tg^4\theta}$$

$$= \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin^4\theta} \xrightarrow[\cos\theta d\theta = du]{\sin\theta = u} \int \frac{du}{u^4} = \dots$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{5+2\sin 3x}} dx \xrightarrow[du = 6\cos 3x]{u = 5+2\sin 3x} \frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} 2^{\sin\sqrt{x}} \times \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow[du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} dx]{u = \sin\sqrt{x}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^{u} \cdot 2 \, du = \dots$$

$$\int tg^3\theta \sec^2\theta \, d\theta \xrightarrow[du = \sec^2\theta d\theta]{u = tg\theta} \int u^3 du = \dots$$

$$\int \sec^3\theta \, tg\theta \, d\theta = \int \sec^2\theta (\sec\theta \, tg\theta) d\theta \xrightarrow[du = \sec\theta \, tg\theta]{u = \sec\theta}$$

$$= \int u^2 du = \dots$$

$$\int (\sec\theta)^{2k} (tg\theta)^m d\theta = \int (tg\theta)^m (\sec\theta)^{2(k-1)} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\xrightarrow[du = \sec^2\theta d\theta]{tg\theta = u} \int u^m (1+u^2)^{k-1} du$$

$$\int (\sec\theta)^{2k+1} (tg\theta)^{2k'+1} d\theta = \int (\sec\theta)^{2k} (tg\theta)^{2k'} \sec\theta \, tg\theta \, d\theta$$

$$\xrightarrow[du = \sec\theta \, tg\theta \, d\theta]{u = \sec\theta} \int u^{2k} (u^2-1)^{k'} du = \dots$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \xrightarrow[dx = a\cos\theta d\theta]{x = a\sin\theta} a^4 \int \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = a^4 \int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \dots$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-4x^2}} \xrightarrow[2dx = \cos\theta d\theta]{2x = \sin\theta} \frac{1}{8}\int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cos\theta \, d\theta =$$

Dorna

$$\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{5/2}} \quad \frac{\sqrt{2}x = tg\theta}{\sqrt{2}dx = sec^2\theta d\theta} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{sec^2\theta\, d\theta}{(sec\theta)^5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{sec^3\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int cos^3\theta\, d\theta = \ldots$$

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1-2x^2} \quad \frac{\sqrt{2}x = sin\theta}{dx = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\theta d\theta} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{cos\theta\, d\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|tg\theta + sec\theta| + C = \ldots$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+8)^{3/2}} = \int \frac{dx}{((x-2)^2+4)^{3/2}} \quad \frac{2\,tgu = x-2}{dx = 2sec^2u\,du}$$

$$\int \frac{2\,sec^2u\,du}{(4(1+tg^2u))^{3/2}} = \frac{2}{8} \int \frac{sec^2u\,du}{sec^3u} = \ldots$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \frac{x = a\cosh u}{dx = a\sinh u\,du} \quad \int \frac{a\sinh u\,du}{a\sinh u} = \int du = \ldots$$

$$\text{یا } x = a\sec\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sinx+cosx} \quad \frac{u = \frac{\pi}{2}-x}{du = -dx} \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{cosu\,du}{sinu+cosu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx\,dx}{cosx+cosx}$$

$$2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx\,dx}{sinx+cosx} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx\,dx}{cosx+sinx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(tgx)^{\sqrt{2}}} \quad \frac{u = \frac{\pi}{2}-x}{du = -dx} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-du}{1+(cotu)^{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(tgu)^{\sqrt{2}}du}{(tgu)^{\sqrt{2}}+1}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(tgx)^{\sqrt{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(tgx)^{\sqrt{2}}dx}{1+(tgx)^{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{sin^3(\ln x)\, cos^4(\ln x)\,dx}{x} \quad \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{matrix}$$

$$\int sin^3u\, cos^4u\, du = \ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx = \int \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \dots$$

$\int \cos ax \sin bx\,dx$ حاصلجمع

فرض کنیم h و g بر $[a,b]$ پیوسته اند، h صعودی و $g\ge 0$ آنگاه $\exists\, c\in[a,b]$

$$\int_a^b hg\,dx = h(a)\int_a^c g(x)\,dx + h(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

$$H(x) = h(a)\int_a^x g\,dx + h(b)\int_x^b g(x)\,dx$$

H بر $[a,b]$ پیوسته است. h صعودی است فرض می‌کنیم صعودی

$$\forall x\in[a,b] \quad h(x)\le h(b) \xrightarrow{g\ge 0} g(x)h(x)\le h(b)g(x)$$

$$\alpha = \int_a^b hg\,dx \le h(b)\int_a^b g = H(a)$$

به همین قیاس $\alpha \geq H(b)$

چون α بین $H(a)$ و $H(b)$، H پیوسته (قضیه مقدار میانی) $c\in[a,b]$ موجود که

$H(c)=\alpha$

$$\int_a^b hg\,dx = h(a)\int_a^c g + h(b)\int_c^b g$$

مثال: فرض کنیم h بر $[a,b]$ پیوسته. نشان دهید که $c\in[a,b]$ موجود که

$$\int_a^c h(x)\,dx = \int_c^b h(x)\,dx$$

$$H(x) = \underbrace{\int_a^x h}_{\text{پیوسته}} - \underbrace{\int_x^b h}_{\text{پیوسته}}$$

$\int_a^b h = 0 \longrightarrow c = a \text{ یا } b$ $\qquad \int_a^b h \neq 0$

$H(a) = -\int_a^b h$

$H(b) = \int_a^b h$ $\longrightarrow$ $H(a)$، $H(b)$ علامت مختلف دارند

پس ۰ بین $H(a)$، $H(b)$

از قضیه مقدار میانی $\exists\, c\in[a,b]$ که $H(c)=0$

Dorna

مثال: اگر $f(x)\geq 0$ بر $[a,b]$ پیوسته و $\int_a^b f = 0$ $\Longleftarrow$ $f\equiv 0$

برهان خلف: $\exists c\ ;\ f(c)=\alpha>0$

$\lim_{x\to c} f(x)=\alpha>\frac{\alpha}{2}>0$

$\exists\ \delta>0 \quad (c-\delta,c+\delta)\subseteq[a,b]$

$\forall\ c-\delta<x<c+\delta \quad f(x)>\frac{\alpha}{2}$

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\delta} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f}_{>\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\int_{c+\delta}^b f}_{\geq 0} \geq 0+\frac{\alpha}{2}(c+\delta-(c-\delta))+0 \geq \alpha\delta>0$$

$\int_a^b f>0 \Rightarrow$ تناقض

مثال: اگر f بر $[0,1]$ پیوسته باشد نشان دهید $I=\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

$$I=\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx \xrightarrow{u=\pi-x} \int_\pi^0 (\pi-u) f(\sin u)(-du)$$

$$=\int_0^\pi (\pi-u) f(\sin u)\,du = \int_0^\pi \pi f(\sin x)\,dx-\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx$$

$$2I=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx \Longrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

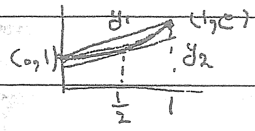
مثال: $f:[1,2]\to R$ با ضابطه $f(x)=e^{x^2}$ باشد. تجانس با ضریب 5 را در صفحه در نظر بگیرید یعنی هر نقطه (x,y) را به نقطه $(5x,5y)$ می‌برد. تحت این تجانس نمودار منحنی $f(x)=e^{x^2}$ به یک منحنی دیگری می‌رود نشان دهید مساحت زیر نمودار تابع جدید 25 برابر می‌شود.

اگر $u=5x$ آنگاه نمودار جدید به صورت $(u,5f(\frac{u}{5}))$ $5\leq u\leq 10$ حال مساحت جدید یعنی S_2 به صورت

$$S_2=\int_5^{10} 5f(\frac{u}{5})\,du \;\underset{5dt=du}{\overset{\frac{u}{5}=t}{=}}\; \int_1^2 5f(t)(5\,dt)=25\int_1^2 f(t)\,dt$$

$$=25\int_1^2 e^{t^2}\,dt=25S_1$$

توجه: اگر h دوبار مشتق‌پذیر و $h''>0$ در این صورت خط واصل بین هر دو نقطه روی نمودار h همواره بالای h قرار می‌گیرد و خط مماس در نقاط روی نمودار همواره پایین h.



