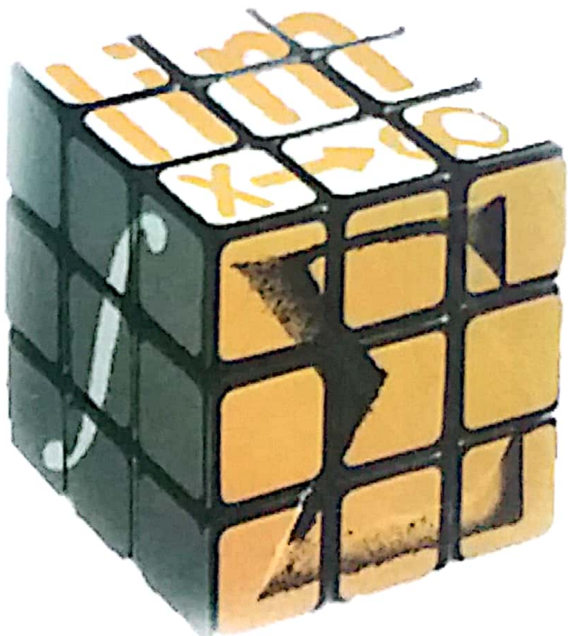
۱

ریاضی عمومی

ارائه درسنامه ونکات کلیدی



۷۰۷ مسئله حل شده از دانشگاه های
شریف ،تهران ،امیرکبیر ،علم وصنعت ،آزاد تهران و ...

و سوالات برگزیدهٔ کتاب های
آدامز ،مارون ،دمیدوویچ ،برادلی و ...

مؤلف :حسین فرامرزی

فهرست مطالب

عنوان .... صفحه

فصل اول: اعدادمختلط

درسنامه ۱

سوالات فصل اول ۹

فصل دوم: دنباله

درسنامه ۳۳

سوالات فصل دوم ۳۶

فصل سوم: حد وپیوستگی

درسنامه ۵۱

سوالات فصل سوم ۶۰

فصل چهارم: مشتق وکاربرد آن

درسنامه ۷۷

سوالات فصل چهارم ۹۱

فصل پنجم: انتگرال نامعین

درسنامه ۱۱۳

سوالات فصل پنجم ۱۳۶

فصل ششم: انتگرال معین و کاربرد آن

درسنامه ۱۸۳

سوالات فصل ششم ۲۰۷

فصل هفتم: سری

درسنامه ۲۶۵

سوالات فصل هفتم ۲۸۵

فصل هشتم : مختصات قطبی

درسنامه ۳۳۵

سوالات فصل هشتم ۳۴۵

ضمیمه: جدول فرمول های ریاضی ۳۵۱

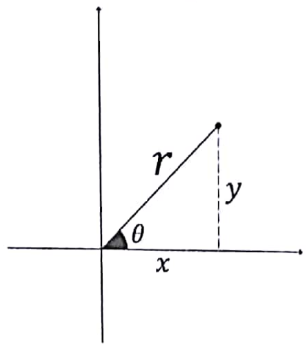
فصل اول

اعداد مختلط

هر عدد مختلط را می‌توان بصورت $z = x + iy$ نمایش داد بطوریکه x و y اعداد حقیقی هستند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌گویند. یعنی $x = \mathrm{Re}(z)$ و $y = \mathrm{Im}(z)$.

همچنین $i = \sqrt{-۱}$ تعریف می‌شود پس $i^{۲} = -۱$.

نمایش عدد مختلط در صفحه



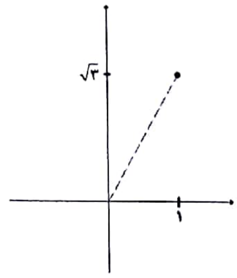
$$z = x + iy \begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} & \text{اندازه یا قدر مطلق } z \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} & \text{آرگمان } z \end{cases}$$

تذکر: برای بدست آوردن آرگمان z (یعنی θ) باید بسیار دقت کرد که نقطه مورد نظر در کدام ربع مختصات قرار می‌گیرد و بر اساس آن θ را تعیین کرد. (به مثال زیر دقت کنید.)

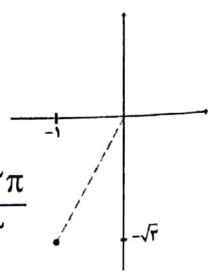
مثال ۱: قدرمطلق و آرگمان اعداد زیر را بیابید.

الف) $z = ۱ + \sqrt{۳}\, i$ ب) $z = -۱ - \sqrt{۳}\, i$

حل



$$\text{الف)}\ z = ۱ + \sqrt{۳}\, i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\sqrt{۳}^{۲} + ۱^{۲}} = ۲ \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{۳}}{۱} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \theta = \dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$



$$\text{ب)}\ z = -۱ - \sqrt{۳}\, i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-۱)^{۲} + \left(-\sqrt{۳}\right)^{۲}} = ۲ \\ \tan\theta = \dfrac{-\sqrt{۳}}{-۱} \rightarrow \tan\theta = \sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta = \dfrac{۴\pi}{۳} \ \text{or}\ \dfrac{-۲\pi}{۳} \end{cases}$$

چهار عمل اصلی در مجموعه اعداد مختلط

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ باشد،آنگاه داریم:

$$1)\ z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$2)\ z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

تعریف : برای عدد مختلط بفرم $z = x + iy$، عدد $\overline{z} = x - iy$ را **مزدوج z** می‌نامیم، یعنی داریم:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z}) \qquad , \qquad \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\overline{z})$$

خواص مزدوج عدد مختلط:

$$1)\ \overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 \qquad 2)\ \overline{(z_1z_2)} = \overline{z}_1.\overline{z}_2$$

$$3)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \qquad 4)\ \text{if } z \in \mathbb{R} \to \overline{z} = z$$

$$5)\ z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \qquad 6)\ z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$\boxed{z.\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2}$$

$$3)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \times \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

اگر در مخرج کسر، یک عدد مختلط داشتیم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و در مخرج از ویژگی $z.\overline{z} = |z|^2$ استفاده می‌کنیم.

مثال۲: قدر مطلق $z = \dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{2-i}$ را بدست آورید. (قزوین ۸۷)

حل

روش اول:

$$z = \frac{(2i+3i^2)(5-2i)}{2-i} = \frac{(2i-3)(5-2i)}{2-i} = \frac{-11+16i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-38+21i}{2^2+1^2} = \frac{-38}{5} + \frac{21}{5}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-38}{5}\right)^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{38^2 + 21^2} = \frac{1}{5}\sqrt{1885}$$

روش دوم:

$$|z| = \left|\frac{i(2+3i)(5-2i)}{2-i}\right| = \frac{|i||2+3i||5-2i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{0^2+1^2} \times \sqrt{2^2+3^2} \times \sqrt{5^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{1885}}{5}$$

مکانهای هندسی در صفحه مختلط

مثال۳: همه اعداد حقیقی x و y را تعیین کنید که در رابطه های زیر صدق کند.

الف) $(x+iy)^۲=(x-iy)^۲$ ب) $\dfrac{x+iy}{x-iy}=x-iy$

حل

الف) $x^۲+i^۲y^۲+۲ixy=x^۲+i^۲y^۲-۲ixy \to ۴ixy=۰ \to xy=۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases}$

یعنی عدد مختلط باید روی یکی از محورهای مختصات قرار گیرد.

■

ب) $\dfrac{x+iy}{x-iy}=x-iy \to x+iy=(x-iy)^۲ \to x+iy=x^۲+i^۲y^۲-۲ixy$

$x+iy=x^۲-y^۲-۲ixy \to x^۲-y^۲-x-iy(۲x+۱)=۰$

برای اینکه عددمختلطی برابر صفر شود، هم قسمت حقیقی وهم قسمت موهومی اش باید برابر صفر باشد،پس قسمت حقیقی وموهومی را برابر صفر قرارداده ودر یک دستگاه آن را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x^۲-y^۲-x=۰ \quad (*) \\ y(۲x+۱)=۰ \begin{cases} y=۰ \xrightarrow{(*)} x^۲-x=۰ \begin{cases} x=۰ \to (۰,۰) \\ x=۱ \to (۱,۰) \end{cases} \\ x=-\dfrac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} \dfrac{۱}{۴}-y^۲+\dfrac{۱}{۲}=۰ \to y=\pm\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \to \begin{cases} \left(-\dfrac{۱}{۲},\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \\ \left(-\dfrac{۱}{۲},\dfrac{-\sqrt{۳}}{۲}\right) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

چون مخرج کسر را صفر میکند، قابل قبول نیست. (برای $(۰,۰)$)

پس این رابطه، بیانگر سه نقطه است: $(۱,۰),\left(-\dfrac{۱}{۲},\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\right),\left(-\dfrac{۱}{۲},\dfrac{-\sqrt{۳}}{۲}\right)$

مثال۴: اگر z یک عدد مختلط باشد، مکانهای زیر را در صفحه اعداد مختلط تعیین و رسم کنید.

الف) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{۱}{\bar{z}}+۱\right)>۲$ (امیرکبیر ۸۵ و ۸۶)

ب) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{۱}{\bar{z}}+۱\right)<۲$

حل

$z=x+iy \to \bar{z}=x-iy \to \dfrac{۱}{\bar{z}}=\dfrac{۱}{x-iy}\times\dfrac{x+iy}{x+iy}=\dfrac{x+iy}{x^۲+y^۲}$

$\dfrac{۱}{\bar{z}}+۱=\dfrac{x+iy}{x^۲+y^۲}+۱=\dfrac{(x^۲+x+y^۲)+iy}{x^۲+y^۲}$

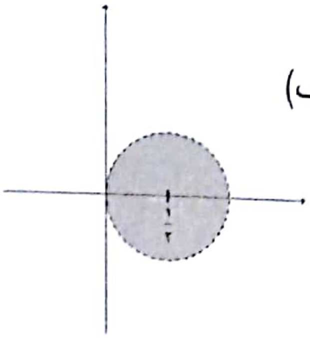
الف) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}+1\right)>2\rightarrow\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}>2\rightarrow x^2+x+y^2>2x^2+2y^2$

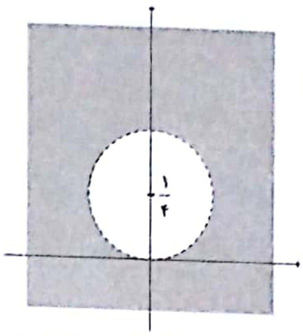
$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2<\frac{1}{4}\rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}\rightarrow$ درون دایره ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

■

ب) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+1\right)<2\rightarrow\frac{y}{x^2+y^2}<2\rightarrow x^2+y^2>\frac{y}{2}\rightarrow x^2+y^2-\frac{y}{2}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}$

$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2>\left(\frac{1}{4}\right)^2\rightarrow$ بیرون دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$





نکته ۱: $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=\mathrm{cis}(\theta)}$ به این رابطه، فرمول اویلر گفته می‌شود که به کمک بسط مک لورن $e^{i\theta}$، $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ثابت می‌شود. همچنین داریم:

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}\rightarrow(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(e^{i\theta}\right)^n\rightarrow(\cos\theta+i\sin\theta)^n=e^{in\theta}$$

$$\rightarrow\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$ **رابطه دموآور**

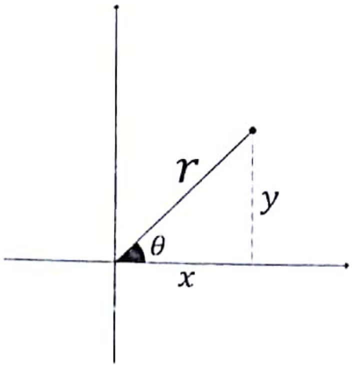
مثال۵: نشان دهید که: $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$. (دمیدوویچ)

حل

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه دموآور}}\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)}=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}\xrightarrow[\times\frac{1}{\cos n\theta}]{\times\frac{1}{\cos n\theta}}\frac{1+i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}{1-i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط



با توجه به شکل روبرو داریم:

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

بنابراین:

$$z = x + iy \to z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$\to \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.\text{cis}\theta = re^{i\theta}}$$

که در آن $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$.

مثال۶ : حاصل $A = \left(\dfrac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i}\right)^{۱۰}$ را بصورت استاندارد $\alpha + \beta i$ بنویسید. (تهران جنوب ۸۶)

حل

$$۱+\sqrt{۳}i : \begin{cases} r = \sqrt{۱+\sqrt{۳}^۲} = ۲ \\ \tan\theta = \sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \theta = \dfrac{\pi}{۳} \end{cases} \to ۱+\sqrt{۳}i = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$$

$$۱-\sqrt{۳}i : \begin{cases} r = \sqrt{۱+\sqrt{۳}^۲} = ۲ \\ \tan\theta = -\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \theta = -\dfrac{\pi}{۳} \end{cases} \to ۱-\sqrt{۳}i = ۲e^{\frac{-\pi}{۳}i}$$

$$A = \left(\frac{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}{۲e^{\frac{-\pi}{۳}i}}\right)^{۱۰} = \left(e^{\frac{۲\pi}{۳}i}\right)^{۱۰} = e^{\frac{۲۰\pi}{۳}i} = \cos\frac{۲۰\pi}{۳} + i\sin\frac{۲۰\pi}{۳} = \cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳} = \frac{-۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

مثال۷: اگر $A = \left(۱+\dfrac{i}{\sqrt{۳}}\right)^n - \left(۱-\dfrac{i}{\sqrt{۳}}\right)^n$ که در آن n عدد صحیح مثبت باشد $\text{Im}(A), \text{Re}(A)$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۸)

حل

$$۱+\frac{i}{\sqrt{۳}} : \begin{cases} r = \sqrt{۱+\dfrac{۱}{۳}} = \dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳} \\ \tan\theta = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} \to \theta = \dfrac{\pi}{۶} \end{cases} \to ۱+\frac{i}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}e^{\frac{\pi}{۶}i}$$

به همین صورت بدست می آید که: $۱-\dfrac{i}{\sqrt{۳}} = \dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}e^{\frac{-\pi}{۶}i}$

$$A=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}e^{\frac{\pi}{۶}i}\right)^n-\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}e^{\frac{-\pi}{۶}i}\right)^n=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^n\left(e^{\frac{n\pi}{۶}i}-e^{\frac{-n\pi}{۶}i}\right)$$

$$=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^n\left(\left(\cos\frac{n\pi}{۶}+i\sin\frac{n\pi}{۶}\right)-\left(\cos(\frac{-n\pi}{۶})+i\sin(\frac{-n\pi}{۶})\right)\right)$$

$$A=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{۶}+i\sin\frac{n\pi}{۶}-\cos\frac{n\pi}{۶}+i\sin\frac{n\pi}{۶}\right)\to A=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^n\left(۲i.\sin\frac{n\pi}{۶}\right)$$

$$\to Re(A)=۰ \quad ,Im(A)=۲\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^n\left(\sin\frac{n\pi}{۶}\right)$$

سوال مشابه۷-۱ مقدار $I=\left(\frac{۱+i}{\sqrt{۲}}\right)^n+\left(\frac{۱-i}{\sqrt{۲}}\right)^n$ را حساب کنید. (تهران جنوب ۸۹)

Ans $۲\cos\frac{n\pi}{۴}$

۷-۲ درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\left(۱+\sqrt{۳}i\right)^n+\left(۱-\sqrt{۳}i\right)^n=۲^{n+۱}\cos\left(\frac{n\pi}{۳}\right)$$

(علوم وتحقیقات۹۰)

مثال۸: مقادیر a و b را چنان بیابید که $۱+i$ ریشه معادله $z^۵+az^۳+b=۰$ باشد.

(تهران جنوب ۸۸ و ۸۳- تهران شمال ۸۶)

حل

$$z=۱+i=\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$$

چون $z=۱+i$ ریشه معادله است،بنابراین باید در معادله صدق کند:

$$z^۵+az^۳+b=۰\to(\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i})^۵+a(\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i})^۳+b=۰\to ۴\sqrt{۲}e^{\frac{۵\pi}{۴}i}+۲\sqrt{۲}ae^{\frac{۳\pi}{۴}i}+b=۰$$

$$\to ۴\sqrt{۲}\left(\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)+۲\sqrt{۲}a\left(\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)+b=۰$$

$$\to ۴\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۲\sqrt{۲}a(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})+b=۰$$

$$\to(-۴-۴i)+(-۲a+۲ai)+b=۰\to(-۴-۲a+b)+(-۴+۲a)i=۰$$

$$\to\begin{cases}-۴+۲a=۰\\-۴-۲a+b=۰\end{cases}\to a=۲\quad,\quad b=۸$$

حل معادله در مجموعه اعدادمختلط

اگر بخواهیم ریشه‌ی n ام عدد مختلط z را بدست آوریم، بصورت زیر عمل می‌کنیم: $(z = re^{i\varphi})$.

$$w^n = z \xrightarrow{\text{فرم قطبی}} \left(Re^{i\theta}\right)^n = re^{i(۲k\pi+\varphi)} \to R^n e^{in\theta} = re^{i(۲k\pi+\varphi)}$$

$$\to \begin{cases} R^n = r \\ n\theta = ۲k\pi + \varphi \end{cases} \to \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{۲k\pi + \varphi}{n} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{w = Re^{i\theta} = R.cis\theta} \boxed{w = \sqrt[n]{r}\ \ cis\left(\frac{۲k\pi + \varphi}{n}\right) \quad , \ k = ۰,۱,\dots,(n-۱)}$$

نکته ۲: هر معادله درجه n ام، در مجموعه اعداد مختلط n ریشه متمایز دارد.

نکته ۳: کلیه ریشه های n ام واحد، رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره واحد به مرکز مبـدا هستند.

مثال۹: معادله $z^۴ = -۸ + ۸\sqrt{۳}i$ را حل کنید. (تهران جنوب ۸۷)

حل

$$z = Re^{i\theta} \quad , -۸ + ۸\sqrt{۳}i = ۱۶e^{\frac{۲\pi}{۳}i}$$

$$z^۴ = -۸ + ۸\sqrt{۳}i \to R^۴e^{۴i\theta} = ۱۶e^{\left(۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}\right)i} \to \begin{cases} R^۴ = ۱۶ \to R = ۲ \\ ۴\theta = ۲k\pi + \dfrac{۲\pi}{۳} \to \theta = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$z = Rcis\theta \ \to \ z = ۲cis\left(\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}\right) \quad , \quad k = ۰,۱,۲,۳$$

$$k = ۰ \to z_۱ = ۲cis\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳} + i \quad , \quad k = ۱ \to z_۲ = -۱ + \sqrt{۳}i$$

$$k = ۲ \to z_۳ = -\sqrt{۳} - i \quad , \quad k = ۳ \to z_۴ = ۱ - \sqrt{۳}i$$

مثال۱۰: فرض کنید $w \neq ۱$ ریشه n ام یک باشد یعنی $w^n = ۱$ نشان دهید:

$$(۱ + w + w^۲ + \dots + w^{n-۱}) = ۰$$

(تهران مرکزی ۸۵)

حل

$$w^n = ۱ \to w^n - ۱ = ۰ \to (w-۱)(w^{n-۱} + w^{n-۲} + \dots + w + ۱) = ۰$$

$$\xrightarrow{\div(w-۱)} ۱ + w + \dots + w^{n-۱} = ۰$$

مثال ۱۱: الف) نشان دهید هرگاه α یک ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ آنگاه $\overline{\alpha}$ نیز یک ریشه معادله است.

ب) هرگاه $z_1 = i$ یک ریشه معادله $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ باشد، سایر ریشه ها را تعیین کنید.

حل

الف) چون α ریشه است پس می توان نوشت:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

از طرفین مزدوج می‌گیریم $\rightarrow \left(\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0}\right) = \overline{0}$

$$\rightarrow \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = 0 \rightarrow \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0$$

همچنین می‌دانیم که اگر $a \in \mathbb{R} \rightarrow \overline{a} = a$ است و چون $a_i \in \mathbb{R}$ است،پس $\overline{a_i} = a_i$ ،بنابراین:

$a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0 \rightarrow$ $\overline{\alpha}$ نیز ریشه معادله است

■

ب) چون $z_1 = i$ ریشه معادله است و نیز تمام ضرایب معادله ،اعدادحقیقی اند، با توجه به قسمت الف، $z_2 = \overline{i} = -i$ نیز ریشه معادله می باشد یعنی این معادله عامل $(z+i)\times(z-i)$ را دارد.

$$(z+i)(z-i) = z^2 - i^2 \underset{}{\overset{i^2=-1}{=\!=\!=}} z^2 + 1$$

برای یافتن عامل دیگرش تقسیم زیر را می‌انجامیم:

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 \;\underline{|\, z^2 + 1}$$

که نتیجه می دهد:

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = \left(z^2+1\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

حال برای یافتن ۲ ریشه‌ی دیگر باید $z^2 + 2z + 2 = 0$ را حل کنیم.

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = -1 \pm \sqrt{-1} \rightarrow \begin{cases} z_3 = -1 - i \\ z_4 = -1 + i \end{cases}$$

مجموعه جواب: $\{\, i, -i, -1-i, -1+i \,\}$

سوالات فصل اول

۱- ثابت کنید: $(b)\sin x = \frac{1}{i}\sinh(ix)$ $\quad (a)\cos x = \cosh(ix)$.

سپس نشان دهید $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$\begin{cases}\cos x + i\sin x = e^{ix}\\ \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}\end{cases} \to \begin{cases}\cos x + i\sin x = e^{ix}\\ \cos x - i\sin x = e^{-ix}\end{cases}$$

اگر این دو معادله را باهم جمع کنیم،داریم:

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix} \to \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix)$$

و اگر آنها را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$2i.\sin x = e^{ix} - e^{-ix} \to \sin x = \frac{1}{i}.\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{1}{i}\sinh(ix)$$

یادآوری: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

■

$$\sin x = \frac{1}{i}\sinh(ix) \to \sin^3 x = (\frac{1}{i}\sinh(ix))^3 = \frac{1}{i^3}(\sinh(ix))^3 = -\frac{1}{i}(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2})^3$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{i}(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{-2ix}.e^{ix}}{8})$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{i}(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{8} - \frac{3e^{ix} - 3e^{-ix}}{8}) = \frac{3}{4i}(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}) - \frac{1}{4i}(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2})$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4i}\sinh(ix) - \frac{1}{4i}\sinh(3ix) \qquad (*)$$

با توجه به قسمت قبل سوال،داریم $\frac{1}{i}\sinh(ix) = \sin x$ و $\frac{1}{i}\sinh(3ix) = \sin(3x)$ ،در نتیجه با جایگذاری در تساوی(*) خواهیم داشت:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

۲- با استفاده از اعداد مختلط اثبات کنید که: $\begin{cases}\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta\end{cases}$ (علم و صنعت ۸۵)

حل

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$:رابطه دموآور

$$n=3\rightarrow(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

$$\rightarrow\cos^3\theta+3\cos^2\theta\times i\sin\theta+3\cos\theta\times i^2\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

$$\xrightarrow[i^3=-i]{i^2=-1}\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\sin^2\theta\cos\theta-i\sin^3\theta=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

$$\rightarrow(\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

از طرفی می دانیم ، زمانی دو عدد مختلط با هم برابرند که قسمت های حقیقی آنها با هم و قسمت های موهومی آنها نیز باهم برابر باشند. یعنی:

$$\rightarrow\begin{cases}\cos3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta\\ \sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\end{cases}$$

۳- ثابت کنید که: $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n(\frac{\alpha}{2})\left(\cos(\frac{n\alpha}{2})+i\sin(\frac{n\alpha}{2})\right)$

(علم و صنعت ۸۶ - تهران جنوب ۸۸- تبریز ۸۵)

حل

می دانیم که $1+\cos\alpha=2\cos^2(\frac{\alpha}{2})$, $\sin\alpha=2\sin(\frac{\alpha}{2}).\cos(\frac{\alpha}{2})$:

$$\text{طرف چپ}=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

به کمک رابطه دموآور داریم: $\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\cos(\frac{n\alpha}{2})+i\sin(\frac{n\alpha}{2})\right)$.پس:

$$\text{طرف راست}=2^n\cos^n(\frac{\alpha}{2})\left(\cos(\frac{n\alpha}{2})+i\sin(\frac{n\alpha}{2})\right)=$$

سوال مشابه ۳-۱ درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(1+\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=2^{n+1}\cos^n(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{n\alpha}{2})$$ (علوم وتحقیقات ۹۰)

۳-۲ اگر $z=(-1+\cos2\theta+i\sin2\theta)^n$ و n یک عدد طبیعی باشد $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ بر حسب مقادیر مختلف n محاسبه کنید: (امیرکبیر ۸۴)

Ans $\mathrm{Re}(z)=2^n\sin^n\theta.\cos(\frac{n\pi}{2}+n\theta)$, $\mathrm{Im}(z)=2^n\sin^n\theta.\sin(\frac{n\pi}{2}+n\theta)$

۴- ریشه های چهارم $Z=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را محاسبه کنید. (تهران مرکزی ۸۸- امیرکبیر ۸۸- قزوین۸۸)

حل

ابتدا فرم قطبی معادله را بدست می آوریم: $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $1-\sqrt{3}i=2e^{\frac{-\pi}{3}i}$

$$w^4=\left(\frac{2e^{\frac{-\pi}{3}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}\right)^{10}\rightarrow w^4=e^{\frac{-20\pi}{3}i}\xrightarrow{w=Re^{i\theta}}R^4e^{4i\theta}=e^{(\frac{-20\pi}{3}+2k\pi)i}$$

$$\begin{cases}R^4=1\rightarrow R=1\\4\theta=-\frac{20\pi}{3}+2k\pi\rightarrow\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\end{cases}\rightarrow w_k=CiS(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{3})\qquad ,k=0,1,2,3$$

سوال مشابه ۴-۱ معادله $Z^4=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{3}$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.(تهران مرکزی ۸۳)

ANS $\{-i,i,-1,1\}$

۴-۲ اگر Z یک عدد مختلط باشد معادله $z^8-\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=0$ را حل کنید. (امیرکبیر ۸۵)

ANS $z_k=CiS(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{12})\qquad ,k=0,1,2,\dots,7$

۴-۳ ریشه پنجم $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را حساب کنید. (تهران ۸۶)

ANS $w_k=CiS(\frac{2k\pi}{5}+\frac{4\pi}{3})\qquad ,k=0,1,2,3,4$

۵- فرض کنید $n>2$ ، $z\neq 1$ یکی از ریشه‌های n ام عدد واحد باشد. نشان دهید مجموع $z+z^3+\dots+z^{2n-1}$ صفر است. (علم و صنعت ۸۴)

حل

$(z$ ریشه n ام واحد$)\rightarrow z^n=1\rightarrow z^{2n}=1$

$$z+z^3+\dots+z^{2n-1}\underset{\text{تصاعد هندسی}}{=}\frac{z\left(1-(z^2)^n\right)}{1-z^2}=\frac{z(1-z^{2n})}{1-z^2}\ \underset{z\neq 1}{\overset{z^{2n}=1}{=}}\ 0$$

۶- معادله $(Z^۲+i)^۲=۱$ را در حل کنید. (تهران مرکزی ۸۴)

حل

$$(Z^۲+i)^۲=۱\to Z^۲+i=\pm۱\to Z^۲=\pm۱-i\to\begin{cases}Z^۲=۱-i\\ Z^۲=-۱-i\end{cases}$$

$$*Z^۲=۱-i\to Z^۲=\sqrt{۲}\,e^{\frac{-\pi}{۴}i}\to(R\,e^{i\theta})^۲=\sqrt{۲}\,e^{(۲k\pi-\frac{\pi}{۴})i}$$

$$\to R^۲e^{۲i\theta}=\sqrt{۲}\,e^{(۲k\pi-\frac{\pi}{۴})i}\to\begin{cases}R^۲=\sqrt{۲}\to R=\sqrt[۴]{۲}\\ ۲\theta=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\to\theta=k\pi-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

$$Z=\sqrt[۴]{۲}(\cos(k\pi-\frac{\pi}{۸})+i\sin(k\pi-\frac{\pi}{۸}))\ ,\ k=۰,۱$$

$$k=۰\to Z_۱=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{\pi}{۸}-i\sin\frac{\pi}{۸})\qquad ,k=۱\to Z_۲=\sqrt[۴]{۲}(-\cos\frac{\pi}{۸}+i\sin\frac{\pi}{۸})$$

$$*Z^۲=-۱-i\to Z^۲=\sqrt{۲}\,e^{\frac{۵\pi}{۴}i}\to R^۲e^{۲i\theta}=\sqrt{۲}\,e^{(۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴})i}\to\begin{cases}R=\sqrt[۴]{۲}\\ \theta=k\pi+\frac{۵\pi}{۸}\end{cases}$$

$$Z=\sqrt[۴]{۲}(\cos(k\pi+\frac{۵\pi}{۸})+i\sin(k\pi+\frac{۵\pi}{۸}))\quad ,k=۰,۱$$

$$k=۰\to Z_۳=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۵\pi}{۸}+i\sin\frac{۵\pi}{۸})\qquad ,\ k=۱\to Z_۴=-\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۵\pi}{۸}+i\sin\frac{۵\pi}{۸})$$

۷- ریشه های چهارم عدد $\left(\frac{۱-i}{۱+\sqrt{۳}i}\right)^{۲۰}$ را به دست آورید. (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$۱-i=\sqrt{۲}\,e^{\frac{-\pi}{۴}i}\quad ,\quad ۱+\sqrt{۳}i=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$$

$$Z=\left(\frac{\sqrt{۲}\,e^{\frac{-\pi}{۴}i}}{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}\right)^{۲۰}\to Z=\frac{۱}{۲^{۱۰}}(e^{\frac{-۷\pi}{۱۲}i})^{۲۰}\to Z=\frac{۱}{۲^{۱۰}}e^{\frac{-۳۵\pi}{۳}i}$$

$$w^۴=Z\xrightarrow{w=Re^{i\theta}}R^۴e^{۴i\theta}=\frac{۱}{۲^{۱۰}}e^{(\frac{-۳۵\pi}{۳}+۲k\pi)i}\to\begin{cases}R^۴=\frac{۱}{۲^{۱۰}}\to R=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\\ ۴\theta=-\frac{۳۵\pi}{۳}+۲k\pi\to\theta=-\frac{۳۵\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$$

$$w=R(CiS\theta)\to w_k=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}CiS(-\frac{۳۵\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۲})\ ,\ k=۰,۱,۲,۳$$

سوال مشابه ۷-۱ معادله $Z^{5}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ را حل کنید. (تهران مرکزی ۸۹)

ANS $Z_k=\sqrt[5]{2}CiS(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{60})\qquad k=0,1,2,3,4$

۷-۲ مقادیرمختلف $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{\frac{5}{4}}$ را به دست آورید. (علم و صنعت ۹۰)

ANS $Z_k=\sqrt[8]{32}CiS(\frac{-5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2})\qquad k=0,1,2,3$

۸- اگر $z=\dfrac{-\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})}{-\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})}$ عدد صحیح n را طوری بیابید که z^n عدد حقیقی باشد.
(تهران جنوب ۸۴)

حل

$$z=\frac{-\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})}{-\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})}=\frac{-(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})}{-(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})}=\frac{\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3})}{\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6})}=\frac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{\frac{-\pi}{6}i}}=e^{\frac{-\pi}{6}i}$$

$$z^n=\left(e^{\frac{-\pi}{6}i}\right)^n=e^{\frac{-n\pi}{6}i}=\cos(\frac{-n\pi}{6})+i\sin(\frac{-n\pi}{6})=\cos(\frac{n\pi}{6})-i\sin(\frac{n\pi}{6})$$

برای اینکه عدد حقیقی شود باید $\sin(\frac{n\pi}{6})=0$ باشد،پس:

$$\frac{n\pi}{6}=k\pi\rightarrow n=6k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۹- الف) اگر برای عدد مختلط Z داشته باشیم $Z+\frac{1}{Z}=2\cos\theta$ نشان دهید برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos n\theta$ (کرج ۸۴)

ب) اگر α,β ریشه های معادله $Z^2-2Z+4=0$ باشند مطلوبست محاسبه مقادیر زیر :

$$A=\alpha^n+\beta^n\ ,\ B=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n,(n\in\mathbb{N})$$ (امیرکبیر-علوم وتحقیقات ۸۸)

حل

الف) $Z=Re^{i\alpha}=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$$\frac{1}{Z}=Z^{-1}=(Re^{i\alpha})^{-1}=R^{-1}e^{-i\alpha}=\frac{1}{R}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))\rightarrow\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

از طرفی با توجه به صورت مسأله داریم، $Z+\frac{1}{Z}=2\cos\theta$ ،بنابراین:

$$Z+\frac{1}{Z}=2\cos\theta \to R(\cos\alpha+i.\sin\alpha)+\frac{1}{R}(\cos\alpha-i.\sin\alpha)=2\cos\theta$$

$$\to (R+\frac{1}{R})\cos\alpha+i.(R-\frac{1}{R})\sin\alpha=2\cos\theta \qquad (*)$$

چون سمت راست تساوی (*)،یک عدد حقیقی است،پس قسمت موهومی سمت چپ باید برابر صفر باشد، درنتیجه:

$$\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\alpha=0 \to \begin{cases} R-\frac{1}{R}=0 \to R=1 \\ \sin\alpha=0 \to \alpha=k\pi \end{cases}$$

- اگر $R=1$ باشد،با جایگذاری در تساوی(*) داریم:

$$2\cos\alpha=2\cos\theta \to \alpha=2k\pi\pm\theta \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{z=1e^{\alpha i}} z^n+\frac{1}{z^n}=\left(e^{\alpha i}\right)^n+\left(e^{\alpha i}\right)^{-n}=e^{n\alpha i}+e^{-n\alpha i}$$

$$=\left(\cos(n\alpha)+i.\sin(n\alpha)\right)+\left(\cos(-n\alpha)+i.\sin(-n\alpha)\right) \to z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)$$

$$\xrightarrow{(I)} z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(2kn\pi\pm n\theta)=2\cos(n\theta)$$

- اگر $\alpha=k\pi$ باشد، روی مقادیر مختلف k بحث می کنیم:

- اگر **k زوج** باشد،داریم $\cos\alpha=1$ $Z=R \xleftarrow{Z=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$ و با توجه به صورت سوال داریم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \to R+\frac{1}{R}=2\cos\theta$$

ازطرفی نیز می دانیم که $R+\frac{1}{R}\geq 2$ و $2\cos\theta\leq 2$. واضح است که این دو تنها زمانی می توانند با هم مساوی باشند که هر دو برابر عدد ۲ باشند یعنی:

$$R+\frac{1}{R}=2 \to R=1 \to Z=1$$
$$2\cos\theta=2 \to \theta=2m\pi$$

حال برای $Z=1$ و $\theta=2m\pi$ تساوی $Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos n\theta$ بوضوح برقرار است.

- اگر **k فرد** باشد،داریم $\cos\alpha=-1$ $Z=-R \xleftarrow{Z=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$. داریم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \to -R+\frac{1}{-R}=2\cos\theta \to R+\frac{1}{R}=-2\cos\theta$$

همچنین می دانیم که $R+\frac{۱}{R}\geq ۲$ و $-۲\cos\theta \leq ۲$. این دو،تنها زمانی می توانند با هم مساوی باشند که هر دو برابر ۲ باشند بنابراین $-۲\cos\theta = ۲ \leftarrow \theta = (۲m+۱)\pi$ و

$R+\frac{۱}{R}=۲ \leftarrow R=۱ \leftarrow Z=-۱$. حال برای $Z=-۱$ و $\theta=(۲m+۱)\pi$ داریم:

$$Z^n+\frac{۱}{Z^n}=(-۱)^n+(-۱)^n=۲\times(-۱)^n=۲\cos\left(n(۲m+۱)\pi\right)=۲\cos(n\theta)$$

در نتیجه حکم در همه حالات اثبات شد.

البته اگر در سوال ذکر میشد که منظور از θ همان آرگمان Z است، دیگر نیازی به حالت ها نبود و بسادگی اثبات میشد.

ب) $$z^۲-۲z+۴=۰ \rightarrow z=۱\pm\sqrt{۳}\,i\begin{cases}\alpha=۱+\sqrt{۳}i \rightarrow \alpha=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}\\ \beta=۱-\sqrt{۳}i \rightarrow \beta=۲e^{\frac{-\pi}{۳}i}\end{cases}$$

$$*\alpha^n+\beta^n=\left(۲e^{\frac{\pi}{۳}i}\right)^n+\left(۲e^{\frac{-\pi}{۳}i}\right)^n=۲^n\left(e^{\frac{n\pi}{۳}i}+e^{\frac{-n\pi}{۳}i}\right)$$

$$=۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۳}+i\sin\frac{n\pi}{۳}+\cos(-\frac{n\pi}{۳})+i\sin(-\frac{n\pi}{۳})\right)=۲^n\left(۲\cos\frac{n\pi}{۳}\right)=۲^{n+۱}\cos\frac{n\pi}{۳}$$

$$*(\frac{\alpha}{\beta})^n=\left(\frac{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}{۲e^{\frac{-\pi}{۳}i}}\right)^n=\left(e^{\frac{۲\pi}{۳}i}\right)^n=e^{\frac{۲n\pi}{۳}i}=\cos(\frac{۲n\pi}{۳})+i\sin(\frac{۲n\pi}{۳})$$

سوال مشابه ۹-۱ اگر α,β ریشه های معادله $Z^۲-۲Z+۴=۰$ باشند نشان دهید:

$$\alpha^n+\beta^n=۲^{n+۱}\cos(\frac{n\pi}{۳})$$ (تهران جنوب ۸۸ و ۸۷ و ۸۵- قزوین۸۸- تهران مرکزی ۸۶)

۹-۲ اگر $z_۱, z_۲$ ریشه های مختلط معادله $z^۲-۲z+۴=۰$ باشند، مقادیر A و B و C را محاسبه کنید. $(n\in\mathbb{N})$

$$C=(\frac{z_۱}{z_۲})^n+(\frac{z_۲}{z_۱})^n \qquad B=z_۲^n+\frac{۱}{z_۲^n} \qquad A=z_۱^n+\frac{۱}{z_۱^n}$$ (امیر کبیر ۸۶)

Ans

$$A=(۲^n+\frac{۱}{۲^n})\cos\frac{n\pi}{۳}+i(-۲^n+\frac{۱}{۲^n})\sin\frac{n\pi}{۳}$$

$$B=(۲^n+\frac{۱}{۲^n})\cos\frac{n\pi}{۳}+i(۲^n-\frac{۱}{۲^n})\sin\frac{n\pi}{۳} \quad ,C=۲\cos\frac{۲n\pi}{۳}$$

۱۰- مکان هندسی نقاطی را در صفحه مختلط بیابید که:

الف) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right)=\frac{1}{4}$ (تهران جنوب ۸۶)

ب) $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right)\ge\frac{-1}{2}$ (تهران مرکزی ۸۷)

حل

الف) $z=x+iy\rightarrow\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{x+iy-2i}=\frac{1}{x+(y-2)i}\times\frac{x-(y-2)i}{x-(y-2)i}=\frac{x-(y-2)i}{x^2+(y-2)^2}$

$$=\frac{x}{x^2+(y-2)^2}-\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}i$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right)=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=\frac{1}{4}\rightarrow x^2+(y-2)^2=-4(y-2)$$

$\rightarrow x^2+y^2-4y+4=-4y+8\rightarrow x^2+y^2=4\rightarrow$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲

■

ب) $z=x+iy\rightarrow\frac{z}{1-z}=\frac{x+iy}{1-(x+iy)}=\frac{x+iy}{(1-x)-iy}\times\frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy}=\frac{(x-x^2-y^2)+iy}{(1-x)^2+y^2}$

$$=\frac{x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}+\frac{y}{(1-x)^2+y^2}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right)\ge\frac{-1}{2}\rightarrow\frac{x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}+\frac{1}{2}\ge 0\rightarrow\frac{-x^2-y^2+1}{2\left((1-x)^2+y^2\right)}\ge 0\rightarrow -x^2-y^2+1\ge 0$$

$x^2+y^2\le 1\rightarrow$ درون و روی دایره ای به مرکز مبدأ وشعاع ۱

سوال مشابه ۱۰-۱ ناحیه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>1$ چه قسمتی از صفحه مختلط را نشان می‌دهد؟

(تهران مرکزی ۸۸)

ANS ناحیه داخل دایره ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و به شعاع $\frac{1}{2}$ است.

۱۱- فرض کنید $w\neq 1$ یک ریشه n ام واحد است، ثابت کنید: $1+2w+3w^2+\dots+nw^{n-1}=\frac{-n}{1-w}$

حل

براساس اتحاد چاق ولاغر داریم:

$$(1-w)(1+w+w^2+\dots+w^n)=1-w^{n+1}\xrightarrow{w\neq 1}1+w+w^2+\dots+w^n=\frac{1-w^{n+1}}{1-w}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}1+2w+3w^2+\dots+nw^{n-1}=\frac{-(n+1)w^n(1-w)+1-w^{n+1}}{(1-w)^2}\xrightarrow{w^n=1\rightarrow w^{n+1}=w}$$

$$1+2w+3w^2+\dots+nw^{n-1}=\frac{-(n+1)\times 1\times(1-w)+(1-w)}{(1-w)^2}=\frac{-n(1-w)}{(1-w)^2}=\frac{-n}{1-w}$$

۱۲- نشان دهید اگر $z_1, z_2, \dots, z_n$ ریشه‌های معادلـه $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ باشـند آنگاه: $z_1 . z_2 . \dots . z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$, $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0}$

حل

اگر $z_1, z_2, \dots, z_n$ ریشه‌های معادله باشند، آن معادله بر عبـارت $(z - z_1), (z - z_2), \dots, (z - z_n)$ بخشپذیر است یعنی:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

حال طرف دوم تساوی را بسط می دهیم:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 \Big(z^n - (z_1 + z_2 + \dots + z_n) z^{n-1}$$
$$+ (z_1 z_2 + \dots + z_1 z_n + \dots + z_{n-1} z_n) z^{n-2} + \dots + (-1)^n z_1 z_2 z_3 \dots z_n \Big)$$

حال ضرایب دوطرف تساوی را متحد هم قرار می دهیم:

$$\begin{cases} z^{n-1} \text{ ضرایب} : a_1 = -a_0 (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \to z_1 + z_2 + \dots + z_n = \frac{-a_1}{a_0} \\ z^0 \text{ ضرایب} : a_n = (-1)^n a_0 . z_1 . z_2 . \dots . z_n \to z_1 . z_2 . \dots . z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

۱۳- ثابت کنید مجموع ریشه‌های n ام یک عدد برابر صفر است. (تهران ۸۴- امیرکبیر ۸۴)

حل

در مثال قبل ثابت کردیم که مجموع ریشه‌های معادله $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ برابر است با $-\frac{a_1}{a_0}$. پس در مورد $z^n = a$ می‌توان گفت:

$$z^n + (0) z^{n-1} + (0) z^{n-2} + \dots + (0) z - a = 0$$

یعنی: $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{0}{1} = 0$$

۱۴- الف) چهار ریشه مختلط معادله $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ را بیابید. (شاهرود ۸۷)

ب) معادله $1 + z^2 + z^4 + z^6 = z + z^3 + z^5$ را حل کرده و ریشه‌های آن را در صفحه اعداد مختلط رسم کنید.

(امیر کبیر ۸۸)

حل

الف) $z^4+z^3+z^2+z+1=0 \xrightarrow{\times(z-1)} (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$\to z^5-1=0 \to z^5=1 \to (Re^{i\theta})^5=e^{(0+2k\pi)i}$

$$R^5e^{5i\theta}=e^{2k\pi i} \to \begin{cases} R^5=1 \to R=1 \\ 5\theta=2k\pi \to \theta=\dfrac{2k\pi}{5} \end{cases} \to z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\ ,\ k=0,1,\dots,4$$

$k=0 \to z=1$

جواب $z=1$ غیرقابل قبول است و آن را حذف می کنیم،
چون ریشه‌ی $(z-1)$ است که خودمان در معادله ضرب کردیم

$k=1 \to z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ $\qquad$ $k=2 \to z=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$

$k=3 \to z=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$ $\qquad$ $k=4 \to z=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$

■

ب) $1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0$

با فرض $z\neq -1$ طرفین را در $(z+1)$ ضرب می‌کنیم:

$(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)=0\times(z+1)$

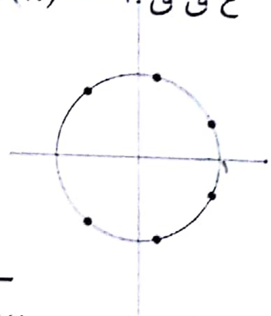
$z^7+1=0 \to z^7=-1 \quad , \quad z=Re^{i\theta} \quad , \quad -1=1e^{\pi i}$

$$\to (Re^{i\theta})^7=1e^{(2k\pi+\pi)i} \to R^7e^{7i\theta}=1e^{(2k+1)\pi i} \to \begin{cases} R^7=1 \to R=1 \\ 7\theta=(2k+1)\pi \to \theta=\dfrac{2k+1}{7}\pi \end{cases}$$

$$\to z=\cos\left(\frac{2k+1}{7}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k+1}{7}\pi\right) \qquad k=0,1,\dots,6$$

$z_0=\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ $\quad$ $z_1=\text{cis}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ $\quad$ $z_2=\text{cis}\left(\frac{5\pi}{7}\right)$ $\quad$ $z_3=\text{cis}(\pi)=-1$ غ ق ق.

$z_4=\text{cis}\left(\frac{9\pi}{7}\right)$ $\quad$ $z_5=\text{cis}\left(\frac{11\pi}{7}\right)$ $\quad$ $z_6=\text{cis}\left(\frac{13\pi}{7}\right)$



سوال مشابه قسمت الف

۱۴-۱ معادله روبرو را حل کنید: $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ (علوم وتحقیقات۹۰)

Ans $z_k=\text{CiS}\frac{k\pi}{3}\ ,\ k=1,2,3,4,5$

۱۵- معادله $z^{۴} - ۸iz^{۲} - ۲۵ = ۰$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. (تهران مرکزی ۸۹)

حل

$$\xrightarrow{z^{۲}=w} w^{۲} - ۸iw - ۲۵ = ۰ \qquad \Delta = ۶۴i^{۲} - ۴(-۲۵) = -۶۴ + ۱۰۰ = ۳۶$$

$$w = \frac{۸i \pm \sqrt{۳۶}}{۲} = \frac{\pm ۶ + ۸i}{۲} = \pm ۳ + ۴i \begin{cases} z^{۲} = ۳ + ۴i \\ z^{۲} = -۳ + ۴i \end{cases}$$

$$*z^{۲} = ۳ + ۴i \xrightarrow{۳+۴i = ۵e^{i\tan^{-۱}(\frac{۴}{۳})}} (Re^{i\theta})^{۲} = ۵e^{(۲k\pi + \tan^{-۱}(\frac{۴}{۳}))i} \to \begin{cases} R^{۲} = ۵ \to R = \sqrt{۵} \\ \theta = k\pi + ۰/۵\tan^{-۱}(\frac{۴}{۳}) \end{cases}$$

$$z = \sqrt{۵}\,CiS\left(k\pi + ۰/۵\tan^{-۱}(\frac{۴}{۳})\right), \ k = ۰,۱$$

چون $w = -۳ + ۴i$ در ربع دوم است ولی برد arctanx در بازه $(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ می باشد،پس $\theta = \pi + \tan^{-۱}(\frac{-۴}{۳})$

$$z^{۲} = -۳ + ۴i \xrightarrow{-۳+۴i = ۵e^{i\left(\pi + \tan^{-۱}(-\frac{۴}{۳})\right)}} R^{۲}e^{i۲\theta} = ۵e^{i(\pi + \tan^{-۱}(-\frac{۴}{۳}) + ۲k\pi)}$$

$$\to \begin{cases} R^{۲} = ۵ \to R = \sqrt{۵} \\ \theta = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} - ۰/۵\tan^{-۱}(\frac{۴}{۳}) \end{cases} \to z = \sqrt{۵}\,CiS\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲} - ۰/۵\tan^{-۱}(\frac{۴}{۳})\right), k = ۰,۱$$

۱۶- مکان هندسی نقاط z را که در شرط $Re(۱+i+\frac{۱}{z+۱}) + Im(۲i+\frac{۱}{z+۱}) = ۴$ صدق می‌کند، بیابید. (امیر کبیر ۸۸)

حل

$$z = x+iy \to \frac{۱}{z+۱} = \frac{۱}{(x+۱)+iy} \times \frac{(x+۱)-iy}{(x+۱)-iy} = \frac{(x+۱)-iy}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}$$

$$Re(۱+i+\frac{۱}{z+۱}) = Re\left(۱+i+\frac{(x+۱)-iy}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}\right) = ۱ + \frac{x+۱}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}} = \frac{x^{۲}+۳x+y^{۲}+۲}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}$$

$$Im(۲i+\frac{۱}{z+۱}) = Im\left(۲i+\frac{(x+۱)-iy}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}\right) = ۲ - \frac{y}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}} = \frac{۲x^{۲}+۴x+۲+۲y^{۲}-y}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}$$

$$Re(۱+i+\frac{۱}{z+۱}) + Im(۲i+\frac{۱}{z+۱}) = ۴ \to \frac{۳x^{۲}+۷x+۳y^{۲}-y+۴}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}} = ۴$$

$$۳x^{۲}+۷x+۳y^{۲}-y+۴ = ۴x^{۲}+۸x+۴+۴y^{۲} \to x^{۲}+x+y^{۲}+y = ۰$$

$$x^{۲}+x+\frac{۱}{۴}+y^{۲}+y+\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \to (x+\frac{۱}{۲})^{۲} + (y+\frac{۱}{۲})^{۲} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}$$

پس مکان مورد نظر روی دایره‌ای به مرکز $(\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۲})$ و شعاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۱۷- معادله $z^{2n}+z^{n}+1=0$ را حل کنید. (تهران ۸۳)

حل

$$z^n=w \rightarrow w^2+w+1=0 \rightarrow w=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\rightarrow z^n=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \begin{cases} z^n=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1e^{\frac{2\pi}{3}i} \\ z^n=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1e^{\frac{4\pi}{3}i} \end{cases}$$

$$*(Re^{i\theta})^n=e^{(2k\pi+\frac{2\pi}{3})i} \rightarrow R^n e^{in\theta}=e^{(2k\pi+\frac{2\pi}{3})i} \rightarrow \begin{cases} R^n=1 \rightarrow R=1 \\ n\theta=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{3n} \end{cases}$$

$$z=\cos(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{3n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{3n}) \quad , \quad k=0,1,\dots,(n-1)$$

$$*(Re^{i\theta})^n=e^{(2k\pi+\frac{4\pi}{3})i} \rightarrow \begin{cases} R^n=1 \rightarrow R=1 \\ n\theta=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n}+\frac{4\pi}{3n} \end{cases}$$

$$Z=\cos(\frac{2k\pi}{n}+\frac{4\pi}{3n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n}+\frac{4\pi}{3n}) \quad k=0,1,2,\dots,(n-1)$$

سوال مشابه

۱-۱۷ معادله $z^4+z^2+1=0$ را حل کنید. (تهران شمال ۸۷ و ۸۳- تهران جنوب ۸۴)

ANS $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , z_3=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

۲-۱۷ ریشه‌های معادله $z^4+2z^2+2=0$ را در مجموعه اعداد مختلط بدست آورید. (تهران جنوب ۸۵)

ANS $z_1=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{3\pi}{8}) \ , \ z_2=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{5\pi}{8}) \ , \ z_3=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{11\pi}{8}) \ , \ z_4=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{13\pi}{8})$

۳-۱۷ معادله $z^4+4z^2+16=0$ را حل کنید. (کرج ۸۸)

ANS $z_1=1+\sqrt{3}\,i \ , \ z_2=1-\sqrt{3}\,i \ , \ z_3=-1+\sqrt{3}\,i \ , \ z_4=-1-\sqrt{3}\,i$

۱۸- اگر z_1 و z_2 ریشه‌های غیرحقیقی معادله $z^3 = 1$ باشند، مقدار A را حساب کنید.

$$A = (z_1 + 1)^n + (z_2 + 1)^n$$
(تهران ۸۳- قزوین ۸۷)

حل

$$z^3 = 1 \xrightarrow[1 = 1e^{0i}]{z = Re^{i\theta}} (Re^{i\theta})^3 = 1e^{(0+2k\pi)i} \rightarrow \begin{cases} R^3 = 1 \rightarrow R = 1 \\ 3\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow z = \cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3})$$

$$k = 1 \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow z_1 + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$k = 2 \rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow z_2 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{-\pi}{3}i}$$

$$A = (z_1 + 1)^n + (z_2 + 1)^n = (e^{\frac{\pi}{3}i})^n + (e^{\frac{-\pi}{3}i})^n = e^{\frac{n\pi}{3}i} + e^{\frac{-n\pi}{3}i}$$

$$A = \left(\cos(\frac{n\pi}{3}) + i\sin(\frac{n\pi}{3}) + \cos(\frac{-n\pi}{3}) + i\sin(\frac{-n\pi}{3})\right)$$

$$= \left(\cos(\frac{n\pi}{3}) + i\sin(\frac{n\pi}{3}) + \cos(\frac{n\pi}{3}) - i\sin(\frac{n\pi}{3})\right) = 2\cos(\frac{n\pi}{3})$$

۱۹- مکان هندسی نقاط z را بیابید.

الف) $|z-1| + |z+1| = 1$ (تهران جنوب ۸۳)

ب) $|z| < |2z+1|$

حل

الف) می دانیم که $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ پس:

$$|z-1| + |z+1| \ge |(z-1) - (z+1)| = 2 \rightarrow |z-1| + |z+1| \ge 2$$

بنابراین $|z-1| + |z+1| = 1$ جواب ندارد.

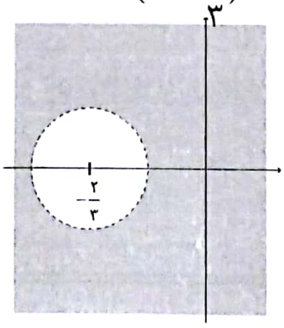
■

ب) $z = x + iy \rightarrow 2z + 1 = (2x+1) + 2iy \rightarrow |2z+1| = \sqrt{(2x+1)^2 + 4y^2}$

$$|z| < |2z+1| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{(2x+1)^2 + 4y^2} \rightarrow x^2 + y^2 < (4x^2 + 4x + 1) + 4y^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4x + 1 > 0 \rightarrow 3(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}) + 3y^2 + 1 > 0$$

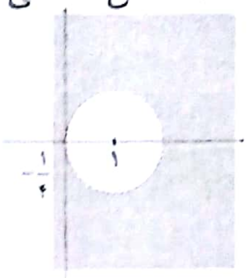
$$\rightarrow 3(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} + 3y^2 + 1 > 0 \rightarrow 3(x + \frac{2}{3})^2 + 3y^2 > \frac{1}{3} \rightarrow (x + \frac{2}{3})^2 + y^2 > \frac{1}{9}$$



خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{-2}{3}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{3}$

سوال مشابه ۱۹-۱ مکان هندسی همه Zهایی را بیابید که $1<|\frac{2Z-1}{Z+1}|<2$ (تهران ۸۵)

Ans $\left\{(x,y)|(x-1)^2+y^2>1, x>\frac{-1}{4}\right\}$



۲۰- مکان هندسی مجموعه همه Z ها:

الف) $|\frac{Z-1}{Z+1}|\le 1$ (تهران جنوب ۸۹)

ب) $|Z-i|\le|Z+i|$ (اراک ۸۹)

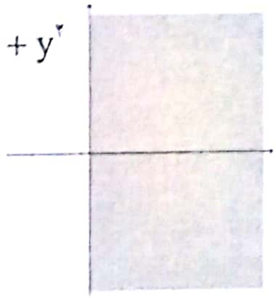
ج) $|\frac{i-Z}{Z+2}|=1$ (تهران جنوب ۸۰)

حل

الف) $|\frac{Z-1}{Z+1}|\le 1 \xrightarrow{Z=x+iy} \frac{|x+iy-1|}{|x+iy+1|}\le 1 \to \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|}\le 1 \to \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\le 1$

$\to \sqrt{(x-1)^2+y^2}\le\sqrt{(x+1)^2+y^2} \to (x-1)^2+y^2\le(x+1)^2+y^2$

$\to x^2-2x+1\le x^2+2x+1 \to 4x\ge 0 \to x\ge 0$



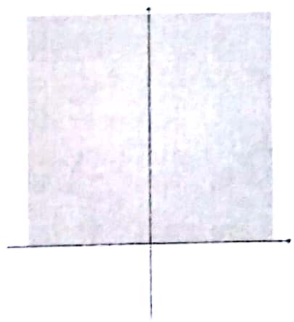
■

ب) $z=x+iy \to \begin{cases} z-i=x+i(y-1)\to|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\ z+i=x+i(y+1)\to|z+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\end{cases}$

$|z-i|\le|z+i| \to \sqrt{x^2+(y-1)^2}\le\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to x^2+(y-1)^2\le x^2+(y+1)^2$

$\to (y-1)^2\le(y+1)^2 \to y^2-2y+1\le y^2+2y+1$

$\to 4y\ge 0 \to y\ge 0 \to$ نیمه بالایی صفحه مختصات



■

ج) $|i-z|=|z+2| \xrightarrow{z=x+iy} |i-x-iy|=|x+iy+2| \to |-x+i(1-y)|=|(x+2)+iy|$

$\to \sqrt{x^2+(1-y)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \to x^2+1-2y+y^2=x^2+4x+4+y^2 \to y=-2x-\frac{3}{2}$

در نتیجه مکان هندسی مورد نظر،خط راست است.

۲۱- فرض کنید Z_1، Z_2 و Z_3 سه عدد مختلط باشند بطوریکه $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.اگر $z_1+z_2+z_3=0$ نشان دهید: الف) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ ب) $z_1^8+z_2^8+z_3^8=0$ (امیر کبیر ۸۷)

حل

$$z_1+z_2+z_3=0\to\frac{z_1\bar z_1}{\bar z_1}+\frac{z_2\bar z_2}{\bar z_2}+\frac{z_3\bar z_3}{\bar z_3}=0\to\frac{|z_1|^2}{\bar z_1}+\frac{|z_2|^2}{\bar z_2}+\frac{|z_3|^2}{\bar z_3}=0$$

$$\xrightarrow{|z_1|=|z_2|=|z_3|=1}\frac{1}{\bar z_1}+\frac{1}{\bar z_2}+\frac{1}{\bar z_3}=0\xrightarrow{\text{مزدوج می گیریم}}\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0$$

$$\to\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0\to z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2=0\quad(I)$$

از طرفی با توجه به صورت سوال می دانیم $z_1+z_2+z_3=0$. پس می توان نوشت:

$$(z_1+z_2+z_3)^2=0\to z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)=0\xrightarrow{(I)}z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

■

حال به اثبات قسمت (ب) می پردازیم:

$$\frac{z_1^2\bar z_1^2}{\bar z_1^2}+\frac{z_2^2\bar z_2^2}{\bar z_2^2}+\frac{z_3^2\bar z_3^2}{\bar z_3^2}=0\to\frac{|z_1|^4}{\bar z_1^2}+\frac{|z_2|^4}{\bar z_2^2}+\frac{|z_3|^4}{\bar z_3^2}=0\to\frac{1}{\bar z_1^2}+\frac{1}{\bar z_2^2}+\frac{1}{\bar z_3^2}=0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج می گیریم}}\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}=0\to\frac{z_2^2z_3^2+z_1^2z_3^2+z_1^2z_2^2}{z_1^2z_2^2z_3^2}=0\to z_2^2z_3^2+z_1^2z_3^2+z_1^2z_2^2=0\quad(II)$$

همچنین براساس قسمت الف داریم:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0\to(z_1^2+z_2^2+z_3^2)^2=0$$

$$\to z_1^4+z_2^4+z_3^4+2(z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+z_2^2z_3^2)=0\xrightarrow{(II)}z_1^4+z_2^4+z_3^4=0$$

به همین ترتیب ثابت می شود که $z_1^8+z_2^8+z_3^8=0$

۲۲- الف) اگر عدد مختلط Z بصورت زیر تعریف شده باشد مطلوبست محاسبه $|z|^2$:

$$z=(1+i)(1+i\sqrt2)(1+i\sqrt3)....(1+i\sqrt n)$$

ب) اگر $z=\frac{2}{1+i}+\frac{3}{1+i\sqrt2}+...+\frac{n+1}{1+i\sqrt n}$ باشد، مطلوبست محاسبه $Re(z)$. (امیرکبیر ۸۴)

حل

الف) **روش اول:**

$$|z|=|1+i||1+i\sqrt2|...|1+i\sqrt n|\to|z|^2=|1+i|^2|1+i\sqrt2|^2...|1+i\sqrt n|^2$$

$$\to|z|^2=2\times3\times...\times(n+1)\to|z|^2=(n+1)!$$

روش دوم:

$$z=(1+i)(1+i\sqrt{2})...(1+i\sqrt{n})\to \overline{z}=\overline{(1+i)}\overline{(1+i\sqrt{2})}...\overline{(1+i\sqrt{n})}$$
$$\to \overline{z}=(1-i)(1-i\sqrt{2})...(1-i\sqrt{n})$$

می دانیم که $z.\overline{z}=|z|^2$

$$z\overline{z}=|z|^2=\left((1+i)(1-i)(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})...(1+i\sqrt{n})(1-i\sqrt{n})\right)$$
$$=(1-i^2)(1-2i^2)...(1-ni^2)=2\times 3\times ...\times(n+1)\to |z|^2=(n+1)!$$

■

$$\text{ب)}\ z=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\frac{3(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}+...+\frac{(n+1)(1-i\sqrt{n})}{(1+i\sqrt{n})(1-i\sqrt{n})}$$
$$z=\frac{2(1-i)}{1+1^2}+\frac{3(1-i\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}^2}+...+\frac{(n+1)(1-i\sqrt{n})}{1+\sqrt{n}^2}$$
$$=\frac{2(1-i)}{2}+\frac{3(1-i\sqrt{2})}{3}+...+\frac{(n+1)(1-i\sqrt{n})}{n+1}$$
$$z=(1-i)+(1-i\sqrt{2})+...+(1-i\sqrt{n})=n-i(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})$$
$$\to\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=n\\ \mathrm{Im}(z)=-\left(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\right)\end{cases}$$

۲۳- نشان دهید که به ازای هر عددحقیقی m و p داریم: $e^{2mi\mathrm{Cot}^{-1}p}\left(\frac{pi+1}{pi-1}\right)^m=1$.

حل

$$\begin{cases}pi+1=\sqrt{1+p^2}\ e^{i\left(\tan^{-1}p\right)}\\ pi-1=\sqrt{1+p^2}\ e^{i\left(\pi-\tan^{-1}p\right)}\end{cases}\xrightarrow{\div}\frac{pi+1}{pi-1}=e^{i\left(-\pi+2\tan^{-1}p\right)}$$

$$e^{2mi.\mathrm{Cot}^{-1}p}.\left(\frac{pi+1}{pi-1}\right)^m=e^{2mi.\mathrm{Cot}^{-1}p}.\left(e^{i\left(-\pi+2\tan^{-1}p\right)}\right)^m$$

از طرفی می دانیم که: $\tan^{-1}p+\mathrm{Cot}^{-1}p=\frac{\pi}{2}\to -\pi+2\tan^{-1}p=-2\mathrm{Cot}^{-1}p$، بنابراین:

$$=e^{2mi.\mathrm{Cot}^{-1}p}.\left(e^{-2i.\mathrm{Cot}^{-1}p}\right)^m=e^{2mi.\mathrm{Cot}^{-1}p}.e^{-2mi.\mathrm{Cot}^{-1}p}=e^{2mi\mathrm{Cot}^{-1}p-2mi\mathrm{Cot}^{-1}p}=e^0=1$$

۲۴- ثابت کنید روی دایره $z = Re^{i\theta}$ داریم: $\left|e^{iz}\right| = e^{-R\sin\theta}$

حل

$$z = x + iy \to e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}.e^{ix} \to \left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y}\right|\left|e^{ix}\right|$$

از طرفی:

$$\left|e^{ix}\right| = \left|\cos x + i\sin x\right| = \sqrt{\cos^۲ x + \sin^۲ x} = ۱$$

بنابراین داریم:

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y}\right|\left|e^{ix}\right| = e^{-y} \xrightarrow{y=R\sin\theta} \left|e^{iz}\right| = e^{-R\sin\theta}$$

۲۵- اگر $(۱+x)^n = P_۰ + P_۱x + P_۲x^۲ + \dots$ ، حاصل عبارات زیر را بیابید:

$A = P_۰ - P_۲ + P_۴ - \dots$ و $B = P_۱ - P_۳ + P_۵ - \dots$ (تهران۸۸)

حل

کافیست در تساوی $(۱+x)^n = P_۰ + P_۱x + P_۲x^۲ + \dots$ ، $x = i$ را جایگذاری کنیم:

$$(۱+i)^n = P_۰ + P_۱i + P_۲i^۲ + P_۳i^۳ + P_۴i^۴ + P_۵i^۵ + \dots \xrightarrow{۱+i=\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}}$$

$$\left(\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}\right)^n = P_۰ + P_۱i - P_۲ - P_۳i + P_۴ + P_۵i + \dots$$

$$\to \sqrt{۲}^n e^{\frac{n\pi}{۴}i} = \left(P_۰ - P_۲ + P_۴ - \dots\right) + i\left(P_۱ - P_۳ + P_۵ - \dots\right) = A + iB$$

$$\to \sqrt{۲}^n.\cos(\frac{n\pi}{۴}) + i\sqrt{۲}^n.\sin(\frac{n\pi}{۴}) = A + iB \to \begin{cases} A = \sqrt{۲}^n.\cos(\frac{n\pi}{۴}) \\ B = \sqrt{۲}^n.\sin(\frac{n\pi}{۴}) \end{cases}$$

۲۶- معادله های زیر را درمیدان اعداد مختلط حل کنید:

الف) $e^z = -۱$

ب) $\cos z = -۴$

حل

الف) $e^z = -۱ \to e^{x+iy} = -۱ \to e^x e^{iy} = -۱ \to e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = -۱$

$$\to e^x\cos y + ie^x\sin y = -۱ \to \begin{cases} e^x\sin y = ۰ \\ e^x\cos y = -۱ \end{cases} \to x = ۰, y = (۲k+۱)\pi$$

$$\xrightarrow{z=x+iy} z = (۲k+۱)\pi i \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

ب) $\cos(x+iy)=-۴ \xrightarrow{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta} \cos x.\cos(iy)-\sin x.\sin(iy)=-۴$

همچنین در سوال ۱ صفحه۹ ثابت کردیم که:

$$\begin{cases} \cos x=\cosh(ix) \to \cos(ix)=\cosh(i^۲x) \to \cos(ix)=\cosh x \\ \sin x=\frac{۱}{i}\sinh(ix) \to \sin(ix)=\frac{۱}{i}\sinh(i^۲x) \to \sin(ix)=\frac{-۱}{i}\sinh x \to \sin(ix)=i.\sinh x \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos x.\cosh y-i.\sin x.\sinh y=-۴ \to \begin{cases} \cos x.\cosh y=-۴ \\ -\sin x.\sinh y=۰ \end{cases} \xrightarrow{\cosh y\geq ۱} \begin{cases} x=(۲k+۱)\pi \\ y=\cosh^{-۱}(۴) \end{cases}$$

$$\to z=(۲k+۱)\pi+i\cosh^{-۱}(۴) \xrightarrow{\cosh^{-۱}y=\ln(y+\sqrt{y^۲-۱})} z=(۲k+۱)\pi+i\ln(۴+\sqrt{۱۵}) \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

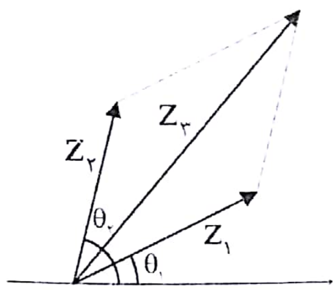
۲۷- ثابت کنید اگر $r_۱e^{i\theta_۱}+r_۲e^{i\theta_۲}=r_۳e^{i\theta_۳}$ آنگاه:

$$r_۳=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲+۲r_۱r_۲\cos(\theta_۲-\theta_۱)} \quad ,\theta_۳=\tan^{-۱}\left(\frac{r_۱\sin\theta_۱+r_۲\sin\theta_۲}{r_۱\cos\theta_۱+r_۲\cos\theta_۲}\right)$$

حل

فرض کنیم: $z_۱=r_۱e^{i\theta_۱}$، $z_۲=r_۲e^{i\theta_۲}$ و $z_۳=r_۳e^{i\theta_۳}$. بنابراین عبارت $r_۱e^{i\theta_۱}+r_۲e^{i\theta_۲}=r_۳e^{i\theta_۳}$ بیان می کند که: $z_۱+z_۲=z_۳$.

ابتدا بردارها را تجزیه می کنیم:



$$(z_۱)_x=|z_۱|\cos\theta_۱=r_۱\cos\theta_۱$$
$$(z_۱)_y=|z_۱|\sin\theta_۱=r_۱\sin\theta_۱$$
$$(z_۲)_x=|z_۲|\cos\theta_۲=r_۲\cos\theta_۲$$
$$(z_۲)_y=|z_۲|\sin\theta_۲=r_۲\sin\theta_۲$$

$$z_۳=z_۱+z_۲ \to \begin{cases} (z_۳)_x=(z_۱)_x+(z_۲)_x=r_۱\cos\theta_۱+r_۲\cos\theta_۲ \\ (z_۳)_y=(z_۱)_y+(z_۲)_y=r_۱\sin\theta_۱+r_۲\sin\theta_۲ \end{cases}$$

$$|z_۳|=r_۳=\sqrt{(z_۳)_x^۲+(z_۳)_y^۲}=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲+۲r_۱r_۲(\cos\theta_۱\cos\theta_۲+\sin\theta_۱\sin\theta_۲)}$$

$$\xrightarrow{\cos\theta_۱\cos\theta_۲+\sin\theta_۱\sin\theta_۲=\cos(\theta_۲-\theta_۱)} r_۳=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲+۲r_۱r_۲.\cos(\theta_۲-\theta_۱)}$$

همچنین:

$$\tan\theta_۳=\frac{(z_۳)_y}{(z_۳)_x} \to \theta_۳=\tan^{-۱}\left(\frac{r_۱\sin\theta_۱+r_۲\sin\theta_۲}{r_۱\cos\theta_۱+r_۲\cos\theta_۲}\right)$$

۲۸- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0$ ب) $(a+z)^n-(a-z)^n=0$

حل

الف) $$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0 \xrightarrow{\frac{z+i}{z-i}=w} w^4+w^3+w^2+w+1=0$$

$$\xrightarrow{\times(w-1)}(w-1)\left(w^4+w^3+w^2+w+1\right)=0\to w^5-1=0\to w^5=1$$

$$\to w_k=\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{5},\qquad k=\cancel{0},1,2,3,4$$

$$\frac{z+i}{z-i}=w\to z+i=wz-iw\to wz-z=i(1+w)$$

$$\to z=\frac{i(w+1)}{w-1}\to z_k=\frac{i\left(\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{5}+1\right)}{\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{5}-1}=\frac{i\left(1+\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)}{-1+\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}}$$

همچنین می دانیم که:

$1+\cos\frac{2k\pi}{5}=2\cos^2\frac{k\pi}{5}$ ، $1-\cos\frac{2k\pi}{5}=2\sin^2\frac{k\pi}{5}$ و $\sin\frac{2k\pi}{5}=2\sin\frac{k\pi}{5}.\cos\frac{k\pi}{5}$.

درنتیجه داریم:

$$z_k=\frac{i\left(2\cos^2\frac{k\pi}{5}+2i\sin\frac{k\pi}{5}.\cos\frac{k\pi}{5}\right)}{-2\sin^2\frac{k\pi}{5}+2i\sin\frac{k\pi}{5}.\cos\frac{k\pi}{5}}=\frac{2i\cos\frac{k\pi}{5}\left(\cos\frac{k\pi}{5}+i\sin\frac{k\pi}{5}\right)}{2i\sin\frac{k\pi}{5}\left(i\sin\frac{k\pi}{5}+\cos\frac{k\pi}{5}\right)}$$

i^2

$$\to z_k=\cot\frac{k\pi}{5}\qquad,\qquad k=1,2,3,4$$

■

ب) $$(a+z)^n=(a-z)^n\to\left(\frac{a+z}{a-z}\right)^n=1\to\frac{a+z}{a-z}=\sqrt[n]{1}\xrightarrow{\sqrt[n]{1}=\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\frac{a+z_k}{a-z_k}=\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\to a+z_k=(a-z_k)\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\to z_k\left(1+\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\right)=a\left(-1+\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$z_k=\frac{a\left(-1+\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\right)}{\left(1+\mathrm{CiS}\frac{2k\pi}{n}\right)}=\frac{a\left(-1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$z_k=\frac{a\left(-۲\sin^۲\frac{k\pi}{n}+۲i\sin\frac{k\pi}{n}.\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{۲\cos^۲\frac{k\pi}{n}+۲i\sin\frac{k\pi}{n}.\cos\frac{k\pi}{n}}=\frac{۲ai\sin\frac{k\pi}{n}\left(i\sin\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{۲\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$\to z_k=ai.\tan\frac{k\pi}{n}\quad ,k=۰,۱,\dots,(n-۱)$$

۲۹- چنانچه $z=e^{i\theta}$ فرض شود، ریشه های معادله $w=\sqrt{\frac{۱+z}{۱-z}}$ را بدست آورید.

حل

$$w=\sqrt{\frac{۱+z}{۱-z}}=\sqrt{\frac{۱+e^{i\theta}}{۱-e^{i\theta}}}=\sqrt{\frac{e^{i\frac{\theta}{۲}}(e^{-i\frac{\theta}{۲}}+e^{i\frac{\theta}{۲}})}{e^{i\frac{\theta}{۲}}(e^{-i\frac{\theta}{۲}}-e^{i\frac{\theta}{۲}})}}\xrightarrow[e^{-i\frac{\theta}{۲}}-e^{i\frac{\theta}{۲}}=-۲i\sin\frac{\theta}{۲}]{e^{-i\frac{\theta}{۲}}+e^{i\frac{\theta}{۲}}=۲\cos\frac{\theta}{۲}}w=\sqrt{\frac{۲\cos\frac{\theta}{۲}}{-۲i\sin\frac{\theta}{۲}}}$$

$$=\sqrt{\frac{-۱}{i}\cot\frac{\theta}{۲}}=\sqrt{i\cot\frac{\theta}{۲}}\xrightarrow{i=e^{\frac{\pi}{۲}i}}w=\sqrt{e^{\frac{\pi}{۲}i}\cot\frac{\theta}{۲}}=e^{(\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۲})i}\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}\quad ,k=۰,۱$$

$$\to w=e^{(\frac{\pi}{۴}+k\pi)i}\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}\to\begin{cases}k=۰\to w_۱=e^{\frac{\pi}{۴}i}\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}\\ k=۱\to w_۲=e^{\frac{۵\pi}{۴}i}\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{\cot\frac{\theta}{۲}}\end{cases}$$

۳۰- مجموع های $\begin{array}{l}S_۱=\sin x+\sin ۲x+\dots+\sin nx\\ S_۲=\cos x+\cos ۲x+\dots+\cos nx\end{array}$ را بیابید.

حل

$$S=e^{ix}+e^{۲ix}+\dots+e^{nix}=\frac{e^{ix}(۱-(e^{ix})^n)}{۱-e^{ix}}=\frac{e^{ix}(۱-e^{nix})}{۱-e^{ix}}=\frac{e^{ix}.e^{\frac{nix}{۲}}\left(e^{\frac{-nix}{۲}}-e^{\frac{nix}{۲}}\right)}{e^{\frac{ix}{۲}}\left(e^{\frac{-ix}{۲}}-e^{\frac{ix}{۲}}\right)}$$

$$=\frac{e^{\frac{ix}{۲}}.e^{\frac{nix}{۲}}\left(-۲i\sin\frac{nx}{۲}\right)}{-۲i\sin\frac{x}{۲}}=e^{(\frac{n+۱}{۲})ix}.\frac{\sin\frac{nx}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}\to S=\left(\cos(\frac{n+۱}{۲}x)+i\sin(\frac{n+۱}{۲}x)\right).\frac{\sin\frac{nx}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

$$S_۱=\sin x+\sin ۲x+\dots+\sin nx=\operatorname{Im}\left(e^{ix}+e^{۲ix}+\dots+e^{nix}\right)=\operatorname{Im}(S)=\sin(\frac{n+۱}{۲}x).\frac{\sin\frac{nx}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

$$S_۲=\cos x+\cos ۲x+...+\cos nx=\mathrm{Re}\left(e^{ix}+e^{۲ix}+...+e^{nix}\right)=\mathrm{Re}(S)=\cos(\frac{n+۱}{۲}x).\frac{\sin\frac{nx}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

۳۱- با بررسی ریشه هفتم عدد ۱ نشان دهید که: $\cos\frac{\pi}{۷}+\cos\frac{۳\pi}{۷}+\cos\frac{۵\pi}{۷}=\frac{۱}{۲}$

حل

می دانیم که $k=۰,۱,۲,...,(n-۱)$، $z^n=۱\rightarrow z_k=\mathrm{CiS}\left(\frac{۲k\pi}{n}\right)$، بنابراین:

$$z^۷=۱\rightarrow z_k=\mathrm{CiS}\left(\frac{۲k\pi}{۷}\right)\ ,\qquad k=۰,۱,۲,...,۶$$

از طرفی هم، در سؤال۱۳ صفحه ۱۷ ثابت کردیم که مجموع ریشه های n ام عدد a برابر صفر است، پس داریم:

$$\sum_{k=۰}^{۶}z_k=۰\rightarrow\sum_{k=۰}^{۶}\mathrm{Re}(z_k)=۰\rightarrow\sum_{k=۰}^{۶}\cos\left(\frac{۲k\pi}{۷}\right)=۰$$

$$\rightarrow ۱+\cos\frac{۲\pi}{۷}+\cos\frac{۴\pi}{۷}+\cos\frac{۶\pi}{۷}+\cos\frac{۸\pi}{۷}+\cos\frac{۱۰\pi}{۷}+\cos\frac{۱۲\pi}{۷}=۰\quad(*)$$

همچنین می دانیم:

$$\cos\frac{۲\pi}{۷}=\cos\left(\pi-\frac{۵\pi}{۷}\right)=-\cos\frac{۵\pi}{۷}\ ,\quad \cos\frac{۴\pi}{۷}=-\cos\frac{۳\pi}{۷}\ ,\quad \cos\frac{۶\pi}{۷}=-\cos\frac{\pi}{۷}$$

$$\cos\frac{۸\pi}{۷}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۷}\right)=-\cos\frac{\pi}{۷}\ ,\quad \cos\frac{۱۰\pi}{۷}=-\cos\frac{۳\pi}{۷}\ ,\quad \cos\frac{۱۲\pi}{۷}=-\cos\frac{۵\pi}{۷}$$

با جایگذاری در معادله (*) داریم:

$$۱-۲\cos\frac{\pi}{۷}-۲\cos\frac{۳\pi}{۷}-۲\cos\frac{۵\pi}{۷}=۰\rightarrow\cos\frac{\pi}{۷}+\cos\frac{۳\pi}{۷}+\cos\frac{۵\pi}{۷}=\frac{۱}{۲}$$

۳۲- به ازای $m=۲,۳,...$ ثابت کنید: $\sin\frac{\pi}{m}.\sin\frac{۲\pi}{m}.\ ...\ .\sin\frac{(m-۱)\pi}{m}=\frac{m}{۲^{m-۱}}$

حل

$$Z^m=۱\rightarrow Z=\mathrm{CiS}\left(\frac{۲k\pi}{m}\right)=e^{\frac{۲k\pi}{m}i}\rightarrow Z=۱,\ e^{\frac{۲\pi}{m}i},e^{\frac{۴\pi}{m}i},...,e^{\frac{۲(m-۱)\pi}{m}i}$$

$$\rightarrow Z^m-۱=(Z-۱)\left(Z-e^{\frac{۲\pi}{m}i}\right)\left(Z-e^{\frac{۴\pi}{m}i}\right)...\left(Z-e^{\frac{۲(m-۱)\pi}{m}i}\right)$$

$$\rightarrow\frac{Z^m-۱}{Z-۱}=\left(Z-e^{\frac{۲\pi}{m}i}\right)\left(Z-e^{\frac{۴\pi}{m}i}\right)...\left(Z-e^{\frac{۲(m-۱)\pi}{m}i}\right)$$

همچنین براساس اتحاد چاق ولاغر می دانیم، $Z^m - 1 = (Z-1)(Z^{m-1} + Z^{m-2} + \dots + Z + 1)$، در نتیجه:

$$Z^{m-1} + Z^{m-2} + \dots + Z + 1 = \left(Z - e^{\frac{2\pi}{m}i}\right)\left(Z - e^{\frac{4\pi}{m}i}\right)\dots\left(Z - e^{\frac{2(m-1)\pi}{m}i}\right)$$

حال در تساوی فوق $Z=1$ را جایگذاری می کنیم:

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{تا } m} = \left(1 - e^{\frac{2\pi}{m}i}\right)\left(1 - e^{\frac{4\pi}{m}i}\right)\dots\left(1 - e^{\frac{2(m-1)\pi}{m}i}\right)$$

$$\to m = \left(1 - e^{\frac{2\pi}{m}i}\right)\left(1 - e^{\frac{4\pi}{m}i}\right)\dots\left(1 - e^{\frac{2(m-1)\pi}{m}i}\right) \to m^2 = \left|1 - e^{\frac{2\pi}{m}i}\right|^2\left|1 - e^{\frac{4\pi}{m}i}\right|^2\dots\left|1 - e^{\frac{2(m-1)\pi}{m}i}\right|^2$$

از طرفی

$$\left|1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}\right|^2 = \left|\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{m}\right) - i\sin\frac{2k\pi}{m}\right|^2 = \left(1 - \cos\frac{2k\pi}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{m}$$

$$= 1 + \cos^2\frac{2k\pi}{m} - 2\cos\frac{2k\pi}{m} + \sin^2\frac{2k\pi}{m} = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{m} = 4\sin^2\frac{k\pi}{m}$$

در نتیجه:

$$m^2 = \left(4\sin^2\frac{\pi}{m}\right).\left(4\sin^2\frac{2\pi}{m}\right)\dots\left(4\sin^2\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

$$\to m = \left(2\sin\frac{\pi}{m}\right).\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)\dots\left(2\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right) \to \frac{m}{2^{m-1}} = \sin\frac{\pi}{m}.\sin\frac{2\pi}{m}\dots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$$

۳۳- ثابت کنید.

الف) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ب) $|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ج) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

حل

الف) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \xleftrightarrow[z_2 = x_2 + iy_2]{z_1 = x_1 + iy_1} |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)| \le |x_1 + iy_1| + |x_2 + iy_2|$

$$\leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \le x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \le x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2) \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

$$\leftrightarrow x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

$\leftrightarrow x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \ge 0 \leftrightarrow (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0$ رابطه بدیهی است پس روابط برگشت پذیرند

■

ب) $\left|(z_1+z_2)+z_3\right| \le \left|z_1+z_2\right|+\left|z_3\right| \le \left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right)+\left|z_3\right|$

با توجه به قسمت الف   با توجه به قسمت الف

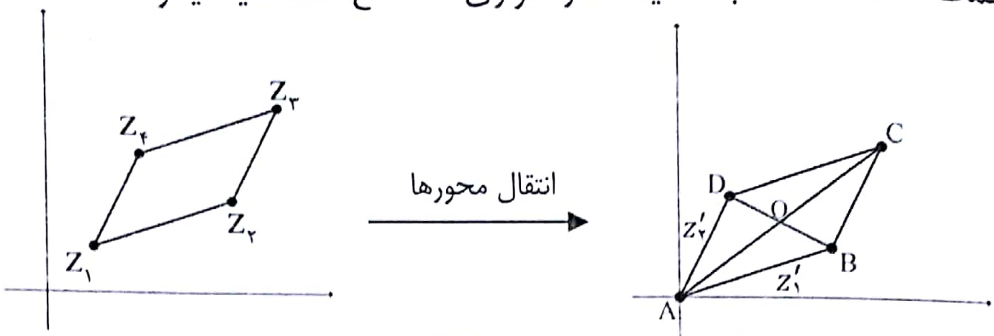
■

ج) $\left|z_2\right| = \left|(z_2-z_1)+z_1\right| \le \left|z_2-z_1\right|+\left|z_1\right| \to \left|z_2\right| \le \left|z_2-z_1\right|+\left|z_1\right| \to \left|z_2-z_1\right| \ge \left|z_2\right|-\left|z_1\right|$

با توجه به قسمت الف

۳۴- به کمک اعداد مختلط ثابت کنید اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند

حل



می دانیم که $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ و یا بعبارتی:

$\overrightarrow{AC}=Z'_1+Z'_2$ و $\overrightarrow{DB}=Z'_1-Z'_2$

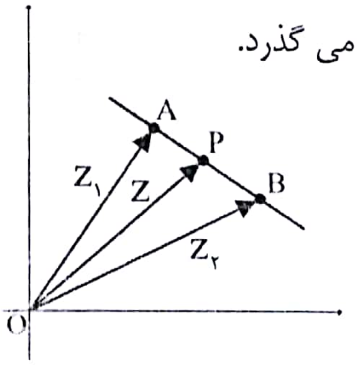
از طرفی واضح است که $\overrightarrow{AO}=K.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DO}=K'.\overrightarrow{DB}$ ودر مثلث $\overset{\Delta}{AOD}$ داریم:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO} \to Z'_2+K'\overrightarrow{DB}=K\overrightarrow{AC} \to Z'_2+K'(Z'_1-Z'_2)=K(Z'_1+Z'_2)$$

$$\to (1-K')Z'_2+K'Z'_1=KZ'_1+KZ'_2 \to \begin{cases}1-K'=K\\ K'=K\end{cases} \to K=\frac{1}{2}\ ,\ K'=\frac{1}{2} \to$$ اقطار منصف همند

۳۵- معادله خط راستی را بنویسید که از نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می گذرد.

حل



واضحست که $\overrightarrow{AP}$ مضربی از $\overrightarrow{AB}$ است یعنی:

$$\overrightarrow{AP}=K\left(\overrightarrow{AB}\right)=K(Z_2-Z_1)$$

از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{OAP}$ داریم: $\vec{Z_1}+\overrightarrow{AP}=\vec{Z}$، درنتیجه:

$$Z_1+K(Z_2-Z_1)=Z \to K(Z_2-Z_1)=Z-Z_1$$

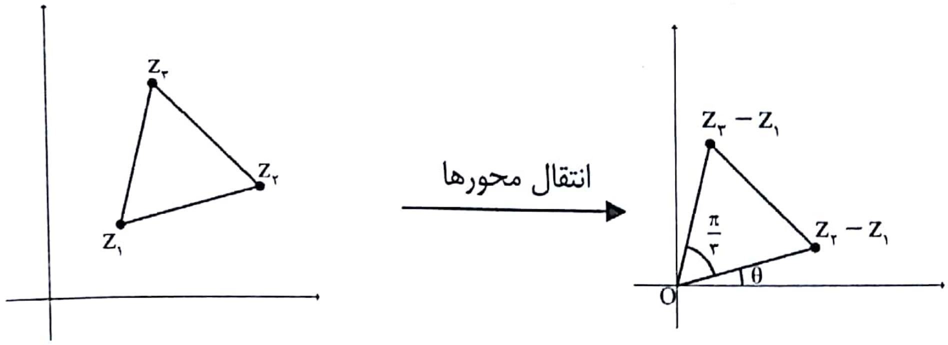
$$\to K\left((x_2-x_1)+i(y_2-y_1)\right)=(x-x_1)+i(y-y_1) \to \begin{cases}K(x_2-x_1)=x-x_1\\ K(y_2-y_1)=y-y_1\end{cases}$$

$$\to \begin{cases}K=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\\ K=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\end{cases} \to \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \to y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

۳۶- اگر Z_1، Z_2 و Z_3 رئوس مثلث متساوی الاضلاع باشند، نشان دهید که:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$

حل



چون مثلث متساوی الاضلاع است، داریم: $r = |Z_2 - Z_1| = |Z_3 - Z_1|$

از طرفی فرض می کنیم $Z_2 - Z_1 = re^{i\theta}$

$$Z_3 - Z_1 = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = re^{i\theta} e^{\frac{i\pi}{3}} \xrightarrow{Z_2 - Z_1 = re^{i\theta}} Z_3 - Z_1 = \left(Z_2 - Z_1\right)e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{(I)}$$

به همین ترتیب داریم: $\text{(II)} \quad Z_1 - Z_2 = \left(Z_3 - Z_2\right) e^{\frac{i\pi}{3}}$

از (I) و (II) می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2} \to Z_3^2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3 + Z_1Z_2 = -Z_1^2 - Z_2^2 + Z_1Z_2 + Z_2Z_1$$

$$\to Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$

۳۷- معادله زیر را حل کنید و سپس آن را به صورت حاصل ضرب دو عامل با ضرایب حقیقی بنویسید.

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$$

(علم وصنعت۸۸)

حل

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 = -100 \to \left(z^2 + 3z\right)^2 = -100 \to z^2 + 3z = \pm 10i \to z^2 + 3z \mp 10i = 0$$

$$z^2 + 3z - 10i = 0 \xrightarrow{\Delta = 9+40i = (5+4i)^2} z = \frac{-3 \pm (5+4i)}{2} \to \begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = -4 - 2i \end{cases}$$

از طرفی چون ضرایب معادله حقیقی اند براساس مثال۱۱ صفحه۸ می توان گفت:

$$\begin{cases} z_3 = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i \\ z_4 = \overline{-4 - 2i} = -4 + 2i \end{cases}$$

بنابراین:

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = \underbrace{\left(z - (1+2i)\right)\left(z - (1-2i)\right)}_{z^2 - 2z + 5}\underbrace{\left(z - (-4-2i)\right)\left(z - (-4+2i)\right)}_{z^2 + 8z + 20}$$

$$\to z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 8z + 20)$$

فصل دوم

دنباله

تعریف: گوییم حد دنباله $\{a_n\}$ موجود و برابر L است ، هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 ; n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon\right)$$

- اگر دنباله دارای حد باشد، دنباله را همگرا و در غیر اینصورت واگرا می‌نامیم.

تعریف: الف) دنباله صعودی: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$

ب) دنباله نزولی: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

تعریف: الف) دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کراندار گوییم هرگاه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R} ; a_n \leq M$

ب) دنباله $\{a_n\}$ را از پایین کراندار گوییم هرگاه $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{R} ; a_n \geq m$

ج) دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد یعنی:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m, M \in \mathbb{R} \; ; m \leq a_n \leq M$$

و دنباله ای که کراندار نباشد را بی کران می‌گوییم.

- برای اثبات همگرایی دنباله ها معمولا از قضیه زیر استفاده می کنیم.

قضیه۱ : هر دنباله یکنوا وکراندار،همگرا است.

بطور خاص داریم:

۱- هر دنباله صعودی و از بالا کراندار، همگرا است

۲- هر دنباله نزولی و از پایین کراندار، همگرا است.

مثال۱: دنباله بازگشتی $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به شکل روبرو می‌سازیم: $x_1=1\ ,\ x_{n+1}=\frac{6}{5-x_n}$ ثابت کنید این دنباله همگراست و حد آنرا بیابید. (امیرکبیر ۸۸)

حل

ابتدا به کمک استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$ از بالا کراندار است یعنی $x_n<2$

$n=1\to x_1=1<2$

فرض استقرا $\quad n=k\ :x_k<2$

حکم استقرا $\quad n=k+1:\ x_{k+1}<2$

$$x_k<2\to -x_k>-2\to 5-x_k>3\to \frac{1}{5-x_k}<\frac{1}{3}\to \frac{6}{5-x_k}<2\to x_{k+1}<2$$

در نتیجه دنباله $\{x_n\}$ کراندار است .حال ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$ صعودی است. (اثبات بازگشتی)

$$x_{n+1}>x_n \leftrightarrow \frac{6}{5-x_n}>x_n \leftrightarrow 6>5x_n-x_n^2 \leftrightarrow x_n^2-5x_n+6>0 \leftrightarrow \underbrace{(x_n-2)}_{<0}\underbrace{(x_n-3)}_{<0}>0$$

بدیهی است و روابط برگشت پذیر است.(صعودی بودن دنباله با استقرای ریاضی نیز اثبات می شود) چون دنباله صعودی است و از بالا کراندار، پس طبق قضیه ۱ ، دنباله همگراست.حال فرض می کنیم دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ به L همگراست و مقدار L را بدست می آوریم:

$$L=\frac{6}{5-L}\to 5L-L^2=6\to L^2-5L+6=0\to (L-2)(L-3)=0\to \begin{cases}L=2\\ L=3\end{cases}$$

اثبات کردیم که $x_n<2$،در نتیجه $L=3$ قابل قبول نیست.پس دنباله مورد نظر به $L=2$ همگرا است.

مثال۲: ثابت کنید دنباله $\left\{\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}\right\}$ همگراست. (برادلی)

حل

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{1\times3}{2\times4}=\frac{3}{8}\ ,\ a_3=\frac{5}{16}\ ,\ \ldots..$$

همانطور که می‌بینیم دنباله فوق ظاهراً نزولی است، حال می‌خواهیم آنرا ثابت کنیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n\times(2n+2)}}{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}<1\to \text{نزولی است}$$

از طرفی بدیهی است که $a_n>0$. لذا دنباله a_n نزولیست و از پایین کراندار،بنابراین طبق قضیه ۱ این دنباله همگراست.

قضیه۲ : هر دنباله همگرا، کراندار است. **(نتیجه:** هر دنباله بی کران، واگراست.)

برای مثال دنباله $\{n^{۲}\}$ را در نظر بگیرید چون این دنباله بی کران است پس واگرا است.

قضیه۳ (فشار یاساندویچ): اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $b_n \le a_n \le c_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال۳: نشان دهید که دنباله $\left\{\dfrac{|\sin(n!)|}{n}\right\}$ همگراست.

حل

$$-۱ \le \sin(n!) \le ۱ \to ۰ \le |\sin(n!)| \le ۱ \to ۰ \le \frac{|\sin(n!)|}{n} \le \frac{۱}{n}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} ۰ = ۰$، در نتیجه طبق قضیه فشار: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\sin(n!)|}{n} = ۰$.

مثال۴: مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[x]+[۲x]+\dots+[nx]}{n^{۲}}$ را بدست آورید.