مثال: نشان دهید $\sqrt[4]{e} < \int_0^1 e^{x^2}dx < \frac{e+1}{2}$

$h(x)=e^{x^2} \longrightarrow h''>0$

$y_1=(e-1)x+1$ نامساوی $y_1 \geq e^{x^2}$ $(0\leq x\leq 1)$

$$\frac{e+1}{2}=\int_0^1 y_1\,dx \geq \int_0^1 e^{x^2}dx$$

$y_2=\sqrt[4]{e}\,(x-\frac{1}{2})+\sqrt[4]{e} \Longrightarrow y_2=\sqrt[4]{e}\,(x+\frac{1}{2})$

$y_2 \leq e^{x^2}$ $(0\leq x\leq 1)$ $\Longrightarrow \sqrt[4]{e}=\int_0^1 y_2 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx$

$$\Longrightarrow \sqrt[4]{e} \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq \frac{e+1}{2}$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء

$d(uv)=udv+vdu \Longrightarrow \int d(uv)=\int udv+\int vdu$

$uv=\int udv+\int vdu \Longrightarrow \int udv=uv-\int vdu$

مثال:

$\int \ln x\,dx$ $dx=dv$, $x=v$, $u=\ln x \longrightarrow du=\frac{dx}{x}$

$=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+c$

$\int \operatorname{Arc}\cos x\,dx$ $dx=dv \longrightarrow x=v$, $u=\operatorname{Arc}\cos x \longrightarrow du=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\operatorname{Arc}\cos x-\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\frac{1-x^2=t^2}{-2xdx=2tdt}$

Dorna

$$I = \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,dx = 2\int_a^b f(t)\,dt$$

$dv = f''(x)\,dx \rightarrow v = f'(x)$ اما f دوبار مشتق پذیر $f(a)=f(b)=0$

$u = (x-a)(x-b)$ $du = (2x-a-b)\,dx$

$$I = \underbrace{(x-a)(x-b) f'(x)}_{0}\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,dx$$

$$I = -\int (2x-a-b) f'(x)\,dx$$

دوباره جزء به جزء $f'(x)\,dx = dv$ $v = f(x)$

$u = 2x-a-b$ $du = 2\,dx$

$$I = -\left(\underbrace{(2x-a-b) f(x)}_{0}\Big]_a^b - 2\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

$$I = \int (\sec x)(tg^2 x)\,dx$$

$dv = \sec x \, tg x \, dx$

$v = \sec x$

$u = tg x$ $du = \sec^2 x\,dx$

$$I = \sec tg x - \int \sec^3 x\,dx$$

$$= \sec tg x - \int \sec x(\underbrace{\sec^2 x}_{(1+tg^2 x)})\,dx = \sec x\, tg x - \int \sec x\,dx - \underbrace{\int \sec x\, tg^2 x}_{I}$$

$$2I = \sec x\, tg x - Ln|\sec x + tg x| + C$$

$$I = \frac{1}{2}\sec x\, tg x - \frac{1}{2}Ln|\sec x + tg x| + C$$

$$I = \int x\, tg^{-1} x\,dx$$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$u = tg^{-1} x$ $du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$I = \frac{x^2}{2} tg^{-1} x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 tg^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1-1)\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 tg^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}tg^{-1} x + C$$

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$dv = e^{ax}\,dx$ $v = \frac{1}{a}e^{ax}$

$I = uv - \int v\,du$

$u = \cos bx$ $du = -b\sin bx\,dx$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$dv = e^{ax}\,dx$ $v = \frac{1}{a}e^{ax}$

$u = \sin bx$

$u = b\cos bx\,dx$

$\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I$

$(1+\frac{b^2}{a^2})I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx$

$I = \bigcirc$

اگر $A = \int_0^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{(x+2)^2}$ معلوم، $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}$ را بیابید برحسب A.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}dx$ $\qquad u=2x,\ du=2dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin u\,du}{\frac{u}{2}+1} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u\,du}{u+2}$ $\qquad dv=\sin u\,du,\ v=-\cos u$

جزء به جزء $\qquad = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-\cos u}{u+2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(u+2)^2}du\right)$ $\qquad z=\frac{1}{u+2},\ dz=\frac{-du}{(u+2)^2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}A$

$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}} + \int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$ $\qquad dv=(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx,\ v=e^{x+\frac{1}{x}}$

$u=x \qquad du=dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}} + \left(xe^{x+\frac{1}{x}}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$= e^{5/2} + \frac{1}{2}e^{5/2} = \frac{3}{2}e^{5/2}$

Dorna

$I = \int \cos(\ln x)\,dx \qquad dv = dx,\ v = x,\ u = \cos(\ln x)$

$du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$

$= x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,dx = x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx$

$2I = x\cos\ln x + x\sin\ln x \implies I = \frac{1}{2}(x\cos\ln x + x\sin\ln x)$

$\int \ln(\cos x)\,dx \qquad v = x,\ dv = dx \qquad u = \ln(\cos x) \quad du = -\operatorname{tg} x$

$x\ln(\cos x) + \int x\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad dv = x\sin x\,dx \qquad v = \sin x - x\cos x$

$u = \frac{1}{\cos x} \qquad du = \frac{-\sin x}{(\cos x)^2}$

[illegible]

نحولها لتحويل ثابتة

$I_n = \int w^n e^w\,dw \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$dv = e^w\,dw \quad v = e^w$

$u = w^n \quad du = nw^{n-1}\,dw$

$I_n = w^n e^w - nI_{n-1}$

$I_0 = \int e^w\,dw = e^w, \quad I_1 = we^w - e^w$

$I_2 = w^2e^w - 2(we^w - e^w)$

$I_3 = w^3e^w - 3w^2e^w + 6(we^w - e^w) + c$

$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx \qquad w = \sqrt{x}$

$w^2 = x \quad 2w\,dw = dx$

$\int w^2e^w(2w\,dw)$

$= 2\int w^3e^w\,dw = 2I_3$

$I_n = \int \sec^n x\,dx \qquad n \geq 3$

$\int \sec^{n-2}x \cdot \sec^2 x\,dx$

$dv = \sec^2 x\,dx \qquad v = \operatorname{tg} x$

$u = \sec^{n-2}x$

$du = (n-2)\sec^{n-2}x\,\operatorname{tg} x$

$\sec^2 x - 1$

$= tgx \sec^{n-2}x - (n-2)\int \sec^{n-2}x \, tg^2 x \, dx$

$= tgx \sec^{n-2}x - (n-2)\int (\sec^n x - \sec^{n-2}x)\,dx$

$\Rightarrow I_n = tgx \sec^{n-2}x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$

$(n-1) I_n = (tgx \sec^{n-2}x) + (n-2) I_{n-2}$

$$I_n = \frac{tgx \sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

یادآوری از تغییرمتغیرهای مناسب:

$\sqrt{a^2-x^2} \rightsquigarrow x = a\sin\theta$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-a^2} \rightsquigarrow x = a\sec\theta$

$\sqrt{a^2+x^2} \rightsquigarrow x = a\,tg\theta$ $\qquad$ $A>0 \to Ax^2+Bx+C \rightsquigarrow u = \sqrt{A}\,x + \frac{B}{2\sqrt{A}}$

$\sqrt[n]{ax+b} \rightsquigarrow ax+b = u^n$

مثال $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$ $\qquad$ $3x+2 = u^3$, $3dx = 3u^2 du$ $\qquad$ $\int \frac{\left(\frac{u^3-2}{3}\right) \times u^2 du}{u}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ $\qquad$ $x = u^6$

تغییرمتغیر $tg\frac{\theta}{2}$ برای توابع گویا برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$x = tg\frac{\theta}{2}$, $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $dx = \frac{1}{2}(1+tg^2\frac{\theta}{2})\,d\theta$

$d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$

$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}$

Dorna

$$I = \int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} \overset{x=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{=} \int \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \int \frac{2dx}{3+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

انتگرال توابع گویا $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ⟵ چندجمله‌ای با ضرایب IR

می‌توان فرض کرد که درجه‌ی P از درجه‌ی Q همواره کوچکتر است زیرا از تقسیم داریم
$P(x) = Q(x)A(x) + R(x)$ که درجه‌ی R از درجه Q همواره کمتر است.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int A(x)\,dx}_{\text{قابل حل است}} + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

حل برای $Q(x)$ درجه 1

$$\int \frac{c\,dx}{ax+b} = \frac{c}{a} \ln|ax+b|$$

نکته ← $A>0\,,\ Ax^2+Bx+C = \left(\sqrt{A}\,x + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2 + \alpha \quad \alpha \in R$

بنابراین با توجه به نکته گفته شده برای Q از درجه 2 کافی است این انتگرال حساب شود.

1) $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a} + C$

3) $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2-a^2| + C$

4) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$ $\qquad \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$

روش کلاسیک اینکه مخرج مشترک گرفته و چند جمله‌ای صورت در طرف دوم را با چند جمله‌ای در صورت در طرف اول مقایسه کنید

و اگر تساوی دو طرف را در $x-a$ ضرب

$$\frac{1}{x+a} = A + B\frac{(x-a)}{x+a} \xrightarrow{x=a} A=\frac{1}{2a}$$

ضرب در $x+a$

$$\frac{1}{x-a} = B + A\frac{(x+a)}{x-a} \xrightarrow{x=-a} B=-\frac{1}{2a}$$

بنابراین

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)$$

تجزیه: (تجزیه توابع گویا)

اگر $Q(x)$ یک چند جمله‌ای باشد می‌توان $\alpha\in R$ را یافت که

$$Q(x) = \alpha(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots$$

a_iها جواب‌های اعداد حقیقی متمایز Q و $x^2+b_jx+c_j$ چند جمله‌ای‌های درجه دوم که $\Delta<0$

توجه نمایید برای حل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به جای $(x-a)^m$ $(a\in R)$ می‌توان جملات

$$= \left(\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}\right)$$

و به ازای $(x^2+bx+c)^n$ که $\Delta<0$ جملات

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

را اضافه می‌نماییم

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \int\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \quad A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

$$(x-\tfrac{1}{2})^2 + a^2$$

$$\int \frac{dx}{x^4-1} \qquad \frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\times (x-1) \longrightarrow \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{(Cx+D)(x-1)}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} A = \frac{1}{4}$$

$x=0$ $D = -\frac{1}{2}$ $\qquad x=2$ $\quad C=0$ $\qquad$ به همین قیاس $B = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}tg^{-1}x$$

$$\int \frac{dx}{x^4(x-1)^3(x^2+x+1)^2} \qquad \frac{1}{x^4(x-1)^3(x^2+x+1)^2} =$$

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}$$

مثال: تابع مشتق‌پذیر $F:R\to R$ موجود است بطوریکه $F'(x) = e^{-x^2}$, $F(1)=1$ مفروض

$$\int F(x)dx \;\; \frac{dx=dv \quad v=x}{F(x)=u \quad F'(x)dx=du} \qquad \int_0^1 F(x)dx = xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x e^{-x^2}dx$$

$$1 + \frac{1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2}dx = 1 + \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}(e^{-1}-1) = \frac{e^{-1}+1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{tg\,x + \sin x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x(\cos x+1)} \qquad z = tg\frac{x}{2} \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2} \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

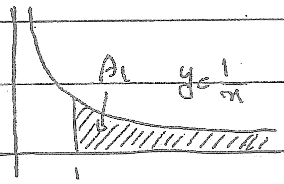
$$\int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2} \times \frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{(1-z^2)dz}{2z} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{z}dz - \int z\,dz\right)$$

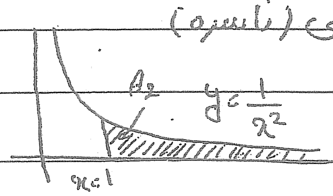
$$\int \frac{dx}{e^{3x}+e^{2x}+e^x} \qquad e^x = u \qquad e^x dx = du \to dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{du}{u^4+u^3+u^2} = \int \frac{du}{u^2(u^2+u+1)} \qquad \frac{1}{u^2(u^2+u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+u+1}$$

الخ ... $\qquad A=-1,\ B=1,\ C=1,\ D=0$

انتگرال‌های مجازی (ناسره)





می‌دانیم اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. $I=\int_a^b f$ موجود. حال دو حالت خاص را در نظر می‌گیریم:

۱- اگر $a=-\infty$ یا $b=+\infty$

۲- وقتی x به سمت a یا b یا هر دو نزدیک می‌شود تابع f بی‌کران باشد

تعریف: اگر f بر $[a,+\infty)$ پیوسته باشد داریم

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

برای حالت دوم اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to b^-}\int_a^\alpha f(x)\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x}=\lim_{R\to+\infty}[\ln x]_1^R=\lim_{R\to+\infty}(\ln R-0)=+\infty$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^2}=\lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R=\lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{R}+1\right)=1$$

توجه: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx+\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

قرارداد در کتاب این است که $\int_{-\infty}^{\infty}$ همگرا است اگر و فقط اگر دو انتگرال سمت راست همگرا باشند

Dorra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^2+1} = 2\lim_{R\to+\infty}\left[tg^{-1}(x)\right]_0^R$$

$$= 2\lim_{R\to+\infty}(tg^{-1}R - 0) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

در حالتی که این حد متناهی موجود است گوئیم انتگرال مجازی همگرا به آن عدد است و در غیر اینصورت گوئیم انتگرال مجازی واگرا است.

$$\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left[\sin x\right]_0^R = \lim_{R\to+\infty}\sin R$$ = وجود ندارد ← واگراست

قضیه: هرگاه $0<a<+\infty$ در اینصورت:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{همگراست به } p>1 \\ +\infty & \text{واگراست } p\le 1\end{cases}$$

$$\int_0^{a} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{a^{1-p}}{1-p} & \text{همگراست به } p<1 \\ +\infty & \text{واگرا } p\ge 1\end{cases}$$

قضیه مقایسه برای انتگرال‌ها:

فرض کنیم $-\infty\le a<b\le+\infty$ و توابع f و g بر (a,b) پیوسته و $0\le f(x)\le g(x)$ برای هر $x\in(a,b)$ فرض کنید اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ همگراست $\left(0\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\right)$ و همچنین اگر $\int_a^b f(x)dx$ واگرا به $+\infty$ باشد آنگاه $\int_a^b g(x)dx$ نیز واگرا به $+\infty$ است.

مثال: نشان دهید $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ همگراست و کرانی برای آن بیابید.

$x\in[0,1]$ $\quad e^{-x^2}\le 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx \le \int_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$

$x\ge 1$ $\quad e^{-x^2}\le e^{-x}$ $\quad \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx \le \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^R = e^{-1}$

یا $x e^{-x^2}\ge e^{-x^2}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \le e^{-1}+1$$

مثال: در مورد همگرایی یا واگرایی $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ بحث نمایید؟ (در کتاب حل شده) انتگرال ناسره نوع سوم

$x \in [0,1] \quad \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x} \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 = 2$

$x \geq 1 \quad \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3} \longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^{\infty} = -2(0-1) = 2$

همگرا

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx \longrightarrow \lim_{R \to +\infty} \int_0^R xe^{-x}\,dx \qquad dv = e^{-x}dx \longrightarrow v = -e^{-x}$

$u = x \quad du = dx$

$\lim_{R \to +\infty} -xe^{-x}\Big]_0^R + \int_0^R e^{-x}dx = \underbrace{\lim_{R \to +\infty} -Re^{-R}}_{0} + \lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-x}dx$

$= \lim_{R \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^R = 0 + e^0 = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\,dx = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\alpha} \sec x\,dx = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big]_0^{\alpha}$

$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha| = +\infty$ واگراست

$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}} \qquad 0 < 1-\cos\sqrt{x} = 2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2} < 2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{x}{2}$

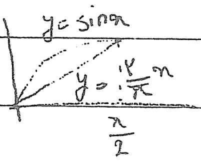
$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}} \geq 2\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{x} = +\infty$ پس واگراست

$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{1+x} \geq \frac{1}{e}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+1} = +\infty$

e^{-x}_{min}

$\forall x \in [-1,1] \quad e^{-x} > \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{e^{-x}}{1+x} > \frac{1}{e(x+1)}$

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|\,dx}{x^2}$



$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

Dorna

$H(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x \longrightarrow H'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$

$\exists \alpha$ s.t $H'(\alpha)=0 \longrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\pi}$. $H(0)=H(\frac{\pi}{2})=0$

$\forall x \quad 0\le x\le\alpha \quad H'(x)\ge 0 \longrightarrow H(x)\ge H(0)=0$

$\forall x \quad \alpha\le x\le \frac{\pi}{2} \quad H'(x)\le 0 \longrightarrow H(x)\ge H(\frac{\pi}{2})=0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x}$ واگراست

تعمیم: اگر f و g دو تابع مثبت باشند بر $[a,b]$ بطوریکه $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ (-\infty)\\ b^- (+\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad (l\neq 0)$

آنگاه $\int_a^b g$, $\int_a^b f$ هر دو همگرا و یا هر دو واگرا اند.