حل

$$\left.\begin{array}{l} x-۱<[x]\le x \\ ۲x-۱<[۲x]\le ۲x \\ \vdots \\ nx-۱<[nx]\le nx \end{array}\right\} \to (x+۲x+\dots+nx)-n<[x]+[۲x]\dots+[nx]\le x+۲x+\dots+nx$$

$$\to \frac{n(n+۱)}{۲}x-n<[x]+[۲x]+\dots+[nx]\le \frac{n(n+۱)}{۲}x \xrightarrow{\div n^{۲}}$$

$$\frac{n(n+۱)x}{۲n^{۲}}-\frac{۱}{n}<\frac{[x]+[۲x]+\dots+[nx]}{n^{۲}}\le\frac{n(n+۱)x}{۲n^{۲}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+۱)x}{۲n^{۲}}-\dfrac{۱}{n}=\dfrac{x}{۲} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+۱)x}{۲n^{۲}}=\dfrac{x}{۲} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ساندویچ}} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+[۲x]+\dots+[nx]}{n^{۲}}=\frac{x}{۲}$$

سوال مشابه

۴-۱ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[x^{۲}]+\dots+[x^{n}]}{x^{n}}$

ANS

$$\begin{cases} ۰ & ۰<x<۱ \\ \text{وجود ندارد} & -۱<x<۰ \\ \dfrac{x}{x-۱} & |x|>۱ \end{cases}$$

سوالات فصل دوم

۱- مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\dots+\frac{(-1)^n}{3^n}}$ را محاسبه کنید (علم و صنعت ۸۴)

حل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\dots+\frac{(-1)^n}{3^n}}=\frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3})}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

یادآوری: در دنباله هندسی اگر $|r|<1$ باشد داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a+ar+ar^2+\dots+ar^n=\sum_{i=0}^{\infty}ar^i=\frac{a}{1-r}$$

۲- فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$

الف) ثابت کنید عدد $N>0$ وجود دارد به قسمتی که برای هر $n>N$ ، $\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}$

ب) نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ (صنعتی اصفهان، ۸۷)

حل

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \exists N>0;\ n>N\to|a_n-a|<\varepsilon\right)$

همچنین به ازای $\varepsilon=\frac{a}{2}$ عدد $N>0$ وجود دارد به قسمی که برای $n>N$ می‌توان نوشت:

$$|a_n-a|<\frac{a}{2}\to\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}$$

■

ب) از قسمت الف داریم $\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}$، پس: $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$

از طرفی هم می دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$ $\forall b>0$. درنتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{2}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}=1$

به کمک قضیه ساندویچ می توان گفت: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

۳- فرض کنیم $a_1 = 1 \,,\, (n \geq 1) \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1+a_n}$. در همگرایی دنباله $\{a_n\}$ بحث نمایید و در صورت همگرا بودن، حد آن را پیدا کنید. (علم و صنعت ۸۶ و ۸۵)

حل

الف) $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_3 = \dfrac{1}{6}, \ldots$

با توجه به جملات ابتدایی دنباله،می توان حدس زد که دنباله نزولی است،حال آن را به کمک استقرای ریاضی ثابت می کنیم ($a_{n+1} < a_n$)

$n = 1 : a_2 < a_1 \rightarrow \dfrac{1}{2} < 1$

فرض استقرا $n = k : a_{k+1} < a_k$

حکم استقرا $n = k+1 : a_{k+2} < a_{k+1} \leftrightarrow \dfrac{a_{k+1}^2}{a_{k+1}+1} < \dfrac{a_k^2}{a_k+1} \leftrightarrow a_{k+1}^2.a_k + a_{k+1}^2 < a_k^2.a_{k+1} + a_k^2$

$\leftrightarrow a_{k+1}^2.a_k - a_k^2.a_{k+1} + a_{k+1}^2 - a_k^2 < 0 \leftrightarrow a_{k+1}a_k(a_{k+1} - a_k) + (a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} + a_k) < 0$

$\leftrightarrow (a_{k+1} - a_k)\underbrace{(a_{k+1}a_k + a_{k+1} + a_k)}_{\text{همواره مثبت}} < 0 \rightarrow a_{k+1} - a_k < 0 \leftrightarrow a_{k+1} < a_k$

به رابطه بدیهی(فرض استقراء) رسیدیم ،پس روابط برگشت پذیر است، در نتیجه حکم صادق است. ثابت شد که دنباله نزولی است و همچنین بدیهی است که دنباله از پایین کراندار است چون $a_n > 0$.پس دنباله فوق همگرا است.

$a_{n+1} = L \,,\, a_n = L$

$\xrightarrow{a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}} L = \dfrac{L^2}{L+1} \rightarrow L^2 + L = L^2 \rightarrow L = 0 \rightarrow$ دنباله همگرا به صفر است

۴- ثابت کنید دنباله زیر دارای حد است و این حد را محاسبه کنید.

$a_1 = \sqrt{6} \,,\, a_2 = \sqrt{6 + a_1} \,,\ldots, a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$ (علم و صنعت ۸۸- قزوین ۸۶)

حل

$a_1 = \sqrt{6} \,,\, a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}} \,,\, \ldots$

ابتدا بررسی می کنیم که دنباله صعودی است ($a_{n+1} > a_n$)

$n = 1 : a_2 > a_1 \rightarrow \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6}$

فرض استقرا $n = k : a_{k+1} > a_k$

حکم استقرا $n = k+1 : a_{k+2} > a_{k+1}$

$$a_{k+1} > a_k \to ۶ + a_{k+1} > ۶ + a_k \to \sqrt{۶+a_{k+1}} > \sqrt{۶+a_k} \to a_{k+۲} > a_{k+1}$$

ثابت کردیم که صعودی است حال ثابت می کنیم که از بالا کراندار است $(a_n < ۳)$

$n = ۱ : \sqrt{۶} < ۳$

فرض استقرا $n = k : a_k < ۳$

حکم استقرا $n = k+۱ : a_{k+1} < ۳$

$a_k < ۳ \to ۶ + a_k < ۹ \to \sqrt{۶+a_k} < ۳ \to a_{k+1} < ۳ \to$ حکم برقرار است

چون دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس همگرا می باشد.

فرض کنیم به عددی همچون L همگرا است، بنابراین:

$$L = \sqrt{۶+L} \to L^۲ - L - ۶ = ۰ \to (L-۳)(L+۲) = ۰ \to \begin{cases} L = ۳ \\ L = -۲ \end{cases}$$

$L = -۲$ قابل قبول نیست، چون این دنباله مثبت است. پس $L = ۳$ قابل قبول است

سوال مشابه ۴-۱ ابتدا نشان دهید که دنباله زیر همگرا است و سپس حد آن را به دست آورید.

$a_۱ = ۱ \,,\, a_{n+1} = \sqrt{۱ + ۲a_n}$ (قزوین ۸۶)

دنباله صعودی است وکراندار، در نتیجه همگرا است و مقدار همگرایش $۱ + \sqrt{۲}$. Ans

---

۴-۲ ابتدا نشان دهید که دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ که بصورت زیر تعریف شده، همگرا است ، سپس حد آن را به دست آورید. $a_{n+1} = \sqrt{۲ + a_n} \,,\, a_۱ = \sqrt{۲}$ (کرج ۸۳ و ۸۴)

دنباله صعودی وکراندار می باشد در نتیجه همگرا است و مقدار همگرایش ۲. Ans

---

۵- در مورد همگرایی دنباله های الف) $\left\{\frac{n}{۲^n}\right\}$، ب) $\left\{Ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$، ج) $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ بحث کنید. (برادلی)

حل

الف) $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۸}, \ldots$ حدس می زنیم که دنباله نزولی است $(a_{n+1} \le a_n)$ و آن را ثابت می‌کنیم:

$$n = ۱ : a_۲ \le a_۱ \to \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۲}$$

فرض $n = k : a_{k+1} \le a_k$

حکم $n = k+۱ : a_{k+۲} \le a_{k+1} \leftrightarrow \frac{k+۲}{۲^{k+۲}} \le \frac{k+۱}{۲^{k+1}} \leftrightarrow \frac{k+۲}{۲} \le k+۱ \leftrightarrow k+۲ \le ۲k+۲ \leftrightarrow k \ge ۰$

بدیهی است و روابط برگشت پذیر، لذا حکم نزولی بودن برقرار است. از طرفی چون $a_n \ge ۰$ پس دنباله نزولی و از پایین کراندار می باشد در نتیجه همگرا است.

■

ب) $a_n = \left\{ Ln(\frac{n+1}{n}) \right\} \to Ln(2)\,,\ Ln(\frac{3}{2})\,,Ln(\frac{4}{3}),...$

ظاهراً نزولی است. به کمک استقرای ریاضی ثابت می کنیم: $a_{n+1} \le a_n$

$n=1:\ a_2 \le a_1 \to Ln(\frac{3}{2}) \le Ln(2)$

فرض استقرا $n=k: a_{k+1} \le a_k$

حکم استقرا $n=k+1:\ a_{k+2} \le a_{k+1} \leftrightarrow Ln(\frac{k+3}{k+2}) \le Ln(\frac{k+2}{k+1}) \leftrightarrow \frac{k+3}{k+2} \le \frac{k+2}{k+1}$

$\leftrightarrow (k+3)(k+1) \le (k+2)^2 \leftrightarrow k^2+4k+3 \le k^2+4k+4 \leftrightarrow 0 \le 1$

بدیهی است پس روابط برگشت پذیر می باشد، در نتیجه دنباله نزولی است

از طرفی:

$n+1>n \to \frac{n+1}{n}>1 \to Ln(\frac{n+1}{n})>Ln(1)=0 \to a_n>0 \to$ دنباله از پایین کراندار است

چون دنباله نزولی و از پایین کراندار است پس همگرا است.

■

ج) $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5},...$

می خواهیم ثابت کنیم که از جمله سوم به بعد، دنباله نزولی است:

$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}\ ,\ x\ge 3$ $\boxed{(u^v)'=u^v\left(v'Lnu+\frac{u'}{u}v\right)}$

$f'(x)=\sqrt[x]{x}\,(-\frac{1}{x^2}Lnx+\frac{1}{x^2}) \to f'(x)=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-Lnx) \xrightarrow{x\ge 3 \to Lnx\ge 1} f'(x)<0$

پس دنباله موردنظر نزولی است .حال ثابت می کنیم که $a_n \ge 1$:

$n=1:\ a_1 \ge 1 \to 1 \ge 1$

فرض استقرا $n=k:\ a_k \ge 1$

حکم استقرا $n=k+1: a_{k+1} \ge 1 \leftrightarrow \sqrt[k+1]{k+1} \ge 1 \leftrightarrow k+1 \ge 1 \leftrightarrow k \ge 0$

بدیهی است و روابط برگشت پذیر است درنتیجه دنباله از پایین کراندار می باشد.

از پایین کراندار بودن ونزولی بودن دنباله،همگرایی آن را نتیجه می دهد.

۶- نشان دهید که دنباله $\left\{\frac{\operatorname{Ln} n}{\sqrt{n}}\right\}$ همگرا است. (برادلی)

حل

$$f(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{\sqrt{x}} \to f'(x)=\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{x})-\operatorname{Ln}x(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x}=\frac{2-\operatorname{Ln}x}{2x\sqrt{x}}=0$$

$$\to 2-\operatorname{Ln}x=0 \to \operatorname{Ln}x=2 \to x=e^2$$

این تابع فقط یک نقطه بحرانی $x=e^2$ دارد .برای $x<e^2$ ،داریم $f'(x)>0$ یعنی تابع f صعودی است و برای $x>e^2$ ، $f'(x)<0$ است پس تابع f نزولی است. .

دریافتیم که دنباله $\left\{\frac{\operatorname{Ln} n}{\sqrt{n}}\right\}$ برای $n\geq 8$ نزولی است و از طرفی بدیهی است که $a_n>0$.

دنباله نزولی و از پایین کراندار است، درنتیجه همگرا است.

۷- به ازای هر $n\geq 1$ دنباله حقیقی $\{a_n\}$ در معادله $7a_{n+1}=a_n^3+6$ صدق می کند.اگر $a_1=\frac{1}{2}$. ثابت کنید این دنباله صعودی است و حد آن را در صورت وجود بیابید. (علم وصنعت ۹۰)

حل

صعودی بودن دنباله $a_{n+1}=\frac{a_n^3+6}{7}$ را با استقرای ریاضی ثابت می کنیم $(a_{n+1}\geq a_n)$:

$$n=1: a_2>a_1 \to \frac{7}{8}>\frac{1}{2}$$

فرض استقرا $n=k: a_{k+1}>a_k$

حکم استقرا $n=k+1: a_{k+2}>a_{k+1} \leftrightarrow \frac{a_{k+1}^3+6}{7}>\frac{a_k^3+6}{7} \leftrightarrow a_{k+1}^3+6>a_k^3+6$

$$\leftrightarrow a_{k+1}^3>a_k^3 \leftrightarrow a_{k+1}>a_k$$

بنابراین دنباله a_n صعودی است.

حال می خواهیم ثابت کنیم که دنباله $\{a_n\}$ از بالا کراندار است.($a_n\leq 1$):

$$n=1: a_1\leq 1 \to \frac{1}{2}\leq 1$$

فرض استقرا $n=k: a_k\leq 1$

حکم استقرا $n=k+1: a_{k+1}\leq 1 \leftrightarrow \frac{a_k^3+6}{7}\leq 1 \leftrightarrow a_k^3+6\leq 7 \leftrightarrow a_k^3\leq 1 \leftrightarrow a_k\leq 1$

چون دنباله صعودی و ازبالا کراندار است، بنابراین دنباله همگرا می باشد.حال فرض می کنیم که دنباله $\{a_n\}$ همگرا به L است:

$$L=\frac{L^3+6}{7}\to L^3-7L+6=0\to(L-1)(L+3)(L-2)=0\to L=1\ ,L=-3\ ,L=2$$

چون $a_n\ge a_0=\frac{1}{2}$،در نتیجه $L=-3$ قابل قبول نیست.از طرفی نیز ثابت کردیم که $a_n\le 1$، بنابراین $L=2$ نیز غیرقابل قبول است.در نتیجه دنباله به $L=1$ همگرا است.

۸- فرض کنید $a_1=3$ و به ازای $n\ge 2$ داشته باشیم $a_n=\frac{2}{1+a_{n-1}}$ نشان دهید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است. سپس مقدار حد آن را محاسبه کنید (علم و صنعت ۸۴)

حل

جملات دنباله: $3\ ,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{6}{7},\ldots$

همانطور که می بینید جملات یک در میان بزرگ و کوچک می شود. حال ما آنها را به ۲ بخش جملات فرد و زوج تقسیم می کنیم:

جملات فرد: $3\ ,\frac{4}{3},\frac{14}{13},\ldots.$ نزولی

جملات زوج: $\frac{1}{2},\frac{6}{7},\frac{26}{27},\ldots.$ صعودی

* بررسی جملات فرد(a_{2n-1}): می خواهیم به کمک استقرای ریاضی ثابت کنیم که نزولی است:

$n=1: a_1>a_3\ \to\ 1>\frac{1}{2}$

فرض استقرا $n=k: a_{2k-1}>a_{2k+1}$

حکم استقرا $n=k+1: a_{2k+1}>a_{2k+3}$

$$a_{2k-1}>a_{2k+1}\to 1+a_{2k-1}>1+a_{2k+1}\to\frac{1}{1+a_{2k-1}}<\frac{1}{1+a_{2k+1}}\to\frac{2}{1+a_{2k-1}}<\frac{2}{1+a_{2k+1}}$$

$$\to a_{2k}<a_{2k+2}\to 1+a_{2k}<1+a_{2k+2}\to\frac{2}{1+a_{2k}}>\frac{2}{1+a_{2k+2}}\to a_{2k+1}>a_{2k+3}$$

ثابت شد دنباله جملات فرد،نزولی است و واضح است که $a_{2n-1}>0$، یعنی از پایین کراندار است. پس همگرا است.فرض می کنیم جملات فرد،همگرا به L_1 باشد:

$$a_{2n-1}=\frac{2}{1+a_{2n-2}}=\frac{2}{1+\frac{2}{1+a_{2n-3}}}\to L_1=\frac{2}{1+\frac{2}{1+L_1}}\to L_1^2+L_1-2=0\to\begin{cases}L_1=1\\ L_1=-2\end{cases}$$

$L_1=-2$ قابل قبول نیست پس $L_1=1$.

* بررسی جملات زوج(a_{2n}): می خواهیم ثابت کنیم صعودی اند و از بالا کراندار.

اثبات صعودی : (استقرای ریاضی)

$$n=1: a_2 < a_4 \to \frac{1}{2} < \frac{6}{7}$$

فرض استقرا $n=k: a_{2k} < a_{2k+2}$

حکم استقرا $n=k+1: a_{2k+2} < a_{2k+4}$

$$a_{2k} < a_{2k+2} \to 1+a_{2k} < 1+a_{2k+2} \to \frac{2}{1+a_{2k}} > \frac{2}{1+a_{2k+2}} \to a_{2k+1} > a_{2k+3}$$

$$\to 1+a_{2k+1} > 1+a_{2k+3} \to \frac{2}{1+a_{2k+1}} < \frac{2}{1+a_{2k+3}} \to a_{2k+2} < a_{2k+4}$$

حال ثابت می کنیم ($a_{2n} < 1$) یعنی از بالا کراندار است : (استقرای ریاضی)

$$n=1: a_2 < 1$$

فرض استقرا $n=k: a_{2k} < 1$

حکم استقرا $n=k+1: a_{2k+2} < 1$

$$a_{2k} < 1 \to 1+a_{2k} < 2 \to \frac{1}{1+a_{2k}} > \frac{1}{2} \to \frac{2}{1+a_{2k}} > 1 \to a_{2k+1} > 1 \to 1+a_{2k+1} > 2$$

$$\to \frac{1}{1+a_{2k+1}} < \frac{1}{2} \to \frac{2}{1+a_{2k+1}} < 1 \to a_{2k+2} < 1$$

درنتیجه $\{a_{2n}\}$ نیز همگرا است،فرض می کنیم که دنباله جملات زوج همگرابه L_2 باشند،

$$a_{2k+2} = \frac{2}{1+a_{2k+1}} = \frac{2}{1+\frac{2}{1+a_{2k}}}$$

$$L_2 = \frac{2}{1+\frac{2}{1+L_2}} \to L_2^2 + L_2 - 2 = 0 \to \begin{cases} L_2 = 1 \\ L_2 = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ثابت شد که جملات فرد به عدد یک همگرا هستند و همچنین جملات زوج نیز به همین عدد همگرایند، بنابراین دنباله ما به عدد یک همگرا است.($\{a_n\} \leftarrow L_1 = L_2 = 1$ همگرا به عدد ۱)

۹- الف) فرض کنید P یک عدد حقیقی مثبت دلخواه باشد، ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P}=۱$

ب) نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$

حل

الف) سه حالت در نظر می گیریم

i) $P>۱$: در این حالت می توان نوشت: $\sqrt[n]{P}=۱+a_n$ که در آن $a_n>۰$ ، پس:

$$P=(۱+a_n)^n\geq ۱+na_n\to ۰<a_n\leq\frac{P-۱}{n}\xrightarrow{\text{ساندویچ}}\lim_{n\to\infty}a_n=۰\xrightarrow{\sqrt[n]{P}=۱+a_n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P}=۱$$

ii) $P=۱$: بدیهی است.

iii) $P<۱$: اگر $P<۱$ عدد $b>۱$ وجود دارد که $P=\frac{۱}{b}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt[n]{b}}=\frac{۱}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=\frac{۱}{۱}=۱$$

■

ب) چون $n\geq ۱$: می توان گفت: $\sqrt[n]{n}=۱+h_n$ که $h_n\geq ۰$ در نتیجه:

$$n=(۱+h_n)^n\geq\frac{n(n-۱)}{۲}h_n^۲\to ۰\leq h_n\leq\sqrt{\frac{۲}{n-۱}}\xrightarrow{\text{ساندویچ}}\lim_{n\to\infty}h_n=۰\xrightarrow{\sqrt[n]{n}=۱+h_n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$$

۱۰- دنباله ای با جمله عمومی $x_n=\frac{a^n}{n!}$ مفروض است. ثابت کنید به ازای هر عدد بزرگ $a>۰$، $\lim_{n\to\infty}x_n=۰$.

حل

$$۰<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{۱}\times\frac{a}{۲}\times\ldots\times\frac{a}{n}=\left(\frac{a}{۱}\times\frac{a}{۲}\times\ldots\times\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+۱}\times\frac{a}{k+۲}\times\ldots\times\frac{a}{n}\right)$$

k را طوری انتخاب می کنیم که از $۲a$ بزرگتر باشد در این صورت واضح است که

$$\frac{a}{k+۱}\times\frac{a}{k+۲}\times\ldots\times\frac{a}{n}<\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\ldots\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲^{n-k}}$$

و همچنین $\frac{a}{۱}\times\ldots\times\frac{a}{k}<a\times\ldots\times a=a^k$، درنتیجه:

$$۰<\frac{a^n}{n!}<a^k\times\frac{۱}{۲^{n-k}}=(۲a)^k\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\xrightarrow{\text{ساندویچ}}\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=۰$$

۱۱- الف) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$. (کرج)

ب) مطلوبست مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}$

حل

الف) در نظر می گیریم: $\{\sigma_n\} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ و فرض می کنیم $\{a_n\} \to 0$. حال ثابت می کنیم که $\{\sigma_n\} \to 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad ; n \geq N \to \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$|\sigma_n| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n} \right| < \frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_m|}{n} + \frac{|a_{m+1} + \dots + a_n|}{n}$$

$$< \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|}{n} + \frac{\overbrace{|a_{m+1}| + \dots + |a_n|}^{\text{تا } (n-m)}}{n}$$

از طرفی چون $\{a_n\}$ همگراست پس می توان گفت کراندار است یعنی: $(\exists M > 0 \quad , \forall n \to |a_n| \leq M)$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{|a_1| + |a_2| \dots + |a_m|}{n} \leq \frac{m}{n} M \qquad (*)$$

و چون $\frac{1}{n} \to 0$ می توان نوشت:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad ; n \geq N \to \frac{m}{n} M < \varepsilon' \xrightarrow{(*)} \frac{|a_1| + |a_2| \dots + |a_m|}{n} < \varepsilon' \qquad (**)$$

همچنین:

$$\frac{\overbrace{|a_{m+1}| + \dots + |a_n|}^{\text{تا } (n-m)}}{n} < \frac{(n-m)\varepsilon}{n} \xrightarrow{\frac{n-m}{n} < 1} \frac{|a_{m+1}| + \dots + |a_n|}{n} < \varepsilon \qquad (***)$$

حال به کمک نامساوی های (**) و (***) می توان نوشت:

$$\frac{|a_1| + \dots + |a_m|}{n} + \frac{|a_{m+1}| + \dots + |a_n|}{n} < \underbrace{\varepsilon' + \varepsilon}_{\varepsilon''} \to |\sigma_n| < \varepsilon'' \Rightarrow \{\sigma_n\} \to 0$$

برای $a = 0$ $\{a_n\} \to$ اثبات شد. حال فرض می کنیم که $\{a_n\} \to a \neq 0$:

$$\{\sigma_n - a\} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a = \frac{a_1 + \dots + a_n - na}{n} = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n}$$

$$\xrightarrow{\{a_n - a\} \to 0} \{\sigma_n - a\} \to 0 \Rightarrow \{\sigma_n\} \to a$$

■

ب) با توجه به سؤال ۹ صفحه۴۳ می دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$. حال اگر فرض کنیم که $a_n=\sqrt[n]{n}$ با توجه به قسمت الف داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\sqrt{۲}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$$

سوال مشابه:

۱۱-۱ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P+\sqrt{P}+\sqrt[۳]{P}+\ldots+\sqrt[n]{P}}{n}$ Ans ۱

۱۲- ثابت کنید که دنباله $x_n=۲+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\ldots+\frac{۱}{n!}$ همگراست.

حل

ابتدا ثابت می کنیم که دنباله $\{x_n\}$ صعودی است:

$$x_{n+۱}-x_n=\left(۲+\frac{۱}{۲!}+\ldots+\frac{۱}{n!}+\frac{۱}{(n+۱)!}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲!}+\ldots+\frac{۱}{n!}\right)=\frac{۱}{(n+۱)!}>۰$$

حال ثابت می کنیم $n!\ge ۲^{n-۱}$ و از آن در کرانداری دنباله استفاده می کنیم:

$$n!=۱\times۲\times۳\times\ldots\times n\ge ۱\times۲\times۲\times\ldots\times۲=۲^{n-۱}\to n!\ge ۲^{n-۱}\to\frac{۱}{n!}\le\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$x_n=۲+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\ldots+\frac{۱}{n!}\le ۲+\frac{۱}{۲^۱}+\frac{۱}{۲^۲}+\ldots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}=۲+\frac{\frac{۱}{۲}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}\le ۲+۱=۳\to x_n\le ۳$$

چون دنباله صعودی و از بالا کراندار است، پس همگراست.

۱۳- ثابت کنید که هرگاه دنباله $(b_n>۰)$ $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ یکنوا باشد، آنگاه دنباله $\left\{\dfrac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{b_۱+b_۲+\ldots+b_n}\right\}$ نیز یکنواست.

حل

فرض کنیم دنباله $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ صعودی است،بنابراین داریم:

$$\frac{a_i}{b_i}<\frac{a_{n+۱}}{b_{n+۱}}\to a_ib_{n+۱}<b_i.a_{n+۱}\to\sum_{i=۱}^{n}a_i\,b_{n+۱}<\sum_{i=۱}^{n}b_i\,a_{n+۱}\quad(*)$$

حال ثابت می کنیم که دنباله $\{c_n\}=\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n}$ نیز صعودی است.

$$c_{n+1}-c_n=\frac{a_1+\dots+a_{n+1}}{b_1+\dots+b_{n+1}}-\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n}=\frac{a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}b_i-b_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i}{(b_1+\dots+b_{n+1})(b_1+\dots+b_n)}$$

$$\xrightarrow{(*)} c_{n+1}-c_n>0\rightarrow \text{صعودی است } \{c_n\}$$

۱۴- درستی نامساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ب) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ج) $200!<100^{200}$

حل

الف) می دانیم که $\sqrt{x_1x_2}\le\frac{x_1+x_2}{2}$ و تساوی زمانی رخ می دهد که $x_1=x_2$. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1\times n}<\frac{1+n}{2}\\ \sqrt{2\times(n-1)}<\frac{2+(n-1)}{2}=\frac{n+1}{2}\\ \vdots\\ \sqrt{(n-1)\times 2}<\frac{2+(n-1)}{2}=\frac{n+1}{2}\\ \sqrt{n\times 1}<\frac{n+1}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow{\times}\sqrt{n^2\times(n-1)^2\times\dots\times 2^2\times 1^2}<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\rightarrow n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

■

ب) از استقرای ریاضی استفاده می کنیم:

$$n=1:\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

فرض استقرا $n=k:\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\dots\times\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

حکم استقرا $n=k+1:\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\leftrightarrow\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}\leftrightarrow\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2<\frac{2k+1}{2k+3}\leftrightarrow\frac{2k+1}{(2k+2)^2}<\frac{1}{2k+3}$$

$$\leftrightarrow(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2\leftrightarrow 4k^2+8k+3<4k^2+8k+4\leftrightarrow 1>0$$

■

ج) $۱\times۱۹۹<\frac{۱۰۰^۲}{۲}$

$$\text{۹۸ تا}\begin{cases}۲\times۱۹۸=(۱۰۰-۹۸)(۱۰۰+۹۸)=۱۰۰^۲-۹۸^۲<۱۰۰^۲\\ ۳\times۱۹۷=(۱۰۰-۹۷)(۱۰۰+۹۷)=۱۰۰^۲-۹۷^۲<۱۰۰^۲\\ \vdots\\ \vdots\\ ۹۸\times۱۰۲=(۱۰۰-۲)(۱۰۰+۲)=۱۰۰^۲-۲^۲<۱۰۰^۲\\ ۹۹\times۱۰۱=(۱۰۰-۱)(۱۰۰+۱)=۱۰۰^۲-۱^۲<۱۰۰^۲\end{cases}\Bigg\}\to ۲۰۰!<\frac{۱۰۰^۲}{۲}(۱۰۰^۲)^{۹۸}\times۱۰۰\times۲۰۰=۱۰۰^{۲۰۰}$$

$$\to ۲۰۰!<۱۰۰^{۲۰۰}$$

۱۵- دنباله فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می شود:

$$x_۲=x_۱=۱ \quad , \quad x_n=x_{n-۱}+x_{n-۲}$$

به ازای هر $n\geq۱$ قرار می دهیم $t_n=\frac{x_{n+۱}}{x_n}$. ثابت کنید که دنباله $\{t_n\}$ همگرا است.

حل

$$t_{n+۱}=\frac{x_{n+۲}}{x_{n+۱}}=\frac{x_{n+۱}+x_n}{x_{n+۱}}=۱+\frac{x_n}{x_{n+۱}}=۱+\frac{۱}{t_n}$$

فرض می کنیم $۱\leq t_n\leq۲$ و آن را با استقرای ریاضی ثابت می کنیم:

$$n=۱: t_۱=\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{۱}{۱}=۱\to ۱\leq t_۱\leq۲$$

فرض استقرا: $n=k: ۱\leq t_k\leq۲$

حکم استقرا: $n=k+۱: ۱\leq t_{k+۱}\leq۲$

از فرض استفاده می کنیم وحکم را اثبات می کنیم:

$$۱\leq t_k\leq۲\to\frac{۱}{۲}\leq\frac{۱}{t_k}\leq۱\to\frac{۳}{۲}\leq۱+\frac{۱}{t_k}\leq۲\xrightarrow{t_{k+۱}=۱+\frac{۱}{t_k}}\frac{۳}{۲}\leq t_{k+۱}\leq۲\to ۱\leq t_{k+۱}\leq۲$$

در نتیجه دنباله $\{t_n\}$ کراندار است.

$$\text{دنباله فیبوناتچی}\ \{x_n\}=۱,۱,۲,۳,۵,\ldots\xrightarrow{t_n=\frac{x_{n+۱}}{x_n}}\{t_n\}=۱,۲,۱/۵,۱/۶,\ldots$$

ظاهراً در دنباله $\{t_n\}$ جملات فرد، صعودی و جملات زوج نزولی هستند.

$$t_{n+۱}=۱+\frac{۱}{t_n}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{t_{n-۱}}}$$

می خواهیم ثابت کنیم که جملات فرد صعودی هستند (به کمک استقرای ریاضی):

$n=1: t_3 > t_1 \rightarrow 1/5 > 1$

فرض استقرا $n=k: t_{2k+1} > t_{2k-1}$

حکم استقرا $n=k+1: t_{2k+3} > t_{2k+1}$

از فرض استقرا می خواهیم حکم آن را ثابت کنیم:

$$t_{2k+1} > t_{2k-1} \rightarrow \frac{1}{t_{2k+1}} < \frac{1}{t_{2k-1}} \rightarrow 1+\frac{1}{t_{2k+1}} < 1+\frac{1}{t_{2k-1}} \rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{t_{2k+1}}} > \frac{1}{1+\frac{1}{t_{2k-1}}}$$

$$\rightarrow 1+\frac{1}{1+\frac{1}{t_{2k+1}}} > 1+\frac{1}{1+\frac{1}{t_{2k-1}}} \rightarrow t_{2k+3} > t_{2k+1}$$

ثابت کردیم که جملات فرد دنباله $\{t_n\}$ صعودی است و کراندار، پس همگراست.

به همین صورت ثابت می شود که جملات زوج دنباله $\{t_n\}$ نزولی است و کراندار، درنتیجه همگرا است.

حال فرض می کنیم $\{t_{2n}\} \rightarrow L_2 \ , \ \{t_{2n+1}\} \rightarrow L_1$

$$\left.\begin{array}{l} t_{2n+1} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{t_{2n-1}}} \rightarrow L_1 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{L_1}} \rightarrow L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t_{2n} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{t_{2n-2}}} \rightarrow L_2 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{L_2}} \rightarrow L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow L_1 = L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۱۶- فرض کنید $b_0 > a_0 > 0$ و دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با روابط زیر تعریف شوند:

$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n}$$

بررسی کنید که این دو دنباله همگرا هستند و حد آنها را بیابید.

حل

ابتدا ثابت می کنیم که $b_{n+1} \geq a_{n+1}$

$$b_{n+1} \geq a_{n+1} \leftrightarrow \frac{a_n+b_n}{2} \geq \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n} \leftrightarrow (a_n+b_n)^2 \geq 4a_n b_n \leftrightarrow a_n^2+b_n^2-2a_n b_n \geq 0$$

$\leftrightarrow (a_n-b_n)^2 \geq 0$ بدیهی است بنابراین روابط برگشت پذیر است.

حال در یکنوایی این دو دنباله بحث می کنیم:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \xrightarrow{a_n \le b_n} b_{n+1} - b_n \le 0 \rightarrow$$ است نزولی $\{b_n\}$

$$a_{n+1} \times b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \xrightarrow{\{b_n\}\ \text{نزولی است}\ \frac{b_n}{b_{n+1}} \ge 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$$

بنابراین دنباله $\{a_n\}$ صعودی است

چون $\{a_n\}$ صعودی است پس $a_n \ge a_0$ و همچنین ثابت کردیم که $b_n \ge a_n$ و نیز چون $\{b_n\}$ نزولی است بنابراین $b_0 \ge b_n$. در نتیجه:

$b_0 \ge b_n \ge a_n \ge a_0 \rightarrow$ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ کراندارند.

$\{a_n\}$ کراندار و صعودی می باشد پس همگراست به L_1.

$\{b_n\}$ نیز کراندار و نزولی است در نتیجه همگراست به L_2.

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \rightarrow L_2 = \frac{L_1 + L_2}{2} \rightarrow 2L_2 = L_1 + L_2 \rightarrow L_1 = L_2$$

همچنین ثابت کردیم که:

$$a_{n+1}.b_{n+1} = a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = \dots = a_0 b_0$$

$$\rightarrow L_1.L_2 = a_0 b_0 \xrightarrow{L_1 = L_2} L_1^2 = a_0 b_0 \rightarrow L_1 = \sqrt{a_0 b_0}\ ,\ \ L_2 = \sqrt{a_0 b_0}$$

فصل سوم

حد و پیوستگی

تعریف حد: اگر تابع f در یک همسایگی نقطه a معین باشد (همسایگی محذوف a)، گویند حد تابع $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر عدد L است، اگر و تنها اگر، بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به اندازه دلخواه به L نزدیک کنیم به شرطی که x به اندازه کافی به a نزدیک شود. بعبارتی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > ۰\ \exists\delta > ۰\ ;\ ۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon\right)$$

مثال ۱: اگر برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داشته باشیم $\lim_{x\to ۱} f(x) = -۲$

الف) نشان دهید که بازه بازی مانند I شامل ۱ موجود است که $x\in I;\ f(x) < ۰$

ب) نشان دهید که تابع f در یک همسایگی ۱ کراندار است. (امیرکبیر ۸۵ و ۸۴)

حل

الف) با توجه به تعریف حد داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = -۲ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > ۰\ \exists\delta > ۰\ ;\ ۰ < |x-۱| < \delta \Rightarrow |f(x)+۲| < \varepsilon$$

$$\to -\varepsilon-۲ < f(x) < +\varepsilon-۲ \xrightarrow{\varepsilon=۰/۵} -۲/۵ < f(x) < -۱/۵$$

پس δای وجود دارد که $f(x), ۰<|x-۱|<\delta$ در این بازه همواره منفی است یعنی:

$$\forall x\in I\ ,\ f(x)<۰$$

■

ب) از $-\varepsilon-۲ < f(x) < +\varepsilon-۲$ واضح است که $f(x)$ در یک همسایگی δ از عدد یک، کراندار است.

قضیه فشردگی (ساندویچ)

هرگاه دو تابع g و h در همسایگی نقطه a تعریف شده باشند و $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ باشند، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = L$

رفع ابهام در حد.

صور مبهم $\frac{\circ}{\circ}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\circ\times\infty$ ، $\infty-\infty$، $\circ^\circ$، ∞°، $\circ^\infty$، 1^∞

در دوران دبیرستان با ۴ نوع مبهم اول آشنا شدید، ابتدا یادآوری از این صور می‌آوریم و بعد به رفع ابهام صور توانی می پردازیم.

تذکر: در صور مبهم فوق، صفرها از نوع حدی هستند و نه از نوع مطلق.

روش های محاسبه حد

۱- هم ارزی

اگر f و g، دو تابع باشند بطوریکه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ آنگاه f و g را هم ارز گوییم و می‌نویسیم

$$(x\to a)\quad f\sim g$$

در این روش باید دقت کرد که u به سمت چه عددی میل می‌کند و نیز اگر با اعمال هم ارزی، همه جملات با هم ساده شدند، مجاز به استفاده از آن هم ارزی نیستیم و باید دقت آن را بیشتر کنیم.

$$1)\sin^n u\sim\tan^n u\sim(\mathrm{Arc}\tan u)^n\sim(\mathrm{Arc}\sin u)^n\sim u^n\qquad(u\to\circ)$$

$$2)\cos^m u\underset{u\to\circ}{\sim}1-\frac{m}{2}u^2$$

$$\left.\begin{array}{l}3)u-\sin u\underset{u\to\circ}{\sim}\dfrac{u^3}{6}\\[2ex]4)\tan u-u\underset{u\to\circ}{\sim}\dfrac{u^3}{3}\end{array}\right\}\to\tan u-\sin u\underset{u\to\circ}{\sim}\frac{u^3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}5)\mathrm{Arc}\sin u-u\underset{u\to\circ}{\sim}\dfrac{u^3}{6}\\[2ex]6)u-\mathrm{Arc}\tan u\underset{u\to\circ}{\sim}\dfrac{u^3}{3}\end{array}\right\}\to\mathrm{Arc}\sin u-\mathrm{Arc}\tan u\underset{u\to\circ}{\sim}\frac{u^3}{2}$$

$$7)\ln(1+u)\underset{u\to\circ}{\sim}u$$

$$8)e^u\underset{u\to\circ}{\sim}1+u$$

$$9)a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_\circ\underset{x\to\infty}{\sim}a_nx^n$$

$$10)\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)\qquad \text{فرد } n$$

$$11)\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|\qquad \text{زوج } n$$

منبع تولید هم ارزی‌ها بسط تیلور و بویژه بسط مکلورن توابع است که در فصل هفتم به آن می پردازیم.توصیه می کنم که قبل از مطالعه ادامه موضوع، صفحات ۲۷۶ الی ۲۸۴ را مطالعه نمایید تا بیشتر با بسط مکلورن آشنا شوید. همچنین در صفحه ۳۵۵ جدول سری مکلورن آورده شده است.

مثال۲: حاصل حدود زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ (علم و صنعت ۸۶)

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\operatorname{Ln}\left(\cos(2x^2-x)\right)}$ (علم وصنعت ۸۷)

حل

الف) می دانیم: $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x+\dfrac{x^3}{3}$, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x-\dfrac{x^3}{6}$، در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3})-(x-\frac{x^3}{6})}{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

■

ب) می دانیم $\cos^m u \underset{u\to 0}{\sim} 1-\dfrac{m}{2}u^2$ ، در نتیجه:

$$\operatorname{Ln}\left(\cos(2x^2-x)\right)=\operatorname{Ln}(1-\frac{1}{2}(2x^2-x)^2)$$

از طرفی نیز می دانیم که $\operatorname{Ln}(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ پس:

$$\operatorname{Ln}(1-\frac{1}{2}(2x^2-x)^2)=\frac{-1}{2}(2x^2-x)^2$$

همچنین $\sin 3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\operatorname{Ln}\left(\cos(2x^2-x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}x^2(2x-1)^2}=-6$$

۲- دستور هوپیتال

اگر f و g در یک همسایگی $x=a$ مشتق پذیر باشند و در همسایگی محذوفa، $g'(a)\neq 0$ باشد و حدهای f و g در a هر دو صفر یا هر دو بی‌نهایت شوند آنگاه چنانچه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد، حد حاصل برابر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌باشد.

تذکر ۱: از این دستور فقط و فقط در حدهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان استفاده کرد.

تذکر ۲: در حدهای با نوع ابهام $0\times\infty$ می‌توان با کمی تغییر ، آنها را به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و بعد از دستور هوپیتال استفاده کنیم.

برای مثال اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ در این صورت برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=0\times\infty$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}$$

یا

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}$$

مثال۳: مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{Ln}(x+1)}$ (تهران مرکزی ۸۴)

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)}{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x^2}}}$ (تهران مرکزی ۸۶)

ج) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty}\frac{x^{1389}}{e^x}$ (تهران مرکزی ۸۹)

د) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\arctan\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$ (علم وصنعت ۸۸)

حل

الف) **روش اول**(هوپیتال):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{Ln}(x+1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x.e^{\sin x}}{\frac{1}{x+1}}=1$$

روش دوم(هم ارزی):

می دانیم که $\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$ و $e^x\underset{x\to 0}{\sim}1+x$ ، درنتیجه:

$$e^{\sin x}-1\sim e^x-1\sim(1+x)-1=x$$

همچنین می دانیم که $\operatorname{Ln}(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$،پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{Ln}(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

■

ب) $\frac{1}{x}=t\Rightarrow t\to 0^+$ $\qquad \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{Ln\left(\dfrac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+2}\right)}{e^t-e^{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{Ln\left(\frac{1+t^2}{1+2t^2}\right)}{e^t-e^{t^2}}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{Ln(1+t^2)-Ln(1+2t^2)}{e^t-e^{t^2}}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{4t}{1+2t^2}}{e^t-2te^{t^2}}=0$$

■

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{1389}}{e^x}\overset{Hop}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1389x^{1388}}{e^x}\overset{Hop}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1389\times 1388\times x^{1387}}{e^x}$

می‌توانیم به کمک قاعده هوپیتال حل کنیم و با ۱۳۸۹ بار هوپیتال به حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1389!}{e^x}$ می‌رسیم که:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1389!}{e^x}=0$$

■

د) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\arctan\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\times\infty\to\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\frac{1}{(x+2)^2}}{1+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(x+2)^2\left(1+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\right)}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2\left(1+\left(\frac{x}{x}\right)^2\right)}=\frac{-1}{2}$$

رفع ابهام صور توانی 0^0، ∞^0، 0^∞، 1^∞

اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} u^v$ و یکی از ابهام های مذکور رخ دهد، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$A=u^v\to LnA=Ln\,u^v\to LnA=vLnu\to\lim_{x\to a}LnA=\lim_{x\to a}vLnu$$

سپس به حل $\lim\limits_{x\to a}vLnu$ می‌پردازیم. فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a}vLn\,u=L$، پس:

$$\lim_{x\to a}Ln\,A=L\to Ln\left(\lim_{x\to a}A\right)=L\to\lim_{x\to a}A=e^L$$

نکته ۱: برای رفع ابهام 1^∞ از رابطه هم ارزی زیر می توان استفاده کرد:

$$\lim_{x\to a}u^v=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to a}v(u-1)}$$

مثال۴: مطلوبست محاسبه حدود زیر:

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ (شاهرود ۸۷)

الف) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$ (علم و صنعت ۸۴)

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (تهران شمال ۸۶)

حل

الف) $A=(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}\to \ln A=\ln(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$

$\to \ln A=\cot\pi x.\ln(1+\sin\pi x)\to \lim\limits_{x\to 1}\ln A=\lim\limits_{x\to 1}\cot\pi x.\ln(1+\sin\pi x)\quad (*)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sin\pi x)}{\tan\pi x}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi\cos\pi x}{1+\sin\pi x}}{\pi(1+\tan^2\pi x)}=\frac{-\pi}{\pi}=-1$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 1}\ln A=-1\to \ln\left(\lim_{x\to 1}A\right)=-1\to\lim_{x\to 1}A=e^{-1}$$ ■

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}=1^\infty$

با توجه به نکته ۱ صفحه‌۵۵ داریم:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}\left(\frac{x+1}{x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}\left(\frac{-1}{x+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2}{x^2}\right)}=e^{-1}$$ ■

ج) $A=(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}\to LnA=Ln(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

$\to LnA=\frac{1}{x}Ln(x+e^x+e^{2x})\to\lim\limits_{x\to\infty}LnA=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}Ln(x+e^x+e^{2x})\ (*)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x+e^x+e^{2x})}{x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x+2e^{2x}}{x+e^x+e^{2x}}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}}=2$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to\infty}LnA=2\to\lim_{x\to\infty}A=e^2$$

سوال مشابه قسمت ب

۱-۴ مقدار n را طوری بیابید که رابطه روبرو برقرار باشد: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x=\sqrt{e}$ (علوم وتحقیقات ۹۰)

Ans $n=4$

پیوستگی

تعریف: گوییم تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه:

۱- مقدار تابع در نقطه مورد نظر موجود باشد. ($f(a)$ موجود باشد)

۲- تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد ($\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد یعنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و ∞ نشود)

۳- حد تابع و مقدار تابع در نقطه $x=a$ برابر باشند. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)\right)$

مثال۵ : فرض کنید $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ پیوسته است و $f(x_0)\neq 0$ ثابت کنید یک همسایگی باز شامل x_0 وجود دارد که $f(x)$ برآن مخالف صفر است. (علم و صنعت ۸۴)

حل

بنا به تعریف پیوستگی، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\to -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}} \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2} \xrightarrow{f(x_0)\neq 0}$$ $f(x)$ در یک همسایگی x_0 مخالف صفر است.

مثال۶ : مقدار A و B را طوری بیابید که $g(x)$ پیوسته باشد.

$$g(x)=\begin{cases}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}+A & x<0\\ B & x=0\\ \dfrac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1} & x>0\end{cases}$$ (تهران جنوب ۸۴)

حل

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan x(1-\cos x)}{(x^2+x+1)-1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x.\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2+x}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x(x+1)}.\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)=0\qquad (I)$$

پیوستگی

تعریف: گوییم تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه:

۱- مقدار تابع در نقطه مورد نظر موجود باشد. ($f(a)$ موجود باشد)

۲- تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد ($\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد یعنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و ∞ نشود)

۳- حد تابع و مقدار تابع در نقطه $x=a$ برابر باشند. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)\right)$

مثال۵ : فرض کنید $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ پیوسته است و $f(x_0)\neq 0$ ثابت کنید یک همسایگی باز شامل x_0 وجود دارد که $f(x)$ برآن مخالف صفر است. (علم و صنعت ۸۴)

حل

بنا به تعریف پیوستگی، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\to -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}} \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2} \xrightarrow{f(x_0)\neq 0}$$ $f(x)$ در یک همسایگی x مخالف صفر است.

مثال۶ : مقدار A و B را طوری بیابید که $g(x)$ پیوسته باشد.

$$g(x)=\begin{cases} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}+A & x<0 \\ B & x=0 \\ \dfrac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1} & x>0 \end{cases}$$

(تهران جنوب ۸۴)

حل

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan x(1-\cos x)}{(x^2+x+1)-1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right) \overset{\text{هم ارزی}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x.\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2+x}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x(x+1)}.\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)=0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} + A$$

$$y=(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} \to \ln y = \ln(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} \to \lim_{x\to 0^-} \ln y = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\ln(1+\arctan x) \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\arctan x} = 1$$

$$\xrightarrow{(*)} \lim_{x\to 0^-} \ln y = 1 \to \lim_{x\to 0^-} y = e^1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x) = e + A \quad (II)$$

چون یکی از شروط پیوستگی این است که $\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x)$ بنابراین:

$$\xrightarrow{I,II} e + A = 0 \to A = -e$$

همچنین باید $g(a) = \lim_{x\to a} g(x)$ ،در نتیجه:

$$\bullet g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \to B = 0$$

مثال ۷: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص کنید هرگاه $f(0)=1$ و اگر $x \neq 0$، $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$

(امیر کبیر ۸۸)

حل

می دانیم $x-1<[x]\leq x$ ، پس:

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \quad (*) \qquad \xrightarrow{x>0} 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1-x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \qquad (I)$$

$$(*) \xrightarrow{x<0} 1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1-x$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1 = \lim_{x\to 0^-} 1-x = 1 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \qquad (II)$$

از طرفی با توجه به صورت مسأله داریم: $f(0)=1$ (III) .

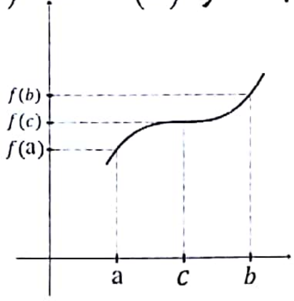
$I, II, III \Rightarrow$ $f(x)$ در صفر پیوسته است.

همچنین می‌دانیم که تابع جزء صحیح در نقاطی که داخل براکت را صحیح می کنند و نقطه Min نباشند، تابعی ناپیوسته است.پس مجموعه نقاط ناپیوستگی برابر است با:

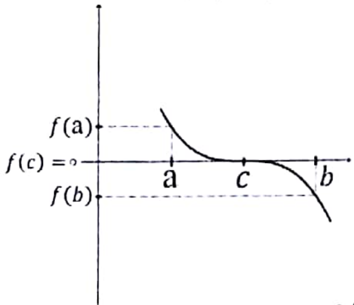
$$\frac{1}{x} = k\in\mathbb{Z} \to x = \frac{1}{k}, k\in\mathbb{Z} \to x \in \left\{\dots,-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\dots\right\}$$

قضیه مقدار میانی

اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و $\begin{cases} f(a)\neq f(b) \\ f(a)<f(b) \end{cases}$ باشد و $f(a)<k<f(b)$ در این صورت حداقل یک c وجود دارد در (a,b) که $f(c)=k$



قضیه بولتزانو: اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و $f(a).f(b)<0$ در این صورت حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد که $f(c)=0$



$$f(a).f(b)<0 \quad \to \quad \exists c\in(a,b);f(c)=0$$

مثال۸: نشان دهید که برای تابع $f(x)=x^7+3x-4$ عدد c وجود دارد بطوریکه $f(c)+c^7=0$

(امیر کبیر ۸۶)

حل

$$g(x)=f(x)+x^7 \to g(x)=2x^7+3x-4$$

$$\left.\begin{matrix} g(0)=-4 \\ g(1)=1 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} g(0)\,.\,g(1)<0 \\ \text{پیوسته است } g \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بولتزانو}}$$ حداقل یک c در $(0,1)$ وجود دارد که $g(c)=0$

یعنی: $\exists c\in(0,1)\,;f(c)+c^7=0$

مثال۹: نشان دهید معادله $f(x)=x^8+8x^6-5x^4-3=0$ حداقل دو ریشه حقیقی قرینه دارد.

(علم وصنعت ۹۰)

حل

ابتدا ثابت می کنیم که تابع $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه $(0,1)$ دارد:

$$\left.\begin{matrix} f(0)=-3 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} f(0)\,.\,f(1)<0 \\ \text{پیوسته است } f \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بولتزانو}}$$ حداقل یک c در $(0,1)$ وجود دارد که $f(c)=0$

از طرفی تابع $f(x)$، زوج است،بنابراین $f(c)=f(-c)=0$.در نتیجه این تابع حداقل دو ریشه حقیقی قرینه دارد.

سوالات فصل سوم

۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\arctan x^2-\pi}$ (علم و صنعت ۸۷)

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}$ (برادلی)

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin(\frac{3}{x}))^x$ (تهران جنوب ۸۹ و ۸۶)

حل

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\arctan x^2-\pi}=\dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+x^4)e^{\frac{1}{x^2}}}{2x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4e^{\frac{1}{x^2}}}{2x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x^2}}}{2}=\frac{-1}{2}$$

■

ب) می دانیم که $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$ و $\sin 4x\underset{x\to 0}{\sim}4x$ ، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}.4x}{x^3(1-\frac{x^2}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^3(1-\frac{x^2}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1-\frac{x^2}{2}}=2$$

■

ج) $A=(1+\sin(\frac{3}{x}))^x\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}(1+\sin(\frac{3}{x}))^x\to\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{Ln}A=\lim\limits_{x\to\infty}x\mathrm{Ln}(1+\sin\frac{3}{x})$

$$\lim_{x\to\infty}x\mathrm{Ln}(1+\sin\frac{3}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}(1+\sin\frac{3}{x})}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 3t)}{t}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{t\to 0^+}\frac{3\cos 3t}{1+\sin 3t}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Ln}A=3\to\lim_{x\to\infty}A=e^3$$

۲- مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (تهران شمال ۸۶) ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x+1}\right)^x$ (تهران مرکزی ۸۴)

ج) $\lim\limits_{x\to 4}\left(1-\dfrac{x}{4}\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$ (تهران جنوب ۸۳)

حل

الف) روش اول:

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{(n+1)x^n-(n+1)}{2(x-1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{n(n+1)\cdot x^{n-1}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-nx-x+n}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\big((x^n+x^{n-1}+\ldots+x)-n\big)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n+x^{n-1}+\ldots+x)-n}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\ldots+(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)+(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}\ldots+1)+\ldots+(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+1)+\ldots+1=n+(n-1)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

■

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{4x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$

■

ج) $$\lim_{x\to 4}\left(1-\frac{x}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{1-\frac{x}{4}}{\cot\left(\frac{\pi x}{8}\right)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\pi}{8}\left(1+\cot^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right)}=\frac{2}{\pi}$$

۳- حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\mathrm{Ln}^2x)$ (علم وصنعت ۸۶) ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ (علم و صنعت ۸۶)

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot x}$ (تهران مرکزی ۸۹) د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{Ln}(2x^2+x-2)}{e^{x-1}+x-2}$ (تهران شمال ۸۷)

هـ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{Ln}x}{(1+x)^2}-\mathrm{Ln}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ (علم وصنعت۹۰)

حل

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\mathrm{Ln}^{۳}x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(۱-\frac{\mathrm{Ln}^{۳}x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(۱-\frac{\mathrm{Ln}^{۳}x}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}\quad,\quad \frac{۱}{x}=u\Rightarrow u\to ۰^{+}$

$$\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۱-u\mathrm{Ln}^{۳}(\frac{۱}{u})}{u}\xrightarrow{\mathrm{Ln}\frac{۱}{u}=-\mathrm{Lnu}}\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۱+u\mathrm{Ln}^{۳}u}{u}$$

از طرفی:

$$\lim_{u\to۰^{+}}u\mathrm{Ln}^{۳}u=\lim_{u\to۰^{+}}\frac{\mathrm{Ln}^{۳}u}{\frac{۱}{u}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\mathrm{Hop}}\lim_{u\to۰^{+}}\frac{\frac{۳\mathrm{Ln}^{۲}u}{u}}{-\frac{۱}{u^{۲}}}=\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۳\mathrm{Ln}^{۲}u}{-\frac{۱}{u}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Hop}}\lim_{u\to۰^{+}}\frac{\frac{۶\mathrm{Lnu}}{u}}{\frac{۱}{u^{۲}}}=\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۶\mathrm{Lnu}}{\frac{۱}{u}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\mathrm{Hop}}\lim_{u\to۰^{+}}\frac{\frac{۶}{u}}{-\frac{۱}{u^{۲}}}=\lim_{u\to۰^{+}}-۶u=۰$$

پس داریم:

$$\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۱+u\mathrm{Ln}^{۳}u}{u}=\lim_{u\to۰^{+}}\frac{۱}{u}=\infty$$

■

ب) $u=x-۱\Rightarrow u\to۰$

$$\lim_{u\to۰}-\frac{۱}{u}\cos\left(\frac{\pi}{۲}(u+۱)\right)=\lim_{u\to۰}-\frac{۱}{u}\cos\left(\frac{\pi}{۲}u+\frac{\pi}{۲}\right)=\lim_{u\to۰}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}u}{u}=\frac{\pi}{۲}$$

■

ج) $A=(x+۱)^{\cot x}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}(x+۱)^{\cot x}\to\lim\limits_{x\to۰^{+}}\mathrm{Ln}A=\lim\limits_{x\to۰^{+}}\cot x.\mathrm{Ln}(x+۱)\quad(*)$

$$=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{\mathrm{Ln}(x+۱)}{\tan x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\mathrm{Hop}}\lim_{x\to۰^{+}}\frac{\frac{۱}{x+۱}}{۱+\tan^{۲}x}=۱\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to۰^{+}}\mathrm{Ln}A=۱\to\lim_{x\to۰^{+}}A=e$$

■

د) **روش اول (Hop):**

$$\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۶x^{۲}+۱}{۲x^{۳}+x-۲}}{e^{x-۱}+۱}=\frac{۷}{۲}$$

روش دوم:

$$x-۱=u\Rightarrow\lim_{u\to۰}\frac{\mathrm{Ln}(۲(u+۱)^{۳}+(u+۱)-۲)}{e^{u}+u-۱}=\lim_{u\to۰}\frac{\mathrm{Ln}(۲u^{۳}+۶u^{۲}+۷u+۱)}{e^{u}+u-۱}$$

به کمک هم ارزی ها داریم: $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, $e^u \underset{u\to 0}{\sim} 1+u$

$$\begin{cases} Ln(1+2u^3+6u^2+7u) \sim 2u^3+6u^2+7u \\ e^u \sim 1+u \end{cases} \rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{2u^3+6u^2+7u}{u+1+u-1} = \lim_{u\to 0}\frac{7u}{2u} = \frac{7}{2}$$

■

هـ) $$A = \lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{(1+x)^2} - Lnx + Ln(1+x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx-(1+x)^2 Lnx+(1+x)^2 Ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-(2x+x^2)Lnx+(1+x)^2 Ln(1+x)}{(1+x)^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2xLnx-x^2 Lnx+(1+x)^2 Ln(1+x)}{(1+x)^2} =$$

همانطور که درقسمت الف دیدید،ثابت می شود که

$$\forall n>0,\ \forall m\in\mathbb{R}\ ;\ \lim_{x\to 0^+} x^n.\ln^m x = 0$$

بنابراین $\lim_{x\to 0^+} 2x.\ln x = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} x^2.\ln x = 0$ ، درنتیجه:

$$A = \lim_{x\to 0^+}\frac{Ln1}{1} = 0$$

۴- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{x^2}$ (علم وصنعت ۹۰)

ب) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ (تبریز ۸۶- تهران جنوب ۸۴)

ج) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\cot x}$ (تهران جنوب ۸۵)

د) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sinh x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ (علم وصنعت۹۰ - تهران جنوب ۸۶)

حل

الف) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4\sin^2(\frac{x}{2})}-\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4\sin^2(\frac{x}{2})}{4x^2\sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-2\sin(\frac{x}{2})\right)\left(x+2\sin(\frac{x}{2})\right)}{4x^2\sin^2(\frac{x}{2})}$$

از طرفی می دانیم $\sin x \sim x-\frac{x^3}{6}$، بنابراین $\sin(\frac{x}{2}) \sim \frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-2(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48})\right)\left(x+2(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48})\right)}{4x^2.(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48})^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^3}{24}\right)\left(2x-\frac{x^3}{24}\right)}{4x^2.(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48})^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^4}{12}\right)}{4x^2.\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{12}$$

■

ب) $A=(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} \to \ln A=\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\sin x}{x}) \to \lim\limits_{x\to 0}\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\sin x}{x}) \quad (*)$

از طرفی می‌دانیم که $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u-\frac{u^3}{6}$ و $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u$، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1-\frac{x^2}{6})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6}}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0} LnA=-\frac{1}{6}\to\lim_{x\to 0}A=e^{\frac{-1}{6}}$$

■

ج) $A=(\frac{\sin x}{x})^{\cot x}\to \ln A=\ln(\frac{\sin x}{x})^{\cot x}\to \ln A=\cot x.\ln(\frac{\sin x}{x})$

$$\to\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\cot x.\ln(\frac{\sin x}{x}) \quad (*) \quad =\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\tan x}$$

همانطور که در قسمت ب بدست آمد:

$$\ln(\frac{\sin x}{x})\sim\ln(\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x})\sim\ln(1-\frac{x^2}{6})\sim\frac{-x^2}{6}$$

وهمچنین $\tan x\sim x$، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{6}}{x}=0\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0}LnA=0\to\lim_{x\to 0}A=e^0=1$$

■

د) روش اول:

$$A=(\frac{\sinh x}{x})^{\frac{1}{x^2}}\to\ln A=\ln(\frac{\sinh x}{x})^{\frac{1}{x^2}}\to\ln A=\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\sinh x}{x})$$

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sinh x)-\ln x}{x^2}\quad (*)\quad=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sinh x)-\ln x}{x^2}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cosh x}{\sinh x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cosh x-\sinh x}{2x^2\sinh x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x+x\sinh x-\cosh x}{4x\sinh x+2x^2\cosh x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sinh x}{4x\sinh x+2x^2\cosh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{4\sinh x+2x\cosh x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{6\cosh x+2x\sinh x}=\frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0}\ln A=\frac{1}{6}\to\lim_{x\to 0}A=e^{\frac{1}{6}}$$

روش دوم:

$$A=\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to \ln A=\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to \lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)}{x^2} \quad (*)$$

می دانیم که $\sinh u \underset{u\to 0}{\sim} u+\frac{u^3}{6}$ و $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$، پس:

$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)\sim \ln\left(\frac{x+\frac{x^3}{6}}{x}\right)\sim \ln\left(1+\frac{x^2}{6}\right)\sim \frac{x^2}{6}$$

درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{6}}{x^2}=\frac{1}{6}\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0}\ln A=\frac{1}{6}\to \lim_{x\to 0}A=e^{\frac{1}{6}}$$

۵- فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و α,β دو عدد حقیقی مثبت باشند چنانکه $\alpha+\beta=1$. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی $x,y\in[a,b]$ ، عدد $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f(c)=\alpha f(x)+\beta f(y)$. (امیرکبیر ۸۷)

حل

حالت I: اگر $f(x)=f(y)$ باشد:

$$-\alpha f(x)=-\alpha f(y)\to f(y)-\alpha f(x)=f(y)-\alpha f(y)\to f(y)-\alpha f(x)=(1-\alpha)f(y)$$

$$\xrightarrow{1-\alpha=\beta} f(y)-\alpha f(x)=\beta f(y)\to \alpha f(x)+\beta f(y)=f(y)\to c=y$$

حالت II: فرض کنیم: $x,y\in[a,b]$ و $f(x)<f(y)$، داریم:

$$\alpha f(x)<\alpha f(y)\to \alpha f(x)-\alpha f(y)<0\to \alpha f(x)-\alpha f(y)+f(y)<f(y)$$

$$\xrightarrow{1-\alpha=\beta}\alpha f(x)+\beta f(y)<f(y) \qquad (I)$$

از طرفی دیگر:

$$f(x)<f(y)\xrightarrow{1-\alpha>0}(1-\alpha)f(x)<(1-\alpha)f(y)\to f(x)-\alpha f(x)<\beta f(y)$$

$$\to f(x)<\alpha f(x)+\beta f(y) \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} f(x)<\alpha f(x)+\beta f(y)<f(y)$$

از آنجایی که $f(t)$ روی $[x\ ,\ y]$ پیوسته است بنابر قضیه مقدارمیانی وجود دارد $c\in(x\ ,\ y)$ بطوریکه $f(c)=\alpha f(x)+\beta f(y)$

حالت III: اگر $f(x)>f(y)$ استدلالی مشابه حالت II است.

۶- فرض کنیدتابع f بر بازه $[0,1]$ پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$.

الف- نشان دهید که نقطه ای مانند a دربازه $[0,\frac{1}{2}]$ وجود دارد به طوری که : $f(a)=f(a+\frac{1}{2})$

ب- اگر n عدد طبیعی بزرگتر از دو باشد، نشان دهید که نقطه ای مانند c در بازه $[0,1-\frac{1}{n}]$ وجود دارد به طوری که: $f(c)=f(c+\frac{1}{n})$

(تهران ۸۳- امیرکبیر ۸۸- آدامز)

حل

الف- تابع $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=f(\frac{1}{2})-f(0) \\ g(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2}) \xrightarrow{f(1)=f(0)} g(\frac{1}{2})=f(0)-f(\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \to g(0)=-g(\frac{1}{2})$$

اگر $g(0)=g(\frac{1}{2})=0$ باشد آنگاه $f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1) \leftarrow a=0$ یا $a=\frac{1}{2}$

اگر $g(0)\neq 0$ باشد چون g پیوسته است و $g(0).g(\frac{1}{2})<0$ است پس طبق قضیه بولتزانو داریم:

$$\exists a\in(0,\frac{1}{2})\ ;\ g(a)=0 \to f(a+\frac{1}{2})-f(a)=0 \to f(a)=f(a+\frac{1}{2})$$

■

ب- $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ را در نظر بگیرید:

$$g(0)=f(\frac{1}{n})-f(0)$$

$$g(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})$$

$$\vdots$$

$$g(\frac{n-2}{n})=f(\frac{n-1}{n})-f(\frac{n-2}{n})$$

$$g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n}) \xrightarrow{f(0)=f(1)} g(\frac{n-1}{n})=f(0)-f(\frac{n-1}{n})$$

$$\xrightarrow{+} g(0)+g(\frac{1}{n})+\ldots+g(\frac{n-2}{n})+g(\frac{n-1}{n})=0$$

اگر $g(0)=0 \leftarrow f(0+\frac{1}{n})-f(0)=0 \leftarrow c=0$ در غیر اینصورت وجود دارد $0\leq i<j\leq n-1$ بطوریکه: $g(\frac{i}{n}).g(\frac{j}{n})<0$ (توضیح:چون جمع چند جمله برابرصفر شده،نمی توانند همگی مثبت یا همگی منفی باشند،بعبارتی حداقل دو جمله وجود دارد که مختلف العلامت هستند.)

لذا طبق قضیه بولتزانو داریم:

$$\exists c\in(\frac{i}{n},\frac{j}{n});g(c)=0 \to f(c+\frac{1}{n})-f(c)=0 \to f(c+\frac{1}{n})=f(c)$$

۷- فرض کنید تـابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریـف شـده و در صـفر پیوسـته باشـد و هـم چنـین در شـرط $g(x+y)=g(x).g(y)$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ صدق کند. نشان دهید تابع g در هر نقطـه $x\in\mathbb{R}$ پیوسته است.

(امیرکبیر ۸۷- کرج ۸۳)

حل

$$x=y=\circ\to g(\circ+\circ)=g(\circ).g(\circ)\to g(\circ)=g(\circ)^{۲}\to g(\circ)(۱-g(\circ))=\circ\begin{cases}g(\circ)=\circ\\ g(\circ)=۱\end{cases}$$

- اگر $g(\circ)=\circ$، پس:

$$g(x)=g(x+\circ)=g(x).g(\circ)=\circ\to g(x)=\circ$$

تابع $g(x)$ ثابت صفر است، پس پیوسته است.

- اگر $g(\circ)=۱$ باشد. برای پیوستگی $g(x)$ کافیست ثابت کنیم که $\lim\limits_{h\to\circ}g(x_\circ+h)=g(x_\circ)$

$$\lim_{h\to\circ}g(x_\circ+h)=\lim_{h\to\circ}g(x_\circ)g(h)=\lim_{h\to\circ}g(x_\circ)\lim_{h\to\circ}g(h)$$

از طرفی $g(x)$ در صفر پیوسته است، یعنی : $\lim\limits_{h\to\circ}g(h)=g(\circ)=۱$. بنابراین:

$$\lim_{h\to\circ}g(x_\circ)\lim_{h\to\circ}g(h)=\lim_{h\to\circ}g(x_\circ)\times۱=\lim_{h\to\circ}g(x_\circ)=g(x_\circ)$$

$g(x)$ در $x_\circ$ پیوسته است. پس حکم برقرار است.

۸- فرض کنید $f:[\circ\,,۴\pi]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(\circ)=f(۴\pi)$. نشان دهید نقطه ای مانند $c\in[\pi\,,۳\pi]$ وجود دارد بقسمی که: $f(c-\pi)=f(c+\pi)$

(صنعتی اصفهان ۸۷)

حل

تابعی بصورت $g(x)=f(x-\pi)-f(x+\pi)$ تعریف می‌کنـیم. از پیوسـتگی $x-\pi$, $x+\pi$ و f می‌توان پیوسـتگی $f(x-\pi)$, $f(x+\pi)$ و در نتیجـه پیوسـتگی $g(x)$ در $[\pi\,,۳\pi]$ را نتیجـه گرفت. از طرفی:

$$\xrightarrow{x=۳\pi}g(۳\pi)=f(۲\pi)-f(۴\pi)$$

$$\xrightarrow{x=\pi}g(\pi)=f(\circ)-f(۲\pi)\xrightarrow{f(\circ)=f(۴\pi)}g(\pi)=f(۴\pi)-f(۲\pi)$$

اگـر $f(۲\pi)-f(۴\pi)=\circ$ آنگـاه $f(\circ)=f(۲\pi)=f(۴\pi)$ در نتیجـه $c=\pi\,,c=۳\pi$ دو جـواب $g(x)$ هستند.

اگر $f(۲\pi)-f(۴\pi)\neq\circ$ آنگاه $g(\pi).g(۳\pi)<\circ$ و طبق قضیه بولترانو وجـود دارد: $c\in(\pi,۳\pi)$ بطوریکه $g(c)=\circ$ یعنی:

$$f(c-\pi)-f(c+\pi)=\circ\to f(c-\pi)=f(c+\pi)$$

۹- نشان دهید که معادله $\sin x = x^{۲} - x - ۳$ در $[۰,\pi]$ حداقل یک ریشه دارد. (تهران جنوب ۸۹)

حل

$$f(x) = \sin x - x^{۲} + x + ۳$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = ۳ > ۰ \\ f(\pi) = -\pi^{۲} + \pi + ۳ < ۰ \end{array}\right\} \to f(۰).f(\pi) < ۰$$

چون f در بازه $[۰,\pi]$ پیوسته است و $f(۰).f(\pi) < ۰$ پس طبق قضیه بولتزانو $f(x)$ در این بازه حداقل یک جواب دارد یعنی:

$$\exists c \in (۰,\pi); f(c) = ۰ \to \sin c - c^{۲} + c + ۳ = ۰ \to \sin c = c^{۲} - c - ۳$$

۱۰- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})\dots(۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^{n-۱}}$ (علم و صنعت ۸۵)

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} x^{\tan\frac{\pi}{۲}x}$ (تهران جنوب ۸۳)

ج) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$ (علم وصنعت ۸۴)

د) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} (۴x^{۲})^{\sec \pi x}$ (تهران شمال ۸۶)

حل

الف) $$\lim\limits_{x\to ۱} \frac{(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})\dots(۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^{n-۱}} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}.\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{۱-x}\dots\frac{۱-\sqrt[n]{x}}{۱-x}$$

$$= \lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}.\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{(۱-\sqrt[۳]{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}.\dots\frac{۱-\sqrt[n]{x}}{(۱-\sqrt[n]{x})(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^{۲}}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}$$

$$= \lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}.\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}.\dots\frac{۱}{۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^{۲}}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-۱}}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\dots\times\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n!}$$

■

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} x^{\tan\frac{\pi}{۲}x} = ۱^{\infty}$

$$A = x^{\tan\frac{\pi}{۲}x} \to \ln A = \ln x^{\tan\frac{\pi}{۲}x} \to \ln A = \tan\frac{\pi}{۲}x.\ln x \to \lim\limits_{x\to ۱} \ln A = \lim\limits_{x\to ۱} \tan\frac{\pi}{۲}x.\ln x \quad (*)$$

$$\lim\limits_{x\to ۱} \tan\frac{\pi}{۲}x.\ln x = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{\ln x}{\cot\frac{\pi}{۲}x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{x\to ۱} \frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{\pi}{۲}(۱+\cot^{۲}(\frac{\pi}{۲}x))} = -\frac{۲}{\pi}$$

$$\xrightarrow{(*)} \lim\limits_{x\to ۱} \ln A = -\frac{۲}{\pi} \to \lim\limits_{x\to ۱} A = e^{\frac{-۲}{\pi}}$$

■

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)\times\dfrac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)(x+b)-x^{۲}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}+(a+b)x+ab-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}(۱+\frac{(a+b)}{x}+\frac{ab}{x^{۲}})}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x}{|x|+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x}{۲x}=\frac{a+b}{۲}$$

■

د) $A=(۴x^{۲})^{\sec(\pi x)}\to LnA=Ln(۴x^{۲})^{\sec(\pi x)}\to\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}Ln\,A=\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\sec(\pi x).Ln\left(۴x^{۲}\right)\quad(*)$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{Ln(۴x^{۲})}{\cos\pi x}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\frac{۸x}{۴x^{۲}}}{-\pi\sin\pi x}=\frac{-۴}{\pi}\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}LnA=\frac{-۴}{\pi}\to\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}A=e^{\frac{-۴}{\pi}}$$

۱۱- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}x(Ln(۱+\frac{x}{۲})-Ln\frac{x}{۲})$ (خواجه نصیر ۸۴)

ب) $\lim\limits_{x\to۰^+}(Ln\cot x)^{\tan x}$ (علم و صنعت ۸۸و ۹۰)

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\dfrac{Ln(\tan x)}{۱-\cot x}$ (تهران شمال ۸۶)

د) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-۲\arctan x)Lnx$ (علم و صنعت ۸۵)

هـ) $\lim\limits_{x\to۰^+}(\sin x)^{\frac{۱}{Lnx}}$ (خواجه نصیر ۸۴- برادلی)

حل

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}x.(Ln(۱+\frac{x}{۲})-Ln\frac{x}{۲})=\lim\limits_{x\to\infty}x\,Ln(\dfrac{۱+\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})=\frac{۰}{۰}\to\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Ln(\frac{۲}{x}+۱)}{\frac{۱}{x}}$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{x}=t\Rightarrow t\to۰^+}\lim_{t\to۰^+}\frac{Ln(۲t+۱)}{t}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Ln(۲t+۱)\sim۲t}\lim_{t\to۰^+}\frac{۲t}{t}=۲$$

■

ب) $A=(Ln\cot x)^{tanx}\to LnA=Ln(Ln\cot x)^{tanx}\to LnA=\tan x\,Ln(Ln\cot x)$

$$\lim_{x\to۰^+}LnA=\lim_{x\to۰^+}\tan x.Ln(Ln\cot x)\qquad(*)$$

$$\lim_{x\to۰^+}\tan x.Ln(Ln\cot x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{Ln(Ln\cot x)}{\cot x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Hop}$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{-\frac{\left(۱+\cot^{۲}x\right)}{\cot x.Ln\cot x}}{-\left(۱+\cot^{۲}x\right)}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\cot x.Ln\cot x}=۰\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to۰^+}LnA=۰\to\lim_{x\to۰^+}A=e^{۰}=۱$$

■

ج) به کمک بسط تیلور حول $x=\frac{\pi}{۴}$ داریم:

$$f(x)=f(x_۰)+\frac{(x-x_۰)}{۱!}f'(x_۰)+\frac{(x-x_۰)^۲}{۲!}f''(x_۰)+\dots$$

$$\operatorname{Ln}(\tan x)=f(\frac{\pi}{۴})+\frac{(x-\frac{\pi}{۴})}{۱!}f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)+\dots=۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\cot x=f(\frac{\pi}{۴})+\frac{(x-\frac{\pi}{۴})}{۱!}f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)+\dots=۱-۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\operatorname{Ln}(\tan x)}{۱-\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۲(x-\frac{\pi}{۴})}{۱-۱+۲(x-\frac{\pi}{۴})}=۱$$

روش دوم: هوپیتال...

■

د) $\lim_{x\to\infty}(\pi-۲\arctan x)\operatorname{Ln}x=\lim_{x\to\infty}۲(\frac{\pi}{۲}-\arctan x).\operatorname{Ln}x=\lim_{x\to\infty}۲\operatorname{arccot}x.\operatorname{Ln}x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{۲\operatorname{Ln}x}{\frac{۱}{\operatorname{arccot}x}}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۲}{x}}{\frac{۱}{(۱+x^۲)(\operatorname{arccot}x)^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲(۱+x^۲)(\operatorname{arccot}x)^۲}{x}$$

$$\overset{Hop}{=}\lim_{x\to\infty}۲(۲x)(\operatorname{arccot}x)^۲+۴\left(۱+x^۲\right)\frac{-۱}{۱+x^۲}\operatorname{arccot}x=\lim_{x\to\infty}۴x(\operatorname{arccot}x)^۲-۰$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{۴(\operatorname{arccot}x)^۲}{\frac{۱}{x}}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-۸\operatorname{arccot}x}{۱+x^۲}}{-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۸x^۲.\operatorname{arccot}x}{۱+x^۲}=\lim_{x\to\infty}۸\operatorname{arccot}x=۰$$

■

هـ) $A=(\sin x)^{\frac{۱}{\operatorname{Ln}x}}\to\operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}(\sin x)^{\frac{۱}{\operatorname{Ln}x}}\to\operatorname{Ln}A=\frac{۱}{\operatorname{Ln}x}\operatorname{Ln}(\sin x)$

$$\lim_{x\to۰^+}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to۰^+}\frac{\operatorname{Ln}\sin x}{\operatorname{Ln}x}\qquad(*)$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{\operatorname{Ln}\sin x}{\operatorname{Ln}x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to۰^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x}{\sin x}.\cos x=۱$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to۰^+}\operatorname{Ln}A=۱\to\lim_{x\to۰^+}A=e^۱$$

۱۲- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$ (علم وصنعت ۸۴- امیرکبیر ۸۸)

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos 2x\cos 3x\ldots\cos nx)}{2x}+\frac{2\sin 2x(\cos x\cos 3x\ldots\cos nx)}{2x}$$

$$+\ldots+\frac{n\sin nx(\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x)}{2x}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\right)\ldots\left(\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2^2}\ldots\sin\frac{x}{2^{n-1}}.\sin\frac{x}{2^n}}$$

می دانیم که $\sin(\frac{\alpha}{2}).\cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}\sin(\alpha)$ ، پس :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{\sin\frac{x}{2}\ldots.\sin\frac{x}{2^{n-1}}.\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}(\sin x)}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}(\sin x)}{\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

۱۳- حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\tanh^2\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ (تهران مرکزی ۸۹)

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}(\tanh x)^{\cosh x}$

حل

الف) $A=(1-\tanh^2\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\to A=(\operatorname{sech}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\to A=(\operatorname{sech}\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$

$$\to \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}(\operatorname{sech}\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}=\frac{2}{x}\operatorname{Ln}(\operatorname{sech}\sqrt{x})\to\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}.\operatorname{Ln}(\operatorname{sech}\sqrt{x})\quad(*)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{Ln}(\operatorname{sech}\sqrt{x})}{x}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}\operatorname{sech}\sqrt{x}.\tanh\sqrt{x}}{\operatorname{sech}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\tanh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=-1\to\lim_{x\to 0^+}A=e^{-1}$$

■

ب) $A=\left(\tanh x\right)^{\cosh x}\rightarrow \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}\left(\tanh x\right)^{\cosh x}\rightarrow \operatorname{Ln}A=\cosh x.\operatorname{Ln}(\tanh x)$

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to\infty}\cosh x.\operatorname{Ln}(\tanh x)=0\times\infty \quad (*)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(\tanh x)}{\operatorname{sech} x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{sech}^2 x}{\tanh x}}{-\operatorname{sech} x.\tanh x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sech} x}{\tan^2 x}=0$$

$\boxed{\text{یادآوری: } \left(\lim_{x\to\infty}\operatorname{sech} x=0\ ,\ \lim_{x\to\infty}\tanh x=1\right)}$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}A=0\rightarrow\lim_{x\to\infty}A=e^{0}=1$$

سوال مشابه قسمت الف

۱۳-۱ $\lim_{x\to0^+}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$ (علم وصنعت۸۷) Ans $\sqrt{e}$

۱۴- مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $(p>0)\ ,\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n}$ (علم و صنعت ۸۷) ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ (تهران مرکزی ۸۷- تهران شمال ۸۶)

حل

الف)

$$\text{if } \alpha=0\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+p)^n}=0$$

$$\text{if } \alpha<0\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}(1+p)^n}=0\quad(\alpha<0\rightarrow-\alpha>0)$$

$$\text{if } \alpha>0\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\frac{\alpha}{\operatorname{Ln}(1+p)}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{(1+p)^n}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\operatorname{Ln}^2(1+p)}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-2}}{(1+p)^n}=\frac{\infty}{\infty}\rightarrow\cdots\rightarrow\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{\operatorname{Ln}^k(1+p)}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-k}}{(1+p)^n}$$

k اولین عددطبیعی است که از α بزرگتر است ،یعنی $\alpha-k<0$ در نتیجه $k-\alpha>0$ ،پس داریم:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{\operatorname{Ln}^k(1+p)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-\alpha}(1+p)^n}=0$$

در نتیجه:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n}=0$$

■

ب) روش اول:

$$A=\frac{n!}{n^n}=\frac{1\times 2\times\ldots\times n}{n\times n\times\ldots\times n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\ldots\times\frac{n}{n}\to 0<\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\ldots\times\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\times 1\times\ldots\times 1\to 0<\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{n}$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ پس طبق قضیه ساندویچ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

روش دوم: استفاده از هم ارزی استرلینگ: $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}=0$$

روش سوم: استفاده از انتگرال معین که درفصل ششم به آن می پردازیم.

۱۵- مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ (تهران مرکزی ۸۸)

ب) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ (تهران جنوب ۸۵)

ج) $\lim\limits_{x\to 0}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ (تهران جنوب ۸۱)

حل

الف) $A=\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}\to \mathrm{Ln}A=\frac{1}{x}\mathrm{Ln}\left(\cos\sqrt{x}\right)$

$$\to\lim_{x\to 0^+}\mathrm{Ln}A=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ln}\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{-1}{2}$$

$$\to\lim_{x\to 0^+}\mathrm{Ln}A=\frac{-1}{2}\to\lim_{x\to 0^+}A=e^{\frac{-1}{2}}$$

■

ب) $A=(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\to\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Ln}A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{Ln}\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\cos x}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}$$

$$\to\lim_{x\to 0}\mathrm{Ln}A=-\frac{1}{2}\to\lim_{x\to 0}A=e^{\frac{-1}{2}}$$

■

ج) $A=(\cosh x)^{\frac{1}{x}}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\mathrm{Ln}\cosh x\to\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Ln}A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\cosh x}{x}$ (*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\cosh x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\cosh x}=0\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0}\mathrm{Ln}A=0\to\lim_{x\to 0}A=e^0=1$$

سوال مشابه قسمت ب

۱-۱۵ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (تهران مرکزی ۸۷)

Ans $e^{\frac{-1}{2}}$

۱۶- حدهای زیر را حل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^{\tan x}$ (تهران جنوب۸۸)

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (برادلی)

حل

الف) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x \to \lim\limits_{x\to 0^+}(\sinh x)^{\tan x}=?\quad ,\ A=(\sinh x)^{\tan x}$

$$\to \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}(\sinh x)^{\tan x}=\tan x.\operatorname{Ln}(\sinh x)\to \lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to 0^+}\tan x.\operatorname{Ln}(\sinh x)\quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x.\operatorname{Ln}(\sinh x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}(\sinh x)}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cosh x}{\sinh x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x\cosh x}{\sinh x}$$

$$\xrightarrow[\sin x\sim x]{\sinh x\sim x}\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\cosh x}{x}=\lim_{x\to 0^+}-x.\cosh x=0\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=0\to\lim_{x\to 0^+}A=e^0=1$$

■

ب) $A=\left(x\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)^{x^2}\to \operatorname{Ln}A=x^2\operatorname{Ln}\left(x\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)$

$$\to\lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to\infty}x^2\operatorname{Ln}\left(x\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)=0\times\infty\quad (*)$$

می‌دانیم $\sin^{-1}u\underset{u\to 0}{\sim}u+\frac{u^3}{6}$ و $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ پس:

$$\sin^{-1}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}\to x\sin^{-1}\frac{1}{x}\sim 1+\frac{1}{6x^2}\to \operatorname{Ln}(x\sin^{-1}\frac{1}{x})\sim\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{6x^2})\sim\frac{1}{6x^2}$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to\infty}x^2.\frac{1}{6x^2}=\frac{1}{6}\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}A=\frac{1}{6}\to\lim_{x\to\infty}A=e^{\frac{1}{6}}$$

سوال مشابه قسمت الف

۱-۱۶ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (تهران جنوب ۸۷)

Ans ۱

۱۷- حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (تهران۸۸)

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ (تهران مرکزی ۸۵)

حل

الف) می دانیم: $\cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2}$ و $e^x \sim 1+x+\dfrac{x^2}{2}$، بنابراین:

$$e^x-\cos x=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=x+x^2 \to \frac{e^x-\cos x}{x}=1+x$$

حال می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

■

ب) $A=\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to \operatorname{Ln}A=\dfrac{1}{x^2}.\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{x^2}\operatorname{Ln}(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad (*)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\operatorname{Ln}(1+x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+\operatorname{Ln}(1+x)}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-1+\frac{1}{1+x}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{3x(1+x)}=-\infty\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=-\infty\to\lim_{x\to 0^+}A=e^{-\infty}=0$$

■

ج) $A=\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\to \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\to\lim_{x\to 0}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\operatorname{Ln}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln}(a^x+b^x+c^x)-\operatorname{Ln}3}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\operatorname{Ln}a+b^x.\operatorname{Ln}b+c^x\operatorname{Ln}c}{a^x+b^x+c^x}=\frac{\operatorname{Ln}a+\operatorname{Ln}b+\operatorname{Ln}c}{3}=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}(abc)=\operatorname{Ln}(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}(abc)^{\frac{1}{3}}\to\lim_{x\to 0}A=\sqrt[3]{abc}$$

سؤال مشابه قسمت ج

۱-۱۷ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}$ (تهران مرکزی ۸۸)

Ans $\sqrt{ab}$

۱۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$ (علوم و تحقیقات۹۰- کرج۸۴- برادلی)

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\sin x}$ (تهران مرکزی ۸۳)

حل

الف) $A=x^{x^x}\to \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}x^{x^x}\to \operatorname{Ln}A=x^x\operatorname{Ln}x\to \lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\operatorname{Ln}x \qquad (*)$

می خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ را بدست آوریم:

$$B=x^x\to \operatorname{Ln}B=x\operatorname{Ln}x\to \lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}B=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

$$\to \lim_{x\to 0^+}x^x=e^0=1$$

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}A=\lim_{x\to 0^+}x^x.\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}x=1\times-\infty=-\infty\to \lim_{x\to 0^+}A=e^{-\infty}=0$$

■

ب) براساس قسمت الف می دانیم $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.پس حد مورد نظر مبهم $\frac{0}{0}$ است ومی توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.ابتدا مشتق $A=x^x$ رابدست می آوریم:

$$A=x^x\to \operatorname{Ln}A=x\operatorname{Ln}x\to \frac{A'}{A}=\operatorname{Ln}x+1\to A'=x^x(1+\operatorname{Ln}x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(1+\operatorname{Ln}x)}{\cos x}=-\infty$$

فصل چهارم

مشتق و کاربرد آن

تعریف: گوییم $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است، هرگاه حد زیر موجود ومتناهی باشد. مقدار این حد، همان مشتق $f(x)$ در $x=a$ است:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \quad \text{or} \quad \boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

به حد چپ و حد راست عبارت فوق به ترتیب مشتق چپ و مشتق راست $f(x)$ در $x=a$ گوییم.

از طرفی می‌دانیم که حد وقتی موجود است که حد چپ و راست با هم برابر باشند، بنابراین می‌تـوان گفت $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است، هرگاه $f'_+(a)=f'_-(a)$.

مثال۱: فرض کنید $f'(4)=3$ و $g'(4)=7$ و $g(4)=4$ و $g(x)\neq 4$ به ازای $x\neq 4$ بیابید:

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{g(x)-4}$ ب) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(g(x))-f(4)}{x-4}$

حل

الف) $$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{g(x)-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}{\frac{g(x)-g(4)}{x-4}}=\frac{f'(4)}{g'(4)}=\frac{3}{7}$$

ب) $$\lim_{x\to 4}\frac{f(g(x))-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(g(x))-f(g(4))}{g(x)-g(4)}\times\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

$$=f'(g(4))\times g'(4)=f'(4)\times g'(4)=3\times 7=21$$

مثال۲ : فرض کنید تابع $g(x)$ به ازای هر x حقیقی مشتق پذیر باشد ودرمعادلات زیر صدق کند:

$$g(x+y)=e^{y}.g(x)+e^{x}.g(y) \quad ,g'(0)=2$$

الف) نشان دهید که $g(2x)=2e^{x}g(x)$ و دستور مشابهی برای $g(3x)$ بیابید.

ب) قسمت (الف) را با یافتن دستوری که $g(nx)$ را به $g(x)$ ربط داده و به ازای هر عدد طبیعی n معتبر باشد،تعمیم دهید و آن را به استقراء ثابت کنید.

ج) نشان دهید $g(0)=0$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$ را بیابید.

د) ثابت c را طوری بیابید که به ازای هر x، $g'(x)=g(x)+ce^{x}$.این حکم را ثابت کرده ومقدار c را پیدا کنید.
(تهران ۸۷)

حل

الف) $y=x \to g(x+x)=e^{x}.g(x)+e^{x}.g(x) \to g(2x)=2e^{x}.g(x)$

$$g(3x)=g(x+2x)=e^{2x}.g(x)+e^{x}.g(2x)\xrightarrow{g(2x)=2e^{x}.g(x)}$$

$$g(3x)=e^{2x}.g(x)+e^{x}.(2e^{x}.g(x)) \to g(3x)=3e^{2x}.g(x)$$

■

ب) باتوجه به قسمت الف، حدس میزنیم که $g(nx)=ne^{(n-1)x}.g(x)$،حال آن را با استقرای ریاضی ثابت می کنیم:

$n=1: g(x)=g(x)$

فرض استقرا $n=k: g(kx)=ke^{(k-1)x}.g(x)$

حکم استقرا $n=k+1: g((k+1)x)=(k+1)e^{kx}.g(x)$

$$g((k+1)x)=g(kx+x)=e^{x}.g(kx)+e^{kx}.g(x)\xrightarrow{g(kx)=ke^{(k-1)x}.g(x)}$$

$$g((k+1)x)=e^{x}.(ke^{(k-1)x}.g(x))+e^{kx}.g(x)=ke^{kx}.g(x)+e^{kx}.g(x)=(k+1)e^{kx}.g(x)$$

■

ج) با توجه به قسمت الف داریم:

$$g(2x)=2e^{x}.g(x)\xrightarrow{x=0}g(0)=2g(0)\to g(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=g'(0)=2$$

■

د) $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left(e^{h}g(x)+e^{x}.g(h)\right)-g(x)}{h}$

$$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}+e^{x}.\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}\xrightarrow{e^{h}=1+h\ ,\ \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=2}g'(x)=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h}+2e$$

$$\to g'(x)=g(x)+2e^{x}\to c=2$$

تذکر مهم: شرط لازم برای مشتقپذیری f در $x=a$ این است که f در $x=a$ پیوسته باشد.

نتیجه : اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد، در این نقطه مشتق پذیر هم نیست.

مثال۳ : الف) نشان دهید که اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است.

ب) ثابت کنید که تابع زیر در $x=0$ مشتق پذیر است ولی مشتق این تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ (امیرکبیر ۸۴)

حل

الف) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=f'(a)\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0\to\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\to$$ f در $x=a$ پیوسته است

ب) $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\times$$ کراندار $=0$

بنابراین $f(x)$ در $x=0$ مشتق پذیر است.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}\to$$ حد وجود ندارد $\to$ $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست

روابط اساسی مشتق: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'.g-g'.f}{g^2}$, $(f.g)'=f'.g+g'f$, $(f\pm g)'=f'\pm g'$

مثال۴ : اگر $y=-\dfrac{e^{-x^2}}{2x^2}$ مقدار $xy'+2y$ را بدست آورید. (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$y'=\frac{\left(2xe^{-x^2}\right)\left(2x^2\right)+\left(4xe^{-x^2}\right)}{\left(2x^2\right)^2}=\frac{4xe^{-x^2}\left(x^2+1\right)}{4x^4}=\frac{e^{-x^2}}{x^3}\left(x^2+1\right)$$

$$xy'+2y=x.\frac{e^{-x^2}}{x^3}\left(x^2+1\right)+2\left(\frac{-e^{-x^2}}{2x^2}\right)=e^{-x^2}+\frac{e^{-x^2}}{x^2}-\frac{e^{-x^2}}{x^2}=e^{-x^2}$$

مشتق پارامتری (زنجیری)

اگرداشته باشیم $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ آنگاه برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ باید بصورت زیر عمل کنیم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال۵: با فرض $x=\cos t$، عبارت $(۱-x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲}-x\frac{dy}{dx}+y$ را بر حسب t بنویسید.

(علم و صنعت ۸۸)

حل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{۱}{-\sin t}.\frac{dy}{dt}=-\csc t.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\csc(t).\cot(t)\frac{dy}{dt}-\csc(t)\frac{d^۲y}{dt^۲}}{-\sin t}=\frac{-\cot(t).\frac{dy}{dt}+\frac{d^۲y}{dt^۲}}{\sin^۲ t}$$

$$(۱-x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲}-x\frac{dy}{dx}+y=\underbrace{(۱-\cos^۲ t)}_{\sin^۲ t}.\frac{-\cot(t).\frac{dy}{dt}+\frac{d^۲y}{dt^۲}}{\sin^۲ t}-\cos t.\left(\frac{-۱}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)+y=\frac{d^۲y}{dt^۲}+y$$

مشتق تابع معکوس

فرض کنید f تابعی است یک به یک و مشتق آن در $x=a$ مخالف صفر باشد و $f^{-۱}$ تابع معکوس f باشد. اگر نقطه $(a,b)\in f$ باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{\left(f^{-۱}(b)\right)'=\frac{۱}{f'(a)}}$$

مثال۶: تابع به معادله $f(x)=x^۲-۴x+۷$ با دامنه $[۲,\infty)$ مفروضست، مطلوبست حاصل $(f^{-۱})'(۷)$

حل

$$x^۲-۴x+۷=۷\rightarrow x^۲-۴x=۰\rightarrow\begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۴ \end{cases}$$

همچنین داریم $f'(x)=۲x-۴ \rightarrow f'(۴)=۴$، در نتیجه:

$$(f^{-۱}(۷))'=\frac{۱}{f'(۴)}=\frac{۱}{۴}$$

مشتق تابع ضمنی

اگر در تابعی نتوان y را صریحاً بر حسب x نوشت ($\left(y=f(x)\right)$) به آن تابع غیر صریح یا ضمنی گوییم ($f(x,y)=0$) . در این حالت بصورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- ابتدا همه جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم. ($f(x,y)=0$)

۲- استفاده از فرمول $y'_x=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$.

تذکر ۱: منفی پشت کسر فراموش نشود.

تذکر ۲: f'_x یعنی از تابع $f(x,y)=0$ نسبت به x مشتق می‌گیریم با فرض ثابت بودن y. (با y، مثل عدد ثابت رفتار می‌کنیم). و به همین ترتیب f'_y یعنی ....

مثال۷ : با فرض $x^2-xy+y^3=1$ مقدار $y'(1)$ را محاسبه کنید. **(علم و صنعت ۸۵)**

حل

$$\xrightarrow{x=1} 1-y+y^3=1\rightarrow y^3-y=0\rightarrow y\left(y^2-1\right)=0\rightarrow y=0\,,-1\,,1$$

$$f:x^2-xy+y^3-1=0 \quad , \quad y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}\rightarrow y'=\frac{y-2x}{3y^2-x}\begin{cases}\xrightarrow[y=0]{x=1} y'(1)=2\\[2mm] \xrightarrow[y=1]{x=1} y'(1)=\dfrac{-1}{2}\\[2mm] \xrightarrow[y=-1]{x=1} y'(1)=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$$

مثال۸ : مطلوبست محاسبه $\dfrac{dy}{dx}$ در صورتیکه داشته باشیم:

$$x^y-y^x+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\cos(xy)$$ **(علم و صنعت ۸۶)**

حل

$$f(x,y)=x^y-y^x+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\cos(xy)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\text{Ln}y-\dfrac{y}{x^2+y^2}+y\sin xy}{x^y\text{Ln}x-xy^{x-1}+\dfrac{x}{x^2+y^2}+x\sin xy}$$

رابطه لایب نیتز (مشتق n ام حاصلضرب دو تابع)

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دارای مشتق مرتبه n ام باشند، آنگاه:

$$(u.v)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}.v^{(n-i)}$$

که در این رابطه منظور از $u^{(0)}$، $u(x)$ است و منظور از $u^{(i)}$، مشتق iام $u(x)$ می باشد.

مثال۹ : اگر $y=e^{3x}\sin x$ مطلوبست محاسبه $y^{(4)}(0)$.

حل

$$\left(e^{3x}.\sin x\right)^{(4)}=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\left(e^{3x}\right)^{(i)}(\sin x)^{(4-i)}=\binom{4}{0}\left(e^{3x}\right)(\sin x)^{(4)}+\binom{4}{1}\left(e^{3x}\right)'(\sin x)'''$$

$$+\binom{4}{2}\left(e^{3x}\right)''.(\sin x)''+\binom{4}{3}\left(e^{3x}\right)'''(\sin x)'+\binom{4}{4}\left(e^{3x}\right)^{(4)}(\sin x)$$

$$=e^{3x}\sin x-12e^{3x}\cos x-54e^{3x}.\sin x+108e^{3x}\cos x+81e^{3x}\sin x\Big|_{x=0}=-12+108=96$$

مشتق تابع توانی

اگر داشته باشیم $y=(u(x))^{v(x)}$ و بخواهیم y'_x را محاسبه کنیم، از تابع Ln استفاده می‌کنیم و بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=u^{v}\to Lny=Lnu^{v}\to Lny=vLnu$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{y'}{y}=v'Lnu+\frac{u'}{u}.v\to y'=y\left(v'Lnu+\frac{u'}{u}.v\right)\xrightarrow{y=u^{v}}\left(u^{v}\right)'=u^{v}\left(v'Lnu+\frac{u'}{u}.v\right)$$

مثال ۱۰ : مطلوبست مشتق $y=x^{x}$.

حل

$$y=x^{x}\to Lny=Lnx^{x}\to Lny=xLnx$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{y'}{y}=Lnx+1\to y'=y(Lnx+1)\to y'=x^{x}(Lnx+1)$$

سوال مشابه ۱۰-۱ مشتق عبارت $y=x^{x^{x}}$ را بدست آورید. **(تهران ۸۸)**

Ans $y'=x^{x^{x}}\left(x^{x}(Lnx+1)\ln x+x^{x-1}\right)$

مشتق تابع کسری

برای محاسبه توابع کسری که بین عبارات آن ضرب است می‌توان از تابع Ln استفاده کرد.
ابتدا از ویژگی های Ln استفاده کرده و بعد براحتی مشتق می گیریم.

یادآوری: (۱) $Lna^{n}=nLna$ ، (۲) $Ln(a.b)=Lna+Lnb$ ، (۳) $Ln\left(\frac{a}{b}\right)=Lna-Lnb$

مثال ۱۱ : مشتق تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}.\sqrt{(x+3)^3}}$ را به کمک مشتق گیری لگاریتمی محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}.\sqrt{(x+3)^3}}\to Lny=Ln\sqrt{x-1}-Ln\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}.\sqrt{(x+3)^3}\right)$$

$$Lny=Ln(x-1)^{\frac{1}{2}}-Ln(x+2)^{\frac{2}{3}}-Ln(x+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\to Lny=\frac{1}{2}Ln(x-1)-\frac{2}{3}Ln(x+2)-\frac{3}{2}Ln(x+3)\to\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}$$

$$\to y'=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}.\sqrt{(x+3)^3}}\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\right)$$

کاربرد مشتق

۱- معادله خط مماس و خط قائم

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ همان شیب خط مماس بر نمودار f در $x=a$ است پس اگر نقطه $(a,b)\in f$ باشد، داریم:

معادله خط مماس: $y-b=f'(a)(x-a)$

معادله خط قائم: $y-b=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

مثال ۱۲ : تابع با ضابطه $f(x)=2x^3+x+1$ مفروض است، معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن را بدست آورید.

حل

$$(4,a)\in f^{-1}\to(a,4)\in f\to 2a^3+a+1=4\to a=1\to(4,1)\in f^{-1}$$

از طرفی می‌دانیم $\left(f^{-1}(b)\right)'=\dfrac{1}{f'(a)}$ و $f'(x)=6x^2+1\big|_{x=1}=7$. پس:

$$\left(f^{-1}(4)\right)'=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{7}.$$

در نتیجه معادله خط مماس را می توان نوشت:

$$y-1=\frac{1}{7}(x-4)\to y=\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$$

۲- تعیین اکسترمم نسبی

روش I (آزمون مشتق اول):

برای بدست آوردن اکسترمم های تابع f، باید ریشه های $f'(x)=0$ را بدست آورده و سپس f' را تعیین علامت کنیم، که یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

x_0 : ماکزیمم نسبی

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
	↗		↘

x_0 : مینیمم نسبی

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	↘		↗

> یادآوری: اگر $f' \geq 0$ باشد، f تابعی است صعودی و اگر $f' \leq 0$ ، f تابعی نزولی است.

روش II (آزمون مشتق دوم):

این روش، راه ساده تری برای تعیین نوع اکسترمم ، به ما نشان می‌دهد:

$$\text{if} \quad f'(x_0)=0 \rightarrow \begin{cases} f''(x_0)>0 \rightarrow \text{مینیمم نسبی است } x_0 \\ f''(x_0)<0 \rightarrow \text{ماکزیمم نسبی است } x_0 \\ f''(x_0)=0 \rightarrow \text{این آزمون سکوت می کند} \end{cases}$$

نکته ۱ : اگر $f(x)$ در x_0 به اندازه کافی مشتق متوالی پیوسته داشته باشد وعدد طبیعی $n \geq 2$ به گونه ای هستند که

$$f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \ , \ f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

در اینصورت اگر n زوج باشد، x_0 اکسترمم نسبی است (به ازای $f^{(n)}(x_0)>0$ ، مینیمم نسبی و به ازای $f^{(n)}(x_0)<0$ ، ماکزیمم نسبی داریم). اگر n فرد باشد f در x_0 اکسترمم نسبی ندارد.

برای مثال تابع $f(x)=x^6-x^7+1$ و نقطه $x_0=0$ را در نظر بگیرید.آشکارا داریم $f'(0)=\dots=f^{(5)}(0)=0$ و $f^{(6)}(0)=6!>0$.پس f در $x_0=0$ مینیمم نسبی دارد.

مثال۱۳ : نقاط اکسترمم نسبی $y=x^4-2x^2$ را بدست آورید و نوع آنها را مشخص کنید.

حل

آزمون مشتق اول:

$$y'=4x^3-4x=0 \rightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

حال y' را تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		↘		↗		↘		↗	

بنابراین نقاط $x=-1, x=1$ مینیمم نسبی هستند و $x=0$ ماکزیمم نسبی است.

آزمون مشتق دوم:

$$y' = 4x^3 - 4x \rightarrow y'' = 12x^2 - 4$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y''=-4<0 \rightarrow & x=0 \text{ ماکزیمم نسبی است} \\ x=1 \rightarrow y''=8>0 \rightarrow & x=1 \text{ مینیمم نسبی است} \\ x=-1 \rightarrow y''=8>0 \rightarrow & x=-1 \text{ مینیمم نسبی است} \end{cases}$$

۳- تعیین اکسترمم های مطلق

برای بدست آوردن اکسترمم مطلق یک تابع، ابتدا باید نقاط بحرانی تابع را بدست آوریم و بعد مقدار تابع را در آن نقاط بیابیم، بیشترین مقدار بین آنها را max مطلق و کمترین مقدار آنها را min مطلق می‌نامیم.

یادآوری: نقاط بحرانی، نقاطی هستند که مشتق در آنها موجود نیست یامشتق در آنها برابر صفر است.

مثال۱۴ : در صورتیکه تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده باشد، α,β را طوری بیابید که $\forall x \in [-8,0], \alpha \le f(x) \le \beta$.

$$f(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & x \le -4 \\ 12-(x+1)^2 & x > -4 \end{cases}$$ (امیرکبیر ۸۶)

حل

باید max و min مطلق تابع f را روی بازه $[-8, 0]$ مشخص کنیم.

$$f'_+(-4) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(12-(-3+h)^2\right)-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(6-h)}{h} = 6$$

$$f'_-(-4) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(4-(1+h)^2\right)-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(-2-h)}{h} = -2$$

چون $f'_+(-4) \ne f'_-(-4)$ ، پس تابع f در $x=-4$ مشتق پذیر نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+5) & x<-4 \\ \text{وجود ندارد} & x=-4 \\ -2(x+1) & x>-4 \end{cases} \qquad f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x+5=0 \rightarrow x=-5 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی برابر است با $\{-8,-5,-4,-1,0\}$

$$f(-8)=-5 \;,\; f(-5)=4 \;,\; f(-4)=3 \;,\; f(-1)=12 \;,\; f(0)=11 \quad \rightarrow \alpha=-5,\; \beta=12$$

۴- تعیین تقعر و تحدب و نقطه عطف

علامت تابع f'' ، جهت تقعرتابع f را نشان می‌دهد:

الف- $f''(x)>0$: تقعر رو به بالا است (محدب).

ب- $f''(x)<0$: تقعر رو به پایین است (مقعر).

ج- اگر $f''(x)=0$ و f در نقطه x_0 ، مماس داشته باشد آنگاه x_0 را نقطه عطف تابع می‌نامیم.

برای بدست آوردن نقاط عطف تابع، ما باید f'' را تعیین علامت کنیم، نقاطی که f'' تغییر علامت می‌دهد، نقاط عطف تابع f هستند. (به شرطی که f در آن نقاط دارای مماس باشد.)

مثال۱۵ : نمودار تابع $f(x)=e^{-x^2}$ را رسم کنید. **(تهران جنوب ۸۴)**

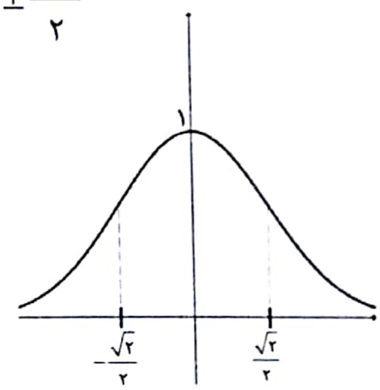
حل

$$y=e^{-x^2} \rightarrow y'=-2xe^{-x^2}$$

$$y'=0 \rightarrow -2xe^{-x^2}=0 \rightarrow x=0$$

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=0 \rightarrow e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
y'	$+$ ↗		$+$ ↗		$-$ ↘		$-$ ↘
y''	$+$ ∪		$-$ ∩		$-$ ∩		$+$ ∪



۵- بهینه سازی

مراحل انجام کار عبارتند از:

۱-تابعی که می‌خواهیم آنرا بهینه کنیم را می‌سازیم $\left(f=f(x,y)\right)$.

۲- به کمک مفروضات مسئله، تابع فوق را یک متغیره می‌کنیم.

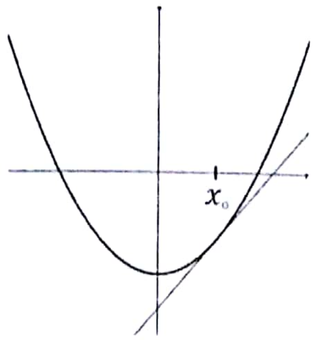
۳- مشتق گرفته و ریشه های آنرا بدست می‌آوریم (بدست آوردن اکسترمم)

۴- ریشه های قابل قبول را با توجه به دامنه متغیر، تعیین کرده و مقدار تابع را در این نقاط بدست می‌آوریم.

حال باید ببینیم که مساله از ما بیشترین آنها را می‌خواهد یا کمترین شان را.

مثال۱۶ : مساحت کمترین مثلثی را بیابید که از برخورد مماس بر منحنی $y=x^2-1$ در ربع چهارم با محورهای مختصات بدست می‌آید. **(امیرکبیر ۸۸)**

حل



$$y=f(x)=x^{۲}-۱\rightarrow f'(x)=۲x\rightarrow f'(x_{\circ})=۲x_{\circ}$$

$$y-y_{\circ}=۲x_{\circ}(x-x_{\circ})\rightarrow y-(x_{\circ}^{۲}-۱)=۲x_{\circ}x-۲x_{\circ}^{۲}$$

$$\rightarrow y=۲x_{\circ}x-x_{\circ}^{۲}-۱\begin{cases}x=\circ\rightarrow y=-x_{\circ}^{۲}-۱\\ y=\circ\rightarrow x=\dfrac{۱+x_{\circ}^{۲}}{۲x_{\circ}}\end{cases}$$

$$S=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}(x_{\circ}^{۲}+۱).\left(\frac{۱+x_{\circ}^{۲}}{۲x_{\circ}}\right)=\frac{(۱+x_{\circ}^{۲})^{۲}}{۴x_{\circ}}$$

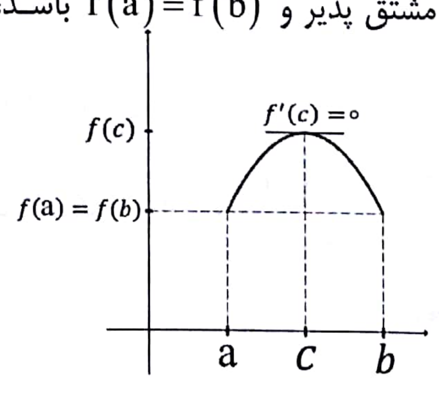
$$S'=\frac{۲(۲x_{\circ})(۱+x_{\circ}^{۲})(x_{\circ})-(۱+x_{\circ}^{۲})^{۲}}{۴x_{\circ}^{۲}}=\circ\rightarrow ۴x_{\circ}^{۲}(۱+x_{\circ}^{۲})-(۱+x_{\circ}^{۲})^{۲}=\circ$$

$$\rightarrow ۴x_{\circ}^{۲}(۱+x_{\circ}^{۲})=(۱+x_{\circ}^{۲})^{۲}\rightarrow ۴x_{\circ}^{۲}=۱+x_{\circ}^{۲}\rightarrow x_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۳}\rightarrow x_{\circ}=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\xrightarrow{x>\circ}x_{\circ}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{S=\frac{(۱+x_{\circ}^{۲})^{۲}}{۴x_{\circ}}}S=\frac{\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)^{۲}}{۴\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

سه قضیه مهم

۱- قضیه رول: اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر و $f(a)=f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد که $f'(c)=\circ$.



مثال۱۷ : الف) قضیه رول را بیان و ثابت کنید.

ب) ثابت کنید معادله $\tan^{-۱}x=۲x$ دقیقا یک ریشه دارد. (صنعتی اصفهان ۸۷)

حل

الف) اثبات:

حالت I: اگر $f(x)=d$ باشد، بنابراین برای همه اعداد بازه $f'(x)=\circ$ است.(مشتق تابع ثابت برابر صفر است)

حالت II: اگر برای بعضی از مقادیر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f(x)>0$ در اینصورت چون تابع در این بازه پیوسته است دارای ماکزیمم مطلق است و چون $f(a)=f(b)$ است لذا نقطه ماکزیمم مطلق در داخل بازه (a,b) است و بدلیل اینکه f مشتق پذیر است و مشتق در نقطه اکسترمم برابر صفر است، پس: $f'(c)=0$

حالت III: اگر برای بعضی از مقادیر $x\in(a,b)$ ، $f(x)<0$ باشد آنگاه در این بازه min مطلق داریم ، استدلالی مشابه حالت II داریم: $f'(c)=0$

■

ب) $f(x)=\tan^{-1}x-2x$

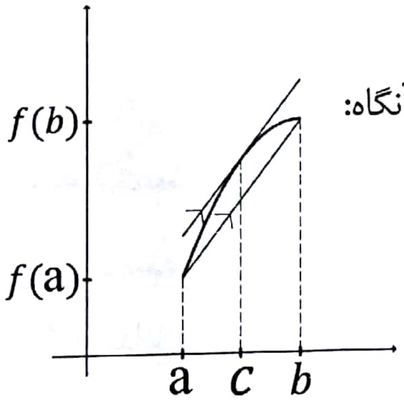
$x=0$ ،ریشه f است، حال فرض می‌کنیم جز $x_1=0$ ریشه‌ی دیگری مانند $x_2=\alpha$ داشته باشد:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(\alpha)=0 \end{cases} \to f(0)=f(\alpha)\to$$ طبق ق رول باید حداقل یک $c\in(0,\alpha)$ باشد که $f'(c)=0$

$$f'(c)=\frac{-1-2c^2}{1+c^2}\neq 0$$

در نتیجه برای قضیه رول cای پیدا نشد، یعنی با قضیه رول به تناقض خوردیم. فرض اولیه (فرض داشتن دو ریشه) غلط بوده و $f(x)$ فقط و فقط یک ریشه دارد و آن $x=0$ است.

۲- قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ)



اگر f تابعی باشد که در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\boxed{\exists c\in(a,b)\ ;f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

اثبات قضیه:

فرض کنیم $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$ ، چون f پیوسته و مشتق پذیر است، پر واضح است که $g(x)$ نیز در بازه $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر است .از طرفی:

$$g(a)=f(a)\quad ,\quad g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$$

درنتیجه $g(a)=g(b)$. بنابراین هر ۳ شرط قضیه رول برای $g(x)$ برقرار است پس:

$$\exists c\in(a,b);\ g'(c)=0\to g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\to f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

روش دیگر: در اثبات قضیه لاگرانژ $g(x)$ را میتوان بصورت $g(x)=(b-a)f(x)-x(f(b)-f(a))$ نیز تعریف کرد.

مثال۱۸ : قضیه لاگرانژ را بیان و ثابت کنید وسپس درستی نامساوی های زیر را ثابت کنید:

$$\left(0<\beta\le\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le\tan\alpha-\tan\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$ (علم و صنعت ۸۸)

حل

بیان و اثبات قضیه در صفحه قبل ارائه شد.

$$f(x)=\tan x \qquad [\beta\,,\alpha] \qquad f'(c)=1+\tan^2 c=\frac{1}{\cos^2 c}$$

$$\beta<c<\alpha\to\cos\alpha<\cos c<\cos\beta\to\cos^2\alpha<\cos^2 c<\cos^2\beta\to\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{1}{\cos^2 c}<\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (*)$$

از طرفی بنابه قضیه لاگرانژ داریم:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\to\frac{1}{\cos^2 c}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta}<\frac{1}{\cos^2\alpha}\to\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

و اگر $\alpha=\beta$،آنگاه تساوی رخ می دهد، در نتیجه :

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le\tan\alpha-\tan\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

سوال مشابه

۱۸-۱ قضیه مقدار میانگین را بیان کرده و ثابت کنید. سپس از آن استفاده کرده و درستی نامساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$(b>a>0) \qquad \frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$$ (تهران جنوب ۸۹- علم و صنعت ۸۷)

۱۸-۲ ثابت کنید: $\forall x>0 \ : \frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ (تهران جنوب ۸۵)

۳- قضیه کوشی

هرگاه f و g ۲ تابع باشند که در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشند و $g'(x)$ به ازای هر x عضو (a,b) ناصفر باشد آنگاه نقطه ای چون $c\in(a,b)$ وجود دارد که:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

اگر $g(x)=x$ در نظر بگیریم، قضیه کوشی به قضیه لاگرانژ تبدیل می‌شود.

مثال۱۹ : الف) قضیه کوشی را بیان و اثبات کنید.
ب) شرایط قضیه کوشی را بـرای دو تـابع $g(x)=\cos x , f(x)=\sin x$ در بـازه $[0,\pi]$ بررسی کرده و در صورت برقرار بودن شرایط مقدار مناسب c را تعیین کنید. (امیرکبیر ۸۶)

حل

الف) اثبات قضیه: تابع $h(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم که تمام خواص f و g را نیز داراست:

$$h(x)=f(x)-kg(x) \quad , \quad k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(a)=\dfrac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} \\ h(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(b)=\dfrac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} \end{array}\right\} \to h(a)=h(b)$$

هر سه شرط قضیه رول برای تابع $h(x)$ برقرار است، بنابراین:

$$\exists c\in(a,b)\ ;\ h'(c)=0 \to f'(c)-kg'(c)=0 \to f'(c)=kg'(c) \to \frac{f'(c)}{g'(c)}=k$$

$$\to \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

<u>روش دیگر:</u> همچنین برای اثبات قضیه کوشی می توان $h(x)$ را بصورت زیر تعریف کرد.

$$h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$$

■

ب) هر دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ بر بازه $[0,\pi]$ پیوسته و بر بازه $(0,\pi)$ مشتقپذیر می باشند و $g'(x)=-\sin x$ در بازه $(0,\pi)$ ناصفر است،در نتیجه شرایط قضیه کوشی برای این تابع برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x \\ g(x)=\cos x \to g'(x)=-\sin x \end{array}\right. \quad \text{و} \quad [0,\ \pi]$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(\pi)-f(0)}{g(\pi)-g(0)} \to \frac{\cos c}{-\sin c}=\frac{0}{-2}=0 \to \cos c=0 \to c=\frac{\pi}{2}$$

سوالات فصل چهارم

۱- فرض کنیم تابع $f(x)$ بصورت زیر داده شده است

$$y = f(x) = x\left(\cos(\operatorname{Ln} x) + \sin(\operatorname{Ln} x)\right)$$

y' و y'' را حساب کنید و نشان دهیم $x^{2}y'' - xy' + 2y = 0$. جهت تقعر نمودار تابع را معین کنید. **(تهران جنوب ۸۴)**

حل

$$y' = \left(\cos(\operatorname{Ln} x) + \sin(\operatorname{Ln} x)\right) + x\left(-\frac{1}{x}\sin(\operatorname{Ln} x) + \frac{1}{x}\cos(\operatorname{Ln} x)\right) = 2\cos(\operatorname{Ln} x)$$

$$y'' = \frac{-2}{x}\sin(\operatorname{Ln} x)$$

$$x^{2}y'' - xy' + 2y = x^{2}\left(\frac{-2}{x}\sin(\operatorname{Ln} x)\right) - x\left(2\cos(\operatorname{Ln} x)\right) + 2x\left(\cos(\operatorname{Ln} x) + \sin(\operatorname{Ln} x)\right)$$

$$= -2x\sin(\operatorname{Ln} x) - 2x\cos(\operatorname{Ln} x) + 2x\cos(\operatorname{Ln} x) + 2x\sin(\operatorname{Ln} x) = 0$$

جهت تقعر همان تعیین علامت y'' می‌باشد.

$$y'' = \frac{-2}{x}\sin \operatorname{Ln} x \qquad D_{y''} : \ x > 0$$

$$y'' = 0 \rightarrow \ \sin \operatorname{Ln} x = 0 \rightarrow \operatorname{Ln} x = k\pi \rightarrow x = e^{k\pi} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

جهت تقعر بعد از هر نقطه ی عطف تغییر می کند.

۲- تابع $y = \frac{1 - x^{4}}{1 + x^{4}}$ مفروض است. $\frac{dx}{dy}$ را بر حسب x حساب کنید و سپس با محاسبه $\frac{dy}{dx}$ نشان دهید $\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 1$ **(علم و صنعت ۸۷)**

حل

$$y = \frac{1 - x^{4}}{1 + x^{4}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-8x^{3}}{(1 + x^{4})^{2}}$$

$$yx^{4} + y = 1 - x^{4} \rightarrow x^{4} = \frac{1 - y}{1 + y} \rightarrow 4x^{3}\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y + 1)^{2}} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{2x^{3}\left(\frac{1 - x^{4}}{1 + x^{4}} + 1\right)^{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{2x^{3}\left(\frac{2}{1 + x^{4}}\right)^{2}} = \frac{-(1 + x^{4})^{2}}{8x^{3}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = \frac{-8x^{3}}{(1 + x^{4})^{2}}\cdot\frac{-(1 + x^{4})^{2}}{8x^{3}} = 1$$

۳- $\frac{d^2y}{dx^2}$ را از تابع زیر بدست آورید. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cos t - \cos t + t\sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)} = \tan t \to \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{a(t\cos t)} = \frac{1}{at\cos^3 t}$$

۴- ثابت کنید $y = \sin(n\arcsin x)$ در رابطه $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ صدق می‌کند.

(علم و صنعت ۸۵)

حل

$$y' = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arcsin x) \to y'' = \frac{nx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cos(n\arcsin x) - \frac{n^2}{(1-x^2)}\sin(n\arcsin x)$$

$$\to (1-x^2)y'' = x\underbrace{\left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arcsin x)\right)}_{y'} - n^2\underbrace{\sin(n\arcsin x)}_{y}$$

$$\to (1-x^2)y'' = xy' - n^2y \to (1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

۵- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی باشند به قسمی که برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(a+b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ و $g(0) = 1$ ثابت کنید:

الف) اگر f و g در $x = 0$ پیوسته باشند، آنگاه f همه جا پیوسته است.

ب) بعلاوه اگر $f'(0) = 1$ و $g'(0) = 0$، آنگاه f همه جا مشتق پذیر است و ضابطه f' را بیابید.

(صنعتی اصفهان ۸۷)

حل

الف) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0).g(h) + f(h).g(x_0)\right)$

$= f(x_0).g(0) + f(0).g(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$

پس $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ پس f در همه جا پیوسته است.

■

ب) $f(0) = f(0+0) = f(0).g(0) + g(0)f(0) = 2f(0)g(0) \xrightarrow{g(0)=1} f(0) = 2f(0) \to f(0) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h) + g(x).f(h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x).\frac{g(h)-1}{h} + \frac{f(h)}{h}.g(x) = f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} + g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$\to f'(x) = f(x).g'(0) + g(x)f'(0) \xrightarrow[g'(0)=0]{f'(0)=1} f'(x) = g(x)$$

۶- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد، $f'(\circ)=f(\circ)=\circ$ و $f''(\circ)=1$. نشان دهید تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(f(x))}{x} & x\neq\circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$$

بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و ضابطه g' را تعیین نمایید.

(صنعتی اصفهان ۸۷)

حل

از مشتق پذیری $f(x)$، $\frac{1}{x}$، $\sin x$ برای $x\neq\circ$ مشتق پذیری $\frac{\sin(f(x))}{x}$ برای $x\neq\circ$ نتیجه می شود پس کافیست مشتق پذیری در $x=\circ$ را بررسی کنیم.

$$g'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{g(x)-g(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(f(x))}{x^2}=\frac{\circ}{\circ}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\circ}\frac{f'(x).\cos(f(x))}{2x}=\frac{\circ}{\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}g'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{f''(x).\cos(f(x))-(f'(x))^2\sin(f(x))}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\to g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)\cos(f(x))-\sin(f(x))}{x^2} & x\neq\circ\\ \dfrac{1}{2} & x=\circ\end{cases}$$

۷- پیوستگی و مشتق پذیری تابع زیر در نقطه $x=\circ$ بحث کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1} & x\neq\circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$$

(تهران جنوب ۸۰)

حل

ابتدا پیوستگی را بررسی می‌کنیم(شرط پیوستگی $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$)

$1)\ f(\circ)=\circ$

$$2)\ \lim_{x\to\circ}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to\circ}\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(e^x-1)}=\frac{\circ}{\circ}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\circ}\frac{e^x-\cos x}{\cos x.(e^x-1)+e^x\sin x}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\circ}\frac{e^x+\sin x}{-\sin x(e^x-1)+2e^x\cos x+e^x\sin x}=\frac{1}{2}$$

چون $\lim_{x\to\circ}f(x)\neq f(\circ)$ ، بنابراین تابع f در $x=\circ$ پیوسته نیست.

شرط لازم برای مشتق پذیر بودن، پیوستگی است. به دلیل اینکه تابع در $x=\circ$ پیوسته نیست لذا در $x=\circ$ مشتق پذیر نیست.

۸- با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که مشتق یک حاصلضرب از n تابع مشتق پذیر بصورت مجموع n جمله زیر است.

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_n' \qquad (n \geq ۲)$$

حل

$$n = ۲ \rightarrow (f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

برای اثبات از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$(f_1(x).f_2(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h).f_2(x+h) - f_1(x).f_2(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f_2(x+h)\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f_1(x)\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

$$\rightarrow (f_1(x).f_2(x))' = f_2(x).f_1'(x) + f_1(x).f_2'(x)$$

فرض استقرا $n = k : (f_1 f_2 \ldots f_k)' = f_1' f_2 \ldots f_k + f_1 f_2' \ldots f_k + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_k'$

حکم استقرا $n = k+1 : (f_1 f_2 \ldots f_{k+1})' = f_1' f_2 \ldots f_{k+1} + f_1 f_2' \ldots f_{k+1} + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_{k+1}'$

اثبات حکم:

$$(f_1 f_2 \ldots f_k f_{k+1})' = (f_1 f_2 \ldots f_k)'.f_{k+1} + (f_1 f_2 \ldots f_k).f_{k+1}'$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض استقرا}} = (f_1' f_2 \ldots f_k + f_1 f_2' \ldots f_k + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_k') f_{k+1} + f_1 f_2 \ldots f_k f_{k+1}'$$

$$= f_1' f_2 \ldots f_k f_{k+1} + f_1 f_2' \ldots f_k f_{k+1} + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_k' f_{k+1} + f_1 f_2 \ldots f_k f_{k+1}'$$

۹- معادله خط مماس برمنحنی $\sin(xy - y^۲) + x - ۱ = ۰$ را در نقطه $(۱,۱)$ بیابید. (قزوین ۸۷)

حل

$$m = y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{y\cos(xy - y^۲) + ۱}{(x - ۲y)\cos(xy - y^۲)}\Bigg|_{(۱,۱)} \rightarrow m = -\frac{۲}{-۱} = ۲$$

$$y - ۱ = ۲(x - ۱) \rightarrow y = ۲x - ۱$$

۱۰- فرض کنید γ نمودار تابع $y = x^۴ - ۲x^۲$ باشد:

الف- همه خطوط افقی مماس بر γ را بیابید.

ب- یکی از خطوط پیدا شده در قسمت (الف) در ۲ نقطه متمایز بر γ مماس است، نشان دهید که هیچ خط دیگری با این خاصیت وجود ندارد.

ج- معادله خط مستقیمی را بیابید که مماس بر نمودار $y = x^۴ - ۲x^۲ + x$ در ۲ نقطه متمایز باشد. آیا بیش از یک چنین خط مستقیمی می تواند موجود باشد؟ چرا؟

حل

الف) $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \to 4x(x^2-1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = -1 \\ x = -1 \to y = -1 \end{cases}$$

خطوط $y = 0$ و $y = -1$ خطوطی افقی مماس بر منحنی هستند.

■

ب- خط $y = -1$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ بر منحنی مماس است. فرض می کنیم خط $y = mx + b$ در ۲ نقطه متمایز بر منحنی $y = x^4 - 2x^2$ مماس باشد، بنابراین معادله $mx + b = x^4 - 2x^2$ می بایست در ۲ نقطه متمایز $(\alpha, f(\alpha))$ و $(\beta, f(\beta))$ دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 - mx - b = 0 \\ 4x^3 - 4x - m = 0 \end{cases} \to m = 4x^3 - 4x \quad , \quad b = -3x^4 + 2x^2$$

چون ۲ نقطه بر روی خط $y = mx + b$ قرار دارند، می نویسیم:

$$\begin{cases} m = 4\alpha^3 - 4\alpha = 4\beta^3 - 4\beta \\ b = -3\alpha^4 + 2\alpha^2 = -3\beta^4 + 2\beta^2 \end{cases} \to \begin{cases} 4(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1) = 0 \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(-3(\alpha^2+\beta^2)+2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1 = 0 \\ -3(\alpha^2+\beta^2)+2 = 0 \end{cases} \to \alpha = \beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1 = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \to \alpha = -\beta = \pm 1$$

چون نقاط متمایز بودند پس فقط جواب آخر قابل قبول است که این همان،دو نقطه $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ می باشد، بنابراین نتیجه می گیریم هیچ خط دیگری نیست که این خاصیت را داشته باشد.

■

ج) کافیست از تغییر متغیر $y - x = v$ استفاده کنیم:

$$y = x^4 - 2x^2 + x \to y - x = x^4 - 2x^2 \to v = x^4 - 2x^2$$

بنابراین با توجه به قسمت الف و ب تنها خط با شرایط مورد نظر $v = -1$ است.

$$y - x = -1 \to y = x - 1$$

۱۱- نشان دهید $f(x)=3x^5+15x-8$ ریشه یکتایی روی $\mathbb{R}$ دارد. (تهران جنوب ۸۶)

حل

$$\left.\begin{array}{l} f(-\infty)=-\infty \\ f(+\infty)=+\infty \end{array}\right\} \to f(-\infty).f(+\infty)<0 \xrightarrow{\text{بولتزانو}}$$ حداقل یک ریشه در اعداد حقیقی داریم

فرض می‌کنیم بیش از یک ریشه داشته باشیم (مثلا ۲ ریشه مانند x_1 و x_2)

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=0 \\ f(x_2)=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} f(x_1)=f(x_2) \\ f \text{ پیوسته ومشتق} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{رول}} \exists c\in(x_1,x_2)\ ;\ f'(c)=0$$

$$f'(c)=15c^4+15\neq 0$$

با قضیه رول به تناقض رسیدیم پس فرض اولیه یعنی داشتن دوریشه نادرست بوده و f تنها دارای یک ریشه در اعداد حقیقی است

سوال مشابه ۱۱-۱ نشان دهید که معادله $x=\frac{1}{2}\cos x$ در بازه $(0,1)$ یک وتنها یک جواب دارد.
(تهران ۸۸)

۱۱-۲ نشان دهید معادله $e^{-2x}-x^3=0$ تنها یک ریشه در $(0,1)$ دارد. (تهران جنوب ۸۵)

۱۲- درستی نامساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\forall x_2>x_1\quad ,\arctan x_2-\arctan x_1<x_2-x_1$ (علوم و تحقیقات ۸۸- علم و صنعت ۸۷)

ب) $\forall x>0\quad ,(x+1)\mathrm{Ln}(x+1)>\tan^{-1}x$ (تهران ۸۳)

حل

الف) $f(x)=\mathrm{Arc}\tan x\qquad [x_1,x_2]$

$$f'(c)=\frac{1}{1+c^2}<1\qquad (*)$$

$$\text{رابطه لاگرانژ}: f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\to\frac{1}{1+c^2}=\frac{\mathrm{Arc}\tan x_2-\mathrm{Arc}\tan x_1}{x_2-x_1}\xrightarrow{(*)}$$

$$\frac{\mathrm{Arc}\tan x_2-\mathrm{Arc}\tan x_1}{x_2-x_1}<1\to \mathrm{Arc}\tan x_2-\mathrm{Arc}\tan x_1<x_2-x_1$$

■

ب) $f(x)=(x+1)\mathrm{Ln}(x+1)-\tan^{-1}(x)\qquad [0,x]$

$$f'(x)=1+\mathrm{Ln}(x+1)-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{x^2+1}+\mathrm{Ln}(x+1)$$

چون $\mathrm{Ln}(x+1)>0$ لذا $f'(x)>0$ یعنی تابع صعودی است ،بنابراین داریم:

$$x>0\to f(x)>f(0)\to(x+1)\mathrm{Ln}(x+1)-\tan^{-1}(x)>0\to(x+1)\mathrm{Ln}(x+1)>\tan^{-1}x$$

سوال مشابه قسمت ب

۱-۱۲ ثابت کنید $\circ < x < \frac{\pi}{۲}$ ، $\cosh^{-۱}\left(\frac{a}{x}\right)+\sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) > \frac{\pi}{۲}$ (تهران ۸۶)

۱۳- ثابت کنید: $\circ < a < b < \frac{\pi}{۲}$ ، $(a-b)\tan b < Ln(\frac{\cos b}{\cos a}) < (a-b)\tan a$

(علم وصنعت۹۰ - تهران مرکزی ۸۷)

حل

$$f(x) = Ln(\cos x) \qquad [a,b]$$

$$f'(x) = -\tan x$$

$$\circ < a < c < b < \frac{\pi}{۲} \rightarrow \tan a < \tan c < \tan b \rightarrow -\tan b < -\tan c < -\tan a$$

$$\rightarrow -\tan b < f'(c) < -\tan a \qquad (*)$$

مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow f'(c) = \frac{Ln\cos b - Ln\cos a}{b-a} \rightarrow f'(c) = \frac{Ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)}{b-a}$

$$\xrightarrow{(*)} -\tan b < \frac{Ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)}{b-a} < -\tan a \rightarrow (a-b)\tan b < Ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right) < (a-b)\tan a$$

سوال مشابه ۱-۱۳ اگر $x > \circ$ ، نشان دهید: $\frac{۱}{x+۱} < Ln(\frac{x+۱}{x}) < \frac{۱}{x}$ (تهران شمال ۸۷ و ۸۶)

۱۴- با استفاده از فرمول لاگرانژ درستی نامساوی $\frac{x}{۱+x} < Ln(۱+x) < x$ که $x > \circ$ را تحقیق کنید.

(تهران جنوب ۸۸)

حل

$$f(x) = Ln\, x \quad , \qquad [۱,۱+x]$$

$$f'(c) = \frac{۱}{c}$$

$$۱ < c < ۱+x \rightarrow \frac{۱}{۱+x} < \frac{۱}{c} < ۱ \rightarrow \frac{۱}{۱+x} < f'(c) < ۱ \qquad (*)$$

لاگرانژ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow f'(c) = \frac{f(۱+x)-f(۱)}{۱+x-۱} \rightarrow f'(c) = \frac{Ln(۱+x)}{x}$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۱}{۱+x} < \frac{Ln(۱+x)}{x} < ۱ \rightarrow \frac{x}{x+۱} < Ln(۱+x) < x$$

۱۵- ثابت که اگر $x \le y < ۰$ و $p > ۱$ آنگاه $py^{p-۱}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-۱}(x-y)$

(علم و صنعت ۸۴)

حل

$$f(t) = t^p \qquad [y,x]$$

$$f'(c) = pc^{p-۱} \qquad y < c < x \to y^{p-۱} < c^{p-۱} < x^{p-۱} \to py^{p-۱} < pc^{p-۱} < px^{p-۱} \qquad (*)$$

مقدار میانگین: $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \to pc^{p-۱} = \dfrac{x^p - y^p}{x-y} \xrightarrow{(*)} py^{p-۱} < \dfrac{x^p - y^p}{x-y} < px^{p-۱}$

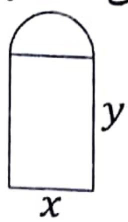
$$\to py^{p-۱}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-۱}(x-y)$$

$$\text{if} \quad x = y \to py^{p-۱}(x-y) = x^p - y^p = px^{p-۱}(x-y)$$

بنابراین ثابت شد که

$$\forall ۰ < y \le x, p > ۱ \ : \ py^{p-۱}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-۱}(x-y)$$

۱۶- در نظر داریم پنجره‌ای به شکل زیر از جنس پروفیل بسازیم. در قسمت مستطیل شکل آن از شیشه‌ای استفاده می‌کنیم که در مقایسه با شیشه بکار رفته در قسمت نیم دایره، به اندازه ۱/۸ واحد نور عبور می‌دهد. اگر تنها $\ell_۰ = ۴ + ۳\pi$ متر پروفیل در ساخت پنجره استفاده شود، ابعاد آن را چطور انتخاب کنیم تا مقدار نور عبور داده شده از آن حداکثر باشد. (علم و صنعت ۸۴)



حل

برای اینکه حداکثر نور عبور کند باید $S = S_{\text{نیم دایره}} + ۱/۸ S_{\text{مستطیل}}$ ماکزیمم شود.

$$\ell_۰ = ۴ + ۳\pi \to ۲x + ۲y + \frac{\pi x}{۲} = ۴ + ۳\pi \to y = \frac{۱}{۲}\left(۴ + ۳\pi - ۲x - \frac{\pi x}{۲}\right)$$

$$S = \frac{\pi x^۲}{۸} + ۱/۸xy = \frac{\pi x^۲}{۸} + ۱/۸x\left(\frac{۱}{۲}\left(۴ + ۳\pi - ۲x - \frac{\pi x}{۲}\right)\right)$$

$$S = \frac{\pi x^۲}{۸} + ۳/۶x + ۲/۷\pi x - ۱/۸x^۲ - ۰/۴۵\pi x^۲$$

$$S'_x = ۰ \to \frac{\pi x}{۴} + ۳/۶ + ۲/۷\pi - ۳/۶x - ۰/۹\pi x = ۰$$

$$\to x = \frac{۳/۶ + ۲/۷\pi}{۰/۶۵\pi + ۳/۶} \to y = ۳/۶ + ۳/۱\pi + ۰/۳\pi^۲$$

۱۷- فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع دلخواهی باشد بطوریکه $f'(x)\neq 0$ ثابت کنید که f روی بازه ی $[a\ ,\ b]$ اکیدا یکنواست.
(امیر کبیر ۸۴)

حل

برهان خلف: فرض می‌کنیم f در $[a,b]$ اکیداً یکنوا نباشد. یعنی f' در این بازه در قسمتی مثبت و در قسمتی منفی است:

$$\begin{matrix}\exists c_1\in(a,b)\ ;f'(c_1)>0\\ \exists c_2\in(a,b)\ ;f'(c_2)<0\end{matrix}\xrightarrow{\text{طبق قضیه بولتزانو}}\exists c\in(a,b)\ ;\ f'(c)=0$$

که این با فرض $f'(x)\neq 0$ تناقض است. پس فرض اولیه (یعنی اکیداً یکنوا نبودن) غلط بوده درنتیجه f در $[a,b]$ اکیداً یکنواست.

۱۸- نشان دهید معادله $2xe^x-3=0$ در فاصله $(0,1)$ فقط یک ریشه دارد.
(تهران شمال ۸۷)

حل

$$\left.\begin{matrix}f(x)=2xe^x-3\\ f(0)=-3\\ f(1)=2e-3>0\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}f(0).f(1)<0\\ \text{پیوسته } f\end{matrix}\right\}\to$$

طبق قضیه بولتزانو حداقل یک $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f(c)=0$

حال فرض می‌کنیم که بیش از یک ریشه داشته باشیم مثلاً ۲ ریشه (x_2,x_1)،در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix}f(x_1)=0\\ f(x_2)=0\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}f(x_1)=f(x_2)\\ \text{پیوسته و مشتق پذیر } f\end{matrix}\right\}\to$$

طبق قضیه رول حداقل یک c در بازه $(0,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$

$$f'(x)=2e^x+2xe^x=0\to 2e^x(1+x)=0\xrightarrow{e^x\neq 0}x=-1$$

ولی $-1\notin(0,1)$، لذا هیچ c ای برای قضیه رول پیدا نشده،در نتیجه با این قضیه به تناقض خوردیم و فرض اولیه ما یعنی داشتن بیش از یک ریشه غلط بوده پس در $(0,1)$ فقط و فقط یک ریشه دارد.

سوال مشابه

۱-۱۸ نشان دهید معادله $xe^x=2$ در فاصله $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.
(تهران جنوب ۸۳ و ۸۴)

۱۹- ثابت کنید هرگاه $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0$ آنگاه به ازای یک نقطه مانند $x\in(0,1)$ داریم، $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$.

حل

فرض می‌کنیم: $f(t)=\frac{a_0}{1}t+\frac{a_1}{2}t^2+\dots+\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}$

از طرفی $f(1)=0$ (با توجه به صورت مسأله) و $f(0)=0$. همچنین $f(t)$ در $[0,1]$ پیوسته و در $(0,1)$ مشتق پذیر است و $f(1)=f(0)=0$ پس طبق قضیه رول داریم:

$$\exists x\in(0,1)\quad ;\quad f'(x)=0\rightarrow a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$$

۲۰- فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد، همچنین برای $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=1$ به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید: $f(x)=x-a+f(a)$ (تهران جنوب ۸۴)

حل

تابعی به صورت $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(x)-x\rightarrow g'(x)=f'(x)-1\xrightarrow{f'(x)=1}g'(x)=0$$

$[a,x]$ مقدار میانگین : $g'(c)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\xrightarrow{g'(c)=0}g(x)-g(a)=0$

$$\rightarrow g(x)=g(a)\rightarrow f(x)-x=f(a)-a\rightarrow f(x)=x-a+f(a)$$

۲۱- فرض کنید $a>0$ و تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و بروی (a,b) مشتق پذیر باشد و $a^2f(a)=b^2f(b)$ باشد نشان دهید: $\exists c:a<c<b\ ;f'(c)=\frac{-2f(c)}{c}$ (تهران جنوب ۸۶)

حل

$g(x)=x^2f(x)\qquad [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}g(a)=a^2f(a)\\ g(b)=b^2f(b)\end{array}\right\}\xrightarrow{a^2f(a)=b^2f(b)}g(a)=g(b)\\ \text{پیوسته و مشتق پذیر } g\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{رول}}\exists c\in(a,b)\ ;g'(c)=0$$

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$g'(c)=2cf(c)+c^2f'(c)=0\rightarrow f'(c)=-\frac{2f(c)}{c}$$

۲۲- فرض کنید تابع f روی $[0,1]$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق پذیر باشد، ثابت کنید عددی مانند c یافت می شود که $c^2f'(c)+2cf(c)=f(1)$ و $0<c<1$ (امیرکبیر ۸۸)

حل

تابع $g(x)=x^2f(x)-xf(1)$ را بر $[0,1]$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}g(0)=0\\g(1)=0\end{array}\right\}\to g(0)=g(1)\\ g\ \text{پیوسته و مشتق پذیر}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{رول}}\exists c\in(0,1)\ ;\ g'(c)=0$$

$$\to c^2f'(c)+2cf(c)-f(1)=0\to c^2f'(c)+2cf(c)=f(1)$$

۲۳- فرض کنید تابع $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد و $\forall x\in(a,b),\ f'(x)\neq 1$ نشان دهید که f در بازه $[a,b]$ دارای یک وتنها یک نقطه ثابت است. (تهران ۸۶)

حل

(تعریف: c را نقطه ثابت تابع f گویند هرگاه $f(c)=c$.)

ابتدا تابعی بصورت $g(x)=f(x)-x$ تعریف می کنیم.چون $f(x)$ پیوسته ومشتق پذیر است بنابراین $g(x)$ نیز این دو ویژگی را داراست.

ابتدا می خواهیم ثابت کنیم که $g(x)$ با شرایط مذکور حداقل یک ریشه را در بازه $[a,b]$ دارد:

اگر $f(a)=a$ یا $f(b)=b$ باشد که حکم تمام است، فرض می کنیم که $f(a)\neq a$ و $f(b)\neq b$، در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}g(a)=f(a)-a\xrightarrow{f(a)>a}g(a)>0\\ g(b)=f(b)-b\xrightarrow{f(b)<b}g(b)<0\end{array}\right\}\to g(a).g(b)<0$$

از طرفی می دانیم که $g(x)$ پیوسته است،لذا بنابه قضیه بولتزانو می توان گفت:

$$\exists c_1\in(a,b)\ ;\ g(c_1)=0\to f(c_1)=c_1$$

تا اینجا ثابت کردیم که $f(x)$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

فرض می کنیم که $g(x)$ دو ریشه داشته باشد (مانند x_1 و x_2)، درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}g(x_1)=0\\g(x_2)=0\end{array}\right\}\to g(x_1)=g(x_2)\\ g\ \text{پیوسته و مشتق پذیر}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{رول}}\exists c\in(x_1,x_2)\ ;\ g'(c)=0\to f'(c)-1=0\to f'(c)=1$$

ولی با فرض مسأله $(\forall x\in(a,b)\ ,\ f'(x)\neq 1)$ به تناقض خوردیم، بنابراین فرض ما که داشتن دو ریشه برای $g(x)$ بود، غلط است. در نتیجه $g(x)$ دقیقا یک ریشه دارد و به عبارتی $f(x)=x$ با شرایط مسأله فقط و فقط یک ریشه دارد.

۲۴- ابتدا برای $x>0$ و $0\le p\le 1$ ثابت کنید $(1+x)^p \le 1+x^p$. سپس به کمک آن برای $a>0$ و $b>0$ ثابت کنید $(a+b)^p \le a^p+b^p$ (تهران جنوب ۸۸- علم وصنعت ۸۳)

حل

$$f(x)=(1+x)^p-1-x^p \qquad [0,x]$$

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-px^{p-1}=p\left((1+x)^{p-1}-x^{p-1}\right)\xrightarrow[x>0]{0\le p\le 1} f'(x)\le 0 \ (*)$$

(صفر زمانی رخ می دهد که $p=1$ یا $p=0$ باشد)

طبق قضیه لاگرانژ داریم:

$$\exists c\in(0,x) \quad ; \quad f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^p-1-x^p-0}{x-0}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{(1+x)^p-1-x^p}{x}\le 0\xrightarrow{x>0}(1+x)^p-1-x^p\le 0\to(1+x)^p\le 1+x^p$$

$$\xrightarrow{x=\frac{b}{a}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^p\le 1+\left(\frac{b}{a}\right)^p\to\frac{(a+b)^p}{a^p}<1+\frac{b^p}{a^p}\to(a+b)^p\le a^p+b^p$$

سوال مشابه ۲۴-۱ ثابت کنید اگر $x\ge 0$ آنگاه $\text{Ln}(1+x^2)\le x$. (تهران مرکزی ۸۸)

۲۴-۲ با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای $x\ge 0$ و $\alpha\ge 1$ ثابت کنید:

$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$ (تهران جنوب ۸۵ و ۸۷)

۲۴-۳ به کمک قضیه مقدارمیانگین ثابت کنید: $x\ge 0$, $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$ (کرج ۸۸)

۲۵- تابع مشتق پذیر $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ مفروض است فرض کنید $f(1)=0$ و برای هر $x\in(0,\infty)$ داشته باشیم $f'(x)=\frac{1}{x}$ نشان دهید:

الف) برای هر $x>0$, $r\in\mathbb{Q}$, $f(x^r)=rf(x)$

ب) برای هر $x>0$, $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le x-1$

حل

الف) یک تابع به صورت $g(x)=f(x^r)-rf(x)$ تعریف می‌کنیم:

$$g'(x)=rx^{r-1}f'(x^r)-rf'(x)\to g'(x)=rx^{r-1}\frac{1}{x^r}-r.\frac{1}{x}=\frac{r}{x}-\frac{r}{x}=0$$

از $g'(x)=0$ نتیجه می گیریم که g تابعی ثابت است و چون $g(1)=f(1)-rf(1)=0$ پس به ازای هر $x>0$, $g(x)=0$ است، درنتیجه: $f(x^r)=rf(x)$.

■

ب) $y=f(x) \quad , \quad [1,x] \quad , \quad f'(c)=\frac{1}{c}$

$$1<c<x \rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{c}<1 \qquad (*)$$

از طرفی طبق قضیه لاگرانژ داریم:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \rightarrow \frac{1}{c}=\frac{f(x)}{x-1} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{x}<\frac{f(x)}{x-1}<1$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{x}<f(x)<x-1 \rightarrow 1-\frac{1}{x}<f(x)<x-1$$

تساوی زمانی رخ می دهد که $x=1$ ،بنابراین:

$$1-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq x-1$$

۲۶- به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

(تهران شمال ۸۶- کرج ۸۴)

حل

$$\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{6} \rightarrow \frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-\arctan(1)<\frac{1}{6}$$

تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x)=\arctan x \qquad \left[1,\frac{4}{3}\right]$$

$$1<c<\frac{4}{3} \rightarrow 2<1+c^2<\frac{25}{9} \rightarrow \frac{9}{25}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{f'(c)=\frac{1}{1+c^2}} \frac{9}{25}<f'(c)<\frac{1}{2} \qquad (*)$$

از طرفی طبق قضیه لاگرانژ داریم:

$$f'(c)=\frac{f\left(\frac{4}{3}\right)-f(1)}{\frac{4}{3}-1} \rightarrow f'(c)=\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}} \xrightarrow{(*)} \rightarrow \frac{9}{25}<\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}$$

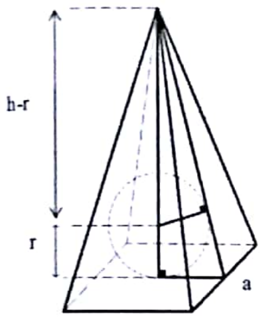
$$\rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

۲۷- کره‌ای به شعاع r، و هرمی با قاعده مربع و وجوه جانبی مثلثی شکل با این ویژگی که قاعده و وجوه هرم بر کره مماس هستند در نظر بگیرید. ارتفاع هرمی که حجم آن مینیمم است چقدر می باشد؟ (ارتفاع را بر حسب r تعیین کنید.) (شریف ۸۳)

حل

حجم هرم برابر است با: (ارتفاع) × (مساحت قاعده) × $\frac{1}{3}$

به ازای هر هرم داده شده در مسأله می توانیم راس هرم را روی صفحه‌ای که موازی قاعده هرم است و راس روی آن قرار دارد حرکت دهیم تا یک هرم قائم به دست آوریم که حجم آن به دلیل تغییر نکردن ارتفاع، با حجم هرم داده شده مساوی است. پس بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌توانیم تمام هرم‌های داده شده در مسأله را قائم فرض کنیم.



فرض کنید هرم قائم زیر، هرم دلخواهی باشد.

از تشابه مثلث‌ها به دست می آوریم:

$$\frac{r}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}{h}$$

در نتیجه $a^2=4r^2\frac{h^2}{h^2-2rh}$. پس حجم هرم مذکور برابر است با $v=\frac{4}{3}r^2\frac{h^2}{h-2r}$

منظور مسأله پیدا کردن مینیمم مطلق تابع است:

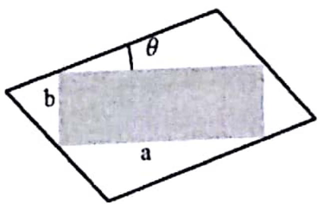
$$v'(h)=\frac{4}{3}r^2\frac{h^2-4rh}{(h-2r)^2}=0\rightarrow h=4r$$

جدول زیر را به دست می آوریم:

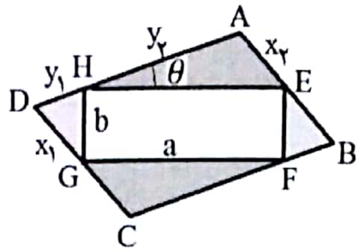
h	$2r$		$4r$		$+\infty$
$v'(h)$		$-$	0	$+$	
$v(h)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{32}{3}r^3$	$\nearrow$	$+\infty$

در نتیجه به ازای $h=4r$ حجم مینیمم به دست می‌آید.

۲۸- در میان مستطیل‌های محیط بر مستطیل مفروض با اضلاع a و b، مقدار ماکزیمم مساحت چقدر است؟ (شریف ۸۳)



حل



$$S_{ABCD} = S_{EFGH} + 2S_{\overset{\Delta}{HDG}} + 2S_{\overset{\Delta}{HAE}}$$

$$S = ab + x_1y_1 + x_2y_2$$

از طرفی داریم: $x_1^2 + y_1^2 = b^2 \quad , \quad x_2^2 + y_2^2 = a^2$

از طرفی می‌دانیم اگر $x^2 + y^2 = c$ آنگاه ماکزیمم x^2y^2 برابر $(\frac{c}{2})^2$ خواهد بود.

$$\text{Max}(xy) = \frac{c}{2}$$

پس $\text{Max}(x_1y_1) = \frac{b^2}{2}$ و $\text{Max}(x_2y_2) = \frac{a^2}{2}$.

$$S = ab + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

۲۹- الف) فرض کنید f و g دو تابع مشتق پذیر باشند که در تساوی $fg' = gf'$ صدق می کند. نشان دهید که اگر a و b، ۲ ریشه متوالی f باشند و $g(a) \neq 0$ و $g(b) \neq 0$، آنگاه x ای بین a و b هست که $g(x) = 0$

ب) فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و برای هر x در این بازه داشته باشیم، $f''(x) > 0$ ثابت کنید برای هر $x_1, x_2 \in [a,b]$ داریم: $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$ (امیرکبیر)

حل

الف) فرض کنیم $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. تابع $h(x)$ را بصورت $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می کنیم.

چون $g(x) \neq 0$ درنتیجه $h(x)$ پیوسته است.

$$h'(x) = \frac{f'.g - g'.f}{g^2} \xrightarrow{f'.g = g'f} h'(x) = 0$$

لذا $h(x)$ بر $[a,b]$ تابعی ثابت است یعنی:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = k \xrightarrow{f(a)=0} h(a) = 0 \to h(x) = 0 \to \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \to f(x) = 0$$

به این رسیدیم که f همواره برابر صفر است پس با این جمله تناقض دارد که a و b، ۲ ریشه متوالی f می‌باشند. درنتیجه فرض اولیه $g(x) \neq 0$ غلط بوده است یعنی $\exists x \in (a,b); g(x) = 0$.

■

ب) $f''(x) > 0 \to$ صعودی f'

$[x_1 \quad \frac{x_1+x_2}{2} \quad x_2]$ با ۲ بار بکارگیری قضیه مقدار میانگین داریم:

$$x_1 < c < \frac{x_1+x_2}{2} \quad ; \quad f'(c) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2} < d < x_2; \quad f'(d) = \frac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_2-x_1}{2}}$$

چون f' صعودی است و $d > c$ در نتیجه $f'(d) \geq f'(c)$، بنابراین:

$$\frac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_2-x_1}{2}} \geq \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}$$

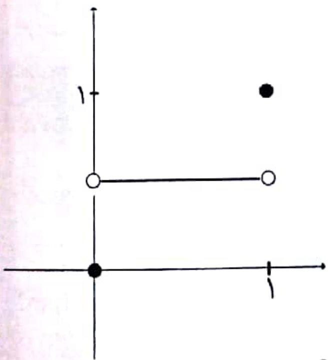
$$\to f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1) \to f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$$

۳۰- فرض کنید تابع $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ روی $(0,1)$ مشتق پذیر باشد و $f(0)=0$ و $f(1)=1$. همچنین فرض کنید نقطه $x_0 \in (0,1)$ وجود دارد که $f(x_0) \neq x_0$. ثابت کنید عدد $c \in (0,1)$ وجود دارد که $f'(c) > 1$.

(امیرکبیر ۸۷)

حل

اگر پیوستگی در $[0,1]$ برقرار نباشد می‌توان مثال نقض زد.



پس باید شرط پیوستگی f در $[0,1]$ برقرار باشد.

اگر $f(x_0) > x_0$ آنگاه بنا بر قضیه مقدار میانگین روی $[0, x_0]$ داریم:

$$\exists c \in (0,x); f'(c) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \to f'(c) = \frac{f(x_0)}{x_0} \xrightarrow{f(x_0)>x_0} f'(c) > 1$$

اگر $f(x_0) < x_0$ آنگاه بنا به قضیه مقدار میانگین روی $[x_0, 1]$ داریم:

$$\exists c \in (x,1); f'(c) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - f(x_0)}{1 - x_0} \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$f(x_0) < x_0 \to 1 - f(x_0) > 1 - x_0 \to \frac{1 - f(x_0)}{1 - x_0} > 1 \xrightarrow{(*)} f'(c) > 1 \to$$ حکم برقرار است.

۳۱- فرض کنید $f(x)$ بر $[0,2]$ پیوسته و دو بار بر $(0,2)$ مشتق پذیر باشد. هرگاه $f(0)=0$ و $f(1)=1$ و $f(2)=2$ ثابت کنید عددی مانند $x_0 \in (0,2)$ موجود است که $f''(x_0)=0$.

(خواجه نصیر ۸۴)

حل

چون $f(x)$ پیوسته و مشتق پذیر است، پس شرایط قضیه لاگرانژ برقرار است.

$$\exists c_1 \in (0,1);\ f'(c_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1 \quad , \quad \exists c_2 \in (1,2);\ f'(c_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1$$

چون تابع f' پیوسته و مشتق پذیر است و $f'(c_1)=f'(c_2)=1$، بنابه طبق قضیه رول داریم:

$$\exists x_0 \in (c_1,c_2);\ f''(x_0)=0$$

۳۲- فرض کنید g و f توابع مشتق پذیر باشند و $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)>0\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ثابت کنید که بین ۲ ریشه $f(x)=0$ فقط یک ریشه از $g(x)=0$ وجود دارد. (تهران ۸۴)

حل

فرض کنیم x_1 و x_2 دو ریشه متوالی $f(x)$ باشند. می خواهیم ابتدا ثابت کنیم که g در بازه $[x_1,x_2]$ حداقل یک ریشه دارد و بعد هم ثابت کنیم دقیقاً یک ریشه دارد.

(اثبات حداقل یک ریشه داشتن $g(x)$ در بازه $[x_1,x_2]$)

برهان خلف: فرض می‌کنیم $g(x)\neq 0$ پس تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $[x_1,x_2]$ پیوسته و مشتق پذیر است و همچنین $h(x_1)=h(x_2)=0$ پس می توان از قضیه رول استفاده کرد.

$$\exists c\in(x_1,x_2)\ ;\ h'(c)=0 \to \frac{f'g-g'f}{g^2}=0 \to f'g-g'f=0$$

با فرض صورت مسئله به تناقض رسیدیم یعنی فرض اولیه ما $(g(x)\neq 0)$ غلط بوده پس g در $[x_1,x_2]$ حداقل یک ریشه دارد.

حال فرض می کنیم $g(x)$ بیش از یک ریشه مثلاً دو ریشه x'_1 و x'_2 داشته باشد، پس تابع $k(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ در $[x'_1,x'_2]$ پیوسته و مشتق پذیر است و چون $g(x'_1)=g(x'_2)=0$، بنابراین $k(x'_1)=k(x'_2)=0$، لذا می توان از قضیه رول بهره گرفت:

$$\exists c\in(x'_1,x'_2)\ ;\ k'(c)=0 \to \frac{g'f-f'g}{f^2}=0 \to g'f-f'g=0$$

در نتیجه با فرض صورت مساله به تناقض خوردیم یعنی فرض اولیه ما (داشتن بیش از یک ریشه برای تابع $g(x)$) غلط بوده بنابراین $g(x)$ در $[x_1,x_2]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۳۳- ثابت کنید معادله $f(x)=x^n+px+q$ وقتی n زوج باشد بیش از ۲ ریشه حقیقی و وقتی n فرد باشد بیش از سه ریشه حقیقی ندارد. (تهران جنوب ۸۰)

حل

حالت I: اگر n زوج باشد $(n=2k)$. فرض می کنیم بیش از ۲ ریشه مثلاً ۳ ریشه x_1، x_2 و x_3 داریم که $x_1<x_2<x_3$ یعنی $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$. در این صورت در (x_1,x_2) طبق قضیه‌ی رول باید یک c_1 داشته باشیم که $f'(c_1)=0$ و در (x_2,x_3) نیز طبق قضیه رول باید یک c_2 داشته باشیم که $f'(c_2)=0$.

$$f(x)=x^{2k}+px+q\rightarrow f'(x)=2kx^{2k-1}+p=0\rightarrow x^{2k-1}=\frac{-p}{2k}\rightarrow x=\sqrt[2k-1]{\frac{-p}{2k}}$$

یعنی $f'(x)=0$ ، یک ریشه دارد و این با وجود c_1 و c_2 تناقض است،درنتیجه حداکثر ۲ ریشه داریم.

حالت II : اگر n فرد باشد $(n=2k+1)$. دقیقاً مثل الف است. فقط فرض می کنیم ۴ ریشه x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 داریم و به تناقض می رسیم.

۳۴- قضیه مقدار میانگین را بیان نموده و اثبات کنید و به کمک آن درستی نامساوی زیر را بررسی کنید. $\forall x>-1\ ;\ \ Ln(1+x)\le x$ (علم و صنعت ۸۵)

حل

بیان قضیه و اثبات آن در صفحه ۸۸ آمده است.

تابع $f(x)$ را بصورت $x>-1$, $f(x)=Ln(1+x)-x$، تعریف می‌کنیم، دراینصورت داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$

حالت I) $-1<x<0$ $\quad [x,0]$

$$f'(c)=\frac{-c}{1+c}>0\qquad (-1<c<0 \text{ چون})$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=\dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}\rightarrow f'(c)=\dfrac{-Ln(1+x)+x}{-x}\\ f'(c)>0\ ,\ x<0\end{array}\right\}\rightarrow -Ln(1+x)+x>0\rightarrow Ln(1+x)<x\quad (I)$$

حالت II) $x>0$ $\quad [0,x]$ $\quad ,f'(c)=\dfrac{-c}{1+c}<0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{Ln(1+x)-x}{x}\\ f'(c)<0\ ,\ x>0\end{array}\right\}\rightarrow Ln(1+x)-x<0\rightarrow Ln(1+x)<x\quad (II)$$

حالت III) $x=0\rightarrow f(0)=Ln1=0\rightarrow Ln(1+x)=x\quad (III)$

$$\xrightarrow{I,II,III} Ln(1+x)\le x$$

۳۵- رابطه $x \geq ٠$, $x - \frac{x^٢}{٢} \leq Ln(١+x) \leq x$ را ثابت کنید. (علم و صنعت ۸۶)

حل

دو نامساوی را به طور جداگانه اثبات می کنیم:

$$١)\ Ln(١+x) \overset{?}{\leq} x$$

تابع $f(x)$ را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$f(x) = Ln(١+x) - x \qquad [٠, x]$$

$$f'(c) = \frac{١}{١+c} - ١ = \frac{-c}{١+c} < ٠ \quad (\text{چون } c > ٠)$$

$$\text{لاگرانژ}: f'(c) = \frac{f(x) - f(٠)}{x - ٠} = \frac{Ln(١+x) - x}{x} \left.\begin{matrix} \\ f'(c) < ٠\ ,\ x > ٠ \end{matrix}\right\} \to Ln(١+x) - x < ٠ \to Ln(١+x) < x$$

و اگر $x = ٠$ باشد،تساوی رخ می دهد،درنتیجه:

$$Ln(١+x) \leq x \quad (*)$$

$$٢)\ x - \frac{x^٢}{٢} \overset{?}{\leq} Ln(١+x)$$

تابع $g(x)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(x) = Ln(١+x) - x + \frac{x^٢}{٢} \qquad [٠, x]$$

$$g'(c) = \frac{١}{١+c} - ١ + c = \frac{c^٢}{١+c} > ٠$$

$$g'(c) = \frac{f(x) - f(٠)}{x - ٠} > ٠ \to Ln(١+x) - x + \frac{x^٢}{٢} > ٠ \to Ln(١+x) > x - \frac{x^٢}{٢}$$

و در $x = ٠$ تساوی رخ می دهد،پس :

$$Ln(١+x) \geq x - \frac{x^٢}{٢} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \quad x - \frac{x^٢}{٢} \leq Ln(١+x) \leq x$$

سوال مشابه ۳۵-۱ ثابت کنید $x - \frac{x^٣}{٦} < \arctan x < x - \frac{x^٣}{٣}$, $٠ < x \leq ١$ (تهران جنوب ۸۱)

۳۶- ثابت کنید اگر $\circ < a < b$ آنگاه $(\frac{b}{a})^a < e^{b-a} < (\frac{b}{a})^b$ و نتیجه بگیرید:

$$\forall x > \circ \;;\; (1+\frac{1}{x})^x < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}$$ (کرج ۸۳)

حل

$$f(x) = \mathrm{Ln}\, x \quad , \quad [a,b]$$

$$f'(c) = \frac{1}{c} \quad , \quad a < c < b \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \qquad (*)$$

$$\text{لاگرانژ}\;\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\mathrm{Ln}\, b - \mathrm{Ln}\, a}{b-a}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{1}{b} < \frac{\mathrm{Ln}\, b - \mathrm{Ln}\, a}{b-a} < \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})}{b-a} < \frac{1}{a} \rightarrow a\,\mathrm{Ln}(\frac{b}{a}) < b-a < b\,\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})$$

$$\rightarrow \mathrm{Ln}(\frac{b}{a})^a < b-a < \mathrm{Ln}(\frac{b}{a})^b \xrightarrow{\text{از طرفین } e \text{ می گیریم}} e^{\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})^a} < e^{b-a} < e^{\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})^b}$$

$$\rightarrow (\frac{b}{a})^a < e^{b-a} < (\frac{b}{a})^b$$

$$\text{if} \begin{cases} a = x \\ b = x+1 \end{cases} \longrightarrow (\frac{x+1}{x})^x < e < (\frac{x+1}{x})^{x+1} \rightarrow (1+\frac{1}{x})^x < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}$$

۳۷- ثابت کنید که برای هر $x \in [\circ, \frac{\pi}{4}]$، $\sin(2x) \geq \frac{16x^2}{\pi^2}$ (امیرکبیر ۸۸)

حل

$$f(x) = \sin 2x - \frac{16x^2}{\pi^2} \rightarrow f'(x) = 2\cos 2x - \frac{32}{\pi^2}x \rightarrow f''(x) = -4\sin 2x - \frac{32}{\pi^2} < \circ$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $f' = \circ$ در بازه $[\circ, \frac{\pi}{4}]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

$$\left.\begin{array}{l} f'(\circ) = 2 \\ f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{-8}{\pi} \end{array}\right\} \rightarrow f'(\circ).f'(\frac{\pi}{4}) < \circ \rightarrow$$ طبق قضیه بولتزانو f' در $(\circ, \frac{\pi}{4})$ حداقل یک ریشه دارد.

حال فرض می‌کنیم f' بیش از یک ریشه داشته مثلاً ۲ ریشه x_1, x_2، درنتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_1) = \circ \\ f'(x_2) = \circ \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x_1) = f'(x_2) \\ f' \text{ پیوسته و مشتق پذیر} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{رول}} \exists c \in (\circ, \frac{\pi}{4}); (f')'(c) = \circ \rightarrow f''(c) = \circ$$

و این تناقض است چون در $[\circ, \frac{\pi}{4}]$، $f'' < \circ$.

پس فرض بیش از یک ریشه داشتن f' غلط بوده و f' دقیقاً یک ریشه دارد یعنی

$$a \in (\circ, \frac{\pi}{۴}) \ ; \ f'(a) = \circ$$

(چون $f'' < \circ$ طبق آزمون مشتق دوم ،نقطه ماکزیمم نسبی است)

حال در ۲ بازه $[a, \frac{\pi}{۴}]$ و $[\circ, a]$ بررسی می کنیم:

بررسی $[\circ, a]$:

$$[\circ, x] \to f'(x) \geq \circ$$

$$\text{مقدار میانگین}: f'(c) = \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \frac{\sin ۲x - \frac{۱۶x^۲}{\pi^۲}}{x} \geq \circ \xrightarrow{x > \circ} \sin ۲x \geq \frac{۱۶x^۲}{\pi^۲} \quad (*)$$

بررسی در $[a, \frac{\pi}{۴}]$:

$$[x, \frac{\pi}{۴}] \to f'(x) \leq \circ$$

$$f'(c) = \frac{f(\frac{\pi}{۴}) - f(x)}{\frac{\pi}{۴} - x} \leq \circ \to \frac{\circ - (\sin ۲x - \frac{۱۶x^۲}{\pi^۲})}{\frac{\pi}{۴} - x} \leq \circ \xrightarrow{x < \frac{\pi}{۴}} -\sin ۲x + \frac{۱۶x^۲}{\pi^۲} \leq \circ$$

$$\to \sin ۲x \geq \frac{۱۶x^۲}{\pi^۲} \quad (**)$$

حال طبق (*) و (**) می توان گفت که حکم اثبات شده است.

۳۸- قضیه کوشی را بیان کنید،سپس نشان دهید:

$$\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} < \frac{\ln(۱+x)}{\sin^{-۱} x} < ۱$$

(کرج)

حل

بیان قضیه در صفحه ۸۹ آورده شده است. به اثبات نامساوی می پردازیم:

فرض کنیم $f(x) = \ln(۱+x)$ و $g(x) = \sin^{-۱} x$ و بازه ما $[\circ, x]$ باشد،در اینصورت:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{۱}{۱+c}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}} = \frac{\sqrt{۱-c^۲}}{۱+c} = \sqrt{\frac{۱-c}{۱+c}}$$

$$c\in(0,x)\to 0<c<x\to\begin{cases}1<1+c<1+x\to \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+c}<1\\ -x<-c<0\to 1-x<1-c<1\end{cases}\to \dfrac{1-x}{1+x}<\dfrac{1-c}{1+c}<1$$

$$\to\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}<1\qquad (*)$$

تابع های $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[0,x]$ شرایط قضیه کوشی را دارند، بنابراین:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\to\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}=\frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x}\xrightarrow{(*)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x}<1$$

فصل پنجم

انتگرال نامعین

$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c \Rightarrow F'(x)=f(x)}$ که $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ گوییم (عکس عمل مشتق گیری را انتگرالگیری می گوییم)

برای مثال:

$$\tan^{-1} x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\tan^{-1} x \xleftarrow{\text{انتگرال}} \frac{1}{1+x^2}$$

فرمول های اساسی انتگرال

۱) $\int k\,dx = kx + c\ ,\ k \in \mathbb{R}$

۲) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,\ n \neq -1$

۳) $\int \frac{dx}{x} = \operatorname{Ln}|x| + c$

۴) $\int e^x dx = e^x + c$

۵) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

۶) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

۷) $\int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \int (\tan x)'\, dx = \tan x + c$

۸) $\int \left(1+\cot^2 x\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\, dx = \int (-\cot x)'\, dx = -\cot x + c$

۹) $\int \sec x . \tan x\, dx = \sec x + c$

۱۰) $\int \csc x . \cot x\, dx = -\csc x + c$

۱۱) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

۱۲) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

۱۴) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

روش های انتگرال گیری

۱- روش تغییر متغیر:

مراحل این روش به شرح زیر است:

۱) قسمتی از تابع را t درنظر می‌گیریم: $t=g(x)$

(کدام قسمت را متغیر جدید بگیریم؟ معمولا قسمتی را که مضربی از مشتق آن در تابع زیر انتگرال بصورت عامل ضربی وجود داشته باشد).

۲- از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم و dx را بر حسب dt بدست آورده.

۳- در انتگرال جایگذاری کرده و اگر x ای باقی ماند، آنرا به t تبدیل می‌کنیم.

۴- انتگرال را محاسبه می‌کنیم و در پایان به جای t ، $g(x)$ را می‌گذاریم.

مثال ۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{3x^2-9}{x^3-9x}dx$ (تهران مرکزی ۸۹)

ب) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx$ (قزوین ۸۷)

ج) $\int \frac{x\arccos x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ (تهران شمال ۸۶)

د) $\int \frac{18\tan^2 t.\sec^2 t}{\left(2+\tan^3 t\right)^2}dt$ (برادلی)

حل

الف) چون مشتق عبارت x^3-9x برابر است با $3x^2-9$ و آن را در تابع زیر انتگرال بصورت عامل ضربی داریم، بنابراین از تغییر متغیر $x^3-9x=t$ استفاده می کنیم:

$$x^3-9x=t \to \left(3x^2-9\right)dx=dt$$

$$\int \frac{dt}{t}=\text{Ln}|t|+c=\text{Ln}\left|x^3-9x\right|+c$$

■

ب) $2+\sin x=t \to \cos x\,dx=dt$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{2+\sin x}+c$$

■

ج) $\arccos x^2=t \to \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=dt \to \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{dt}{2}$

$$\int t.\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{4}t^2+c=-\frac{1}{4}\left(\arccos x^2\right)^2+c$$

■

د) $\text{۲}+\tan^{\text{۳}} t=u \to \text{۳}\tan^{\text{۲}} t\sec^{\text{۲}} t\,dt=du \to \text{۱۸}\tan^{\text{۲}} t\sec^{\text{۲}} t\,dt=\text{۶}du$

$$\int \frac{\text{۶}du}{u^{\text{۲}}}=-\frac{\text{۶}}{u}=-\frac{\text{۶}}{\text{۲}+\tan^{\text{۳}} t}+c$$

۲- روش جزء به جزء:

در این روش بخشی از تابع زیر انتگرال را u می‌گیریم و بقیه آنرا dv درنظر می‌گیریم و بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=\ldots \xrightarrow{\text{مشتق}} du=\ldots \\ dv=\ldots \xrightarrow{\text{انتگرال}} v=\ldots \end{cases} \Rightarrow \boxed{I=\int udv \Rightarrow I=uv-\int vdu}$$

به کمک این روش می‌توان بسیاری از انتگرال ها را حل کرد ولی معمولا زمانی استفاده می‌شود که تابع زیر انتگرال (انتگرالده) یکی از حالات زیر باشد:

۱- توابع لگاریتمی یا توابع معکوس مثلثاتی.

۲- حاصلضرب چندجمله ای × { تابع لگاریتمی / تابع معکوس مثلثاتی }

۳- حاصلضرب چندجمله ای × { تابع نمایی / تابع مثلثاتی سینوس وکسینوس }

۴- حاصلضرب تابع نمایی × تابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

۵- توان های فرد $\sec x$ و $\csc x$.

تذکر۱: در این حالات تابع نمایی می تواند نماینده توابع سینوس و کسینوس هیپربولیک باشد و تابع لگاریتمی نماینده توابع معکوس هیپربولیک.

تذکر۲: حالات۴ و ۵ انتگرال های جزء به جزء بازگشتی اند.

نکته ۱ : کجا را u بگیریم؟ اولویت در u گرفتن: ۱- $\log, Ln$ ۲- Arc ها

۳- چند جمله ای جبری ۴- $\sin$, $\cos$ ۵- نمایی $\left(a^{\square}\right)$

نکته ۲ : dv را باید بخشی از توابع زیر انتگرال در نظر بگیریم که بتوانیم انتگرال آنرا بـه سـادگی بدست آوریم.

مثال۲: انتگرال های زیر را حل کنید.

الف) $\int (2x+1)(\arctan x)\,dx$ (تهران جنوب ۸۴)

ب) $\int x(\mathrm{Ln}x)^2\,dx$ (قزوین ۸۶)

حل

الف) چون تابع زیر انتگرال بصورت حاصلضرب چندجمله ای در تابع معکوس مثلثاتی است، بنـابراین از روش جزء به جزء استفاده می کنیم.همچنین با توجه به نکته۱ اولویت در انتخاب u، با $\arctan x$ می باشد:

$$\begin{cases} u=\arctan x \longrightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=(2x+1)\,dx \longrightarrow v=x^2+x \end{cases} \xrightarrow{I=uv-\int v\,du} I=(x^2+x)\arctan x-\underbrace{\int\frac{x^2+x}{1+x^2}dx}_{I_1} \quad (*)$$

در انتگرال I_1، چون درجه صورت مساوی درجه مخرج است، ابتدا باید تقسیم کنیم

$$I_1=\int 1+\frac{x-1}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+1)-\arctan x$$

$$\xrightarrow{(*)} I=(x^2+x)\arctan x-I_1=(x^2+x+1)\arctan x-x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+1)$$

■

ب) براساس نکته۱ ،اولویت در انتخاب u با $(\mathrm{Ln}x)^2$ است، پس:

$$\begin{cases} u=(\mathrm{Ln}x)^2 \to du=\dfrac{2}{x}(\mathrm{Ln}x)dx \\ dv=x\,dx \to v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \xrightarrow{I=u.v-\int v.du} I=\frac{x^2}{2}(\mathrm{Ln}x)^2-\int\frac{x^2}{2}.\frac{2}{x}\mathrm{Ln}x\,dx$$

$$\to I=\frac{x^2}{2}(\mathrm{Ln}x)^2-\underbrace{\int x\mathrm{Ln}x dx}_{I_1} \to I=\frac{x^2}{2}(\mathrm{Ln}x)^2-I_1 \quad (*)$$

انتگرال I_1 نیز بصورت ضرب چندجمله ای جبری در $\mathrm{Ln}x$ است درنتیجه بازهم از روش جزءبه جزء استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} u=\mathrm{Ln}x \to du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx \to v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \xrightarrow{I_1=u.v-\int vdu} I_1=\frac{x^2}{2}.\mathrm{Ln}x-\int\frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}$$

$$I_1=\frac{x^2}{2}.\mathrm{Ln}x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}.\mathrm{Ln}x-\frac{x^2}{4}$$

حال با جایگذاری I_1 در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$I=\frac{x^2}{2}(\mathrm{Ln}x)^2-\frac{x^2}{2}\mathrm{Ln}x+\frac{x^2}{4}$$

مثال۳ : حاصل انتگرال $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ را بدست آورید. (علم و صنعت ۸۵)

حل

تابع انتگرالده بصورت حاصلضرب تابع نمایی در کسینوس است، لذا از جزء به جزء بهره می گیریم:

$$\begin{cases} u=\cos\beta x \to du=-\beta\sin\beta x\,dx \\ dv=e^{\alpha x}dx \to v=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\end{cases} \to I=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\underbrace{\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx}_{I_1} \quad (*)$$

انتگرال I_1 نیز بصورت حاصلضرب تابع نمایی در سینوس است، بنابراین بـرای حـل آن نیـز از روش جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$I_1:\begin{cases} u=\sin\beta x \to du=\beta\cos\beta x\,dx \\ dv=e^{\alpha x}dx \to v=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\end{cases} \to I_1=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

با جایگذاری I_1 در تساوی $(*)$ داریم:

$$I=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\underbrace{\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx}_{I}\right)$$

(به اینگونه انتگرال ها که در روند حل به خود انتگرال اصلی می رسیم،انتگرال های بازگشتی گفته می شود.)

$$\to I+\frac{\beta^2}{\alpha^2}I=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}(\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\sin\beta x)$$

$$\to(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2})I=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}(\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\sin\beta x)\to I=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}(\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\sin\beta x)$$

سوال مشابه

۳-۱ $\int e^{2x}\sin(3x)dx$ (تهران جنوب ۸۸)

Ans $\dfrac{2}{13}e^{2x}(\sin 3x-\dfrac{3}{2}\cos 3x)$

۳-۲ $\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$ (تهران مرکزی ۸۷) (راهنمایی : از تغییر متغیر $t=\tan^{-1}x$ استفاده شود)

Ans $\dfrac{e^t}{2}(\sin t+\cos t)$, $t=\tan^{-1}x$

انتگرال های توابع مثلثاتی

۱- انتگرال های بفرم $\int \sin^m x dx$, $\int \cos^m x dx$

حالت I: m زوج و مثبت باشد: در این حالت باید به کمک فرمولهای طلایی، توان را کاهش دهیم و این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که توان sinx و cosx یک شود.

$$\sin^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2} \quad , \quad \cos^2 ax = \frac{1+\cos 2ax}{2}$$

حالتII: m فرد و مثبت باشد: در این حالت یک sinx یا cosx را نگه داشته و باقی را به کمک رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به دیگری تبدیل کنیم یعنی:

$$m = 2k+1 \rightarrow \int \sin^{2k+1} x\,dx = \int \sin x \sin^{2k} x\,dx = \int \sin x\left(1-\cos^2 x\right)^k dx \xrightarrow{\cos x = t} \dots$$

حالت III: m زوج و منفی باشد (یا بعبارتی $\sec^{2k} x$ یا $\csc^{2k} x$ باشد).

$$m = 2k \rightarrow \int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^{2k-2} x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}.\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1} dx \xrightarrow{\tan x = t} \dots$$

حالت IV: m فرد و منفی باشد (یا بعبارتی $\sec^{2k+1} x$ و $\csc^{2k+1} x$ باشد.): باید از روش جزء به جزء بازگشتی حل کنیم

$$\text{if} \quad m = 2k+1 \rightarrow \int \sec^{2k+1} x dx = \int \sec^{2k-1} x.\sec^2 x\,dx$$

$$\begin{cases} u = \sec^{2k-1} x \rightarrow du = (2k-1)\sec^{2k-1} x.\tan x dx \\ dv = \sec^2 x dx \rightarrow v = \tan x \end{cases} \rightarrow \dots\dots$$

معمولا از این حالت ها بطور مستقیم در امتحانات سوال نمی آید ولی از این چهار حالت بصورت سوال های ترکیبی استفاده می شود.برای مثال به قسمت ج مثال ۴ صفحه بعد رجوع کنید.

۲- انتگرالهای بفرم $\int \sin^m x.\cos^n x\,dx$

حالتI: m و n هر ۲ زوج مثبت باشند، باید هر دو را با فرمولهای طلایی، کاهش توان داده و حل کنیم.

حالت II: حداقل یکی از دو عدد m و n فرد مثبت باشند.

$$\text{if}: m = 2k+1 \rightarrow \sin^{2k+1} x \cos^n x = \sin x.\sin^{2k} x \cos^n x = \sin x\left(\sin^2 x\right)^k \cos^n x$$

$$= \sin x\left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \xrightarrow{\cos x = t} \dots$$

حالت III: غیر از دو حالت مذکور، راه حل کلی وجود ندارد ولی اگر **m+n= زوج** باشد، از تغییر متغیر $t = \tan x$ استفاده می‌کنیم.

$$t = \tan x \rightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \xrightarrow{\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}} \boxed{\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

مثال۴: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$ (قزوین ۸۷)

ب) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$ (تهران جنوب ۸۹)

ج) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} dx$ (علم و صنعت ۸۵)

حل

الف) توان sinx، فرد ومثبت است،پس بنابه حالتII می توان نوشت:

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$= \int \sin x \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x \, dx = \int \sin x \left(\cos^4 x - \cos^6 x\right)dx$$

$$\cos x = t \rightarrow -\sin x \, dx = dt \rightarrow \sin x \, dx = -dt$$

$$\int \left(t^4 - t^6\right)(-dt) = \int t^6 - t^4 \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5}$$

■

ب) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x} = \int \cos^{-4} x . \sin^{-2} x \, dx \qquad -4-2=-6 \text{ زوج} \rightarrow \tan x = t$

$$\rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4 . \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} . \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^2} . \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^2} dt$$

$$\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} + \frac{2t^2}{t^2} + \frac{t^4}{t^2} dt = \int t^{-2} + 2 + t^2 dt = \frac{t^{-1}}{-1} + 2t + \frac{t^3}{3} \quad , t = \tan x$$

■

$$ج)\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}dx = \int \frac{1+\cos^4 x - 2\cos^2 x}{\cos^5 x}dx$$

$$I = \int \sec^5 x\,dx + \int \sec x\,dx - 2\int \sec^3 x\,dx \to I = I_1 + I_2 - 2I_3 \quad (*)$$

برای حل I_1 ، چون توان sec، فرد است پس از جزء به جزء بازگشتی استفاده می کنیم:

$$I_1 = \int \sec^5 x\,dx \quad \begin{cases} u = \sec^3 x \to du = 3\sec^3 x \tan x\,dx \\ dv = \sec^2 x\,dx \to v = \tan x \end{cases}$$

$$I_1 = \tan x \sec^3 x - 3\int \sec^3 x \tan^2 x\,dx = \tan x \sec^3 x - 3\int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$I_1 = \tan x \sec^3 x - 3\underbrace{\int \sec^5 x\,dx}_{I_1} + 3\underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I_3}$$

$$\to 4I_1 = \tan x \sec^3 x + 3I_3 \to I_1 = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x + \frac{3}{4}I_3 \quad (**)$$

همچنین میدانیم که: $I_2 = \int \sec x\,dx = \mathrm{Ln}|\sec x + \tan x| \quad (***)$

$$I_3 = \int \sec^3 x\,dx \quad \begin{cases} u = \sec x \to du = \sec x \tan x\,dx \\ dv = \sec^2 x\,dx \to v = \tan x \end{cases}$$

$$I_3 = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$I_3 = \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x.dx}_{I_3} + \int \sec x.dx \to 2I_3 = \sec x \tan x + I_2$$

$$\to I_3 = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{I_2}{2} \qquad (****)$$

با جایگذاری (**) ، (***) و (****) در رابطه (*) بدست می آید:

$$I = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x - \frac{5}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\mathrm{Ln}|\sec x + \tan x|$$

۳- انتگرال بفرم $\int \sin ax.\cos bx dx$

در این حالت، از فرمولهای مثلثاتی ضرب به جمع استفاده می‌کنیم و براحتی انتگرالها را حساب می کنیم.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin ax.\sin bx &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a-b)x\big) - \cos\big((a+b)x\big)\Big) \\ \sin ax.\cos bx &= \frac{1}{2}\Big(\sin\big((a+b)x\big) + \sin\big((a-b)x\big)\Big) \\ \cos ax.\cos bx &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a+b)x\big) + \cos\big((a-b)x\big)\Big) \end{aligned}}$$

مثال۵ : مطلوبست محاسبه $\int \sin^{2} 3x.\cos 4x\, dx$ (برادلی)

حل

$$\int \sin^{2} 3x \cos 4x\, dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x \cos 4x)dx$$

از طرفی طبق فرمول سوم صفحه قبل، داریم: $\cos(6x)\cos(4x) = \frac{1}{2}(\cos(10x)+\cos(2x))$

$$I = \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\cos(10x)+\cos(2x))dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{40}\sin 10x - \frac{1}{8}\sin 2x$$

۴- انتگرالگیری از توابع گویا (کسری) بر حسب cosx, sinx

برای حل این نوع انتگرالها، روش کلی این است که از تغییرمتغیر $t = \tan\frac{x}{2}$ استفاده کنیم:

$$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^{2}\frac{x}{2}\right)dx \rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^{2}}}$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^{2}\frac{x}{2}} \rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^{2}}} \xrightarrow{\cos x = \sqrt{1-\sin^{2} x}} \boxed{\cos x = \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}}$$

نکته۳ : اگر در عبارت گویا بر حسب $\sin x$ و $\cos x$، توانهایشان زوج بود، می‌توان از تغییر متغیر $t = \tan x$ استفاده کرد.

مثال۶ : مطلوبست حل $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$. (تهران جنوب ۸۷ و ۸۴- تهران مرکزی ۸۷)

حل

$$t = \tan\frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^{2}} \quad , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^{2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}$$

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^{2}} - \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}}.\frac{2dt}{1+t^{2}} = \int \frac{2}{2t^{2}+2t}du = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}dt$$

$$= \mathrm{Ln}|t| - \mathrm{Ln}|t+1| = \mathrm{Ln}\left|\frac{t}{t+1}\right| \quad , \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

سوال مشابه

۶-۱ $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$ (تهران جنوب ۸۹- تهران مرکزی ۸۶- قزوین۸۸) Ans $\mathrm{Ln}\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|$

۶-۲ $\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2}$ (تهران جنوب ۸۶) Ans $\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\left|3\tan\frac{x}{2}+2\right|$

۵- انتگرالهای بفرم $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{a'\sin x + b'\cos x}dx$ (که در آن a و b نباید همزمان صفر باشند.)

صورت کسر = $K\times$ (مخرج کسر) + S(مشتق مخرج)

با بدست آوردن K و S از معادله فوق، انتگرال براحتی به صورت زیرحل می‌شود :

$$\int \frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \int \frac{K(\text{مخرج})}{\text{مخرج}} + \int \frac{S(\text{مشتق مخرج})}{\text{مخرج}} = K.x + S.Ln\underbrace{|a'\sin x + b'\cos x|}_{\text{مخرج}}$$

مثال ۷ : حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{۴+\tan x}$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۸۸-تهران مرکزی ۸۸)

حل

$$I = \int \frac{dx}{۴+\tan x} = \int \frac{dx}{۴+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x\,dx}{۴\cos x + \sin x}$$

$$\overbrace{\cos x}^{\text{صورت}} = K\overbrace{(۴\cos x + \sin x)}^{\text{مخرج}} + S\overbrace{(-۴\sin x + \cos x)}^{\text{مشتق مخرج}} \rightarrow \begin{cases} ۱ = ۴K + S \\ ۰ = K - ۴S \end{cases} \rightarrow K = \frac{۴}{۱۷} \quad , S = \frac{۱}{۱۷}$$

$$I = \int \frac{\frac{۴}{۱۷}(۴\cos x + \sin x)}{۴\cos x + \sin x}dx + \int \frac{\frac{۱}{۱۷}(-۴\sin x + \cos x)}{۴\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{۴}{۱۷}\int dx + \frac{۱}{۱۷}\int \frac{-۴\sin x + \cos x}{۴\cos x + \sin x}dx \rightarrow I = \frac{۴}{۱۷}x + \frac{۱}{۱۷}Ln|۴\cos x + \sin x|$$

سوال مشابه

۷-۱ $\int \frac{dx}{۳+۵\tan x}$ (دمیدوویچ)

Ans $\frac{۳}{۳۴}x + \frac{۵}{۳۴}Ln|۳\cos x + ۵\sin x|$

۶- انتگرالهای بفرم $\int \tan^m x\,dx \quad , \quad \int \cot^m x\,dx$

بدین صورت عمل می‌کنیم:

اضافه کن ← کم کن ← کم کن ← اضافه کن

برای مثال داریم:

$$\int \tan^۴ x\,dx = \int \left(\tan^۴ x + \tan^۲ x - \tan^۲ x - ۱ + ۱\right)dx$$

$$= \int \tan^۲ x\left(۱+\tan^۲ x\right)dx - \int \left(۱+\tan^۲ x\right)dx + \int dx \xrightarrow{\tan x = t} \frac{\tan^۳ x}{۳} - \tan x + x$$

۷- انتگرالهای بفرم $\int \tan^m x.\sec^n x\,dx$

حالت I: n زوج باشد:

$$n = 2k \to \sec^{2k} x = \sec^2 x\left(\sec^2 x\right)^{k-1} = \sec^2 x\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1},\ \tan x = t$$

حالت II: m فرد باشد:

$$m = 2k+1 \to \tan^{2k+1} x.\sec^n x = \tan x \sec x.\left(\tan^2 x\right)^k .\sec^{n-1} x$$

$$= \tan x.\sec x\left(\sec^2 x - 1\right)^k.\sec^{n-1} x \quad , \quad \sec x = t$$

حالت III : m زوج و n فرد باشد: از رابطه $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ و بعد از روش جزء به جزء بازگشتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۸ : انتگرالهای زیر را حل کنید.