همچنین اگر $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ (-\infty)\\ b^- (+\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ نتیجه $\int_a^b g$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f\,dx$ نیز

همگراست و اگر $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ (-\infty)\\ b^- (+\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ اگر $\int_a^b g\,dx$ واگرا باشد $\int_a^b f$ نیز چنین است

$\int_0^1 \frac{(\ln x)^\alpha}{\sqrt{x}}\,dx \quad \alpha>0, \alpha\in\mathbb{N}$

If $\alpha=2k$ مقایسه $\frac{1}{x^{3/4}}$ $\quad \lim \frac{(\ln x)^\alpha/\sqrt{x}}{1/x^{3/4}} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{4}}(\ln x)^\alpha = 0$

If $\alpha=2k+1 \Rightarrow \frac{-(\ln x)^\alpha}{\sqrt{x}}\ge 0 \quad \forall\, 0<x\le 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-(\ln x)^\alpha/\sqrt{x}}{1/x^{3/4}} = \lim\limits_{x\to0^+} -x^{\frac{1}{4}}(\ln x)^\alpha = 0$

حال چون $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ همگرا از قضیه $\int_0^1 \frac{(\ln x)^\alpha}{\sqrt{x}}$ همگراست

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx \longrightarrow$ همگرایی یا واگرایی

$-\ln\sin x \ge 0$ داریم

از طرفی $\int_0^1 \ln x\,dx$ همگراست پس $\int_0^1 \ln\sin x$ نیز همگراست $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin x}{\ln x} = 1$

از دوم: مقایسه با $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ یا $\dfrac{1}{x^p}$ و $0<p<1$

محاسبه مقدار

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx \xrightarrow{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\cos t\sin t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt$$

از طرفی $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt \;\underline{\underline{u=\frac{\pi}{2}-t}}\; -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,du \quad (*)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \ln 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}(\ln 2) + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx$$
$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}(\ln 2)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}(\ln 2)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \leq \int_0^{\pi} dx = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(I_k) \qquad I_k = \begin{cases} \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx & k \text{ فرد} \\ -\int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx & k \text{ زوج} \end{cases}$$

Dorna

حال چون $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ ، انتگرال $=$ (از قضیه مقدار میانگین) $\lim_{k\to+\infty} I_k=0$ حال بنا به قضیه تناوب

$\sum (-1)^{k+1} I_k$ همگراست (آیا I_k نزولی است؟)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\ln x} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{dx}{\sqrt{x}\,\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$$

مقایسه با $\frac{1}{x}$

پس انتگرال $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ واگراست

مثال: اگر $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ انتگرال‌های زیر را بیابید

1. $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{R} x^2 e^{-x^2}\,dx$ $u=x$ ، $du=dx$ ، $dv=xe^{-x^2}dx$ ، $v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-x^2}\right]_0^R+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=0+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

2) $\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^2}dx$ $u=x^3$ $du=3x^2dx$ ، $dv=xe^{-x^2}dx \longrightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$-\frac{1}{2}x^3e^{-x^2}+\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$ به انتگرال قبل می‌رسیم

تمرین ۱۹:

تابع گامای اویلر $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

۱- نشان دهید برای $x>0$ ، $\Gamma(x)$ همگراست

۲- با استفاده از انتگرال جزء به جزء به ازای $x>0$ داریم $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

استقرا: حکم $n=0,1,2,3$ $\longleftarrow$ $\Gamma(n+1)=n!$

۴- اگر $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ نشان دهید $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(3/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

مثال: اگر $f:(a,b)\to R$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

و برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $f'(x)+f^2(x)\geq -1$ ثابت کنید $b-a\geq \pi$

$$f'(x)\geq -1-f^2(x) \longrightarrow \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\geq -1$$

$$\int_a^b \frac{f'}{1+f^2}\,dx \geq \int_a^b -dx = -(b-a)$$

$$\exists\, \gamma\in(a,b) \longrightarrow \int_a^b \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^\gamma \frac{f'}{1+f^2}\,dx + \lim_{\beta\to b^-}\int_\gamma^\beta \frac{f'}{1+f^2}\,dx$$

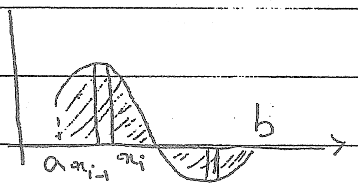
$$= \lim_{\alpha\to a^+}\left[\tan^{-1} f\right]_\alpha^\gamma + \lim_{\beta\to b^-}\left[\tan^{-1} f\right]_\gamma^\beta$$

$$= \cancel{\tan^{-1} f(\gamma)} - \lim_{\alpha\to a^+}\tan^{-1}(f(\alpha)) + \lim_{\beta\to b^-}\tan^{-1} f(\beta) - \cancel{\tan^{-1} f(\gamma)}$$

$$= -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\Longrightarrow -\pi \geq -(b-a) \longrightarrow \pi\leq b-a$$

مساحت نواحی مسطح

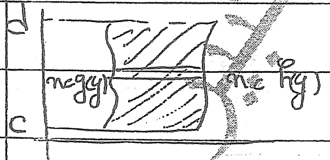


$$\Delta A_i = |f(c_i)|\,\Delta x_i \qquad c_i\in(x_{i-1},x_i)$$

$$dA \simeq |f(x)|\,dx$$

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

محاسبه مساحت بین دو منحنی



$$c\leq y\leq d \;,\; x=g(y) \;,\; x=f(y)$$

$$A=\int_c^d |f(y)-g(y)|\,dy$$

Dorna

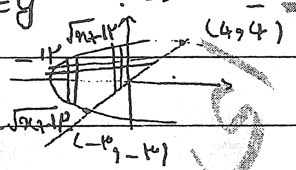
مثال: مساحت محدود به $y=\cos x$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\frac{3\pi}{2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2}$$

$$1-(-1-1)=3$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به $\begin{cases} x=y^2-12 \\ x=y \end{cases}$ را بیابید.

$$y^2-12-y=0 \rightarrow y=-3,\ y=4$$

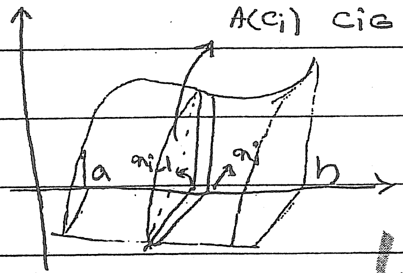


راه اول: $\int_{-12}^{-3} \sqrt{x+12}-(-\sqrt{x+12})\,dx + \int_{-3}^{4} (\sqrt{x+12}-x)\,dx = \dots$

راه دوم: $\int_{-3}^{4} (y-y^2+12)\,dy$

محاسبه حجم به وسیله انتگرال با استفاده از برش های عرضی یا طولی:

$A(c_i)\quad c_i\in[x_{i-1},x_i]$



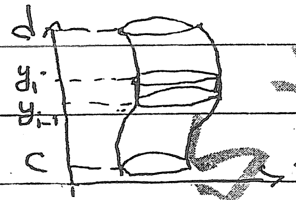
تابع مساحت

$$\Delta V_i = A(c_i)\,\Delta x_i$$

$$dv = A(x)\,dx$$

$$V=\int_a^b dv = \int_a^b A(x)\,dx$$

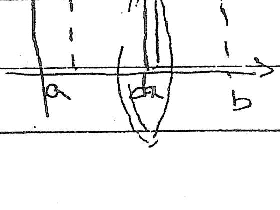
$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$



به طور مشابه: $V=\int_c^d A(y)\,dy$

حجم اجسام دوار:

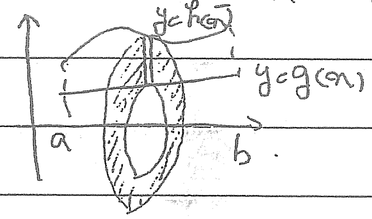
اگر $y=f(x)$ و $f(x)$ نامنفی ، ناحیه محدود به $y=f(x)$ و $y=0$ را حول محور x ها دوران می دهیم حجم حاصل را بیابید $a\le x\le b$



$$A(x)=\pi f^2(x)$$

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

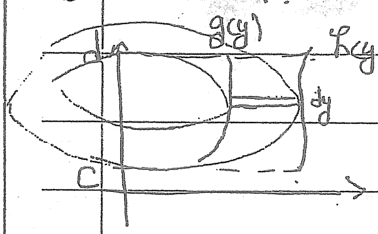
* اگر $y=h(x)$ ، $y=g(x)$ ، $h(x)\geq g(x)\geq 0$ ، $a\leq x\leq b$ حجم جسم حاصل
از دوران ناحیه محدود به $y=h$ و $y=g$ را بصورت زیر بدست می آید
حول محور x