الف) $\int \tan^2 x.\sec^4 x\,dx$ ب) $\int \tan x.\sec^6 x\,dx$ ج) $\int \tan^2 x\sec^3 x\,dx$

حل

الف) توان $\sec x$ ، زوج است و حالت I می باشد:

$$\int \tan^2 x.\sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x.\sec^2 x.\sec^2 x dx = \int \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\sec^2 x\,dx$$

$$,\tan x = t \to \sec^2 x\,dx = dt$$

$$\int t^2\left(1+t^2\right)dt = \int t^2 + t^4\,dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$$

■

ب) توان $\tan x$ ، فرد است در نتیجه حالت II می باشد:

$$I = \int \tan x.\sec^6 x\,dx = \int \sec x.\tan x.\sec^5 x\,dx \quad , \sec x = t \ \to \sec x \tan x\,dx = dt$$

$$I = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} = \frac{\sec^6 x}{6}$$

■

ج) حالت III است:

$$I = \int \tan^2 x.\sec^3 x\,dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)\sec^3 x\,dx = \underbrace{\int \sec^5 x dx}_{I_1} - \underbrace{\int \sec^3 x dx}_{I_2}$$

به دلیل اینکه توان $\sec x$ هم در I_1 و هم در I_2 فرد است و بنابه توضیحات صفحه ۱۱۸(حالت IV) هر دو را از روش جزء به جزء بازگشتی حل می کنیم.

$$I_1=\int \sec^5 x\,dx \quad \begin{cases} u=\sec^3 x \to du=3\sec^3 x\tan x dx \\ dv=\sec^2 x dx \to v=\tan x \end{cases}$$

$$I_1=\tan x.\sec^3 x-3\int \sec^3 x\tan^2 x dx=\tan x.\sec^3 x-3\int \sec^3 x\left(\sec^2 x-1\right)dx$$

$$I_1=\tan x\sec^3 x-3\underbrace{\int \sec^5 x\,dx}_{I_1}+3\underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I_2}$$

$$4I_1=\tan x\sec^3 x+3I_2 \to I_1=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x+\frac{3}{4}I_2$$

از طرفی داشتیم: $I=I_1-I_2=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x-\frac{1}{4}I_2 \quad (*)$

$$I_2=\int \sec^3 x\,dx \quad \begin{cases} u=\sec x \to du=\sec x\tan x dx \\ dv=\sec^2 x\,dx \to v=\tan x \end{cases}$$

$$I_2=\tan x\sec x-\int \sec x\tan^2 x\,dx=\sec x\tan x-\int \sec x\left(\sec^2 x-1\right)dx$$

$$I_2=\sec x\tan x-\underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I_2}+\int \sec x\,dx$$

$$2I_2=\sec x\tan x+\operatorname{Ln}\left|\sec x+\tan x\right| \to I_2=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\sec x+\tan x\right|$$

بر اساس رابطه $(*)$ داریم:

$$I=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\sec x+\tan x\right|\right)$$

$$I=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x-\frac{1}{8}\sec x\tan x-\frac{1}{8}\operatorname{Ln}\left|\sec x+\tan x\right|$$

نکته ۴: برای محاسبه انتگرال که بر حسب sinx و cosx است یعنی $I=\int f\left(\sin x,\cos x\right)dx$ داریم:

۱) if $f\left(-\sin x,\cos x\right)=-f\left(\sin x,\cos x\right)\to \cos x=t$

۲) if $f\left(\sin x,-\cos x\right)=-f\left(\sin x,\cos x\right)\to \sin x=t$

۳) if $f\left(-\sin x,-\cos x\right)=f\left(\sin x,\cos x\right)\to \tan x=t$

مثال۹ : مطلوبست محاسبه انتگرال $\int \frac{\sin^{3} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. (مارون)

حل

چون تابع زیرانتگرال، نسبت به sinx فرد است (یعنی با تبدیل sinx به sinx−، تابع قرینه می شود) بنابه نکته ۴ ، از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می کنیم:

$$\cos x = t \to -\sin x\,dx = dt \to dx = \frac{-dt}{\sin x}$$

$$I = \int \frac{\sin^{3} x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^{3} x}{\sqrt{t}}.\frac{-dt}{\sin x} = \int \frac{-\sin^{2} x}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{t^{2}-1}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{t^{2}}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= \int t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{-1}{2}}\,dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\cos x}\,(\frac{1}{5}\cos^{2} x - 1)$$

انتگرالهایی که حاصلشان، توابع معکوس مثلثاتی می‌شود.

$$\boxed{\begin{array}{l} \int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan x + c \to \int \frac{u'dx}{a^{2}+b^{2}u^{2}} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}u\right) + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + c \to \int \frac{u'dx}{\sqrt{a^{2}-b^{2}u^{2}}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{a}u\right) + c \end{array}}$$

مثال۱۰ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int \frac{x}{1+x^{4}}dx$ ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^{2}+4x-1}}$

حل

الف) $x^{2} = u \to 2xdx = du \to xdx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{1}{1+u^{2}}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan x^{2}$$

■

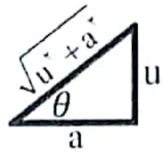
ب) $-2x^{2}+4x-1 = -2\left(x^{2}-2x+1-1\right)-1 = -2\left(x^{2}-2x+1\right)+1 = 1-2\left(x-1\right)^{2}$

$$\to \int \frac{dx}{\sqrt{1-2\left(x-1\right)^{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\left(x-1\right)\right)$$

انتگرالهایی که از تغییر متغیرهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم. (انتگرالهایی که شامل عبارات $a^۲+u^۲$ ، $a^۲-u^۲$ ، $u^۲-a^۲$ هستند)

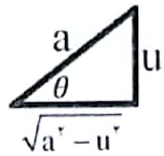
حالت I) $(a^۲+u^۲) \rightarrow u=a\tan\theta \rightarrow du=a\sec^۲\theta d\theta$

$$a^۲+u^۲=a^۲+a^۲\tan^۲\theta=a^۲(۱+\tan^۲\theta)=a^۲\sec^۲\theta$$



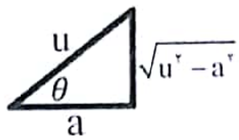
حالت II) $(a^۲-u^۲) \rightarrow u=a\sin\theta \rightarrow du=a\cos\theta d\theta$

$$a^۲-u^۲=a^۲-a^۲\sin^۲\theta=a^۲(۱-\sin^۲\theta)=a^۲\cos^۲\theta$$



حالت III) $(u^۲-a^۲) \rightarrow u=a\sec\theta \rightarrow du=a\sec\theta.\tan\theta d\theta$

$$u^۲-a^۲=a^۲\sec^۲\theta-a^۲=a^۲(\sec^۲\theta-۱)=a^۲\tan^۲\theta$$



مثال ۱۱: حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

الف) $\int\frac{dx}{(x^۲+۱)^۲}$ (تهران مرکزی ۸۵- خواجه نصیر ۸۴)

ب) $\int\sqrt{۲x-x^۲}\,dx$ (تهران جنوب ۸۷)

حل

الف) $x=\tan\theta \rightarrow dx=\sec^۲\theta d\theta$

$$\int\frac{\sec^۲\theta d\theta}{(\tan^۲\theta+۱)^۲}=\int\frac{\sec^۲\theta}{\sec^۴\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\sec^۲\theta}=\int\cos^۲\theta d\theta=\int\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}d\theta$$

$$=\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin۲\theta=\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin\theta\cos\theta \quad ,x=\tan\theta\rightarrow$$

با توجه به شکل می توان گفت $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$. در نتیجه:

$$I=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}x+\frac{۱}{۲}\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}.\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\rightarrow I=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}x+\frac{x}{۲(x^۲+۱)}$$

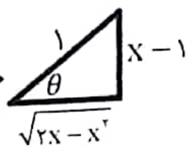
■

ب) $۲x-x^۲=-(x^۲-۲x+۱)+۱=۱-(x-۱)^۲$

$$I=\int\sqrt{۱-(x-۱)^۲}\,dx \quad , \quad x-۱=\sin\theta\rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$

$$I=\int\sqrt{۱-\sin^۲\theta}.\cos\theta d\theta=\int\sqrt{\cos^۲\theta}.\cos\theta d\theta=\int\cos^۲\theta d\theta=\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin\theta\cos\theta$$

$x-۱=\sin\theta\rightarrow$



$$\rightarrow I=\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(x-۱)+\frac{۱}{۲}(x-۱)\sqrt{۲x-x^۲}$$

سوال مشابه قسمت ب

۱-۱۱ $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ (تهران مرکزی ۸۸) Ans $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right)$

انتگرال گیری از توابع گویا

حالتI : اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و بعد انتگرال می‌گیریم.

حالتII: اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج شود، از تجزیه کسر استفاده می‌کنیم.(البته چند حالت خاص داریم که ابتدا به آنها می پردازیم):

حالت خاص ۱- انتگرالهایی بفرم $\int\frac{k\,dx}{ax^2+bx+c}$ $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{درجه ۲}}\right)$:

اگر $\Delta=b^2-4ac$ باشد، ۳ حالت زیر را داریم:

i) $\Delta>0$: مخرج را تجزیه کرده و با تجزیه کسر حل می‌کنیم. (بعداً توضیح داده می‌شود)

ii) $\Delta=0$: مخرج را بفرم مربع کامل نوشته و به سادگی حل می‌کنیم.

iii) $\Delta<0$: مخرج را مربع کامل می‌کنیم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int\frac{u'dx}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}u\right)$$

مثال۱۲ : مطلوبست محاسبه $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$. (کرج۸۸)

حل

چون $\Delta<0$ ،بنابراین باید مخرج را مربع کامل کرد:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1}\arctan\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}(x+\frac{1}{2})\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)$$

حالت خاص ۲- انتگرال بفرم $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ $\left(\frac{\text{درجه ۱}}{\text{درجه ۲}}\right)$:

در این حالت باید مشتق مخرج را در صورت کسر ایجاد کنیم، بعبارتی صورت کسر را به شکل زیر در می آوریم:

صورت کسر =K (مشتق مخرج) +S

از این معادله K و S را بدست می‌آوریم و انتگرال را حساب می‌کنیم.

مثال۱۳: مطلوبست محاسبه $\int \frac{۳x+۱}{x^۲+۴x+۸}dx$. (تهران مرکزی ۸۴)

حل

$$\overbrace{۳x+۱}^{\text{صورت}} = K\overbrace{(۲x+۴)}^{\text{مشتق مخرج}}+S \to \begin{cases} x^۱ \text{ ضریب } : ۳=۲K \to K=\frac{۳}{۲} \\ x^۰ \text{ ضریب } : ۱=۴K+S \xrightarrow{K=\frac{۳}{۲}} S=-۵ \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\frac{۳}{۲}(۲x+۴)-۵}{x^۲+۴x+۸}dx = \frac{۳}{۲}\int \frac{۲x+۴}{x^۲+۴x+۸}dx - ۵\int \frac{۱}{(x+۲)^۲+۴}dx$$

$$=\frac{۳}{۲}Ln(x^۲+۴x+۸)-\frac{۵}{۲}\arctan\left(\frac{x+۲}{۲}\right)$$

تجزیه کسر

ابتدا مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم،که ۲ حالت امکان پذیر است:

I) مخرج کسر ، شامل عاملی به صورت $(x-\alpha)^k$ باشد($k\in\mathbb{N}$). به ازای هر عامل $(x-\alpha)^k$، یک عبارت به شکل $\frac{A_۱}{(x-\alpha)}+\frac{A_۲}{(x-\alpha)^۲}+...+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ می‌گذاریم.

II) مخرج کسر شامل عبارت $(ax^۲+bx+c)^k$ باشد که $ax^۲+bx+c$ تجزیه نمی‌شود $(\Delta<۰)$.
به ازای هر عامل $(ax^۲+bx+c)^k$ عبارتی به صورت زیر قرار می دهیم:

$$\frac{A_۱x+B_۱}{ax^۲+bx+c}+\frac{A_۲x+B_۲}{(ax^۲+bx+c)^۲}+...+\frac{A_kx+B_k}{(ax^۲+bx+c)^k}$$

برای مثال می‌خواهیم $\frac{۱}{(x+۱)(x-۲)^۲(x^۲+۱)}$ را تجزیه کسر کنیم:

$$\frac{۱}{(x+۱)(x-۲)^۲(x^۲+۱)}=\frac{A}{x+۱}+\left(\frac{B}{x-۲}+\frac{C}{(x-۲)^۲}\right)+\frac{Dx+E}{x^۲+۱}$$

مثال۱۴: انتگرالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\int \frac{dx}{x^۵+x^۴-۲x^۳-۲x^۲+x+۱}$ (دمیدوویچ)

ب) $\int \frac{۳x^۲+۷}{(x+۱)(x^۲+۴)}dx$

ج) $\int \frac{x^۴}{x^۴+۵x^۲+۴}$ (دمیدوویچ)

د) $\int \frac{dx}{(x^۲-x)(x^۲-x+۱)^۲}$ (مارون)

حل

الف) $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1=(x-1)^2(x+1)^3$

$$\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}$$

$$\to 1=A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2$$

با جایگذاری $x=1$ در تساوی فوق داریم: $B=\frac{1}{8}\leftarrow 1=8B$

همچنین با جایگذاری $x=-1$ بدست می آید: $E=\frac{1}{4}\leftarrow 1=4E$

حال با متحد قراردادن ضرایب دوطرف تساوی ،مجهولات بعدی را بدست می آوریم، (برای اینکه اشتباهی صورت نگیرد،عبارت سمت راست را بسط می دهیم):

$$1=A(x^4+2x^3-2x-1)+B(x^3+3x^2+3x+1)+C(x^4-2x^2+1)+D(x^3-x^2-x+1)$$
$$+E(x^2-2x+1)$$

ابتدا ضریب x^4: در سمت راست تساوی ضریب x^4 برابر است با $A+C$ و در سمت چپ برابر 0 است پس این دو باید با هم برابر باشند،یعنی : $A+C=0$.به همین صورت داریم:

x^4 ضریب : $0=A+C$ (I)

x^3 ضریب : $0=2A+B+D$ (II)

x^2 ضریب : $0=3B-2C-D+E$ (III)

x^1 ضریب : $0=-2A+3B-D-2E$ (IV)

x^0 ضریب : $1=-A+B+C+D+E$ (V)

از تساوی های (I) ، (II) و (III) و اینکه می دانیم $B=\frac{1}{8}$ و $E=\frac{1}{4}$ بدست می آید:

$D=\frac{1}{4}$ و $C=\frac{3}{16}$ و $A=\frac{-3}{16}$

$$I=\frac{-3}{16}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-3}{16}\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\mathrm{Ln}|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}$$

$$=\frac{3}{16}\mathrm{Ln}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}$$

■

ب) $\frac{3x^2+7}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\rightarrow\frac{3x^2+7}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+4)}$

$$\rightarrow 3x^2+7=A(x^2+4)+(Bx+C)(x+1)\rightarrow\begin{cases}x=-1\rightarrow 10=5A\rightarrow A=2\\ x=0\rightarrow 7=4A+C\xrightarrow{A=2}C=-1\\ x=1\rightarrow 10=5A+2B+2C\xrightarrow[C=-1]{A=2}B=1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{2}{x+1}dx+\int\frac{x-1}{x^2+4}dx=\int\frac{2}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx-\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$I=2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})$$

■

ج) چون درجه صورت $\le$ درجه مخرج است پس ابتدا باید تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^4+5x^2+4 \\ \hline -x^4-5x^2-4 & 1 \\ \hline -5x^2-4 & \end{array}\qquad\rightarrow\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}$$

$$I=\int 1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx=x-\int\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=x-\int\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}dx$$

$$5x^2+4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)\qquad(*)$$

ضرایب را در این مثال به دو روش بدست می آوریم:

روش اول: از بسط سمت راست داریم:

$$5x^2+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+C(x^3+x)+D(x^2+1)$$

حال ضرایب دوطرف تساوی را مساوی هم قرار می دهیم:

ضریب x^3 : $0=A+C$ (I)

ضریب x^2 : $5=B+D$ (II)

ضریب x^1 : $0=4A+C$ (III)

ضریب x^0 : $4=4B+D$ (IV)

از (I) و (III) بدست می آوریم: $A=C=0$

و نیز از تساوی های (II) و (IV) داریم: $B=\frac{-1}{3},D=\frac{16}{3}$

روش دوم: از اعداد مختلط می دانیم که ریشه عبارت $x^{۲}+۱$ ، $x=\pm i$ است، با جایگذاری $x=i$ در تساوی (*) ، داریم:

$$۵i^{۲}+۴=(Ai+B)(i^{۲}+۴)+(Ci+D)(i^{۲}+۱)\xrightarrow{i^{۲}=-۱}-۱=۳(Ai+B)$$

همچنین می دانیم که دو عددمختلط زمانی برابرند که قسمت های حقیقی شان با هم برابرباشند و قسمت های موهومی آنها نیز با هم برابرباشند،در نتیجه:

$$\begin{cases}-۱=۳B\rightarrow B=\dfrac{-۱}{۳}\\ ۰=A\end{cases}$$

به همین ترتیب می دانیم که ریشه $x^{۲}+۴$ ، $x=\pm ۲i$ است، با جایگذاری $x=۲i$ در تساوی (*) ، داریم:

$$-۱۶=-۳(۲Ci+D)\rightarrow\begin{cases}C=۰\\ D=\dfrac{۱۶}{۳}\end{cases}$$

حال که ضرایب را بدست آوردیم، به ادامه حل انتگرال مورد نظر می پردازیم:

$$I=x-\int\frac{\frac{-۱}{۳}}{x^{۲}+۱}+\frac{\frac{۱۶}{۳}}{x^{۲}+۴}dx=x+\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}x-\frac{۸}{۳}\tan^{-۱}(\frac{x}{۲})$$

■

د) $$\frac{۱}{x(x-۱)(x^{۲}-x+۱)^{۲}}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}+\frac{Cx+D}{x^{۲}-x+۱}+\frac{Ex+F}{(x^{۲}-x+۱)^{۲}}$$

$$۱=A(x-۱)(x^{۲}-x+۱)^{۲}+Bx(x^{۲}-x+۱)^{۲}+(Cx+D)(x)(x-۱)(x^{۲}-x+۱)+(Ex+F)(x)(x-۱)$$

به سراغ بدست آوردن ضرایب می رویم:

ابتدا با جایگذاری $x=۱$ و $x=۰$ ،دوتا از ضرایب را بدست می آوریم:

$$x=۱\rightarrow ۱=B$$
$$x=۰\rightarrow ۱=-A\rightarrow A=-۱$$

سمت راست معادله را بسط می دهیم و ضرایب دو سمت تساوی را مساوی هم قرار می دهیم تا دیگر مجهولات نیز بدست آید:

$$1=A\left(x^5-3x^4+5x^3-5x^2+3x-1\right)+B\left(x^5-2x^4+3x^3-2x^2+x\right)$$
$$+C\left(x^5-2x^4+2x^3-x^2\right)+D\left(x^4-2x^3+2x^2-x\right)+E\left(x^3-x^2\right)+F\left(x^2-x\right)$$

ضریب x^5 : $0=A+B+C \quad (I)$

ضریب x^4 : $0=-3A-2B-2C+D \quad (II)$

ضریب x^3 : $0=5A+3B+2C-2D+E \quad (III)$

ضریب x^2 : $0=-5A-2B-C+2D-E+F \quad (IV)$

با جایگذاری $A=-1$ و $B=1$ در تساوی (I) داریم: $C=0$.

سپس با جایگذاری $A=-1$، $B=1$ و $C=0$ در تساوی (II) بدست می آید: $D=-1$

به همین ترتیب ازتساوی (III) داریم: $E=0$ و از تساوی (IV) نیز بدست می آید: $F=-1$. بنابراین:

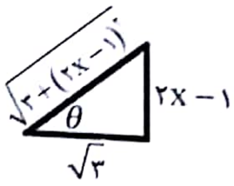
$$I=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}-\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$=-\mathrm{Ln}|x|+\mathrm{Ln}|x-1|-\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-I_1 \quad \rightarrow I=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-I_1 \qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{dx}{((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2} \qquad x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I_1=\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta}{\left(\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}\right)^2}d\theta=\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta}{\frac{9}{16}\sec^4\theta}d\theta=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\cos^2\theta\, d\theta=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}(\theta+\sin\theta.\cos\theta),\ \tan\theta=\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$



$$I_1=\frac{4\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{2x-1}{3+(2x-1)^2}\right)$$

با جایگذاری در رابطه (*) داریم:

$$I=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{2x-1}{3+(2x-1)^2}\right)$$

$$\rightarrow I=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{2x-1}{3+(2x-1)^2}\right)$$

انتگرال های توابع رادیکالی (توان گویا)

حالت I: برای محاسبه انتگرال بفرم $I=\int f\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$ از تغییر متغیر $x=t^k$ استفاده می‌کنیم. که k کوچکترین مضرب مشترک q_i هاست. (یا بعبارتی ک.م.م فرجه هاست).

تعمیم: اگر انتگرال دارای جملات $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}$ باشد، از تغییر متغیر $t^k=\frac{ax+b}{cx+d}$ (k: ک.م.م فرجه ها) استفاده می‌کنیم.

مثال۱۵: حاصل انتگرال $\int \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۴]{x^۳}}dx$ را بدست آورید. (تهران جنوب ۸۶)

حل

$$x=t^۴ \to dx=۴t^۳\,dt$$

$$\int \frac{t^۲}{۱+t^۳}\times ۴t^۳\,dt = ۴\int \frac{t^۵}{۱+t^۳}dt = ۴\int t^۲-\frac{t^۲}{۱+t^۳}dt = ۴\left(\frac{t^۳}{۳}-\frac{۱}{۳}\operatorname{Ln}|۱+t^۳|\right) \quad , \quad t=\sqrt[۴]{x}$$

سوال مشابه

۱-۱۵ $\int \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۴]{x}}dx$ (تهران جنوب ۸۵) **ANS** $I=۶\left(\frac{\sqrt[۴]{x^۷}}{۷}-\frac{\sqrt[۴]{x^۵}}{۵}+\frac{\sqrt[۴]{x^۳}}{۳}-\sqrt[۴]{x}+\arctan\sqrt[۴]{x}\right)$

حالت II: (تغییر متغیر اویلر)

برای محاسبه انتگرالهایی بفرم $I=\int f\left(x,\sqrt{ax^۲+bx+c}\right)dx$ که $a\neq ۰$:

۱) اگر $b^۲-۴ac>۰$ یعنی $ax^۲+bx+c$ تجزیه می‌شود به $a(x-\alpha)(x-\beta)$:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha)$$

۲) اگر $b^۲-۴ac<۰$ آنگاه:

$$\text{if } a>۰ \to \sqrt{ax^۲+bx+c}=\sqrt{a}\,x\pm t$$

$$\text{if } c>۰ \to \sqrt{ax^۲+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$$

مثال۱۶ : انتگرال $\int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}$ را حل کنید. (تهران جنوب ۸۸)

حل

$$\sqrt{-x^2+7x-10}=\sqrt{(-x+2)(x-5)}=t(x-5)\to(-x+2)(x-5)=t^2(x-5)^2$$

$$\to -x+2=t^2x-5t^2\to x(t^2+1)=5t^2+2\to x=\frac{5t^2+2}{t^2+1}\to dx=\frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$I=\int\frac{\frac{5t^2+2}{t^2+1}}{\left(t\left(\frac{5t^2+2}{t^2+1}-5\right)\right)^3}\times\frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{(5t^2+2)\times 6t\,dt}{\frac{-27t^3}{(t^2+1)^3}.(t^2+1)^3}=\int\frac{2(5t^2+2)}{-9t^2}dt$$

$$=\frac{-2}{9}\int 5+\frac{2}{t^2}dt=\frac{-2}{9}\left(5t-\frac{2}{t}\right)\quad,\quad t=\sqrt{\frac{-x+2}{x-5}}$$

حالت III) انتگرال های بفرم $I=\int\frac{dx}{f(x).\sqrt{g(x)}}$.

۱) اگر f و g هر دو درجه یک باشند و یا f درجه دو و g درجه یک باشد $t=\sqrt{g(x)}$.

۲) اگر f درجه یک و g درجه ۲ باشد و یا f و g بصورت ax^2+b باشند $t=\frac{1}{f(x)}$.

حالت IV) انتگرالگیری از دو جمله دیفرانسیلی

برای محاسبه انتگرال بفرم $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ که m، n و p اعداد گویا هستند:

۱) اگر P عدد طبیعی باشد، عبارت $\left(a+bx^n\right)^p$ را با دو جمله ای نیوتن بسط می‌دهیم و بعد انتگرال می‌گیریم.

۲) اگر p عدد صحیح منفی باشد، آنگاه از تغییر متغیر $x=t^k$ استفاده می‌کنیم. (k: ک م م مخرج های m و n)

۳) اگر $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ ، آنگاه از تغییر متغیر $a+bx^n=t^k$ استفاده می‌کنیم (k: مخرج p).

۴) اگر $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ باشد، از تغییر متغیر $a+bx^n=x^n.t^k$ استفاده می‌کنیم (k : مخرج p)

مثال۱۷ : انتگرال $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$ را حل کنید. (دمیدوویچ)

حل

$$I=\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int x.(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$\frac{1+1}{\frac{2}{3}}=3\in\mathbb{Z}\xrightarrow{\text{حالت سوم دو جمله دیفرانسیلی}}1+x^{\frac{2}{3}}=t^2\rightarrow\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}dx=2tdt\rightarrow dx=\frac{3tdt}{x^{\frac{-1}{3}}}$$

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{t^2}}.\frac{3t\,dt}{x^{\frac{-1}{3}}}=\int\frac{x^{\frac{4}{3}}}{t}.3t\,dt=3\int(x^{\frac{2}{3}})^2dt=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=3\int t^4-2t^2+1dt$$

$$=3(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t)\ \ ,\ t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$$

دستورهای کاهشی (روابط بازگشتی)

معمولا برای بدست آوردن روابط بازگشتی از روش جزء به جزء استفاده می کنیم.

مثال۱۸: دستور بازگشتی $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ را محاسبه کنید. (تهران شمال ۸۷)

حل

الف) $I_n=\int\sec^n x\,dx\qquad\begin{cases}u=\sec^{n-2}x\rightarrow du=(n-2)\sec^{n-2}x.\tan x\,dx\\ dv=\sec^2 x\,dx\rightarrow v=\tan x\end{cases}$

$$I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int\sec^{n-2}x\tan^2x\,dx$$

$$\xrightarrow{\tan^2x=\sec^2x-1}I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int\sec^n x-\sec^{n-2}x\,dx$$

$$I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\underbrace{\int\sec^n x dx}_{I_n}+(n-2)\underbrace{\int\sec^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}}$$

$$(n-1)I_n=\tan x\sec^{n-2}x+(n-2)I_{n-2}\rightarrow I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+(\frac{n-2}{n-1})I_{n-2}\ \ ,n\geq2$$

از طرفی نیز داریم:

$$I_0=\int\frac{dx}{(\cos x)^0}=\int dx=x\qquad,\qquad I_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\text{Ln}|\sec x+\tan x|$$

سوالات فصل پنجم

۱- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^{5}\sqrt{1-x^{2}}}$ (تهران جنوب ۸۷)

ب) $\int \frac{2x+1}{(x^{2}+x+\sqrt{2})\sqrt{\mathrm{Ln}(x^{2}+x+\sqrt{2})}}dx$

ج) $\int \frac{4^{x}}{6^{x}+9^{x}}dx$ (امیرکبیر ۸۸)

د) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{x}+1}}$ (علم و صنعت ۸۶)

هـ) $\int \frac{2^{x}}{8^{x}-1}dx$ (امیرکبیر)

حل

الف) $\arccos x = t \to \frac{-dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = dt \to I = \int \frac{-dt}{t^{5}} = \frac{1}{4t^{4}} = \frac{1}{4(\arccos x)^{4}}$ ■

ب) $\mathrm{Ln}(x^{2}+x+\sqrt{2}) = t \to \frac{2x+1}{x^{2}+x+\sqrt{2}}dx = dt$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\mathrm{Ln}(x^{2}+x+\sqrt{2})}$$ ■

ج) $\int \frac{4^{x}}{6^{x}+9^{x}}dx = \int \frac{(\frac{4}{9})^{x}}{(\frac{6}{9})^{x}+1}dx = \int \frac{(\frac{2}{3})^{2x}}{(\frac{2}{3})^{x}+1}dx \quad , (\frac{2}{3})^{x} = t \to dx = \frac{dt}{t.\mathrm{Ln}(\frac{2}{3})}$

$$I = \frac{1}{\mathrm{Ln}\frac{2}{3}}\int \frac{t^{2}}{t+1}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\mathrm{Ln}\frac{2}{3}}\int \frac{t}{t+1}dt = \frac{1}{\mathrm{Ln}\frac{2}{3}}\int (1-\frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{\mathrm{Ln}\frac{2}{3}}(t-\mathrm{Ln}|t+1|)$$ ■

د) $e^{x}+1 = t^{2} \to e^{x}dx = 2t\,dt \to dx = \frac{2t}{e^{x}}dt = \frac{2t}{(t^{2}-1)}dt$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{x}+1}} = \int \frac{\frac{2t}{(t^{2}-1)}dt}{t} = 2\int \frac{dt}{t^{2}-1} = \int \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt = \mathrm{Ln}\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \quad , \quad t = \sqrt{e^{x}+1}$$ ■

هـ) $\int \frac{2^{x}}{8^{x}-1}dx = \int \frac{2^{x}}{2^{3x}-1}dx \quad , 2^{x} = t \to 2^{x}.\mathrm{Ln}2\,dx = dt \to dx = \frac{dt}{t\,\mathrm{Ln}2}$

$$I = \int \frac{t}{t^{3}-1}.\frac{dt}{t\,\mathrm{Ln}2} = \frac{1}{\mathrm{Ln}2}\int \frac{dt}{t^{3}-1} = \frac{1}{\mathrm{Ln}2}\int \frac{dt}{(t-1)(t^{2}+t+1)}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\rightarrow A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)=1$$

$$\rightarrow\begin{cases} t=1\rightarrow 3A=1\rightarrow A=\frac{1}{3} \\ t=0\rightarrow A-C=1\xrightarrow{A=\frac{1}{3}}C=\frac{-2}{3} \\ t=-1\rightarrow A+2B-2C=1\xrightarrow[C=\frac{-2}{3}]{A=\frac{1}{3}}B=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{Ln2}\int\frac{\frac{1}{3}}{t-1}dt+\frac{1}{Ln2}\int\frac{-\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3Ln2}Ln|t-1|+\frac{1}{Ln2}\int\frac{-\frac{1}{6}(2t+1)-\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt$$

$$=\frac{1}{3Ln2}Ln|t-1|-\frac{1}{6Ln2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{2Ln2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$=\frac{1}{3Ln2}Ln|t-1|-\frac{1}{6Ln2}Ln(t^2+t+1)-\frac{1}{2Ln2}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3Ln2}Ln\left|\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}\,Ln2}\tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\quad,\quad t=2^x$$

۲- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\sin x}dx$ (امیر کبیر ۸۶)

ب) $\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$ (علم و صنعت ۸۸)

ج) $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}$ (برادلی)

د) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ (مارون)

حل

الف) $\tan\frac{x}{2}=u\rightarrow dx=\frac{2du}{1+u^2}\quad,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}$

$$I=\int\frac{u}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{(1+u^2).u}{u^2+1+2u}\cdot\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{2u}{(u+1)^2}du=\int\frac{2(u+1)-2}{(u+1)^2}du$$

$$=\int\frac{2(u+1)}{(u+1)^2}du-2\int\frac{1}{(u+1)^2}du=2\int\frac{1}{u+1}du-2\int\frac{1}{(u+1)^2}du$$

$$=2Ln|u+1|+\frac{2}{u+1}\qquad ,u=\tan\frac{x}{2}$$

■

ب) چون تابع زیرانتگرال، نسبت به sinx فرد است (یعنی با تبدیل sinx به sinx−، تابع قرینه می شود) پس بنابه نکته ۴ صفحه۱۲۴ ، از تغییر متغیر $\cos x = u$ استفاده می کنیم:

$$\cos x = u \to -\sin x\, dx = du \to dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{\sin x(2u^2-1)} \frac{-du}{\sin x} = \int \frac{-du}{(1-\cos^2 x)(2u^2-1)} = \int \frac{du}{(u^2-1)(2u^2-1)}$$

$$= \int \frac{du}{(u-1)(u+1)(\sqrt{2}u-1)(\sqrt{2}u+1)} = \int \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{\sqrt{2}u+1} + \frac{D}{\sqrt{2}u-1} du$$

$$1 = A(u+1)(2u^2-1) + B(u-1)(2u^2-1) + C(u^2-1)(\sqrt{2}u-1) + D(u^2-1)(\sqrt{2}u+1)$$

$$\begin{cases} u=1 \to 2A=1 \to A=\frac{1}{2} \\ u=-1 \to -2B=1 \to B=\frac{-1}{2} \end{cases} , \begin{cases} u=\frac{-1}{\sqrt{2}} \to C=1 \\ u=\frac{1}{\sqrt{2}} \to D=-1 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} + \int \frac{du}{\sqrt{2}u+1} - \int \frac{du}{\sqrt{2}u-1}$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} Ln\left|\frac{\sqrt{2}u+1}{\sqrt{2}u-1}\right| \quad , \quad u = \cos x$$

■

ج) $$I = \int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{dx}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x . dx}{\sin x(\cos x+1)}$$

چون تابع زیرانتگرال، نسبت به sinx فرد است ،از تغییر متغیر $\cos x = u$ استفاده می کنیم:

$$\cos x = u \to -\sin x\, dx = du \to dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$I = \int \frac{u}{\sin x(u+1)} \times \frac{-du}{\sin x} = \int \frac{-u}{\sin^2 x(u+1)} du = \int \frac{-u\, du}{(1-u^2)(u+1)}$$

$$= \int \frac{u}{(u^2-1)(u+1)} du = \int \frac{u}{(u-1)(u+1)^2} du = \int \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2} du$$

$$u = A(u+1)^2 + B(u-1)(u+1) + C(u-1) \to \begin{cases} u=1 \to 1 = 4A \to A = \frac{1}{4} \\ u=-1 \to -1 = -2C \to C = \frac{1}{2} \\ u=0 \to 0 = A-B-C \xrightarrow[C=\frac{1}{2}]{A=\frac{1}{4}} B = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u+1}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)^2}=\frac{1}{4}\text{Ln}\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\frac{1}{2(u+1)}\ ,\ u=\cos x$$

■

د) $$\int\frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int\frac{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^4 x}}dx$$

$$\int\frac{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^4 x}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}\quad ,\quad \tan x=u\rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int\frac{1-u^2}{1+u^4}du=\int\frac{\dfrac{1-u^2}{u^2}}{\dfrac{1+u^4}{u^2}}du=\int\frac{-1+\dfrac{1}{u^2}}{u^2+\dfrac{1}{u^2}}du$$

$$u+\frac{1}{u}=t\rightarrow\left(1-\frac{1}{u^2}\right)du=dt\quad ,\quad u^2+\frac{1}{u^2}=\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2=t^2-2$$

$$\int\frac{-dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{1}{t-\sqrt{2}}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{Ln}\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|\quad ,\ t=u+\frac{1}{u},\ u=\tan x$$

سوال مشابه قسمت ب

۲-۱ $$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$$ (دمیدوویچ)

Ans $$\frac{1}{3}\text{Ln}|\cos x+2|+\frac{1}{6}\text{Ln}|\cos x-1|-\frac{1}{2}\text{Ln}|\cos x+1|$$

۳- انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\int \dfrac{dx}{\sin x + \cos x}$ (خواجه نصیر ۸۴) ب) $\int \dfrac{۲\sin x + ۳\cos x}{۳\sin x + ۲\cos x}dx$ (علم و صنعت ۸۶ - تهران شمال ۸۷)

ج) $\int \dfrac{۱-\sin x}{۱+\cos x}dx$ (تهران جنوب ۸۸ و ۸۷) د) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\cos^۵ x.\sin^۳ x}}$ (علم وصنعت ۹۰)

حل.

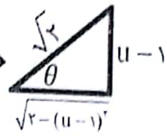
الف) $\tan\dfrac{x}{۲} = u \to dx = \dfrac{۲du}{۱+u^۲}$, $\sin x = \dfrac{۲u}{۱+u^۲}$, $\cos x = \dfrac{۱-u^۲}{۱+u^۲}$

$$I = \int \frac{۱}{\frac{۲u}{۱+u^۲}+\frac{۱-u^۲}{۱+u^۲}}\frac{۲du}{۱+u^۲} = \int \frac{۲}{-u^۲+۲u+۱}du = \int \frac{۲}{۲-(u-۱)^۲}du$$

$$u-۱ = \sqrt{۲}\sin\theta \to du = \sqrt{۲}\cos\theta d\theta$$

$$I = \int \frac{۲}{۲-(\sqrt{۲}\sin\theta)^۲}\times\sqrt{۲}\cos\theta d\theta = \int \frac{۲}{۲(۱-\sin^۲\theta)}.\sqrt{۲}\cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{۲}\cos\theta}{\cos^۲\theta}d\theta = \int \sqrt{۲}\sec\theta d\theta = \sqrt{۲}\,Ln|\sec\theta + \tan\theta| \quad , \quad \frac{u-۱}{\sqrt{۲}} = \sin\theta \to$$



$$I = \sqrt{۲}\,Ln\left|\frac{\sqrt{۲}+u-۱}{\sqrt{۲-(u-۱)^۲}}\right| \quad , \quad u = \tan\frac{x}{۲}$$

■

ب) $\underbrace{۲\sin x + ۳\cos x}_{\text{صورت}} = A\underbrace{(۳\sin x + ۲\cos x)}_{\text{مخرج}} + B\underbrace{(۳\cos x - ۲\sin x)}_{\text{مشتق مخرج}}$

$$\to \begin{cases} ۳A - ۲B = ۲ \\ ۲A + ۳B = ۳ \end{cases} \to A = \frac{۱۲}{۱۳} , B = \frac{۵}{۱۳}$$

$$I = \int \frac{\frac{۱۲}{۱۳}(۳\sin x + ۲\cos x)}{۳\sin x + ۲\cos x}dx + \int \frac{\frac{۵}{۱۳}(۳\cos x - ۲\sin x)}{۳\sin x + ۲\cos x}dx$$

$$= \int \frac{۱۲}{۱۳}dx + \frac{۵}{۱۳}\int \frac{۳\cos x - ۲\sin x}{۳\sin x + ۲\cos x}dx = \frac{۱۲}{۱۳}x + \frac{۵}{۱۳}Ln|۳\sin x + ۲\cos x|$$

■

ج) $t = \tan\dfrac{x}{۲} \to dx = \dfrac{۲dt}{۱+t^۲}$, $\sin x = \dfrac{۲t}{۱+t^۲}$, $\cos x = \dfrac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$

$$I = \int \frac{۱-\frac{۲t}{۱+t^۲}}{۱+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}}\frac{۲dt}{۱+t^۲} = \int \frac{\frac{t^۲+۱-۲t}{۱+t^۲}}{\frac{۲}{۱+t^۲}}\frac{۲dt}{۱+t^۲} = \int \frac{t^۲-۲t+۱}{t^۲+۱}dt = \int ۱-\frac{۲t}{t^۲+۱}dt = t - Ln(t^۲+۱)$$

■

د) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^{5}x.\sin^{3}x}}=\int\cos^{\frac{-5}{2}}x.\sin^{\frac{-3}{2}}x\,dx$ $\quad \frac{-5}{2}+\frac{-3}{2}=-4\rightarrow$ زوج $\rightarrow \tan x=u$

$$\rightarrow dx=\frac{du}{1+u^{2}}\quad,\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^{2}}}\quad,\quad \sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^{2}}}$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{1+u^{2}}})^{5}.(\frac{u}{\sqrt{1+u^{2}}})^{3}}}.\frac{du}{1+u^{2}}=\int\frac{1}{\frac{u\sqrt{u}}{(1+u^{2})^{2}}}\frac{du}{1+u^{2}}=\int\frac{1+u^{2}}{u\sqrt{u}}du$$

$$\rightarrow I=\int\frac{1}{u\sqrt{u}}+\frac{u^{2}}{u\sqrt{u}}du=\int u^{\frac{-3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}du=-2u^{\frac{-1}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\quad,\ u=\tan x$$

سوال مشابه قسمت الف

۳-۱ $\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$ (برادلی) Ans $\frac{1}{4}Ln\left|\frac{-3t+1}{t-3}\right|, t=\tan\frac{x}{2}$

سوال مشابه قسمت د

۳-۲ $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x.\sin^{11}x}}$ (برادلی) Ans $\frac{-3}{8}u^{\frac{-8}{3}}-\frac{3}{2}u^{\frac{-2}{3}}\ ,\ \tan x=u$

۴- انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\int\frac{\sin^{2}x}{2+\sin x}dx$ (شاهرود ۸۷) ب) $\int\frac{dx}{\cos^{2}x-\sin^{2}x+3\sin x\cos x}$ (تبریز ۸۵)

ج) $\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x+2}dx$ (علم و صنعت ۸۴) د) $\int\frac{\cos x}{\sin^{2}x+\sin^{4}x}dx$ (تهران جنوب ۸۴)

هـ) $\int\frac{dx}{2+\cos x}$ (تهران مرکزی ۸۷- قزوین ۸۶ و۸۸- برادلی)

حل

الف) $\tan\frac{x}{2}=u\ \rightarrow\sin x=\frac{2u}{1+u^{2}}\quad,\quad dx=\frac{2du}{1+u^{2}}$

$$I=\int\frac{(\frac{2u}{1+u^{2}})^{2}}{2+\frac{2u}{1+u^{2}}}.\frac{2du}{1+u^{2}}=\int\frac{\frac{4u^{2}}{(1+u^{2})^{2}}}{\frac{u^{2}+u+1}{1+u^{2}}}.\frac{du}{1+u^{2}}=\int\frac{4u^{2}}{(u^{2}+1)^{2}(u^{2}+u+1)}du$$

$$=\int\frac{Au+B}{u^{2}+1}+\frac{Cu+D}{(u^{2}+1)^{2}}+\frac{Eu+F}{u^{2}+u+1}du$$

$$4u^2=(Au+B)(u^2+1)(u^2+u+1)+(Cu+D)(u^2+u+1)+(Eu+F)(u^2+1)^2$$

$$\to A=0\ ,\quad B=-4\quad ,C=4,\quad D=0\quad ,\quad E=0\quad ,\quad F=4$$

$$I=\int\frac{-4du}{u^2+1}+\int\frac{4u}{(u^2+1)^2}du+\int\frac{4}{u^2+u+1}du$$

$$=-4\int\frac{du}{u^2+1}+2\int\frac{2u}{(u^2+1)^2}du+4\int\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$I=-4\tan^{-1}u-\frac{2}{u^2+1}+\frac{8}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\quad u=\tan\frac{x}{2}$$

■

ب) $$\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x}}=\int\frac{(1+\tan^2 x)dx}{1-\tan^2 x+3\tan x}$$

$$\tan x=u\to(1+\tan^2 x)dx=du$$

$$I=\int\frac{du}{-u^2+3u+1}=\int\frac{du}{-(u-\frac{3}{2})^2+\frac{13}{4}}=\int\frac{du}{(\frac{\sqrt{13}}{2}-u+\frac{3}{2})(\frac{\sqrt{13}}{2}+u-\frac{3}{2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\int\frac{1}{(\frac{\sqrt{13}+3}{2})-u}+\frac{1}{(\frac{\sqrt{13}-3}{2})+u}du=\frac{1}{\sqrt{13}}Ln\left|\frac{u+\frac{\sqrt{13}-3}{2}}{-u+\frac{\sqrt{13}+3}{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}Ln\left|\frac{2u+\sqrt{13}-3}{-2u+\sqrt{13}+3}\right|\quad ,\ u=\tan x$$

■

ج) $$\tan\frac{x}{2}=u\to\ dx=\frac{2du}{1+u^2}\quad ,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}\quad ,\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}+2}\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{4u}{(u^2+1)(u^2+2u+3)}du$$

تجزیه کسر : $$\frac{4u}{(u^2+1)(u^2+2u+3)}=\frac{Au+B}{u^2+1}+\frac{Cu+D}{u^2+2u+3}$$

$$\to 4u=(Au+B)(u^2+2u+3)+(Cu+D)(u^2+1)\to A=1\ ,B=1\ ,\ C=-1\ ,\ D=-3$$

$$I=\int\frac{u+1}{u^2+1}du+\int\frac{-u-3}{u^2+2u+3}du=\int\frac{u}{u^2+1}du+\int\frac{du}{u^2+1}-\int\frac{\frac{1}{2}(2u+2)+2}{u^2+2u+3}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2u}{u^2+1}du+\int\frac{du}{u^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2u+2}{u^2+2u+3}du-\int\frac{2}{u^2+2u+3}du$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(u^2+1)+\tan^{-1}u-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(u^2+2u+3)-\int\frac{2}{(u+1)^2+2}du$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{u^2+1}{u^2+2u+3}\right)+\tan^{-1}u-\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad u=\tan\frac{x}{2}$$

■

د) چون تابع زیرانتگرال نسبت به $\cos x$ فرد است ، از تغییرمتغیر $\sin x=u$ می توان استفاده کرد.

$$\sin x=u\to\cos x dx=du\to dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int\frac{\cos x}{u^2+u^4}\frac{du}{\cos x}=\int\frac{du}{u^2(1+u^2)}=\int\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{Cu+D}{1+u^2}du$$

$$\to Au(1+u^2)+B(1+u^2)+(Cu+D)u^2=1\to A=0\ ,\ B=1\ ,\ C=0\ ,\ D=-1$$

$$I=\int\frac{1}{u^2}-\frac{1}{1+u^2}du=\frac{-1}{u}-\arctan u\quad,\quad u=\sin x$$

■

هـ) $\tan\frac{x}{2}=u\to dx=\frac{2du}{1+u^2}\quad,\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$I=\int\frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{2}{3+u^2}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\quad,\quad u=\tan\frac{x}{2}$$

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int\frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x}dx$ (برادلی)

ب) $\int\tan^2 x\sec x\,dx$ (آدامز)

ج) $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx$ (برادلی)

حل

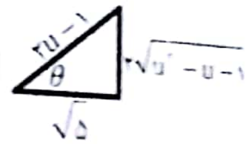
الف) $\int\frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x+\cos x}dx\quad,\cos x=u\to-\sin x\,dx=du$

$$I=\int\frac{-du}{1-u^2+u}=\int\frac{du}{u^2-u-1}=\int\frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1}=\int\frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}$$

$$u-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta \to du=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I=\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta.\tan\theta}{\frac{5}{4}\sec^2\theta-\frac{5}{4}}d\theta=\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta.\tan\theta}{\frac{5}{4}(\sec^2\theta-1)}d\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\int\frac{\sec\theta.\tan\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\int\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}d\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\int\csc\theta\, d\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{Ln}|\csc\theta-\cot\theta|$$



$$I=\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{Ln}\left|\frac{2u-1}{2\sqrt{u^2-u-1}}-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{u^2-u-1}}\right| \to I=\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{Ln}\left|\frac{2u-(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{u^2-u-1}}\right|$$

ب) $$I=\int\tan^2 x\sec x\, dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} u=\tan x \to du=\sec^2 x\, dx \\ dv=\sec x.\tan x dx \to v=\sec x \end{cases}$$

$$I=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\, dx=\sec x\tan x-\int(1+\tan^2 x)\sec x\, dx$$

$$I=\sec x\tan x-\int\sec x\, dx-\underbrace{\int\tan^2 x\sec x\, dx}_{I}$$

$$2I=\sec x\tan x-\mathrm{Ln}|\sec x+\tan x| \to I=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\sec x+\tan x|$$

ج) $$\int\sqrt{1+\sin x}\, dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sin x}\, dx=\int\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\, dx$$

$$=\int\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}$$

۶- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های مثلثاتی زیر:

الف) $\int\frac{1-\cos 4x}{(1+\cos 4x)^2}dx$ (تهران جنوب ۸۳)

ب) $\int\frac{dx}{1+4\cos^2 x}$ (تهران شمال ۸۶)

حل

الف) $$\tan 2x=t \to 2(1+\tan^2 2x)dx=dt \to dx=\frac{dt}{2(1+t^2)}, \cos 4x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})^2}.\frac{dt}{2(1+t^2)}=\int\frac{\frac{2t^2}{1+t^2}}{(\frac{2}{1+t^2})^2}.\frac{dt}{2(1+t^2)}=\int\frac{t^2}{4}dt=\frac{t^3}{12} \quad , t=\tan 2x$$

ب) $I=\int \frac{1}{1+4\cos^2 x}dx=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+4}dx=\int \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x+4}dx$

$$=\int \frac{1+\tan^2 x}{5+\tan^2 x}dx \xrightarrow{\tan x=t} I=\int \frac{dt}{5+t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{5}}\right)$$

۷- انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int \frac{x^2}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx$ (تهران جنوب ۸۷)

ب) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ (تهران مرکزی ۸۸)

ج) $\int \frac{dx}{9-x^2-\sqrt{9-x^2}}$ (برادلی)

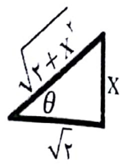
حل

الف) $x=\sqrt{2}\tan\theta \to dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$

$$I=\int \frac{(\sqrt{2}\tan\theta)^2.\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta}{\left((\sqrt{2}\tan\theta)^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{2\tan^2\theta.\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta}{\left(2(\tan^2\theta+1)\right)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{2\sqrt{2}\tan^2\theta.\sec^2\theta}{2\sqrt{2}.\sec^3\theta}d\theta$$

$$=\int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}d\theta=\int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta=\int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}d\theta=\int \frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta d\theta$$

$$=\int \sec\theta-\cos\theta d\theta=\text{Ln}\,|\sec\theta+\tan\theta|-\sin\theta \quad , \frac{x}{\sqrt{2}}=\tan\theta \to$$



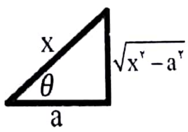
$$I=\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right|-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}=\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{2+x^2}+x}{\sqrt{2}}\right|-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$$

■

ب) $I=\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad x=a\sec\theta \to dx=a\sec\theta\tan\theta d\theta$

$$I=\int \frac{a\sec\theta.\tan\theta d\theta}{(a^2\sec^2\theta-a^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{a\sec\theta.\tan\theta}{a^3\tan^3\theta}d\theta=\frac{1}{a^2}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{a^2}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{-1}{a^2\sin\theta}$$

$\frac{x}{a}=\sec\theta \to$



$$\to I=\frac{-1}{a^2\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)}=\frac{-x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

■

ج) $x = 3\sin\theta \to dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$$I=\int\frac{3\cos\theta\, d\theta}{9-9\sin^2\theta-\sqrt{9-9\sin^2\theta}}=\int\frac{3\cos\theta}{9\cos^2\theta-\sqrt{9\cos^2\theta}}d\theta=\int\frac{3\cos\theta}{9\cos^2\theta-3\cos\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{d\theta}{3\cos\theta-1}\qquad \tan\frac{\theta}{2}=t\to d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}\quad,\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{1}{3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-1}\,\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{2-4t^2}=\int\frac{dt}{1-2t^2}=\int\frac{dt}{(1-\sqrt{2}t)(1+\sqrt{2}t)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-\sqrt{2}t}+\frac{1}{1+\sqrt{2}t}dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Ln}\left|1-\sqrt{2}t\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Ln}\left|1+\sqrt{2}t\right|\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{Ln}\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right|$$

۸- انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int(1+\text{Ln}\,x)\sqrt{1+(x\,\text{Ln}\,x)^2}\,dx$ (امیر کبیر ۸۵)

ب) $\int\frac{x+3}{(x^2+x+2)^2}dx$ (علم و صنعت ۸۶)

ج) $\int\sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$ (علم و صنعت ۸۷-۸۶)

حل

الف) $x\,\text{Ln}\,x=t\to(\text{Ln}\,x+1)dx=dt$

$$I=\int(1+\text{Ln}\,x)\sqrt{1+(x\,\text{Ln}\,x)^2}\,dx\to I=\int\sqrt{1+t^2}\,dt\quad,\quad t=\tan\theta\to dt=\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I=\int\sqrt{1+\tan^2\theta}\,.\sec^2\theta\,d\theta=\int\sec^3\theta\,d\theta$$

$$\begin{cases}u=\sec\theta\to du=\sec\theta.\tan\theta.d\theta\\ dv=\sec^2\theta\,d\theta\to v=\tan\theta\end{cases}\to I=\sec\theta.\tan\theta-\int\sec\theta.\tan^2\theta\,d\theta$$

$$I=\sec\theta.\tan\theta-\int\sec\theta(\sec^2\theta-1)d\theta=\sec\theta.\tan\theta-\underbrace{\int\sec^3\theta\,d\theta}_{I}+\int\sec\theta\,d\theta$$

$$I=\sec\theta.\tan\theta-I+\text{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\to 2I=\sec\theta.\tan\theta+\text{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right|$$

$$I=\frac{1}{2}\sec\theta.\tan\theta+\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\qquad t=\tan\theta\to$$

$$I=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\sqrt{t^2+1}+t\right|\quad,\quad t=x\,\text{Ln}\,x$$

■

$$\text{ب)}\ I=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}}{(x^2+x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+2)^2}\to I=I_1+I_2\quad(*)$$

$$I_۱=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲x+۱}{(x^۲+x+۲)^۲}dx \qquad x^۲+x+۲=t\rightarrow(۲x+۱)dx=dt$$

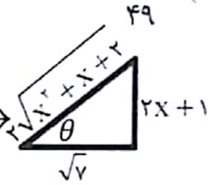
$$I_۱=\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{t^۲}=-\frac{۱}{۲t}=-\frac{۱}{۲(x^۲+x+۲)} \qquad (**)$$

$$I_۲=\frac{۵}{۲}\int\frac{dx}{(x^۲+x+۲)^۲}=\frac{۵}{۲}\int\frac{dx}{((x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۷}{۴})^۲}$$

$$x+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\tan\theta\rightarrow ۲x+۱=\sqrt{۷}\tan\theta\rightarrow dx=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\sec^۲\theta d\theta$$

$$I_۲=\frac{۵}{۲}\int\frac{\frac{\sqrt{۷}}{۲}(\sec^۲\theta)d\theta}{(\frac{۷}{۴}\tan^۲\theta+\frac{۷}{۴})^۲}=\frac{۵\sqrt{۷}}{۴}\int\frac{\sec^۲\theta d\theta}{\frac{۴۹}{۱۶}\sec^۴\theta}=\frac{۲۰\sqrt{۷}}{۴۹}\int\frac{d\theta}{\sec^۲\theta}=\frac{۲۰\sqrt{۷}}{۴۹}\int\cos^۲\theta d\theta$$

$$I_۲=\frac{۲۰\sqrt{۷}}{۴۹}\int\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۱۰\sqrt{۷}}{۴۹}(\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)=\frac{۱۰\sqrt{۷}}{۴۹}(\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$\frac{۲x+۱}{\sqrt{۷}}=\tan\theta\rightarrow$$ 

$$I_۲=\frac{۱۰\sqrt{۷}}{۴۹}\left(\tan^{-۱}(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۷}})+\frac{\sqrt{۷}(۲x+۱)}{۴(x^۲+x+۲)}\right) \qquad (***)$$

$$\xrightarrow{(***),(**),(*)} I=I_۱+I_۲=\frac{-۱}{۲(x^۲+x+۲)}+\frac{۱۰\sqrt{۷}}{۴۹}\left(\tan^{-۱}(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۷}})+\frac{\sqrt{۷}(۲x+۱)}{۴(x^۲+x+۲)}\right) \blacksquare$$

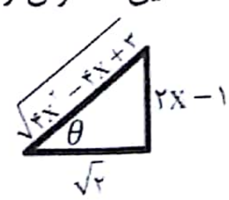
ج) روش اول:

$$۴x^۲-۴x+۳=۴(x^۲-x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴})+۳=۴(x-\frac{۱}{۲})^۲+۲$$

$$۲(x-\frac{۱}{۲})=\sqrt{۲}\tan\theta\rightarrow dx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sec^۲\theta d\theta$$

$$I=\int\sqrt{۴(x-\frac{۱}{۲})^۲+۲}\ dx=\int\sqrt{(\sqrt{۲}\tan\theta)^۲+۲}.\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sec^۲\theta d\theta=\int\sec^۳\theta d\theta$$

در قسمت الف این انتگرال را محاسبه کردیم:

$$I=\frac{۱}{۲}\left(\sec\theta.\tan\theta+Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right) \quad , \quad \frac{۲x-۱}{\sqrt{۲}}=\tan\theta\rightarrow$$ 

$$I=\frac{۱}{۴}(۲x-۱)\sqrt{۴x^۲-۴x+۳}+\frac{۱}{۲}Ln\left|\frac{\sqrt{۴x^۲-۴x+۳}+۲x-۱}{\sqrt{۲}}\right|$$

روش دوم:

تغییر متغیر اول: $\sqrt{۴x^۲-۴x+۳}=\sqrt{۴}x+t=۲x+t$

$$\to ۴x^۲-۴x+۳=۴x^۲+۴xt+t^۲\to x=\frac{۳-t^۲}{۴+۴t}\to dx=\frac{-(t^۲+۲t+۳)}{۴(۱+t)^۲}dt$$

$$I=\int\left(۲\times\frac{۳-t^۲}{۴(۱+t)}+t\right).\frac{-(t^۲+۲t+۳)}{۴(۱+t)^۲}dt=\frac{-۱}{۸}\int\frac{t^۲+۲t+۳}{(۱+t)}.\frac{t^۲+۲t+۳}{(۱+t)^۲}dt$$

$$=\frac{-۱}{۸}\int\frac{(t^۲+۲t+۳)^۲}{(۱+t)^۳}dt=\frac{-۱}{۸}\int\frac{((t+۱)^۲+۲)^۲}{(۱+t)^۳}dt \qquad ,t+۱=u$$

$$\to I=\frac{-۱}{۸}\int\frac{(u^۲+۲)^۲}{u^۳}du=\frac{-۱}{۸}\int\frac{u^۴+۴u^۲+۴}{u^۳}du=\frac{-۱}{۸}\int u+\frac{۴}{u}+\frac{۴}{u^۳}du$$

$$=-\frac{۱}{۸}\left(\frac{u^۲}{۲}+۴Ln|u|-\frac{۲}{u^۲}\right)\quad,\quad u=t+۱\quad,\quad t=\sqrt{۴x^۲-۴x+۳}-۲x$$

۹- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\frac{dx}{x\sqrt{۹-۴x^۲}}$ (تهران مرکزی ۸۳)

ب) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۱}}$ (تهران مرکزی ۸۹)

ج) $\int\frac{\arcsin x-x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$ (تهران جنوب ۸۳)

د) $\int\frac{x\sqrt{۲-x^۲}}{\sqrt{x^۲+۱}}$ (آدامز)

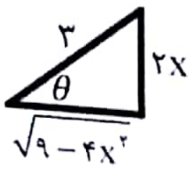
هـ) $\int\frac{dx}{(x+\frac{۱}{۲})\sqrt{۴x^۲+۴x}}$ (برادلی)

حل

الف) $۲x=۳\sin\theta\to dx=\frac{۳}{۲}\cos\theta d\theta$

$$I=\int\frac{۱}{\frac{۳}{۲}\sin\theta.\sqrt{۹-(۳\sin\theta)^۲}}.\frac{۳}{۲}\cos\theta d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{۹(۱-\sin^۲\theta)}}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta\times۳\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۳}\int\csc\theta d\theta=\frac{۱}{۳}Ln|\csc\theta-\cot\theta| \qquad ,\frac{۲x}{۳}=\sin\theta\to$$



$$\to I=\frac{۱}{۳}Ln\left|\frac{۳-\sqrt{۹-۴x^۲}}{۲x}\right|$$

ب) $x=\tan\theta \to dx=\sec^{۲}\theta\, d\theta$

$$I=\int\frac{\sec^{۲}\theta\, d\theta}{\tan\theta\sqrt{\tan^{۲}\theta+۱}}=\int\frac{\sec^{۲}\theta\, d\theta}{\tan\theta.\sec\theta}=\int\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta=\int\csc\theta\, d\theta=\mathrm{Ln}|\csc\theta-\cot\theta|$$

$x=\tan\theta\to$ 

$\to I=\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}}{x}-\frac{۱}{x}\right|$

■

ج) $$I=\int\frac{\arcsin x-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}-\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\overbrace{\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}^{I_۱}-\overbrace{\int\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}^{I_۲}$$

$$I_۱:\arcsin x=t\to\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=dt\ \Rightarrow I_۱=\int t\, dt=\frac{t^{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\arcsin^{۲}x$$

$$I_۲:۱-x^{۲}=t\to x\, dx=\frac{dt}{-۲}\qquad\Rightarrow I_۲=\frac{-۱}{۲}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}=-\sqrt{۱-x}$$

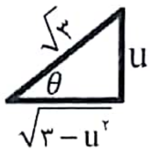
$$I=I_۱-I_۲\to I=\frac{۱}{۲}\arcsin^{۲}x+\sqrt{۱-x^{۲}}$$

■

د) $I=\int\frac{x\sqrt{۲-x^{۲}}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}dx\qquad x^{۲}+۱=u^{۲}\to ۲x\, dx=۲u\, du\to x\, dx=u\, du$

$$I=\int\frac{u\sqrt{۲-(u^{۲}-۱)}\, du}{u}=\int\sqrt{۳-u^{۲}}\, du\qquad u=\sqrt{۳}\sin\theta\to du=\sqrt{۳}\cos\theta\, d\theta$$

$$I=\int\sqrt{۳-۳\sin^{۲}\theta}.\sqrt{۳}\cos\theta\, d\theta=\int\sqrt{۳}\cos\theta.\sqrt{۳}\cos\theta\, d\theta=۳\int\cos^{۲}\theta\, d\theta$$

$$=۳(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin۲\theta)=\frac{۳}{۲}\theta+\frac{۳}{۲}\sin\theta.\cos\theta\qquad,\frac{u}{\sqrt{۳}}=\sin\theta\to$$ 

$$I=\frac{۳}{۲}\sin^{-۱}(\frac{u}{\sqrt{۳}})+\frac{۳}{۲}(\frac{u}{\sqrt{۳}})(\frac{\sqrt{۳-u^{۲}}}{\sqrt{۳}})=\frac{۳}{۲}\sin^{-۱}(\frac{u}{\sqrt{۳}})+\frac{u\sqrt{۳-u^{۲}}}{۲}\ ,\ u=\sqrt{x^{۲}+۱}$$

■

هـ) $۴x^{۲}+۴x=۴(x^{۲}+x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴})=۴((x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴})=۴(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-۱$

$$I=\int\frac{dx}{(x+\frac{۱}{۲}).\sqrt{۴(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-۱}}\qquad,۲(x+\frac{۱}{۲})=\sec\theta\to dx=\frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I=\int\frac{\frac{۱}{۲}\sec\theta.\tan\theta\, d\theta}{\frac{۱}{۲}\sec\theta.\sqrt{\sec^{۲}\theta-۱}}=\int\frac{\tan\theta}{\tan\theta}d\theta=\int d\theta=\theta=\mathrm{arcsec}(۲x+۱)$$

سوال مشابه قسمت الف

۹-۱ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ (قزوین ۸۶ - فردوسی۸۵) Ans $\frac{-\sqrt{9-x^2}}{9x}$

۱۰- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{dx}{x(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (آدامز)

ب) $\int \frac{x^7+x^6+3x^5+2x^4+x^3+x-1}{x^6+2x^4+x^2}$ (شریف ۸۳)

ج) $\int \frac{x^3}{x^4+x^2-2}$ (دمیدوویچ)

د) $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$ (علم و صنعت ۸۴)

هـ) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ (بوعلی سینا ۸۹- دمیدوویچ)

و) $\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)^2}$

حل

الف) $1-x^2=u^2 \to -2x\,dx=2u\,du \to dx=\frac{-u}{x}dx$

$$\int\frac{-u\,du}{x^2(3+x^2)u}=\int\frac{-du}{(1-u^2)(4-u^2)}=\int\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}+\frac{C}{2-u}+\frac{D}{2+u}du$$

$$\to A=\frac{-1}{6}\quad,\quad B=\frac{-1}{6}\quad,\quad C=\frac{1}{12}\quad,\quad D=\frac{1}{12}$$

$$I=-\frac{1}{6}\int\frac{du}{1-u}-\frac{1}{6}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{12}\int\frac{du}{2-u}+\frac{1}{12}\int\frac{du}{2+u}$$

$$=\frac{1}{6}Ln|1-u|-\frac{1}{6}Ln|1+u|-\frac{1}{12}Ln|2-u|+\frac{1}{12}Ln|2+u|$$

$$=\frac{1}{6}Ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+\frac{1}{12}Ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right|=\frac{1}{6}Ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+\frac{1}{12}Ln\left|\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{1-x^2}}\right|$$

■

ب) با تقسیم صورت تابع زیر انتگرال بر مخرج آن می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{تابع زیرانتگرال}=x+1+\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}$$

$$\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}=\frac{x^5-x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$A=-1,\ B=1,\ C=-2,\ D=0\ ,E=0\ ,F=1$$

$$I=\int(x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1})dx=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{x}+Ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+\tan^{-1}x$$

■

ج) $\int \frac{x^{۳}}{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۲)}dx = \int \frac{x^{۳}}{(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۲)}dx = \int \frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}+\frac{Cx+D}{x^{۲}+۲}dx$

$$x^{۳} = A(x+۱)(x^{۲}+۲)+B(x-۱)(x^{۲}+۲)+(Cx+D)(x-۱)(x+۱)$$

$$\rightarrow A=\frac{۱}{۶} \quad , \quad B=\frac{۱}{۶} \quad , \quad C=\frac{۲}{۳} \quad , \quad D=۰$$

$$I=\frac{۱}{۶}\int\frac{dx}{x-۱}+\frac{۱}{۶}\int\frac{dx}{x+۱}+\frac{۲}{۳}\int\frac{x}{x^{۲}+۲}dx$$

$$=\frac{۱}{۶}Ln|x-۱|+\frac{۱}{۶}Ln|x+۱|+\frac{۱}{۳}Ln(x^{۲}+۲)=\frac{۱}{۶}Ln|x^{۲}-۱|+\frac{۱}{۳}Ln(x^{۲}+۲)$$

■

د) $\frac{x^{۴}+۴x^{۳}+۱۱x^{۲}+۱۲x+۸}{(x^{۲}+۲x+۳)^{۲}(x+۱)}=\frac{Ax+B}{x^{۲}+۲x+۳}+\frac{Cx+D}{(x^{۲}+۲x+۳)^{۲}}+\frac{E}{x+۱}$

$$x^{۴}+۴x^{۳}+۱۱x^{۲}+۱۲x+۸=(Ax+B)(x^{۲}+۲x+۳)(x+۱)+(Cx+D)(x+۱)+E(x^{۲}+۲x+۳)^{۲}$$

$$\rightarrow A=۰ \quad , \quad B=۰ \quad , \quad C=۱ \quad , \quad D=-۱ \quad , \quad E=۱$$

$$I=\int\frac{x-۱}{(x^{۲}+۲x+۳)^{۲}}dx+\int\frac{dx}{x+۱}=\int\frac{x+۱-۲}{\left((x+۱)^{۲}+۲\right)^{۲}}dx+Ln|x+۱|$$

$$=\underbrace{\int\frac{x+۱}{\left((x+۱)^{۲}+۲\right)^{۲}}dx}_{I_{۱}}-\underbrace{\int\frac{۲}{\left((x+۱)^{۲}+۲\right)^{۲}}dx}_{I_{۲}}+Ln|x+۱|\rightarrow I=I_{۱}-I_{۲}+Ln|x+۱| \quad (*)$$

$$I_{۱}:(x+۱)^{۲}+۲=u\rightarrow ۲(x+۱)dx=du\rightarrow (x+۱)dx=\frac{du}{۲}$$

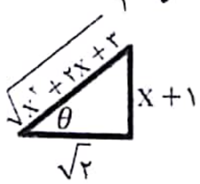
$$I_{۱}=\int\frac{\frac{du}{۲}}{u^{۲}}=\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u^{۲}}=-\frac{۱}{۲u}=\frac{-۱}{۲(x^{۲}+۲x+۳)}$$

$$I_{۲}:x+۱=\sqrt{۲}\tan\theta\rightarrow dx=\sqrt{۲}\sec^{۲}\theta d\theta$$

$$I_{۲}=\int\frac{۲}{\left((\sqrt{۲}\tan\theta)^{۲}+۲\right)^{۲}}.\sqrt{۲}\sec^{۲}\theta d\theta=\int\frac{۲}{\left(۲\tan^{۲}\theta+۲\right)^{۲}}.\sqrt{۲}\sec^{۲}\theta d\theta$$

$$\int\frac{۲\sqrt{۲}\sec^{۲}\theta}{۴(\tan^{۲}\theta+۱)^{۲}}d\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\int\frac{\sec^{۲}\theta}{(\sec^{۲}\theta)^{۲}}d\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\int\cos^{۲}\theta d\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\int\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}d\theta$$

$$I_{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin\theta.\cos\theta\right) \quad , \frac{x+۱}{\sqrt{۲}}=\tan\theta\rightarrow$$



$$I_2=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}$$

$$\xrightarrow{(*)} I=I_1-I_2+\ln|x+1| \rightarrow I=\frac{x}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\ln|x+1|$$

■

هـ) $$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2}=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2}=\int\frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

تجزیه کسر: $$\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\rightarrow A=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad ,B=\frac{1}{2} \quad ,C=\frac{-\sqrt{2}}{4} \quad ,D=\frac{1}{2}$$

$$I=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$I=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x-\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dX$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

$$I=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)$$

■

و) $$x^5=u\rightarrow 5x^4dx=du\rightarrow dx=\frac{du}{5x^4}$$

$$I=\int\frac{\frac{du}{5x^4}}{x(u+1)^2}=\int\frac{du}{5x^5(u+1)^2}=\int\frac{du}{5u(u+1)^2}=\int\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^2}du$$

$$\frac{1}{5}=A(u+1)^2+Bu(u+1)+Cu\rightarrow\begin{cases}u=0\rightarrow A=\frac{1}{5}\\ u=-1\rightarrow C=\frac{-1}{5}\\ u=1\rightarrow\frac{1}{5}=4A+2B+C\xrightarrow[C=\frac{-1}{5}]{A=\frac{1}{5}}B=\frac{-1}{5}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{5}\int \frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}du=\frac{1}{5}\left(\mathrm{Ln}|u|-\mathrm{Ln}|u+1|+\frac{1}{u+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{Ln}\left|\frac{u}{u+1}\right|+\frac{1}{5(u+1)}\qquad,\quad u=x^5$$

سوال مشابه قسمت و

۱۰-۱ $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$ (دمیدوویچ) Ans $-\frac{1}{21}\mathrm{Ln}(x^3+1)+\frac{8}{21}\mathrm{Ln}(x^3+8)$

۱۰-۲ $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5}}$ Ans $\frac{1}{5}\mathrm{Ln}\left(\frac{x^5}{x^5+2}\right)$

۱۰-۳ $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-3x^4+2}dx$ Ans $\frac{1}{36}\mathrm{Ln}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2}\right)-\frac{1}{6}.\frac{1}{x^4-1}$

۱۱- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ (تهران مرکزی ۸۶ و ۸۸- شریف ۸۴)

ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (تهران جنوب ۸۷ و ۸۴- قزوین ۸۸)

ج) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ (تهران جنوب ۸۹)

حل

الف) $x=t^6\rightarrow dx=6t^5\,dt$

$$I=\int \frac{1+t^2}{1+t^3}\times 6t^5\,dt=\int \frac{6t^7+6t^5}{1+t^3}dt=6\int t^4+t^2-t+\frac{-t^2+t}{t^3+1}dt$$

$$=6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-\int \frac{t^2}{t^3+1}dt+\int \frac{t}{t^3+1}dt\right)=\frac{6t^5}{5}+2t^3-3t^2-2\mathrm{Ln}|t^3+1|+6\underbrace{\int \frac{t}{t^3+1}dt}_{I_1}\quad(*)$$

$$I_1=\int \frac{t}{t^3+1}dt=\int \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)}dt=\int \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}dt$$

$$\rightarrow A=\frac{-1}{3}\ ,\quad B=\frac{1}{3}\ ,\quad C=\frac{1}{3}$$

$$I_1=-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt=-\frac{1}{3}\mathrm{Ln}|t+1|+\frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt$$

$$=-\frac{1}{3}\mathrm{Ln}|t+1|+\frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$I_1=-\frac{۱}{۳}Ln|t+۱|+\frac{۱}{۶}Ln|t^۲-t+۱|+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}\left(\frac{۲t-۱}{\sqrt{۳}}\right)\qquad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} I=\frac{۶t^۵}{۵}+۲t^۳-۳t^۲-۲Ln\left|\frac{(t^۳+۱)(t+۱)}{\sqrt{t^۲-t+۱}}\right|+۲\sqrt{۳}\tan^{-۱}\left(\frac{۲t-۱}{\sqrt{۳}}\right)\ ,\ t=\sqrt[۶]{x}$$

■

ب) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}\qquad x=t^۶\to dx=۶t^۵\,dt$

$$I=\int\frac{۶t^۵\,dt}{t^۳-t^۲}=۶\int\frac{t^۳}{t-۱}dt=۶\int t^۲+t+۱+\frac{۱}{t-۱}dt=۲t^۳+۳t^۲+۶t+۶Ln|t-۱|\ ,\ t=\sqrt[۶]{x}$$

■

ج) $\int\frac{dx}{\sqrt{۲x-۱}-\sqrt[۴]{۲x-۱}}\qquad ۲x-۱=t^۴\to ۲dx=۴t^۳\,dt\to dx=۲t^۳\,dt$

$$I=\int\frac{۲t^۳\,dt}{t^۲-t}=\int\frac{۲t^۲}{t-۱}\,dt$$

چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است پس ابتدا تقسیم می کنیم و بعد انتگرال می گیریم

$$I=\int(۲t+۲)+\frac{۲}{t-۱}dt=t^۲+۲t+۲Ln|t-۱|\ ,\ t=\sqrt[۴]{۲x-۱}$$

سوال مشابه قسمت الف

۱-۱۱ $\int\frac{dx}{x^۳+۱}$ (تهران مرکزی ۸۴) **ANS** $\frac{۱}{۳}Ln\left|\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲-x+۱}}\right|+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۱۲- انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^۲-x+۱}}$ (تهران شمال ۸۶- تهران جنوب ۸۵- تهران ۸۳)

ب) $\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{x^۲+x+۱}}$

حل

الف) $\sqrt{x^۲-x+۱}=x+t\to x^۲-x+۱=x^۲+۲xt+t^۲\to x=\frac{۱-t^۲}{۲t+۱}\to dx=\frac{-۲(t^۲+t+۱)}{(۲t+۱)^۲}dt$

$$I=\int\frac{۱}{\underbrace{x+x}_{۲x}+t}\cdot\frac{-۲(t^۲+t+۱)}{(۲t+۱)^۲}dt=\int\frac{۱}{\frac{۲(۱-t^۲)}{۲t+۱}+t}\cdot\frac{-۲(t^۲+t+۱)}{(۲t+۱)^۲}dt$$

$$I=\int\frac{۱}{\frac{t+۲}{۲t+۱}}\cdot\frac{-۲(t^۲+t+۱)}{(۲t+۱)^۲}dt=-۲\int\frac{t^۲+t+۱}{(t+۲)(۲t+۱)}dt$$

چون درجه صورت $\leq$ مخرج است ، ابتدا تقسیم می‌کنیم.

$$I=\int -1+\frac{3t}{(t+2)(2t+1)}dt=-t+\int \frac{A}{t+2}+\frac{B}{2t+1}dt$$

$$3t=A(2t+1)+B(t+2)\to\begin{cases} t=\frac{-1}{2}\to\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}B\to B=-1\\ t=-2\to -6=-3A\to A=2\end{cases}$$

$$I=-t+\int\frac{2dt}{t+2}-\int\frac{dt}{2t+1}=-t+2\text{Ln}|t+2|-\frac{1}{2}\text{Ln}|2t+1| \quad ,\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x$$

■

ب) اویلر: $\sqrt{1+x+x^2}=x+t\to 1+x+x^2=x^2+2tx+t^2\to x=\dfrac{1-t^2}{2t-1}$

$$\to dx=\frac{2(-t^2+t-1)}{(2t-1)^2}dt$$

$$I=\int\frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t-1}\right)^2\cdot\left(\frac{1-t^2}{2t-1}+t\right)}\cdot\frac{2(-t^2+t-1)}{(2t-1)^2}dt=\int\frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t-1}\right)^2\cdot\left(\frac{t^2-t+1}{2t-1}\right)}\cdot\frac{2(-t^2+t-1)}{(2t-1)^2}dt$$

$$=-2\int\frac{2t-1}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{2-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}dt=\int\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}dt$$

$$2-4t=A(1-t)(1+t)^2+B(1+t)^2+C(1+t)(1-t)^2+D(1-t)^2$$

$$\to A=\frac{1}{2}\quad ,\ B=\frac{-1}{2}\quad ,\ C=\frac{1}{2}\quad ,\ D=\frac{3}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$I=\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t-2}{1-t^2}\quad ,t=\sqrt{1+x+x^2}-x$$

سوال مشابه قسمت الف

۱-۱۲ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ (تهران جنوب ۸۹- تهران ۸۳)

Ans $\text{Ln}\left|\dfrac{t-2}{t}\right| \quad ,\ t=\sqrt{x^2+x+1}-x$

سوال مشابه قسمت ب

۱۲-۲ $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+2}}$ (برادلی)

Ans $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Ln}\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|$, $t=\sqrt{4x^2+4x+2}-2x$

۱۲-۳ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ (آدامز)

Ans $\text{Ln}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$, $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$

۱۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x\,\text{Ln}(1+\sqrt{1+x^2})\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (دمیدوویچ)

ب) $\int \frac{\text{Ln}(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$ (دمیدوویچ)

ج) $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$ (مارون)

حل

الف) جزء به جزء:
$$\begin{cases} u=\text{Ln}(1+\sqrt{1+x^2}) \to du=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\,(1+\sqrt{1+x^2})}dx \\ dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \to v=\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$I=uv-\int v\,du=\sqrt{1+x^2}\,\text{Ln}(1+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}dx \qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}dx \qquad ,1+x^2=u^2 \to dx=\frac{u\,du}{x}$$

$$I_1=\int\frac{x}{1+u}.\frac{u\,du}{x}=\int\frac{u}{u+1}du=\int\frac{u+1-1}{u+1}du=\int 1-\frac{1}{u+1}du=u-\text{Ln}|u+1|$$

$$I_1=\sqrt{1+x^2}-\text{Ln}(\sqrt{1+x^2}+1)$$

با جایگذاری در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$I=\sqrt{1+x^2}\,\text{Ln}(1+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{1+x^2}+\text{Ln}(\sqrt{1+x^2}+1)$$

■

ب)
$$\begin{cases} u = \mathrm{Ln}(1+x+x^2) \to du = \dfrac{1+2x}{1+x+x^2}dx \\ dv = (1+x)^{-2}dx \to v = \dfrac{-1}{(x+1)} \end{cases}$$

$$I = uv - \int v\,du = \frac{-1}{(x+1)}\mathrm{Ln}(1+x+x^2) + \underbrace{\int \frac{1+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}dx}_{I_1} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{1+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \int \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx$$

$$1+2x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1) \to A = -1 \ , \ B = 1 \ , \ C = 2$$

$$I_1 = \int \frac{-dx}{x+1} + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = -\mathrm{Ln}|x+1| + \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$I_1 = -\mathrm{Ln}|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$I_1 = \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x+1|} + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

با توجه به (*) داریم:

$$I = \frac{-1}{(x+1)}\mathrm{Ln}(1+x+x^2) + I_1$$

$$= \frac{-1}{(x+1)}\mathrm{Ln}(1+x+x^2) + \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x+1|} + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

■

ج)
$$I = \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}dx = \int \sqrt{x}(x+1) - x\sqrt{x+1}\,dx$$

$$I = \int \sqrt{x^3} + \sqrt{x}\,dx - \underbrace{\int x\sqrt{x+1}\,dx}_{I_1} \to I = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - I_1 \qquad (*)$$

$$I_1 : x+1 = t^2 \to dx = 2t\,dt$$

$$I_1 = \int (t^2-1).t.2t\,dt = \int 2t^4 - 2t^2\,dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5 - \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3$$

با جایگذاری در رابطه (*) خواهیم داشت:

$$I = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$$

۱۴- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int \frac{1}{x}.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ (تهران جنوب ۸۸- فردوسی ۸۵)

ب) $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^4\sqrt{x^2+x+1}}$ (امیر کبیر ۸۵)

ج) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$ (علم و صنعت ۸۸)

د) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}.\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ (علم و صنعت ۸۶ و ۹۰)

حل

الف) $\frac{1+x}{1-x}=t^2 \to 1+x=t^2-xt^2 \to x+xt^2=t^2-1 \to x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \to dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$

$$I=\int \frac{1}{\frac{t^2-1}{t^2+1}}.t.\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}=\int \frac{4t^2\,dt}{(t^2-1)(t^2+1)}=\int \frac{4t^2\,dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}$$

تجزیه کسر: $\frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$

$$\to 4t^2=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)(t+1)$$

$$\to A=1 \quad ,B=-1 \quad ,C=0 \quad ,D=2$$

$$I=\int \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\,dt=Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\tan^{-1}t \;,\; t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

■

ب) $I=\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^4\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$ $\qquad x+\frac{1}{2}=u \to dx=du$

$I=\int \frac{du}{u^4\sqrt{\frac{3}{4}+u^2}}=\int u^{-4}(\frac{3}{4}+u^2)^{\frac{-1}{2}}\,du$ $\qquad \frac{m+1}{n}+p=-2\in \mathbb{Z} \to \frac{3}{4}+u^2=u^2t^2$

$$\to \frac{\frac{3}{4}}{t^2-1}=u^2 \to \frac{-3t\,dt}{2(t^2-1)^2}=2u\,du \to \frac{-3t\,dt}{4u(t^2-1)^2}=du$$

$$I=\int \frac{1}{u^4.ut}.\frac{-3t}{4u(t^2-1)^2}dt=\frac{-3}{4}\int \frac{1}{u^6}.\frac{1}{(t^2-1)^2}dt=\frac{-3}{4}\int (\frac{4(t^2-1)}{3})^3.\frac{1}{(t^2-1)^2}dt$$

$$=-\frac{16}{9}\int t^2-1\,dt=\frac{-16}{9}(\frac{t^3}{3}-t) \quad ,t=\sqrt{\frac{3}{4u^2}+1} \;,\; u=x+\frac{1}{2}$$

■

ج) $I=\int\frac{2x+2+1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}dx$

$$I=\underbrace{\int\frac{(2x+2)}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}}_{I_2}\rightarrow I=I_1+I_2\quad(*)$$

$$I_1:\sqrt{x^2+2x+4}=t\rightarrow x^2+2x+4=t^2\rightarrow(2x+2)dx=2t\,dt$$

$$I_1=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-1).t}=\int\frac{2dt}{t^2-1}=\int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt=Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\quad,\quad t=\sqrt{x^2+2x+4}\quad(**)$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\qquad\underbrace{x^2+2x+4}_{(x+1)^2+3=u}=u\rightarrow dx=\frac{du}{2(x+1)}=\frac{du}{2(\sqrt{u-3})}$$

$$I_2=\int\frac{1}{(u-1)\sqrt{u}}.\frac{du}{2\sqrt{u-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-1)(\sqrt{u^2-3u})}$$

اویلر: $\sqrt{u^2-3u}=ut\rightarrow u^2-3u=u^2t^2\rightarrow u-3=ut^2\rightarrow u=\frac{3}{1-t^2}\rightarrow du=\frac{6t}{(1-t^2)^2}dt$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{3}{1-t^2}-1\right)\left(\frac{3t}{1-t^2}\right)}.\frac{6t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{dt}{2+t^2}$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\quad,\quad t=\sqrt{\frac{u-3}{u}}\quad,\quad u=x^2+2x+4\quad(***)$$

$$\xrightarrow{(***),(**),(*)}I=I_1+I_2=Ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+4}}\right)$$

■

د) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}.\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\int x^{\frac{-3}{2}}(1+x^{\frac{3}{4}})^{\frac{-1}{3}}dx\quad,\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}=-1\in\mathbb{Z}$

$$1+x^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{3}{4}}t^3\rightarrow x^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{t^3-1}\rightarrow\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}dx=\frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}dt\rightarrow dx=\frac{-4t^2x^{\frac{1}{4}}}{(t^3-1)^2}dt$$

$$I=\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{4}}t}.\frac{-4t^2x^{\frac{1}{4}}}{(t^3-1)^2}dt=-4\int\frac{t}{(\frac{1}{t^3-1})^2(t^3-1)^2}dt=-4\int t\,dt=-2t^2,\quad t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{-3}{4}}}$$

سوال مشابه قسمت الف

۱۴-۱ $\int \sqrt{\dfrac{x+1}{(x-1)^3}}\,dx \quad , \quad x \geq 1$ (خواجه نصیر ۸۴) **Ans** $-2t + \operatorname{Ln}\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right| \quad , \quad t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

۱۴-۲ $\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx$ (تهران جنوب ۸۷) **Ans** $\operatorname{Ln}\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| - \dfrac{2t}{t^2-1} \quad , \quad t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۱۵- انتگرال زیر را بدست آورید.

الف) $\int \dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ (علم و صنعت ۸۴ و ۸۷)

ب) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2\,(x-1)^4}}$ (علم و صنعت ۸۶)

ج) $\int \dfrac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}\,dx$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف) $I = \int x^{-11}.(1+x^4)^{\frac{-1}{2}}\,dx \qquad \dfrac{m+1}{n} + P = -3 \in \mathbb{Z} \to 1 + x^4 = x^4 t^2 \to x^4 = \dfrac{1}{t^2-1}$

$$\to 4x^3 dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt \to dx = \frac{-t}{2x^3(t^2-1)^2}dt$$

$$I = \int \frac{1}{x^{11}\sqrt{x^4 t^2}} \times \frac{-t}{2x^3\,(t^2-1)^2}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{x^{16}.(t^2-1)^2} = \frac{-1}{2}\int \frac{(t^2-1)^4}{(t^2-1)^2}dt$$

$$I = \frac{-1}{2}\int t^4 - 2t^2 + 1\,dt = \frac{-1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) \quad , \quad t = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$$

■

ب) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2\,(x-1)^4}} = \int \dfrac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}}$

$$\frac{x-1}{x+1} = t^3 \to \frac{2}{(x+1)^2}dx = 3t^2\,dt \to dx = \frac{3}{2}t^2\,(x+1)^2\,dt$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}t^2\,(x+1)^2\,dt}{(x^2-1).t} = \frac{3}{2}\int \frac{x+1}{x-1}.t\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}t.dt = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{-3}{2t} = \frac{-3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

■

ج) $\dfrac{2-x}{2+x} = t^3 \to x = \dfrac{2-2t^3}{1+t^3} \to dx = \dfrac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$

$$I = \int \frac{2}{\left(2 - \dfrac{2-2t^3}{1+t^3}\right)^2}.t.\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{-3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}$$

۱۶- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (قزوین ۸۸و۸۷)   ب) $\int (x^{3}+4x-1)e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ (علم و صنعت ۸۶)

ج) $\int x\sec^{-1}x\,dx$ (آدامز)

حل

الف) $\sqrt{x}=t \to x=t^{2} \to dx=2t\,dt$

$$I=\int e^{t}.2t\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} u=2t \to du=2dt \\ dv=e^{t}dt \to v=e^{t} \end{cases} \to I=2te^{t}-\int 2e^{t}dt=2te^{t}-2e^{t}\ ,\quad t=\sqrt{x}$$

■

ب) $$I=\int (x^{3}+4x-1)e^{\frac{1}{2}x}dx \qquad \begin{cases} u=x^{3}+4x-1 \to du=\left(3x^{2}+4\right)dx \\ dv=e^{\frac{1}{2}x}dx \to v=2e^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$I=2e^{\frac{1}{2}x}(x^{3}+4x-1)-\int (3x^{2}+4)\times 2e^{\frac{1}{2}x}dx \qquad \begin{cases} u=3x^{2}+4 \to du=6x\,dx \\ dv=2e^{\frac{1}{2}x}dx \to v=4e^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$I=2e^{\frac{1}{2}x}(x^{3}+4x-1)-4e^{\frac{1}{2}x}(3x^{2}+4)+\int 24xe^{\frac{1}{2}x}dx \qquad \begin{cases} u=24x \to du=24dx \\ dv=e^{\frac{1}{2}x}dx \to v=2e^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$I=e^{\frac{1}{2}x}\left(2(x^{3}+4x-1)-4(3x^{2}+4)+48x\right)-48\int e^{\frac{1}{2}x}dx=e^{\frac{1}{2}x}(2x^{3}-12x^{2}+56x-114)$$

■

ج) $$I=\int x\sec^{-1}x\,dx \quad \begin{cases} u=\sec^{-1}x \to du=\dfrac{dx}{|x|\sqrt{x^{2}-1}} \\ dv=x\,dx \to v=\dfrac{x^{2}}{2} \end{cases} \to I=\frac{x^{2}}{2}\sec\quad x-\frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^{2}-1}}dx$$

$$\text{if}\ \ x>1:\ I=\frac{x^{2}}{2}\sec^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}dx=\frac{x^{2}}{2}\sec^{-1}x-\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}-1}\quad (*)$$

$$\text{if}\ x<-1\ :I=\frac{x^{2}}{2}\sec^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}dx=\frac{x^{2}}{2}\sec^{-1}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}-1}\quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} I=\frac{x^{2}}{2}\sec^{-1}x-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x)\sqrt{x^{2}-1}$$

۱۷- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\arcsin x}{x^{۲}}dx$ (تهران جنوب ۸۶- مازون) ب) $\int (\arcsin x)^{۲} dx$ (تهران مرکزی ۸۸)

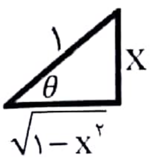
حل

الف) جزء به جزء:
$$\begin{cases} u = \arcsin x \to du = \dfrac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \\ dv = \dfrac{dx}{x^{۲}} \to v = \dfrac{-۱}{x} \end{cases}$$

$$I = uv - \int v\,du \to I = \frac{-۱}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{۱-x^{۲}}} \to I = -\frac{۱}{x}\arcsin x + I_{۱} \quad (*)$$

$$I_{۱} = \int \frac{dx}{x\sqrt{۱-x^{۲}}} \qquad x = \sin\theta \to dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$I_{۱} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \int \csc\theta\, d\theta = \text{Ln}|\csc\theta - \cot\theta|$$

$x = \sin\theta \to$ 

$\to I_{۱} = \text{Ln}\left|\dfrac{۱}{x} - \dfrac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}\right| = \text{Ln}\left|\dfrac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}\right|$

با توجه به (*) می توان نوشت:

$$I = \frac{-۱}{x}\arcsin x + I_{۱} = \frac{-۱}{x}\arcsin x + \text{Ln}\left|\frac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}\right|$$

■

ب) $\int (\arcsin x)^{۲} dx$:
$$\begin{cases} u = (\arcsin x)^{۲} \to du = \dfrac{۲}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\arcsin x\, dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$$I = uv - \int v\,du \to I = x(\arcsin x)^{۲} - \int \frac{۲x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\arcsin x\, dx \to I = x(\arcsin x)^{۲} - I_{۱} \quad (*)$$

$$I_{۱}: \begin{cases} u = \arcsin x \to du = \dfrac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \\ dv = \dfrac{۲x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx \to v = -۲\sqrt{۱-x^{۲}} \end{cases}$$

$$I_{۱} = uv - \int v\,du = -۲\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x + \int ۲\,dx = -۲\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x + ۲x$$

با جایگذاری $I_{۱}$ در تساوی (*) داریم:

$$I = x(\arcsin x)^{۲} - I_{۱} = x(\arcsin x)^{۲} + ۲\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x - ۲x$$

سوال مشابه

۱-۱۷ $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2}dx$ (تهران ۸۷ و ۸۶) Ans $-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x}-\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

۱۸- حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$ (مارون)　　ب) $\int \sin x\,\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}\,x)dx$

ج) $\int \frac{\sin(\mathrm{Ln}\,x)}{x^2}$ (تهران مرکزی ۸۹- آدامز)　　د) $\int \sin 2x\,\mathrm{Ln}(\cos x)dx$ (برادلی)

حل

الف) جزء به جزء: $\begin{cases}\sin^2 x = u \to du = 2\sin x\cos x\,dx = \sin 2x\,dx\\ e^{2x}dx = dv \to v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x - \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\,dx}_{I_1} \quad (*) \qquad I_1:\begin{cases}\sin 2x = u \to du = 2\cos 2x\,dx\\ \frac{1}{2}e^{2x}dx = dv \to v = \frac{1}{4}e^{2x}\end{cases}$$

$$\to I_1 = \frac{1}{4}e^{2x}.\sin 2x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\,dx \qquad \begin{cases}\cos 2x = u \to du = -2\sin 2x\,dx\\ \frac{1}{2}e^{2x}dx = dv \to v = \frac{1}{4}e^{2x}\end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x - \Big(\frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x + \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\,dx}_{I_1}\Big)$$

$$2I_1 = \frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \to I_1 = \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$$

$$\xrightarrow{(*)} I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x - I_1 = \frac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x - \frac{e^{2x}}{8}(\sin 2x - \cos 2x)$$ ■

ب) جزء به جزء: $\begin{cases}\mathrm{Ln}(\tan x) = u \to du = \frac{dx}{\cos^2 x.\tan x} = \frac{dx}{\sin x\cos x}\\ \sin x\,dx = dv \to v = -\cos x\end{cases}$

$$I = -\cos x.\mathrm{Ln}(\tan x) + \int \frac{1}{\sin x}dx = -\cos x\,\mathrm{Ln}(\tan x) + \mathrm{Ln}|\csc x - \cot x|$$ ■

جزء به جزء (ج: $\begin{cases} u=\sin(\ln x)\to du=\frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ dv=\frac{dx}{x^2}\to v=\frac{-1}{x}\end{cases}$

$$I=\frac{-1}{x}\sin(\ln x)+\int\frac{1}{x^2}\cos(\ln x)dx \qquad \begin{cases} u=\cos(\ln x)\to du=\frac{-1}{x}\sin(\ln x)dx \\ dv=\frac{dx}{x^2}\to v=\frac{-1}{x}\end{cases}$$

$$I=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)-\frac{1}{x}\cos(\ln x)-\underbrace{\int\frac{1}{x^2}\sin(\ln x)dx}_{I}$$

$$2I=\frac{-1}{x}\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right)\to I=\frac{-1}{2x}\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right)$$

■

د) $\int\sin 2x\ln(\cos x)dx=2\int\sin x\cos x\ln(\cos x)dx \qquad ,\cos x=t\to\sin x\,dx=-dt$

$$I=-2\int t\ln(t)dt \quad \begin{cases} u=\ln t\to du=\frac{dt}{t} \\ dv=t\,dt\to v=\frac{t^2}{2}\end{cases}\to I=-2\left(\frac{t^2}{2}\ln t-\int\frac{t}{2}dt\right)=-t^2\ln t+\frac{t^2}{2}$$

سوال مشابه قسمت ج

۱-۱۸ $\int\sin(\ln(x))dx$ (تهران جنوب ۸۸- قزوین۸۸- کرج۸۸- علم و صنعت ۸۷)

Ans $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)$

۱۹- هر یک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int x^3\cos(x^2)dx$ (علم و صنعت ۸۸) ب) $\int x^2\cos^2 x\,dx$ (علم و صنعت ۸۴)

ج) $\int(x+\sin x)^2dx$ (برادلی)

حل

الف) $x^2=t\to 2x\,dx=dt\to dx=\frac{dt}{2x}$

$$\int x^3\cos t.\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int t\cos t\,dt \qquad \begin{cases} u=t\to du=dt \\ dv=\cos t\,dt\to v=\sin t\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(t\sin t-\int\sin t\,dt\right)=\frac{1}{2}(t\sin t+\cos t)=\frac{1}{2}\left(x^2\sin x^2+\cos x^2\right)$$

■

ب) $I=\int x^{۲}(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})dx=\frac{۱}{۲}\left(\int x^{۲}dx+\int x^{۲}\cos ۲x\,dx\right)\rightarrow I=\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^{۳}}{۳}+I_{۱}\right)$ (*)

$$I_{۱}=\int x^{۲}\cos ۲x\,dx\longrightarrow\begin{cases}u=x^{۲}\rightarrow du=۲x\,dx\\ dv=\cos ۲x\,dx\rightarrow v=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\end{cases}$$

$$I_{۱}=\frac{x^{۲}}{۲}\sin ۲x-\int x\sin ۲x dx\quad\begin{cases}u=x\rightarrow du=dx\\ dv=\sin ۲x\,dx\rightarrow v=\frac{-۱}{۲}\cos ۲x\end{cases}$$

$$I_{۱}=\frac{x^{۲}}{۲}\sin ۲x+\frac{x}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۲}\int\cos ۲x\,dx=\frac{x^{۲}}{۲}\sin ۲x+\frac{x}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x$$

حال با قراردادن $I_{۱}$ در تساوی (*) داریم:

$$I=\frac{۱}{۲}(\frac{x^{۳}}{۳}+I_{۱})\rightarrow I=\frac{x^{۳}}{۶}+\frac{x^{۲}}{۴}\sin ۲x+\frac{x}{۴}\cos ۲x-\frac{۱}{۸}\sin ۲x$$

■

ج) $I=\int(x+\sin x)^{۲}dx=\int x^{۲}+\sin^{۲}x+۲x\sin x\,dx$

$$=\frac{x^{۳}}{۳}+\int\frac{۱-\cos ۲x}{۲}dx+\int ۲x\sin x\,dx\begin{cases}u=۲x\rightarrow du=۲dx\\ dv=\sin x dx\rightarrow v=-\cos x\end{cases}$$

$$I=\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x-۲x\cos x+۲\int\cos x\,dx=\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x-۲x\cos x+۲\sin x$$

سوال مشابه قسمت ب

۱۹-۱ $\int x\cos^{۲}x\,dx$ (برادلی) Ans $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{x}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۸}\cos ۲x$

۱۹-۲ $\int x^{۲}\sin ۲x.dx$ (قزوین ۸۷) Ans $-\frac{x^{۲}}{۲}\cos ۲x+\frac{x}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۴}\cos ۲x$

۲۰- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int\cos ۲x.Ln\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)dx$ (تهران جنوب ۸۵)

ب) $\int\frac{Ln(e^{x}+۱)}{e^{x}}dx$ (تهران جنوب ۸۵)

ج) $\int e^{\sin x}\left(\frac{x\cos^{۳}x-\sin x}{\cos^{۲}x}\right)dx$ (علم و صنعت ۸۷)

د) $\int Ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right).x^{\frac{۲}{۳}}dx$ (مارون)

حل

الف) جزء به جزء:
$$\begin{cases} u=\mathrm{Ln}\left(\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)\to du=\dfrac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx\to du=\dfrac{2dx}{\cos 2x} \\ dv=\cos 2x\,dx\to v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\sin 2x.\mathrm{Ln}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)-\int\tan 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x.\mathrm{Ln}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\cos 2x|$$

■

ب) $I=\int e^{-x}\,\mathrm{Ln}(e^x+1)\,dx\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\begin{cases} u=\mathrm{Ln}(e^x+1)\to du=\dfrac{e^x}{e^x+1}dx \\ dv=e^{-x}dx\to v=-e^{-x} \end{cases}$

$$I=-e^{-x}\,\mathrm{Ln}(e^x+1)-\int\frac{-e^{-x}.e^x}{e^x+1}dx\to I=-e^{-x}\,\mathrm{Ln}(e^x+1)+\underbrace{\int\frac{dx}{e^x+1}}_{I_1}\qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{dx}{e^x+1}\qquad ,\ e^x=t\to e^x\,dx=dt\to dx=\frac{dt}{t}$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}dt=\mathrm{Ln}\left|\frac{t}{1+t}\right|\xrightarrow{t=e^x}I_1=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

با قرار دادن I_1 در تساوی $(*)$ داریم:

$$I=-e^{-x}\,\mathrm{Ln}(e^x+1)+\mathrm{Ln}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

■

ج) $I=\int x\cos x\,e^{\sin x}\,dx-\int\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}e^{\sin x}\,dx=I_1-I_2\qquad (*)$

$$I_1:\begin{cases} u=x\to du=dx \\ dv=\cos x.e^{\sin x}dx\to v=e^{\sin x} \end{cases}\to I_1=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx$$

$$I_2:\begin{cases} u=e^{\sin x}\to du=\cos x e^{\sin x}dx \\ dv=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx\to v=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}\to I_2=\frac{1}{\cos x}e^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx$$

$$\xrightarrow{(*)}I=I_1-I_2\to I=\left(xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx\right)-\left(\frac{1}{\cos x}e^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx\right)$$

$$\to I=\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)e^{\sin x}$$

■

د) جزء به جزء

$$\begin{cases} u=\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\to du=\frac{2}{x^2-1}dx \\ dv=x^{\frac{2}{3}}dx \quad \to v=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \end{cases} \to I=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{6}{5}\underbrace{\int\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^2-1}dx}_{I_1} \quad (*)$$

$$I_1: x=t^3\to dx=3t^2\,dt$$

$$I_1=\int\frac{t^5}{t^6-1}.3t^2\,dt=3\int\frac{t^7}{t^6-1}dt=3\int t+\frac{t}{t^6-1}dt=\frac{3}{2}t^2+\underbrace{\int\frac{3t}{t^6-1}dt}_{I_2}\to I=\frac{3}{2}t^2+I \quad (**)$$

$$I_2=\int\frac{3t}{t^6-1}dt=\int\frac{3t}{(t^3-1)(t^3+1)}dt=\int\frac{3t}{(t-1)(t^2-t+1)(t+1)(t^2+t+1)}dt$$

$$=\int\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+t+1}+\frac{Et+F}{t^2-t+1}dt$$

$$\to A=\frac{1}{2}\quad ,B=\frac{1}{2}\quad ,C=\frac{-1}{2}\quad ,D=\frac{1}{2}\quad ,E=\frac{-1}{2}\quad ,F=\frac{-1}{2}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\text{Ln}|t-1|+\frac{1}{2}\text{Ln}|t+1|+\int\frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt+\int\frac{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\text{Ln}|t^2-1|+\int\frac{-\frac{1}{4}(2t+1)+\frac{3}{4}dt}{t^2+t+1}dt+\int\frac{-\frac{1}{4}(2t-1)-\frac{3}{4}}{t^2-t+1}dt$$

$$I_2=\frac{1}{2}\text{Ln}|t^2-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\text{Ln}|t^2-1|-\frac{1}{4}\text{Ln}|t^2+t+1|+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{4}\text{Ln}|t^2-t+1|-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\text{Ln}|t^2-1|-\frac{1}{4}\text{Ln}|(t^2+t+1)(t^2-t+1)|+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\text{Ln}|t^2-1|-\frac{1}{4}\text{Ln}|t^4+t^2+1|+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

با جایگذاری I_1 و I_2 در تساوی های (*) و (**) بدست خواهیم آورد:

$$I=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{5}\text{Ln}|\sqrt[3]{x^2}-1|)+\frac{3}{10}\text{Ln}|\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1|$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{5}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{5}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)$$

۲۱- الف) ثابت کنید: $\int e^x (f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)$

ب) انتگرال $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ را حل کنید.