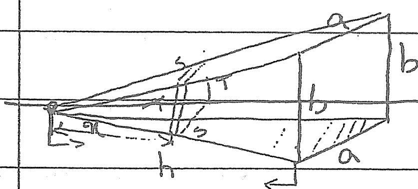
$$A(x)=\pi\left(h^2(x)-g^2(x)\right)$$

$$V=\int_a^b \pi\left(h^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

* اگر $x=h(y)$ ، $x=g(y)$ ، $c\leq y\leq d$ و $h(y)\geq g(y)\geq 0$ حجم حاصل از دوران
ناحیه محدود به h و g حول محور y را بصورت زیر است



$$V=\int_c^d \pi\left(h^2(y)-g^2(y)\right)dy$$

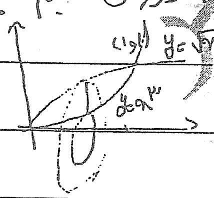


$$\frac{a}{s}=\frac{h}{x}\longrightarrow s=\frac{ax}{h}$$

$$\frac{b}{T}=\frac{h}{x}\longrightarrow T=\frac{bx}{h}$$

$$A(x)=\frac{abx^2}{h^2}\longrightarrow V=\int_0^h \frac{abx^2\,dx}{h^2}=\frac{ab}{h^2}\times\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}abh$$

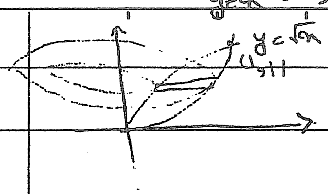
مثال: آیا مساحت محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^3$ ، $0\leq x\leq 1$ را حول محور x دوران دهیم حجم
حاصله را بیابید



$$A(x)=\pi(x-x^6)dx$$

$$V=\int_0^1 \pi(x-x^6)dx=\frac{5\pi}{14}$$

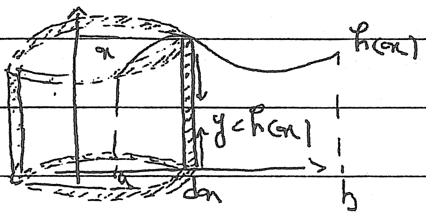
Dorna

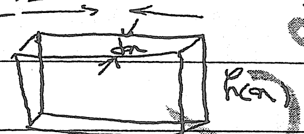


مثال: مثال قبل حول محور y ها

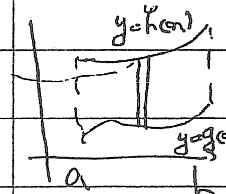
$$v=\int_0^1 \pi\,(y^{\frac{2}{3}}-y^4)\,dy=\frac{2\pi}{5}$$

برش استوانه‌ای: $2\pi x$ محیط دایره





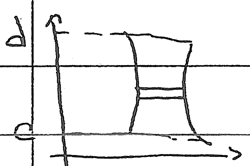
$$dv=2\pi x\,h(x)\,dx \longrightarrow v=\int_a^b 2\pi x\,h(x)\,dx$$



نکته: اگر $y=h(x)$ و $y=g(x)$، $h(x)\geq g(x)\geq 0$، $a\leq x\leq b$

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه حول محور y یا الخط موازی محور y به صورت زیر است

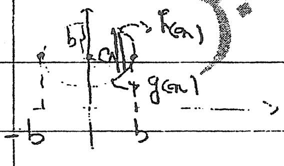
$$v=\int_a^b 2\pi x\,(h(x)-g(x))\,dx$$



نکته: اگر $x=g(y)$ و $x=h(y)$، $c\leq y\leq d$، $h(y)\geq g(y)\geq 0$

آن ناحیه محدود را حول محور x دوران دهیم

$$v=\int_c^d 2\pi y\,(h(y)-g(y))\,dy$$



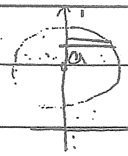
مثال: فرض کنیم $a,b\in R$ و $b<a$ دایره قرصی به شعاع b و به مرکز $(0,a)$ را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم چنبره‌ی حاصل را بیابید.

$$x^2+(y-a)^2=b^2$$

$h(x)=\sqrt{b^2-x^2}+a$

$g(x)=-\sqrt{b^2-x^2}+a$

راه اول: $\int_{-b}^{b} \pi(a+\sqrt{b^2-x^2})^2-(a-\sqrt{b^2-x^2})^2\,dx$



روش دوم : $V = 2\int_{a-b}^{a+b} 2\pi (x)\, y\, dy$

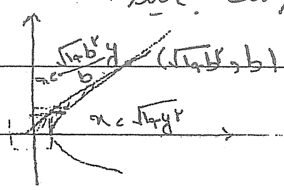
$V = 4\pi \int_{a-b}^{a+b} y\sqrt{b^2-(y-a)^2}\, dy \quad \xrightarrow{y-a=u}$

$4\pi\int_{-b}^{b}(u+a)\sqrt{b^2-u^2}\,du = 4\pi\underbrace{\int_{-b}^{b} u\sqrt{b^2-u^2}\,du}_{\text{صفر چون تابع فرد}} + 4\pi a\underbrace{\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-u^2}\,du}_{\text{مساحت نیم دایره}}$

$4\pi a \times \frac{1}{2}\pi b^2$

$2\pi^2 a b^2$

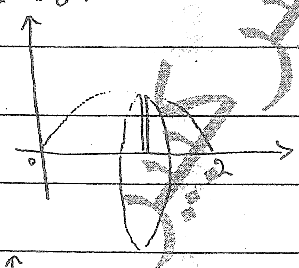
مثال: فرض کنید مساحت ناحیه محصور بین محور xها، خط واصل بین مبدأ و نقطه $(\sqrt{1+b^2}, b)$ و شاخه سمت راست هذلولی $x^2-y^2=1$ را محاسبه کنید.



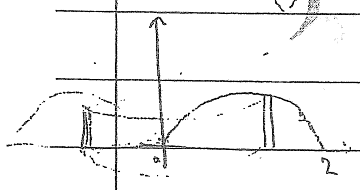
$S=\int_0^b\left(\sqrt{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}y\right)dy = \dots$

$y=tg\,u$ یا $\sinh u$

مثال: حجم حاصل از دوران $y=2x-x^2$ و $0\le x\le 2$ را حول محور x و محور y بیابید.



$V=\int_0^2 \pi(2x-x^2)^2\,dx$

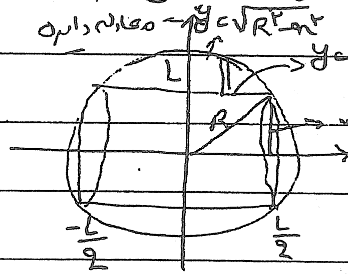


$V=\int_0^2 2\pi x(2x-x^2)\,dx$ برش استوانه‌ای

Dorna

مثال: یک کره‌ای به شعاع R موجود است حفره‌ای استوانه‌ای در امتداد مرکز به وجود می‌آوریم که طول آن L است. نشان دهید حجم قسمت باقیمانده از کره فقط تابعی از L است.

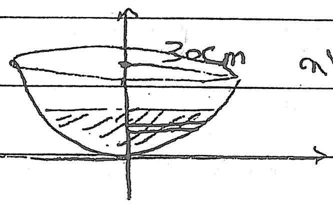
معادله دایره $\leftarrow y=\sqrt{R^2-x^2}$



$$V=\pi\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2-\left(\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\right)^2dx$$

$$V=\pi\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)dx=\dots$$

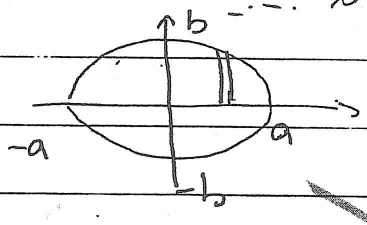
مثال: یک کاسه نیم‌کروی به شعاع $30cm$ موجود است تا مسیر آب می‌ریزیم به شکلی که عمق آن $20cm$ است حجم آب درون کاسه چقدر است؟



$$x^2+(y-30)^2=900$$

$$V=\int_0^{20}\pi x^2dy=\int_0^{20}\pi\left(900-(y-30)^2\right)dy$$

مثال: حجم بیضی‌گون حاصل از دوران $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور x را بیابید.

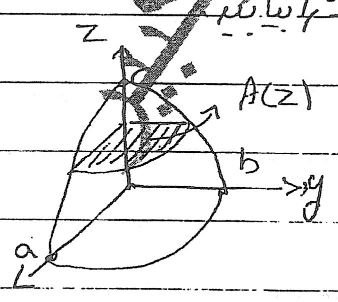


$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\dots$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

مثال: حجم محصور به بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را بیابید.



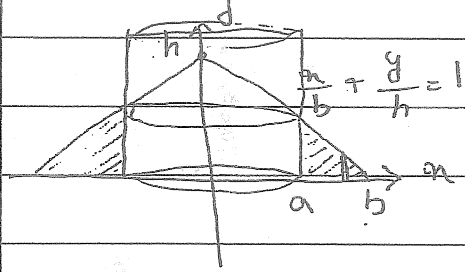
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}_{A^2}}+\frac{y^2}{\underbrace{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}_{B^2}}=1$$

$A(z)=$ مساحت $=\pi AB=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\longrightarrow V=\int_{-c}^{c}A(z)\,dz$

$$=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc$$

در یک مخروط قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی b که $b>a$ یک حفره‌ی استوانه‌ای به شعاع a تعبیه شده است. اگر حفره در امتداد محور مخروط باشد حجم قسمت باقیمانده را بیابید.