حل

الف) $I = \underbrace{\int f(x).e^x\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int f'(x).e^x\,dx}_{I_2} \qquad (*)$

$$I_2 : \begin{cases} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = f'(x)dx \to v = f(x) \end{cases} \to I_2 = e^x f(x) - \underbrace{\int f(x) e^x\,dx}_{I_1} \to I_2 = e^x f(x) - I_1 \ (**)$$

$$\xrightarrow{(*)} I = I_1 + I_2 \xrightarrow{(**)} I = I_1 + \left(e^x f(x) - I_1\right) \to I = e^x f(x)$$

■

ب) $I = \int \frac{x}{(x+1)^2} e^x\,dx = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} e^x\,dx = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}) e^x\,dx$

با توجه به قسمت الف داریم $\int e^x (f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)$ و چون $(\frac{1}{1+x})' = \frac{-1}{(1+x)^2}$

بنابراین:

$$I = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}) e^x\,dx = \int ((\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{f(x)}) + (\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{f'(x)})').e^x\,dx = \frac{e^x}{1+x}$$

۲۲- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{1}{\sinh x}dx$ ب) $\int \frac{dx}{2\cosh x + \sinh x}$ ج) $\int x \sinh^{-1} x\,dx$ (تهران مرکزی ۸۸)

حل

الف) $I = \int \frac{1}{\sinh x}dx = \int \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}dx = \int \frac{2}{e^x - e^{-x}}dx = \int \frac{2}{e^x - \frac{1}{e^x}}dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}dx$

$$\xrightarrow{e^x = u \to e^x dx = du} I = \int \frac{2du}{u^2 - 1} = \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du = \mathrm{Ln}\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \ , \quad u = e^x$$

■

ب) $I = \int \frac{dx}{2\cosh x + \sinh x} = \int \frac{dx}{2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

$$I=\int\frac{۲dx}{۳e^x+e^{-x}}=\int\frac{۲dx}{۳e^x+\frac{۱}{e^x}}=\int\frac{۲e^x}{۳e^{۲x}+۱}dx \quad , \quad e^x=u\to e^x\,dx=du$$

$$I=\int\frac{۲du}{۳u^۲+۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\sqrt{۳}u) \qquad ,u=e^x$$

■

ج) $I=\int x\sinh^{-۱}x\,dx \qquad \sinh^{-۱}x=t\to x=\sinh t\to dx=\cosh t\,dt$

$$\to I=\int t.\sinh t(\cosh t)dt=\frac{۱}{۲}\int t.\sinh(۲t)dt\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\begin{cases}u=t\to du=dt\\ dv=\sinh(۲t)dt\to v=\frac{۱}{۲}\cosh ۲t\end{cases}$$

$$I=\frac{۱}{۲}(uv-\int v\,du)=\frac{۱}{۲}(\frac{t}{۲}\cosh(۲t)-\frac{۱}{۲}\int\cosh(۲t)dt)=\frac{t}{۴}\cosh(۲t)-\frac{۱}{۸}\sinh(۲t) \quad (*)$$

می دانیم که $\sinh(۲t)=۲\sinh t\cosh t \quad , \quad \cosh(۲t)=۱+۲\sinh^۲ t$ در نتیجه:

$$\xrightarrow{t=\sinh^{-۱}x}\cosh(۲t)=۱+۲x^۲ \quad , \quad \sinh(۲t)=۲x\sqrt{۱+x^۲}$$

$$\xrightarrow{(*)}I=\frac{\sinh^{-۱}x}{۴}(۱+۲x^۲)-\frac{x}{۴}\sqrt{۱+x^۲}$$

۲۳- رابطه بازگشتی برای $I_n=\int\frac{dx}{(x^۲+a^۲)^n}$ بیابید. (آدامز- علم و صنعت ۸۸- تهران شمال ۸۶)

حل

$$\begin{cases}u=\frac{۱}{(x^۲+a^۲)^n}\to du=\frac{-۲nx.dx}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}}\\ dv=dx\to v=x\end{cases}$$

$$I_n=\frac{x}{\left(x^۲+a^۲\right)^n}+۲n\int\frac{x^۲}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}}dx\to I_n=\frac{x}{\left(x^۲+a^۲\right)^n}+۲n\int\frac{x^۲+a^۲-a^۲}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}}dx$$

$$I_n=\frac{x}{\left(x^۲+a^۲\right)^n}+۲n\int\frac{dx}{(x^۲+a^۲)^n}-۲na^۲\int\frac{dx}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}}$$

$$I_n=\frac{x}{\left(x^۲+a^۲\right)^n}+۲nI_n-۲na^۲I_{n+۱}\to ۲na^۲I_{n+۱}=\frac{x}{\left(x^۲+a^۲\right)^n}+\left(۲n-۱\right)I_n$$

$$I_{n+۱}=\frac{x}{۲na^۲.\left(x^۲+a^۲\right)^n}+\frac{۲n-۱}{۲na^۲}I_n \qquad ,n\ge ۱$$

از طرفی نیز داریم:

$$I_۱=\int\frac{dx}{x^۲+a^۲}dx=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}(\frac{x}{a})$$

سوال مشابه۲۳-۱ رابطه بازگشتی برای $\int (a^2-x^2)^n\,dx$ بیابید. (برادلی)

Ans $I_n=\dfrac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1}+\dfrac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}\quad ,I_0=x$

۲۴- دستور بازگشتی انتگرال $I_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$ را بدست آورده و از روی آن I_2 و I_3 را محاسبه کنید. (علوم تحقیقات ۸۸)

حل

$$*I_1=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\quad ,\quad *I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\mathrm{Ln}|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx\qquad \begin{cases}u=x^{n-1}\to du=(n-1)x^{n-2}.dx\\ dv=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}\to v=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$$

$$I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int\sqrt{x^2+1}\,x^{n-2}dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int\frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx-(n-1)\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_n-(n-1)I_{n-2}\to nI_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_{n-2}$$

$$\to I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-\frac{(n-1)}{n}I_{n-2}\ ,\ n\ge 2$$

$$n=2\to I_2=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}I_0=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$n=3\to I_3=\frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1}$$

۲۵- فرض کنید $I_n=\int x^\alpha(\mathrm{Ln}\,x)^n\,dx\quad ,\ n\in\mathbb{N}$

الف- با فرض $\alpha=-1$ مقدار I_n را حساب کنید.

ب- با فرض $\alpha\neq-1$ مقدار I_n را برحسب I_{n-1} پیدا کنید و با استفاده از آن حاصل $\int\sqrt{x}(\mathrm{Ln}x)^2dx$ را بیابید.

حل

الف) $\alpha=-1\rightarrow I_n=\int\frac{1}{x}(\operatorname{Ln}x)^n\,dx$ $\qquad \operatorname{Ln}x=u\rightarrow\frac{dx}{x}=du$

$$I_n=\int u^n.du=\frac{u^{n+1}}{n+1}\rightarrow I_n=\frac{(\operatorname{Ln}x)^{n+1}}{n+1}$$

■

ب) $\alpha\neq-1$ جزء به جزء $\begin{cases}u=(\operatorname{Ln}x)^n\rightarrow du=n(\operatorname{Ln}x)^{n-1}\frac{dx}{x}\\ dv=x^\alpha dx\rightarrow v=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{cases}$

$$I_n=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\operatorname{Ln}x)^n-\frac{n}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}.(\operatorname{Ln}x)^{n-1}.\frac{dx}{x}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\operatorname{Ln}x)^n-\frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha(\operatorname{Ln}x)^{n-1}dx$$

$$I_n=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\operatorname{Ln}x)^n-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}\quad ,n\geq1\ ,I_0=\int x^\alpha(\operatorname{Ln}x)^0dx=\int x^\alpha dx=\frac{x}{\alpha+1}$$

حال برای محاسبه $\int\sqrt{x}(\operatorname{Ln}x)^2dx$ کافیست $n=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم:

$$I_2=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}(\operatorname{Ln}x)^2-\frac{2}{\frac{3}{2}}I_1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\operatorname{Ln}x)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\operatorname{Ln}x-\frac{2}{3}I_0\right)\xrightarrow{I_0=\frac{2}{3}x\sqrt{x}}$$

$$I_2=x\sqrt{x}\left(\frac{2}{3}(\operatorname{Ln}x)^2-2\operatorname{Ln}x+\frac{16}{27}\right)$$

۲۶- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^x(1+\operatorname{Ln}x)dx$ (دمیدوویچ) $\qquad$ ب) $\int x^2\sqrt{9+x^2}\,dx$ (برادلی)

ج) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$ (برادلی) $\qquad$ د) $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

هـ) $\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}dx$ (دمیدوویچ)

حل

الف) $x^x=t\rightarrow\operatorname{Ln}x^x=\operatorname{Ln}t\rightarrow x\operatorname{Ln}x=\operatorname{Ln}t\rightarrow(1+\operatorname{Ln}x)dx=\frac{dt}{t}$

$$I=\int t.\frac{dt}{t}=\int dt=t=x^x$$

■

ب) $x=3\tan\theta \to dx=3\sec^2\theta\, d\theta$

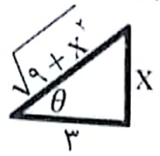
$$I=\int 9\tan^2\theta.\sqrt{9+9\tan^2\theta}.3\sec^2\theta\, d\theta=81\int\tan^2\theta.\sec^3\theta\, d\theta$$

انتگرال $\int\tan^2\theta.\sec^3\theta\, d\theta$ در قسمت ج مثال ۸ صفحه۱۲۳ حل شد و بدست آمد:

$$\int\tan^2\theta.\sec^3\theta\, d\theta=\frac{1}{4}\sec^3\theta.\tan\theta-\frac{1}{8}\sec\theta\tan\theta-\frac{1}{8}\mathrm{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|$$

پس خواهیم داشت:

$$I=81\left(\frac{1}{4}\sec^3\theta.\tan\theta-\frac{1}{8}\sec\theta\tan\theta-\frac{1}{8}\mathrm{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|\right)\ ,\ \frac{x}{3}=\tan\theta\to$$



$$I=\frac{81}{4}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}\right)^3\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{81}{8}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{81}{8}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}\right|$$

$$I=\frac{x}{4}\sqrt{9+x^2}^{\,3}-\frac{9x}{8}\sqrt{9+x^2}-\frac{81}{8}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}\right|$$

■

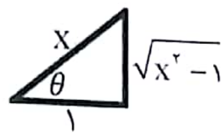
ج) $x=\sec\theta\to dx=\sec\theta.\tan\theta\, d\theta$

$$I=\int\sec^3\theta.\sqrt{\sec^2\theta-1}.\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$=\int\sec^4\theta.\sqrt{\tan^2\theta}\tan\theta\, d\theta=\int\sec^4\theta.\tan^2\theta\, d\theta=\int\sec^2\theta.\sec^2\theta\tan^2\theta\, d\theta$$

$$=\int\sec^2\theta.(\tan^2\theta+1)\tan^2\theta\, d\theta \qquad \tan\theta=u\to\sec^2\theta\, d\theta=du$$

$$=\int(u^2+1)u^2\, du=\int u^4+u^2\, du=\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}=\frac{1}{5}\tan^5\theta+\frac{1}{3}\tan^3\theta$$



$$I=\frac{1}{5}\sqrt{x^2-1}^{\,5}+\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}^{\,3}$$

■

د) $I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}dx$

$$=\int\frac{(x+1)+(x-1)-2\sqrt{x^2-1}}{(x+1)-(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int 2x-2\sqrt{x^2-1}\, dx=\int x-\sqrt{x^2-1}\, dx$$

$$I=\int x\, dx-\int\sqrt{x^2-1}\, dx\to I=\frac{x^2}{2}-I_1 \qquad (*)$$

$$I_1=\int\sqrt{x^2-1}\, dx \quad , \quad x=\sec\theta\to dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I_1=\int\sqrt{\sec^2\theta-1}.\sec\theta.\tan\theta\, d\theta=\int\sec\theta.\tan^2\theta\, d\theta$$

که این انتگرال را در قسمت ب سوال ۵ صفحه۱۴۳ حل کردیم و بدست آمد:

$$I_1=\frac{1}{2}\sec\theta.\tan\theta-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\xrightarrow{x=\sec\theta}I_1=\frac{1}{2}x.\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

با توجه به تساوی (*) داریم:

$$I=\frac{x^2}{2}-I_1=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

■

هـ) $I=\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}dx \qquad x=\tan\theta\to dx=(1+\tan^2\theta)d\theta$

$$I=\int\frac{\tan^4\theta.\theta}{1+\tan^2\theta}.(1+\tan^2\theta)d\theta=\int\theta.\tan^4\theta d\theta$$

جزء به جزء
$$\begin{cases}u=\theta\to du=d\theta\\ dv=\tan^4\theta d\theta\to v=\int\tan^4\theta d\theta=\int\left(\tan^4\theta+\tan^2\theta-\tan^2\theta-1+1\right)d\theta\end{cases}$$

$$\to v=\int\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)d\theta-\int(1+\tan^2\theta)d\theta+\int d\theta=\frac{\tan^3\theta}{3}-\tan\theta+\theta$$

$$I=u.v-\int v.du\to I=\frac{\theta\tan^3\theta}{3}-\theta\tan\theta+\theta^2-\underbrace{\int\frac{\tan^3\theta}{3}-\tan\theta+\theta d\theta}_{I_1} \qquad (*)$$

$$I_1=-\frac{1}{3}\int\tan^3\theta+\tan\theta-\tan\theta d\theta+\int\tan\theta d\theta-\int\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\int\tan\theta(1+\tan^2\theta)-\tan\theta d\theta+\int\tan\theta d\theta-\int\theta d\theta=-\frac{1}{6}\tan^2\theta+\frac{4}{3}\mathrm{Ln}|\sec\theta|-\frac{\theta^2}{2}$$

براساس تساوی (*) می نویسیم:

$$I=\frac{\theta\tan^3\theta}{3}-\theta\tan\theta+\theta^2+I_1$$

$$\to I=\frac{\theta\tan^3\theta}{3}-\theta\tan\theta-\frac{1}{6}\tan^2\theta+\frac{4}{3}\mathrm{Ln}|\sec\theta|+\frac{\theta^2}{2} \quad , \quad \theta=\tan^{-1}x$$

۲۷- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$ (دمیدوویچ)

ب) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ (دمیدوویچ)

ج) $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$ (دمیدوویچ)

د) $\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

هـ) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}(\mathrm{Ln}(x^2+1)-2\mathrm{Ln}\,x)}{x^4}dx$ (مارون- دمیدوویچ)

حل

الف) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۲(x-۱)^۳}}=\int\frac{dx}{(x-۱).\sqrt[۳]{x^۲}} \qquad x=t^۳\to dx=۳t^۲dt$

$$I=\int\frac{۳t^۲dt}{(t^۳-۱).t^۲}=\int\frac{۳dt}{t^۳-۱}=\int\frac{۳dt}{(t-۱)(t^۲+t+۱)}=\int\frac{A}{t-۱}dt+\int\frac{Bt+C}{t^۲+t+۱}dt$$

$$۳=A(t^۲+t+۱)+(Bt+C)(t-۱)\to A=۱\ ,\ B=-۱\ ,\ C=-۲$$

$$I=\int\frac{dt}{t-۱}-\int\frac{t+۲}{t^۲+t+۱}dt=\int\frac{dt}{t-۱}-\int\frac{\frac{۱}{۲}(۲t+۱+۳)}{t^۲+t+۱}dt$$

$$=\int\frac{dt}{t-۱}-\frac{۱}{۲}\int\frac{۲t+۱}{t^۲+t+۱}dt-\frac{۳}{۲}\int\frac{dt}{t^۲+t+۱}=Ln\left|\frac{t-۱}{\sqrt{t^۲+t+۱}}\right|-\frac{۳}{۲}\int\frac{dt}{(t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}$$

$$I=Ln\left|\frac{t-۱}{\sqrt{t^۲+t+۱}}\right|-\sqrt{۳}\tan^{-۱}(\frac{۲t+۱}{\sqrt{۳}})$$

■

ب) $I=\int\frac{dx}{۱+\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}}\times\frac{۱+\sqrt{x}-\sqrt{x+۱}}{۱+\sqrt{x}-\sqrt{x+۱}}=\int\frac{۱+\sqrt{x}-\sqrt{x+۱}}{(۱+\sqrt{x})^۲-(\sqrt{x+۱})^۲}dx$

$$I=\int\frac{۱+\sqrt{x}-\sqrt{x+۱}}{۲\sqrt{x}}dx=\int\frac{dx}{۲\sqrt{x}}+\int\frac{۱}{۲}dx-\frac{۱}{۲}\int\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x}}dx\to I=\sqrt{x}+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲}I_۱ \quad (*)$$

حل $I_۱$:

$$I_۱=\int x^{\frac{-۱}{۲}}.(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx \qquad \frac{m+۱}{n}+p=۱\in\mathbb{Z}\to x+۱=t^۲x\to x=\frac{۱}{t^۲-۱}\to dx=\frac{-۲t\,dt}{(t^۲-۱)^۲}$$

$$I_۱=\int\frac{\sqrt{t^۲x}}{\sqrt{x}}\times\frac{-۲t\,dt}{(t^۲-۱)^۲}=\int\frac{-۲t^۲}{(t-۱)^۲(t+۱)^۲}dt=\int\frac{A}{t-۱}+\frac{B}{(t-۱)^۲}+\frac{C}{t+۱}+\frac{D}{(t+۱)^۲}dt$$

$$-۲t^۲=A(t-۱)(t+۱)^۲+B(t+۱)^۲+C(t-۱)^۲(t+۱)+D(t-۱)^۲$$

$$\to A=\frac{-۱}{۲}\ ,\quad B=\frac{-۱}{۲}\ ,\quad C=\frac{۱}{۲}\ ,\quad D=\frac{-۱}{۲}$$

$$I_۱=-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{t-۱}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{(t-۱)^۲}+\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{t+۱}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{(t+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}Ln\left|\frac{t+۱}{t-۱}\right|+\frac{۱}{۲(t-۱)}+\frac{۱}{۲(t+۱)}$$

حال با جایگذاری $I_۱$ در رابطه $(*)$ دست می آید:

$$I=\sqrt{x}+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲}I_۱=\sqrt{x}+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}Ln|\frac{t+۱}{t-۱}|+\frac{t}{t^۲-۱})\ ,\quad t=\sqrt{\frac{x+۱}{x}}$$

■

ج) $x^2=t \to 2x\,dx=dt \to dx=\dfrac{dt}{2x}$

$$I=\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+t-t^2}}\times\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t}{\sqrt{-t^2+t+1}}dt$$

تغییر متغیر اویلر: $\sqrt{-t^2+t+1}=tu+1 \to -t^2+t+1=t^2u^2+2tu+1$

$$\to -t^2+t=t^2u^2+2tu \to -t+1=tu^2+2u \to t=\frac{1-2u}{1+u^2} \to dt=\frac{2(u^2-u-1)}{(1+u^2)^2}du$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1-2u}{1+u^2}}{(\frac{1-2u}{1+u^2})u+1}\times\frac{2(u^2-u-1)}{(1+u^2)^2}du=\int\frac{u^2-2u+2}{-u^2+u+1}\times\frac{(u^2-u-1)}{(1+u^2)^2}du$$

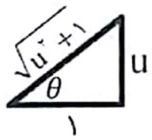
$$-\int\frac{u^2-2u+2}{(1+u^2)^2}du=-\int\frac{u^2+1-2u+1}{(u^2+1)^2}du=-\int\frac{u^2+1}{(u^2+1)^2}du+\int\frac{2u}{(u^2+1)^2}du-\int\frac{1}{(u^2+1)^2}du$$

$$I=-\int\frac{du}{u^2+1}+\int\frac{2u}{(u^2+1)^2}du-\int\frac{du}{(u^2+1)^2}=-\tan^{-1}u-\frac{1}{u^2+1}-\underbrace{\int\frac{du}{(u^2+1)^2}}_{I_1}\ ,(*)$$

$I_1: u=\tan\theta \to du=\sec^2\theta\,d\theta$

$$I_1=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)$$

$=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta.\cos\theta \quad , \tan\theta=u \to$



$\to I_1=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}u+\dfrac{u}{2(u^2+1)}$

$$\xrightarrow{(*)} I=-\tan^{-1}u-\frac{1}{u^2+1}-I_1=-\tan^{-1}u-\frac{1}{u^2+1}-\frac{1}{2}\tan^{-1}u-\frac{u}{2(u^2+1)}$$

$$I=\frac{-3}{2}\tan^{-1}u-\frac{u+2}{2(u^2+1)}\quad,\quad u=\frac{\sqrt{-t^2+t+1}-1}{t}\quad,\quad t=x^2$$

■

د) $I=\underbrace{\int\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx}_{I_1}-\underbrace{\int\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx}_{I_2} \to I=I_1-I_2 \qquad (*)$

$I_2: x^2+2x+2=t \to (2x+2)dx=dt \to dx=\dfrac{dt}{2(x+1)}$

$$I_2=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$I_1=\int\frac{x^3+1-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$=\underbrace{\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx}_{I_1'}-\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}}_{I_1''}\rightarrow I_1=I_1'-I_1'' \qquad (**)$$

$$I_1':\begin{cases}u=x^2-x+1\rightarrow du=(2x-1)dx\\ dv=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx\rightarrow v=\sqrt{x^2+2x+2}\end{cases}$$

$$I_1'=(x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\int\sqrt{x^2+2x+2}\,(2x-1)dx$$

$$=(x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\int\sqrt{x^2+2x+2}\,(2x+2-3)dx$$

$$=(x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\int\underbrace{(2x+2)}_{u'}\sqrt{\underbrace{x^2+2x+2}_{u}}dx+3\int\sqrt{\underbrace{x^2+2x+2}_{(x+1)^2+1}}dx$$

$$I_1'=(x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{2}{3}(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}\Big((x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\mathrm{Ln}\,|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\,|\Big)$$

انتگرال آخری را به کمک رابطه زیر بدست آوردیم:

$$\boxed{\int\sqrt{u^2+1}\,du=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+1}+\mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^2+1})\right)}$$

$$I_1'=(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\mathrm{Ln}\,|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,|$$

حال به حل I_1'' می پردازیم:

$$I_1''=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\mathrm{Ln}\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|$$

با جایگذاری در تساوی (**) داریم:

$$I_1=I_1'-I_1''=(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,|$$

و با جایگذاری در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$I=I_1-I_2=(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|$$

■

ه) $I=\int \frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x^۴}Ln\left(\frac{x^۲+۱}{x^۲}\right)dx \quad , \quad \frac{x^۲+۱}{x^۲}=t \to -\frac{۲}{x^۳}dx=dt \to dx=-\frac{x^۳}{۲}dt$

$$I=\int \frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x^۴}Ln(t).\frac{-x^۳}{۲}dt=-\frac{۱}{۲}\int \frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}Ln(t)dt=\frac{-۱}{۲}\int \sqrt{\frac{x^۲+۱}{x^۲}}\,Ln(t)dt$$

$$I=-\frac{۱}{۲}\int \sqrt{t}\,Ln\,t\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} u=Ln\,t \to du=\frac{dt}{t} \\ dv=\sqrt{t}\,dt \to v=\frac{۲}{۳}t\sqrt{t} \end{cases}$$

$$I=\frac{-۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}t\sqrt{t}\,Lnt-\frac{۲}{۳}\int \sqrt{t}\,dt\right)=\frac{-۱}{۳}t\sqrt{t}\left(Ln\,t-\frac{۲}{۳}\right) \quad , \quad t=\frac{x^۲+۱}{x^۲}$$

۲۸- مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int \cos x\cos ۲x\cos ۳x\,dx$ (دمیدوویچ)

ب) $\int \sin^۳ ۲x\cos^۲ ۳x\,dx$ (دمیدوویچ)

حل

الف) می‌دانیم که $\cos A\cos B=\frac{۱}{۲}\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)$

$$\cos x\cos ۲x\cos ۳x=\frac{۱}{۲}(\cos ۳x+\cos x)\cos ۳x=\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۳x+\frac{۱}{۲}\cos x\cos ۳x$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱+\cos ۶x}{۲}\right)+\frac{۱}{۴}\cos ۴x+\frac{۱}{۴}\cos ۲x$$

$$I=\int \frac{۱}{۴}(۱+\cos ۶x)+\frac{۱}{۴}\cos ۴x+\frac{۱}{۴}\cos ۲x\,dx=\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲۴}\sin ۶x+\frac{۱}{۱۶}\sin ۴x+\frac{۱}{۸}\sin ۲x$$

■

ب) $I=\int \sin ۲x(\sin^۲ ۲x.\cos^۲ ۳x)dx=\int \sin ۲x.\left(\frac{۱-\cos ۴x}{۲}\right)\left(\frac{۱+\cos ۶x}{۲}\right)dx$

$$=\frac{۱}{۴}\int \sin ۲x(۱-\cos ۴x+\cos ۶x-\cos ۴x\cos ۶x)dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int \sin ۲x\left(۱-\cos ۴x+\cos ۶x-\frac{۱}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۲}\cos ۱۰x\right)dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int \sin ۲x-\sin ۲x.\cos ۴x+\sin ۲x.\cos ۶x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۱۰x\,dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int \left(\sin ۲x-\frac{۱}{۲}(-\sin ۲x+\sin ۶x)+\frac{۱}{۲}(-\sin ۴x+\sin ۸x)-\frac{۱}{۴}(\sin ۴x)-\frac{۱}{۴}(-\sin ۸x+\sin ۱۲x)\right)dx$$

$$I=\frac{۱}{۴}\int \left(\frac{۳}{۲}\sin ۲x-\frac{۳}{۴}\sin ۴x-\frac{۱}{۲}\sin ۶x+\frac{۳}{۴}\sin ۸x-\frac{۱}{۴}\sin ۱۲x\right)dx$$

$$I=\frac{۱}{۱۶}\left(-۳\cos ۲x+\frac{۳}{۴}\cos ۴x+\frac{۱}{۳}\cos ۶x-\frac{۳}{۸}\cos ۸x+\frac{۱}{۱۲}\cos ۱۲x\right)$$

۲۹- انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ (دمیدوویچ) ب) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$ (دمیدوویچ) ج) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ (دمیدوویچ)

حل

الف) $I=\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \overset{\div x^2}{=} \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$$x-\frac{1}{x}=t \rightarrow (1+\frac{1}{x^2})dx=dt \quad , \quad x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=t^2+2$$

$$I=\int \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{t}{\sqrt{2}}) \quad , t=x-\frac{1}{x}$$

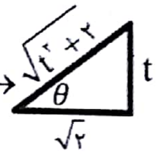
■

ب) $I=\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x\sqrt{x^4+1}}{x^2}}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

$$x-\frac{1}{x}=t \rightarrow (1+\frac{1}{x^2})dx=dt \quad , \quad x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=t^2+2$$

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} \qquad t=\sqrt{2}\tan\theta \rightarrow dt=\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I=\int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2\tan^2\theta+2}}=\int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\sec\theta}=\text{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right| \quad , \frac{t}{\sqrt{2}}=\tan\theta \rightarrow$$



$$I=\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{t^2+2}+t}{\sqrt{2}}\right| \quad , \quad t=x-\frac{1}{x}$$

■

ج) $I=\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}}dx$

$$x-\frac{1}{x}=t \rightarrow (1+\frac{1}{x^2})dx=dt \quad , \quad x^2+\frac{1}{x^2}+1=(x-\frac{1}{x})^2+3=t^2+3$$

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=\text{Ln}\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| \quad , \quad t=x-\frac{1}{x}$$

روش دوم: $x^2=t$ و بعد از تغییر متغیر اویلر استفاده کنیم.

۳۰- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x\,\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$ (دمیدوویچ) ب) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$ (دمیدوویچ)

ج) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Ln}(\frac{x}{\sqrt{1-x}})dx$ (دمیدوویچ) د) $\int xe^x \sin x\,dx$ (آدامز- برادلی)

حل

الف)
$$\begin{cases} u=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2}) \to du=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}dx \to v=\dfrac{1}{2(1-x^2)} \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2(1-x^2)}\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})-\underbrace{\int\frac{dx}{2\sqrt{1+x^2}\,(1-x^2)}}_{I_1} \to I=\frac{\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x\ \ )}-I_1 \quad (*)$$

$$I_1=\int\frac{dx}{2\sqrt{1+x^2}\,(1-x^2)} \qquad x=\tan\theta \to dx=\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I_1=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{2\sqrt{1+\tan^2\theta}\,(1-\tan^2\theta)}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta(\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta})}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$$

$$\sin\theta=u \to \cos\theta\,d\theta=du$$

$$I_1=\int\frac{du}{2(1-2u^2)}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-\sqrt{2}u}+\frac{1}{1+\sqrt{2}u}du=\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|,u=\sin\theta,\theta=\tan^{-1}x$$

با جایگذاری در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2(1-x^2)}\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}\right|$$

■

ب)
$$\begin{cases} u=\arcsin x \to du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\sqrt{1-x^2}\,dx \to v=\int\sqrt{1-x^2}\,dx \quad ,x=\sin\theta \to dx=\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$v=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}.\cos\theta\,d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int 1+\cos2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta$$

$$v=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \xrightarrow{x=\sin\theta} v=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x.\sqrt{1-x^2}$$

$$I=u.v-\int v.du \to I=\frac{۱}{۲}(\arcsin x)^{۲}+\frac{۱}{۲}x\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x-\int\frac{\arcsin x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{۱}{۲}x\,dx$$

$$=\frac{۱}{۲}(\arcsin x)^{۲}+\frac{۱}{۲}x\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x-\frac{۱}{۴}(\arcsin x)^{۲}-\frac{x^{۲}}{۴}$$

$$I=\frac{۱}{۴}(\arcsin x)^{۲}+\frac{۱}{۲}x\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x-\frac{x^{۲}}{۴}$$

■

ج) $\int\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}Ln(\frac{x}{\sqrt{۱-x}})dx$
$$\begin{cases} u=Ln(\frac{x}{\sqrt{۱-x}}) \to du=\frac{۲-x}{۲x(۱-x)}dx \\ dv=\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx \to v=-\sqrt{۱-x^{۲}} \end{cases}$$

$$I=-\sqrt{۱-x^{۲}}\,Ln(\frac{x}{\sqrt{۱-x}})+\underbrace{\int\sqrt{۱-x^{۲}}.\frac{۲-x}{۲x(۱-x)}dx}_{I_۱} \qquad (*)$$

$$I_۱=\int\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}.\frac{۲-x}{۲x}dx \qquad \frac{۱+x}{۱-x}=t^{۲} \to x=\frac{t^{۲}-۱}{t^{۲}+۱} \to dx=\frac{۴t\,dt}{(t^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$I_۱=\int\frac{۲t^{۲}(t^{۲}+۳)}{(t^{۲}-۱)(t^{۲}+۱)^{۲}}dt=\int\frac{A}{t-۱}+\frac{B}{t+۱}+\frac{Ct+D}{t^{۲}+۱}+\frac{Et+F}{(t^{۲}+۱)^{۲}}dt$$

$$\to A=۱\ ,\ B=-۱\ ,\ C=۰\ ,\ D=۰\ ,\ E=۰\ ,\ F=۲$$

$$I_۱=\int\frac{dt}{t-۱}-\int\frac{dt}{t+۱}+\int\frac{۲dt}{(t^{۲}+۱)^{۲}} \to I_۱=Ln|\frac{t-۱}{t+۱}|+۲\int\frac{dt}{(t^{۲}+۱)^{۲}}$$

انتگرال $\int\frac{dt}{(t^{۲}+۱)^{۲}}$ را در قسمت الف مثال ۱۱ صفحه ۱۲۶ حل کردیم و بدست آوردیم:

$$\int\frac{dt}{(t^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}t+\frac{t}{۲(t^{۲}+۱)}$$

درنتیجه برای $I_۱$ داریم:

$$I_۱=Ln|\frac{t-۱}{t+۱}|+\tan^{-۱}t+\frac{t}{t^{۲}+۱}$$

براساس تساوی (*) می توان نوشت:

$$I=-\sqrt{۱-x^{۲}}\,Ln(\frac{x}{\sqrt{۱-x}})+Ln|\frac{t-۱}{t+۱}|+\tan^{-۱}t+\frac{t}{۱+t^{۲}} \quad ,\ t=\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$$

■

د) روش اول:

$$I=\int xe^x\sin x\,dx\qquad\begin{cases}u=x\to du=dx\\ dv=e^x\sin x\,dx\to\ \ v=I_1=\int e^x\sin x\,dx\end{cases}$$

به حل I_1 می پردازیم:

$$I_1:\begin{cases}u=e^x\to du=e^x dx\\ dv=\sin x\,dx\to v=-\cos x\end{cases}$$

$$I_1=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\qquad\begin{cases}u=e^x\to du=e^x\,dx\\ dv=\cos x\,dx\to v=\sin x\end{cases}$$

$$I_1=-e^x\cos x+e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I_1}$$

$$\to ۲I_1=e^x(\sin x-\cos x)\to I_1=\frac{e^x}{۲}(\sin x-\cos x)=v$$

طبق رابطه جزءبه جزء می توان نوشت:

$$I=uv-\int v\,du=\frac{xe^x}{۲}(\sin x-\cos x)+\frac{۱}{۲}\int e^x(\cos x-\sin x)dx$$

ازطرفی در سوال ۲۱ صفحه ۱۶۸ ثابت کردیم $\int e^x(f(x)+f'(x))dx=e^x.f(x)$ ، در این سوال نیز داریم: $f(x)=\cos x\to f'(x)=-\sin x$، لذا:

$$\int e^x(\cos x-\sin x)dx=e^x\cos x$$

$$I=\frac{xe^x}{۲}(\sin x-\cos x)+\frac{۱}{۲}e^x\cos x=\frac{e^x}{۲}\big((۱-x)\cos x+x\sin x\big)$$

روش دوم:

از رابطه اویلر داریم: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$\sin x=\operatorname{Im}e^{ix}\to e^x\sin x=e^x\operatorname{Im}e^{ix}=\operatorname{Im}e^{x+ix}\to xe^x\sin x=\operatorname{Im}xe^{x+ix}$$

$$I=\int xe^x\sin x\,dx=\operatorname{Im}\int x\,e^{(۱+i)x}\,dx\qquad\begin{cases}u=x\to du=dx\\ dv=e^{(۱+i)x}\,dx\to v=\frac{۱}{۱+i}e^{(۱+i)x}\end{cases}$$

$$I=\operatorname{Im}\left(\frac{x}{۱+i}e^{(۱+i)x}-\int\frac{۱}{۱+i}e^{(۱+i)x}\,dx\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{x}{۱+i}e^{(۱+i)x}-\frac{۱}{(۱+i)^۲}e^{(۱+i)x}\right)$$

$$=\operatorname{Im}\left(\frac{x}{۱+i}\times\frac{۱-i}{۱-i}e^{(۱+i)x}-\frac{۱}{۱+۲i+i^۲}e^{(۱+i)x}\right)==\operatorname{Im}\left(\frac{x(۱-i)}{۲}e^xe^{ix}-\frac{۱}{۲i}e^xe^{ix}\right)$$

$$I = \operatorname{Im}\left(e^{x} e^{ix}\left(\frac{x}{۲}(۱-i)+\frac{i}{۲}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{x}}{۲}(\cos x + i\sin x)(x+(۱-x)i)\right)$$

$$I = \frac{e^{x}}{۲}((۱-x)\cos x + x\sin x)$$

سوال مشابه قسمت الف

۱-۳۰ $\int \frac{x\operatorname{Ln} x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}dx$ (تهران۸۵) **ANS** $\sqrt{۱+x^{۲}}\operatorname{Ln} x - \frac{۱}{۲}\operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}-۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}+۱}\right| - \sqrt{۱+x^{۲}}$

فصل ششم

انتگرال معین و کاربرد آن

محاسبه انتگرال معین با دستور نیوتن - لایب نیتز

هرگاه F تابع اولیه‌ی f در بازه $I:[a,b]$ باشد، داریم:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

این تساوی به **دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال**، معروف است.

برای محاسبه انتگرال معین، از همان روشهای فصل قبل حاصل انتگرال را حساب کرده و در انتها حدود را جایگذاری می کنیم.

مثال ۱ :حاصل انتگرال معین $\int_۱^e (\ln x)^۲ dx$ را بدست آورید. (امیرکبیر)

حل

$$\begin{cases} u = (\ln x)^۲ \to du = \dfrac{۲}{x}\ln x dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$$I = x(\ln x)^۲ - ۲\int \ln x dx \qquad \begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$$\to I = x(\ln x)^۲ - ۲\left(x\ln x - \int dx\right) = x(\ln x)^۲ - ۲x\ln x + ۲x\Big|_۱^e$$

$$= \left(e(\ln e)^۲ - ۲e\ln e + ۲e\right) - \left(۱\times(\ln ۱)^۲ - ۲\times ۱\times \ln ۱ + ۲\times ۱\right) = e - ۲$$

سوال مشابه

۱-۱ $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} \sin x.\ln(\sin x)dx$ (امیرکبیر۸۹) Ans $\dfrac{\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}}{۴}\ln ۲ + \ln\left(\dfrac{\sqrt{۲} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}\right) + \dfrac{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}}{۲}$

مثال۲ : فرض کنید f دوبار مشتق پذیر بوده و در رابطه زیر صدق کند. در اینصورت مقدار $f(0)$ را حساب کنید.

$$\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\sin x\,dx = 5 \quad , \quad f(\pi)=2$$

(امیرکبیر ۸۹- برادلی)

حل

$$I=\underbrace{\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx}_{I_2}\to I=I_1+I_2 \qquad (*)$$

$$I_2:\begin{cases}u=\sin x\to du=\cos x\,dx\\ dv=f''(x)dx\to v=f'(x)\end{cases}\to I_2=f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx$$

$$I_2=-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx \quad \begin{cases}u=\cos x\to du=-\sin x\,dx\\ dv=f'(x)dx\to v=f(x)\end{cases}$$

$$\to I_2=-f(x)\cos x\Big|_0^\pi-\underbrace{\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx}_{I_1}\to I_2=f(\pi)+f(0)-I_1 \qquad (**)$$

حال با جایگذاری $(**)$ در تساوی $(*)$ ، داریم:

$$I=I_1+I_2=I_1+\left(f(\pi)+f(0)-I_1\right)\to I=f(\pi)+f(0)$$

بنابراین با توجه به صورت سوال خواهیم داشت:

$$I=5\to f(\pi)+f(0)=5\xrightarrow{f(\pi)=2}f(0)=3$$

چندین ویژگی از انتگرال معین

۱) $\int_a^a f(x)dx=0$

۲) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

۳) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

مثال۳ : مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^1 \sqrt{|2x-1|+x}\,dx$.

(تهران مرکزی ۸۹)

حل

می‌دانیم که:
$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & x\ge \frac{1}{2}\\ -(2x-1) & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{-(2x-1)+x}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{(2x-1)+x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{-x+1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{3x-1}\,dx$$

$$=\frac{-2}{3}(-x+1)\sqrt{-x+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

تعریف .فرض کنیم m، مینیمم مطلق و M ماکزیمم مطلق تابع f در بازه $[a,b]$ است یعنی $m \le f(x) \le M$ در این صورت اگر f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه:

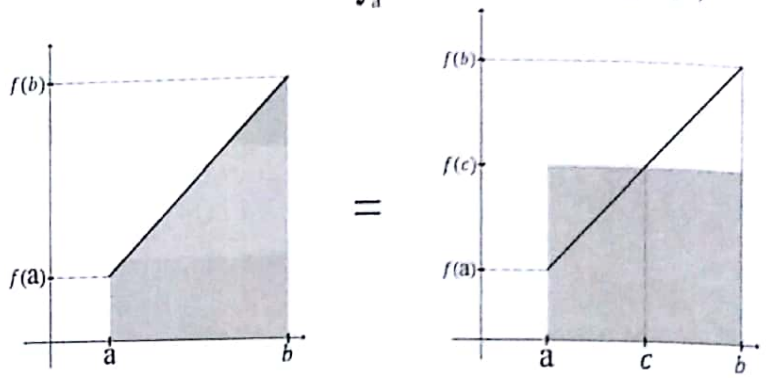
$$m \le \underbrace{\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}}_{\text{مقدار متوسط}} \le M$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال

اگر f تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد، در اینصورت حداقل یک c دربازه (a,b) وجود دارد.

بطوریکه $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

تعبیر هندسی:



مثال۴ : فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و برای هر $x\in[0,1]$ تعریف کنید $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.ثابت کنید نقطه c، $0<c<1$ موجود است که $F(1)-F(c)=\int_0^1 xf(x)\,dx$. (شریف ۸۳)

حل

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = f(x)dx \to v = F(x) \end{cases}$$

$$\to \int_0^1 xf(x)dx = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx \qquad (*)$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال نتیجه می‌دهد که نقطه $0<c<1$ موجود است که $\int_0^1 F(x)dx = (1-0)F(c) = F(c)$ و لذا

$$\xrightarrow{(*)} \int_0^1 xf(x)dx = F(1) - F(c)$$

نکته۱ : اگر $f(x)$ روی $[-a,a]$ پیوسته و زوج باشد آنگاه: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

اگر $f(x)$ روی $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد، آنگاه $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

یادآوری: گوییم تابع f زوج است هرگاه
$$\begin{cases} \forall x \in D_f \to -x \in D_f : & \text{شرط ۱} \\ f(-x) = f(x) : & \text{شرط ۲} \end{cases}$$

همچنین گوییم تابع f فرد است هرگاه
$$\begin{cases} \forall x \in D_f \to -x \in D_f : & \text{شرط ۱} \\ f(-x) = -f(x) : & \text{شرط ۲} \end{cases}$$

مثال۵ : مطلوبست انتگرال معین $\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx$.

حل

$f(x)=\frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} \to D_f = \mathbb{R} \to$ دامنه متقارن است و شرط ۱ برقرار است

$f(-x)=\frac{(-x)^5 . \sin^2(-x)}{(-x)^4+2(-x)^2+1}=\frac{-x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}=-f(x) \to$ f فرد است

بنابراین با توجه به نکته ۱ می توان گفت :

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx = 0$$

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt \to F'(x)=h'(x).f(h(x))-g'(x).f(g(x))$$

و در حالت کلی تر اگر داشته باشیم $F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt$ ،آنگاه داریم:

$$F'(x)=h'(x).f(x,h(x))-g'(x).f(x,g(x))+\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d}{dx}(f(x,t))\,dt$$

که منظور از $\frac{d}{dx}(f(x,t))$ مشتق f است نسبت به x با فرض ثابت بودن t.

مثال۶ : در تابع ضمنی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3} \sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int_0^{y^2} \cos t\,dt=0$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید. (تهران جنوب ۸۸)

حل

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{(x^3)'\sqrt{3-2\sin^2 x^3}-(\frac{\pi}{2})'\sqrt{3-2\sin^2\frac{\pi}{2}}}{(y^2)'\cos y^2-0}=-\frac{3x^2\sqrt{3-2\sin^2 x^3}}{2y\cos y^2}$$

مثال۷ : مطلوبست محاسبه حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}.dt}{x^2}$. (تهران جنوب ۸۹ و ۸۵- قزوین۸۸)

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin|x|}{3x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{3x}=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

مثال۸ : الف) ثابت کنید که اگر f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و به ازای هر x در این بازه داشته باشیم $F(x)=\int_a^x f(t)dt$، آنگاه F تابع اولیه f روی بازه $[a,b]$ است.

ب) اگر تابع f یک تابع غیر صفر و $f(0)=0$ باشد و داشته باشیم $f^2(x)=\int_0^x\dfrac{\cos t.f(t)dt}{2\sqrt{4+\sin t}}$

تابع $f(x)$ را بیابید. (امیرکبیر)

حل

الف) $$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)dt+\int_{x_0}^{a}f(t)dt\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt}{h}$$

چون f بر $[x_0\,,\,x_0+h]$ پیوسته است بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرال،داریم:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c).h}{h}\to F'(x_0)=\lim_{h\to 0}f(c)=f\left(\lim_{h\to 0}c\right)$$

از طرفی:

$$\lim_{h\to 0}x_0<\lim_{h\to 0}c<\lim_{h\to 0}(x_0+h)\xrightarrow{\text{بنا به قضیه فشردگی}}\lim_{h\to 0}c=x_0$$

پس می‌نویسیم:

$$F'(x_0)=f\left(\lim_{h\to 0}c\right)=f(x_0)$$

■

ب) از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم :

$$2f(x)f'(x)=\frac{\cos x\,f(x)}{2\sqrt{4+\sin x}}\xrightarrow{f(x)\neq 0}2f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{4+\sin x}}\to f'(x)=\frac{\cos x}{4\sqrt{4+\sin x}}$$

$$f(x)=\frac{1}{4}\int\frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin x}}dx\to f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4+\sin x}+c\xrightarrow{f(0)=0}0=\frac{1}{2}\sqrt{4}+c\to c=-1$$

$$\to f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4+\sin x}-1$$

سوال مشابه ۸-۱ تابع مشتق پذیر و غیر صفر f در رابطه $(f(x))^{2}=\int_{0}^{x} f(t)\dfrac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$ صدق می‌کند. ضابطه تابع f را بیابید؟ (اراک۸۹- امیرکبیر ۸۷- تهران جنوب ۸۶- مازون)

Ans $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{3}{2+\cos x}}$

مثال۹ : مطلوبست محاسبه $\dfrac{d}{dx}\int_{0}^{x}\dfrac{\sin xt}{t}dt$.

حل

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt=1\times\frac{\sin x^{2}}{x}-0+\int_{0}^{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin xt}{t}\right)dt$$

$$=\frac{\sin x^{2}}{x}+\int_{0}^{x}\frac{t\cos xt}{t}dt=\frac{\sin x^{2}}{x}+\int_{0}^{x}\cos xt\,dt=\frac{\sin x^{2}}{x}+\frac{1}{x}\sin xt\Big|_{0}^{x}$$

$$=\frac{\sin x^{2}}{x}+\frac{\sin x^{2}}{x}=\frac{2\sin x^{2}}{x}$$

تغییر متغیر در انتگرال معین

تغییر متغیر در انتگرال معین مشابه تغییر متغیر در انتگرال نامعین است، فقط بایددقت کرد که با انجام تغییر متغیر حدود انتگرال را نیز مطابق متغیر جدید تغییر دهید و زمانی می‌توان از تغییر $t=g(x)$ استفاده کرد که $g(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد.

مثال۱۰ : حاصل انتگرال $\int_{-\ln 2}^{0}e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$ را بیابید. (قزوین ۸۷)

حل

$$e^{x}=u\rightarrow e^{x}dx=du\qquad \begin{cases} x=0\xrightarrow{e^{x}=u}u=e^{0}=1\\ x=-\ln 2\xrightarrow{e^{x}=u}u=e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-1}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^{2}}\,du\quad ,\ u=\sin\theta\rightarrow du=\cos\theta\,d\theta\quad ,\begin{cases} u=1\xrightarrow{u=\sin\theta}\theta=\dfrac{\pi}{2}\\ u=\dfrac{1}{2}\xrightarrow{u=\sin\theta}\theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^{2}\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

نکته۲ : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

این نکته به ما می‌گوید که در تابع می‌توان x را به $a+b-x$ تبدیل کرد و یا بعبارتی از تغییر متغیر $t=a+b-x$ استفاده کرد.

مثال۱۱ : فرض کنید تابع f در بازه $[0,a]$ پیوسته باشد:

الف)نشان دهید که $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

ب)نشان دهید $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$

ج)نشان دهید اگر $f(x)=f(a-x)$ آنگاه $\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

د)حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ را بیابید. (تهران ۸۷)

حل

$\begin{cases} x=a \to t=0 \\ x=0 \to t=a \end{cases}$, $a-x=t \to -dx=dt$, الف) طرف چپ $= \int_0^a f(x)dx$

طرف راست $= \int_0^a f(a-t)dt = \int_a^0 f(a-t)(-dt)$

■

ب) می دانیم که $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx \quad (*)$ کافیست ثابت کنیم که

$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$:

$$\begin{cases} x=a \to t=0 \\ x=\frac{a}{2} \to t=\frac{a}{2} \end{cases}, \quad a-x=t \to dx=-dt$$

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)(-dt) = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)dt \quad (**)$$

$$(*),(**) \to \int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$$

■

ج) با توجه به قسمت ب می دانیم $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$ و اگر $f(x)=f(a-x)$ آنگاه داریم:

$$\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

■

د) با توجه به قسمت ب می توان نوشت:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(\frac{\pi}{2}-x))dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)+\ln(\cos x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x.\cos x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{1}{2})+\ln(\sin 2x)dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)dx=\frac{-\pi}{4}\ln 2+\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)dx}_{I_1}$$

$$I=\frac{-\pi}{4}\ln 2+I_1 \qquad (*)$$

حال به بررسی I_1 می پردازیم:

$$I_1: 2x=t\rightarrow dx=\frac{dt}{2}, \qquad \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}\rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0\rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt\rightarrow I_1=\frac{1}{2}I \qquad (**)$$

پس با توجه به تساوی $(*)$ و $(**)$ می توان نوشت:

$$I=\frac{-\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}I\rightarrow\frac{1}{2}I=\frac{-\pi}{4}\ln 2\rightarrow I=\frac{-\pi}{2}\ln 2$$

مثال ۱۲ : انتگرال $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{\cos^m x+\sin^m x}dx$ را حساب کنید. (ماژون- تهران جنوب ۸۹)

حل

$$x\rightarrow\frac{\pi}{2}-x$$

$$I'=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin^m(\frac{\pi}{2}-x)+\cos^m(\frac{\pi}{2}-x)}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m x}{\cos^m x+\sin^m x}dx$$

$$I+I'=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x+\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{I=I'}2I=\frac{\pi}{2}\rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

سوال مشابه

۱-۱۲ $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx$ (علوم و تحقیقات ۸۸- تهران شمال ۸۶- فردوسی ۸۵) Ans $\frac{\pi}{4}$

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

تذکر: برای راحتی می‌توانید $a=0$ و ضریب $\frac{i}{n}$ داخل سری را b در نظر بگیرید.

(البته اگر ضرایب $\frac{i}{n}$ ها، یکسان بودند). یعنی:

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(b\frac{i}{n}\right)$$

مثال ۱۳: مطلوبست محاسبه $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$. (علم و صنعت ۸۶)

حل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{i\pi}{2n} \xrightarrow[a=0]{b=\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

سوال مشابه

۱۳-۱ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$ (تهران جنوب ۸۵) Ans $\frac{2}{\pi}$

مثال ۱۴: حد $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^3}+\frac{2n}{(n+2)^3}+\ldots+\frac{1}{8n}\right)$ را بدست آورید. (تهران جنوب ۸۸- تهران مرکزی ۸۸)

حل

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{(n+i)^3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{n^3\left(1+\frac{i}{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^3}$$

براساس تذکر فوق $a=0$ و $1=$(ضریب $\frac{i}{n}$)$=b$ پس:

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}dx = \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

سوال مشابه

۱۴-۱ $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ (تهران شمال ۸۷) Ans $\frac{1}{2}$

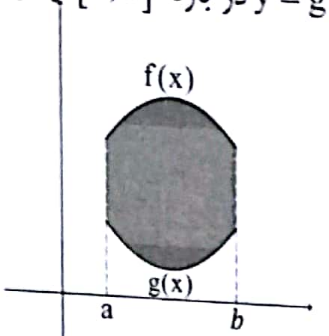
کاربرد های انتگرال معین

۱- محاسبه مساحت

الف- محاسبه مساحت در مختصات قائم:

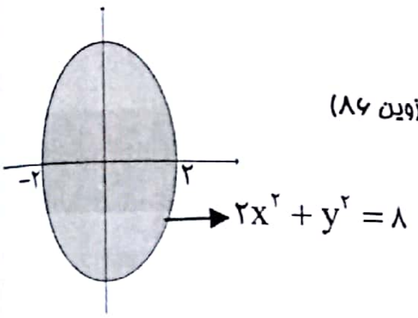
مساحت بین $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ را از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx}$$



حالـــت خـــاص: مـــساحت بـــین $y=f(x)$ و محـــورxهـــا $(y=0)$، در بـــازه $[a,b]$ از رابطه $S=\int_a^b |f(x)|dx$ بدست می‌آید.

مثال۱۵ : مساحت ناحیه هاشور خورده را بدست آورید. (قزوین ۸۶)



حل

$$2x^2+y^2=8 \to y^2=8-2x^2 \to y=\pm\sqrt{8-2x^2}\begin{cases} y_1=\sqrt{8-2x^2} & \text{نیم بیضی بالایی} \\ y_2=-\sqrt{8-2x^2} & \text{نیم بیضی پایینی}\end{cases}$$

$$S=\int (y_1-y_2)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-2x^2}-\left(-\sqrt{8-2x^2}\right)dx=2\sqrt{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

با توجه به تقارن شکل می توان نوشت:

$$S=4\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx \quad , \quad x=2\sin\theta \to dx=2\cos\theta d\theta \quad , \begin{cases} x=2\to\theta=\frac{\pi}{2} \\ x=0\to\theta=0\end{cases}$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}.2\cos\theta d\theta=16\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=16\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$S=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+\cos 2\theta d\theta=8\sqrt{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}\,\pi$$

می دانستیم که مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ از رابطه $S=\pi ab$ بدست می آید:

$$2x^2+y^2=8\to\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1\xrightarrow[b=2\sqrt{2}]{a=2}S=\pi(2)\left(2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}\pi$$

ب- محاسبه مساحت زمانیکه معادله پارامتری را در اختیار داشته باشیم: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

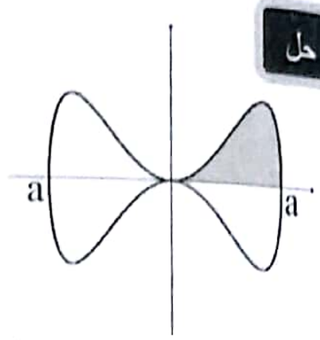
$$\boxed{S = -\int_{t=a}^{b} y(t).x'(t)\,dt} \quad \text{or} \quad \boxed{S = \int_{t=a}^{b} x(t)\,y'(t)\,dt}$$

از این دو رابطه نیز می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} \left(x(t)\,y'(t) - y(t).x'(t)\right)dt}$$

مثال ۱۶ : مساحت ناحیه محدود به منحنی $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\cos^2 t \end{cases}$ را بیابید. (هاروِن)

حل



$$xy' = a\cos t\left(b\cos^2 t - 2b\sin^2 t\cos t\right)$$

$$= ab\cos^3 t - 2ab\sin^2 t\cos^2 t = ab\cos^4 t - \frac{ab}{2}\sin^2 2t$$

با توجه به شکل واضح است که مساحت کل برابر است با ۴ برابر مساحت ناحیه در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^4 t - \frac{ab}{2}\sin^2 2t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)\right)dt$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos^2 2t + 2\cos 2t - 1 + \cos 4t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2} + 2\cos 2t + \cos 4t\,dt$$

$$= ab\left(\frac{t}{2} + \sin 2t + \frac{3}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

ج- محاسبه مساحت در مختصات قطبی:

اگر $r = f(\theta)$ باشد داریم:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\theta=\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}\,.$$

(در فصل هشتم بطور کامل شرح داده می شود).

۲- محاسبه حجم

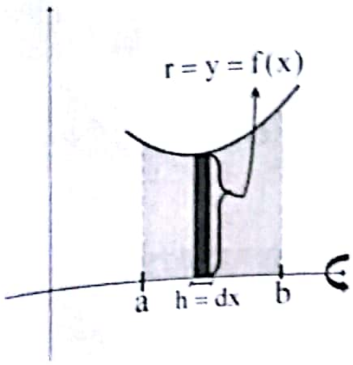
برای محاسبه حجم ۲ روش داریم:

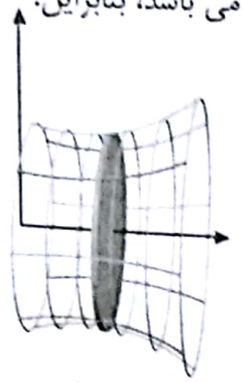
الف- روش دیسک:

در این روش المانی که در نظر می‌گیریم عمود بر محور دوران است و اساس کار استفاده از رابطه $\boxed{V = \int \pi r^2 h}$ است.که r شعاع دیسک ایجاد شده ناشی از دوران المان است و h ارتفاع دیسک که همان ضخامت دیسک حاصله می باشد.

برای مثال می‌خواهیم سطح بین $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول محور x ها دوران دهیم:در این صورت شعاع دیسک برابر است با $r = y = f(x)$ و ضخامت دیسک نیز $h = dx$ می باشد، بنابراین:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$





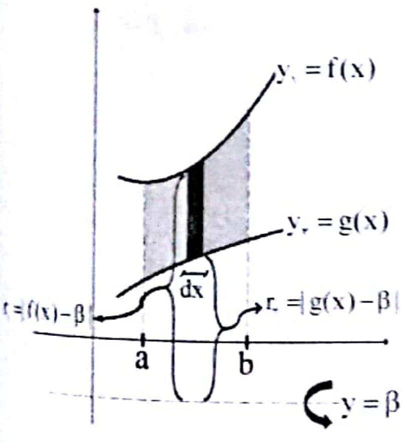
مثال دیگر آنست که بخواهیم سطح بین $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول خط $y = \beta$ دوران دهیم:

در این مواقع باید از حجم V_1 (ایجاد شده توسط دوران سطح بین $y_1 = f(x)$ و $y = \beta$ و خطوط $x = a$ و $x = b$)، حجم V_2 (تولید شده ناشی از دوران سطح بین $y_2 = g(x)$ و $y = \beta$ و خطوط $x = a$ و $x = b$) را کم کنیم، یعنی: $V = V_1 - V_2$

برای V_1 شعاع دیسک برابر $r_1 = |f(x) - \beta|$ و ضخامت دیسک $h = dx$ می باشد، بنابراین:

$$V_1 = \pi \int_a^b r_1^2 dx = \pi \int_a^b |f(x) - \beta|^2 dx$$

برای V_2 نیز به همین صورت داریم: شعاع دیسک برابر $r_2 = |g(x) - \beta|$ و ضخامت آن $h = dx$ است، پس:



$$V_2 = \pi \int_a^b r_2^2 dx = \pi \int_a^b |g(x) - \beta|^2 dx$$

درنتیجه حجم V از رابطه زیر بدست می آید.

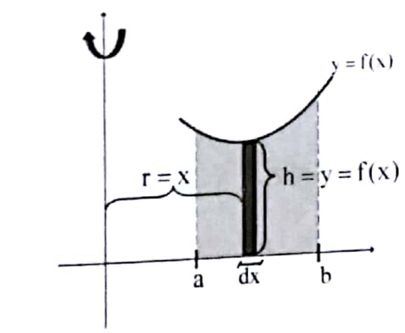
$$V = \pi \int_a^b r_1^2 - r_2^2 dx = \pi \int_a^b |f(x) - \beta|^2 - |g(x) - \beta|^2 dx$$

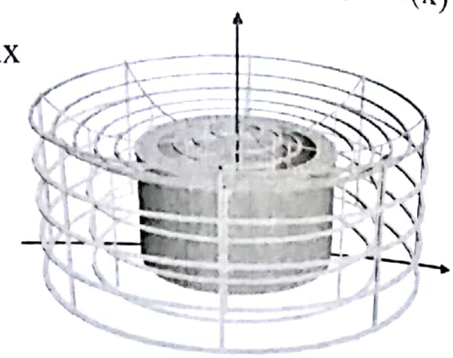
ب- روش پوسته استوانه ای (واشر):

در این روش المان را موازی محور دوران در نظر گرفته و از رابطه $\boxed{V = \int ۲\pi r h \times \text{ضخامت المان}}$ استفاده می‌کنیم، r شعاع استوانه ای است که از دوران المان حول محور مورد نظرحادث شده و h ارتفاع این استوانه است.

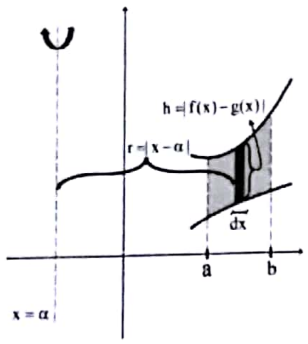
برای مثال می‌خواهیم سطح بین $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول محور y ها دوران دهیم.همانطور که درشکل می بینید شعاع دوران $r = x$ و ارتفاع استوانه $h = y = f(x)$ و ضخامت المان dx است، بنابراین حجم حاصله از رابطه زیر بدست می آید:

$$V = ۲\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$





حال اگر بخواهیم سطح بین $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول خط $x = \alpha$ دوران بدهیم،چطور خواهد شد؟



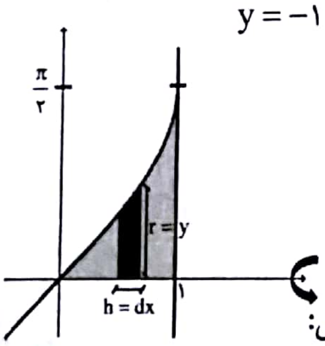
همانطور که در شکل می بینید: شعاع دوران $r = |x - \alpha|$ و ارتفاع استوانه $h = |y_۱ - y_۲| = |f(x) - g(x)|$ و ضخامت المان برابر dx است، بنابراین از رابطه زیر برای بدست آوردن این حجم استفاده می کنیم:

$$V = ۲\pi \int_a^b |x - \alpha||f(x) - g(x)|\, dx$$

مثال۱۷ : مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y = \sin^{-۱} x$ ، $x = ۱$ و محور x ها:

الف) حول محور x ها ب) حول محور y ها ج) حول خط $y = -۱$

حل



الف- ۱) روش دیسک: در روش دیسک المان را عمود برمحور دوران درنظر می گیریم،همان طور که در شکل نشان داده ایم،المان باید عمود بر محور x درنظرگرفته شود.

با توجه به شکل،شعاع دیسک $r = y$ و ارتفاع دیسک $h = dx$ می باشد،پس:

$$dV = \pi r^۲ h \to dV = \pi\, y^۲.dx$$

و چون dx داریم باید همه توابع را برحسب x کنیم،یعنی باجایگذاری $y = \sin^{-۱} x$ بدست می آید:

$$dV = \pi r^۲ h \to dV = \pi \left(\sin^{-۱} x\right)^۲.dx$$

حال به محاسبه حجم موردنظر می پردازیم:

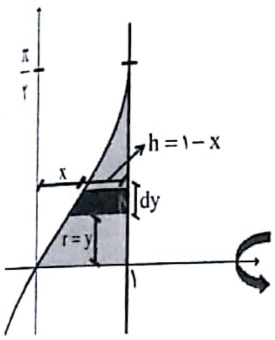
$$V=\pi\int_0^1(\arcsin x)^2\,dx\qquad\begin{cases}u=(\arcsin x)^2\to du=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ dv=dx\to v=x\end{cases}$$

$$V=\pi\left(x(\arcsin x)^2\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx\right)=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx\right)$$

$$\begin{cases}u=\arcsin x\to du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ dv=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx\to v=-2\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$V=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1 2dx\right)=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$$

الف- ۲) روش پوسته استوانه ای: همانطور که گفتیم در این روش المان را موازی محور دوران درنظر می گیریم، لذا در این سوال المان راموازی محور xها در نظر می گیریم.



به شکل خوب توجه کنید:

شعاع استوانه برابر است با y ، ارتفاع استوانه $1-x$ و ضخامت المان dy،

بنابراین:

$$dV=2\pi rh\times \text{ضخامت المان}=2\pi.y.(1-x)dy$$

ولی چون dy داریم، باید همه توابع برحسب y باشند، برای x داریم:

$$y=\sin^{-1}x\to x=\sin y$$

حال با جایگذاری بدست می آید:

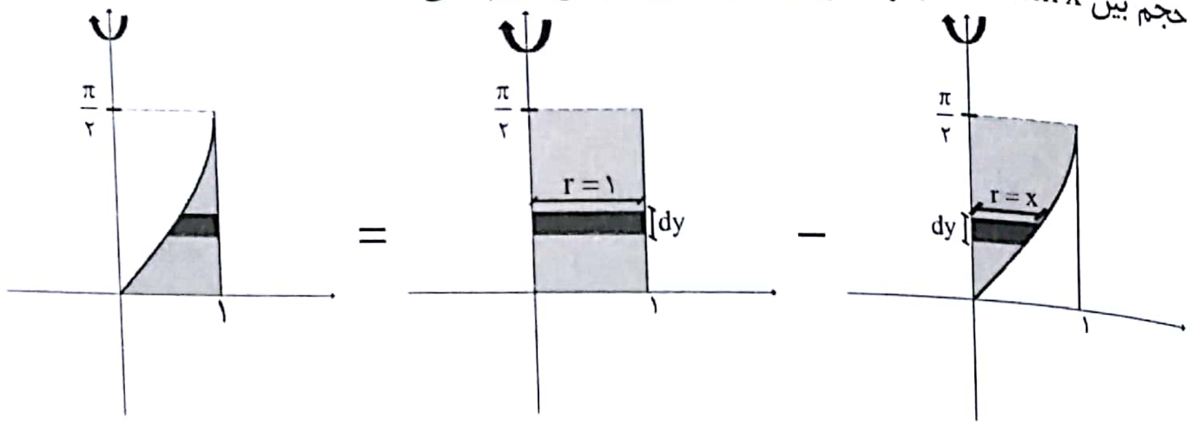
$$dV=2\pi.y.(1-\sin y)dy$$

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y.(1-\sin y)dy\begin{cases}u=y\to du=dy\\ dv=(1-\sin y)dy\to v=y+\cos y\end{cases}$$

$$V=2\pi\left(y^2+y\cos y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y+\cos y\,dy=\frac{\pi^3}{2}-2\pi\left(\frac{y^2}{2}+\sin y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$$

■

ب-۱) روش دیسک: برای حل این سوال بدین صورت عمل می کنیم:
حجم استوانه ای که از دوران خط $x = 1$ حول محور y ها بدست می آید،را محاسبه کرده وسپس حجم بین $y = \arcsin x$ و محور y ها را از آن کم می کنیم،یعنی:



می دانیم که: $V_1 = \pi r^2 h = \pi (1)^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

حال به محاسبه V_2 می پردازیم:
باتوجه به شکل می توان گفت که شعاع دیسک $r = x$ و ارتفاع آن $h = dy$ است،بنابراین:

$$dV_2 = \pi r^2 h = \pi x^2 dy$$

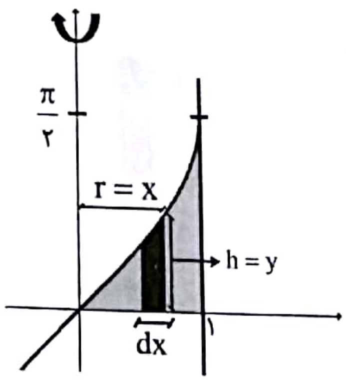
وچون dy داریم، باید x^2 رابرحسب y بنویسیم،یعنی: $x^2 = \sin^2 y$،در نتیجه:

$$dV_2 = \pi \sin^2 y \, dy$$

$$V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y \, dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy = \pi \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

می نویسیم:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$



ب-۲) روش پوسته استوانه ای :با توجه به شکل،شعاع استوانه $r = x$ و ارتفاع استوانه $h = y$ و ضخامت المان dx است.با جایگذاری در رابطه (ضخامت المان × $dV = 2\pi r h$)داریم: $dV = 2\pi x . y . dx$
و چون dx داریم پس y را باید برحسب x بنویسیم، یعنی:

$$dV = 2\pi x . \sin^{-1} x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x . \arcsin x \, dx \quad \begin{cases} u = \arcsin x \rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$V = 2\pi\left(\frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)$$

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \to v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$V = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\right)\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad , x = \sin\theta \to dx = \cos\theta d\theta$$

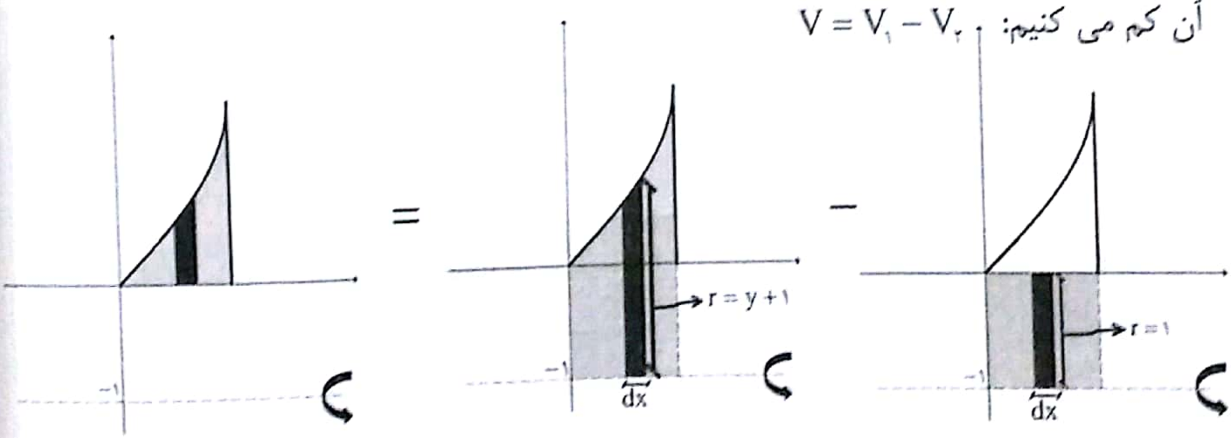
$$= \frac{\pi^2}{2} - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}.\cos\theta d\theta = \frac{\pi^2}{2} - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi^2}{2} - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \pi\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

■

از این دو مثال درمی یابیم، از روشی استفاده کنیم که در نهایت انتگرال آن ساده تر قابل حل باشد.

ج-۱) روش دیسک: با دوران المان حول $y = -1$، یک دیسک توخالی ایجاد می شود. پس ما باید حجم بین $y = \arcsin x$ و $y = -1$ رابدست آوریم وسپس حجم استوانه بین $y = 0$ و $y = -1$ را از آن کم می کنیم: $V = V_1 - V_2$



برای محاسبه V_1: واضح است که شعاع دیسک $r = 1 + y$ و ارتفاع دیسک $h = dx$، درنتیجه:

$$dV_1 = \pi r^2 h = \pi(1+y)^2 dx = \pi(1+\arcsin x)^2 dx$$

$$V_1 = \int_0^1 \pi(1+\arcsin x)^2 dx = \pi\int_0^1 1 + (\arcsin x)^2 + (2\arcsin x)dx$$

$$= \pi + \pi\int_0^1 (\text{arssin}\, x)^2 dx + 2\pi\int_0^1 (\arcsin x)dx$$

جواب انتگرال $\pi\int_{0}^{1}(\arcsin x)^{2}dx$ بر اساس قسمت الف برابر شد با $\frac{\pi^{3}}{4}-2\pi$.

با استفاده از روش جزء به جزء نیز خواهیم داشت: $\int_{0}^{1}\arcsin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$:

$$V_1=\pi+\frac{\pi^3}{4}-2\pi+2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi^3}{4}+\pi^2-3\pi$$

V_2: حجم استوانه ای است که شعاعش ۱ و ارتفاعش ۱ است، در نتیجه:

$$V_2=\pi r^2h=\pi$$

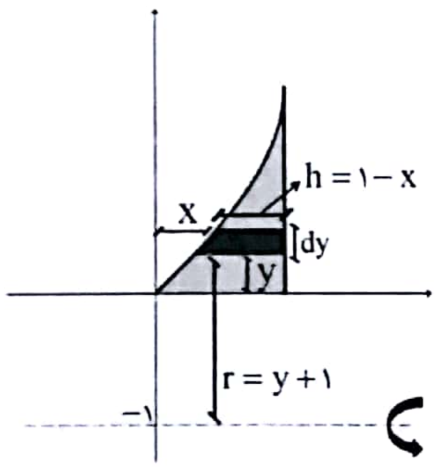
بنابراین:

$$V=V_1-V_2=\left(\frac{\pi^3}{4}+\pi^2-3\pi\right)-\pi=\frac{\pi^3}{4}+\pi^2-4\pi$$

ج-۲) روش پوسته استوانه ای:

در این سوال،محور دوران،محورهای مختصات نیستند،

همانطور که در شکل می بینیم شعاع استوانه $r=y+1$ و ارتفاع آن $h=1-x=1-\sin y$ می باشد،همچنین ضخامت المان dy است، درنتیجه:



$$dV=2\pi rh\times \text{ضخامت المان}\rightarrow dV=2\pi(y+1)(1-\sin y)dy$$

$$V=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y+1)(1-\sin y)dy=2\pi\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}y(1-\sin y)dy}_{I_1}+2\pi\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1-\sin y\,dy}_{I_2}$$

براساس قسمت الف می دانیم $I_1=\frac{\pi^2}{8}-1$ و از طرفی براحتی بدست می آید $I_2=\frac{\pi}{2}-1$ ،بنابراین:

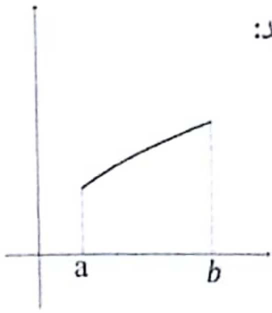
$$V=2\pi(I_1+I_2)=\frac{\pi^3}{4}+\pi^2-4\pi$$

۳- محاسبه طول قوس

الف- محاسبه طول قوس در صورتیکه ضابطه $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم،

(مختصات قائم) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}$$



مثال۱۸: طول قوس منحنی تابع $f(x)=Ln(\cos x)$ از نقطه به طول $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ را محاسبه کنید.

(امیرکبیر ۸۹ - مازون)

حل

$$f(x)=Ln(\cos x)\rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$

$$=Ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=Ln\left(\sqrt{2}+1\right)-Ln1=Ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

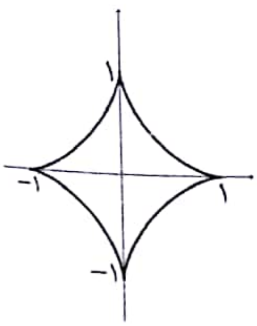
ب- محاسبه طول قوس در صورتیکه معادله پارامتری بفـرم $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ در اختیـار داشته باشیم.

$$\boxed{L=\int_{t=a}^{b}\sqrt{x'^2_{(t)}+y'^2_{(t)}}\,dt}$$

مثال۱۹ : طول استروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ را بیابید. (دمیدوویچ- برادلی- علوم و تحقیقات ۸۸- تهران جنوب ۸۴)

حل

روش اول :



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\rightarrow y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow y'=\frac{3}{2}\times\frac{-2}{3}x^{\frac{-1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\rightarrow y'=-x^{\frac{-1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به شکل می‌توان فهمید که طول کل، ۴ برابر طول ناحیه اول است.

$$L' = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^{\frac{-2}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^{\frac{-2}{3}}-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{2} \xrightarrow{L=4L'} L = 6$$

روش دوم: می‌توان از معادله پارامتری این استروئید استفاده کنیم:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \;\rightarrow x' = -3.\sin t.\cos^2 t \\ y = \sin^3 t \;\rightarrow y' = 3.\cos t.\sin^2 t \end{cases}$$

$$dL = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\cos^2 t\sin^4 t}\,dt$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{1}}\,dt \rightarrow dL = \left|3\sin t\cos t\right|dt$$

$$L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\,\cos t\,dt = \frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{L=4L'} L = 6$$

ج- محاسبه طول قوس در مختصات قطبی: $\left(r = f(\theta)\right)$

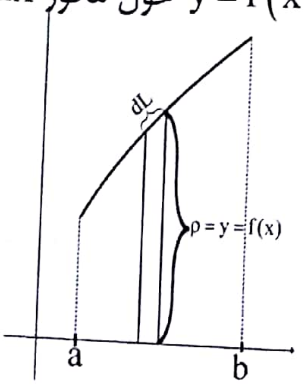
$$\boxed{L = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta}$$

که در فصل هشتم بطور کامل تشریح می شود.

۴- محاسبه مساحت سطوح دوار

$$\boxed{S_{\text{استوانه}} = 2\pi rh \rightarrow S = 2\pi \int \rho\,dL}$$

که در آن ρ فاصله محور دوران تا المان است و dL دیفرانسیل طول قوس است که در بخش قبلی یاد گرفتیم. برای مثال اگر سطح حاصل از دوران منحنی L به معادله $y = f(x)$ حول محور xها را بخواهیم:



بنابراین، $dL = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \;,\; \rho = y = f(x)$:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

مثال ۲۰ : منحنی $y = Lnx$ و $\delta \le x \le 1$ (δ ثابت مثبت)، حول محور y دوران کرده است. مساحت رویه دوار حاصل را بیابید. آیا حد این مساحت وقتی δ به صفر نزدیک شود، وجود دارد؟ (ایرادلی)

حل

$$\rho = x = e^y \quad , dL = \sqrt{1 + x'^2}\, dy = \sqrt{1 + e^{2y}}\, dy \qquad , S = 2\pi \int \rho dL$$

$$S = 2\pi \int_{Ln\delta}^{0} e^y.\sqrt{1 + e^{2y}}\, dy \xrightarrow{e^y = t} S = \int_{\delta}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi \left(\frac{t\sqrt{1 + t^2}}{2} + \frac{Ln(t + \sqrt{1 + t^2})}{2} \right) \Bigg|_{\delta}^{1}$$

$$= \pi \left(\sqrt{2} + Ln(\sqrt{2} + 1) - \delta\sqrt{1 + \delta^2} + Ln(\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) \right)$$

$$\lim_{\delta \to 0} S = \pi \left(\sqrt{2} + Ln(\sqrt{2} + 1) \right)$$

مثال ۲۱ : قسمتی از منحنی $y = e^t \cos t$ و $x = e^t \sin t$ که بین نقاط متناظر $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ قرار دارد حول محور x ها دوران می‌کند. مساحت حاصل را بیابید. (مارون)

حل

$$x = e^t \sin t \to x'_t = e^t(\sin t + \cos t) \qquad , \quad y = e^t \cos t \to y'_t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$dL = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2}\, dt = \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}e^t dt$$

$$S = 2\pi \int \rho dL \xrightarrow{\rho = y = e^t \cos t} S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t.\sqrt{2} e^t\, dt = 2\sqrt{2}\pi \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt}_{I} \qquad (*)$$

این انتگرال را بر روش جزء به جزء بازگشتی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \cos t \to du = -\sin t\, dt \\ dv = e^{2t} dt \to v = \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases} \to I = \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + \frac{1}{2} \int e^{2t} \sin t\, dt \begin{cases} u = \sin t \to du = \cos t.dt \\ dv = e^{2t} dt \to v = \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2t} \sin t - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{2t} \cos t\, dt}_{I} \right)$$

$$\frac{5}{4} I = \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + \frac{1}{4} e^{2t} \sin t \to I = \frac{e^{2t}}{5} (\sin t + 2\cos t) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$$

با توجه به تساوی (*) داریم:

$$S = 2\sqrt{2}\, \pi I = \frac{2\sqrt{2}\, \pi}{5} (e^{\pi} - 2)$$

انتگرال ناسره (غیر عادی)

نوع ۱: حدود انتگرال بینهایت باشد:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)dx$$

نوع ۲: تابع زیر انتگرال به ازای نقطه ای از بازه، تعریف نشده باشد (ناپیوسته باشد)

فرض کنید f در (a,b) پیوسته باشد بجز در نقطه c ، $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$$

مثال ۲۲: حاصل انتگرال غیر عادی $\int_{e^{۲}}^{\infty}\frac{dx}{xLnx(Lnx-۱)}$ را بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۹)

حل

$$Lnx = u \to \frac{dx}{x} = du \qquad \begin{cases} x\to\infty \Rightarrow u\to\infty \\ x = e^{۲} \to u = \ln e^{۲} = ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{۲}^{a}\frac{du}{u(u-۱)} = \lim_{a\to\infty}\int_{۲}^{a}\frac{۱}{u-۱}-\frac{۱}{u}\,du = \lim_{a\to\infty} Ln\left|\frac{u-۱}{u}\right|\Bigg|_{۲}^{a} = \lim_{a\to\infty} Ln\left|\frac{a-۱}{a}\right| - Ln\left|\frac{۱}{۲}\right|$$

$$= Ln۱ + Ln۲ = Ln۲$$

همگرایی و واگرایی انتگرال ها

اگر حاصل انتگرال موجود و متناهی باشد، انتگرال را همگرا گوییم و در غیر اینصورت واگرا می‌نامیم.

نکته ۳: انتگرال های سره (عادی)، همگرا هستند.

۱- آزمون مقایسه:

اگر در $[a,b]$ ، $0 \le f(x) \le g(x)$ باشد:

الف) اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا است.

ب) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^b g(x)\,dx$ واگرا است.

۲- آزمون مقایسه حدی:

اگر f و g در $[a,\infty)$ مثبت و انتگرالپذیر باشند و $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g} = L$. در این صورت:

الف) اگر $L \ne 0$ یا ∞ آنگاه f و g ، هر ۲ همگرایند یا هر ۲ واگرا.

ب) اگر $L = 0$ و $\int_a^{\infty} g(x)dx$ همگرا باشد انگاه $\int_a^{\infty} f(x)dx$ نیز همگراست.

ج) اگر $L = \infty$ ، $\int_a^{\infty} g(x)dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{\infty} f(x)dx$ نیز واگرا است.

مثال۲۳ : در همگرایی و واگرایی انتگرالهای زیر بحث کنید.

الف) $\int_{1}^{\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (تهران جنوب ۸۳ و ۸۵)

ب) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ (مازون)

ج) $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ (امیرکبیر ۸۹- تهران مرکزی ۸۸- قزوین ۸۶)

د) $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x + x.\cos x}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx$ (امیرکبیر۸۹)

هـ) $\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Ln}(x^2+1)}{x}\,dx$

حل

الف)
$$\left.\begin{array}{l} -1\le \sin 2x \le 1 \rightarrow -3\le 1-4\sin 2x \le 5 \\ x^3+\sqrt[3]{x} \ge x^3 \rightarrow \dfrac{1}{x^3+\sqrt[3]{x}} \le \dfrac{1}{x^3} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} \le \frac{5}{x^3}$$

چون $\int_{1}^{\infty} \frac{5}{x^3}dx = \frac{5}{2}$ همگرا است، طبق آزمون مقایسه $\int_{1}^{\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$ نیز همگرا است.

■

ب)
$$x+\sqrt{x^2+1} < \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} \operatorname{Ln}\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_{0}^{a} = \infty$$

$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x^2+1}}$ واگرا است، لذا طبق آزمون مقایسه $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ نیز واگرا است.

■

ج)
$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

I: $\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$ ناسره نیست لذا بنابه نکته۳ صفحه۲۰۳ همگراست.

II: بررسی $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

روش اول:

$$x>1 \rightarrow x^2 > x \rightarrow -x^2 < -x \rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$$

چون $\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{1}^{\infty} = e^{-1}$ همگراست پس بنا به آزمون مقایسه $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ نیز همگراست.

روش دوم:

$f(x)=e^{-x^{۲}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ را درنظر بگیرید، هر دو در بازه $[۱,\infty)$ مثبتند و از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^{۲}}}{۱/x^{۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}}{e^{x^{۲}}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{۲xe^{x^{۲}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{e^{x^{۲}}}=۰.$$

انتگرال $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}}=۱$ همگراست، در نتیجه طبق آزمون مقایسه حدی،انتگرال $\int_{۱}^{\infty}e^{-x^{۲}}dx$ نیز همگـرا می باشد.

از طرفی می‌دانیم که مجموع دو انتگرال همگرا، انتگرالی همگرا است.

■

د) $$\frac{\sin x+x.\cos x}{(x+۱)^{۲}\sqrt{x}}\le\frac{۱+x.(۱)}{(x+۱)^{۲}\sqrt{x}}=\frac{۱}{(x+۱)\sqrt{x}}\le\frac{۱}{x\sqrt{x}}$$

همچنین می دانیم که $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{a\to\infty}\frac{-۲}{\sqrt{x}}\Big|_{۱}^{a}=۲$ ،بنابراین طبق آزمون مقایسه، انتگرال مورد نظر نیز همگرا است.

■

هـ) $$\frac{Ln(x^{۲}+۱)}{x}>\frac{Lnx^{۲}}{x}=\frac{۲Lnx}{x}\qquad \int_{۱}^{\infty}\frac{۲Lnx}{x}=(Lnx)^{۲}\Big|_{۱}^{\infty}=\infty$$

چون $\int_{۱}^{\infty}\frac{۲Lnx}{x}dx$ واگراست لذا طبق آزمون مقایسه $\int_{۱}^{\infty}\frac{Ln(x^{۲}+۱)}{x}dx$ نیز واگراست.

سوال مشابه قسمت الف

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را مشخص کنید.

۲۳-۱ $\int_{۰}^{۱}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\sqrt{x}}dx$ (علم وصنعت-۹۰- تهران جنوب ۸۹)

۲۳-۲ $\int_{۰}^{\infty}e^{-x}\cos x\,dx$ (تهران مرکزی ۸۶)

۲۳-۳ $\int_{۱}^{\infty}\frac{\cos ۵x}{x^{۲}+۲x+۱}dx$ (تهران مرکزی ۸۵)

۲۳-۴ $\int_{۱}^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$ (تهران جنوب ۸۶)

Ans همه موارد همگرایند

مثال۲۴ : بازای مقادیرمختلف $\alpha > 0$،در همگرایی انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ بحث کنید.

حل

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

- ابتدا در بازه $(0,1]$ انتگرال را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\sin t}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

انتگرال $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ برای $(0<\alpha<2 \leftarrow \alpha-1<1)$ همگراست.

- بررسی $[1,\infty)$:

$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \le \frac{1}{t^\alpha}$$

می دانیم که $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ برای $\alpha > 1$، همگرا است،پس طبق آزمـون مقایـسه $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ نیـز بـرای $\alpha > 1$ همگرا می باشد.برای $0 < \alpha \le 1$ از آزمون مقایسه نمی توان نتیجـه ای گرفت،بـصورت زیر عمل می کنیم:

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt \quad : \begin{cases} u = \frac{1}{t^\alpha} \to du = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}dt \\ dv = \sin t.dt \to v = -\cos t \end{cases} \to I = \left.\frac{-\cos t}{t^\alpha}\right|_1^\infty - \alpha\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$$

$$I = \cos 1 - \alpha\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$$

می دانیم که $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \le \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ و داریم$1 < \alpha+1 \le 2$،درنتیجه $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ همگرا است،لذا طبق آزمون مقایسه می توان نتیجه گرفت که$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$ نیز همگرا است.

بنابراین دربازه $[1,\infty)$ ،انتگرال مورد نظر به ازای $\alpha > 0$ همگراست.

در مجموع برای همگرایی $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ ،داریم:

$$\left.\begin{matrix} t\in(0,1] & 0<\alpha<2 \\ t\in[1,\infty) & \alpha>0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} 0<\alpha<2$$

سوالات فصل ششم

سوالات قضیه اساسی دوم انتگرال

۱- ثابت کنید $\int_0^\pi \sqrt{1+\sin x}\,dx = 4$. (کرج ۸۴- ماژون)

حل

$$\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sin x}\;dx = \int_0^\pi \sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,dx =$$

$$\int_0^\pi \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx = \int_0^\pi \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\,dx = -2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi = 2-(-2)=4$$

۲- تابع f را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$

نشان دهید که برای هر دو عدد مثبت a و b و عدد گویای r تساوی‌های زیر برقرار است:

الف) $f(ab)=f(a)+f(b)$ ب) $f(\frac{a}{b})=f(a)-f(b)$ ج) $f(a^r)=rf(a)$ (امیرکبیر ۸۵)

حل

$$f(ax)=\int_1^{ax}\frac{dt}{t} \to (f(ax))' = a.\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$$

چون $f'(x),(f(ax))'$ برابرند، لذا اختلاف ۲ تابع $f(ax),f(x)$ برابر عدد ثابت است.

$$f(ax)-f(x)=c$$

از طرفی:

$$f(1)=\int_1^1\frac{dt}{t}=0$$

$$f(ax)-f(x)=c \xrightarrow{x=1} f(a)-f(1)=c \to f(a)=c \to f(ax)-f(x)=f(a)$$

$$\to f(ax)=f(a)+f(x)\begin{cases} \xrightarrow{x=b} f(ab)=f(a)+f(b) \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{b}} f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b}) \qquad (*) \end{cases}$$

از طرفی:

$$f(\frac{1}{b})=\int_1^{\frac{1}{b}}\frac{dt}{t} \qquad \frac{1}{t}=x \to \frac{-dt}{t^2}=dx \to f(\frac{1}{b})=\int_1^b\frac{-t^2dx}{t}=-\int_1^b\frac{dx}{x}=-f(b)$$

$$\xrightarrow{(*)} f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})=f(a)-f(b)$$

$$f(x^r)=\int_1^{x^r}\frac{dt}{t}\to (f(x^r))'=rx^{r-1}.\frac{1}{x^r}\to (f(x^r))'=\frac{r}{x}\xrightarrow{\frac{1}{x}=f'(x)}(f(x^r))'=rf'(x)$$

مشتق دو تابع $f(x^r)$ و $rf(x)$ برابر است بنابراین اختلاف آنها عددی ثابت است.

$$f(x^r)-rf(x)=c \quad (**)$$

از طرفی $f(1)=0$ پس:

$$\xrightarrow{x=1} f(1)-rf(1)=c\to c=0\xrightarrow{(**)}f(x^r)-rf(x)=0\to f(x^r)=rf(x)\xrightarrow{x=a}$$

$$f(a^r)=rf(a)$$

۳- اگر $A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$، انتگرال زیر را برحسب A محاسبه کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.\cos x}{x+1}dx$$

(علم وصنعت ۹۰- تهران ۸۸)

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.\cos x}{x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2(x+1)}dx$$

جزء به جزء:
$$\begin{cases}u=\frac{1}{2(x+1)}\to du=\frac{-1}{2(x+1)^2}dx\\ dv=\sin 2x.dx\to v=\frac{-1}{2}\cos 2x\end{cases}\to I=\frac{-\cos 2x}{4(x+1)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(x+1)^2}dx$$

$$\to I=\frac{1}{4\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(x+1)^2}dx}_{I_1}\to I=\frac{\pi+4}{4\pi+8}-\frac{1}{4}I_1 \quad (*)$$

$$I_1:\ 2x=u\to dx=\frac{du}{2}\quad ,\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\to u=\pi\\ x=0\to u=0\end{cases}$$

$$I_1=\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(\frac{u}{2}+1)^2}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(\frac{u+2}{2})^2}du=2\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(u+2)^2}du=2A \quad (**)$$

$$\xrightarrow[(**)]{(*)}I=\frac{\pi+4}{4\pi+8}-\frac{A}{2}$$

۴- معادله $\int_{Ln۲}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-۱}}=\frac{\pi}{۶}$ را حل کنید. (علم و صنعت ۸۸)

حل

$$\sqrt{e^x-۱}=t\to e^x-۱=t^۲\to e^x dx=۲tdt\to dx=\frac{۲tdt}{t^۲+۱}$$

$$I=\int\frac{۱}{t}\times\frac{۲tdt}{t^۲+۱}=۲\tan^{-۱}t=۲\tan^{-۱}\sqrt{e^x-۱}\Big|_{Ln۲}^{x}=\frac{\pi}{۶}$$

$$\to ۲\tan^{-۱}\sqrt{e^x-۱}-۲\tan^{-۱}\sqrt{e^{Ln۲}-۱}=\frac{\pi}{۶}\to ۲\tan^{-۱}\sqrt{e^x-۱}-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۶}$$

$$\to \tan^{-۱}\sqrt{e^x-۱}=\frac{\pi}{۳}\to\sqrt{e^x-۱}=\sqrt{۳}\to e^x=۴\to x=Ln۴$$

۵- مقدار انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin^۵ x}{\cos^۹ x}dx$ (امیرکبیر ۸۵)

ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{۳+۵\cos x}$ (تهران جنوب ۸۴)

حل

الف) $$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x(۱-\cos^۲ x)^۲}{\cos^۹ x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\sin x(۱+\cos^۴ x-۲\cos^۲ x)(\cos x)^{-۹}dx$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\sin x(\cos x)^{-۹}+\sin x(\cos x)^{-۵}-۲\sin x(\cos x)^{-۷}dx$$

$$\xrightarrow{\cos x=u}\frac{(\cos x)^{-۸}}{۸}+\frac{(\cos x)^{-۴}}{۴}-\frac{(\cos x)^{-۶}}{۳}\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۷}{۲۴}$$

■

ب) $$\tan\frac{x}{۲}=t\to dx=\frac{۲dt}{۱+t^۲}\quad,\cos x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲},\begin{cases}x=\frac{\pi}{۲}\to t=۱\\ x=۰\to t=۰\end{cases}$$

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۳+۵(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲})}.\frac{۲dt}{۱+t^۲}=\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{۴-t^۲}=\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{(۲-t)(۲+t)}$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۱}(\frac{۱}{۲-t}+\frac{۱}{۲+t})dt=\frac{۱}{۴}Ln\left|\frac{۲+t}{۲-t}\right|\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}Ln۳$$

۶- انتگرالهای معین زیر را حل کنید.