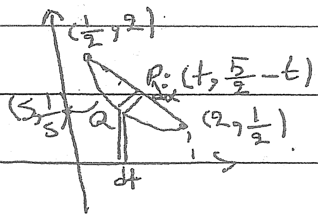


$$\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1$$

$$V=2\pi\int_a^b xy\,dx$$

$$V=2\pi\int_a^b xh\left(1-\frac{x}{b}\right)dx=\dots$$

مثال: مساحت متناهی محصور به $\begin{cases} xy=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ را حول خط مقطعی می‌چرخانیم حجم حاصل از این جسم را بیابید.



$$y=\frac{1}{x}=\frac{5-2x}{2}$$

$$2=5x-2x^2 \longrightarrow x=\frac{1}{2},\ x=2$$

معادله خط عمود بر خط $x+y=\frac{5}{2}$ که از $P:(t,\frac{5}{2}-t)$ می‌گذرد به صورت

$$y-\left(\frac{5}{2}-t\right)=(x-t) \Longrightarrow y=x+\frac{5}{2}-2t$$

چون $Q:(s,\frac{1}{s})$ روی این منحنی است پس

$$* \quad \frac{1}{s}=s+\frac{5}{2}-2t \Longrightarrow s^2+\left(\frac{5}{2}-2t\right)s-1=0 \Longrightarrow s=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}+2t+\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2t\right)^2+4}\right)$$

چون s مثبت است

$$dt,\ d\alpha \longrightarrow d\alpha=\sqrt{2}\,dt$$

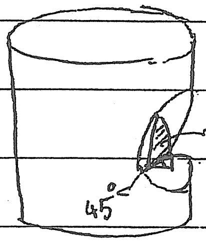
$$V=\int \pi|PQ|^2\,d\alpha : \quad |PQ|=\sqrt{(t-s)^2+\left(\frac{1}{s}-\frac{5}{2}+t\right)^2}$$

$$\overset{*}{=}\sqrt{2}\,(t-s)=\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{2}\left(2t-\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2t\right)^2+4}\right)\right)$$

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} 2\left(2t-\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2t\right)^2+4}\right)^2\sqrt{2}\,dt$$

Dorna

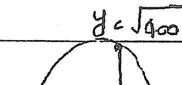
مثال: از یک چوب استوانه‌ای به شعاع 20cm یک برش 45° تا مرکز می‌دهیم و صفحه برش بر محور چوب عمود است. با این برش چه حجمی از چوب برداشته می‌شود؟



$$x^2+y^2=400$$

$$y^2=400-x^2$$

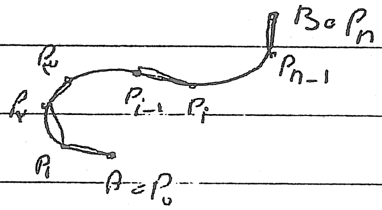
$$A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{400-x^2}\cdot\sqrt{400-x^2}$$



دایره بالایی

$$V=\frac{1}{2}\int_{-20}^{20}(400-x^2)\,dx$$

محاسبه طول قوس منحنی، مساحت سطح



$$L_n=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$$

اگر $n\to\infty$ و $\Delta x_i\to 0$ در این صورت L_n همان طول منحنی از نقطه A تا B است.

* فرض کنیم f بر بازه بسته $[a,b]$ با مشتق پیوسته f' باشد. اگر نمودار $y=f(x)$ باشد در این صورت طول قوس نمودار از نقطه $A=(a,f(a))$ تا $B=(b,f(b))$ به دست می‌آوریم

$$P_i=(x_i,f(x_i))$$

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right)^2}\,\Delta x_i$$

از قضیه مقدار میانگین $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

$\exists\, c_i\in[x_{i-1},x_i]$

نتیجه: با استدلالی مشابه برای منحنی به معادله $x=g(y)$ و $c\le y\le d$ طول قوس برابر

$$S=\int_c^d \sqrt{1+g'(y)^2}\,dy$$

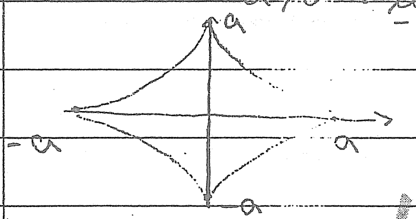
مثال: محاسبه طول قوس $y=\cosh x$, $x=a$ تا $x=0$

$$S=\int_0^a \sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_0^a \cosh x\,dx=\dots$$

$y=\ln\cos x$ $\quad x=\frac{\pi}{6}$ تا $x=\frac{\pi}{4}$

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(-\tan x)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx$$

مثال: طول قوس منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را بیابید $a>0$



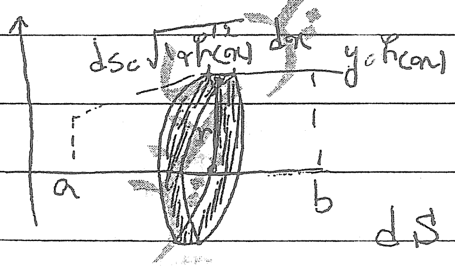
$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$$

$$y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$v=4\int_0^a \sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$=4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}\,dx$$

مساحت سطح دوار



$$dS=2\pi r\,ds$$

اگر $y=f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، $y=f(x)$ را حول محور x ها دوران دهیم، در این صورت مساحت رویه برابر

$$S=\int dS=\int 2\pi|y|\,ds=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

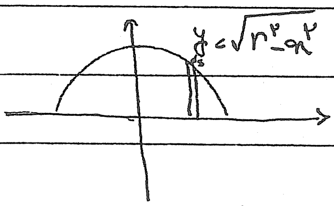
2. اگر $y=f(x)$ را حول محور y دوران دهیم داریم $S=2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

3. اگر $x=g(y)$ و $g'(y)$ بر $[c,d]$ پیوسته و منحنی $x=g(y)$ را حول محور x دوران دهیم

$$S=2\pi\int_c^d |y|\,ds=2\pi\int_c^d |y|\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$$

4. اگر $x=g(y)$ را حول محور y دوران دهیم در اینصورت

$$S=2\pi\int_c^d |x|\,ds=2\pi\int_c^d |x|\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$$



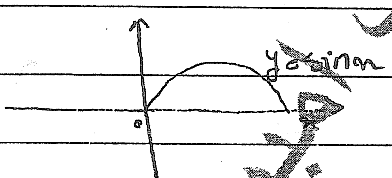
مثال: مساحت یک کره به شعاع r را بدست آورید

$$S=2\pi\int_{-r}^{r} |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\times\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$S=2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx=4\pi r^2$$

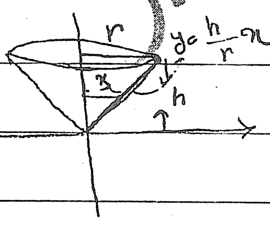


مساحت $y=\sin x$ بین ۰ تا π

$$y'=\cos x$$

$$S=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\pi\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$\pi\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi=\pi(\pi)=\pi^2$$

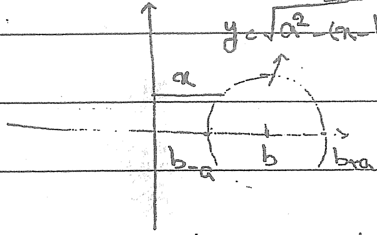


مساحت مخروط قائم

$$S=2\pi\int_0^r x\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}\,dx=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

مساحت چنبره‌ی حاصل از دوران $(x-b)^2+y^2=a^2$ را حول محور y را بیابید $(b>a)$.

$$y=\sqrt{a^2-(x-b)^2} \qquad 2(x-b)+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b-x}{y}$$



$$\frac{S}{2}=2\pi\int_{b-a}^{b+a}|x|\sqrt{1+\left(\frac{b-x}{y}\right)^2}\,dx$$

توجه نمائید قسمت بالای دایره را دوران می‌دهیم و مساحت بدست آمده را در 2 ضرب می‌کنیم تا مساحت چنبره بدست آید.

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_{b-a}^{b+a}x\sqrt{1+\frac{(x-b)^2}{y^2}}\,dx=2\pi\int_{b-a}^{b+a}x\sqrt{\frac{a^2}{y^2}}\,dx$$

$$=2\pi a\int_{b-a}^{b+a}\frac{x}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}\,dx$$

مرکز جرم و گشتاور

اگر چگالی برابر δ و ثابت باشد و حجم برابر V باشد در این صورت $m=\delta V$

اگر چگالی ثابت نباشد و δ تابعی پیوسته برحسب موقعیت P $\quad \Delta m\approx\delta\Delta V$

$dm=\delta dv \qquad dm=\delta dA \qquad dm=\delta dx$

مثال: چگالی یک استوانه توپر به ارتفاع H سانتی‌متر و مساحت قاعده‌ی A برابر است با
$\delta=\delta_0(1+h)$
که در آن h ارتفاع و δ_0 یک ثابت است. حال جرم استوانه را بیابید.

$$m=\int\delta\,dv=\int_0^H\delta_0(1+h)A\,dh$$

مرکز جرم: مرکز جرم یک توزیع جرم با چگالی $\delta(x)$ که بر بازه $[a,b]$ برابر است با

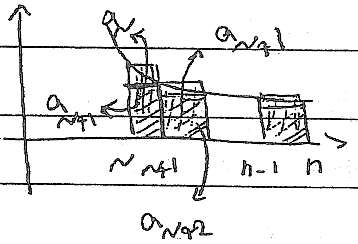
$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b\delta(x)\,dx}$$

سری توانی

آزمون انتگرال:

فرض کنیم $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و نامنفی باشد به ازای هر عدد صحیح مثبت N که $N \geq a$ باشد داریم $(i \geq N)$ $a_i = f(i)$ در اینصورت $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ متناهی باشد

شهود ←



$$\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i < \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

برعکس اگر $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ همگرا از شکل داریم

$$0 < \int_N^{+\infty} f(t)\,dt < \sum_{i=N}^{\infty} a_i < \infty$$

مثال: با توجه به آزمون انتگرال و قضیه‌ای از انتگرال‌های ناسره داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$ یعنی اگر $p \leq 1$ داریم سری واگراست

اثبات: اگر $f(x) = \frac{1}{x^p}$ همه شرایط آزمون را دارد و از قضیه انتگرال ناسره داریم $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ همگرا اگر و فقط اگر $p>1$

مثال: روی همگرایی این سری برحسب p بحث کنید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p} \to \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ $\qquad u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$

$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p} \to \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p \leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

مثال: در مورد همگرایی $\sum_{3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$ برحسب p بحث کنید

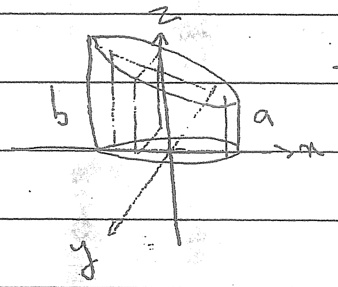
$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p} \to \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$ $\qquad u = \ln\ln x$, $du = \frac{dx}{x\ln x}$

$= \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{du}{u^p} \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p \leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

مثال: همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ را بررسی کنید. آزمون ریشه

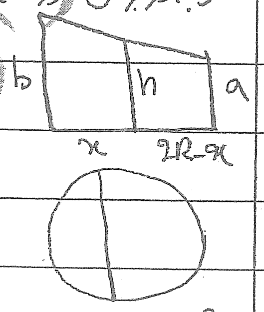
$$P = \lim \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

همگراست



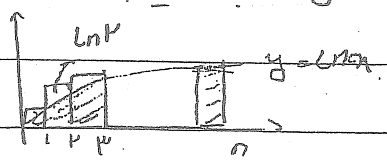
مثال: حجم شکل را بیابید. $\frac{\pi R^2(a+b)}{2}$

توجه در برش عرضی حجم دو ضلع روبرو همواره $a+b$ است



$x^2+y^2=R^2$: معادله دایره

مثال: اثبات کنید $\ln n! \geq n\ln n - n + 1$



$$\underbrace{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}_{\text{مساحت مستطیل‌های هاشورخورده}} - n\ln n \geq -n+1$$

$$\frac{1}{n}\sum \ln\frac{i}{n} \geq \frac{-n+1}{n}$$

$$\ln(n!) \geq \int_1^n \ln t\,dt = n\ln n - n + 1$$

$$\Rightarrow \ln(n!) \geq n\ln n - n + 1$$

Dorna

سری توانی

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ را سری توانی از توان های $(x-c)$ یا یک سری توانی حول نقطه $x=c$ می نامیم

تشیع: فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ یک سری توانی باشد در این صورت R ای موجود است که $0 \le R \le \infty$ و داریم

۱ - به ازای هر x که $|x-c|<R$ سری توانی به طور مطلق همگراست و اگر $|x-c|>R$ سری توانی واگراست

۲ - اگر $R=\infty$ سری به ازای هر x همگراست و اگر $R=0$ سری همواره به ازای هر $x \neq c$ واگراست

اثبات:

اگر $x_0 \neq c$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-c)^n$ همگرا نشان می دهیم به ازای هر x که $|x-c|<|x_0-c|$ داریم سری به طور مطلق همگراست

بوضوح $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0-c)^n = 0$

$\rightarrow \exists k \quad \forall n \in N\cup\{0\} \quad |a_n(x_0-c)^n| < K$

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-c)^n| = \sum |a_n| \frac{|x-c|^n}{|x_0-c|^n} \cdot |x_0-c|^n$

$\frac{r = \frac{|x-c|}{|x_0-c|}}{r<1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x_0-c|^n r^n \le K\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{K}{1-r} < \infty$

در سری توانی $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$\rho<1 \rightarrow$ سری توانی همگرا و به طور مطلق همگراست

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \rightarrow R = \frac{1}{L}$

$L|x-c|<1 \rightarrow |x-c| < \frac{1}{L} = R$

نکته: به ازای هر x که $|x-c|<R$ داریم سری همگرا و به طور مطلق همگراست. به ازای $x=\pm R+c$ چیزی نمی توان گفت اگر $|x-c|>R$ حتماً واگراست.

مثال: شعاع و بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}$ بحث کنید. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$(x-c)^n = \left(\frac{2x+3}{4}\right)^n$

$$\rho = \lim \left|\frac{(2x+3)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot 4^{n+1}}\right| \times \frac{\sqrt[3]{n}\cdot 4^n}{|(2x+3)^n|}$$

$$\rho = \frac{|2x+3|}{4}$$

$$\frac{|x+\frac{3}{2}|}{2} < 1 \Rightarrow |x+\tfrac{3}{2}| < 2$$

$-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$ در این بازه به طور مطلق همگراست

در بازه $x > \frac{1}{2}$ یا $x < -\frac{7}{2}$ واگراست

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ واگراست

$x=-\frac{7}{2} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ همگرای مشروط

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \rho = \lim \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x^n|}$$

$$L = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0 \longrightarrow R = \frac{1}{L}, \quad L=0 \Rightarrow R = +\infty$$

یعنی به ازای هر x سری همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$\rho = \frac{(1+\frac{1}{x})^{n+1}}{(1+\frac{1}{x})^n} \times \frac{n}{n+1} = 1+\frac{1}{x} \longrightarrow \rho < 1$$
$n \to \infty$

$$|1+\tfrac{1}{x}| < 1 \longrightarrow -2 < \frac{1}{x} < 0 \longrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

پس به ازای $x < -\frac{1}{2}$ سری همگرای مطلق است و به ازای $x > -\frac{1}{2}$ سری واگراست

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مشروط

شعاع همگرایی $\sum \frac{n!\,x^n}{n^n}$ را بحث کنید. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$R = \frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

حال اگر $|x| < e$ داریم سری همگرا و $|x| > e$ سری واگراست

Dorna

در $x=\pm e$ بررسی می‌کنیم $\quad b_n = \frac{n!\,e^n}{n^n}$

$\ln b_n = \ln n! + n\ln e - n\ln(n)$

$\ln(b_n) \geq n\ln(n) - n + 1 + n - n\ln(n) = 1 \Rightarrow \ln(b_n) \geq 1$

$b_n \geq e \Rightarrow$ حد b_n به صفر همگرا نمی‌باشد پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n}$ واگراست

برای $x=-e$ داریم $(-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n}$ نیز واگراست زیرا $\frac{n!\,e^n}{n^n}$ همگرا به صفر نمی‌باشد

قضیه: فرض می‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو سری توانی با شعاع های همگرایی R_a و R_b باشند و $c \in R$ یک ثابت

1- $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)x^n$ دارای همگرایی R_a می‌باشد

2- $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ دارای شعاع همگرایی R می‌باشد که $R \geq \min(R_a, R_b)$

تعریف: حاصلضرب کشی

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i}$$

قضیه: اگر $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R_a و R_b باشند در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R است که $R \geq \min(R_a, R_b)$