الف) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$ (علم و صنعت ۸۶)　　ب) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1+\tan x)dx$ (علم و صنعت۸۶- تهران جنوب ۸۴)

حل

الف) $x+1=t^2 \to dx=2tdt$　　$,\begin{cases} x=1 \to t=\sqrt{2} \\ x=0 \to t=1 \end{cases}$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t-1)}{t+1}2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-t}{t+1}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} t-2+\frac{2}{t+1}dt = t^2-4t+4Ln|t+1|\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=5-4\sqrt{2}+4Ln(\frac{\sqrt{2}+1}{2})$$

■

ب) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1+\tan x)dx$　　$\frac{\pi}{4}-x=t,\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \to t=0 \\ x=0 \to t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} Ln\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan t})dt$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(\frac{2}{1+\tan t})dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln2dt-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1+\tan t)dt}_{I}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln2dt-I \to 2I=\frac{\pi}{4}Ln2 \to I=\frac{\pi}{8}Ln2$$

۷- حاصل $I=\int_{-1}^{1}\frac{e^{\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx$ را بدست آورید.

حل

$$x=1+(-1)-u \to x=-u \to dx=-du$$

$$I=\int_1^{-1}\frac{e^{\sin(-u)}}{\cosh(\sin(-u))}(-du)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{-\sin u}}{\cosh(\sin u)}du$$

با جمع کردن این انتگرال با صورت مسأله داریم:

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{e^{-\sin x}+e^{\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx \to 2I=\int_{-1}^{1}\frac{2\cosh(\sin x)}{\cosh(\sin x)}dx \to 2I=2x\Big|_{-1}^{1} \to I=2$$

۸- انتگرالهای زیر را حل کنید.

الف) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$ (تهران جنوب ۸۹)

ب) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ (تهران جنوب ۸۹)

حل

الف) تغییر متغیر اویلر $\sqrt{-x^2+4x-3} = t(x-1) \to -x^2+4x-3 = t^2(x-1)^2$

$$\to (x-1)(-x+3) = t^2(x-1)^2 \to -x+3 = t^2(x-1) \to t^2+3 = x(t^2+1)$$

$$\to x = \frac{t^2+3}{t^2+1} \to dx = \frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2} \quad , \quad \begin{cases} x=3 & \to t=0 \\ x\to 1^+ & \Rightarrow t\to\infty \end{cases}$$

$$\int_{\infty}^{0} \frac{1}{t(\frac{t^2+3}{t^2+1}-1)} \cdot \frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{a\to\infty} 2\tan^{-1} t\Big|_{0}^{a} = \pi$$

■

$$\text{ب)} \arcsin\sqrt{x} = u \to \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}dx = du \to \frac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}dx = du \to \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2du$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u.2du = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} udu = u^2\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

۹- اگر تابع f در $[a,b]$ دو بار مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$ باشد، نشان دهید:

$$\int_{a}^{b} (x-a)(b-x)f''(x)dx = -2\int_{a}^{b} f(x)dx$$ (آدامز)

حل

$$\begin{cases} u=(x-a)(b-x) \to du=(-2x+a+b)dx \\ dv=f''(x)\,dx \to v=f'(x) \end{cases}$$

$$I = \int_{a}^{b} (x-a)(b-x)f''(x)dx = (x-a)(b-x)f'(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} (-2x+a+b)f'(x)dx$$

$$I = \int_{a}^{b} (2x-a-b)f'(x)dx \quad , \quad \begin{cases} u=2x-a-b \to du=2dx \\ dv=f'(x)dx \to v=f(x) \end{cases}$$

$$I = f(x)(2x-a-b)\Big|_{a}^{b} - 2\int_{a}^{b} f(x)dx = -2\int_{a}^{b} f(x)dx$$

۱۰- مقدار انتگرال $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \sin^2 x \, Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$ را بیابید. (مازون)

حل

$$f(x)=\sin^2 x.\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \to f(-x)=\sin^2(-x).\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\sin^2 x.\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}$$

$$=-\sin^2 x.\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)\to \text{تابعی فرد است} \to \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(x)dx=0$$

۱۱- مطلوبست محاسبه $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. (علم و صنعت ۸۳- تهران مرکزی ۸۸- تهران شمال ۸۷)

حل

$$\pi-x=t \begin{cases} x=\pi \to t=0 \\ x=0 \to t=\pi \end{cases} \quad , dx=-dt$$

$$I=\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)=\int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\underbrace{\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt}_{I}$$

$$\to 2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt \to I=\frac{\pi}{2}(-\tan^{-1}(\cos t))\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{4}$$

۱۲- اگر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}Ln2$ ، مطلوبست $\int_0^\pi x\,Ln(\sin x)dx$. (علم و صنعت ۸۵)

حل

$$I=\int_0^\pi x\,Ln(\sin x)dx \xrightarrow{x\to\pi-x} I=\int_0^\pi (\pi-x)Ln(\sin(\pi-x))dx$$

$$I=\int_0^\pi \pi Ln(\sin x)-\underbrace{x\,Ln(\sin x)}_{I}dx \to 2I=\pi\int_0^\pi Ln(\sin x)dx \to I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi Ln(\sin x)dx$$

$$I=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Ln(\sin x)dx\right)=\frac{\pi}{2}(I_1+I_2) \quad (*) \quad , I_1=-\frac{\pi}{2}Ln2$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Ln(\sin x)dx \quad ,\pi-x=t\to dx=-dt \begin{cases} x=\pi\to t=0 \\ x=\frac{\pi}{2}\to t=\frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} Ln(\sin(\pi-t))(-dt)\to I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin t)dt=I_1=-\frac{\pi}{2}Ln2$$

$$\xrightarrow{(*)} I=\frac{\pi}{2}(I_1+I_2)=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}Ln2-\frac{\pi}{2}Ln2\right)=-\frac{\pi^2}{2}Ln2$$

۱۳- مطلوبست محاسبه مقدار انتگرال $\int_{0}^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x}$.

(علم وصنعت۸۴- کرج۸۴- مازون)

حل

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\cos^2 x}\qquad ,\pi-x=t \to dx=-dt,\begin{cases}x=\pi\to t=0\\ x=0\to t=\pi\end{cases}$$

$$I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)(-dt)}{1+\cos^2(\pi-t)}=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-t}{1+\cos^2 t}dt=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{1+\cos^2 t}dt-\underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{t}{1+\cos^2 t}dt}_{I}$$

$$2I=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}\to I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos^2 t}+1}\to I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)+1}dt$$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1+\tan^2 t}{2+\tan^2 t}dt=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=0}$$

این جواب نادرست است زیرا tant در $t=\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است، پس بصورت انتگرال ناسره بایـد حـل شود یعنی:

$$I=\frac{\pi}{2}\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_{0}^{a}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{2+\tan^2 t}+\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^+}\int_{b}^{\pi}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{2+\tan^2 t}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{0}^{a}+\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{b}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-0\right)+\frac{\pi}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

یادآوری: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

۱۴- مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر:

الف) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ (تهران جنوب ۸۶)

ب) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ (علوم و تحقیقات ۸۸)

ج) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$ (تهران جنوب ۸۵)

د) $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x^3\sqrt{9x^2-9}}$ (تهران مرکزی ۸۹)

حل

الف) $x=\tan t \to dx=(1+\tan^2 t)dt \qquad \begin{cases} x=1 \to t=\frac{\pi}{4} \\ x=0 \to t=0 \end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 t)}{(1+\tan^2 t)^3}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(1+\tan^2 t)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(\frac{1}{\cos^2 t})^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t)^2\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$$

■

ب) $x=\tan\theta \to dx=\sec^2\theta\, d\theta \;,\; \begin{cases} x=\sqrt{3} \to \theta=\frac{\pi}{3} \\ x=1 \to \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan^2\theta}.\sec^2\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^3\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos\theta.\sin^2\theta}$$

چون این انتگرال نسبت به $\cos\theta$ فرد است ، از تغییرمتغیر $\sin\theta=u$ استفاده می کنیم:

$$\sin\theta=u \to \cos\theta d\theta=du \to d\theta=\frac{du}{\cos\theta} \;,\; \begin{cases} \theta=\frac{\pi}{3} \to u=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \to u=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{\cos^2\theta.u^2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)u^2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u^2(1-u)(1+u)}$$

تجزیه کسر: $\frac{1}{u^2(1-u)(1+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{1-u}+\frac{D}{1+u}$

$$\to 1=Au(1-u^2)+B(1-u^2)+Cu^2(1+u)+Du^2(1-u) \to A=0,\ B=1,\ C=\frac{1}{2},\ D=\frac{1}{2}$$

$$I=\int\frac{du}{u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}=\frac{-1}{u}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

■

ج) $x=\tan\theta \to dx=\sec^2\theta d\theta \quad , \begin{cases} x=1 \to \theta=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\sqrt{3}}{3} \to \theta=\frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta.\sqrt{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta.\sqrt{\left(\sec^2\theta\right)^3}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta.\sec^3\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\tan^2\theta.\sec\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta.\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta.\left(1-\sin^2\theta\right)}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta(\sin\theta)^{-2}d\theta-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta=\frac{-1}{\sin\theta}-\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

■

د) $x=\sec\theta \to dx=\sec\theta.\tan\theta d\theta \quad \begin{cases} x=\sqrt{2} \to \theta=\frac{\pi}{4} \\ x=1 \to \theta=0 \end{cases}$

$$I=\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta.\tan\theta d\theta}{\sec^3\theta.\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta.\tan\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{12}$$

۱۵- مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر.

الف) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ (تهران جنوب ۸۴)   ب) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ (تهران مرکزی ۸۷)

حل

الف) $\sqrt[6]{x}=t \to x=t^6 \to dx=6t^5 dt \quad , \begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=0 \to t=0 \end{cases}$

$$I=\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\times 6t^5 dt=6\int_0^1 \frac{t^8}{1+t^2}dt$$

چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است پس ابتدا باید تقسیم کنیم و خواهیم داشت:

$$I=6\int_0^1 (t^6-t^4+t^2-1)+\frac{1}{1+t^2}dt=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\arctan t\right)\Big|_0^1=-\frac{152}{35}+\frac{3\pi}{2}$$

■

ب) $\frac{1+x}{1-x}=t^2 \to 1+x=t^2-t^2x \to x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \to dx=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt,\ \begin{cases} x=1^- \to t=\infty \\ x=-1 \to t=0 \end{cases}$

$I=\int_0^\infty t.\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}=\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt \qquad t=\tan\theta \to dt=\sec^2\theta d\theta,\ \begin{cases} t=\infty \to \theta=\frac{\pi}{2} \\ t=0 \to \theta=0 \end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\tan^2\theta}{(\tan\theta^2+1)^2}\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\tan^2\theta}{\sec^4\theta}.\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta.d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=2(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

۱۶- مقادیر انتگرالهای زیر را بیابید.

الف) $\int_1^2 (1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})e^{1-\frac{1}{x}}dx$ (امیرکبیر ۸۷)

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 xdx$ (تهران ۸۵ - آذادمز)

ج) $\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف) $I=\underbrace{\int_1^2 e^{1-\frac{1}{x}}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^2 \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x}dx}_{I_2}-\underbrace{\int_1^2 \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}dx}_{I_3} \qquad (*)$

حل I_3:

$I_3=\int \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx \qquad 1-\frac{1}{x}=u \to \frac{1}{x^2}dx=du \to I_3=\int e^u du=e^u=e^{1-\frac{1}{x}} \qquad (**)$

و همچنین برای I_2 نیز داریم:

$I_2=\int \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x}dx=\int x(\frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx) \quad \begin{cases} u=x \to du=dx \\ dv=\frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx \to v=I_3=e^{1-\frac{1}{x}} \end{cases}$

$\to I_2=xe^{1-\frac{1}{x}}-\int e^{1-\frac{1}{x}}dx \to I_2=xe^{1-\frac{1}{x}}-I_1 \qquad (***)$

$\xrightarrow{(*),(**),(***)} I=I_1+I_2-I_3=I_1+\left(xe^{1-\frac{1}{x}}-I_1\right)-e^{1-\frac{1}{x}}=(x-1)e^{1-\frac{1}{x}}\Big|_1^2=\sqrt{e}$ ■

ب) در مثال۱۸ صفحه ۱۳۵ برای انتگرال $I_n=\int \sec^n x\,dx$ بدست آوردیم:

$$I_n=\frac{۱}{n-۱}\tan x\sec^{n-۲}x+(\frac{n-۲}{n-۱})I_{n-۲}\quad ,n\geq ۲\qquad ,I_۰=x\ ,\quad I_۱=Ln|\sec x+\tan x|$$

برای n=۵ خواهیم داشت:

$$I_۵=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sec^۵ x\,dx=\frac{۱}{۴}\tan x\sec^۳ x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}+\frac{۳}{۴}I_۳\xrightarrow{I_۳=\frac{۱}{۲}\tan x\sec x+\frac{۱}{۲}I_۱}$$

$$I_۵=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳}{۸}\tan x\sec x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}+\frac{۳}{۸}I_۱\xrightarrow{I_۱=Ln|\tan x+\sec x|}I_۵=\frac{۷\sqrt{۲}}{۸}+\frac{۳}{۸}Ln|\tan x+\sec x|\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$\to I_۵=\frac{۷\sqrt{۲}}{۸}+\frac{۳}{۸}Ln\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

■

ج) $$\sqrt{x}-۱=t\to x=(t+۱)^۲\to dx=۲(t+۱)dt\qquad \begin{cases}x=۱۶\to t=۳\\ x=۱\to t=۰\end{cases}$$

$$I=۲\int_۰^۳(t+۱)\arctan\sqrt{t}\,dt\qquad \begin{cases}u=\arctan\sqrt{t}\to du=\dfrac{dt}{۲\sqrt{t}(t+۱)}\\ dv=۲(t+۱)dt\to v=(t+۱)^۲\end{cases}$$

$$I=(t+۱)^۲\arctan\sqrt{t}-\int_۰^۳\frac{t+۱}{۲\sqrt{t}}dt=(t+۱)^۲\arctan\sqrt{t}-\frac{۱}{۲}\int_۰^۳ t^{\frac{۱}{۲}}+t^{\frac{-۱}{۲}}dt$$

$$I=(t+۱)^۲\arctan\sqrt{t}-\frac{۱}{۳}t\sqrt{t}-\sqrt{t}\Big|_۰^۳=\frac{۱۶\pi}{۳}-۲\sqrt{۳}$$

۱۷- فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی باشد و $I_n=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^n x\,dx$. یک رابطه بازگشتی بین $I_n,I_{n+۲}$ پیدا کنید.

(امیرکبیر۸۹ -علم و صنعت ۸۴، تهران ۸۴)

حل

$$I_n=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^n x\,dx\qquad ,\begin{cases}u=\cos^{n-۱}x\to du=-(n-۱)\sin x\cos^{n-۲}x\,dx\\ dv=\cos x\,dx\to v=\sin x\end{cases}$$

$$I_n=\sin x.\cos^{n-۱}x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}+(n-۱)\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲ x.\cos^{n-۲}x\,dx=(n-۱)\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\cos^۲ x)\cos^{n-۲}x\,dx$$

$$I_n=(n-۱)\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{n-۲}x\,dx-(n-۱)\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^n x\,dx=(n-۱)I_{n-۲}-(n-۱)I_n$$

$$\to I_n=\frac{n-۱}{n}I_{n-۲}\xrightarrow{n\to n+۲}I_{n+۲}=\frac{n+۱}{n+۲}I_n\ ,n\geq ۰$$

و همچنین:

$$n=0 \rightarrow I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

$$n=1 \rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

۱۸- برای انتگرال زیر که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است،یک رابطه بازگشتی بدست آورید

$$I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$$ (تهران۸۸)

وسپس I_2 را محاسبه کنید.

حل

$$I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt \quad , \begin{cases} u=t^n \rightarrow du=nt^{n-1}dt \\ dv=\sqrt{1-t}\,dt \rightarrow v=\frac{-2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\rightarrow I_n=\frac{-2}{3}t^n(1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t).\sqrt{1-t}\,dt=\frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}\sqrt{1-t}-t^n\sqrt{1-t}\,dt$$

$$\rightarrow I_n=\frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n)\rightarrow I_n+\frac{2n}{3}I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}\rightarrow \frac{3+2n}{3}I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}$$

$$\rightarrow I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}\ ,n\geq 1$$

همچنین:

$$I_0=\int_0^1 t^0\sqrt{1-t}\,dt=\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{-2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}\xrightarrow{n=2}I_2=\frac{4}{7}I_1\xrightarrow{I_1=\frac{2}{5}I_0}I_2=\frac{4}{7}.\frac{2}{5}I_0\xrightarrow{I_0=\frac{2}{3}}I_2=\frac{16}{105}$$

سوالات قضیه اساسی اول انتگرال

۱۹- $\frac{dy}{dx}$ را از رابطه روبرو بیابید: $x=\int_1^{t^2}\sqrt[3]{z}\,Lnz\,dz\ ,\ y=\int_{\sqrt{t}}^{3} z^2 Lnz\,dz$ (علم و صنعت ۸۶)

حل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{0-\frac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{t}^2\,Ln\sqrt{t}}{2t^2.\sqrt[3]{t^2}\,Lnt^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}.t.Lnt^{\frac{1}{2}}}{2t^2\times 2Lnt}=\frac{-\frac{1}{4}\sqrt{t}Lnt}{9t^3.Lnt}=\frac{-1}{36t^3\sqrt{t}}$$

۲۰- مطلوبست محاسبه حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\left(\tan^{-1}t\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dt$. (امیرکبیر ۸۸- تهران جنوب ۸۹- علم وصنعت۸۳)

حل

$$x\to\infty\Rightarrow\tan^{-1}x>1\to\left(\tan^{-1}x\right)^2>1\to\int_0^\infty\left(\tan^{-1}x\right)^2dx>\int_0^\infty 1dx$$

چون $\int_0^\infty 1dx=\infty$ واگرا است پس بنا به آزمون مقایسه $\int_0^\infty\left(\tan^{-1}x\right)^2dx=\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\left(\tan^{-1}t\right)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'\left(\tan^{-1}x\right)^2-0}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1}=\frac{\pi^2}{4}$$

سوال مشابه

۱-۲۰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sin(t^2)dt}{x^9}$ (تهران جنوب ۸۴- امیرکبیر ۸۵) Ans $\frac{1}{3}$

۲۱- حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{8x^3}\arcsin\sqrt[3]{t}dt}{\sin x^4}$ (علم و صنعت ۸۶)

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\left(e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)dt}{\frac{x^2}{2}}$ (تهران مرکزی ۸۹)

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2x}Ln(1+t)dt}{\int_0^x(1-\cos t)\,dt}$ (تهران جنوب ۸۳)

حل

$$\text{(الف)}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{8x^3}\arcsin\sqrt[3]{x}\,dx}{\sin x^4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0}\frac{24x^2.\arcsin\sqrt[3]{8x^3}}{4x^3.\cos x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\arcsin 2x}{x\cos x^4}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{12x}{x(1-\frac{x^8}{2})}=12$$

■

$$\text{ب)}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x (e-(1+t)^{\frac{1}{t}})dt}{\frac{x^2}{2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0^+}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

می‌دانیم: $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ، لذا کسر فوق مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین می توانیم از قاعـده هوپیتـال استفاده کنیم. ابتدا می خواهیم مشتق $A=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ را بدست آوریم:

$$A=(1+x)^{\frac{1}{x}}\to \operatorname{Ln}A=\operatorname{Ln}(1+x)^{\frac{1}{x}}\to \operatorname{Ln}A=\frac{1}{x}\operatorname{Ln}(1+x)\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{A'}{A}=\frac{-1}{x^2}\operatorname{Ln}(1+x)+\frac{1}{x(x+1)}\to A'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-\operatorname{Ln}(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)}\right)$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}\right)$$

$$=e\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\operatorname{Ln}(1+x)-x}{x^2(x+1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}e\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}e\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{6x+2}=\frac{e}{2}$$

■

$$\text{ج)}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\operatorname{Ln}(1+t)dt}{\int_0^x(1-\cos t)dt}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x.\operatorname{Ln}(1+\sin^2 x)}{(1-\cos x)}=\frac{0}{0}$$

$$\xlongequal{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{Ln}(1+x^2)}{\frac{x^2}{2}}\xrightarrow{\operatorname{Ln}(1+u)\sim u}\lim_{x\to 0}\frac{2x.x^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}4x=0$$

سوال مشابه

۲۱-۱ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan t^2\,dt}{x-\sinh x}$ (کرج۸۴) Ans ۲

۲۱-۲ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$ (علم وصنعت۹۰) Ans ۰

۲۲- با فرض اینکه تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و غیر صفر باشد، ضابطه تابع f را از معادله زیر بیابید.

$$(f(x))^2=\int_0^{x^2} f(\sqrt{t})\tan^{-1}(\sqrt{t})\,dt \qquad ,x>0$$ (تهران مرکزی ۸۸)

حل

از طرفین تساوی مشتق می گیریم:

$$2f(x)f'(x)=2x\,f(\sqrt{x^2})\tan^{-1}(\sqrt{x^2})\to 2f(x)f'(x)=2x\,f(x).\tan^{-1}x$$

$$\xrightarrow{f(x)\neq 0} f'(x)=x\tan^{-1}x\to f(x)=\int x\tan^{-1}x\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\begin{cases}u=\tan^{-1}x\to du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=x\,dx\to v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\to f(x)=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c \qquad (*)$$

از طرفی نیز :

$$x=0\to f^2(0)=\int_0^0 =0\to f(0)=0$$

$$\xrightarrow[f(0)=0]{(*)} c=0\to f(x)=\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\tan^{-1}x-\frac{x}{2}$$

سوال مشابه ۲۲-۱ تابع پیوسته $f(x)$ و غیر صفر که $f'(x)\neq 0$ را چنان پیدا کنید بطوریکه

$$.\ (f(x))^2=\int_0^x f(t)\frac{e^t}{1+e^{-t}}dt$$ (تهران جنوب ۸۷)

Ans $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\mathrm{Ln}\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)-1\right)$

۲-۲۲ فرض کنید $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x\in[0,\infty)$ داشته باشیم $(f(x))^2=1+2\int_0^x f(t)dt$. ضابطه تابع f را بدست آورید.

Ans $f(x)=x+1$

۲۳- اگر $f(x)=3+\int_0^x \frac{1+\sin t}{1+t^2}dt$, $p(x)=a+bx+cx^2$ مقادیر c,b,a را طوری بیابید که $p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $p''(0)=f''(0)$.

(تهران مرکزی ۸۷)

حل

$$f'(x)=\frac{1+\sin x}{1+x^2}\to f''(x)=\frac{(1+x^2)\cos x-2x(1+\sin x)}{(1+x^2)^2} \quad ,p'(x)=b+2cx \to p''(x)=2c$$

بنابراین:

$$f(0)=p(0)\to 3+\int_0^0 \frac{1+\sin t}{1+t^2}dt=a\to 3=a$$

$$f'(0)=p'(0)\to 1=b \qquad ,f''(0)=p''(0)\to 1=2c\to c=\frac{1}{2}$$

۲۴- فرض کنید $g(x)=x^c e^{2x}$ و $f(x)=\int_0^x e^{2t}(3t^2+1)^{\frac{1}{2}}dt$، اولا c را چنان بیابید که حد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to\infty$ متناهی و مخالف صفر باشد. ثانیا حد مذکور را بیابید.

(علم و صنعت ۸۴)

حل

$$g'(x)=cx^{c-1}.e^{2x}+2x^c\ e^{2x}=x^{c-1}e^{2x}\ (c+2x) \qquad ,f'(x)=e^{2x}\ (3x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{c-1}.e^{2x}(c+2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2}}{2x^c}$$

برای اینکه حد موجود و مخالف صفر باشد باید درجه صورت برابر درجه مخرج باشد یعنی $c=1$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

سوالات محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین

۲۵- مطلوبست محاسبه حد زیر.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{۳}\left(\sqrt[۳]{\frac{n+۱}{n^۴}}+\sqrt[۳]{\frac{n+۲}{n^۴}}+\dots+\sqrt[۳]{\frac{n+n}{n^۴}}\right)$$ (تهران مرکزی ۸۵)

حل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{۳}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt[۳]{\frac{n+i}{n^۴}}=\frac{۴}{۳}\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt[۳]{\frac{n+i}{n}}=\frac{۴}{۳}\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt[۳]{۱+\frac{i}{n}}=\frac{۴}{۳}\int_۰^۱\sqrt[۳]{۱+x}\,dx$$

$$=\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۴}(۱+x)^{\frac{۴}{۳}}\Big|_۰^۱=(۱+x)\sqrt[۳]{۱+x}\Big|_۰^۱=۲\sqrt[۳]{۲}-۱$$

سوال مشابه

۲۵-۱ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{۱}{n^۴}+\frac{۱}{n^۳}}+\sqrt{\frac{۱}{n^۴}+\frac{۲}{n^۳}}+\dots+\sqrt{\frac{۱}{n^۴}+\frac{n}{n^۳}}$ (تهران مرکزی ۸۳ - تهران مرکزی ۸۹)

Ans $\frac{۲}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$

۲۵-۲ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^۲+n^۲}{n^۳}$ (تهران مرکزی ۸۹)

Ans $\frac{۴}{۳}$

۲۶- حاصل حد های زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۴}+\dots+\frac{n}{n^۲+n^۲}\right)$ (تهران جنوب ۸۶- قزوین۸۸)

ب) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n^۲}{i(i^۲+n^۲)}$ (تهران مرکزی ۸۶)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+i^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n^۲}{n^۲+i^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\frac{n^۲+i^۲}{n^۲}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}=\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x^۲}=\tan^{-۱}x\Big|_۰^۱=\frac{\pi}{۴}$$ ■

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^{3}}{i(i^{2}+n^{2})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}\cdot(\frac{i^{2}+n^{2}}{n^{2}})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}\frac{1}{\frac{i}{n}\cdot((\frac{i}{n})^{2}+1)}$

$$\xrightarrow[b=1]{a=0}\int_0^1\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_0^1\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}dx\to A=1\,,\,B=-1\,,C=0$$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\,dx=\lim_{a\to 0^+}\ \mathrm{Ln}\,x-\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+1)\Big|_a^1=\lim_{a\to 0^+}\mathrm{Ln}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_a^1$$

$$=\mathrm{Ln}\frac{1}{\sqrt{2}}-\lim_{a\to 0^+}\ \mathrm{Ln}\ \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=+\infty$$

سوال مشابه

۱-۲۶ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\dots+\frac{n}{(2n)^2}$ (تهران جنوب ۸۴) Ans $\frac{1}{2}$

۲۷- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$ (تبریز ۸۵)

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$ (تهران جنوب ۸۹ و ۸۵)

حل

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+k^2}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

$$=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$$

■

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(4-(\frac{i}{n})^2\right)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}$

$$\xrightarrow[b=1]{a=0}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

۲۸- حدمجموع های زیر را حل کنید.

$$\text{الف)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{n}e^{\frac{۱}{n}}+\frac{۲}{n}e^{\frac{۲}{n}}+\dots+\frac{n}{n}e^{\frac{n}{n}}\right)$$ (تهران جنوب ۸۶ و ۸۳)

$$\text{ب)}\ \lim_{n\to\infty} Ln\sqrt[n]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\left(۱+\frac{۲}{n}\right)\dots\left(۱+\frac{n}{n}\right)}$$ (تهران جنوب ۸۹ و ۸۷ - تبریز۸۶)

حل

$$\text{الف)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i}{n}e^{\frac{i}{n}} \xrightarrow[b=۱]{a=۰} I=\int_۰^۱ xe^x\,dx \qquad \begin{cases} u=x \to du=dx \\ dv=e^x\,dx \to v=e^x \end{cases}$$

$$I=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x\Big|_۰^۱=۱$$

$$\text{ب)}\ \lim_{n\to\infty} Ln\left((۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})\dots(۱+\frac{n}{n})\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(Ln(۱+\frac{۱}{n})+Ln(۱+\frac{۲}{n})+\dots+Ln(۱+\frac{n}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}Ln(۱+\frac{i}{n})$$

$$\xrightarrow[b=۱]{a=۰} I=\int_۰^۱ Ln(۱+x)\,dx \quad , \begin{cases} u=Ln(۱+x)\to du=\dfrac{dx}{۱+x} \\ dv=dx \to v=x \end{cases}$$

$$I=x\,Ln(۱+x)-\int\frac{x}{۱+x}dx=x\,Ln(۱+x)-\int ۱-\frac{۱}{x+۱}dx$$

$$=x\,Ln(۱+x)-x+Ln(۱+x)\Big|_۰^۱=۲Ln۲-۱$$

سوال مشابه قسمت الف

۲۸-۱ $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}\left(\frac{۱}{\sqrt[n]{e}}+\frac{۲}{\sqrt[n]{e^۲}}+\dots+\frac{n}{e}\right)$ (کرج ۸۸) Ans $۱-۲e^{-۱}$

سوال مشابه قسمت ب

۲۸-۲ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۲}{n}Ln(۱+\frac{۲i}{n})$ (تهران جنوب ۸۴) Ans $۳Ln۳-۲$

۲۸-۳ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i}{n^۲}Ln(۱+\frac{i}{n})$ (تهران جنوب ۸۵) Ans $\frac{۱}{۴}$

۲۹- حاصل حدهای زیر را بیابید

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{۱}{(۲n+۳)^{۲}-۱^{۲}}+\dfrac{۱}{(۲n+۶)^{۲}-۲^{۲}}+\dots+\dfrac{۱}{(۲n+۳n)^{۲}-n^{۲}}\right)$ (شریف ۸۴)

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ (تهران شمال ۸۳ - کرج)

حل

الف) $$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(۲n+۳i)^{۲}-i^{۲}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(۲+۳\frac{i}{n})^{۲}-(\frac{i}{n})^{۲}}$$

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{(۲+۳x)^{۲}-x^{۲}}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۸x^{۲}+۱۲x+۴}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{(۴x+۲)(۲x+۲)}dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۱}\frac{۲}{۲x+۱}-\frac{۱}{x+۱}dx=\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}\left|\frac{۲x+۱}{x+۱}\right|\Bigg|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$$

■

ب) $$A=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to \mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}(n!)^{\frac{۱}{n}}-\mathrm{Ln}n$$

$$\mathrm{Ln}A=\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}(۱\times۲\times\dots\times n)-\mathrm{Ln}n=\frac{۱}{n}\left(\mathrm{Ln}(۱\times۲\times\dots\times n)-n\mathrm{Ln}n\right)$$

$$=\frac{۱}{n}\left(\mathrm{Ln}(۱\times۲\times\dots\times n)-\mathrm{Ln}n^{n}\right)\to \mathrm{Ln}A=\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{۱\times۲\times\dots\times n}{n^{n}}\right)$$

$$\to \mathrm{Ln}A=\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{۱}{n}\times\frac{۲}{n}\times\dots\times\frac{n}{n}\right)=\frac{۱}{n}\left(\mathrm{Ln}\frac{۱}{n}+\mathrm{Ln}\frac{۲}{n}+\dots+\mathrm{Ln}\frac{n}{n}\right)\to \mathrm{Ln}A=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\mathrm{Ln}\frac{i}{n}$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\mathrm{Ln}\frac{i}{n}=\int_{۰}^{۱}\mathrm{Ln}x\,dx=x\mathrm{Ln}x-x\Big|_{۰}^{۱}=-۱$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=-۱\to \lim_{n\to\infty}A=e^{-۱}$$

سوالات محاسبه مساحت

۳۰- مساحت ناحیه R واقع بین نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۴+\sin ۲x}$ و خطوط $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۴}$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر)

حل

$$S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{dx}{۴+\sin ۲x}\qquad \tan x=u\rightarrow dx=\frac{du}{۱+u^{۲}}\qquad \begin{cases}x=\frac{\pi}{۴}\rightarrow u=۱\\ x=۰\rightarrow u=۰\end{cases}$$

$$\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱=\frac{۲}{۱+\tan^{۲}x}-۱=\frac{۲}{۱+u^{۲}}-۱\rightarrow \cos ۲x=\frac{۱-u^{۲}}{۱+u^{۲}}\quad ,\sin ۲x=\frac{۲u}{۱+u^{۲}}$$

$$S=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۴+\frac{۲u}{۱+u^{۲}}}.\frac{du}{۱+u^{۲}}=\int_{۰}^{۱}\frac{du}{۴u^{۲}+۲u+۴}=\int_{۰}^{۱}\frac{du}{(۲u+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱۵}{۴}}$$

$$,\ ۲u+\frac{۱}{۲}=t\rightarrow du=\frac{dt}{۲}$$

$$S=\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۵}{۲}}\frac{\frac{۱}{۲}dt}{t^{۲}+\frac{۱۵}{۴}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}}\tan^{-۱}\frac{۲\sqrt{۱۵}\,t}{۱۵}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۵}(\tan^{-۱}(\frac{\sqrt{۱۵}}{۳})-\tan^{-۱}(\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۵}))$$

۳۱- مطلوبست محاسبه مساحت محدود به سهمی $y=x^{۲}-۲x+۲$ و خط مماس به آن در نقطه $p(۳,۵)$ و محور yها. (مارون)

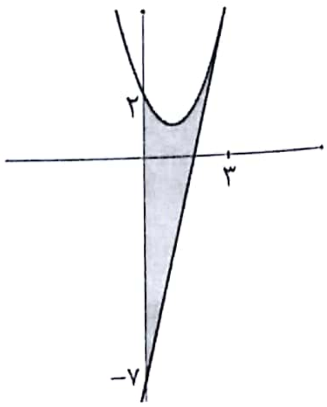
حل

$$m=y'=۲x-۲\Big|_{x=۳}=۴$$

$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\rightarrow y-۵=۴(x-۳)\rightarrow y=۴x-۷\rightarrow$$ معادله خط مماس

$$S=\int_{۰}^{۳}(x^{۲}-۲x+۲)-(۴x-۷)dx$$

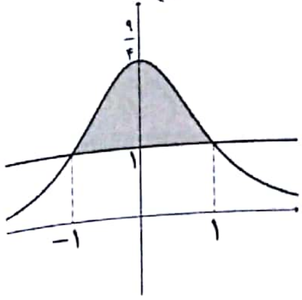
$$=\int_{۰}^{۳}x^{۲}-۶x+۹dx=\frac{x^{۳}}{۳}-۳x^{۲}+۹x\Big|_{۰}^{۳}=۹$$



۳۲- مساحت ناحیه واقع در زیر منحنی $y=\frac{۹}{x^۴+۴x^۲+۴}$ و بالای $y=۱$ را بدست آورید. (آدامز)

حل

نقاط برخورد $\begin{cases} y=\frac{۹}{x^۴+۴x^۲+۴} \\ y=۱ \end{cases} \to x^۴+۴x^۲+۴=۹ \to (x^۲+۵)(x^۲-۱)=۰ \to x=\pm۱$



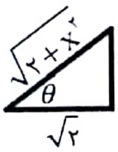
با توجه به تقارن شکل مساحت محصور برابر است با دو برابر مساحت ربع اول:

$$S=۲\int_۰^۱ \frac{۹}{x^۴+۴x^۲+۴}-۱\,dx=-۲+۱۸\int_۰^۱ \frac{dx}{(x^۲+۲)^۲}$$

$$x=\sqrt{۲}\tan\theta \to dx=\sqrt{۲}\sec^۲\theta\, d\theta$$

$$S=-۲+۱۸\int \frac{\sqrt{۲}\sec^۲\theta}{(۲\tan^۲\theta+۲)^۲}d\theta=-۲+۱۸\int\frac{\sqrt{۲}\sec^۲\theta}{۴\sec^۴\theta}d\theta$$

$$=-۲+\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\int\cos^۲\theta\, d\theta=-۲+\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin۲\theta\right)=-۲+\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$x=\sqrt{۲}\tan\theta \to$ 

$$\to S=-۲+\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۲}}+\frac{x}{\sqrt{۲}(۲+x^۲)}\right)\Big|_۰^۱$$

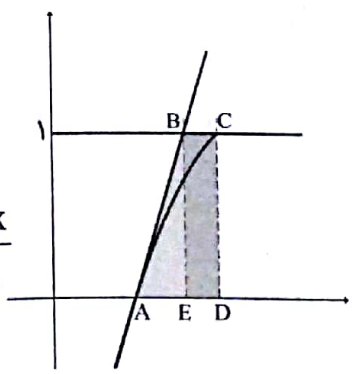
$$=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)-\frac{۱}{۲}$$

۳۳- مساحت ناحیه مسطح محدودی را بیابید که بین منحنی $y=۱, y=\operatorname{Ln}x$ و خط مماس بر $y=\operatorname{Ln}x$ در $x=۱$ محصور شده. (آدامز)

حل

$y=\operatorname{Ln}x \to y'=\frac{۱}{x}\Big|_{x=۱}=۱ \to (۱,۰)$ شیب خط مماس در نقطه

معادله خط مماس : $y-۰=۱(x-۱)\to y=x-۱$



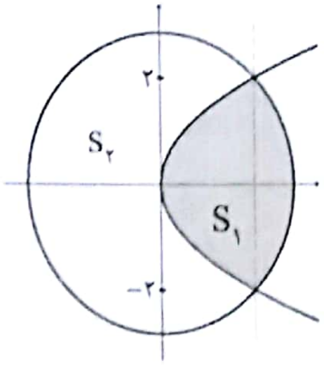
مساحت محصور $=S_{A\hat{B}E}+S_{BCDE}-$ (مساحت زیر نمودار y=lnx)

$$S=\frac{۱}{۲}(۱)(۱)+(۱)(e-۲)-\int_۱^e \operatorname{Ln}x\,dx \qquad \begin{cases} u=\operatorname{Ln}x \to du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx\to v=x \end{cases}$$

$$S=\frac{۱}{۲}+e-۲-\left(x\operatorname{Ln}x\Big|_۱^e-\int_۱^e dx\right)=e-\frac{۵}{۲}$$

۳۴- سهمی $y^۲ = ۲x$ مساحت دایره $x^۲ + y^۲ = ۸$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟ (دمیدوویچ)

حل



محل برخورد $\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۸ \\ y^۲ = ۲x \end{cases} \rightarrow x^۲ + ۲x - ۸ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۴ \end{cases}$ غ ق ق

به کمک تقارن شکل می توان نوشت:

$$S_۱ = ۲\int_۰^۲ \sqrt{۸ - y^۲} - \frac{y^۲}{۲}\, dy = ۲\int_۰^۲ \sqrt{۸ - y^۲}\, dy - \int_۰^۲ y^۲\, dy$$

$$= ۲\int_۰^۲ \sqrt{۸ - y^۲}\, dy - \frac{y^۳}{۳}\Big|_۰^۲ = -\frac{۸}{۳} + ۲\int_۰^۲ \sqrt{۸ - y^۲}\, dy$$

$$y = \sqrt{۸}\sin\theta \rightarrow dy = \sqrt{۸}\cos\theta\, d\theta \quad , \begin{cases} y = ۲ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴} \\ y = ۰ \rightarrow \theta = ۰ \end{cases}$$

$$S_۱ = -\frac{۸}{۳} + ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \sqrt{۸ - ۸\sin^۲\theta}.\sqrt{۸}\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{۸}{۳} + ۲\sqrt{۸}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \sqrt{۸\cos^۲\theta}\cos\theta\, d\theta = -\frac{۸}{۳} + ۱۶\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \cos^۲\theta\, d\theta$$

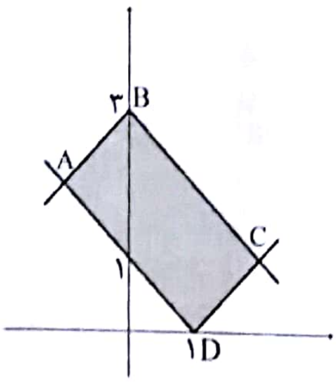
$$= -\frac{۸}{۳} + ۱۶\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}\, d\theta = -\frac{۸}{۳} + ۱۶\left(\frac{\theta}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}} = ۲\pi + \frac{۴}{۳}$$

از شکل می توان دریافت که:

$$S_۱ + S_۲ = S_{دایره} = ۸\pi \rightarrow S_۲ = ۸\pi - (۲\pi + \frac{۴}{۳}) = ۶\pi - \frac{۴}{۳} \quad \rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۲\pi + \frac{۴}{۳}}{۶\pi - \frac{۴}{۳}} = \frac{۳\pi + ۲}{۹\pi - ۲}$$

۳۵- مساحت بین منحنی های $y = |x - ۱|$, $y = -|x| + ۳$ را بیابید.

حل



روش اول:

$$A\Big|_{۲}^{-۱} \ , D\Big|_{۰}^{۱} \ ,C\Big|_{۱}^{۲} \rightarrow \begin{cases} |AD| = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲\sqrt{۲} \\ |CD| = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۲} \end{cases}$$

مساحت مستطیل = طول × عرض $\rightarrow S_{ABCD} = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$

روش دوم:

ابتدا محل برخورد دو تابع را بدست می آوریم:

$$3-|x|=|x-1|\begin{cases}\text{if } x\geq 1\to 3-x=x-1\to x=2\\ \text{if } x<1\to 3-|x|=1-x\to |x|=2+x\begin{cases}\text{if } 0<x<1\to x=2+x \quad \times\\ \text{if } x<0\to x=-2-x\to x=-1\end{cases}\end{cases}$$

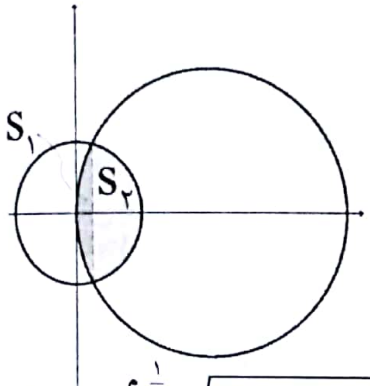
$$S=\int_{-1}^{2}(3-|x|)-|x-1|\,dx=\int_{-1}^{0}(3+x)+(x-1)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}(3-x)+(x-1)dx+\int_{1}^{2}(3-x)-(x-1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(2+2x)\,dx+\int_{0}^{1}2dx+\int_{1}^{2}(4-2x)dx=1+2+1=4$$

۳۶- مساحت داخل هر دو دایره $(x-2)^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ را بیابید. (آدامز)

حل



دو دایره همدیگر را در $x=\frac{1}{4}$ قطع می‌کند، مساحت سطح مشترک آنها S_1+S_2 است.

$$S_1=2\int_{0}^{\frac{1}{4}}\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx \qquad , x-2=2\sin\theta\to dx=2\cos\theta\,d\theta$$

$$S_1=2\int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,2\cos\theta\,d\theta=8\int\cos^2\theta\,d\theta=4(\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$S_1=4\left(\sin^{-1}(\frac{x-2}{2})+(\frac{x-2}{2})\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{4}}\to S_1=-4\sin^{-1}(\frac{7}{8})-\frac{7\sqrt{15}}{64}+2\pi$$

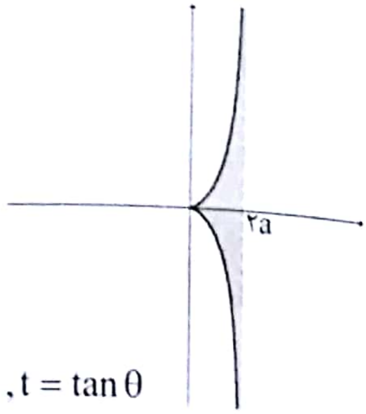
$$S_2=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \qquad x=\sin\theta\to dx=\cos\theta\,d\theta$$

$$S_2=2\int\cos^2\theta\,d\theta=\theta+\sin\theta\cos\theta=\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\frac{1}{4})-\frac{\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{tot}=S_1+S_2=\frac{5\pi}{2}-\frac{11\sqrt{15}}{64}-\sin^{-1}(\frac{1}{4})-4\sin^{-1}(\frac{7}{8})$$

۳۷- مساحت بین نمودار $y^۲ = \frac{x^۳}{۲a - x}$ و محور xها بین $[۰,۲a]$ را بیابید. (هاروِن)

حل



مجانب قائم $۲a - x = ۰ \to x = ۲a$

$$S = ۲\int_۰^{۲a}\sqrt{\frac{x^۳}{۲a - x}}dx = ۲\int_۰^{۲a} x\sqrt{\frac{x}{۲a - x}}\,dx$$

$$\frac{x}{۲a - x} = t^۲ \to x = \frac{۲at^۲}{۱ + t^۲} \to dx = \frac{۴at}{(۱ + t^۲)^۲}\,dt,$$

$$S = ۲\int_۰^{\infty}\frac{۲at^۲}{۱ + t^۲}.t\frac{۴at}{(۱ + t^۲)^۲}dt = ۱۶a^۲\int_۰^{\infty}\frac{t^۴}{(۱ + t^۲)^۳}dt \qquad ,t = \tan\theta$$

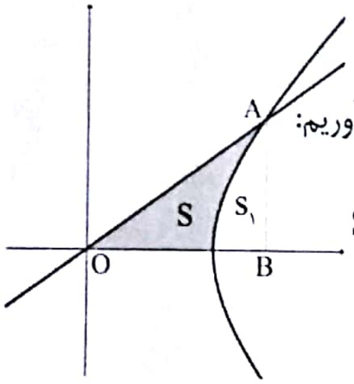
$$S = ۱۶a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\tan^۴\theta}{\sec^۶\theta}.\sec^۲\theta d\theta = ۱۶a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۴\theta\, d\theta = ۱۶a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{۱ - \cos ۲\theta}{۲}\right)^۲ d\theta$$

$$= ۱۶a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱ - ۲\cos ۲\theta + \cos^۲ ۲\theta}{۴}d\theta = ۴a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱ - ۲\cos ۲\theta) + \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۴\theta)\, d\theta$$

$$= ۴a^۲\left(\frac{۳}{۲}\theta + \frac{۱}{۸}\sin ۴\theta - \sin ۲\theta\right)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۳\pi a^۲$$

۳۸- مساحت ناحیه محصور بین محور x، هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ و خط مستقیم بین مبدا و نقطه $(\sqrt{۱ + y^۲}, y)$ روی هذلولی را با فرض $y > ۰$ بیابید. به طور خاص نشان دهید که اگر $y = \sinh t$ باشد، این مساحت برابر $\frac{t}{۲}$ واحد سطح می‌باشد. (هاروِن)

حل



ابتدا سطح بین $x^۲ - y^۲ = ۱$ و محورxها را در بازه $\left[۱,\sqrt{۱ + y^۲}\right]$ بدست می آوریم:

$$S_۱ = \int_۱^{\sqrt{۱+y^۲}}\sqrt{x^۲ - ۱}\,dx \qquad ,x = \sec\theta \to dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$S_۱ = \int_۰^{\tan^{-۱}y}\sqrt{\sec^۲\theta - ۱}.\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int_۰^{\tan^{-۱}y}\sec\theta\tan^۲\theta d\theta$$

از طرفی در قسمت ب سوال ۵ صفحه ۱۴۳ بدست آوردیم:

$$\int\tan^۲\theta\sec\theta dx = \frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta - \frac{۱}{۲}Ln|\sec\theta + \tan\theta|$$

بنابراین:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}\sec\theta\tan\theta - \frac{۱}{۲}Ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_۰^{\tan^{-۱}y} = \frac{y}{۲}\sqrt{۱ + y^۲} - \frac{۱}{۲}Ln\left|y + \sqrt{۱ + y^۲}\right|$$

مساحت هاشورزده برابر است با مساحت مثلث OAB منهای مساحت بین $x^2 - y^2 = 1$ و محور xها است.

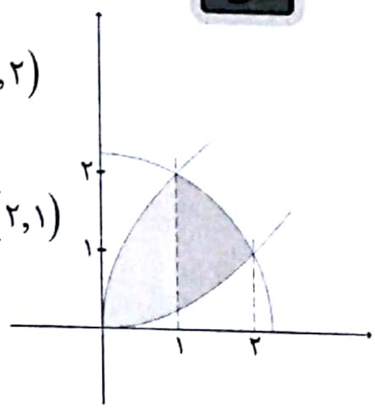
از طرفی مساحت مثلث OAB برابراست با: $\frac{1}{2} \times$ قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{2} y\sqrt{1+y^2}$. درنتیجه مساحت مطلوب برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} - S_1 = \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} - \left(\frac{y}{2}\sqrt{1+y^2} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|$$

$$\xrightarrow{y=\sinh t} S = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\sinh t + \cosh t) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(e^t) = \frac{t}{2}$$

۳۹- مساحت ناحیه ای را حساب کنید که در ربع اول واقع است و به منحنی های $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 5$ محدود می‌باشد. (مارون)

حل



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 4x = y^2 \end{cases} :\text{محل برخورد} \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow (1,2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = 4y \end{cases} :\text{محل برخورد} \rightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2,1)$$

$$S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4})dx + \int_1^2 (\sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{4})dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{12}\Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{5-x^2}dx - \frac{x^3}{12}\Big|_1^2$$

$$S = \frac{2}{3} + \int_1^2 \sqrt{5-x^2}\,dx \qquad , \; x = \sqrt{5}\sin\theta \rightarrow dx = \sqrt{5}\cos\theta d\theta$$

$$\rightarrow S = \frac{2}{3} + \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} 5\cos^2\theta d\theta = \frac{2}{3} + 5\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$S = \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}$$

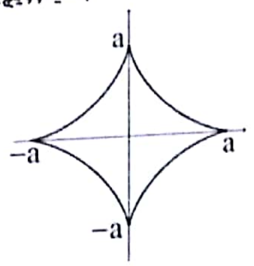
$$\boxed{\mathrm{ArcSin}\alpha - \mathrm{ArcSin}\beta = \mathrm{ArcSin}(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}) \, , \, \alpha\beta > 0}$$

۴۰- مساحت محدود به آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را بیابید.

(دمیدوویچ)

حل

معادله پارامتری آستروئید مورد نظر بصورت $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ می‌باشد.



$$S=\frac{1}{2}\int xdy-ydx=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t.3a\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t.3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t.\sin^2 t+\cos^2 t.\sin^4 t\,dt=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt$$

$$=\frac{6a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t\cos t)^2 dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$S=\frac{3a^2}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi a^2}{8}$$

سوالات محاسبه حجم

۴۱- تابع $f(x)=e^{-x}$ را در فاصله $[0,\infty)$ در نظر می‌گیریم:

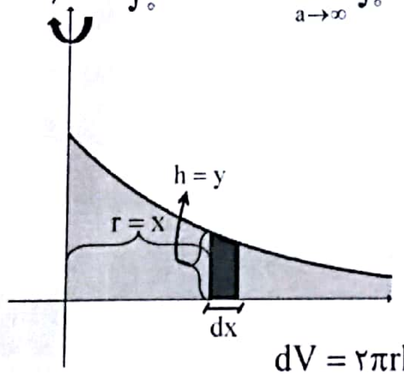
الف) سطح ناحیه زیر منحنی و بالای محور xها را محاسبه کنید.

ب) حجم حاصل از دوران ناحیه فوق حول محور yها را بدست آورید.

(امیرکبیر ۸۵)

حل

الف) $S=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx=\lim\limits_{a\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^a=\lim\limits_{a\to\infty}-e^{-a}+1=1$ ∎



ب) می خواهیم از روش پوسته استوانه ای استفاده کنیم:

همانطور که در شکل مشخص است شعاع استوانه $r=x$

و ارتفاع آن $h=y$ و ضخامت المان dx است،بنابراین:

$$dV=2\pi rh\times \text{ضخامت المان}=2\pi.x.y.dx\xrightarrow{y=e^{-x}}dV=2\pi xe^{-x}dx$$

$$V=2\pi\int_0^{\infty}xe^{-x}dx \qquad \begin{cases} u=x\to du=dx \\ dv=e^{-x}dx\to v=-e^{-x} \end{cases}$$

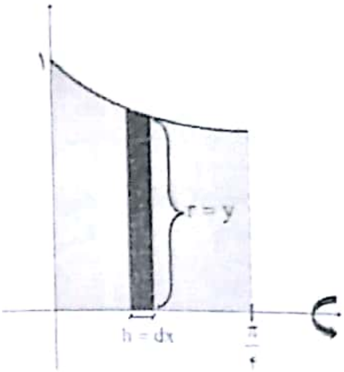
$$V=2\pi(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx)\to V=\lim_{a\to\infty}-2\pi e^{-x}(x+1)\Big|_0^a=2\pi-2\pi\lim_{a\to\infty}e^{-a}(a+1)=2\pi$$

سوال مشابه ۴۱-۱ ناحیه محصور به منحنی تابع $y = \text{Ln}x$ ومحورهای مختصات، حول محور yها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید. (شاهرود۸۷)

Ans $\frac{\pi}{2}$

۴۲- مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه زیر $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$، حول محور xها: (برادلی)

حل



از روش دیسک استفاده می کنیم:
همانطور که در شکل می بینیم شعاع دیسک $r = y$ و ارتفاع آن (ضخامت) $h = dx$ است، بنابراین با جایگذاری در رابطه ی $dV = \pi r^2 h$ داریم:

$$dV = \pi y^2 dx \to dV = \pi f^2(x)dx \to V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin 2x}$$

$$\tan x = u \to dx = \frac{du}{1+u^2} \quad , \sin 2x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$v = \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 2u + 1} = \pi \int_0^1 \frac{du}{(u+1)^2} = \left.\frac{-\pi}{u+1}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

۴۳- ناحیه محدود به دو منحنی $y = 2^x, y = 2x - x^2$ در فاصله $x = 0, x = 2$ را در نظر بگیرید.

الف- مساحت این ناحیه را بیابید.

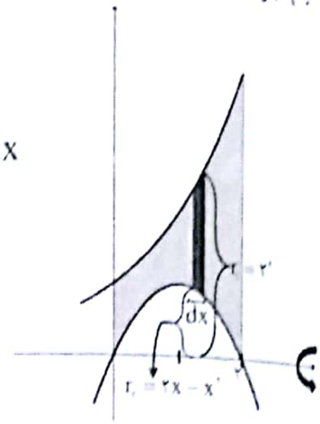
ب- حجم حاصل از دوران این ناحیه حول محور xها را بدست آورید. (علم وصنعت ۸۶)

حل

الف) $S = \int_0^2 2^x - \left(2x - x^2\right)dx = \left.\frac{1}{\text{Ln}2} \cdot 2^x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{3}{\text{Ln}2} - \frac{4}{3}$

■

ب) برای محاسبه حجم از روش دیسک استفاده می کنیم:



$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^2 \left(r_1^2 - r_2^2\right)dx = \pi\int_0^2 \left(f^2 - g^2\right)dx$$

$$V = \pi\int_0^2 (2^x)^2 - (2x - x^2)^2\,dx = \pi\int_0^2 2^{2x} - (4x^2 + x^4 - 4x^3)\,dx$$

$$\rightarrow V = \pi\left(\frac{1}{2\mathrm{Ln}2}2^{2x} - \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} + x^4\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{15}{2\mathrm{Ln}2} - \frac{16}{15}\right)$$

سوال مشابه ۴۳-۱ حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = 2x - x^2$ و خط $y = 0$ ، حول محور xها را محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۶)

Ans $\frac{16\pi}{15}$

۴۳-۲ محاسبه حجم حاصل از دوران بین $x = y(1 - y)$ و محور yها، حول محور yها. (برادلی)

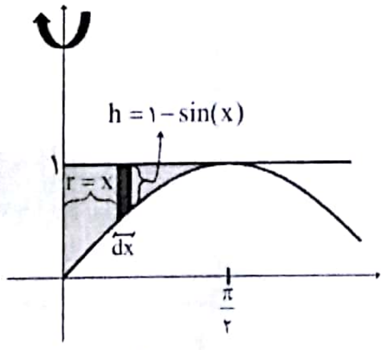
Ans $\frac{\pi}{30}$

۴۳-۳ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و سهمی $2y^2 = 3x$ حول محور y را بیابید. (تهران مرکزی ۸۸)

Ans $\frac{7\sqrt{3}}{10}\pi$

۴۴- ناحیه واقع بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور عرضها و خط $y = 1$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم حاصل را بیابید. (تهران جنوب ۸۸)

حل



روش پوسته استوانه ای : $V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{r}{x}\underbrace{(1 - \sin x)}_{h}dx$

از طرفی در قسمت الف مثال ۱۷ صفحه ۱۹۵ بدست آوردیم:

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x)dx = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

۴۵- مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ در بازه $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ حـول محـور y هـا.

(برادلی)

حل

$$dV=2\pi x\, f(x)\,dx$$

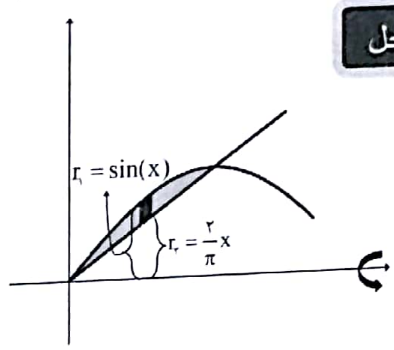
$$V=2\pi\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx \qquad x^2=t\to 2xdx=dt\to xdx=\frac{dt}{2} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}\to t=\frac{1}{4}\\ x=\frac{1}{4}\to t=\frac{1}{16}\end{cases}$$

$$V=\pi\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pi(\arcsin t)\Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}}=\pi\left(\arcsin\frac{1}{4}-\arcsin\frac{1}{16}\right)$$

۴۶- ناحیه ایجاد شده توسط منحنی های $y=\sin x$ و $y=\frac{2}{\pi}x$ واقع در ربـع اول را حـول محـور xها دوران می‌دهیم حجم حاصل از این دوران را بیابید.

(تهران جنوب ۸۶)

حل



محل برخورد: $\begin{cases} y=\sin x\\ y=\frac{2}{\pi}x\end{cases}\to \sin x=\frac{2x}{\pi}\to x=0,\frac{\pi}{2}$

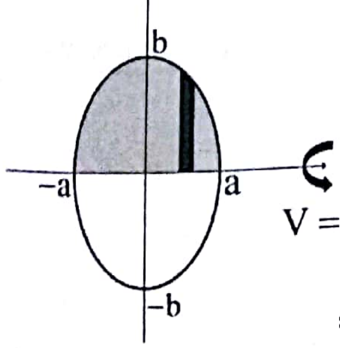
$$V=\pi\int f^2-g^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{4}{\pi^2}x^2\,dx=\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{4}{3\pi^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{12}$$

۴۷- بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حول محور xها دوران می‌دهیم حجم حاصل از دوران را بدست آورید.

(تهران مرکزی ۸۴- تهران شمال ۸۶)

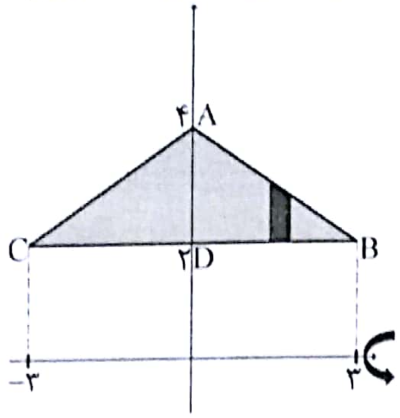
حل



بعلت تقارن کافیست سطح بالای محور xها را حول محور x دوران دهیم:

$$V=\pi\int y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=b^2\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

۴۸- مثلث نشان داده شده در شکل زیر را حول محور xها دوران داده و جسمی حاصل می‌گردد. حجم این جسم را محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۵)



حل

BD معادله خط : $y=۲$

AB معادله خط : $y-۴=\frac{۲-۴}{۳-۰}(x-۰)\to y=\frac{-۲}{۳}x+۴$

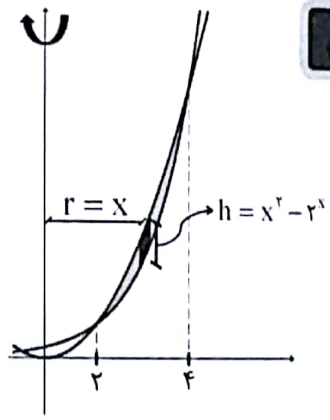
به کمک تقارن حجم کل، ۲ برابر حجم دوران بین خط AB و خط BD است.

$$V=۲V_۱\xrightarrow{V_۱=\pi\int_۰^۳(-\frac{۲}{۳}x+۴)^۲-۲^۲dx}V=۲\pi\int_۰^۳(-\frac{۲}{۳}x+۴)^۲-۲^۲dx$$

$$=۲\pi\int_۰^۳\frac{۴}{۹}x^۲-\frac{۱۶}{۳}x+۱۲dx=۲\pi\left(\frac{۴x^۳}{۲۷}-\frac{۸x^۲}{۳}+۱۲x\right)\Big|_۰^۳=۳۲\pi$$

۴۹- حجم جسم حاصل از دوران ناحیه R واقع بین نمودار دو تابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را حول محور yها محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۴)

حل



محل برخورد: $\begin{cases}y=x^۲\\y=۲^x\end{cases}\to x^۲=۲^x\to x=۲,۴$

$$dV=۲\pi r\,hdx=۲\pi x\left(x^۲-۲^x\right)dx$$

$$V=۲\pi\int_۲^۴x(x^۲-۲^x)dx=۲\pi\int_۲^۴x^۳-x۲^xdx\qquad\begin{cases}u=x\to du=dx\\dv=۲^xdx\to v=\frac{۲^x}{Ln۲}\end{cases}$$

$$=۲\pi\left(\frac{x^۴}{۴}-\frac{x۲^x}{Ln۲}+\int_۲^۴\frac{۲^x}{Ln۲}dx\right)=۲\pi\left(\frac{x^۴}{۴}-\frac{x۲^x}{Ln۲}+\frac{۲^x}{Ln^۲۲}\right)\Big|_۲^۴=(۱۲۰+\frac{۲۴}{Ln^۲۲}-\frac{۱۱۲}{Ln۲})\pi$$

سوال مشابه

۱-۴۹ ناحیه محصور شده توسط منحنی های $y=(x-1)^2$ و خط $y=(x+1)$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید. (امیرکبیر ۸۷)

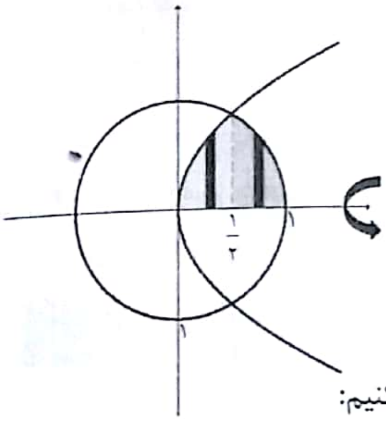
Ans $\frac{27\pi}{2}$

۲-۴۹ سطح ایجاد شده توسط منحنی $\sqrt[3]{y}=x$ محور xها از $x=0$ تا $x=2$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم حاصل را بیابید. (تهران جنوب ۸۷)

Ans $\frac{64\pi}{5}$

۵۰- ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=1$ و سهمی $y^2=\frac{3}{2}x$ را حول محور x دوران می‌دهیم، حجم حاصل را بیابید. (تهران جنوب ۸۵- کرج ۸۴)

حل



محل برخورد: $\begin{cases} y^2=\frac{3}{2}x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \rightarrow x=\frac{1}{2}$

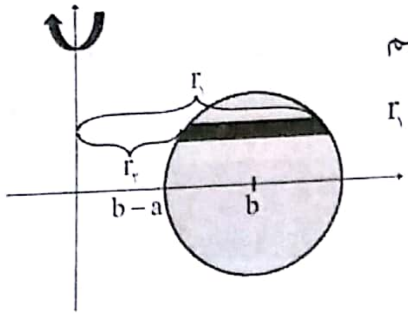
با توجه به شکل حجم کل شامل دوبخش V_1 و V_2 است و بعلت تقارن کافیست سطح بالای محور xها را دوران دهیم،از روش دیسک استفاده می کنیم:

$$\left.\begin{aligned} V_1&=\pi\int r_1^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x\,dx=\frac{3\pi}{4}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3\pi}{16} \\ V_2&=\pi\int r_2^2dx=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}1-x^2\,dx=\pi(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5\pi}{24} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{V=V_1+V_2} V=\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{24}=\frac{19\pi}{48}$$

۵۱- دایره ای به مرکز $(b,0)$ و شعاع a را حول محور yها دوران می‌دهید حجم جسم ایجاد شده را محاسبه کنید. $(0<a<b)$ (شریف ۸۴- امیرکبیر۸۹- علم وصنعت ۸۸)

حل

$$(x-b)^2+y^2=a^2\rightarrow(x-b)^2=a^2-y^2\rightarrow x-b=\pm\sqrt{a^2-y^2}\rightarrow x=b\pm\sqrt{a^2-y^2}$$



از روش دیسک استفاده می کنیم والمانی عمود بر محور دوران رسم می کنیم:همانطور که در شکل می بینید $r_1 = x_1 = b + \sqrt{a^2 - y^2}$ و $r_2 = x_2 = b - \sqrt{a^2 - y^2}$. بنابراین حجم حاصل بصورت زیر بدست می آید:

$$V = \pi \int (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_{-a}^{a} \left(b + \sqrt{a^2 - y^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - y^2}\right)^2 dy$$

$$V = 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \quad , \; y = a\sin\theta \quad \begin{cases} y = a \to \theta = \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \to \theta = 0 \end{cases}$$

$$v = 8b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta d\theta = 8b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta}\; a\cos\theta d\theta$$

$$= 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 8\pi a^2 b \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b$$

۵۲- سطح زیر منحنی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$ ، محصور به محور x ومحدود به دو خط $x = \sqrt{Ln 3}$ و $x = \sqrt{Ln 8}$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را محاسبه کنید.

(شریف ۸۳)

حل

روش پوسته استوانه ای:

$$V = 2\pi \int x f(x) dx = 2\pi \int_{\sqrt{Ln 3}}^{\sqrt{Ln 8}} x\sqrt{1 + e^{x^2}}\, dx$$

$$1 + e^{x^2} = u^2 \to x dx = \frac{u du}{u^2 - 1} \qquad , \begin{cases} x = \sqrt{Ln 8} \to u = 3 \\ x = \sqrt{Ln 3} \to u = 2 \end{cases}$$

$$V = 2\pi \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2\pi \int_2^3 1 + \frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} du = 2\pi \left(u + \frac{1}{2} Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \right)\Bigg|_2^3$$

$$V = 2\pi\left(1 + \frac{1}{2} Ln\frac{3}{2}\right)$$

۵۳- حجم حاصل از دوران $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ و $x\geq 0$ حول محور xها را بدست آورید. (ارمیبهشت)

حل

$$V=\pi\int y^2 dx=\pi\int e^{-2x}\sin x\,dx$$

$\int e^{-2x}\sin x\,dx$ را بروش جزء به جزء بازگشتی حل می کنیم:

$$I=\int e^{-2x}\sin x\,dx \begin{cases} u=e^{-2x} \to du=-2e^{-2x}dx \\ dv=\sin x\,dx \to v=-\cos x \end{cases}$$

$$\to I=-e^{-2x}\cos x-\int 2e^{-2x}\cos x\,dx \quad \begin{cases} u=2e^{-2x} \to du=-4e^{-2x}dx \\ dv=\cos x\,dx \to v=\sin x \end{cases}$$

$$I=-e^{-2x}\cos x-(2e^{-2x}\sin x+4\underbrace{\int e^{-2x}\sin x\,dx)}_{I}$$

$$5I=-e^{-2x}\cos x-2e^{-2x}\sin x \to I=\frac{-e^{-2x}}{5}(\cos x+2\sin x)$$

$$V=\pi\times I \to V=\frac{-\pi}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)$$

حال حجم ناحیه های تکه تکه را باید جدا حساب کنیم وبعد با هم جمع کنیم.

$$\text{دامنه}: \sin x\geq 0 \to 2k\pi\leq x\leq(2k+1)\pi$$

$$V_1=V[0,\pi]=\frac{-\pi}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+e^0)$$

$$V_2=V[2\pi,3\pi]=\frac{-\pi}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)\Big|_{2\pi}^{3\pi}=\frac{\pi}{5}(e^{-6\pi}+e^{-4\pi})$$

$\vdots$

$\vdots$

$$V=\sum_{i=1}^{\infty}V_i=\frac{\pi}{5}[e^0+e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}+\dots]\overset{\text{تصاعد هندسی}}{=}\frac{\pi}{5}\times\frac{a}{1-r}=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}$$

۵۴- ناحیه محصور به منحنی های $y=x^{۲}$ و $y=x^{۳}$ دوران می‌کند حجم جسم حاصل را بیابید.

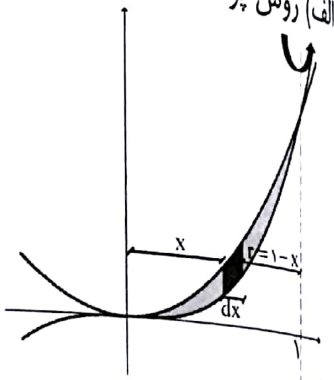
الف- حول خط $x=۱$ ب- حول خط $y=۱$

(تهران ۸۴)

حل

$$\text{محل برخورد:}\ \begin{cases} y=x^{۳} \\ y=x^{۲} \end{cases} \to x^{۲}=x^{۳} \to \begin{cases} x=۰ \to y=۰ \to (۰,۰) \\ x=۱ \to y=۱ \to (۱,۱) \end{cases}$$

الف) روش پوسته استوانه ای:

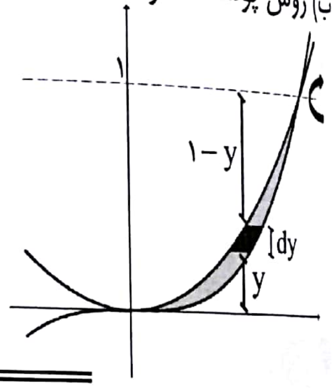


$$r=۱-x \quad ,h=x^{۲}-x^{۳},$$

$$dV=۲\pi rhdx \to V=۲\pi\int_{۰}^{۱}(۱-x)(x^{۲}-x^{۳})\,dx$$

$$V=۲\pi\int_{۰}^{۱} x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}dx=۲\pi\left(\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Big|_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۱۵}$$

ب) روش پوسته استوانه ای:



$$r=۱-y \quad ,h=\sqrt[۳]{y}-\sqrt{y}$$

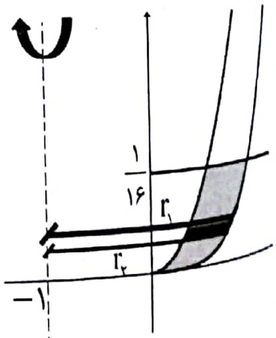
$$dV=۲\pi rhdy \to V=۲\pi\int_{۰}^{۱}(۱-y)(\sqrt[۳]{y}-\sqrt{y})\,dy$$

$$V=۲\pi\int_{۰}^{۱} -y^{\frac{۴}{۳}}+y^{\frac{۳}{۲}}+y^{\frac{۱}{۳}}-y^{\frac{۱}{۲}}\,dy=\frac{۲۳}{۲۱۰}\pi$$

۵۵- ناحیه محصور بین منحنی های $y=x^{۴}$, $y=x^{۲}$ در ربع اول که زیر خط $y=\frac{۱}{۱۶}$ قرار دارند را حول $x=-۱$ دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل را بیابید.

(امیرکبیر ۸۸)

حل



$$y=x^{۴} \to x=\sqrt[۴]{y}$$

$$y=x^{۲} \to x=\sqrt{y}$$

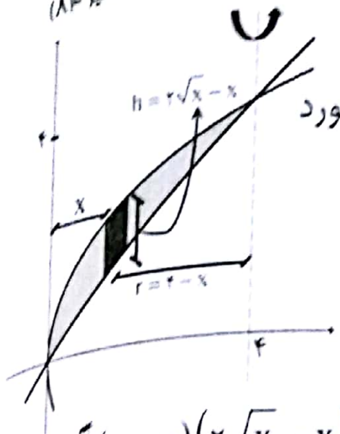
$$V=\pi\int_{a}^{b} r_۱^{۲}-r_۲^{۲}\,dy=\pi\int_{۰}^{\frac{۱}{۱۶}}(\sqrt[۴]{y}+۱)^{۲}-(\sqrt{y}+۱)^{۲}\,dy$$

$$=\pi\int_{۰}^{\frac{۱}{۱۶}} y^{\frac{۱}{۲}}+۲y^{\frac{۱}{۴}}+۱-y-۲y^{\frac{۱}{۲}}-۱dy=\pi\int_{۰}^{\frac{۱}{۱۶}}-y-y^{\frac{۱}{۲}}+۲y^{\frac{۱}{۴}}\,dy$$

$$=\pi\left(-\frac{y^{۲}}{۲}-\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}+\frac{۸}{۵}y^{\frac{۵}{۴}}\right)\Big|_{۰}^{\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۲۸۹\pi}{۷۶۸۰}$$

۵۶- حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به $y^2=4x$ و $y=x$ حول خط $x=4$ را محاسبه کنید. (خواجه نصیر ۸۴)

حل



محل برخورد: $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases} \rightarrow \dfrac{y^2}{4}=y \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0) \\ y=4 \rightarrow x=4 \rightarrow (4,4) \end{cases}$

$$V=2\pi\int_0^4 \underbrace{(4-x)}_{r}\underbrace{(2\sqrt{x}-x)}_{h}dx=2\pi\int_0^4 x^2-2x^{\frac{3}{2}}-4x+8x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{64}{5}\pi$$

سوال مشابه ۵۶-۱ مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y=x^2+2x+1$ و $y=1$ و $x=1$ حول خط $x=1$. (برادلی)

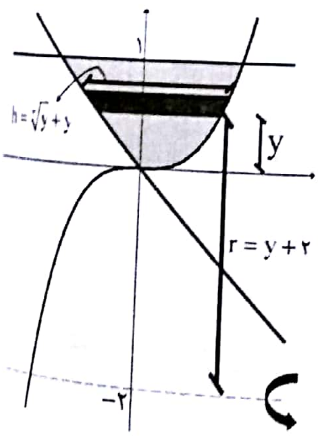
Ans $\dfrac{23}{30}\pi$

۵۶-۲ ناحیه محصور به سهمی $y=x^2$ و $y=2x$ حول خط $x=2$ دوران می کند. حجم جسم حاصل را بیابید. (قزوین ۸۸- تهران ۸۵)

Ans $\dfrac{8\pi}{3}$

۵۷- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y=x^3$ ، $y=-x$ و $y=1$ حول خط $y=-2$ را بیابید. (تهران مرکزی ۸۹)

حل

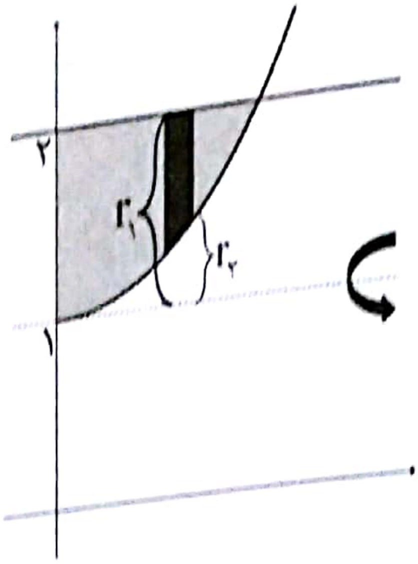


روش پوسته استوانه ای:

$$dV=2\pi\overbrace{(y+2)}^{r}\overbrace{(\sqrt[3]{y}+y)}^{h}dy$$

$$V=2\pi\int_0^1 (y+2)(\sqrt[3]{y}+y)dy=2\pi\int_0^1 y^2+y^{\frac{4}{3}}+2y+2y^{\frac{1}{3}}\,dy=\frac{137\pi}{21}$$

۵۸- الف) ناحیه محدود به منحنی $y=\cosh x$ و خط $y=2$ را حول خط $y=1$ دوران داده ایم، حجم حاصل را بیابید. (تهران مرکزی ۸۸)



حل

از روش دیسک استفاده می کنیم:

$$V=\int_a^b\left(r_1^2-r_2^2\right)dx \xrightarrow[r_2=\cosh x-1]{r_1=2-1=1} V=\pi\int_0^{\cosh^{-1}(2)} 1^2-(\cosh x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\cosh^{-1}(2)} 2\cosh x-\cosh^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\cosh^{-1}(2)} 2\cosh x-\frac{(1+\cosh 2x)}{2}dx=\pi\left(2\sinh x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x\right)\right)$$

$$=\pi\left(2\sqrt{\cosh^2 x-1}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\cosh^2 x-1}\,.\,\cosh x\right)\Bigg|_0^{\cosh^{-1}(2)}=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}(2)\right)$$

سوالات محاسبه طول قوس

۵۹- طول منحنی $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$ از $x=0$ تا $x=1$ را بیابید؟ (تهران جنوب ۸۵)

حل

$$y'=x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}x^{\frac{-2}{3}} \quad ,L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}x^{\frac{-2}{3}})^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{16}x^{\frac{-4}{3}}-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-2}{3}})^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-2}{3}}dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1=\frac{27}{20}$$

سوال مشابه ۵۹-۱ طول قوس منحنی $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}x$ که $1\le x\le e$ را حساب کنید.

Ans $\frac{e^2+1}{4}$ (کرج۸۸ -تهران جنوب۸۴- علم وصنعت۸۳- دمیدوویچ)

۶۰- طول منحنی $y=\mathrm{Ln}(1-x^2)$ را در فاصله $0\le x\le\frac{1}{2}$ بدست آورید. (تهران جنوب۸۹ - تهران مرکزی ۸۷)

حل

$$y'=\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{2x}{x^2-1})^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{x^2-1}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}1+\frac{2}{x^2-1}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=-x+\mathrm{Ln}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}+\mathrm{Ln}3$$

۶۱- طول قوس معادله پارامتری $x=a(\cos t+t\sin t)$ و $y=a(\sin t-t\cos t)$ در بازه $0\le t\le 2\pi$ را بیابید. (دمیدوویچ)

حل

$$x'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t \quad , y'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}\,dt=\int_0^{2\pi}at\,dt=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=2a\pi^2$$

۶۲- مطلوبست محاسبه طول قوس منحنی $y=\int_{\circ}^{x}\sqrt{\sin t}\,dt$ در فاصله $\left[\circ,\frac{\pi}{۲}\right]$. (تهران مرکزی ۸۸)

حل

$$y'=\sqrt{\sin x}$$

$$L=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\sqrt{\sin x}^{۲}}\,dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\sin x}\,dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\sin^{۲}\frac{x}{۲}+\cos^{۲}\frac{x}{۲}+\sin x}\,dx$$

$$=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}}\,dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\,dx=-۲\cos\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲}\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=۲$$

۶۳- طول منحنی $y=\int_{\circ}^{x}\sqrt{۳-۴\cos(۲t)}dt$ را در بازه $\circ\le x\le\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید. (تهران شمال ۸۶)

حل

$$y'=\sqrt{۳-۴\cos(۲x)}$$

$$L=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\sqrt{۱+\sqrt{۳-۴\cos ۲x}^{۲}}\,dx=۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\sqrt{۱-\cos ۲x}\,dx$$

$$=۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\sqrt{۲\sin^{۲}x}\,dx=۲\sqrt{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\sin x\,dx=-۲\sqrt{۲}\cos x\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}=۲\sqrt{۲}(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

یادآوری: $۱+\cos\alpha=۲\cos^{۲}(\frac{\alpha}{۲})$, $۱-\cos\alpha=۲\sin^{۲}(\frac{\alpha}{۲})$

سوال مشابه

۱-۶۳ طول قوس منحنی زیر را برای $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ بدست آورید:

$$f(x)=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{x}\sqrt{\cos(t)}\,dt$$ (امیرکبیر ۸۸- تهران مرکزی ۸۳)

Ans ۴

۲-۶۳ فرض کنید $f(x)=\int_{\circ}^{x^{۲}}\frac{\tan\sqrt{t}}{۲\sqrt{t}}dt$. طول نمودار f در $\left[\circ,\frac{\pi}{۴}\right]$ را بیابید. (امیرکبیر ۸۷)

Ans $Ln(\sqrt{۲}+۱)$

۶۴- طول قوس منحنی تابع $f(x)=2e^{\frac{1}{2}x}$ را از نقطه $A(0,2)$ تا نقطه $B(1,2\sqrt{e})$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۸)

حل

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \xrightarrow{f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}} L=\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\,dx$$

$$1+e^x=t^2 \to e^x dx=2t\,dt \to dx=\frac{2t\,dt}{t^2-1}\ ,\ \begin{cases} x=1\to t=\sqrt{1+e}\\ x=0\to t=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$L=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} t.\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}(1+\frac{1}{t^2-1})dt$$

$$=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} 1+\frac{1}{2}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=2t+\mathrm{Ln}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}$$

$$L=2(\sqrt{1+e}-\sqrt{2})+\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\right|-\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

سوال مشابه ۶۴-۱ طول قوس $f(x)=e^{-x}$ در فاصله $[0,\infty)$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر۸۵)

Ans بینهایت

۶۴-۲ طول قوس $f(x)=e^x$ را از نقطه $A(0,1)$ تا نقطه $B(1,e)$ محاسبه کنید. (امیرکبیر۸۵)

Ans $\left(\sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$

۶۵- طول خم $y=\mathrm{Ln}(\frac{e^x+1}{e^x-1})$ در $[a,b]$ را بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۵- علم و صنعت ۸۵- مارون)

حل

$$y'=\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\quad ,L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1})^2}\,dx$$

$$L=\int_a^b\sqrt{\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,dx=\int_a^b\sqrt{(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1})^2}\,dx=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx\quad ,e^{2x}=t$$

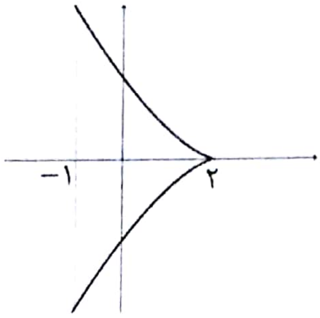
$$L=\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\frac{t+1}{t-1}.\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t}dt \to t+1=At+B(t-1)\to\begin{cases}A=2\\ B=-1\end{cases}$$

$$L=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t}dt=\mathrm{Ln}|t-1|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|t|\Bigg|_{e^{2a}}^{e^{2b}}=\mathrm{Ln}\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|-(b-a)$$

۶۶- الف) طول قسمتی از منحنی $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ را بیابید که بوسیله $x=-1$ جدا می‌شود.

ب) مطلوبست طول قوس منحنی پارامتری زیر:

$x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$, $0\le t\le 2\pi$, $a>0$ (علم و صنعت ۸۶)



حل

الف) $y=\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \rightarrow y'=-\sqrt{2-x}$

با توجه به تقارن شکل داریم: $L=2L'$

$$L'=\int_{-1}^{2}\sqrt{1+(-\sqrt{2-x})^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{3-x}\,dx=-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}=\frac{14}{3}\xrightarrow{L=2L'}L=\frac{28}{3}$$

■

ب) $$\begin{cases}x'=a(-2\sin t+2\sin 2t)\\ y'=a(2\cos t-2\cos 2t)\end{cases}\rightarrow\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2(-2\sin t+2\sin 2t)^2+a^2(2\cos t-2\cos 2t)^2}$$

$$=a\sqrt{8-8\sin t\sin 2t-8\cos t.\cos 2t}$$

یادآوری:
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

براساس روابط مثلثاتی فوق می توان نوشت:

$$=a\sqrt{8-4\cos t+4\cos 3t-4\cos t-4\cos 3t}=2\sqrt{2}a.\sqrt{1-\cos t}=2\sqrt{2}a.\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$L=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{2\pi}4a\sin\frac{t}{2}\,dt=-8a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=16a$$

۶۷- مطلوبست محاسبه قوس $f(x)=\sqrt{e^{2x}-1}-\sec^{-1}(e^x)$ در بازه $[0,Ln2]$. (برادلی)

حل

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}}-\frac{e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}}=\frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\sqrt{e^{2x}-1}$$

$$L=\int_0^{Ln2}\sqrt{1+\sqrt{e^{2x}-1}^{\,2}}\,dx=\int_0^{ln2}e^x dx=e^x\Big|_0^{Ln2}=e^{Ln2}-e^0=2-1=1$$

یادآوری: $(\sec^{-1}u)'=\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۶۸- الف) نشان دهید طول منحنی به معادلات پارامتری $x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t$، $y=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t$ در فاصله $t=t_1$, $t=t_2$ برابر است با $[f(t)+f''(t)]_{t_1}^{t_2}$.

ب) با استفاده از نتیجه فوق، طول منحنی به معادلات $y=e^t(\cos t-\sin t)$, $x=e^t(\cos t+\sin t)$ را از $t_1=0$, $t_2=t$ محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف)
$$x'_t=f'''(t)\cos t+f'(t)\cos t \quad , \quad y'_t=-f'''(t)\sin t-f'(t)\sin t$$
$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{(f'''(t)+f'(t))^2\cos^2 t+(f'''(t)+f'(t))^2\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{(f'''(t)+f'(t))^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=f'''(t)+f'(t)$$
$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f'''(t)+f'(t)\,dt=[f''(t)+f(t)]_{t_1}^{t_2}$$

■

ب)
$$\left.\begin{array}{l} x=e^t(\cos t+\sin t)\\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{array}\right\}\rightarrow f(t)=e^t \xrightarrow{\text{با توجه به الف}} L=(e^t)''+e^t\Big|_0^t=2e^t\Big|_0^t=2(e^t-1)$$

۶۹- مطلوبست محاسبه طول منحنی تابع $f(x)=x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. (شریف)

حل

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx\xrightarrow{f'(x)=2x}L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+4x^2}\,dx$$
$$2x=\tan\theta\rightarrow dx=\frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta$$
$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,.\frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

از طرفی درقسمت ج مثال۸ صفحه ۱۲۳ بدست آوردیم:

$$\int\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\text{Ln}|\sec x+\tan x|$$

بنابراین:

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sec\theta.\tan\theta+\frac{1}{2}\text{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\text{Ln}(\sqrt{2}+1)$$

۷۰- طول منحنی $y=Lnx$ از $x=۱$ تا $x=\sqrt{۳}$ را بیابید.

(قزوین ۸۸- پرادلی)

حل

$$y=Lnx \rightarrow y'=\frac{۱}{x}$$

$$L=\int_{۱}^{\sqrt{۳}}\sqrt{۱+(\frac{۱}{x})^{۲}}\,dx=\int_{۱}^{\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}}{x}dx \qquad x=\tan\theta \rightarrow dx=\sec^{۲}\theta d\theta$$

$$L=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sqrt{\tan^{۲}\theta+۱}}{\tan\theta}.\sec^{۲}\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sec^{۳}\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sec\theta(\tan^{۲}\theta+۱)}{\tan\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}(\sec\theta.\tan\theta+\frac{\sec\theta}{\tan\theta})d\theta=\sec\theta+\int\csc\theta d\theta=\sec\theta+Ln\left|\csc\theta-\cot\theta\right|\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$L=۲-\sqrt{۲}+Ln\left|\frac{۱}{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}\right|$$

۷۱- $f(x)$ را طوری بیابید که طول قوس آن در بازه $[۰,x]$ برابر $۲x+f(x)$ باشد.

(تهران جنوب ۸۸)

حل

$$L=\int_{۰}^{x}\sqrt{۱+(f'(t))^{۲}}\,dt=۲x+f(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}۱\times\sqrt{۱+(f'(x))^{۲}}=۲+f'(x)$$

$$\rightarrow ۱+(f'(x))^{۲}=۴+(f'(x))^{۲}+۴f'(x)\rightarrow -۳=۴f'(x)\rightarrow f'(x)=-\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow f(x)=\int\frac{-۳}{۴}dx\rightarrow f(x)=\frac{-۳}{۴}x+c$$

از طرفی:

$$x=۰\rightarrow\int_{۰}^{۰}\sqrt{۱+(f'(t))^{۲}}\,dt=۲\times۰+f(۰)\rightarrow f(۰)=۰$$

$$\xrightarrow{f(x)=\frac{-۳}{۴}x+c}c=۰\rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۴}x$$

سوالات محاسبه مساحت دوار

۷۲- نشان دهید حجم حاصل از دوران $y=\frac{1}{x}$ در $[1,\infty)$ ، حول محور xها محدود است ولی مساحت جانبی آن نامحدود است (واگرا). (برادلی)

حل

$$v=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to\infty}\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a=\lim_{a\to\infty}\frac{-\pi}{a}+\pi=\pi$$

$$S=2\pi\int_1^\infty f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx=2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx \quad ,x^2=u\to dx=\frac{du}{2x}$$

$$S=\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2}du \qquad u=\tan\theta\to du=(1+\tan^2\theta)d\theta \qquad \begin{cases}u=\infty\to\theta=\frac{\pi^-}{2}\\ u=1\to\theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$S=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta.(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta}d\theta=\pi\int\left(\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}+\sec\theta\right)d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\sec\theta\,d\theta=\pi\left(\frac{-1}{\sin\theta}+\mathrm{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\infty$$

۷۳- منحنی $a>0$ ، $0\le t\le 2\pi$ ، $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ حول محور X دوران می‌کند مساحت رویه حاصل را بیابید. (تهران ۸۳- دمیدوویچ)

حل

$$dL=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2(\sin t)^2}\,dt$$

$$=a.\sqrt{1+\cos^2t-2\cos t+\sin^2t}\,dt=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

مساحت حول محور Xها: $S=2\pi\int|y|dL=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t).\sqrt{2}.a\sqrt{1-\cos t}\,dt$

$$S=2\sqrt{2}a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)dt$$

$$\cos\frac{t}{2}=u\to du=\frac{-1}{2}\sin\frac{t}{2}dt \;,\begin{cases}t=2\pi\to u=-1\\ t=0\to u=1\end{cases}$$

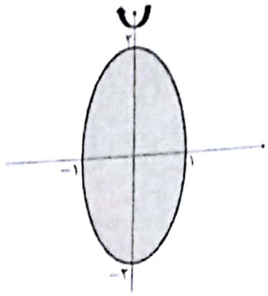
$$S=8\pi a^2\int_1^{-1}(1-u^2)(-2du)=16\pi a^2\int_{-1}^{1}1-u^2du=16\pi a^2\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{64\pi a^2}{3}$$

۷۴- مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران بیضی $4x^2+y^2=4$ حول محور yها ساخته می‌شود.
(هاروَن)

حل

نکته: معادله پارامتری بیضی به معادله $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ بدین صورت است: $x=\alpha+a.\cos t \quad , \quad y=\beta+b.\sin t$

بعلت تقارن کافیست نیمه راست را حول محور yها دوران دهیم.



در این سوال با تغییر متغیر های بیضی یعنی $\left.\begin{array}{l}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{array}\right\}$ پیش می‌رویم.

$$S=2\pi\int xdL=2\pi\int x\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t.\sqrt{4-3\sin^2 t}\,dt \qquad \sin t=u\to\cos t\,dt=du$$

$$S=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-3u^2}\,du \qquad , u=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\to du=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$$

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\underbrace{4-4\sin^2\theta}_{4\cos^2\theta}}.\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

۷۵- مطلوبست مساحت رویه حاصل از دوران دایره $(x-b)^2+y^2=a^2$ حول محور y. $(0<a<b)$

حل

نکته: معادله پارامتری دایره به معادله $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ بدین صورت است:
$x=\alpha+R.\cos t \quad , \quad y=\beta+R.\sin t$

$$\begin{cases}x=b+a\cos\theta\to x'=-a\sin\theta\\ y=a\sin\theta\to y'=a\cos\theta\end{cases}$$

$$dL=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\,d\theta=a\,d\theta$$

$$S=2\pi\int xdL=2\pi\int_0^{2\pi}(b+a\cos\theta).a\,d\theta=2\pi a\,(b\theta+a\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=4\pi^2 ab$$

۷۶- قسمتی از منحنی $y=4-\frac{t^2}{2}$ ، $x=\frac{t^3}{3}$ که بین نقاط تلاقی اش با محورهای مختصات واقع در ربع اول، حول محور x ها دوران می‌کند. مساحت سطح حاصل را حساب کنید. (ماژون)

حل

$$y=0 \to 4-\frac{t^2}{2}=0 \to t=\pm\sqrt{8} \qquad , x'_t=t^2 \ , y'_t=-t$$

$$S=2\pi\int y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}(4-\frac{t^2}{2}).\sqrt{t^4+t^2}\,dt=\pi\int_0^{\sqrt{8}}(8-t^2)\,t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$S=\pi\left(\underbrace{\int_0^{\sqrt{8}}8t\sqrt{1+t^2}\,dt}_{I_1}-\underbrace{\int_0^{\sqrt{8}}t^3\sqrt{1+t^2}\,dt}_{I_2}\right)\to S=\pi(I_1-I_2)\quad (*)$$

$$I_1: 1+t^2=u\to 2tdt=du \qquad \to I_1=\int_1^9 4\sqrt{u}\,du=\frac{8}{3}u\sqrt{u}\Big|_1^9=\frac{208}{3}$$

$$I_2: \text{جزء به جزء}\begin{cases}u=t^2\to du=2t\,dt\\ dv=t\sqrt{1+t^2}\,dt\to v=\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

$$I_2=\frac{1}{3}t^2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int 2t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{3}t^2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}(1+t^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{8}}=72-\frac{484}{15}$$

$$\xrightarrow{(*)}S=\pi(I_1-I_2)=\frac{148\pi}{5}$$

۷۷- مطلوبست محاسبه سطح حاصل از دوران $y=a\cos(\frac{\pi x}{2b})$, $(|x|\le b)$ حول محور x ها.