قضیه: اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر بازه $(-R,R)$ همگرا باشد که در آن $R>0$ آنگاه f بر $(-R,R)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ همچنین f بر $(-R,R)$ انتگرال‌پذیر و به ازای هر x که $|x|<R$ داریم

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

اثبات: $|x|<R$ پس H موجود که $|x|+H<R$ بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+H)^n$

همگراست. فرض کنیم $K=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+H)^n$

$$|nx^{n-1}|=\frac{|Hnx^{n-1}|}{H}=\frac{Hn|x|^{n-1}}{H}\leq\frac{1}{H}(|x|+H)^n$$ — جملات بسط دو جمله‌ای

$$\sum_{n=1}^{\infty}|na_nx^{n-1}|=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n|x|^{n-1},$$

$$\leq\frac{1}{H}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|(|x|+H)^n\leq\frac{K}{H}<\infty$$

پس $\sum na_nx^{n-1}$ در بازه $|x|<R$ همگراست

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \qquad |h|<H$$

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k$$

$$|(x+h)^n-x^n-nx^{n-1}h|=\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k\right|$$

$$\leq\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}|h|^k=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}\frac{|h|^k}{H^k}H^k$$

$$\leq\frac{|h|^2}{H^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}H^k\right)=\frac{|h|^2}{H^2}(|x|+H)^n \qquad *$$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+h)^n-a_nx^n-hna_nx^{n-1}\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||(x+h)^n-x^n-hnx^{n-1}|\leq\frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{|h|^2}{H^2}\right)(|x|+H)^n$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\leq\frac{|h|}{H^2}\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|(|x|+H)^n}_{\leq K}\leq\frac{|h|K}{H^2}$$

حال دو طرف نامساوی را به سمت صفر میل می‌دهیم داریم (x) پس $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x)$

$$f'(x)=g(x)$$

Dorna

تمرین 20 : قسمت دوم قضیه را اثبات کنید

قضیه آبل: مجموع یک سری توانی یک تابع پیوسته روی بازه همگرایی سری است

به خصوص اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ موجود باشد داریم

$$\lim_{x \to R^-} \sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

به همین قیاس

$$\lim_{x \to (-R)^+} \sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ برابر $|x|<1$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

سری توانی $\frac{1}{(1-x)^2}$ ، $\frac{1}{(1-x)^3}$ ، $\frac{1}{1+x}$ و $\ln(1+x)$ مقدارش را محاسبه کنید

$$|x|<1 \to \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ $\frac{\text{در بالا به جای } x}{\text{مقدار } \frac{1}{2} \text{ دهیم}}$ $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$|t|<1$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \Rightarrow \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum (-1)^n \int_0^x t^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

اگر $x=1$ در بالا $\to \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

مثال: سری توانی $tg^{-1}x$ را حساب کنید

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \longrightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}$$

$$tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ را بیابید

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \sum n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 6$$

بازه‌ی همگرایی و مجموع سری‌های زیر را بیابید

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n \qquad \rho = \frac{(-1)^{n+1}(4x)^{n+1}}{(-1)^n (4x)^n} = -4x < 1$$

$$|-4x| < 1 \longrightarrow |x| < \frac{1}{4} \longrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$$ همگرایی مطلق

$$x = \frac{1}{4} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$ همگرای مشروط

در $|x| > \frac{1}{4}$ واگرا

$$\frac{1}{1+t} = \sum (-1)^n t^n \longrightarrow t = 4x$$

$$\Rightarrow \sum (-1)^n (4x)^n = \frac{1}{1+4x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n \qquad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1+3)x^{n+1}}{(n+3)x^n} = x \longrightarrow |x| < 1$$ همگرایی مطلق

$|x| > 1$ واگرا

$$x = 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)$$ واگرا

$$x = -1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)$$ واگرا است

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}_{x\left(\frac{1}{1-x}\right)'} + \underbrace{3\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{3/_{1-x}} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x}$$

Dorna

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \Rightarrow$ شعاع همگرایی 1 $|x|<1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \dots \quad \times \frac{x^3}{x^3}$

$* = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = \frac{1}{x^3}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) - \frac{1}{x^3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$

توجه داشته باشید $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ حال از ارتباط * داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{-\ln(1-x)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$$

قضیه: فرض کنیم سری $f(x) = \sum a_n (x-c)^n$ به ازای $|x-c| < R$ که $R>0$. در این صورت $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$

$x = c \Rightarrow f(c) = a_0 + a_1(c-c) + \dots = a_0 \Rightarrow \frac{f(c)}{0!} = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots \rightarrow \frac{f'(c)}{1!} = a_1$

$f''(x) = 2!a_2 + 3\times 2 a_3 (x-c) + \dots \rightarrow \frac{f''(c)}{2!} = a_2$

به همین قیاس داریم

$f^{(n)}(c) = n! a_n \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

توجه: قضیه فوق نشان می‌دهد که تابع $f(x)$ با نمایش سری توانی به مرکز $x=c$ و شعاع همگرایی مثبت باید در یک بازه حول $x=c$ از هر مرتبه مشتق داشته باشد و فقط یک نمایش منحصر به فرد به صورت سری تیلور $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ دارد.

تعریف: هرگاه $f(x)$ در $x=c$ از هر مرتبه مشتق‌پذیر باشد یعنی $f^{(k)}(c)$ به ازای $k=0,1,2,\dots$ موجود باشد آنگاه سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ را سری تیلور گوییم و اگر $c=0$

آن را سری مکلورن f گوییم $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k$

تعریف: توابع تحلیلی

تابع $f(x)$ در $x=c$ تحلیلی است اگر $f(x)$ مجموع یک سری توانی از توان‌های $(x-c)$ با شعاع همگرایی مثبت باشد. هرگاه f در هر نقطه از بازه‌ی باز I تحلیلی باشد گوییم بر بازه I تحلیلی است.

سؤال: آیا تابع $f(x)$ وجود دارد که بی‌نهایت بار در $x=c$ مشتق‌پذیر باشد ولی تحلیلی در $x=c$ نباشد؟ بله

$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $c=0$

سری مکلورن

$f(0)=0 \rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$

$f'(x)=\begin{cases} 2x^{-3}e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $f^{2}(0)=\lim_{x\to 0} \frac{2x^{-3}e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{2x^4}=0$

به همین ترتیب داریم $f^{k}(0)=0$ در سط مکلورن $f(x)$ برابر است با

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k = 0$

حال اگر حول 0 سری توانی برای $x\neq 0$ موجود باشد داریم $\sum \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k = 0 = e^{-1/x^2}$ که این تناقض است.

* سری تیلور e^x حول $x=c$ را بنویسید و نشان دهید e^x روی R تحلیلی است.

$f(x)=e^x \rightarrow f^{(k)}(x)=e^x \rightarrow f^{(k)}(c)=e^c$

$y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n \longrightarrow y'=y \quad , y(c)=e^c$

$\left\{ \frac{dy}{dx}=y \rightarrow \frac{dy}{y}=dx \rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int dx \rightarrow \ln y = x+C \right.$

$y=\alpha e^x \rightarrow y(c)=e^c \rightarrow \alpha=1 \qquad y=e^x$

Dorna

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c (x-c)^n}{n!}}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

تمرین 21: سری توانی توابع تحلیلی $\sinh x$ و $\cosh x$ را بیابید.

سری مکلورن

سری مکلورن $\sin x$ و $\cos x$ را بیابید و نشان دهید با خود $\sin x$ و $\cos x$ برابرند

$$f(x)=\sin x \longrightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$g(x)=\cos x \longrightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y+y''=0 \\ y(0)=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دیفرانسیل}]{\text{معادلات}} y=\sin x$$

$$\begin{cases} z+z''=0 \\ z(0)=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{دیفرانسیل}]{\text{معادلات}} z=\cos x$$

مثال:

$$\frac{\sin x^2}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

تمرین 22: $\cos 43^\circ$ را با خطای کمتر از $\frac{1}{10000}$ بیابید.

$$\cos 43^\circ = \cos\frac{43\pi}{180} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n}$$

$0 \le n \le 3$ قرار دهید — $(2n)! > 10000$ کافی است $(n=4)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)\times\frac{1}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5!}+\dots\right)=\frac{1}{6}$$

تعمیم دوجمله‌ای و سری دوجمله‌ای

اگر $r\in R$ و $|x|<1$ در این صورت $(1+x)^r = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k$

$f(x)=(1+x)^r$ بسط مکلورن $r(r-1)\cdots(r-k+1)=f^{(k)}(0)$

تمرین 23: اثبات حکم بالا

تمرین 24: سری توابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ و $\sin^{-1}x$ را بیابید.

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\sin^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

شورای صنفی مکانیک امیرکبیر