حل

$$S=2\pi\int y\,dL=2\pi\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad , y'=-\frac{\pi a}{2b}\sin(\frac{\pi x}{2b})$$

$$S=2\pi\int_{-b}^{b}a\cos(\frac{\pi x}{2b})\sqrt{1+\frac{\pi^2a^2}{4b^2}\sin^2(\frac{\pi x}{2b})}\,dx \qquad ,\sin(\frac{\pi x}{2b})=t\to dt=\frac{\pi}{2b}\cos(\frac{\pi x}{2b})dx$$

$$S=4ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{\pi^2a^2}{4b^2}t^2}\,dt \qquad , \frac{\pi a}{2b}t=\tan\theta\to\frac{\pi a}{2b}dt=\sec^2\theta\,d\theta\to dt=\frac{2b\sec^2\theta}{\pi a}d\theta$$

$$S=4ab\int\sqrt{1+\tan^2\theta}.\frac{2b}{\pi a}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{8b^2}{\pi}\int\sec^3\theta\,d\theta$$

همچنین انتگرال $I=\int\sec^3\theta\,d\theta$ در قسمت ج مثال ۸ صفحه ۱۲۳ بدست آمد:

$$I=\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}Ln|\sec\theta\tan\theta|$$

پس داریم:

$$S=\frac{8b^2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right),\qquad \tan\theta=\frac{\pi a}{2b}t$$

$$S=\frac{4b^2}{\pi}\left(\sqrt{1+(\frac{\pi a}{2b}t)^2}\times\frac{\pi a}{2b}t+Ln\left|\sqrt{1+(\frac{\pi a}{2b}t)^2}+\frac{\pi a}{2b}t\right|\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\rightarrow S=2a\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}+\frac{4b^2}{\pi}Ln\left(\frac{\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}+\pi a}{\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}-\pi a}\right)$$

۷۸- مساحت حاصل از دوران $x=a\cos^3 t\ ,\ y=a\sin^3 t$ حول خط $y=x$ را بدست آورید.

(دمیدوویچ)

حل

$$y=x\rightarrow a\sin^3 t=a\cos^3 t\rightarrow \tan t=1\rightarrow t=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}$$

با دوران منحنی ها، به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت ساعتگرد، خط $y=x$ به محور x ها منطبق می‌شود

بنابراین t را به $t+\frac{\pi}{4}$ تبدیل می‌کنیم: $\begin{cases}t=0\\ t=\pi\end{cases}$

$$x=a\cos^3(t+\frac{\pi}{4})\rightarrow x'=-3a\cos^2(t+\frac{\pi}{4})\sin(t+\frac{\pi}{4})$$

$$y=a\sin^3(t+\frac{\pi}{4})\rightarrow y'=3a\sin^2(t+\frac{\pi}{4})\cos(t+\frac{\pi}{4})$$

$$dL=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{9a^2\cos^4(t+\frac{\pi}{4})\sin^2(t+\frac{\pi}{4})+9a^2\sin^4(t+\frac{\pi}{4})\cos^2(t+\frac{\pi}{4})}\,dt$$

$$dL=3a\cos(t+\frac{\pi}{4})\sin(t+\frac{\pi}{4})dt$$

$$S=2\pi\int y\,dL=2\pi\int_0^{\pi}a\sin^3(t+\frac{\pi}{4})\times 3a\cos(t+\frac{\pi}{4})\sin(t+\frac{\pi}{4})dt$$

$$S=\frac{6\pi a^2}{5}\sin^5(t+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\pi}=\frac{3\sqrt{2}}{10}\pi a^2$$

سوال مشابه ۷۸-۱ منحنی بسته $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ حول محور x دوران کرده،مساحت رویه دوار حاصل را بیابید.

(تهران ۸۷ و۸۸-تبریز ۸۶)

(راهنمایی: از معادلات پارامتری $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ استفاده کنید.) Ans $\frac{12\pi a^2}{5}$

سوالات انتگرال ناسره

۷۹- همگرایی و واگرایی انتگرالهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $\int_{1}^{\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ (تهران جنوب ۸۸)

ب) $\int_{0}^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ (آدامز)

ج) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف) $-1<\cos x \to 1<2+\cos x \to \frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$

از طرفی داریم: $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_{1}^{\infty} = \infty$. لذا طبق آزمون مقایسه $\int_{1}^{\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ نیز واگرا است.

■

ب) $\cos\sqrt{x} \le 1 \to 0 \le 1-\cos\sqrt{x} = 2\sin^2(\frac{\sqrt{x}}{2}) \le 2(\frac{\sqrt{x}}{2})^2 = \frac{x}{2} \to \frac{1}{1-\cos\sqrt{x}} \ge \frac{2}{x}$

و چون $\int_{0}^{\pi^2} \frac{2}{x} dx$ واگراست ، بنابراین طبق آزمون مقایسه $\int_{0}^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ نیز واگرا است.

■

ج) $\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} \le \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}} = \lim_{a\to\infty} \int_{2}^{a} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}} = \lim_{a\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-2}}\Big|_{2}^{a} = \lim_{a\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{a-2}} + 2 = 2$$

در نتیجه طبق آزمون مقایسه $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ نیز همگرا است.

۸۰- در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|dx}{1+\cos x+e^x}$ بحث کنید. (امیرکبیر ۸۸)

حل

$$\frac{|\sin x|}{1+\cos x+e^x} < \frac{1}{1+\cos x+e^x} < \frac{1}{1-1+e^x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

چون $\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = 1$ همگراست، درنتیجه بنا به آزمون مقایسه $\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|dx}{1+\cos x+e^x}$ نیز همگرا است.

۸۱- در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{x(Lnx)^{p}}$ بحث کنید.

(امیرکبیر ۸۵- علم وصنعت ۸۵- تهران جنوب ۸۵)

حل:

$$\ln x = t \rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$*p \neq ۱ \quad \lim_{a\to\infty}\int_{\ln ۲}^{a}\frac{dt}{t^{p}} = \lim_{a\to\infty}\frac{t^{۱-p}}{۱-p}\Big|_{\ln ۲}^{a} = \lim_{a\to\infty}\frac{a^{۱-p}}{۱-p} - \frac{(Ln۲)^{۱-p}}{۱-p} \rightarrow \begin{cases} \text{if } ۱-p<۰ \rightarrow p>۱ & \text{همگرا} \\ \text{if } ۱-p>۰ \rightarrow p<۱ & \text{واگرا} \end{cases}$$

$$*p = ۱ \rightarrow \int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{a\to\infty} Ln(Lnx)\Big|_{۲}^{a} = \infty$$

در مجموع داریم: $\begin{cases} p>۱ & \text{همگرا} \\ p\leq ۱ & \text{واگرا} \end{cases}$

سوال مشابه

۸۱-۱ $\int_{e^{۲}}^{\infty}\frac{dx}{x\,Ln^{۲}x}$ (تهران جنوب ۸۹و ۸۴- قزوین ۸۷) **Ans** همگرا است به $\frac{۱}{۲}$

۸۲- در همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}}$ بحث کنید.

حل

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}} = \int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}} + \int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}}$$

$$*\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}}: \quad \sqrt{x+x^{۳}} > \sqrt{x} \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x+x^{۳}}} < \frac{۱}{\sqrt{x}}$$

چون $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x}} = ۲\sqrt{x}\Big|_{۰}^{۱} = ۲$ همگرا است،درنتیجه طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}}$ نیز همگراست.

$$*\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}} \quad : \quad \frac{۱}{\sqrt{x+x^{۳}}} < \frac{۱}{\sqrt{x^{۳}}}$$

چون $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{۳}}} = \int_{۱}^{\infty}x^{\frac{-۳}{۲}}dx = -۲x^{\frac{-۱}{۲}} = \frac{-۲}{\sqrt{x}}\Big|_{۱}^{\infty} = ۲$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^{۳}}}$ نیز همگراست.

از طرفی هم می دانیم که مجموع دو انتگرال همگرا،همگرا است.

سوال مشابه در همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر بحث کنید.

۱-۸۲ $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+1}}$ (تهران جنوب ۸۴- ماژون) همگرا است A_{NS}

۲-۸۲ $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{4}+x}}$ (تهران مرکزی ۸۸) همگرا است A_{NS}

۸۳- انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (تهران جنوب ۸۰ و ۸۸)

ب) $\int_{0}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^{2}}dx$ (تهران جنوب ۸۶)

ج) $\int_{2}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^{2}-3)^{3}}}$ (علم و صنعت ۸۷)

د) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^{2}}$ (تهران جنوب ۸۷)

هـ) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+1+x\sqrt{x^{2}+1}}$ (تهران ۸۸)

حل

الف) $2\sqrt{x}=t\rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=dt\quad,\begin{cases}x=\infty\rightarrow t=\infty\\ x=1\rightarrow t=2\end{cases}$

$$\int_{2}^{\infty}e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}\int_{2}^{a}e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}-e^{-t}\Big|_{2}^{a}=e^{-2}-\lim_{a\to\infty}e^{-a}=e^{-2}$$

■

ب) $\arctan x=u\rightarrow\frac{dx}{1+x^{2}}=du\ ,\quad\begin{cases}x=\infty\rightarrow u=\frac{\pi^{-}}{2}\\ x=0\rightarrow u=0\end{cases}$

$$\rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi^{-}}{2}}udu=\frac{u^{2}}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^{2}}{8}$$

■

ج) $$\int_{2}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^{2}-3)^{3}}}=\lim_{a\to\infty}\int_{2}^{a}\frac{xdx}{\sqrt{(x^{2}-3)^{3}}}=\lim_{a\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^{2}-3}}\Big|_{2}^{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{a^{2}-3}}+1=1$$

■

د) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4+x^{2}}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{4+x^{2}}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{0}^{b}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

یادآوری : $\int\frac{du}{a^{2}+b^{2}u^{2}}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{bu}{a})$

■

هـ) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}+1+x\sqrt{x^{2}+1}}$ $, x=\tan\theta \to dx=\sec^{2}\theta . d\theta \ , \begin{cases} x=\infty \to \theta=\frac{\pi^{-}}{2} \\ x=0 \to \theta=0 \end{cases}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^{2}\theta . d\theta}{(\tan^{2}\theta+1)+\tan\theta\sqrt{\tan^{2}\theta+1}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^{2}\theta . d\theta}{\sec^{2}\theta+\tan\theta\sqrt{\sec^{2}\theta}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta . d\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta}{\sec\theta+\tan\theta} . \frac{\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^{2}\theta-\sec\theta . \tan\theta}{\underbrace{\sec^{2}\theta-\tan^{2}\theta}_{1}} d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sec^{2}\theta-\sec\theta . \tan\theta d\theta=\tan\theta-\sec\theta \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^{-}}(\tan\theta-\sec\theta)+1$$

$$=1+\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\sin\theta-1}{\cos\theta} \xrightarrow{\text{Hop}} 1+\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=1+0=1$$

۸۴- مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty} x^{6} e^{-x} dx$ را محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۶-دمیدوویچ)

حل

$$I_{n}=\int_{0}^{\infty} x^{n} e^{-x} dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} u=x^{n} \to du=nx^{n-1}dx \\ dv=e^{-x}dx \to v=-e^{-x} \end{cases} \to I_{n}=-e^{-x} . x^{n} \Big|_{0}^{\infty}+n\int_{0}^{\infty} x^{n-1} . e^{-x} dx$$

$$I_{n}=n\int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx=nI_{n-1}$$

$$I_{n}=n(n-1)(n-2) \ldots . \times 2 \times 1 \times I_{0} \quad , \ I_{0}=\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx=-e^{-x} \Big|_{0}^{\infty}=1$$

$$I_{n}=n! \xrightarrow{n=6} I_{6}=\int_{0}^{\infty} x^{6} e^{-x} dx=6!=720$$

سوال مشابه درهمگرایی یا واگرایی انتگرال های ناسره زیر بحث کنید.

۸۴-۱ $\int_{0}^{\infty} (x^{2}+x)e^{-x} dx$ (امیرکبیر ۸۴) Ans همگرا به ۳

۸۴-۲ $\int_{0}^{\infty} x^{2} e^{-x} dx$ (تهران مرکزی ۸۴- امیرکبیر ۸۵) Ans همگرا به ۲

۸۵- همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

الف) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}+5x}$ (شریف ۸۳) ب) $\int_{1}^{\infty} \frac{x^{2}+\sqrt{x}+3}{x^{4}+\sqrt[5]{x+2}+10}dx$ (علم و صنعت ۸۴)

حل

الف) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}+5x}=\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}dx=\lim_{a\to\infty} Ln\left|\frac{x}{x+5}\right|\Big|_{0}^{a}=+\infty \to$ واگراست

■

ب) $\frac{x^{2}+\sqrt{x}+3}{x^{4}+\sqrt[5]{x+2}+10}\le\frac{x^{2}+x^{2}+3}{x^{4}}=\frac{2x^{2}+3}{x^{4}}=\frac{2}{x^{2}}+\frac{3}{x^{4}}$

و چون $\int_{1}^{\infty}\frac{2}{x^{2}}+\frac{3}{x^{4}}dx=\frac{-2}{x}-\frac{1}{x^{3}}\Big|_{1}^{\infty}=3$ لذا طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{1}^{\infty} \frac{x^{2}+\sqrt{x}+3}{x^{4}+\sqrt[5]{x+2}+10}dx$ نیز همگراست.

۸۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

الف) $\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{x}{\cosh x-1}}dx$ (تهران مرکزی ۸۷) ب) $\int_{0}^{\infty}(\frac{x+1}{2x+1})^{x}dx$ (تهران مرکزی ۸۴)

حل

الف) به کمک بسط مک لورن coshx داریم:

$$\cosh x \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^{2}}{2}+\ldots \to \cosh x-1=\frac{x^{2}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{x}{\cosh x-1}}=\sqrt{\frac{x}{\frac{x^{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{x}} \to \int_{0}^{1}\sqrt{\frac{2}{x}}dx=2\sqrt{2x}\Big|_{0}^{1}=2\sqrt{2}\to$$ همگرا است

■

ب) واضح است که تابع $f(x)=(\frac{x+1}{2x+1})^{x}$ در $[0,\infty)$ پیوسته است .

$a_n=(\frac{n+1}{2n+1})^{n} \to \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}}=\frac{1}{2}<1\to$ طبق آزمون ریشه همگرا است.

۸۷- بر حسب مقادیر مختلف α در همگرایی انتگرال $\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ بحث کنید. $(\alpha \in \mathbb{R})$

(تهران مرکزی ۸۶)

حل

$$\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_{0}^{1} x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_{1}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

- بررسی بازه $(0,1]$:

$$x^{\alpha-1}e^{-x} < x^{\alpha-1}$$

انتگرال $\int_{0}^{1} x^{\alpha-1} dx$ زمانی همگرا است که: $\alpha > 0 \leftarrow \alpha - 1 > -1$. طبق آزمون مقایسه $\int_{0}^{1} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ نیز به ازای $\alpha > 0$ همگرا است.

- بررسی بازه $[1,\infty)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}.e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}.e^{-x} = 0$$

از طرفی چون $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ همگرا است،طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال $\int_{1}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ نیز به ازای جمیع مقادیر α همگرا است.

بنابراین،در مجموع برای $\left.\begin{matrix}\alpha > 0 \\ \alpha \in \mathbb{R}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} \alpha > 0$ همگرا است.

۸۸- همگرایی انتگرال زیر را ثابت کنید. (راهنمایی: از انتگرال گیری به روش جزء به جزء استفاده کنید.) $\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

(شریف ۸۳)

حل

$$\text{جزء به جزء} \begin{cases} u = \frac{1}{x} \to du = \frac{-1}{x^2} dx \\ dv = \cos x\, dx \to v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{x} \sin x \Big|_{1}^{\infty} + \int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = -\sin 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

از طرفی داریم:

$$|\sin x| \le 1 \to \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

چون $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ همگراست پس $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}$ نیز همگراست ، درنتیجه انتگرال فوق همگراست.

۸۹- به ازای چه مقادیر از ثابت α انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}dx$ همگراست. (تهران ۸۳)

حل

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}dx=\int_{0}^{1}\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}dx$$

بررسی در بازه $[0,1)$:

$$\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}\sim\frac{x^{2}}{x^{\alpha}}=\frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ همگراست اگر $\alpha<3 \leftarrow \alpha-2<1$

بررسی در بازه $[1,\infty)$:

$$\frac{\sin^{2}x}{x^{\alpha}}\le\frac{1}{x^{\alpha}}$$

انتگرال $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ زمانی همگراست که $\alpha>1$ باشد.

بنابراین بازه همگرایی برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha<3\\ \alpha>1\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}1<\alpha<3$$

۹۰- در همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر بحث کنید.

الف) $\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}x}{1+x^{2}}dx$ (مارون) ب) $\int_{3}^{6}\frac{\operatorname{Ln}x}{(3-x)^{4}}dx$ ج) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\cosh x}dx$

حل

الف) $$I=\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx$$

$$I_1=\int_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}x}{1+x^{2}}\quad ,x=\frac{1}{t}\rightarrow dx=-\frac{dt}{t^{2}}\quad ,I_1=\int_{1}^{0}\frac{-\operatorname{Ln}t}{1+\frac{1}{t^{2}}}\cdot\frac{-dt}{t^{2}}=-\int_{0}^{1}\frac{\operatorname{Ln}t}{1+t^{2}}dt$$

$$I=\int_{0}^{1}\frac{\operatorname{Ln}x}{1+x^{2}}dx-\int_{0}^{1}\frac{\operatorname{Ln}t}{1+t^{2}}dt=0\rightarrow$$ همگرا است

■

ب) $$I=\int_{3}^{6}\frac{\operatorname{Ln}x}{(3-x)^{4}}dx\quad ,x-3=t\rightarrow dx=dt\quad\rightarrow I=\int_{0}^{3}\frac{\operatorname{Ln}(t+3)}{t^{4}}dt$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{\operatorname{Ln}(t+3)}{t^{4}}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\frac{t\operatorname{Ln}(t+3)}{t^{4}}=\infty$$

چون $\int_{0}^{3}\frac{dt}{t}$ واگرا است ،طبق آزمون مقایسه حدی $\int_{0}^{3}\frac{\operatorname{Ln}(t+3)}{t^{4}}dt$ نیز واگراست.

■

ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x.dx}{\cosh x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$

ابتدا به بررسی $\int_{1}^{\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{e^x+e^{-x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{e^x+e^{-x}}=0$$

چون $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی $\int_{1}^{\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$ نیز همگراست.

با تغییر متغیر $x=-t$ انتگرال $\int_{1}^{\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$ به انتگرال $\int_{-\infty}^{-1}\frac{-2x}{e^x+e^{-x}}dx$ تبدیل می شود لذا این انتگرال هم همگراست. همچنین $\int_{-1}^{1}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$ انتگرالی سره است، پس همگراست.

بنابراین مجموع ۳ انتگرال همگرا داریم که جواب آنها همگرا می‌شود.

۹۱- در همگرایی انتگرالهای زیر بحث کنید و در صورت همگرابودن مقدار آن را بیابید.

الف) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}.Lnx}$ (تهران مرکزی ۸۸)

ب) $\int_{2}^{\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}}dx$ (تهران مرکزی ۸۸)

حل

الف) $x>2\to\sqrt{x}<x\to\sqrt{x}Lnx<x.Lnx\to\frac{1}{\sqrt{x}Lnx}>\frac{1}{xLnx}$

از طرفی: $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{xLnx}=Ln(Lnx)\Big|_{2}^{\infty}=\infty$ ، لذا طبق آزمون مقایسه $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}Lnx}$ نیز واگراست.

■

ب) **روش اول:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{Lnx}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}Lnx=\infty$$

از طرفی $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_{2}^{\infty}=\infty$ ، پس به کمک آزمون مقایسه حدی می توان گفت که $\int_{2}^{\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}}dx$ نیز واگرا است.

روش دوم: محاسبه مستقیم انتگرال به روش جزء به جزء.

۹۲- بازای چه مقادیری از ثابت‌های p و q $(p\in\mathbb{R}\ ,\ q\geq ۰)$ $\int_۰^\infty \frac{x^p}{۱+x^q}dx$ همگراست؟

حل

$$\int_۰^\infty = \int_۰^۱ + \int_۱^\infty$$

- بررسی در $[۰,۱)$: چون $q\geq ۰$ پس: $\frac{x^p}{۱+x^q} \underset{x\to ۰}{\sim} \frac{x^p}{۱}$

$\int_۰^۱ x^p dx$ وقتی همگراست که $p>-۱$ باشد.

- بررسی در $[۱,\infty)$: $\frac{x^p}{۱+x^q} \sim x^{p-q}$

$\int_۱^\infty x^{p-q}dx$ زمانی همگراست که $p-q<-۱ \leftarrow p<q-۱$.

بنابراین در مجموع انتگرال $\int_۰^\infty \frac{x^p}{۱+x^q}dx$ برای $\left.\begin{matrix} p>-۱ \\ p<q-۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} -۱<p<q-۱$ همگراست.

۹۳- با فرض اینکه تابع گاما به صورت $\Gamma(\alpha)=\int_۰^\infty x^{\alpha-۱}e^{-x}dx\ ,\ \alpha>۰$ باشد مطلوبست:

الف- $\Gamma(\alpha+۱)=\alpha\Gamma(\alpha)$

ب- ابتدا نشان دهید $\Gamma(۱)=۱$ سپس ثابت کنید اگر $n\in\mathbb{N}$ آنگاه: $\Gamma(n+۱)=n!$

ج- حاصل عبارت $\frac{\Gamma(۶)}{۲\Gamma(۳)}$ را بدست آورید. (تهران جنوب ۸۱)

حل

الف) $\Gamma(\alpha)=\int_۰^\infty x^{\alpha-۱}e^{-x}dx \to \Gamma(\alpha+۱)=\int_۰^\infty x^\alpha e^{-x}dx\ ,\ \begin{cases} u=x^\alpha \to du=\alpha x^{\alpha-۱}dx \\ dv=e^{-x}dx \to v=-e^{-x} \end{cases}$

$$\Gamma(\alpha+۱)=-e^{-x}x^\alpha\Big|_۰^\infty+\int_۰^\infty \alpha x^{\alpha-۱}e^{-x}dx=\alpha\underbrace{\int_۰^\infty x^{\alpha-۱}e^{-x}dx}_{\Gamma(\alpha)} \to \Gamma(\alpha+۱)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

■

ب) $\Gamma(۱)=\int_۰^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_۰^\infty=۱$ ، $\Gamma(۲)=۱\times\Gamma(۱)=۱$ ، $\Gamma(۳)=۲\Gamma(۲)=۲\times۱$

$\Gamma(۴)=۳\Gamma(۳)=۳\times۲\times۱$ .... $\Gamma(n+۱)=n\Gamma(n)=n\times(n-۱)\times...۲\times۱=n!$

■

ج) براساس قسمت ب داریم $\Gamma(۶)=۵!$ و $\Gamma(۳)=۲!$ ، درنتیجه: $\frac{\Gamma(۶)}{۲\Gamma(۳)}=\frac{۵!}{۲\times۲!}=۳۰$

۹۴- مطلوبست محاسبه $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت است.

(تهران ۸۶ - علم و صنعت ۸۸- مازرون)

حل

$$I_{2n+1}=\int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{2n+1}e^{-x^2}dx \ ,\begin{cases} u=x^{2n} & \to du=2n\,x^{2n-1}dx \\ dv=xe^{-x^2}dx & \to v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\end{cases}$$

$$I_{2n+1}=\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{2}x^{2n}e^{-x^2}\Big|_0^a+n\int_0^a x^{2n-1}e^{-x^2}dx=\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{2}a^{2n}.e^{-a^2}+n\int_0^a x^{2n-1}.e^{-x^2}dx$$

$$I_{2n+1}=\lim_{a\to\infty} n\int_0^a x^{2n-1}.e^{-x^2}dx\to I_{2n+1}=nI_{2n-1}\ ,\ I_1=\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

$$I_{2n+1}=n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1\times I_1\to I_{2n+1}=n!(\frac{1}{2})=\frac{n!}{2}$$

سوال مشابه

۱-۹۴ ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم: $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}.x^{2n+1}dx=2^n.n!$ (شریف ۸۴)

۹۵- اگر n اعداد صحیح مثبت باشد، دستور کاهشی انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I_n=\int_0^1 x^m (Lnx)^n\,dx$$ (دمیدوویچ)

حل

$$\begin{cases} u=(Lnx)^n & \to du=\frac{n(Lnx)^{n-1}}{x}dx \\ dv=x^m dx & \xrightarrow{m\neq -1} v=\frac{x^{m+1}}{m+1}\end{cases}\to I_n=\frac{x^{m+1}}{m+1}(Lnx)^n\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(Lnx)^{n-1}dx$$

$$I_n=\frac{x^{m+1}}{m+1}(Lnx)^n\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}I_{n-1}\to I_n=-\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{m+1}}{m+1}(Lnt)^n-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

if $m+1<0 \xrightarrow{m<-1} I_n=\infty\to$ واگرا است

$$\text{if } m+1>0\xrightarrow{m>-1}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{m+1}(Lnt)^n}{m+1}=0\to I_n=\frac{-n}{m+1}I_{n-1}\ ,I_0=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$$

در نتیجه داریم:

$$I_n=\frac{-n}{m+1}\times\frac{-(n-1)}{m+1}\times\ldots\times\frac{-1}{m+1}\times I_0\xrightarrow{I_0=\frac{1}{m+1}}I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\text{if } m=-۱ \rightarrow I_n = \int_۰^۱ \frac{(Lnx)^n}{x}dx = \lim_{t\to ۰^+} \frac{(Lnx)^{n+۱}}{n+۱}\Big|_t^۱ = \infty$$

پس در مجموع $\begin{cases} m \le -۱ & \text{واگرا است.} \\ m > -۱ & \text{همگرا است به}: \end{cases}$ $I_n = \dfrac{(-۱)^n n!}{(m+۱)^{n+۱}}$

فصل هفتم

سری

تعریـــف: دنبالـــه نامتنـــاهی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظـر بگیریـد. مجمـوع جمـلات ایـن دنبالـه $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ را سری نامتناهی می‌نامیم و آنرا با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: مجموع n جمله اول سری را با S_n نمایش می‌دهیم و آنرا مجموع جزئی n ام می‌نامیم.
دنبالـه مجمـوع هـای جزئـی سـری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را بـا $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ نـشان مـی‌دهـیم و در صـورتیکه $\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$ آنگاه سری همگرا است و مقـدارهمگرایی ایـن سـری S اسـت. و در غیـر ایـن صورت، سری واگرا است.

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

تذکر: عکس این قضیه لزوما برقـرار نیـست،یعنی از $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ نمـی تـوان نتیجـه گرفـت کـه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است،برای مثال $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولی می دانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است.

نتیجه بسیار مهم: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اثبات قضیه (امیرکبیر ۸۸):

فرض کنیم $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ همگرا باشد فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده است، پس وجود دارد $N \in \mathbb{N}$ بطوریکه برای $m, n > N$ داریم:

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

برای $n > N+1$ و $m = n-1$ داریم:

$$|S_n - S_{n-1}| < \varepsilon \xrightarrow{S_n - S_{n-1} = a_n} |a_n| < \varepsilon \to |a_n - 0| < \varepsilon \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال ۱: در همگرایی یا واگرایی سری های زیر تحقیق کنید.

الف) $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{n2^n+5}{4n^2+3n}$ (تهران مرکزی ۸۳)   ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (برادلی)

حل

الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n+5}{4n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4n^2}=\infty\neq 0$ (با دوبار هوپیتال گرفتن) ← سری واگرا است

ب) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=1^\infty\to e^{\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{2}{n}-1\right)}=e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{n}\right)}=e^2\neq 0\to$ سری واگرا است ■

انواع سری

۱- سری تلسکوپی (ادغام)

$$S_n=\sum_{k=m}^{n}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_m-a_{n+1}$$

مثال ۲: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ را بدست آورید. (قزوین ۸۶)

حل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\overset{\text{تجزیه کسر}}{=}\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\xrightarrow{\text{ادغام}}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\times 1-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$$

۲- سری هندسی

سری $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+ar+ar^2+\ldots$ که هر جمله از ضرب یک عدد مشخص (قدر نسبت) در جمله قبلی‌اش بدست می‌آید را سری هندسی گویند.

مجموع سری هندسی برابر است با $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ که a جمله اول سری و r قدر نسبت آن می‌باشد.

$$\begin{cases}|r|<1 \leftarrow \text{سری هندسی همگرا است و مقدار همگرایی اش } \frac{a}{1-r}.\\ |r|\geq 1 \leftarrow \text{سری هندسی واگرا است.}\end{cases}$$

مثال۳: در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$ بحث کنید. (برادلی)

حل

می دانیم که $(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases}$

$$\text{زوج } n: \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+1} = 2^1 + 2^{-1} + 2^{-3} + \ldots = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

$$\rightarrow \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ همگرا است به }$$

$$\text{فرد } n: \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 2^{-2} + 2^{-4} + \ldots = \frac{2^{-2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

مثال۴: به کمک سری هندسی مجموع عبارات زیر را بیابید. $(x \neq 1)$

الف) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ ب) $1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1}$

(علم و صنعت ۸۷)

حل

به کمک سری هندسی می‌دانیم که: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

الف) از طرفین تساوی فوق مشتق می گیریم:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

■

ب) طرفین تساوی قسمت الف را در x ضرب می‌کنیم:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + x}{(1-x)^2}$$

حال از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1}$$

$$= \frac{\left(-(n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1} + 1\right)(1-x)^2 + 2(1-x)\left(-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + x\right)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 . x^n + x + 1}{(1-x)^3}$$

۳- سری p

سری $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\dots$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ را سری p گویند که:
$\begin{cases} p>1 : \text{سری همگراست.} \\ p\le 1 : \text{سری واگراست.} \end{cases}$

از این سری در آزمون های مقایسه و مقایسه حدی برای تعیین نوع سری های دیگر استفاده می شود.

آزمون های همگرایی سری

۱- آزمون مقایسه

اگر داشته باشیم $0\le a_n\le b_n$ آنگاه:

الف)اگر $\sum b_n$ همگرا $\leftarrow$ $\sum a_n$ همگراست . (بزرگه همگرا $\leftarrow$ کوچیکه همگرا است.)

ب) اگر $\sum a_n$ واگرا $\leftarrow$ $\sum b_n$ واگراست. (کوچیکه واگرا $\leftarrow$ بزرگه واگرا است).

مثال۵ : در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ بحث کنید. (امیرکبیر)

حل

می‌دانیم $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\sin x\le x$،بنابراین:

$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\le 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2n^2}$$

براساس سری p ،سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ همگرا است،پس بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$ نیز همگراست .

۲- آزمون مقایسه حدی (خارج قسمت)

الف) اگر $a_n\ge 0$ و $b_n\ge 0$ و ($\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\ne 0$ یا ∞) آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هر دو واگرا هستند و یا هر دو همگرایند.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.

ج) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگرا است.

مثال۶ : رفتار همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+n}$ را بررسی کنید. (علم وصنعت ۹۰)

حل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2.e^{\tan^{-1}n}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2.e^{\tan^{-1}n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{\tan^{-1}n}=e^{\frac{\pi}{2}}\neq 0 \text{ یا } \infty$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است پس بنا به آزمون مقایسه حدی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+n}$ نیز همگرا است.

۳- آزمون انتگرال

فرض کنید $f(n)=a_n$ ، ۱) پیوسته ، ۲) مثبـت ، ۳) نزولـی باشـد، در اینـصورت سـری $\sum_{n=a}^{\infty}a_n$ و انتگرال $\int_a^{\infty}f(x)dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرایند.

مثال۷ : الف) آزمون انتگرال را فقط بیان کنید.

ب) درهمگرایی یا واگرایی سری زیر بحث کنید. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}(n)}{n^2+1}$ (امیرکبیر- ماژون)

حل

الف) در بالا بیان شده است.

■

ب) تابع $f(x)=\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$ پیوسته و مثبت است کافیست نشان دهیم روی بازه $[1,\infty)$ نزولیست.

$$f'(x)=\frac{1-2x\tan^{-1}x}{\left(1+x^2\right)^2}\quad(*)$$

$$1<x<\infty\to\frac{\pi}{4}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}\to-\pi x<-2x\tan^{-1}x<-\frac{\pi}{2}x$$

$$\to 1-\pi x<1-2x\tan^{-1}x<1-\frac{\pi}{2}x\xrightarrow{x>1}1-2x\tan^{-1}x<0\xrightarrow{(*)}f'(x)<0$$

بنابراین f نزولی است،درنتیجه می‌توان از آزمون انتگرال بهره گرفت:

$$\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{3\pi^2}{32}\to \text{همگرا است}$$

۴- آزمون لایب نیتز (تناوب)

سری را متناوب گویند هرگاه جملات آن یک درمیان منفی و مثبت باشد یعنی $\sum(-1)^n a_n$. اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ باشد، آنگاه سری $\sum(-1)^n a_n$ همگراست.

مثال۸ : در همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n.2^{3n}}{3^{2n}}$ بحث کنید. (تهران ۸۸)

حل

چون دنباله $a_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ نزولی است و $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n = 0$ پس طبق آزمون تناوب سری فوق همگرا است.

تعریف: گوییم سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است هرگاه $\sum|a_n|$ نیز همگرا باشد و اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد ولی $\sum|a_n|$ واگرا باشد، آنرا همگرای مشروط می‌نامیم.

نکته۱ : اگر سری همگرای مطلق باشد آنگاه همگراست یعنی اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد، حتماً $\sum a_n$ نیز همگراست.

مثال۹ : سری مطلقاً همگرا و همگرای مشروط را تعریف کرده و ثابت کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\dfrac{1}{n\sqrt{n}+1}$ مطلقاً همگراست (امیرکبیر ۸۶)

حل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n.\frac{1}{n\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+1} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = 1 \neq 0 \text{ یا } \infty$$

طبق سری p می دانیم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ همگرا است لذا طبق آزمون مقایسه حدی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}+1}$ نیز همگرا است پس $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\dfrac{1}{n\sqrt{n}+1}$ همگرای مطلق است.

مثال۱۰ : در همگرایی (مطلق یا مشروط) سری های زیر بحث کنید.

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-Lnn}$ (مارون-تهران۸۸)

الف) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

حل

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n-1}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0 \text{ یا } \infty$$

بنا به آزمون مقایسه حدی می‌توان گفت چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n-1}$ نیز همگراست و در نتیجه $\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ همگرای مطلق است. ■

ب) چون $a_n=\frac{1}{n-\text{Ln}n}$ دنباله ای نزولیست و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ پس طبق آزمون تناوب، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\text{Ln}n}$ همگراست.

از طرفی:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n-\text{Ln}n}\right|=\frac{1}{n-\text{Ln}n}\qquad,\qquad\frac{1}{n}<\frac{1}{n-\text{Ln}n}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\text{Ln}n}$ نیز واگراست و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\text{Ln}n}$ همگرای مشروط است.

۵- آزمون نسبت (دالامبر)

فرض کنید $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ باشد:

اگر
- $0\leq L<1 \leftarrow$ $\sum a_n$ همگرای مطلق است.
- $L>1 \leftarrow$ $\sum a_n$ واگراست.
- $L=1 \leftarrow$ آزمون سکوت می کند.

مثال ۱۱ : الف) اگر در سری $\sum a_n$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ ، $r<1$ ، ثابت کنید سری $\sum a_n$ همگراست.

ب) در همگرایی یا واگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n(n^2+1)}{2^n\, n!}$ بحث کنید. (امیرکبیر ۸۵)

حل

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}| = r\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}| = r\lim_{n\to\infty}|a_n|\ ,\ \lim_{n\to\infty}|a_n| = r\lim_{n\to\infty}|a_{n-1}|\ ,\dots,\ \lim_{n\to\infty}|a_2| = r\lim_{n\to\infty}|a_1|$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = r\lim_{n\to\infty}|a_{n-1}| = r^2\lim_{n\to\infty}|a_{n-2}| = \dots = r^{n-1}\lim_{n\to\infty}|a_1| \rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} r^n|a_1|$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}| + \lim_{n\to\infty}|a_n| + \dots + \lim_{n\to\infty}|a_1| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}| = \lim_{n\to\infty}|a_1|\sum_{k=0}^{n}r^k$$

سری حاصل یک سری هندسی است ومی دانیم که در سری هندسی اگـر $r<1$ باشد،سـری همگرا می شود. بنابراین سری مورد نظر به ازای $r<1$ همگرا است. ■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{3^{n+1}.\left[(n+1)^2+1\right]}{2^{n+1}.(n+1)!}}{\dfrac{3^n.(n^2+1)}{2^n.n!}}\right| \overset{\text{هم ارزی}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}.(n^2+1).2^n.n!}{3^n.(n^2+1).2^{n+1}.(n+1)!}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2(n+1)} = 0 < 1 \rightarrow$ سری همگرا است

۶- آزمون ریشه (کوشی)

فرض کنید $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ باشد.

اگر
- $0 \le L < 1 \leftarrow$ $\sum a_n$ همگرای مطلق است.
- $L > 1 \leftarrow$ $\sum a_n$ واگراست.
- $L = 1 \leftarrow$ آزمون سکوت می کند.

مثال۱۲ : همگرای سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ را بررسی کنید. (قزوین ۸۶ و علم و صنعت ۸۴)

حل

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{1}{e}<1\to$$ همگراست

یادآوری: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$

۷- آزمون رابه

$\sum a_n$ را در نظر بگیرید، هرگاه $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=L$ در اینصورت:

۱) اگر $L>1$ آنگاه سری همگرای مطلق است.

۲) اگر $L<1$ آنگاه سری مشروطا همگرا است یا واگرا.

۳) اگر $L=1$ آزمون سکوت می کند.

مثال۱۳ : در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Ln(n!)}$ بحث کنید. (علم و صنعت ۸۴ و ۸۵)

حل

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{Ln(n!)}{Ln((n+1)!)}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{Ln((n+1)!)-Ln(n!)}{Ln((n+1)!)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{Ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)}{Ln(n+1)!}=\lim_{n\to\infty} n\frac{Ln(n+1)}{Ln(n+1)!}$$

از طرفی داریم :

$$Ln(n+1)!=Ln(n+1)+Ln(n)+\dots+Ln2<\underbrace{Ln(n+1)+Ln(n+1)+\dots+Ln(n+1)}_{nLn(n+1)}$$

$$\to Ln(n+1)!<nLn(n+1)\to\frac{nLn(n+1)}{Ln(n+1)!}>1\to L>1$$

در نتیجه طبق آزمون رابه سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Ln(n!)}$ همگرای مطلق است.

۸- آزمون وایرشتراس

اگر $|a_n| \le b_n$, $b_n > ۰$ باشد، اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

مثال۱۴ : در همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^۴}$ بحث کنید. (مازون- تهران جنوب)

حل

$$\left|\frac{\cos nx}{n^۴}\right| \le \frac{۱}{n^۴}$$

و چون $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ همگراست پس طبق آزمون وایرشتراس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^۴}$ به ازای همه مقادیر x همگرای مطلق است.

سری توانی

برای بدست آوردن شعاع همگرایی سری توانی $\sum a_n (x-\alpha)^n$ معمولا از آزمون نسبت یا ریشه و ۳ حالت گفته شده در این آزمون ها استفاده می‌کنیم.(دقت شود، همگرایی در نقاط مرزی بایـد بطور جداگانه بررسی شوند)

$$\text{شعاع همگرایی} \longleftarrow \frac{۱}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

مثال۱۵ : تابع f بصورت $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳^n (x-۲)^n}{۲^n (n^۲+n)}$ تعریف شده است.

الف) دامنه تابع $f(x)$ را بدست آورید. ب) مقدار $f\left(\frac{۸}{۳}\right)$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۸۶)

حل

الف) $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{۳^{n+۱}(x-۲)^{n+۱}}{۲^{n+۱}\left((n+۱)^۲+(n+۱)\right)}}{\dfrac{۳^n.(x-۲)^n}{۲^n(n^۲+n)}}\right| = \frac{۳}{۲}|x-۲|$$

شرط همگرایی : $$L<۱ \to \frac{۳}{۲}|x-۲|<۱ \to |x-۲|<\frac{۲}{۳} \to \frac{-۲}{۳}<x-۲<\frac{۲}{۳} \to \frac{۴}{۳}<x<\frac{۸}{۳}$$

بررسی نقاط مرزی

$$x=\frac{۴}{۳}\to\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳^n\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n}{۲^n\left(n^۲+n\right)}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲+n}$$

دنباله $a_n=\frac{۱}{n^۲+n}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲+n}=۰$ پس طبق آزمون تناوب سری همگرا است.

$$x=\frac{۸}{۳}\to\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳^n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n}{۲^n\left(n^۲+n\right)}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{n^۲+n}}{\frac{۱}{n^۲}}=\frac{n^۲}{n^۲+n}=۱$ و چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ همگـرا اسـت لـذا طبـق آزمـون مقایـسه حـدی

$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+n}$ نیز همگراست.

درنتیجه فاصله همگرایی : $\left[\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳}\right]$

■

$$\text{ب)}\ f\left(\frac{۸}{۳}\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\xrightarrow{\text{تلسکوپی}}۱-\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱}=۱$$

سوال مشابه ۱۵-۱ تابع $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(x-۵)^n}{n(n+۱)}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را تعیین کنید. ب) مقدار $f(۶)$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۹)

Ans الف) $D_f=[۴,۶]$ ب) $f(۶)=۱$

۱۵-۲ الف) بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n.۲^n(x-۳)^n}{n(n+۱)}$ را تعیین کنید.

ب) مقدار سری را در صورت وجود، به ازای $x=\frac{۵}{۲}$ محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۴)

Ans الف) $\left[\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲}\right]$ ب) ۱

۱۵-۳ بازه و شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n(n-1)}$ را بدست آورید. (تهران جنوب ۸۵)

Ans $[2, 4]$,$R=1$

۱۵-۴ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ را تعیین کنید. (امیرکبیر ۸۹)

Ans $[-1, 1]$

سری تیلور

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $x_0 - R < x < x_0 + R$ بینهایت بار مشتق پذیر باشد. می‌توان سری توانی نامتناهی زیر را نوشت که به سری تیلور معروف است:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

گاهی ما به m جمله‌ی اول سری تیلور نیاز داریم:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+O(x-x_0)^m$$

$O(x-x_0)^m$: به این معنی است که درجه تمام جملات حذف شده از m بزرگتر بوده است، و به آن خطای برشی مرتبه m ام می‌گوییم.

به $R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)$ باقیمانده سری تیلور می‌گوییم.

مثال۱۶ : سری تیلور تابع $f(x)=\sin x$ را حول $x=\frac{\pi}{6}$ بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۳)

حل

$$f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x \to f''(x)=-\sin x \to \dots$$

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1!}f'\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)+\dots$$

$$\sin x=\frac{1}{2}+\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)+\dots$$

سری مکلورن

اگر در سری تیلور $x_0 = 0$ باشد، سری زیر بدست می‌آید که به آن سری مکلورن گوییم:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots\to f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

مثال ۱۷ : بسط مکلورن $Ln(1+x)$ را بنویسید. (علم و صنعت ۸۸- برادلی)

حل

روش اول:

$$f(x)=Ln(1+x)\to f'(x)=\frac{1}{1+x},f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\ldots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$$

$$Ln(1+x)=Ln1+\frac{x}{1!}(1)+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}(2)+\ldots\to Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

$$\to Ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

روش دوم: بر اساس سری هندسی می‌دانیم که برای $|x|<1$:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1-(-x)}\to\sum_{n=0}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$$

حال از طرفین تساوی فوق انتگرال می گیریم:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}(-1)^n t^n dt\to Ln(1+t)\Big|_0^x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$$

$$\to Ln(1+x)=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

سوال مشابه ۱۷-۱ بسط مکلورن $f(x)=Ln(1+x)$ را یافته و سپس به کمک آن بسط $f(x)=Lnx$ را مشخص کنید. (تهران جنوب ۸۹)

Ans $$Lnx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

۱۷-۲ به کمک سری هندسی، سری توانی متناظر با تابع $f(x)=Ln(1+x^2)$ را یافته و فاصله همگرایی آنرا مشخص کنید. (علم و صنعت ۸۶- تهران جنوب ۸۶)

Ans $$Ln(1+x^2)=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}\ ,\ -1<x\le 1$$

۱۷-۳ الف) سری توانی $f(x)=x\mathrm{Ln}(1+x)$ حول صفر را وقتی $|x|<1$ بدست آورید.

ب) مقدار $f^{(n)}(0)$ را مشخص کنید. (امیرکبیر ۸۹)

Ans الف) $x\mathrm{Ln}(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+1}$ ب) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=1\\ \frac{(-1)^{n-2}n!}{n-1} & n\geq 2\end{cases}$

مثال ۱۸: در بازه همگرایی فرض کنید $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$. تابع $f(x)$ را مشخص کنید.

(امیرکبیر۸۹)

حل

می‌دانیم برای $|x|<1$:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n dt\rightarrow-\mathrm{Ln}(1-t)\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x\rightarrow-\mathrm{Ln}(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

از طرفی:

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}}_{f_1(x)}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}}_{f_2(x)}\rightarrow f(x)=f_1(x)-f_2(x)\qquad(*)$$

ابتدا به محاسبه $f_1(x)$ می پردازیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\mathrm{Ln}(1-x)\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=-\mathrm{Ln}(1-x)\xrightarrow{\times x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=-x\mathrm{Ln}(1-x)$$

$$\rightarrow f_1(x)=-x\mathrm{Ln}(1-x)\qquad(**)$$

حال محاسبه $f_2(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\mathrm{Ln}(1-x)\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\mathrm{Ln}(1-x)\rightarrow x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\mathrm{Ln}(1-x)$$

$$\rightarrow f_2(x)=-x-\mathrm{Ln}(1-x)\qquad(***)$$

$$\xrightarrow{(*),(**),(***)}f(x)=-x\mathrm{Ln}(1-x)+x+\mathrm{Ln}(1-x)=(1-x)\mathrm{Ln}(1-x)+x$$

مثال۱۹ : الف) بسط مکلورن تابع $f(x)=Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ را بدست آورید.

ب) مقدار $Ln2$ را بادقت ۵ رقم اعشار بدست آورید. (برادلی)

حل

الف) $f(x)=Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=Ln(1+x)-Ln(1-x)$

از طرفی در مثال۱۷ صفحه ۲۷۷ بدست آوردیم:

$$Ln(1+x)=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (*)$$

همچنین برای بدست آوردن بسط مک لورن $Ln(1-x)$ کافیست در تساوی $(*)$ بجای x ، $-x$ جایگذاری کنیم:

$$Ln(1-x)=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}\frac{(-1)^{2n+1}x^{n+1}}{n+1}\to Ln(1-x)=-\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (**)$$

$$f(x)=Ln(1+x)-Ln(1-x)\xrightarrow{(*),(**)}f(x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)=2\sum_{n=0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

■

ب) $\frac{1+x}{1-x}=2\to 1+x=2-2x\to 3x=1\to x=\frac{1}{3}$

بنابراین برای بدست آوردن مقدار $Ln2$، کافیست $f\left(\frac{1}{3}\right)$ را بدست آوریم:

$$Ln(2)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}+\dots\right)+R_n\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$R_n\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{1}{(2n+3)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}<0/00001\to n>3/05\to n=4$$

در نتیجه بسط را تا جمله پنجم $(n=4)$ می نویسیم:

$$Ln2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)=0/693146$$

مثال ۲۰: ضرایب $a_{۰}, a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}$ را برای سری مکلورن تابع f حساب کنید و شعاع همگرایی سری $f(x)=\left(۶-x-x^{۲}\right)^{\frac{۵}{۳}}=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را بدست آورید (تهران ۸۴)

حل

$$f(x)=۶^{\frac{۵}{۳}}\left(۱-\frac{x+x^{۲}}{۶}\right)^{\frac{۵}{۳}}=۶^{\frac{۵}{۳}} g(x) \qquad (*)$$

یادآوری (بسط دو جمله‌ای نیوتن): $(a+b)^n=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}.b^{i}$

طبق بسط دوجمله ای نیوتن می دانیم که:

$$(۱+t)^n=۱+nt+\frac{n(n-۱)}{۲!}t^{۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}t^{۳}+\ldots$$

$$\rightarrow(۱-t)^{\frac{۵}{۳}}=۱+\frac{۵}{۳}(-t)+\frac{\frac{۵}{۳}\left(\frac{۵}{۳}-۱\right)}{۲!}(-t)^{۲}+\frac{\frac{۵}{۳}\left(\frac{۵}{۳}-۱\right)\left(\frac{۵}{۳}-۲\right)}{۳!}(-t)^{۳}+\ldots$$

$$\xrightarrow{t=\frac{x+x^{۲}}{۶}} g(x)=\left(۱-\frac{x+x^{۲}}{۶}\right)^{\frac{۵}{۳}}=۱-\frac{۵}{۳}\left(\frac{x+x^{۲}}{۶}\right)+\frac{۵}{۹}\left(\frac{x+x^{۲}}{۶}\right)^{۲}+\frac{۵}{۸۱}\left(\frac{x+x^{۲}}{۶}\right)^{۳}+\ldots$$

$$=۱-\frac{۵}{۱۸}\left(x+x^{۲}\right)+\frac{۵}{۳۲۴}\left(x^{۲}+۲x^{۳}+x^{۴}\right)+\frac{۵}{۸۱\times ۲۱۶}\left(x^{۳}+\ldots\right)$$

$$g(x)=۱-\frac{۵}{۱۸}x-\frac{۸۵}{۳۲۴}x^{۲}+\frac{۵۴۵}{۱۷۴۹۶}x^{۳}+\ldots$$

$$\xrightarrow{(*)} f(x)=\sqrt[۳]{۳۶}\left(۶-\frac{۵}{۳}x-\frac{۸۵}{۵۴}x^{۲}+\frac{۵۴۵}{۲۹۱۶}x^{۳}+\ldots\right)$$

پس:

$$a_{۰}=۶\sqrt[۳]{۳۶} \quad , \quad a_{۱}=-\frac{۵}{۳}\sqrt[۳]{۳۶} \quad , \quad a_{۲}=-\frac{۸۵}{۵۴}\sqrt[۳]{۳۶} \quad , \quad a_{۳}=\frac{۵۴۵}{۲۹۱۶}\sqrt[۳]{۳۶}$$

$$f(x)=\left(۶-x-x^{۲}\right)^{\frac{۵}{۳}}=(۲-x)^{\frac{۵}{۳}}(۳+x)^{\frac{۵}{۳}}=۶^{\frac{۵}{۳}}\left(۱-\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۵}{۳}}\left(۱+\frac{x}{۳}\right)^{\frac{۵}{۳}}$$

تابع f حاصلضرب دو تابع دو جمله ای شد، پس شعاع همگرایی f برابر min شعاع همگرایی این دو تابع است:

$$R_{۱}:\left|\frac{x}{۲}\right|<۱\rightarrow|x|<۲\rightarrow R_{۱}=۲$$

$$\rightarrow R=\min\left(R_{۱},R_{۲}\right)=۲$$

$$R_{۲}:\left|\frac{x}{۳}\right|<۱\rightarrow|x|<۳\rightarrow R_{۲}=۳$$

مثال ۲۱ : سری مکلورن $f(x)=\dfrac{۵+x}{۲-x-x^۲}$ را بدست آورید. (برادلی)

حل

$$\frac{۵+x}{۲-x-x^۲}=\frac{۵+x}{(۱-x)(۲+x)}=\frac{A}{۱-x}+\frac{B}{۲+x}\to\begin{cases}A=۲\\B=۱\end{cases}\to f(x)=\frac{۲}{۱-x}+\frac{۱}{۲+x}$$

می‌دانیم: $|u|<۱$ ، $\dfrac{۱}{۱-u}=\sum_{n=۰} u^n$ پس:

$$\xrightarrow{u=x}\frac{۲}{۱-x}=۲\sum_{n=۰}x^n \qquad |x|<۱\to x\in(-۱,۱)\,,R_۱=۱$$

$$\frac{۱}{۲+x}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{x}{۲}}\xrightarrow{u=\frac{-x}{۲}}\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{x}{۲}}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}(-۱)^n\left(\frac{x}{۲}\right)^n \qquad ,\left|\frac{x}{۲}\right|<۱\to x\in(-۲,۲),R_۲=۲$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{۲}{۱-x}+\frac{۱}{۲+x}\to f(x)=۲\sum_{n=۰}^{\infty}x^n+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{x}{۲}\right)^n=\sum_{n=۰}^{\infty}\left[۲x^n+(-۱)^n\cdot\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)^n\right]$$

$$,R=\min\{R_۱,R_۲\}=۱$$

مثال ۲۲ : سری تیلور تابع f را حول نقطه $t=۱$ حساب کنید وشعاع همگرایی سری بدست آمده را بیابید. $f(t)=\dfrac{t-۱}{t^۲-۳t+۳}$ (تهران ۸۳)

حل

$$t=۱\to\quad \underset{x\to ۰}{x=t-۱}\to t=x+۱$$

$$f(x+۱)=\frac{x}{(x+۱)^۲-۳(x+۱)+۳}=\frac{x}{x^۲+۲x+۱-۳x-۳+۳}=\frac{x}{x^۲-x+۱}\cdot\frac{x+۱}{x+۱}$$

$$=\frac{x^۳+x}{x^۳+۱}=(x^۲+x)\cdot\frac{۱}{۱+x^۳}$$

از طرفی می دانیم: $\dfrac{۱}{۱+u}=۱-u+u^۲-\dots$ ،بنابراین $\dfrac{۱}{۱+x^۳}=۱-x^۳+x^۶-\dots$

$$f(x+۱)=(x^۲+x).(۱-x^۳+x^۶-\dots)=(x^۲+x).\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n.x^{۳n}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\left(x^{۳n+۲}+x^{۳n+۱}\right)$$

$$\xrightarrow{x=t-۱}f(t)=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n.\left((t-۱)^{۳n+۲}+(t-۱)^{۳n+۱}\right)$$

سری فوق یک سری هندسی است، وقتی همگراست که: $|t-۱|<۱$ ← شعاع همگرایی $R=۱$

مثال۲۳ : حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$ را بدست آورید.

حل

به کمک بسط مکلورن براحتی ثابت می شود که $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\xrightarrow{\text{مشتق}}e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\times x}xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}e^x+xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\times x}e^x\left(x+x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$$

مثال۲۴ : مقدار حد زیر را بیابید.

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\left(1+x^2\right)^{\frac{-1}{2}}}{x^4}$ (تهران ۸۳)

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{x(1-\cos x)}$ (کرج ۸۴)

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ (تهران ۸۶)

حل

الف) براساس بسط دوجمله ای نیوتن داریم: $\left(1-t^2\right)^{\frac{-1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$

حال از طرفین تساوی فوق انتگرال می گیریم:

$$\int_0^x\left(1-t^2\right)^{\frac{-1}{2}}dt=\int_0^x 1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)dt\to \arcsin t\Big|_0^x=t+\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)\Big|_0^x$$

$$\to \arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$$

نیز می دانیم که:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\qquad ,\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{6}x^3\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}{x\left(1-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{3}$$

■

ب) باتوجه به بسط مکلورن داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۶} + o\left(x^{۳}\right) \qquad , \cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + o\left(x^{۴}\right)$$

$$\cos(\sin x) = \cos\left(x - \frac{x^{۳}}{۶}\right) = ۱ - \frac{۱}{۲!}\left(x - \frac{x^{۳}}{۶}\right)^{۲} + \frac{۱}{۴!}\left(x - \frac{x^{۳}}{۶}\right)^{۴} - \dots$$

$$\to \cos(\sin x) = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \left(\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۴!}\right)x^{۴} + o(x^{۴}) = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۵}{۲۴}x^{۴} + o(x^{۴})$$

همچنین براساس بسط دوجمله ای نیوتن می توان نوشت:

$$\left(۱ + x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{-\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲} - ۱\right)}{۲}x^{۴} + o(x^{۴}) = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۳}{۸}x^{۴} + o(x^{۴})$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\cos(\sin x) - \left(۱ + x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}}{x^{۴}} = \lim_{x \to ۰} \frac{\left(۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۵}{۲۴}x^{۴}\right) - \left(۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۳}{۸}x^{۴}\right)}{x^{۴}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{-\frac{x^{۴}}{۶}}{x^{۴}} = -\frac{۱}{۶}$$

■

ج) $x - ۱ = t \Rightarrow t \to ۰$

می دانیم که $(۱ + t)^{n} \underset{t \to ۰}{\sim} ۱ + nt$ پس:

$$\sqrt{۲x - x^{۲}} = \sqrt{۲(t + ۱) - (t + ۱)^{۲}} = \sqrt{۱ - t^{۲}} = \left(۱ - t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲}t^{۲}$$

$$\sqrt[۳]{x} = \sqrt[۳]{t + ۱} = (۱ + t)^{\frac{۱}{۳}} = ۱ + \frac{۱}{۳}t$$

$$\sqrt[۴]{x^{۳}} = (t + ۱)^{\frac{۳}{۴}} = ۱ + \frac{۳}{۴}t$$

پس داریم:

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\left(۱ - \frac{۱}{۲}t^{۲}\right) - \left(۱ + \frac{۱}{۳}t\right)}{۱ - \left(۱ + \frac{۳}{۴}t\right)} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۲}t^{۲} - \frac{۱}{۳}t}{-\frac{۳}{۴}t} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۳}t}{-\frac{۳}{۴}t} = \frac{۴}{۹}$$

مثال۲۵ : ابتدا سری مکلورن $\frac{\sin x}{x}$ را بنویسید و سپس انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ را بدست آورید.

(علم و صنعت ۸۸)

حل

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\rightarrow\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

$$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots dx=x-\frac{x^3}{3\times 3!}+\frac{x^5}{5\times 5!}-\frac{x^7}{7\times 7!}+\dots\Big|_0^1$$

$$I=1-\frac{1}{3\times 3!}+\frac{1}{5\times 5!}-\frac{1}{7\times 7!}+\frac{1}{9\times 9!}-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

سوالات فصل هفتم

۱- الف) سری همگرا و سری واگرا را تعریف کنید.

ب) فقط به کمک تعریف ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ یک سری واگراست.

ج) به کمک تعریف، همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ را بررسی کنید. (امیرکبیر ۸۶)

حل

الف) سری $\sum_{i=0} a_i$ را همگرا گوئیم هرگاه دنباله مجموع‌های جزیی آن یعنی $S_n=\sum_{i=0} a_i$ همگرا باشد، در غیر این صورت آنرا واگرا گوئیم. به عبارت دیگر $\sum_{i=0} a_i$ همگراست اگر

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists N\in\mathbb{N}\ ;\ n>N\Rightarrow\Big|\sum_{N+1} a_i-S\Big|<\varepsilon$$

■

ب) $S_n=\sum_{n=1}(-1)^{n+1}$

$$S_1=1\quad,\quad S_2=1-1=0\quad,\quad S_3=1+(-1)+1=1\quad,\quad\ldots$$

$$\rightarrow S_n=\begin{cases}0 & \text{فرد } n\\ 1 & \text{زوج } n\end{cases}\quad\rightarrow \text{واگراست } S_n$$

■

ج) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}\rightarrow$$ سری فوق همگرا به عدد $\frac{1}{2}$ است

۲- همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+n^2+1}$ (تهران مرکزی ۸۴)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}$ (تهران جنوب ۸۶)

د) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\operatorname{Ln} n}{n^2+10n^3}}$ (ماژون)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$ (قزوین ۸۶- تهران شمال ۸۳)

هـ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$ (تهران مرکزی ۸۵)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{3n^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0 \text{ یا } \infty$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس بنا به آزمون مقایسه حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}$ نیز واگراست.

■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^3+n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3}=2\neq 0 \text{ یا } \infty$$

می دانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+n^2+1}$ نیز همگراست.

■

ج) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\,(4\sqrt{n}-1)}{n^2+2\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\,(4\sqrt{n})}{n^2}=4\neq 0 \text{ یا } \infty$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه حدی می‌توان بیان کرد که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$ نیز همگراست.

■

$$\text{د)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n-\operatorname{Ln} n}{n^{2}+10n^{3}}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n}{10n^{3}}}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\neq 0\ \text{یا}\ \infty$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، بنا به آزمون مقایسه حدی، $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\operatorname{Ln} n}{n^{2}+10n^{3}}}$ نیز واگرا می‌باشد. ■

$$\text{هـ)}\ \frac{1}{n+2^{n}}<\frac{1}{2^{n}}$$

چون سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$ همگراست لذا طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2^{n}}$ نیز همگراست.

سوال مشابه قسمت ب

۲-۱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{3}}{\frac{9}{n^{2}}}$ (برادلی) ANS همگرا

۲-۲ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{(n^{3}+2)^{2}}$ (برادلی) ANS همگرا

۳- در همگرایی یا واگرایی سری‌های زیربحث کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{2}}{(n+2)!}$ (تهران جنوب ۸۷)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n!}{(1+n)!}$ (تهران مرکزی ۸۹)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^{2}}{(2n)!}$ (آدامز)

د) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{n^{n}}$ (برادلی)

حل

الف) آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+2)^{2}}{(n+3)!}}{\dfrac{(n+1)^{2}}{(n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0<1\rightarrow$ همگراست ■

$$\text{ب)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1+n!}{(1+n)!}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n.n!}{(1+n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.n!}{(1+n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=1\neq 0\ \text{یا}\ \infty$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n!}{(1+n)!}$ نیز واگراست. ■

ج) روش اول:

(آزمون نسبت): $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\times\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=1$$

پس آزمون نسبت کمکی در تشخیص همگرایی و واگرایی سری نکرد. اما داریم:

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}((n)(n-1)\ldots(2)(1))^2}{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(2)(1)}=\frac{(2n)^2(2(n-1))^2\ldots(2\times2)^2(2\times1)^2}{(2n)(2n-1)\ldots(2)(1)}$$

$$=\frac{(2n)^2}{2n}\times\frac{(2(n-1))^2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{(2\times2)^2}{2}\times\frac{(2\times1)^2}{1}>1\times1\times\ldots\times1=1$$

همچنین $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ واگرا است،پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ نیز واگرا است.

روش دوم: از آزمون رابه استفاده می کنیم:

$$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{-2n-2}{(2n+2)(2n+1)}\right)=\frac{-1}{2}<1$$

طبق آزمون رابه،سری واگرا یا همگرای مشروط است، ازطرفی دنباله $a_n=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ مثبت است

بنابراین $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ نمی تواند همگرای مشروط باشد پس این سری واگراست.

■

د) آزمون نسبت: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}}\times\dfrac{n^n}{(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^{n+1}}.n^n$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\times e^{-1}=\infty>1$$

درنتیجه سری واگراست.

سوال مشابه قسمت الف

۳-۱ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ (تهران مرکزی ۸۵- قزوین۸۸) Ans به کمک آزمون نسبت همگراست

۳-۲ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ (علم و صنعت ۸۵) Ans به کمک آزمون نسبت واگرا است

۴- همگرایی و واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^p}$ (امیرکبیر ۸۸)

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ (تهران مرکزی ۸۸)

ج) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n!)|}{n^2}$ (برادلی)

حل

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$

اگر $p>0$ باشد آنگاه $a_n=\frac{1}{n^p}$ نزولی است و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ پس طبق آزمون تناوب همگراست.

اگر $p\le 0$ باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\neq 0$ بنابراین سری واگراست.

■

ب) چون $a_n=\sin\frac{1}{n}$، نزولی است و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ پس طبق آزمون تناوب سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0 \text{ یا } \infty$$

چون سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ نیز واگراست ،درنتیجه سری فوق همگرای مشروط است.

■

ج) $|\sin(n!)|\le 1\to\frac{|\sin(n!)|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n!|}{n^2}$ نیز همگراست.

سوال مشابه قسمت ب

۴-۱ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ (اراک۸۹- برادلی) Ans واگرا

۵- در همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر بحث کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ (علم و صنعت ۸۷ و ۸۶)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ (برادلی)

حل

الف) آزمون نسبت: $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 . e^{-n} . e^{-1}}{n^2 e^{-n}}$

$= e^{-1} < 1 \rightarrow$ همگراست

از آزمون انتگرال هم می توانستیم استفاده کنیم که نیاز به دوبار جزء به جزء دارد.

■

ب) چون $a_n = ne^{-n^2}$ دنباله‌ایست نزولی، مثبت و پیوسته است پس می‌توان از آزمون انتگرال بهره گرفت.

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-1} \rightarrow$$

طبق آزمون انتگرال سری $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ نیز همگراست.

۶- همگرا یا واگرا بودن هر یک از سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(\ln n)^{1/1}}$ (برادلی)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ (برادلی)

ج) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(\ln n)^{0/9}}$ (برادلی)

د) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (برادلی)

حل

الف) $\frac{1}{(n+3)(\ln n)^{1/1}} < \frac{1}{n(\ln n)^{1/1}}$

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{1/1}}$ نزولی ، مثبت و پیوسته است بنابراین می‌توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{1/1}} = \frac{(\ln x)^{-0/1}}{-0/1} = -\frac{10}{(\ln x)^{0/1}}\Big|_2^{\infty} = \frac{10}{(\ln 2)^{0/1}}$$

طبق آزمون انتگرال سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1/1}}$ همگراست و طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(\ln n)^{1/1}}$ نیز همگراست.

■

ب) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\operatorname{Ln} n}{n^{2}}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{Ln} n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ همگراست لذا طبق آزمون مقایسه حدی، $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{Ln} n}{n^{2}}$ نیز همگراست.

■

ج) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+3)(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}}{\dfrac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}{(n+3)(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}=1$

حال نوع همگرایی و واگرایی $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}$ را بررسی می‌کنیم:

چون $f(x)=\dfrac{1}{x(\operatorname{Ln} x)^{0/9}}$ پیوسته، مثبت و نزولیست ،درنتیجه شرایط آزمون انتگرال را دارد:

$\int_{2}^{\infty}\dfrac{dx}{x(\operatorname{Ln} x)^{0/9}}=\dfrac{(\operatorname{Ln} x)^{0/1}}{0/1}\Big|_{2}^{\infty}=\infty\to$ واگراست

لذا بنا به آزمون مقایسه حدی، $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}$ همانند $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^{0/9}}$ واگراست.

■

د) $\text{if } n>2000\Rightarrow \operatorname{Ln} n>e^{2}\to(\operatorname{Ln} n)^{\operatorname{Ln} n}>(e^{2})^{\operatorname{Ln} n}\to(\operatorname{Ln} n)^{\operatorname{Ln} n}>e^{2\operatorname{Ln} n}=e^{\operatorname{Ln} n^{2}}=n^{2}$

$\dfrac{1}{(\operatorname{Ln} n)^{\operatorname{Ln} n}}<\dfrac{1}{n^{2}}$

چون $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$ همگراست در نتیجه طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\operatorname{Ln} n)^{\operatorname{Ln} n}}$ نیز همگراست.

۷- بررسی کنید کدامیک از سری‌های زیر همگرا و کدامیک واگرا هستند.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\operatorname{Ln} n}$ (قزوین ۸۶- تهران جنوب ۸۵)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ (خواجه نصیر ۸۴)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\operatorname{Ln}^{2}(n+1)}$ (علوم و تحقیقات ۸۸)

د) $\sum_{n=2}\dfrac{(-1)^{n}}{n\left(\operatorname{Ln}(n+1)\right)^{2}}$ (برادلی)

حل

الف) دنباله $a_n=\frac{1}{\operatorname{Ln} n}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{Ln} n}=0$ پس طبق آزمون تناوب ،سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{Ln} n}$ همگراست.

ب) $a_n=\left\{\operatorname{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$ دنباله‌ای نزولی است (مشتق بگیرید) و همچنـین $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$ پس طبق آزمون تناوب سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ نیز همگراست.

ج) چون $a_n=\frac{1}{(n+1)\operatorname{Ln}^2(n+1)}$ نزولی ،مثبت و پیوسته است پس مـی‌تـوان از آزمـون انتگـرال استفاده کرد:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\operatorname{Ln}^2(x+1)}\qquad \operatorname{Ln}(x+1)=u\rightarrow\frac{dx}{x+1}=du$$

$$\int_{\operatorname{Ln}2}^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}\Big|_{\operatorname{Ln}2}^{\infty}=\frac{1}{\operatorname{Ln}2}\rightarrow$$ سری نیز همگراست

د) $n+1>n\rightarrow\operatorname{Ln}(n+1)>\operatorname{Ln} n\rightarrow\operatorname{Ln}^2(n+1)>\operatorname{Ln}^2 n\rightarrow\frac{1}{\operatorname{Ln}^2(n+1)}<\frac{1}{\operatorname{Ln}^2 n}$

$$\rightarrow\frac{1}{n(\operatorname{Ln}(n+1))^2}<\frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^2}$$

تابع $f(x)=\frac{1}{x(\operatorname{Ln} x)^2}$ نزولی است ، مثبت و پیوسته، بنابراین می‌توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\operatorname{Ln} x)^2}=\frac{-1}{\operatorname{Ln} x}\Big|_2^{\infty}=\frac{1}{\operatorname{Ln}2}\rightarrow$$ همگراست $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^2}$ سری

از طرفی طبق آزمون مقایسه، $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\operatorname{Ln}(n+1))^2}$ نیز همگراست. در نتیجه $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(\operatorname{Ln}(n+1)\right)^2}$ همگرای مطلق است.

سوال مشابه قسمت ج

۱-۷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\operatorname{Ln}(n+1)}$ (تهران جنوب ۸۴) Ans طبق آزمون انتگرال واگراست

۸- برحسب مقادیر مختلف p در همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر تحقیق کنید.

ب) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p \operatorname{Ln} n}$ (برادلی)

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^p}$ (تهران جنوب ۸۸- قزوین۸۸- برادلی)

د) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)^p}$ (برادلی)

ج) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\operatorname{Ln} n(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n))^p}$ (برادلی)

حل

الف) اگر $p=1 \leftarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\operatorname{Ln} n}$ و همچنین تابع $f(x)=\frac{1}{x\operatorname{Ln}x}$ نزولی، مثبت و پیوسته است، در نتیجه طبق آزمون انتگرال داریم:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\operatorname{Ln}x}=\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x)\Big|_2^{\infty}=\infty \rightarrow$$ واگراست.

اگر $p\neq 1 \leftarrow f(x)=\frac{1}{x(\operatorname{Ln}x)^p}$ تابعی است نزولی، مثبت و پیوسته پس می‌توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\operatorname{Ln}x)^p}dx=\lim_{a\to\infty}\frac{(\operatorname{Ln}x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{(\operatorname{Ln}a)^{1-p}}{1-p}-\frac{(\operatorname{Ln}2)^{1-p}}{1-p}$$

برای همگرایی باید $1-p<0$ باشد یعنی $p>1$

و برای واگرایی باید $1-p>0$ باشد یعنی $p<1$

بنابراین در مجموع می‌توان گفت $\begin{cases} \text{همگرایی} & p>1 \\ \text{واگرایی} & p\leq 1\end{cases}$

■

ب) $n>3 \rightarrow \operatorname{Ln} n>1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{Ln} n}<1 \rightarrow \frac{1}{n^p\operatorname{Ln} n}<\frac{1}{n^p}$

چون $\sum_{n=3}\frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگراست پس بنا به آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p\operatorname{Ln} n}$ همگراست.

$$\text{if } p<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p\operatorname{Ln} n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^p\operatorname{Ln} n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{\operatorname{Ln} n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{n\to\infty}\frac{(1-p)n^{-p}}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)n^{1-p}\xrightarrow{p<1\to 1-p>0}\lim_{n\to\infty}(1-p)n^{1-p}=\infty$$

چون $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست لذا طبق آزمون مقایسه حدی $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p\operatorname{Ln} n}$ $(p<1)$ نیز واگراست.

$p=1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\operatorname{Ln} n} \rightarrow$ واگرا است طبق آزمون انتگرال (در قسمت الف حل شده)

در مجموع داریم $\begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

ج) چون $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x))^{p}}$ نزولی، مثبت و پیوسته است ،در نتیجه شرایط آزمون انتگرال را داراست:

$$(p\neq 1)\quad \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x))^{p}} \xrightarrow{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)=u \rightarrow du=\frac{dx}{x\operatorname{Ln} x}}$$

$$\int_{\ln(\ln 3)}^{\infty}\frac{du}{u^{p}}=\operatorname*{Lim}_{a\rightarrow\infty}\frac{u^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{\ln(\ln 3)}^{a}=\operatorname*{Lim}_{a\rightarrow\infty}\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln(\ln 3))^{1-p}}{1-p}$$

برای آنکه همگرا باشد: $1-p<0 \Leftarrow p>1$

و اگر $1-p>0 \Leftarrow p<1$ واگراست.

$$p=1 \rightarrow \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x(\operatorname{Ln} x)(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x))}=\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x))\Big|_{3}^{\infty}=\infty \rightarrow$$ واگراست

پس $\begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

د) اگر $p\leq 0$ باشد: $\operatorname*{Lim}_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{(n^{2}-1)^{p}}=\infty\neq 0 \rightarrow$ واگراست. (*)

اگر $p>0$، $f(x)=\frac{x}{(x^{2}-1)^{p}}$ نزولی است ، مثبت و پیوسته بنابراین می توان از آزمون انتگرال بهره بگیریم:

$$p\neq 1 \rightarrow \int_{2}^{\infty}\frac{x}{(x^{2}-1)^{p}}dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{\infty}\frac{2x}{(x^{2}-1)^{p}}dx=\frac{1}{2}\frac{(x^{2}-1)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{2}^{\infty}$$

$$\begin{cases} 1-p<0 \rightarrow p>1 & \text{همگرا} \\ 1-p>0 \rightarrow 0<p<1 & \text{واگرا} \end{cases} \qquad (**)$$

$$p=1 \rightarrow \int_{2}^{\infty}\frac{x}{x^{2}-1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^{2}-1)\Big|_{2}^{\infty}=\infty \rightarrow$$ واگرا است (***)

با توجه به (*) و (**) و (***) مجموعاً داریم : $\begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$

سوال مشابه قسمت الف

۸-۱ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\operatorname{Ln} n)^p}$ (امیرکبیر ۸۵)

اگر $p > 1$ همگرای مطلق است و اگر $p \le 1$ همگرای مشروط است. Ans

۸-۲ $\sum_{n=2} \frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^{\frac{3}{2}}}$ (امیر کبیر ۸۹ و ۸۶)

همگراست Ans

۸-۳ $\sum_{n=2} \frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^{3}}$ (علم و صنعت ۸۶- قزوین ۸۶-شاهرود۸۷)

همگراست Ans

سوال مشابه قسمت ب

۸-۴ $\sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt{n}\operatorname{Ln} n}$ (برادلی)

واگرا است Ans

سوال مشابه قسمت ج

۸-۵ $\sum_{n=3} \frac{1}{n.\operatorname{Ln} n\sqrt{\ln(\ln n)}}$ (اراک ۸۹)

واگرا است Ans

۹- سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سه سری همگرا هستند و $a_n, b_n, c_n > 0$ ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}}$ همگراست.

(امیرکبیر ۸۸)

حل

$$(a_n + b_n + c_n)^3 = a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 + \ldots + 6a_n b_n c_n \xrightarrow{a_n, b_n, c_n > 0} (a_n + b_n + c_n)^3 > 6a_n b_n c_n$$

$$\rightarrow a_n + b_n + c_n > \sqrt[3]{6a_n b_n c_n}$$

با توجه به فرضیات اگر سه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگرا باشند بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n + c_n$ همگراست و با توجه به آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ نیز همگراست.

سوالات سری توانی

۱۰- فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$ (خواجه نصیر ۸۴)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n-1}}$ (علم و صنعت ۸۶)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ (دمیدوویچ)

د) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x^2)^n}$ (مارون)

حل

الف) $a_n=\frac{(x-1)^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-1)^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}.|x-1|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x-1|=0<1$$

درنتیجه به ازای همه مقادیر x، سری فوق همگراست یعنی فاصله همگرایی‌اش $(-\infty,\infty)$ و شعاع همگرایی آن نیز نامتناهی است. ■

ب) آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)10^n}}{\frac{x^n}{n10^{n-1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n10^{n-1}}{(n+1)10^n}\right||x|=\frac{1}{10}|x|$

شرط همگرایی: $\frac{1}{10}|x|<1\to|x|<10\to-10<x<10$

بررسی نقاط مرزی:

$$\text{if}\quad x=10\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n10^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}\to \text{واگراست}$$

$$\text{if}\quad x=-10\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n10^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\frac{10}{n}\xrightarrow{\text{طبق آزمون تناوب}}\text{همگراست}$$

$R=10$ شعاع همگرایی و $[-10,10)$: فاصله همگرایی ■

$$ج)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{x^n}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.|x| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.\frac{|x|}{n+1}$$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = e^{-1}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{|x|}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}|x|}{n+1} = 0 < 1 \to$$ بازای هر x، این سری همگراست

در نتیجه فاصله همگرایی $(-\infty,\infty)$ و شعاع همگرایی $R=\infty$

■

$$د)\ \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{n(1+x^2)^n}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}}\right| = \frac{1}{1+x^2}$$

شرط همگرایی: $\frac{1}{1+x^2} < 1 \to 1+x^2 > 1 \to x^2 > 0 \to x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$\text{if } x=0 \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to$ واگراست

لذا فاصله همگرایی $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $R=\infty$

سوال مشابه قسمت ب

۱۰-۱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n}$ (تهران جنوب ۸۷ - علوم تحقیقات ۸۸) Ans $-3 \le x < 3$, $R=3$

۱۰-۲ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$ (علم و صنعت ۸۷) Ans $0 < x \le 2$, $R=1$

۱۰-۳ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}$ (علم وصنعت ۹۰ - تهران جنوب ۸۴) Ans $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $R=\frac{1}{2}$

۱۰-۴ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$ (تهران شمال ۸۳) Ans $-2 \le x < 2$, $R=2$

۱۱- شعاع و فاصله همگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} ۲^{\sqrt{n}} (x-۱)^n$ (پرادلی)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۵^n . x^n}{۲^n \sqrt{n}}$ (تهران جنوب ۸۸)

حل

الف) آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{۲^{\sqrt{n+۱}} (x-۱)^{n+۱}}{۲^{\sqrt{n}} (x-۱)^n}\right| = |x-۱| \lim_{n\to\infty} ۲^{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}$

$= |x-۱| \lim_{n\to\infty} ۲^{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\times\left(\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\right)} = |x-۱| \lim_{n\to\infty} ۲^{\frac{n+۱-n}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}} = |x-۱| \lim_{n\to\infty} ۲^{\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}}$

$= |x-۱| \times ۲^{۰} = |x-۱| < ۱ \rightarrow ۰ < x < ۲$

بررسی نقاط مرزی:

$x = ۰ \rightarrow \sum_{n=۱} ۲^{\sqrt{n}} (-۱)^n \qquad \lim_{n\to\infty} ۲^{\sqrt{n}} (-۱)^n \neq ۰ \rightarrow$ واگراست

$x = ۲ \rightarrow \sum_{n=۱} ۲^{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} ۲^{\sqrt{n}} \neq ۰ \rightarrow$ واگراست

بازه همگرایی $(۰,۲)$ است و شعاع همگرایی $R = ۱$.

■

ب) $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{۵^{n+۱}.x^{n+۱}}{۲^{n+۱}.\sqrt{n+۱}}}{\frac{۵^n.x^n}{۲^n.\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{۲^n.\sqrt{n}.۵^{n+۱}.x^{n+۱}}{۲^{n+۱}.\sqrt{n+۱}.۵^n.x^n}\right| = \frac{۵}{۲}|x|$

شرط همگرایی: $L < ۱ \rightarrow \frac{۵}{۲}|x| < ۱ \rightarrow |x| < \frac{۲}{۵} \rightarrow -\frac{۲}{۵} < x < \frac{۲}{۵}$

حال به بررسی نقاط مرزی می‌پردازیم:

$x = \frac{۲}{۵} \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n.۵^n.(\frac{۲}{۵})^n}{۲^n.\sqrt{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$

چون $a_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}} = ۰$ درنتیجه طبق آزمون تناوب این سری همگراست.

$x = -\frac{۲}{۵} \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n.۵^n.(\frac{-۲}{۵})^n}{۲^n\sqrt{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}} \rightarrow$ طبق سری p، این سری واگراست.

پس فاصله همگرایی برابر است با: $(\frac{-۲}{۵},\frac{۲}{۵}]$ و در نتیجه $R = \frac{۲}{۵}$

۱۲- فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\,n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

الف) شعاع همگرایی این سری توانی. ب) نشان دهید $f'(x)=1+2xf(x)$

ج) حاصل $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}f(x))$ د) $f(x)$ را برحسب انتگرال بیان کنید (آدامز)

حل

الف) $$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+2}(n+1)!x^{2n+3}}{(2n+3)!}\times\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!x^{2n+1}}\right|$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$$

سری $f(x)$ برای جمیع مقادیر x همگراست و شعاع همگرایی اش بینهایت.

■

ب) $$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}.n!}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}.n!}{(2n)!}x^{2n}\to f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}x^{2n}\quad(*)$$

از طرفی هم داریم:

$$1+2xf(x)=1+\sum_{n=0}\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}\frac{2^{2n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}\frac{2^{-1}\times 2^{2n}.(n-1)!}{(2n-1)!}\times\frac{2n}{2n}x^{2n}=1+\sum_{n=1}\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}x^{2n}\quad(**)$$

از روابط $(*)$ و $(**)$ می توان نتیجه گرفت:

$$f'(x)=1+2xf(x)$$

■

ج) $$(e^{-x^2}f(x))'=-2xe^{-x^2}f(x)+f'(x)e^{-x^2}=e^{-x^2}(-2xf(x)+f'(x))$$

$$\xrightarrow{f'(x)=1+2xf(x)}\quad e^{-x^2}\big(-2xf(x)+1+2xf(x)\big)=e^{-x^2}$$

■

د) چون $f(0)=0$ و براساس قسمت ج می توان نوشت:

$$e^{-x^2}f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}f(t)\right)dt\xrightarrow{\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}f(t)\right)=e^{-t^2}}$$

$$e^{-x^2}f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\to f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

۱۳- بازه همگرایی و شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1} \frac{n!}{n^n}(x-1)^n$ را بیابید. (تهران جنوب ۸۵ - دمیدوویچ)

حل

طبق آزمون ریشه کوشی می توان نوشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n!}{n^n}(n-1)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}|x-1|=\frac{1}{e}|x-1|$$

شرط همگرایی : $L<1\to\frac{1}{e}|x-1|<1\to 1-e<x<1+e$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=1+e\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}.e^n\xrightarrow{n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}.e^n}{n^n}=\infty\neq 0\to \text{واگراست}$$

$$x=1-e\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(-1)^n.e^n}{n^n}\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n!e^n}{n^n}\neq 0\to \text{واگراست}$$

در نتیجه بازه همگرایی وشعاع همگرایی به ترتیب برابر است با: $(1-e,1+e)$, $R=e$

سوال مشابه

۱۳-۱ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$ (امیر کبیر ۸۸) ANS $x\in(-e,e), R=e$

۱۳-۲ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!.e^n}x^n$ (تهران ۸۴) ANS $x\in(-1,1), R=1$

۱۳-۳ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n.n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}x^n$ (تهران ۸۶) ANS $x\in[-\frac{e}{3},\frac{e}{3}), R=\frac{e}{3}$

راهنمایی۳-۱۳: از آزمون ریشه کوشی یا نسبت استفاده شود و برای نقاط مرزی از آزمون های مقایسه حدی و آزمون لایب نیتز(تناوب) استفاده کنید.

۱۴- بازه همگرایی سری های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}(x-2)^n$ (امیر کبیر ۸۸)

ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+2)}{(n+2)^3}(x-2)^n$ (امیرکبیر ۸۵)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}\times\frac{n(\ln n)^2}{(x-2)^n}\right|=|x-2|<1\to 1<x<3$$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\operatorname{Ln} n)^2}$$

چون $a_n=\frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^2}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ درنتیجه طبق آزمون تناوب همگراست.

$$x=3 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\operatorname{Ln} n)^2}$$

تابع $f(x)=\frac{1}{x(\operatorname{Ln} x)^2}$ نزولیست ، پیوسته و مثبت ،پس می‌توان از آزمون انتگرال بهره گرفت:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\operatorname{Ln} x)^2}=-(\operatorname{Ln} x)^{-1}\Big|_2^{\infty}=\frac{1}{\operatorname{Ln} 2}\rightarrow \text{سری همگراست}$$

بنابراین بازه همگرایی برابر است با $[1,3]$ و $R=1$.

■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\operatorname{Ln}(n+3)}{(n+3)^3}(x-2)^{n+1}}{\frac{\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}.(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3.\operatorname{Ln}(n+3)}{n^3\operatorname{Ln}(n+2)}|x-2|=|x-2|$$

$$\text{شرط همگرایی}\xrightarrow{(L<1)}|x-2|<1\rightarrow -1<x-2<1\rightarrow 1<x<3$$

بررسی نقاط مرزی

$$*x=1\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}(-1)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}$$

از طرفی

$$\frac{\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}\le\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست بنابراین طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}$ همگراست.

$$*x=3\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}$$

این هم دقیقاً مثل قبلی است. و می‌دانیم که اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ حتماً همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{Ln}(n+2)}{(n+2)^3}$ نیز همگراست

در مجموع بازه همگرایی $1\le x\le 3$ و شعاع همگرایی $R=1$.

سوال مشابه قسمت الف

۱۴-۱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n Ln(n)}{2+\sqrt{n}}$ (علم و صنعت ۸۸) Ans $-1\le x<1$, $R=1$

۱۴-۲ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n Ln n}$ (تهران مرکزی ۸۹ و ۸۳ -کرج ۸۴) Ans $0\le x<2$, $R=1$

سوال مشابه برای قسمت ب

۱۴-۳ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{Ln(1+n)}{n}(x-5)^n$ (تهران مرکزی ۸۶) Ans $(4,6]$, $R=1$

۱۵- فاصله و شعاع همگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n(3n-2)}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ (دمیدوویچ)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^{2n}}$ (تهران جنوب ۸۸)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n e^{-\sqrt{n}}$ (تهران جنوب ۸۹)

د) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{n^2}(Log_2^x)^n$ (تهران جنوب ۸۹)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}.(3n+1)}{(n+2)^2.2^{n+2}}}{\frac{(x-3)^n.(3n-2)}{(n+1)^2.2^{n+1}}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}.(3n+1).(n+1)^2.2^{n+1}}{(x-3)^n.(3n-2)(n+2)^2.2^{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{2}.\frac{3n.n^2}{3n.n^2}=\frac{|x-3|}{2}$$

شرط همگرایی: $\frac{|x-3|}{2}<1\rightarrow|x-3|<2\rightarrow-2<x-3<2\rightarrow1<x<5$

حال نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم

$$*x=1\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n.(3n-2)}{(n+1)^2.2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n-2)}{2(n+1)^2}$$

چون دنباله $a_n=\frac{3n-2}{2(n+1)^2}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ پس طبق آزمون تناوب این سری همگراست.

$$*x=5\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n.(3n-2)}{(n+1)^2.2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n-2}{2(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n-2}{2(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n-2)}{2(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}\neq0 \text{ یا } \infty$$

طبق آزمون مقایسه حدی چون $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n-2}{2(n+1)^2}$ نیز واگرا است.

در مجموع داریم: فاصله همگرایی $(1,5]$ و $R=2$

■

ب) $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^{2n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}|x-1|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}.\frac{1}{(n+1)^2}|x-1|=|x-1|\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}.\left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$=|x-1|\lim_{n\to\infty}e^{-2}\times\frac{1}{(n+1)^2}=0<1$$

بازه همگرایی کل اعداد حقیقی است و شعاع آن بینهایت است

■

ج) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}e^{-\sqrt{n+1}}}{x^n.e^{-\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|.e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}|x|.e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$

$$\lim_{n\to\infty}|x|e^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=|x|e^{0}=|x|$$

شرط همگرایی: $|x|<1\to -1<x<1$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=1\to\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}\overset{\text{با ۴ بار Hop گرفتن}}{=}0$$

می دانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است ،بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی ،سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ نیز همگرا است.

$$x=-1\to\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$$

دنباله $a_n=e^{-\sqrt{n}}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}e^{-\sqrt{n}}=0$ ، طبق آزمون تناوب، سری همگرا است.

در نتیجه فاصله همگرایی $[-1,1]$ و $R=1$.

■

د) $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}\cdot(\log_2^x)^{n+1}}{(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^2}\cdot(\log_2^x)^n}\right| = |\log_2^x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2(n+2)}{(n+1)^3}\right|$

$= |\log_2^x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2.n}{n^3} = |\log_2^x|$

شرط همگرایی: $L<1 \to |\log_2 x|<1 \to -1<\log_2 x<1 \to \frac{1}{2}<x<2$

بررسی نقاط مرزی:

$x=2 \to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{n^2}$

دنباله $a_n=\frac{n+1}{n^2}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$ بنابراین طبق آزمون تناوب، این سری همگراست.

$x=\frac{1}{2} \to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.(\frac{n+1}{n^2})(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

از طرفی $\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n^2}$ لذا بنابه آزمون مقایسه این سری واگراست.

درمجموع داریم: بازه همگرایی $(\frac{1}{2},2]$ ، $R=\frac{3}{4}$.

سوال مشابه قسمت الف

۱-۱۵ فاصله و شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{(3n-1).2^n}$ را بدست آورید. (تهران جنوب ۸۴، ۸۶، ۸۸)

Ans $-1<x<3 \quad , \quad R=2$

۱۶- بازه و شعاع همگرایی، سری‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{n})^n x^n$ (تهران مرکزی ۸۸)

ب) $\sum_{n=1}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n$ (خواجه نصیر ۸۴- دمیدوویچ)

حل

الف) $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+\frac{2}{n+1})^{n+1}x^{n+1}}{(1+\frac{2}{n})^n.x^n}\right| = \frac{e^2}{e^2}|x| = |x|$

شرط همگرایی: $L<1 \to |x|<1 \to -1<x<1$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=1 \rightarrow \sum_{n=1}(1+\frac{2}{n})^n$$

واگراست $\leftarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n = e^2 \neq 0$

$$x=-1 \rightarrow \sum_{n=1}(-1)^n(1+\frac{2}{n})^n$$

چون $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(1+\frac{2}{n})^n \neq 0$ پس واگراست.

بنابراین فاصله همگرایی $(-1,1)$ است و شعاع همگرایی $R=1$

■

ب) $a_n=(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n$

(آزمون کوشی) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n|}=\lim_{n\to\infty}|x-1|(1+\frac{1}{n})^n=e|x-1|$

شرط همگرایی: $e|x-1|<1 \rightarrow |x-1|<\frac{1}{e} \rightarrow 1-\frac{1}{e}<x<1+\frac{1}{e}$

بحث روی نقاط مرزی:

$$*x=1-\frac{1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}.(1-\frac{1}{e}-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}.\frac{(-1)^n}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^n}{e^n}$$

می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ پس داریم:

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n e^n}{e^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0 \rightarrow$ واگراست

$$*x=1+\frac{1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}.(1+\frac{1}{e}-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}=1\neq 0 \rightarrow$ واگراست

فاصله همگرایی: $(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e})$ و شعاع همگرایی $R=\frac{1}{e}$

۱۷- فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{3^n(n^2+1)}$ (امیر کبیر ۸۸)   ب) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{\mathrm{Ln}(n)}(-x^2)^n \quad , \quad a>b>0$ (تهران ۸۳)

حل

الف) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{3^n(n^2+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x+\frac{5}{2})^n}{3^n(n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}(x+\frac{5}{2})^{n+1}}{3^{n+1}\left((n+1)^2+1\right)}}{\dfrac{2^n(x+\frac{5}{2})^n}{3^n(n^2+1)}}\right|=\frac{2}{3}\left|x+\frac{5}{2}\right|$$

شرط همگرایی: $\frac{2}{3}\left|x+\frac{5}{2}\right|<1\to\left|x+\frac{5}{2}\right|<\frac{3}{2}\to -4<x<-1$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=-1\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(\frac{3}{2})^n}{3^n(n^2+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$ و $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=1\neq 0$$ یا ∞

می دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است،بنابه آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ نیز همگرامی باشد.

$$x=-4\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-\frac{3}{2})^n}{3^n(n^2+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

دنباله $a_n=\frac{1}{n^2+1}$ نزولیست و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ پس بنا به آزمون تناوب سری فوق همگراست.

نتیجه شد که فاصله همگرایی: $[-4,-1]$ و شعاع آن $R=\frac{3}{2}$. ■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{\mathrm{Ln}(n+1)}(-x^2)^{n+1}}{\dfrac{a^n+b^n}{\mathrm{Ln}(n)}.(-x^2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}(n)}{\mathrm{Ln}(n+1)}\times\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}.x^2$$

$$\xrightarrow{a>b}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}.x^2=ax^2$$

$ax^2 < 1 \to x^2 < \frac{1}{a} \to \frac{-1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ شرط همگرایی

بررسی نقاط مرزی:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}} \to \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{Ln(n)}(\frac{-1}{a})^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{a^n Ln(n)}(-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(\frac{b}{a})^n}{Ln(n)}(-1)^n$$

چون دنباله $a_n = \frac{1+(\frac{b}{a})^n}{Ln\,n}$ نزولی است و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ لذا طبق آزمون تناوب سری فوق همگراست.

بنابراین فاصله همگرایی $\left[\frac{-1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ وشعاع همگرایی $R = \frac{1}{\sqrt{a}}$

سوال مشابه قسمت الف ۱۷-۱ شعاع و فاصله همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+1)^n}{n^2+1}$ را بیابید. (تهران مرکزی ۸۸)

Ans $[-2,0]$, $R=1$

سوال مشابه قسمت ب ۱۷-۲ شعاع همگرایی و فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ را بدست آورید. $(b>a>0)$ (تهران مرکزی ۸۴)

Ans $(-b,b)$, $R=b$

۱۸- شعاع و فاصله همگرایی سری‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n.\sin(\frac{x}{3^n})$ (دمیدوویچ)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{2^n-1}$ (ماروِن)

ج) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sinh(2n))x^n$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\sin(\frac{x}{3^{n+1}})}{2^n\sin(\frac{x}{3^n})}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\frac{|x|}{3^{n+1}}}{2^n\frac{|x|}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$$

درنتیجه به ازای هر x، این سری همگراست.یعنی فاصله همگرایی $(-\infty,\infty)$ و شعاع آن $R=\infty$ ∎

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2} nx}{2^{n}-1}$ $\qquad \left|\frac{\sin^{2} nx}{2^{n}-1}\right| \le \frac{1}{2^{n}-1} \le \frac{1}{2^{n}}$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}-1}$ همگراست.

و چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}-1}$ همگراست بنا به آزمون وایرشتراس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2} nx}{2^{n}-1}$ بازای هر x همگرای مطلق است. ■

ج) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sinh(2n+2)x^{n+1}}{\sinh(2n)x^{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{2n+2}-e^{-(2n+2)}}{2}}{\frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n+2}}{e^{2n}}|x|$$

$$L = e^{2}|x| < 1 \to |x| < \frac{1}{e^{2}} \to \frac{-1}{e^{2}} < x < \frac{1}{e^{2}}$$

حال نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم:

$$*x = \frac{1}{e^{2}} \to \sum_{n=0}^{\infty}\sinh 2n.\frac{1}{e^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2e^{2n}}$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2e^{2n}} = \frac{1}{2} \neq 0$ ← سری واگرا است.

$$*x = \frac{-1}{e^{2}} \to \sum_{n=0}^{\infty}\sinh 2n.\left(\frac{-1}{e^{2}}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2e^{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n}.\frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2e^{2n}} \neq 0 \to$ واگراست

در کل داریم: فاصله همگرایی $\left(\frac{-1}{e^{2}},\frac{1}{e^{2}}\right)$ و شعاع همگرایی $\frac{1}{e^{2}}$.

۱۹- فاصله و شعاع همگرایی سری توانی زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1^{5}+2^{5}+\dots+n^{5})x^{n}$$ (علم و صنعت ۸۷)

حل

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1^{5}+2^{5}+\dots+n^{5}+(n+1)^{5})x^{n+1}}{(1^{5}+2^{5}+\dots+n^{5})x^{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1^{5}+2^{5}+\dots+n^{5}+(n+1)^{5}}{1^{5}+2^{5}+\dots+n^{5}}\right||x|$$

از طرفی می دانیم: $1^p + 2^p + \dots + n^p \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{p+1}}{p+1}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n^6}{6}+(n+1)^5}{\frac{n^6}{6}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{(n+1)^5}{\frac{n^6}{6}}\right||x| = |x|$$

$L<1 \to |x|<1 \to -1<x<1$: شرط همگرایی

حال نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم

$$x=1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(1^5+2^5+\dots+n^5)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1^5+2^5+\dots+n^5 = \infty \neq 0 \to$ واگراست

$$x=-1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(1^5+2^5+\dots+n^5)(-1)^n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(1^5+2^5+\dots+n^5) \neq 0 \to$ واگراست

فاصله همگرایی همان $(-1,1)$ است وشعاع همگرایی $R=1$.

۲۰- فاصله و شعاع همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+c^n)x^n$, $(c\in\mathbb{R})$ را بدست آورید. (علم و صنعت ۸۴)

حل

در ۳ حالت بررسی می‌کنیم: $0\le|c|<1$, $|c|>1$, $|c|=1$

۱) $0\le|c|<1$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1+c^{n+1})x^{n+1}}{(n+c^n)x^n}\right| \xrightarrow{0\le c<1 \Rightarrow c^n\to 0} \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$L<1 \to |x|<1 \to -1<x<1$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(n+c^n)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n+c^n)\neq 0$، درنتیجه سری واگراست

$$x=-1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(n+c^n)(-1)^n$$

بدلیل اینکه $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(n+c^n)\neq 0$، پس سری واگراست

$$۲)\ |c|>۱\to c^n>>n$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+۱+c^{n+۱})x^{n+۱}}{(n+c^n)x^n}\right| \xrightarrow{c^n>>n} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c^{n+۱}}{c^n}\right||x|=|c||x|$$

$$L<۱\to|c||x|<۱\to\frac{-۱}{|c|}<x<\frac{۱}{|c|}$$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=\frac{۱}{|c|}\to\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+c^n}{|c|^n}$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{n+c^n}{|c|^n}\neq ۰$، درنتیجه سری واگراست

$$x=\frac{-۱}{|c|}\to\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+c^n}{|c|^n}(-۱)^n$$

$\lim_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n+c^n}{|c|^n}\neq ۰$ درنتیجه سری فوق واگراست

$۳)\ |c|=۱\to$ (دقیقاً مشابه حالت ۱)

در مجموع می توان گفت:

$$\begin{cases}\text{if } ۰\le|c|\le۱\to \text{فاصله همگرایی: } (-۱,۱) \quad , \quad R=۱\\ \text{if } |c|>۱ \to \text{فاصله همگرایی: } (\frac{-۱}{|c|},\frac{۱}{|c|}) \quad , \quad R=\frac{۱}{|c|}\end{cases}$$

۲۱- شعاع و بازه همگرایی سری‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}(۲x+۱)^n$ **(تهران ۸۳- برادلی)**

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱\times۳\times۵\times...\times(۲n-۱)}{۲\times۴\times...\times۲n}\right)^۲(۱-x)^n$ **(تهران ۸۴)**

حل

$$\text{الف) }\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+۱)!)^۲}{(۲n+۲)!}}{\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}}\left|\frac{(۲x+۱)^{n+۱}}{(۲n+۱)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+۱)!)^۲}{(n!)^۲}\times\frac{(۲n)!}{(۲n+۲)!}|۲x+۱|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^۲}{۱}\cdot\frac{۱}{(۲n+۲)(۲n+۱)}|۲x+۱|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{۴n^۲}|۲x+۱|=\frac{۱}{۴}|۲x+۱|$$

$\frac{1}{4}|2x+1|<1 \rightarrow |2x+1|<4 \rightarrow -4<2x+1<4 \rightarrow \frac{-5}{2}<x<\frac{3}{2}$:شرط همگرایی

بررسی نقاط مرزی:

$$x=\frac{-5}{2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\frac{-n}{2n+1}=\frac{-1}{2}<1$$

طبق آزمون رابه، سری فوق واگرا است.

$$x=\frac{3}{2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4)^n$$

به طور مشابه، واگراست.

بنابراین مجموعاً فاصله همگرایی $\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ می‌باشد و شعاع آن ۲.

■

ب) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\times(2n+1)}{2\times4\times\ldots\times2n\times(2n+2)}\right)^2(1-x)^{n+1}}{\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\right)^2(1-x)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2|1-x|=|1-x|$$

$|1-x|<1 \rightarrow -1<1-x<1 \rightarrow -2<-x<0 \rightarrow 0<x<2$ شرط همگرایی

بررسی نقاط مرزی:

$$x=2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\right)^2$$

چون $a_n=\left(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\right)^2$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ پس طبق قضیه تناوب سری فوق همگراست.

$$x=0 \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\times\frac{2\times4\times\ldots\times2n}{2\times4\times\ldots\times2n}\right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n.\frac{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\right)^2}{\left(4^n\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2\right)^2}=\lim_{n\to\infty} n\frac{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}.4\pi n}{4^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(2\pi n)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi n^2}{4\pi^2 n^2}=\frac{1}{\pi}\neq 0 \text{ یا } \infty$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی، سری فوق واگرا است.

درنتیجه فاصله همگرایی $[0,2)$ و شعاع همگرایی $R=1$.

یادآوری: هم ارزی استرلینگ: $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

سوالات سری تیلور و مکلورن

۲۲- بسط تیلور تابع $f(x)=xe^{x}+10$ را حول $x=1$ بنویسید و سپس مقدار $f^{(200)}(1)$ را بیابید.

(تهران مرکزی ۸۵)

حل

$$g(x)=e^{x}\to g'(x)=g''(x)=\dots=g^{(n)}(x)=e^{x}$$

$$g(x)=g(1)+\frac{g'(1)}{1!}(x-1)+\frac{g''(1)}{2!}(x-1)^{2}+\dots$$

$$\to e^{x}=e+e(x-1)+e\frac{(x-1)^{2}}{2!}+\dots\to e^{x}=e\left(\sum_{n=0}\frac{(x-1)^{n}}{n!}\right)$$

$$\xrightarrow{\times x} xe^{x}=e\sum_{n=0}\frac{x(x-1)^{n}}{n!}\xrightarrow{+10} xe^{x}+10=e\left(\sum_{n=0}\frac{(x-1+1)(x-1)^{n}}{n!}\right)+10$$

$$xe^{x}+10=e\left[\sum_{n=0}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}\frac{(x-1)^{n}}{n!}\right]+10$$

چون در بسط تیلور، ضریب $(x-1)^{200}$، برابر $\frac{f^{(200)}(1)}{200!}$ است پس:

$$e\sum_{n=0}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}\xrightarrow{n=199}\frac{e}{199!}(x-1)^{200}$$

$$e\sum_{n=0}\frac{(x-1)^{n}}{n!}\xrightarrow{n=200}\frac{e}{200!}(x-1)^{200}$$

$$\xrightarrow{+}\left[\frac{e}{199!}+\frac{e}{200!}\right](x-1)^{200}=\frac{f^{(200)}(1)}{200!}(x-1)^{200}$$

$$\to\frac{200e+e}{200!}=\frac{f^{(200)}(1)}{200!}\to f^{(200)}(1)=201e$$

سوال مشابه

۱-۲۲ بسط مکلورن تابع $f(x)=e^{x}$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۸۶ و ۸۸)

Ans $e^{x}=\sum_{n=0}\frac{x^{n}}{n!}$

۲-۲۲ بسط مکلورن $f(x)=xe^{x}$ را بیابید. (قزوین ۸۷)

Ans $xe^{x}=\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n!}$

۳-۲۲ بسط مکلورن تابع $f(x)=x^{۲}e^{x+۱}$ را بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۸)

Ans $x^{۲}e^{x+۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲}(x+۱)^{n}}{n!}$

۴-۲۲ سری مکلورن تابع $f(x)=e^{\frac{x^{۲}}{۲}}$ را بنویسید و به کمک آن مقدار $f^{(۱۰)}(۰)$ را بدست آورید. (تهران مرکزی۸۸)

Ans $e^{\frac{x^{۲}}{۲}}=\sum_{n=۰}\frac{x^{۲n}}{۲^{n}n!}$ و $f^{(۱۰)}(۰)=۹۴۵$

۲۳- سری مکلورن $f(x)=\sqrt{۹+x}$ را بیابید و شعاع همگرایی آنرا بدست آورید. (برادلی)

حل

$$f(x)=(۹+x)^{\frac{۱}{۲}}=۳\left(۱+\frac{x}{۹}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۳\left(۱+\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۹}\right)+\frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-۱\right)}{۲!}\left(\frac{x}{۹}\right)^{۲}+\dots\right)$$

$$=۳\left(۱+\frac{۱}{۱۸}x-\frac{۱}{۶۴۸}x^{۲}+\dots\right)$$

برای فاصله همگرایی داریم:

$$\left|\frac{x}{۹}\right|<۱\rightarrow|x|<۹\rightarrow-۹<x<۹,\ \rightarrow R=۹$$

۲۴- نشان دهید که $a>۰\,,\,a\neq۱$ ، $a^{x}=\sum_{n=۰}\frac{(Lna)^{n}}{n!}x^{n}$. (برادلی)

حل

$$a^{x}=e^{Lna^{x}}=e^{x\,Lna}$$

از طرفی می‌دانیم که $e^{u}=\sum_{n=۰}\frac{u^{n}}{n!}$، درنتیجه:

$$\xrightarrow{u=x\,Lna}a^{x}=e^{x\,Lna}=\sum_{n=۰}\frac{(x\,Lna)^{n}}{n!}=\sum_{n=۰}\frac{(Lna)^{n}}{n!}x^{n}$$

سوال مشابه ۱-۲۴ مطلوبست محاسبه بسط مکلورن تابع $f(x)=۳^{x}$. (قزوین۸۸)

Ans $۳^{x}=\sum_{n=۰}\frac{(Ln۳)^{n}}{n!}x^{n}$

۲۵- الف) یک سری توانی برای تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ حول عدد صفر بدست می‌آورید. (بسط مکلورن تابع f را بنویسید.)

ب) مجموع روبرو را محاسبه کنید. $1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\dots$ (امیرکبیر۸۹)

حل

الف) $\left(\tan^{-1}x\right)'=\frac{1}{1+x^2}\to \tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$

از طرفی می‌دانیم، $\frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}(-1)^n u^n$ بنابراین:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}(-1)^n.\left(t^2\right)^n=\sum_{n=0}(-1)^n.t^{2n}$$

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}(-1)^n.t^{2n}dt\to \tan^{-1}t\Big|_0^x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{2n+1}.t^{2n+1}\Big|_0^x\to \tan^{-1}x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\to \tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

■

ب) $$S=1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\dots=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n.\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{2n+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.\sum_{n=0}\frac{(-1)^n.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{2n+1}=\sqrt{3}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

طبق قسمت الف: $\sum_{n=0}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ بنابراین:

$$S=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

سوال مشابه ۲۵-۱ الف) بسط مکلورن تابع arctanx را بدست آورید.

ب) به کمک (الف) بسط مکلورن $x\arctan x-\frac{1}{2}\text{Ln}\left(x^2+1\right)$ را محاسبه کنید. (تهران مرکزی ۸۶)

Ans الف) $\arctan x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ ب) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{30}-\dots=\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$

۲-۲۵ الف)سری مکلورن تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ را با استفاده از سری مکلورن تابع دوجمله ای بیابید.

ب)مقدار حد $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ را حساب کنید.

(تهران ۸۴)

Ans الف) $\tan^{-1}x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ ب) $e^{\frac{-1}{3}}$

۲۶- الف) بسط مکلورن $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ را بدست آورید.

ب) اگر $g(x)=(x^2+1)\sin(3x)$، مطلوبست $g^{(5)}(0)$.

(تهران شمال ۸۶)

حل

الف) می‌دانیم که $\sum_{n=0}(-1)^n u^n=\frac{1}{1+u}$ ، بنابراین:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}(-1)^n\left(x^2\right)^n=\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n}\xrightarrow{\times x^2}\frac{x^2}{1+x^2}=x^2.\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n+2}$$

■

ب) $f(x)=(x^2+1)\sin 3x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin 3x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\xrightarrow{\times(x^2+1)}(x^2+1)\sin 3x=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n\times 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}(x^2+1)$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

در بسط مکلورن ضریب x^5 همان $\frac{g^{(5)}(0)}{5!}$ است پس:

$$\begin{cases}\text{سری اول}: \xrightarrow{n=1}\frac{(-1)\times 3^3}{3!}=\frac{-9}{2}\\ \text{سری دوم}: \xrightarrow{n=2}\frac{(-1)^2\times 3^5}{5!}=\frac{3^5}{5!}\end{cases}\xrightarrow{\oplus}-\frac{9}{2}+\frac{3^5}{5!}=\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\to g^{(5)}(0)=-297$$

سوال مشابه ۲۶-۱ الف) بسط مکلورن تابع $f(x)=Ln\left(2x^2+3\right)$ را بدست آورید.

ب) اگر $f(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{-4x}$ مطلوبست $f^{(5)}(0)$.

(تهران شمال ۸۷)

Ans الف) $Ln(2x^2+3)=Ln3+\frac{2}{3}x^2+\dots$ ب) $f^{(5)}(0)=-4^5$

۲۶-۲ الف) بسط مکلورن تابع $f(x)=Ln(1+x^2)$ را بدست آورید.

ب) اگر $f(x)=(x^2+x).e^{-2x}$ مطلوبست محاسبه مشتق مرتبه ۶ ام تابع در نقطه $x=0$.

(تهران شمال ۸۶)

Ans الف) $\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ ب) $f^{(6)}(0)=288$

۲۷- الف) اگر $f(x)=\sin(\frac{x}{2}).e^{-2x}$ مطلوبست محاسبه $f^{(6)}(0)$.

ب) بسط تیلور تابع $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ را در نقطه $x_0=1$ بدست آورید. (علوم و تحقیقات ۸۸)

حل

الف) می‌دانیم که $e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\dots$ ، $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\dots$ ، درنتیجه:

$$e^{-2x}=1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+\dots\quad,\quad \sin(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}-\frac{(\frac{x}{2})^3}{3!}+\frac{(\frac{x}{2})^5}{5!}-\dots$$

با ضرب این دو تابع خواهیم داشت:

$$Sin(\frac{x}{2}).e^{-2x}=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^5}{32\times 5!}-\dots\right)\left(1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{15}+\dots\right)$$

از طرفی می‌دانیم که ضریب x^6 در بسط مکلورن برای $\frac{f^{(6)}(0)}{6!}$ است پس ضرایب x^6 را استخراج می‌کنیم.

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6=\frac{-2}{32\times 5!}x^6+\frac{4}{3\times 48}x^6-\frac{4}{15\times 2}x^6$$

$$\rightarrow\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\frac{-1}{16\times 5!}+\frac{1}{36}-\frac{2}{15}\rightarrow f^{(6)}(0)=\frac{-611}{8}$$

■

ب) $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۱}=۲+\dfrac{-۱}{x+۱}$

$x=۱\to x-۱=t \quad , \quad t\to ۰$

$$\to g(t)=۲+\frac{-۱}{۲+t}=۲-\frac{۱}{۲+t}=۲-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱+\frac{t}{۲}}$$

از طرفی می‌دانیم که $\dfrac{۱}{۱+u}=\sum_{n=۰}(-۱)^n u^n$ ، درنتیجه:

$$\frac{۱}{۱+\frac{t}{۲}}=\sum_{n=۰}(-۱)^n.\left(\frac{t}{۲}\right)^n$$

$$\to g(t)=۲-\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}(-۱)^n\left(\frac{t}{۲}\right)^n=\frac{۳}{۲}+\frac{t}{۴}-\frac{t^۲}{۸}+\dots \quad , \quad t=x-۱$$

۲۸- اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۲+x+x^۲}$، سری توانی (تیلور) آن را حول $x=\dfrac{-۱}{۲}$ بیابید و سپس $f^{(n)}(x_۰)$ را برای $n\in\mathbb{N}$ بیابید. (امیرکبیر ۸۸)

حل

$$f(x)=\frac{۱}{۲+x+x^۲}=\frac{۱}{\frac{۷}{۴}+\frac{۱}{۴}+x+x^۲}=\frac{۱}{\frac{۷}{۴}+\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\frac{۴}{۷}.\frac{۱}{۱+\frac{۴}{۷}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲}$$

از طرفی می‌دانیم برای $|u|<۱$، $\dfrac{۱}{۱+u}=\sum_{n=۰}(-۱)^n u^n$ پس:

$$f(x)=\frac{۴}{۷}.\frac{۱}{۱+\frac{۴}{۷}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\frac{۴}{۷}\sum_{n=۰}(-۱)^n\left(\frac{۴}{۷}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲\right)^n=\frac{۴}{۷}\sum_{n=۰}(-۱)^n\frac{۴^n}{۷^n}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲n}$$

$$\left|\frac{۴}{۷}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲\right|<۱\to\left|x+\frac{۱}{۲}\right|<\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

می‌دانیم اگر تابع $f(x)$ دارای سری تیلور $\sum_{n=۰}a_n(x-a)^n$ باشد آنگاه $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$، بنابراین:

$$f^{(n)}\left(\frac{-۱}{۲}\right)=\begin{cases}۰ & \text{فرد } n\\ (-۱)^{\frac{n}{۲}}.\left(\frac{۴}{۷}\right)^{\frac{n}{۲}+۱}.n! & \text{زوج } n\end{cases}$$

۲۹- چند جمله‌ای‌های سری مکلورن توابع $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ و $e^{\frac{x}{a}}$ را تا درجه مناسب بنویسید. سپس بزرگترین عدد طبیعی p را طوری بیابید که:

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = e^{\frac{x}{a}} + o\left(x^{p}\right)$$

(تهران ۸۳)

حل

$$e^{u} = ۱ + u + \frac{u^{۲}}{۲!} + \frac{u^{۳}}{۳!} + o\left(u^{۳}\right) \qquad (u \to ۰)$$

بنابراین:

$$e^{\frac{x}{a}} = ۱ + \frac{x}{a} + \frac{x^{۲}}{۲!a^{۲}} + \frac{x^{۳}}{۳!a^{۳}} + o\left(x^{۳}\right) \qquad (*)$$

طبق بسط دوجمله ای داریم:

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{۱ + \frac{۲x}{a-x}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x}{a-x}\right) - \frac{۱}{۸}\left(\frac{۲x}{a-x}\right)^{۲} + \frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۲x}{a-x}\right)^{۳} + o\left(x^{۳}\right)$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{۱}{۱-u} = ۱ + u + u^{۲} + u^{۳} + \dots$.

$$\frac{۲x}{a-x} = \frac{۲x}{a}.\frac{۱}{۱-\frac{x}{a}} = \frac{۲x}{a}\left(۱ + \frac{x}{a} + \frac{x^{۲}}{a^{۲}} + o\left(x^{۲}\right)\right) = \frac{۲x}{a} + \frac{۲x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{۲x^{۳}}{a^{۳}} + o\left(x^{۳}\right)$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{۱ + \frac{۲x}{a-x}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x}{a} + \frac{۲x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{۲x^{۳}}{a^{۳}}\right) - \frac{۱}{۸}\left(\frac{۲x}{a} + \frac{۲x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{۲x^{۳}}{a^{۳}}\right)^{۲} + \frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۲x}{a} + \frac{۲x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{۲x^{۳}}{a^{۳}}\right)^{۳} + o(x^{۳})$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = ۱ + \frac{x}{a} + \frac{x^{۲}}{۲a^{۲}} + \frac{x^{۳}}{۲a^{۳}} + o\left(x^{۳}\right) \qquad (**)$$

بنابراین $p = ۲$ است.

$$\xrightarrow{(*),(**)} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - e^{\frac{x}{a}} = \frac{x^{۳}}{۳a^{۳}} + o\left(x^{۳}\right) \rightarrow \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = e^{\frac{x}{a}} + o\left(x^{۲}\right)$$

۳۰- الف) فاصله همگرایی سری $\sum_{n=۱} \frac{x^{۲n+۲}}{n(۲n+۳)}$ را بدست آورید.

ب) تعیین کنید که در داخل فاصله همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است؟

ج) مقدار سری $\sum_{n=۱} \frac{۱}{n(۲n+۳)۴^{n}}$ را محاسبه کنید.

(شریف ۸۴)

حل

الف) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+5}}{(n+1)(2n+5)}\cdot\frac{n(2n+3)}{x^{2n+3}}\right|=x^2$$

شرط همگرایی: $x^2<1\to -1<x<1$

بررسی نقاط مرزی:

$$x=\pm1\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pm1}{n(2n+3)}\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pm1}{n(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pm n^2}{n(2n+3)}=\pm\frac{1}{2}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست لذا طبق آزمون مقایسه حدی، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pm1}{n(2n+3)}$ نیز همگراست.

بنابراین فاصله همگرایی $[-1,1]$ و شعاع همگرایی آن $R=1$ است.

■

ب) $$-\mathrm{Ln}(1-t)=\sum_{n=1}\frac{t^n}{n}\xrightarrow{\times t^{n+2}}-t^{n+2}\mathrm{Ln}(1-t)=\sum_{n=1}\frac{t^{2n+2}}{n}$$

$$\to-\int_0^x t^{n+2}\mathrm{Ln}(1-t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}\frac{t^{2n+2}}{n}dt\to-\int_0^x t^{n+2}\mathrm{Ln}(1-t)dt=\sum_{n=1}\frac{x^{2n+3}}{n(2n+3)}\quad(*)$$

جزء به جزء: $$\begin{cases}u=-\mathrm{Ln}(1-t)\to du=\dfrac{1}{1-t}dt\\ dv=t^{n+2}dt\to v=\dfrac{t^{n+3}}{n+3}\end{cases}\to I=\frac{-t^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-t)-\frac{1}{n+3}\int\frac{t^{n+3}}{1-t}dt$$

$$I=\frac{-t^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-t)+\frac{1}{n+3}\int t^{n+2}+t^{n+1}+\ldots+1+\frac{1}{t-1}dt$$

$$I=\frac{-t^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-t)+\frac{1}{n+3}\cdot\left(\frac{t^{n+3}}{n+3}+\frac{t^{n+2}}{n+2}+\ldots+t+\mathrm{Ln}|1-t|\right)\Bigg|_0^x$$

$$I=\frac{-x^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-x)+\frac{1}{n+3}\cdot\left(\frac{x^{n+3}}{n+3}+\frac{x^{n+2}}{n+2}+\ldots+x+\mathrm{Ln}|1-x|\right)\quad(**)$$

$$\xrightarrow[(**)]{(*)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n(2n+3)}=-\frac{x^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-x)+\frac{1}{n+3}\mathrm{Ln}|1-x|+\frac{1}{n+3}\underbrace{\left(\sum\frac{x^n}{n}\right)}_{-\mathrm{Ln}(1-x)}$$

در نتیجه می توان گفت:

$$\sum_{n=1}\frac{x^{2n+3}}{n(2n+3)}=\frac{-x^{n+3}}{n+3}\mathrm{Ln}(1-x)$$

■

$$ج)\ \sum_{n=1} \frac{x^{2n+2}}{n(2n+3)} = \frac{-x^{n+2}}{n+3}\operatorname{Ln}(1-x) \to x^{2}\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{n(2n+3)} = \frac{-x^{n+2}}{n+3}\operatorname{Ln}(1-x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\sum_{n=1} \frac{1}{n(2n+3)4^{n}} = \frac{-1}{(n+3)2^{n+2}}\operatorname{Ln}\frac{1}{2} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+3)4^{n}} = \frac{\operatorname{Ln}2}{2^{n}(n+3)}$$

۳۱- مقدار حد زیر را حساب کنید.

$$الف)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$ (تهران ۸۵)

$$ب)\ \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x}{\tanh^{-1}x}\right)^{\frac{2}{3}} - \cos(\tan x)}{x^{2}}$$ (تهران ۸۶)

$$ج)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Ln}(\cosh x) + \operatorname{Ln}(\cos x)}{\cos(\sin x) - \cos x}$$ (تهران ۸۴)

حل

الف) بنابه دوجمله ای نیوتن می دانیم که $(1+u)^{n} = 1 + nu + \dots$ ، بنابراین داریم:

$$\sqrt{1+x^{2}} = (1+x^{2})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^{2}$$

همچنین از طرفی می دانیم که $\ln(1+u) = u - \frac{u^{2}}{2} + \dots (u \to 0)$ ،درنتیجه:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^{2}}{2} \quad (*)$$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^{2}}) = \ln(x+1+\frac{1}{2}x^{2}) = \ln(1+\underbrace{x+\frac{1}{2}x^{2}}_{u}) = x + \frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^{2})^{2} + \dots$$

$$\to \ln(x+\sqrt{1+x^{2}}) = x - \frac{1}{2}x^{2} \quad (**)$$

حال به کمک روابط (*) و (**) می توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\frac{1}{2}x^{2}} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}x^{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}x^{2}}{x(1-\frac{1}{2}x^{2})(1-\frac{1}{2}x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x}{(1-\frac{1}{2}x^{2})(1-\frac{1}{2}x)} = \frac{-1}{2}$$

■

ب) می دانیم که $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ و همچنین براساس بسط مکلورن داریم:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad , \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$\left(\frac{x}{\tanh^{-1} x}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x}{x + \frac{x^3}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{x}{\tanh^{-1} x}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2} - 1\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + o\left(x^4\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right) \quad (*)$$

از طرفی نیز ، $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ ، $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ،بنابراین:

$$\cos(\tan x) = \cos\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^4$$

$$\cos(\tan x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4) \quad (**)$$

حال از روابط (*)و (**)می توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{\tanh^{-1} x}\right)^{\frac{3}{2}} - \cos(\tan x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2}$$

■

$$\text{ج)}\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \quad , \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

$$\text{Ln}\left(1+u\right) = u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

$$\mathrm{Ln}(\cos x)=\mathrm{Ln}\left(۱-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}\right)=-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}-\frac{۱}{۲}\left(-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}\right)^۲$$

$$=\frac{-x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}-\frac{x^۴}{۸}+o\left(x^۴\right)\to \mathrm{Ln}\cos x=\frac{-x^۲}{۲}-\frac{x^۴}{۱۲}+o\left(x^۴\right)\quad (*)$$

$$\mathrm{Ln}(\cosh x)=\mathrm{Ln}\left(۱+\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}\right)=\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}\right)^۲$$

$$=\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}-\frac{x^۴}{۸}+\ldots\to \mathrm{Ln}(\cosh x)=\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۴}{۱۲}+o\left(x^۴\right)\quad (**)$$

$$\sin x=x-\frac{x^۳}{۶}+o\left(x^۴\right)\to \cos(\sin x)=\cos\left(x-\frac{x^۳}{۶}+o\left(x^۴\right)\right)=۱-\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{x^۳}{۶}\right)^۲+\frac{۱}{۲۴}\left(x-\frac{x^۳}{۶}\right)^۴$$

$$\to \cos(\sin x)=۱-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۶}x^۴+\frac{۱}{۲۴}x^۴+o\left(x^۴\right)=۱-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۵}{۲۴}x^۴+o\left(x^۴\right)\quad (***)$$

با جایگذاری $(*)$ و $(**)$ و $(***)$ در حد مورد نظر داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۴}{۱۲}\right)+\left(-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۴}{۱۲}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۵}{۲۴}x^۴-\left(۱-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۲۴}\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^۴}{۶}}{\frac{x^۴}{۶}}=-۱$$

۳۲- الف) چندجمله ای مکلورن تابع $f(x)=\left(۱-x^۲\right)^{\frac{-۱}{۲}}$ را تا درجه پنجم حساب کنید.

ب) چند جمله ای مکلورن تابع Arcsinx را تا درجه ششم بدست آورید.

(تهران ۸۷)

ج) حد $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{\mathrm{Arc}\sin x}{\sinh x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}}$ را حساب کنید.

حل

الف) می دانیم $...+\ (۱+u)^n=۱+nu+\frac{n(n-۱)}{۲!}u^۲$ درنتیجه داریم :

$$f(x)=\left(۱-x^۲\right)^{\frac{-۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲}(-x^۲)+\frac{\frac{-۱}{۲}(\frac{-۱}{۲}-۱)}{۲!}(-x^۲)^۲+o(x^۵)=۱+\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۳}{۸}x^۴+o(x^۵)$$

■

ب) $$\int_۰^x\frac{dt}{\sqrt{۱-t^۲}}=\int_۰^x ۱+\frac{۱}{۲}t^۲+\frac{۳}{۸}t^۴+o(t^۵)dt\to \mathrm{Arcsinx}=x+\frac{x^۳}{۶}+\frac{۳x^۵}{۴۰}+o(x^۶)$$

■

ج) $A=\left(\dfrac{\text{Arcsin}x}{\sinh x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow \ln A=\dfrac{1}{x^4}\ln\left(\dfrac{\text{Arcsin}x}{\sinh x}\right) \rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\ln\left(\dfrac{\text{Arcsin}x}{\sinh x}\right)$ (*)

از طرفی می دانیم: $\sinh x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6)$ و $\text{Arcsin}x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}+o(x^6)$ پس:

$$\ln\left(\frac{\text{Arcsin}x}{\sinh x}\right)=\ln\left(\frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}}{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}\right)=\ln\left(\frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{8x^5}{120}}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}\right)=\ln\left(1+\frac{\frac{8x^5}{120}}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}\right)$$

همچنین می دانیم که $\text{Ln}(1+u)=u+o(u)$، درنتیجه:

$$\ln\left(1+\frac{\frac{x^5}{15}}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}\right)=\frac{\frac{x^5}{15}}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}=\frac{\frac{x^4}{15}}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln\left(\frac{\text{Arcsin}x}{\sinh x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\cdot\frac{\frac{x^4}{15}}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}}=\frac{1}{15}\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to 0}A=e^{\frac{1}{15}}$$

۳۳- نشان دهید که $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\dots$.

حل

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots}$$

می‌دانیم $u\in(-1,1)$ $\quad \dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+o(u^2)$، بنابراین:

$$\tan x=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{1-\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots\right)}=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)\left(1+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots\right)^2+\dots\right)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\dots\right)=x+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)x^3+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{2!3!}+\frac{5}{24}\right)x^5+\dots$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\dots$$

۳۴- سری مکلورن توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\cos x^2$ (برادلی) ب) $f(x)=\cos^2 x$ (برادلی)

ج) $f(x)=\cos^3 x$ (برادلی) د) $f(x)=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (برادلی)

حل

می‌دانیم که: $\cos u = 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\dots$

الف) $$\cos x^2 = 1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^2)^6}{6!}+\dots = 1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\dots$$

■

ب) $$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots\right)\right)$$

$$\rightarrow \cos^2 x = 1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2}{45}x^6+\dots$$

■

ج) می‌دانیم که: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ پس $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$$\cos 3x = 1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\dots \qquad , \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x = \frac{1}{4}\left(1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\dots\right)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)$$

$$\cos^3 x = 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{96}x^4+\dots$$

■

د) می‌دانیم که $\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$. در نتیجه:

$$f(x)=\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)$$

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\dots = 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4-\dots$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x) = \frac{1}{2}\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4-\dots\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)$$

$$f(x)=1-\frac{5}{4}x^2+\frac{17}{48}x^4-\dots$$

۳۵- سری $\sum_{n=0} \frac{(1-2x)^n}{n+2}$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصله همگرایی سری را تعیین کرده و سپس همگرایی و یا واگرایی سری را در دو انتهای فاصله بدست آمده تعیین کنید.

ب) نشان دهید به ازای هر x در فاصله بدست آمده در (الف)، مقدار سری برابر تابع

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x-1-\operatorname{Ln}(2x)}{(1-2x)^2} & x\neq \frac{1}{2} \\ 0 & x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

است.

ج) مشتق مرتبه ۱۳۸۷ تابع f در نقطه $x=\frac{1}{2}$ را بیابید. (امیر کبیر ۸۷)

حل

الف) $$\sum_{n=0} \frac{(1-2x)^n}{n+2} = \sum_{n=0} \frac{(-2)^n (x-\frac{1}{2})^n}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}.(x-\frac{1}{2})^{n+1}}{n+3}}{\frac{2^n (x-\frac{1}{2})^n}{n+2}}\right| = 2\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

شرط همگرایی $2\left|x-\frac{1}{2}\right|<1 \to \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \to \frac{-1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \to 0<x<1$

بررسی نقاط مرزی:

$x=0 \to \sum_{n=0} \frac{1}{n+2} \to$ واگراست

$x=1 \to \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n+2}$

چون دنباله $a_n=\frac{1}{n+2}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ بنابراین طبق آزمون تناوب این سری همگراست، درنتیجه بازه همگرایی برابر است با $(0,1]$.

■

ب) $\text{Ln}(1+x)=\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

$$\text{Ln}(2x)=\text{Ln}(1+(2x-1))=\sum_{n=1}(-1)^{n-1}.\frac{(2x-1)^n}{n}=(2x-1)-\frac{(2x-1)^2}{2}+\frac{(2x-1)^3}{3}-...$$

$$\text{Ln}(2x)=-\left[(1-2x)+\frac{(1-2x)^2}{2}+\frac{(1-2x)^3}{3}+...\right]$$

$$\rightarrow\frac{-\text{Ln}(2x)}{(1-2x)^2}=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{2}+\frac{(1-2x)}{3}+...$$

$$\frac{-1}{1-2x}-\frac{\text{Ln}\,2x}{(1-2x)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1-2x}{3}+...\rightarrow\frac{-1}{1-2x}-\frac{\text{Ln}\,2x}{(1-2x)^2}=\sum_{n=0}\frac{(1-2x)^n}{n+2}$$

درنتیجه اگر $x\neq\frac{1}{2}$ باشد،داریم:

$$f(x)=\frac{-1}{1-2x}+\frac{-\ln(2x)}{(1-2x)^2}\rightarrow f(x)=\frac{2x-1-\ln(2x)}{(1-2x)^2}$$

اگر $x=\frac{1}{2}$ باشد،آنگاه:

$$f(\tfrac{1}{2})=\sum_{n=0}\frac{(1-2\times\frac{1}{2})^n}{n+2}\rightarrow f(\tfrac{1}{2})=0$$

∎

ج) با توجه به قسمت ب داریم:

$$f(x)=\sum_{n=0}\frac{(1-2x)^n}{n+2}=\sum_{n=0}\frac{(-2)^n}{n+2}(x-\tfrac{1}{2})^n$$

می دانیم در بسط تیلور ضریب جمله n ام برابر $a_n=\dfrac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!}$ ، پس: $a_{1387}=\dfrac{f^{(1387)}(\frac{1}{2})}{1387!}$.

$a_n=\dfrac{(-2)^n}{n+2}$ درنتیجه $a_{1387}=\dfrac{(-2)^{1387}}{1389}$ ،حال داریم:

$$f^{(1387)}(\tfrac{1}{2})=\frac{-2^{1387}\times 1387!}{1389}$$

۳۶- الف) بسط مکلورن (یا سری توانی) تابع $f(x)=\cosh x$ را بنویسید.

ب) نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+(-1)^n\right)}{2^{n+1}n!}$ همگرا بوده و مقدار همگرایی را محاسبه کنید.

ج) حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{1}{2}}\cosh(x^2)dx$ را به صورت یک سری بنویسید. (امیر کبیر ۸۵)

حل

الف) $f(x)=\cosh x \to f'(x)=\sinh x \to f''(x)=\cosh x \to \dots$

می دانیم: $\sinh(0)=0 \quad , \quad \cosh(0)=1$:

$$\cosh x = 1+\frac{x}{1!}(0)+\frac{x^2}{2!}(1)+\frac{x^3}{3!}(0)+\frac{x^4}{4!}(1)+\dots \to \cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

■

ب) n : فرد $\to (-1)^n=-1 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}.n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-1}{2^{n+1}n!}=0 \to$ همگرا

n : زوج $\to (-1)^n=1 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{2n}}{2^{2n+1}(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2^{2n+1}(2n)!}\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}.(2n)!}{2^{2n+2}.(2n+2)!}=0<1\to \text{همگرا}$$

همگرا + همگرا می شود همگرا.

جمع جملات فرد، صفر شد، پس برای بدست آوردن مقدار سری کافیست مجموع جملات زوج را بیابیم و این سری با توجه به قسمت الف برابر $\cosh(\frac{1}{2})$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}.(2n)!}=\cosh(\frac{1}{2})$$

■

ج) بنا به قسمت الف داریم

$$\cosh x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\cosh x^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(2n)!}dx=\sum_{n=0}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{4n+1}.(4n+1)(2n)!}$$

سوال مشابه ۳۶-۱ الف) بسط مکلورن تابع $f(x)=\sinh x$ را بیابید.

ب) مقدار $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots$ را بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۸)

Ans الف) $\sum_{n=0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ب) $\sinh(1)$

۳۷- مطلوبست بدست آوردن سری مکلورن و شعاع همگرایی آن برای تابع زیر:

الف) $f(x)=\frac{x^2}{(x+2)(x^2-1)}$ (برادلی) ب) $f(x)=Ln(\frac{1+2x}{1-3x+2x^2})$ (برادلی)

ج) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$ (برادلی)

حل

الف) $f(x)=\frac{x^2}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{x^2}{(x+2)(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

$\to x^2=A(x-1)(x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)(x-1)$

$\to A=\frac{4}{3},B=\frac{1}{6},C=\frac{-1}{2}\qquad \to f(x)=\frac{4}{3}.\frac{1}{x+2}+\frac{1}{6}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}\quad (*)$

از طرفی می دانیم $\sum_{k=0}u^k=\frac{1}{1-u}\ ,\ |u|<1$:

$\frac{4}{3}\times\frac{1}{2+x}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\xrightarrow{u=\frac{-x}{2}}\frac{2}{3}\sum_{k=0}(-1)^k(\frac{x}{2})^k\quad ,\ |\frac{x}{2}|<1\to|x|<2\to x\in(-2,2)$

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{6}(\frac{1}{1-x})=\frac{-1}{6}\sum_{k=0}x^k\quad ,\ x\in(-1,1)$

$\frac{-1}{2}\times\frac{1}{1+x}\xrightarrow{u=-x}\frac{-1}{2}\sum_{k=0}(-1)^kx^k\quad ,\ x\in(-1,1)$

$\xrightarrow{(*)}f(x)=\underbrace{\frac{2}{3}\sum_{k=0}(-1)^k(\frac{x}{2})^k}_{(-2,2)}\underbrace{-\frac{1}{6}\sum_{k=0}x^k}_{(-1,1)}\underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}(-1)^kx^k}_{(-1,1)}$

$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}\frac{2}{3}(-1)^k(\frac{x}{2})^k-\frac{1}{6}x^k-\frac{1}{2}(-1)^kx^k}_{(-1,1)}$

■

ب) $f(x)=Ln\left(\dfrac{1+2x}{1-3x+2x^2}\right)=Ln\left(\dfrac{1+2x}{(1-x)(1-2x)}\right)=Ln(1+2x)-Ln(1-x)-Ln(1-2x)$

از طرفی می‌دانیم که: $Ln(1-u)=-\sum_{k=1}\dfrac{u^k}{k}$.

$$u=-2x \to Ln(1+2x)=-\sum_{k=1}\frac{(-2x)^k}{k}=-\sum_{k=1}\frac{(-1)^k(2x)^k}{k}$$

$$|2x|<1 \to |x|<\frac{1}{2} \to x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$u=x \to Ln(1-x)=-\sum_{k=1}\frac{x^k}{k} \quad \text{و} \quad x\in(-1,1)$$

$$u=2x \to Ln(1-2x)=-\sum_{k=1}\frac{(2x)^k}{k} \quad \text{و} \quad x\in\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x)=-\sum_{k=1}\frac{(-1)^k(2x)^k}{k}+\sum_{k=1}\frac{x^k}{k}+\sum_{k=1}\frac{(2x)^k}{k}=\sum_{k=1}\left(\frac{(-1)^{k+1}(2x)^k+x^k+(2x)^k}{k}\right)$$

$$f(x)=5x+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\dots \quad ,x\in(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$$

ج) روش اول:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}x^k \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}kx^{k-1}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}k(k-1)x^{k-2} \to \frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}k(k-1)x^{k-2}$$

$$\to \frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+\dots$$

روش دوم: استفاده از دو جمله‌ای نیوتن

۳۸- مطلوبست محاسبه حدود زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{Sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{Sin(Sinx)-x.\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}\right)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$ (تهران ۸۸)

حل

الف) $\sin^{-1}x=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}dt=\int_0^x (1+(-\frac{1}{2})(-t^2)+o(t^2))dt$

$$=\int_0^x (1+\frac{t^2}{2}+o(t^2))dt \rightarrow \sin^{-1}x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\xrightarrow{\div x}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$

بنابراین:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}Ln(\frac{\sin^{-1}x}{x})}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}Ln(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))}$$

می‌دانیم: $Ln(1+x)=x+o(x)$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}(\frac{x^2}{6}+o(x^2))}=e^{\frac{1}{6}}$$

■

ب) می دانیم که:

$$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+o(u^5)\qquad (u\to 0)$$

$$(1+u)^n=1+nu+\frac{n(n-1)}{2}u^2+o(u^2)\qquad (u\to 0)$$

بنابراین:

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+\frac{\sin^5 x}{5!}+o(x^5)\qquad (x\to 0)$$

$$\sin^3 x=(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))^3=x^3-\frac{x^5}{2}+o(x^5)\qquad ,\sin^5 x=x^5+o(x^5)$$

$$\rightarrow \sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3-\frac{x^5}{2}}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)\quad (*)$$

$$\sqrt[3]{1-x^2}=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\rightarrow x.\sqrt[3]{1-x^2}=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5)\quad (**)$$

حال براساس عبارات (*) و (**) می توانیم بنویسیم:

$$\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{19}{90}x^5+o(x^5)\qquad (x\to 0)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\frac{19}{90}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{19}{90}$$

■

ج) $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}=e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}$

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}\to L=\lim_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(f(x))}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}}$$

$$L=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$

از طرفی می‌دانیم $(x\to 0)$ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$، در نتیجه داریم:

$$L=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

۳۹- به ازای چه مقادیری از P انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{\ln\cosh x}{x^P}dx$ همگراست؟ (تهران ۸۴)

$$\int_0^\infty \frac{\ln\cosh x}{x^p}dx=\overbrace{\int_0^1 \frac{\ln\cosh x}{x^p}dx}^{I_1}+\overbrace{\int_1^\infty \frac{\ln\cosh x}{x^p}dx}^{I_2}$$

بررسی I_1: به کمک بسط مکلورن می دانیم: $\mathrm{Ln}(1+x)=x$, $\cosh x=1+\frac{x^2}{2}$

$$\to \ln\cosh x=\mathrm{Ln}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\quad\to\frac{\mathrm{Ln}\cosh x}{x^P}\sim\frac{x^2}{2x^P}=\frac{1}{2x^{P-2}}$$

$\int_0^1\frac{dx}{2x^{P-2}}$ برای $P-2<1$ همگراست پس I_1 نیز برای $P<3$ همگراست.

بررسی I_2:

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\xrightarrow{x\to\infty}\cosh x=\frac{e^x}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\cosh x=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\mathrm{Ln}e^x-\mathrm{Ln}2=x-\mathrm{Ln}2=x\to\frac{\mathrm{Ln}\cosh x}{x^P}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{x}{x^P}=\frac{1}{x^{P-1}}$$

چون انتگرال $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{P-1}}$ برای $P-1>1$ همگراست درنتیجه I_2 نیز برای $P>2$ همگراست.

بنابراین بازه همگرایی $(P<3)\cap(P>2)$ است یعنی $2<P<3$.

۴۰- ابتدا سری مکلورن $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ را تا درجه ۳ بدست آورید وسپس مقدار حد زیر را بیابید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{e}-\sqrt{1-x^2}}{x(\sin^{-1}x-\sin x)}$$

(تهران۸۵)

حل

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\operatorname{Ln}(1+x)}$$

براساس سری دوجمله ای نیوتن داریم:

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\dots\xrightarrow{\int^x}\operatorname{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\operatorname{Ln}(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\to e^{\frac{1}{x}\operatorname{Ln}(1+x)}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots}=e.e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots}$$

از طرفی می دانیم که $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\dots$ ، بنابراین:

$$f(x)=e.e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots}=e\left(1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots)+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots)^2}{2!}+\right.$$

$$\left.\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots)^3}{3!}+\dots\right)=e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)+\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{-x^3}{48}\right)+o\left(x^3\right)\right)$$

$$\to f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right)$$

$$\xrightarrow{x\to x^2}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^4}{24}-\frac{7x^6}{16}+o\left(x^6\right)\right)$$

$$\to\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{e}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^4}{24}-\frac{7x^6}{16}+o\left(x^6\right)\right)$$

همچنین می دانیم که:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\dots \quad ,\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\dots \quad , \quad \sin^{-1} x = x+\frac{x^3}{6}+\dots$$

بنابراین:

$$\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{e}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)=\frac{7}{12}x^4+o(x^4)$$

و همچنین:

$$\sin^{-1} x-\sin x = \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\xrightarrow{\times x} x\left(\sin^{-1} x-\sin x\right)=\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

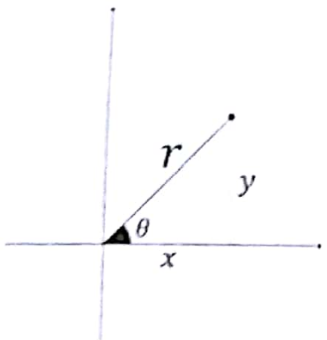
در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{e}-\sqrt{1-x^2}}{x(\sin^{-1} x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7x^4}{12}}{\frac{x^4}{3}}=\frac{7}{4}$$

فصل هشتم

مختصات قطبی

مختصات قطبی با دو مختصه r و θ بیان می شود که r فاصله از مبدأ و θ زاویه با جهت مثبت محور xها است. به شکل زیر توجه کنید:



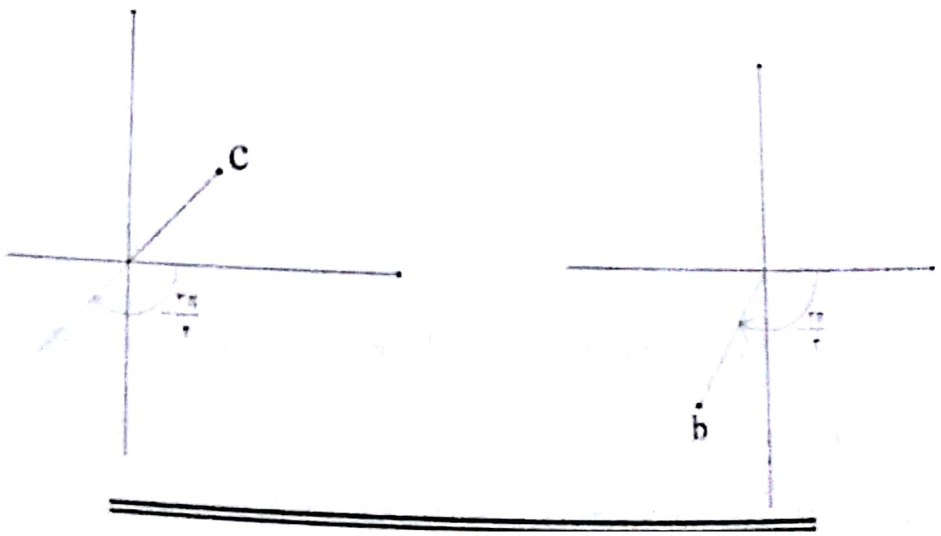
با توجه به شکل بالا داریم:

$$\boxed{\tan\theta=\frac{y}{x}}\ ,\ \boxed{x^{2}+y^{2}=r^{2}}\ ,\ \boxed{y=r.\sin\theta}\ ,\ \boxed{x=r.\cos\theta}$$

تذکر: اگر زاویه در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد،مثبت و اگر در جهت عقربه های ساعت بود، منفی در نظرگرفته می شود.

مثال۱: نقاطی را که مختصات آنها $c(-2,\frac{-3\pi}{4})$ و $b(2,\frac{-2\pi}{3})$ است را در صفحه قطبی مشخص کنید.

حل



مثال۲ : معادله قطبی خط راست $۲x-۳y=۵$ را بدست آورید.

حل

$$۲x-۳y=۵ \xrightarrow{x=r\cos\theta,\,y=r\sin\theta} ۲r\cos\theta-۳r\sin\theta=۵ \to r(۲\cos\theta-۳\sin\theta)=۵$$

$$\to r=\frac{۵}{۲\cos\theta-۳\sin\theta}$$

مثال۳ : معادله قطبی $r^۲=۲\csc(۲\theta)$ را به مختصات دکارتی تبدیل کنید. (قزوین ۸۸)

حل

$$r^۲=۲\csc(۲\theta)\to r^۲=\frac{۲}{\sin(۲\theta)}\to r^۲=\frac{۲}{۲\sin\theta.\cos\theta}\to r^۲=\frac{۱}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$\to r^۲\sin\theta.\cos\theta=۱\to(r\sin\theta).(r\cos\theta)=۱\xrightarrow[r\cos\theta=x]{r\sin\theta=y}xy=۱$$

رسم اشکال قطبی

برای رسم اشکال قطبی از نقطه یابی استفاده می کنیم.البته برای کاهش حجم عملیات وافزایش سرعت عمل توجه به جدول زیر بسیار مفید است:

اگر معادله $r=f(\theta)$ عوض **نشود** با:	نمودار $r=f(\theta)$ متقارن است نسبت به :
$(r,-\theta)$	محور x
$(r,\pi-\theta)$	محور y
$(-r,\theta)$	مبدأ
$(-r,-\theta)$	محور y
$(-r,\pi-\theta)$	محور x

مثال۴ : مطلوبست رسم اشکال زیر:

الف) $r=۴\cos(۲\theta)$ ب) $r=\frac{-۴}{۲+\cos\theta}$ ج) $r=\sin(۲\theta)$

حل

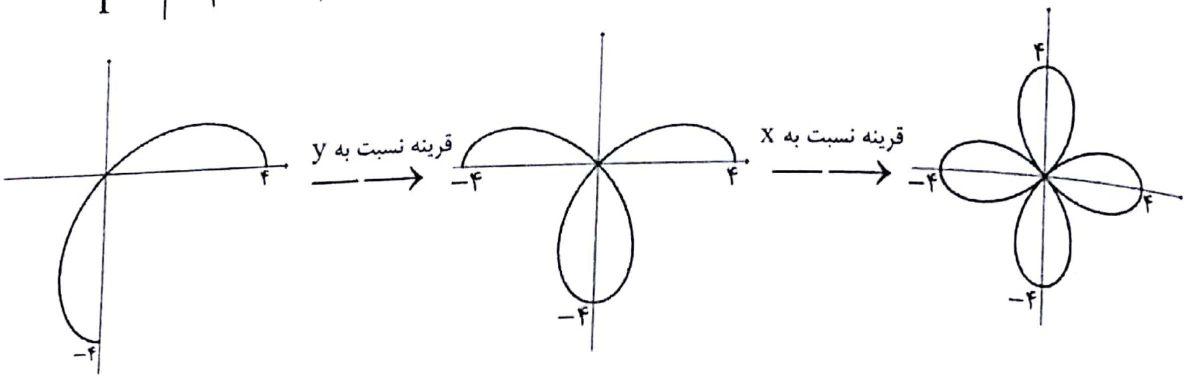
الف) $r=۴\cos(۲\theta)$

$\xrightarrow{(r,-\theta)} r=۴\cos(-۲\theta)=۴\cos(۲\theta)=f(\theta)\to$ نسبت به محور xها متقارن است.

$\xrightarrow{(r,\pi-\theta)} r=۴\cos(۲\pi-۲\theta)=۴\cos(۲\theta)=f(\theta)\to$ نسبت به محور yها متقارن است

بنابراین کافیست فقط در ربع اول یعنی در بازه $\left[\circ,\frac{\pi}{۲}\right]$ رسم کنیم و بعد قرینه کنیم.

θ	$\circ$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	۴	۲	۰	−۲	−۴

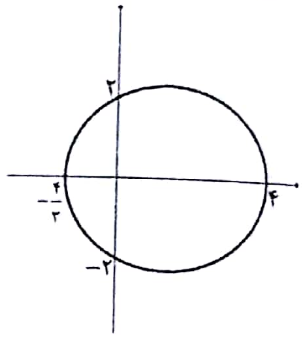


■

ب) $r=\frac{-۴}{۲+\cos\theta}$

چون با تبدیل θ به $-\theta$ معادله تغییر نمی کند پس نسبت به محورxها متقارن است.لذا کافیست در بازه $[\circ,\pi]$رسم کنیم وبعد نسبت به محور xها قرینه کنیم.

θ	$\circ$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
r	$\frac{-۴}{۳}$	$\frac{-۸}{۵}$	−۲	$\frac{-۸}{۳}$	−۴

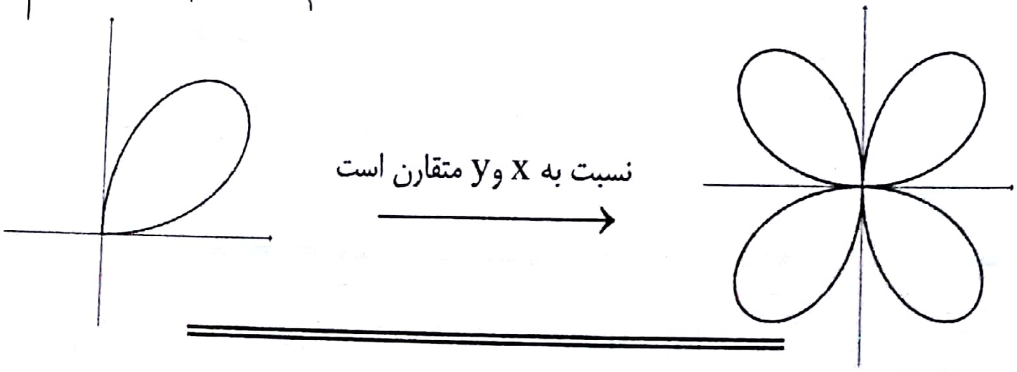


■

ج) $\xrightarrow{(-r,-\theta)} -r=\sin(-۲\theta)\to r=\sin(۲\theta)\to$ نسبت به محور yها متقارن است

$\xrightarrow{(-r,\pi-\theta)} -r=\sin(۲\pi-۲\theta)\to -r=\sin(-۲\theta)\to r=\sin(۲\theta)\to$ نسبت به محور xها متقارن است

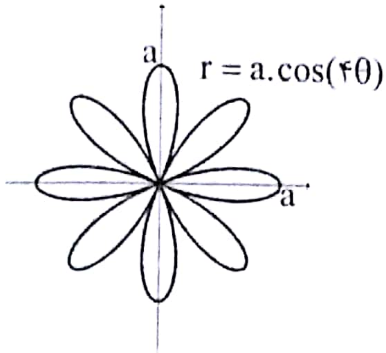
θ	$\circ$	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰

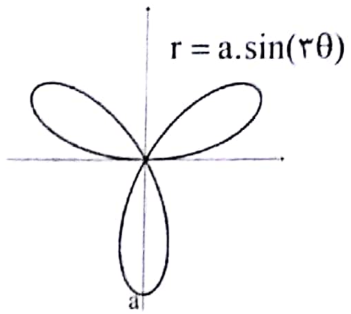


■

نکته ۱ : رسم $r = a.\sin(n\theta)$ و $r = a.\cos(n\theta)$، $a > ۰$ ، $n \in \mathbb{N}$. (رز n پر):

اگر n فرد باشد، تعداد برگ ها n تا است و اگر n زوج باشد، ۲n برگ خواهیم داشت.





نکته۲ : برای رسم $r = f(\theta - \alpha)$ کافیست $r = f(\theta)$ را رسم کنیم و سپس شکل را حول مبدأ به اندازه α درجه می چرخانیم.اگر $\alpha > ۰$ باشد پادساعتگرد واگر $\alpha < ۰$ ساعتگرد می چرخانیم.

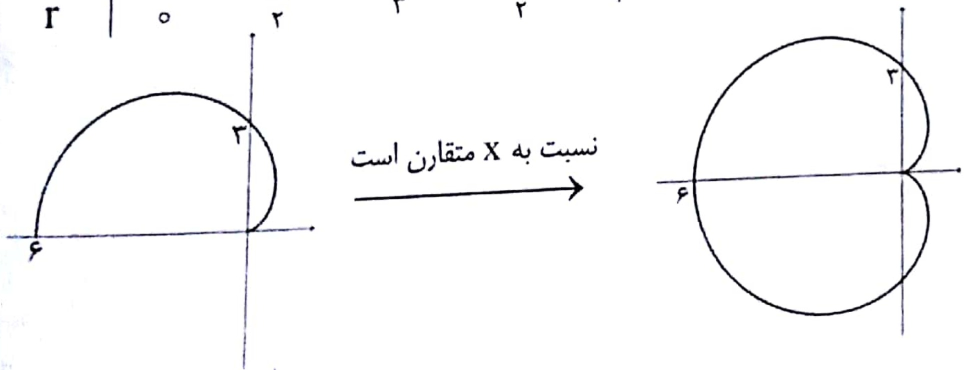
مثال۵ : نمودار قطبی $r = ۳ - ۳\cos(\theta - \frac{\pi}{۶})$ را رسم کنید. (برادلی)

حل

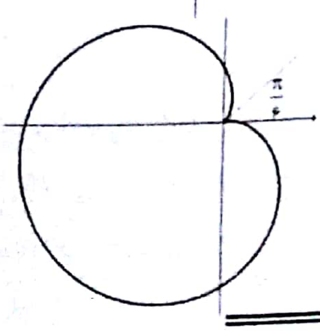
ابتدا نمودار $r = ۳ - ۳\cos(\theta)$ را رسم می کنیم.

چون با تبدیل θ به $-\theta$ معادله تغییر نمی کند،نمودار نسبت به محور x ها متقارن است.کافیست در بازه $[۰, \pi]$ رسم کنیم و سپس نسبت به محور x ها قرینه اش می کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
r	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳	$\frac{۹}{۲}$	۶



حال با توجه به نکته ۲ کافیست این نمودار را به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ پادساعتگرد حول مبدأ دوران دهیم تا نمودار مورد نظر بدست آید:



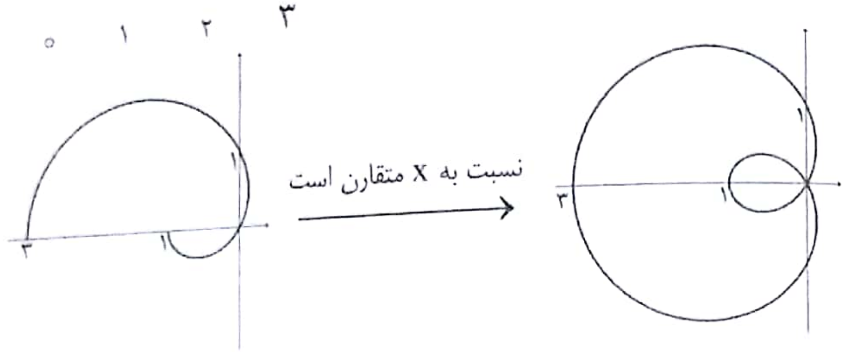
مثال ۶ : مطلوبست رسم $r = ۱ - ۲\cos\theta$.

(برادلی)

حل

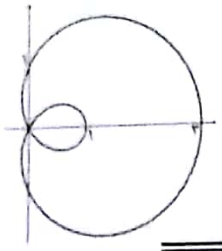
چون با تبدیل θ به θ- معادله تغییر نمی کند لذا نسبت به محورXها متقارن است.پس کافیست در بازه $[\pi, ۰]$ رسم کنیم و بعد از تقارن استفاده کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
r	۱-	۰	۱	۲	۳

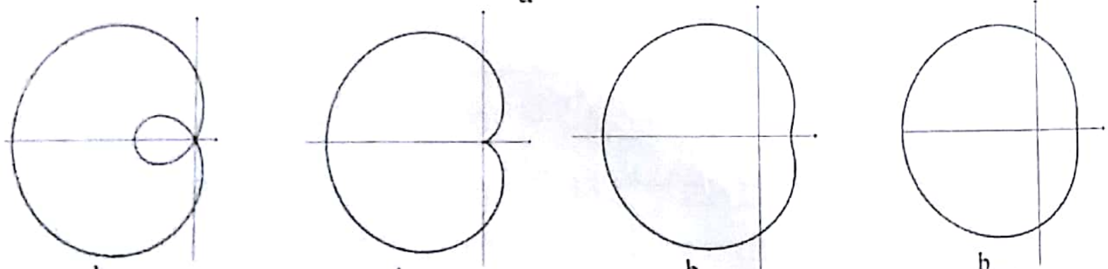


سوال مشابه ۶-۱ منحنی به معادله قطبی $r = ۱ + ۲\cos\theta$ را رسم کنید. (تبریز ۸۵ – تهران مرکزی ۸۹)

Ans



نکته۳ : برای رسم $r = b - a.\cos\theta$ بنا به نسبت $\frac{b}{a}$ چهار حالت زیر را داریم:



توجه شود که فرم استاندارد $r = b - a.\cos\theta$ است:

برای رسم $r = b - a.\sin\theta$ کافیست اشکال فوق را ۹۰ درجه پادساعتگرد حول مبدأ بچرخانیم.

برای رسم $r = b + a.\cos\theta$ کافیست اشکال فوق را ۱۸۰ درجه پادساعتگرد حول مبدأ بچرخانیم.

برای رسم $r = b + a.\sin\theta$ کافیست اشکال فوق را ۲۷۰ درجه پادساعتگرد حول مبدأ بچرخانیم.

مماس بر منحنی های قطبی

اگر داشته باشیم $r = f(\theta)$، آنگاه:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r'_{\theta}.\sin\theta+r\cos\theta}{r'_{\theta}.\cos\theta-r\sin\theta}\to\boxed{m=\frac{r'_{\theta}.\tan\theta+r}{r'_{\theta}-r\tan\theta}}$$

مثال۷ : الف- نمودار قطبی $r^{۲}=a^{۲}\sin ۲\theta$ را رسم کنید.

ب- شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه $\theta=\frac{\pi}{۴}$ بیابید. (تهران ۸۳)

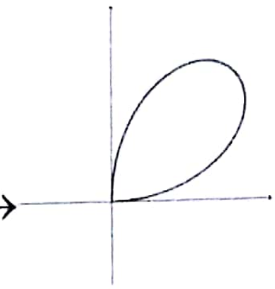
حل

الف) $r^{۲}=a^{۲}\sin ۲\theta\to r=\sqrt{a^{۲}\sin ۲\theta}\to r=a\sqrt{\sin ۲\theta}$

چون با تبدیل (r,θ) به $(-r,\theta)$ معادله تغییری نمی کند پس نسبت به مبدأ متقارن است ، کافیست $r=a\sqrt{\sin ۲\theta}$ را رسم کنیم و بعد با استفاده از تقارن نسبت به مبدأ ، نمودار را کامل می کنیم.

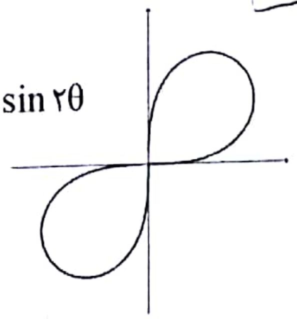
$$\sin ۲\theta\geq ۰\to ۰\leq ۲\theta\leq\pi\to ۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}$$

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$
$r=a\sqrt{\sin ۲\theta}$	۰	$a\sqrt{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$	a	۰



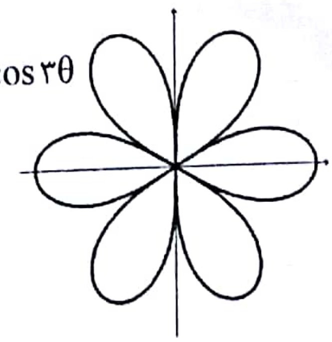
حال نمودار را نسبت به مبدأ قرینه می کنیم:

$r^{۲}=a^{۲}\sin ۲\theta$

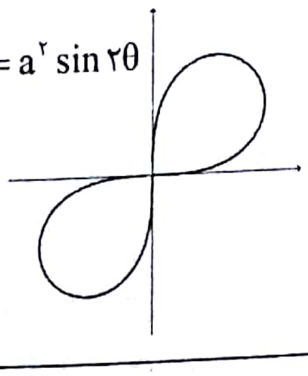


نکته۴: برای رسم $r^{۲}=a^{۲}.\sin(n\theta)$ و $r^{۲}=a^{۲}.\cos(n\theta)$، $n\in\mathbb{N}$. عکس رز n پر عمل می کنیم:
اگر n فرد باشد، تعداد برگ ها $۲n$ تا است و اگر n زوج باشد، n برگ خواهیم داشت.

$r^{۲}=a^{۲}\cos ۳\theta$



$r^{۲}=a^{۲}\sin ۲\theta$



ب) $r = a\sqrt{\sin 2\theta} \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{4}} r = a$ ، $r' = \dfrac{a.\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{4}} r' = 0$

$$m = \frac{r'_\theta . \tan\theta + r}{r'_\theta - r\tan\theta} \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{4}} m = -1$$

محاسبه مساحت در مختصات قطبی

اگر مساحت ناحیه ای به معادله $r = f(\theta)$ را در بازه $\theta \in [\alpha, \beta]$ بخواهیم باید از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\theta=\alpha}^{\beta} r^2 d\theta}$$

مثال۸ : الف) نمودار $r^2 = \cos 2\theta$ را رسم کنید.

ب) مساحت سطح محصور توسط نمودار قسمت الف را محاسبه کنید. (دمیدوویچ – تهران مرکزی ۸۸)

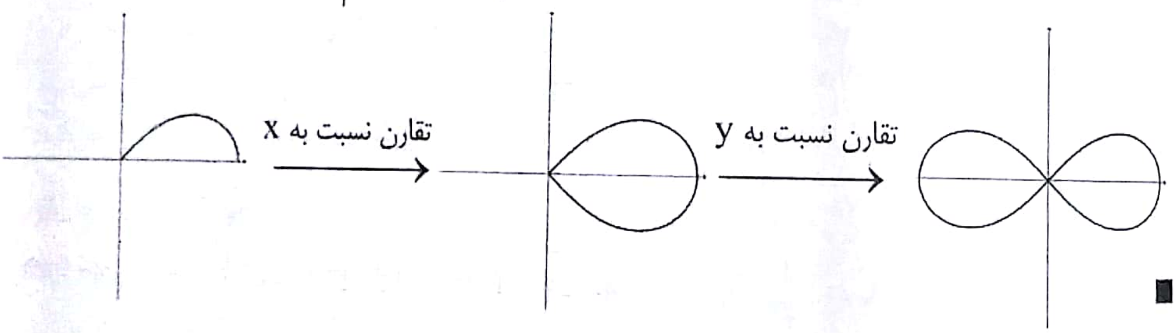
حل

$$\text{دامنه}: \cos 2\theta \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{-\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{5\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$\xrightarrow{(-r,-\theta)} (-r)^2 = \cos(-2\theta) \rightarrow r^2 = \cos 2\theta \rightarrow$ نسبت به محور y ها متقارن است

$\xrightarrow{(-r,\pi-\theta)} (-r)^2 = \cos 2(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) \rightarrow r^2 = \cos 2\theta \rightarrow$ نسبت به محور x ها متقارن است

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$r = \sqrt{\cos 2\theta}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



ب) با توجه به تقارن داریم:

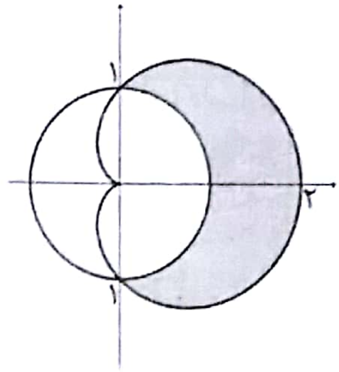
$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

مثال۹ : مساحت داخل دلوار $r=۱+\cos\theta$ و خارج دایره $r=۱$ را بدست آورید. (تهران مرکزی ۸۸)

حل

محل برخورد: $\begin{cases} r=۱+\cos\theta \\ r=۱ \end{cases} \to ۱+\cos\theta=۱ \to \cos\theta=۰ \to \left(۱,\frac{\pi}{۲}\right),\left(۱,\frac{-\pi}{۲}\right)$

$$S=\frac{۱}{۲}\int r_۱^۲-r_۲^۲\,d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos\theta)^۲-۱\,d\theta$$



$$=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۲\cos\theta+\cos^۲\theta\,d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}۲\cos\theta+\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}\,d\theta$$

$$S=\left(\sin\theta+\frac{\theta}{۴}+\frac{۱}{۸}\sin ۲\theta\right)\Big|_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}=۲+\frac{\pi}{۴}$$

سوال مشابه ۹-۱ مطلوبست محاسبه مساحت بین $r^۲=۸\cos ۲\theta$ ، $r\geq ۲$. (برادلی)

Ans $۴\sqrt{۳}-\frac{۴\pi}{۳}$

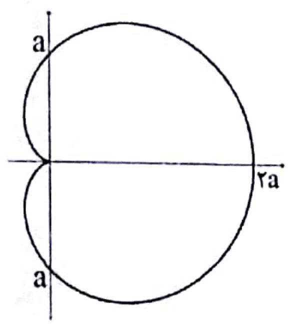
محاسبه طول قوس در مختصات قطبی

طول نمودار $r=f(\theta)$ در بازه $\theta\in[\alpha,\beta]$ برابر است با:

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta}$$

مثال۱۰ : محیط کاردیوئید $r=a(۱+\cos\theta)$ را بدست آورید. (علم وصنعت ۸۸)

حل



با توجه به تقارن می توان گفت که
محیط کل برابر است با دوبرابر محیط در بازه $[۰,\pi]$:

$$L=۲\int_۰^\pi\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta\to L=۲\int_۰^\pi\sqrt{(a(۱+\cos\theta))^۲+(-a\sin\theta)^۲}\,d\theta=۲|a|\int_۰^\pi\sqrt{۲+۲\cos\theta}\,d\theta$$

$$=۲|a|\int_۰^\pi\sqrt{\left(۲\cos\frac{\theta}{۲}\right)^۲}\,d\theta=۴|a|\int_۰^\pi\cos\frac{\theta}{۲}\,d\theta=۸|a|\sin\frac{\theta}{۲}\Big|_۰^\pi=۸|a|$$

محاسبه مساحت دوار در مختصات قطبی

همانطور که در فصل انتگرال معین گفتیم،مساحت دوار از رابطه $S=۲\pi\int \rho dL$ بدست می آید که ρ فاصله المانی از نمودار تا محور دوران است و dL دیفرانسیل طول قوس است که در مختصات قطبی برابر است با $dL=\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta$.

برای مثال اگر مطلوب ما محاسبه مساحت حاصل از دوران $r=f(\theta)$ حول محور xها باشد ، داریم:
$\rho=|y|$ و همچنین می دانیم که $y=r\sin\theta$ پس $\rho=|r\sin\theta|$ و می توان نوشت:

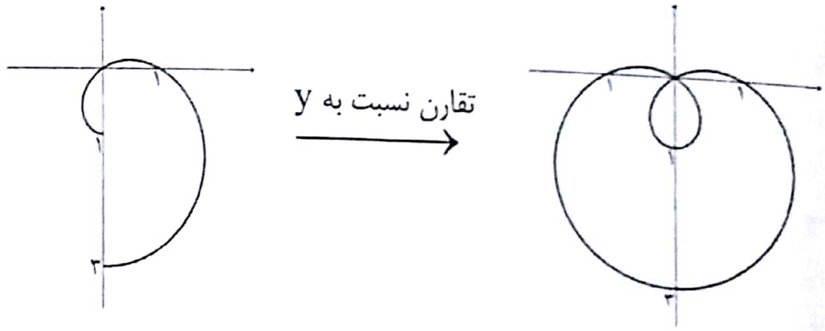
$$\boxed{S=۲\pi\int_{\alpha}^{\beta}|r\sin\theta|.\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta}$$

مثال ۱۱ : اولا نمودار $r=۱-۲\sin\theta$ را رسم کنید.ثانیا اگر حلقه کوچکتر را حول محور yها دوران دهیم،مساحت سطح دوار را بدست آورید. (تهران ۸۴)

حل

چون با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله تغییر نمی کند پس نسبت به محورyها متقارن است. کافیست در بازه $[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$رسم کنیم وبعد از تقارن استفاده کنیم.

θ	$\frac{-\pi}{۲}$	$\frac{-\pi}{۶}$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	۳	۲	۱	۰	−۱



$$\rho=|x|=|r\cos\theta|=|(۱-۲\sin\theta)\cos\theta|=(۲\sin\theta-۱)\cos\theta$$

$$dL=\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta\rightarrow dL=\sqrt{(۱-۲\sin\theta)^۲+(-۲\cos\theta)^۲}\,d\theta=\sqrt{۵-۴\sin\theta}\,d\theta$$

با توجه به جدول بالا نیمه چپ حلقه کوچک، دربازه $[\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۶}]$ ایجاد می شود:

$$S=۲\pi\int\rho dL=۲\pi\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۲\sin\theta-۱).\cos\theta.\sqrt{۵-۴\sin\theta}\,d\theta \quad ,۵-۴\sin\theta=u\rightarrow\cos\theta d\theta=\frac{-du}{۴}$$

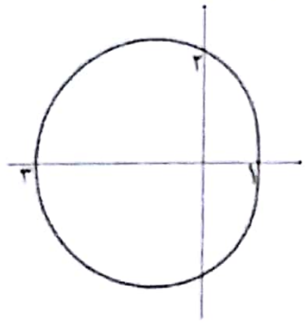
$$S=۲\pi\int_{۳}^{۱}\frac{۳-u}{۲}.\sqrt{u}.\frac{-du}{۴}=\frac{\pi}{۴}\int_{۱}^{۳}۳u^{\frac{۱}{۲}}-u^{\frac{۳}{۲}}du=\frac{\pi}{۵}(۳\sqrt{۳}-۲)$$

سوال مشابه

۱۱-۱ منحنی معادله قطبی $r=2-\cos\theta$ مفروضست:

اولا منحنی را رسم کنید.

ثانیا منحنی حول محور X دوران می کند،مساحت رویه حاصل را بیابید. (تهران ۸۵)



Ans $\frac{93\pi}{5}$

سوالات فصل هشتم

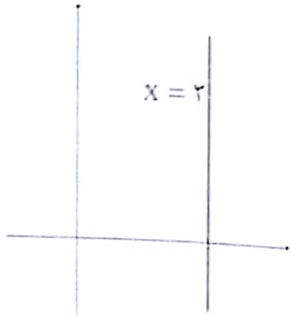
۱- مطلوبست رسم نمودارهای قطبی زیر:

الف) $r.\cos\theta = ۲$ ب) $r\theta = ۲$

حل

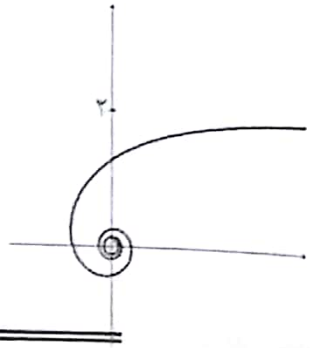
ب) $r\cos\theta = ۲ \rightarrow r = \dfrac{۲}{\cos\theta}$

θ	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$
r	۲	$۲\sqrt{۲}$	۴



ب)

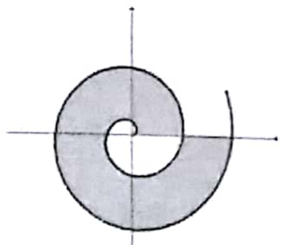
θ	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π
$r = \frac{۲}{\theta}$	$\frac{۱۲}{\pi}$	$\frac{۸}{\pi}$	$\frac{۶}{\pi}$	$\frac{۴}{\pi}$	$\frac{۲}{\pi}$



۲- مطلوبست محاسبه مساحت واقع بین پیچ های اول و دوم $r = a\theta$ که $a > ۰$.   (علم وصنعت ۹۰)

حل

θ	۰	$\pi/۲$	π	۲π	۴π
r	۰	$\frac{a\pi}{۲}$	$a\pi$	$۲a\pi$	$۴a\pi$

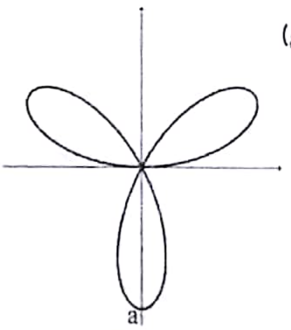


با توجه به شکل،مساحت خواسته شده در بازه $[۲\pi, ۴\pi]$ رخ می دهد:

$$S = \frac{۱}{۲}\int_{۲\pi}^{۴\pi} r^۲ d\theta = \frac{a^۲}{۲}\int_{۲\pi}^{۴\pi} \theta^۲ d\theta = \frac{a^۲}{۶}\theta^۳ \Big|_{۲\pi}^{۴\pi} = \frac{۲۸a^۲\pi^۳}{۳}$$

۳- مساحت محدود به سه برگی $r = a\sin ۳\theta$ را بدست آورید.   (دمیدوویچ)

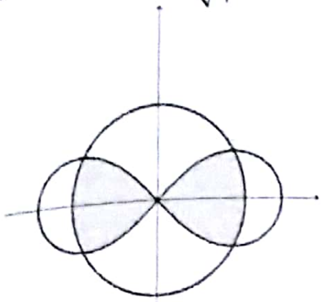
حل



مساحت کل، سه برابر مساحت یکی از برگها است.

$$S = \frac{۳}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} r^۲ d\theta = \frac{۳}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} (a\sin ۳\theta)^۲ d\theta = \frac{۳a^۲}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱-\cos ۶\theta}{۲} d\theta = \frac{۳a^۲}{۲}\left(\frac{\theta}{۲} - \frac{۱}{۱۲}\sin ۶\theta\right)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\pi a^۲}{۴}$$

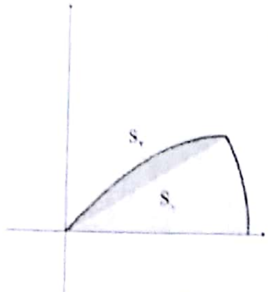
۴- مساحت قسمتی از لمینسکات برنولی $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$ را که درون دایره $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$ قرار دارد را حساب کنید. (قزوین۸۸- مازون)



حل

$$\text{محل برخورد:}\begin{cases} r=a\sqrt{\cos 2\theta} \\ r=\dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},\frac{-\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}$$

با توجه به شکل،مساحت موردنظر، ۴ برابر مساحت ربع اول است،همچنین این قسمت خود به S_1 و S_2 تقسیم می شود یعنی :



$$S=4(S_1+S_2) \qquad (*)$$

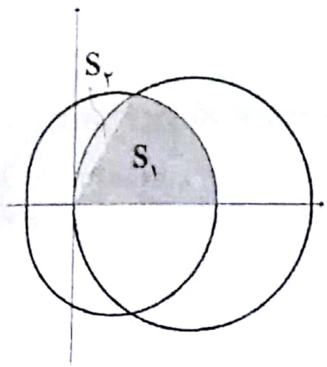
$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 d\theta=\frac{\pi a^2}{24}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(a\sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 d\theta=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=\frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{(*)} S=4\left(\frac{\pi a^2}{24}+\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

۵- مطلوبست مساحت بین $r=2+\cos\theta$ و $r=5\cos\theta$. (برادلی)

حل



$$\text{محل برخورد:}\begin{cases} r=5\cos\theta \\ r=2+\cos\theta \end{cases} \rightarrow 5\cos\theta=2+\cos\theta$$

$$\rightarrow 4\cos\theta=2 \rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2+\cos\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4+4\cos\theta+\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4+4\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{9\theta}{4}+2\sin\theta+\frac{1}{8}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{17\sqrt{3}}{16}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(5\cos\theta)^2 d\theta=\frac{25}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{25}{4}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{25\pi}{24}-\frac{25\sqrt{3}}{16}$$

با توجه به تقارن شکل داریم:

$$S = 2S_1 + 2S_2 = \frac{43\pi}{12} - \sqrt{3} \approx 9.53$$

سوال مشابه

۱-۵ مساحت ناحیه ای از کاردیوئید $r = a(1-\cos\theta)$ را حساب کنید که درون دایره $r = a\cos\theta$ واقع است. (مارون)

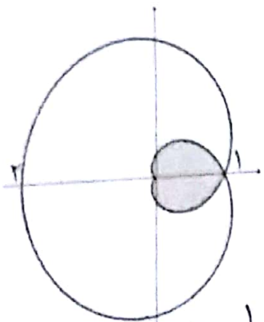
Ans $a^2(\frac{7\pi}{12} - \sqrt{3})$

۶- ابتدا نمودار قطبی $r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$ را رسم کنید و سپس مساحت حلقه کوچکتر را بیابید. (تهران ۸۳)

حل

دوره تناوب 4π است پس در $[0, 4\pi]$ رسم می کنیم:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	....	4π
r	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	....	1



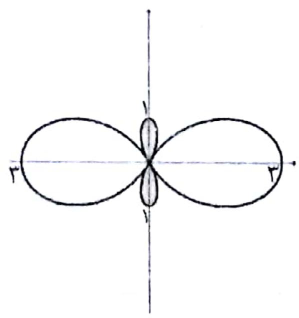
چون حلقه کوچکتر را بازه $[0, 2\pi]$ تشکیل می دهد پس:

$$S = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\sin\frac{\theta}{2})^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2(\frac{\theta}{2})d\theta = \frac{3\pi}{2} - 4$$

سوال مشابه

۱-۶ نمودار قطبی $r = 1 + 2\cos 2\theta$ را رسم نموده ومساحت ناحیه محدود به حلقه های کوچکتر را بیابید. (تهران ۸۴)

Ans $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$



۷- با گذر به مختصات قطبی مساحت محدود به $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ را بیابید.

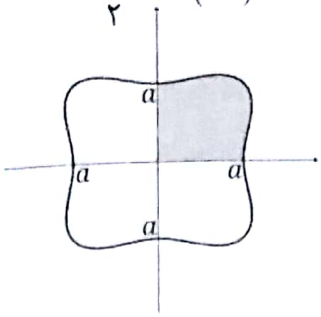
(دمیدوویچ)

با گذر به مختصات قطبی $y=r\sin\theta$ و $x=r\cos\theta$، در نتیجه داریم:

$$x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)\to\left(r\cos\theta\right)^4+\left(r\sin\theta\right)^4=a^2\left(\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2\right)$$

$$\to r^4\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)=a^2r^2\to r^2=\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}=\frac{a^2}{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2-2\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$r^2=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)}$$



با توجه به شکل و تقارن آن داریم: $S=4S_1$

$$S_1=\frac{1}{2}\int r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{2-\sin^2 2\theta}d\theta$$

$$u=\tan\theta\to du=\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta\to d\theta=\frac{du}{1+u^2},\sin 2\theta=\frac{2u}{1+u^2},\begin{cases}\theta=\frac{\pi^-}{2}\to u=\infty\\ \theta=0\to u=0\end{cases}$$

$$S_1=\int_0^{\infty}\frac{a^2}{2-\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}.\frac{du}{1+u^2}=a^2\int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{2\left(1+u^2\right)^2-4u^2}{\left(1+u^2\right)^2}}.\frac{du}{1+u^2}=\frac{a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}.du$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{\frac{1+u^2}{u^2}}{\frac{1+u^4}{u^2}}.du=\frac{a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}+u^2}du\quad ,u-\frac{1}{u}=t\to\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du=dt$$

$$\frac{1}{u^2}+u^2=\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+2=t^2+2\ ,\begin{cases}u=\infty\to t=\infty\\ u=0^+\to t=-\infty\end{cases}$$

$$S_1=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{a^2}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi a^2}{2\sqrt{2}}\xrightarrow{S=4S_1}S=\sqrt{2}\pi a^2$$

۸- طول پیچ هیپربولیک $r.\theta=1$ را بین $\theta_1=\frac{3}{4}$ و $\theta_2=\frac{4}{3}$ حساب کنید. (ماهان)

حل

$$r=\frac{1}{\theta}\to r'=\frac{-1}{\theta^2}$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^4}}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\theta^{-2}(\theta^2+1)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

دوجمله دیفرانسیلی: $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{1}{2}=0\in\mathbb{Z}\to\theta^2+1=\theta^2.u^2\to\theta^2=\frac{1}{u^2-1}$

$$\to 2\theta d\theta=\frac{-2u.du}{(u^2-1)^2}\to d\theta=\frac{-u.du}{\theta(u^2-1)^2},\quad\begin{cases}\theta=\frac{4}{3}\to u=\frac{5}{4}\\ \theta=\frac{3}{4}\to u=\frac{5}{3}\end{cases}$$

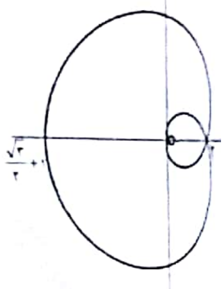
$$\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}\theta^{-2}\theta u.\frac{-u.du}{\theta(u^2-1)^2}=\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}\frac{u^2.du}{u^2-1}=\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}1+\frac{1}{u^2-1}du=u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{12}+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

۹- نمودار قطبی $r=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$ معادله را رسم کنید وسپس طول منحنی را حساب کنید. (تهران ۸۶)

حل

دوره تناوب نمودار 4π است.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	....	4π
r	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	....	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$L=\int_0^{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{4\pi}\sqrt{\frac{3}{4}+\sin^2\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

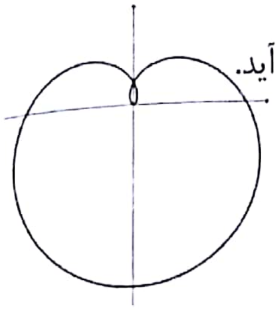
$$=\int_0^{4\pi}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{4\pi}\sqrt{1+\frac{3}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{4\pi}\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{4\pi}\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_0^{4\pi}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\theta+\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{4\pi}=4\pi$$

۱۰- طول قوس کامل $r=a\sin^{۳}(\frac{\theta}{۳})$ در مختصات قطبی را حساب کنید. (تهران ۸۷)

حل



دوره تناوب تابع ۳π است.با نقطه یابی در بازه $[\circ,۳\pi]$ شکل روبرو بدست می آید.

$$r=a\sin^{۳}(\frac{\theta}{۳})\to r'=a.\sin^{۲}(\frac{\theta}{۳}).\cos(\frac{\theta}{۳})$$

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}d\theta=\int_{\circ}^{۳\pi}\sqrt{a^{۲}.\sin^{۶}(\frac{\theta}{۳})+a^{۲}.\sin^{۴}(\frac{\theta}{۳}).\cos^{۲}(\frac{\theta}{۳})}d\theta=\int_{\circ}^{۳\pi}a.\sin^{۲}(\frac{\theta}{۳})d\theta$$

$$=a\int_{\circ}^{۳\pi}\frac{۱-\cos(\frac{۲\theta}{۳})}{۲}d\theta=a\left(\frac{\theta}{۲}-\frac{۳}{۴}\sin(\frac{۲\theta}{۳})\right)\Bigg|_{\circ}^{۳\pi}=\frac{۳\pi a}{۲}$$

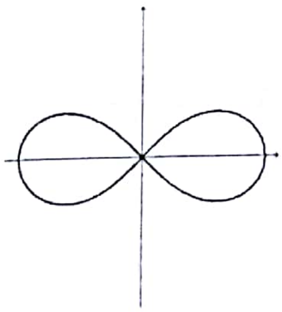
۱۱- فرض کنید $a>\circ, r^{۲}=a^{۲}\cos ۲\theta$

الف) نمودار قطبی معادله فوق را رسم کنید.

ب) اگر منحنی حول محور y دوران کند مساحت رویه حاصل رابیابید. (تهران ۸۶)

حل

الف) در مثال ۸ صفحه ۳۴۱ رسم شده است.



■

ب) بعلت تقارن کافیست نمودار در بازه $[\frac{-\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ را حول محور y ها دوران دهیم.

$$r=a.\sqrt{\cos ۲\theta}\to r'=\frac{-a.\sin ۲\theta}{\sqrt{\cos ۲\theta}}$$

$$dL=\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}d\theta=\sqrt{a^{۲}\cos ۲\theta+\frac{a^{۲}\sin^{۲}۲\theta}{\cos ۲\theta}}d\theta=\frac{a.d\theta}{\sqrt{\cos ۲\theta}}$$

$$,\rho=|x|=|r\cos\theta|=\left|a.\sqrt{\cos ۲\theta}\cos\theta\right|=a.\sqrt{\cos ۲\theta}\cos\theta$$

$$S=۲\pi\int\rho dL=۲\pi\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}a.\sqrt{\cos ۲\theta}\cos\theta.\frac{a.d\theta}{\sqrt{\cos ۲\theta}}=۲\pi a^{۲}\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\cos\theta.d\theta=۲\sqrt{۲}\pi a^{۲}$$

جدول فرمول های ریاضی

جدول۱: فرمول های مثلثاتی و هیپربولیک

فرمولهای هیپربولیک

$$\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$$
$$\Rightarrow ۱ - \tanh^۲ x = \mathrm{sech}^۲ x$$
$$\Rightarrow \coth^۲ x - ۱ = \mathrm{csch}^۲ x$$
$$\sinh^۲ x = \frac{\cosh ۲x - ۱}{۲}$$
$$\cosh^۲ x = \frac{\cosh ۲x + ۱}{۲}$$
$$\sinh ۲x = ۲\sinh x.\cosh x$$
$$\cosh ۲x = \cosh^۲ x + \sinh^۲ x$$
$$= ۲\cosh^۲ x - ۱$$
$$= ۱ + ۲\sinh^۲ x$$

فرمولهای مثلثاتی

$$\sin^۲ \theta + \cos^۲ \theta = ۱$$
$$\Rightarrow ۱ + \tan^۲ \theta = \sec^۲ \theta$$
$$\Rightarrow ۱ + \cot^۲ \theta = \csc^۲ \theta$$
$$\sin^۲ \theta = \frac{۱ - \cos ۲\theta}{۲}$$
$$\cos^۲ \theta = \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}$$
$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta.\cos\theta$$
$$\cos ۲\theta = \cos^۲ \theta - \sin^۲ \theta$$
$$= ۲\cos^۲ \theta - ۱$$
$$= ۱ - ۲\sin^۲ \theta$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A.\cos B \pm \cos A.\sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A.\cos B \mp \sin A.\sin B$$
$$\sin A.\sin B = \frac{۱}{۲}(\cos(A - B) - \cos(A + B))$$
$$\cos A.\cos B = \frac{۱}{۲}(\cos(A + B) + \cos(A - B))$$
$$\sin A.\cos B = \frac{۱}{۲}(\sin(A + B) + \sin(A - B))$$

$$\sin A + \sin B = ۲\sin\frac{A + B}{۲}.\cos\frac{A - B}{۲}$$
$$\sin A - \sin B = ۲\sin\frac{A - B}{۲}.\cos\frac{A + B}{۲}$$
$$\cos A + \cos B = ۲\cos\frac{A + B}{۲}.\cos\frac{A - B}{۲}$$
$$\cos A - \cos B = -۲\sin\frac{A + B}{۲}.\sin\frac{A - B}{۲}$$

جدول۲ : فرمول های مشتق

تابع	مشتق	تابع	مشتق
a	۰	u^n	$nu'u^{n-۱}$
e^u	$u'e^u$	a^u	$u'a^u.\ln a$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\log_a^u$	$\frac{u'}{u\ln a}$
$\sin u$	$u'.\cos u$	$\sinh u$	$u'.\cosh u$
$\cos u$	$-u'.\sin u$	$\cosh u$	$u'.\sinh u$
$\tan u$	$u'\sec^{۲} u$	$\tanh u$	$u'\operatorname{sech}^{۲} u$
$\cot u$	$-u'\csc^{۲} u$	$\coth u$	$-u'\operatorname{csch}^{۲} u$
$\sec u$	$u'.\sec u.\tan u$	$\operatorname{sech} u$	$-u'.\operatorname{sech} u.\tanh u$
$\csc u$	$-u'.\csc u.\cot u$	$\operatorname{csch} u$	$-u'.\operatorname{csch} u.\coth u$
$\sin^{-۱} u$	$\frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$	$\sinh^{-۱} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^{۲}+۱}}$
$\cos^{-۱} u$	$\frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$	$\cosh^{-۱} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^{۲}-۱}}$
$\tan^{-۱} u$	$\frac{u'}{۱+u^{۲}}$	$\tanh^{-۱} u$	$\frac{u'}{۱-u^{۲}}$
$\cot^{-۱} u$	$\frac{-u'}{۱+u^{۲}}$	$\coth^{-۱} u$	$\frac{u'}{۱-u^{۲}}$
$\sec^{-۱} u$	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}$	$\operatorname{sech}^{-۱} u$	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{۱-u^{۲}}}$
$\csc^{-۱} u$	$\frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}$	$\operatorname{csch}^{-۱} u$	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{۱+u^{۲}}}$

جدول ۳: فرمول های انتگرال

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

$$\int a dx = ax + c \quad , a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \ln x dx = x.\ln x - x + c$$

$$\int x.e^x dx = e^x (x-1) + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \text{sech} x dx = \tan^{-1}(\sinh x) + c$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$\int \text{csch} x dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}.\sin 2ax + c$$

$$\int \sinh^2(ax) dx = \frac{1}{4a}.\sinh 2ax - \frac{x}{2} + c$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}.\sin 2ax + c$$

$$\int \cosh^2(ax) dx = \frac{1}{4a}.\sinh 2ax + \frac{x}{2} + c$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$$

$$\int \tanh^2 x dx = -\tanh x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tanh x + 1}{\tanh x - 1}\right| + c$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \coth^2 x dx = -\coth x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\coth x + 1}{\coth x - 1}\right| + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \text{sech}^2 x dx = \tanh x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \text{csch}^2 x dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c = \frac{-1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad \text{or} \quad \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad \text{or} \quad \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}.\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}.\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad \text{or} \quad \frac{x}{2}.\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}.\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c \quad \text{or} \quad \frac{x}{2}.\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{x.\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)+c \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)+c \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)+c \quad \text{or} \quad \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$$

جدول۴: فرمول های سری مکلورن

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots + \frac{u^k}{k!} + \dots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k u^{2k}}{(2k)!} + \dots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \dots + \frac{u^{2k}}{(2k)!} + \dots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\sinh u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots + \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \frac{17u^7}{315} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tanh u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} - \frac{17u^7}{315} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^k + \dots \qquad (-1,1)$$

$$\frac{1}{u} = 1 - (u-1) + (u-1)^2 - (u-1)^3 + (u-1)^4 - \dots \qquad (0,2)$$

$$\ln u = (u-1) - \frac{(u-1)^2}{2} + \frac{(u-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^k (u-1)^{k+1}}{k+1} + \dots \qquad (0,2)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \dots + \frac{(-1)^k u^{k+1}}{k+1} + \dots \qquad (-1,1)$$

$$\tan^{-1} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{2k+1} + \dots \qquad [-1,1]$$

$$\sin^{-1} u = u + \frac{u^3}{2\times 3} + \frac{1\times 3u^5}{2\times 4\times 5} + \frac{1\times 3\times 5\times u^7}{2\times 4\times 6\times 7} + \dots + \frac{1\times 3\times 5\dots(2k-3)u^{2k-1}}{2\times 4\times 6\dots(2k-2)(2k-1)} + \dots \qquad [-1.1]$$

$$(1+u)^p = 1 + pu + \frac{p(p-1)}{2!}u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3 + \dots$$

مراجع

[1] R.A.Adams ,Single Variable Calculus ,5th ed,Addision-Wesley ,2003.

[2] I.A.Maron ,Problems in Calculus of One Variable ,Mir Pub ,1988.

[3] B.Demidovich ,Problems in Mathematical Analysis ,Mir Pub.

[4] G.Bradley ,Calculus ,Printice-Hall ,1999.

[5] A.Jeffrey ,Handbook of Mathematical Formulas and Integrals ,4th ed ,Elsevier ,2008.

[6] T.M.Apostol ,Calculus Volume1 ,Second ed,1967.

[7] J.Stewart ,Calculus , 6th ed ,Thomson Brooks, 2008.

Calculus 1

By : H. Faramarzi