ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

انتگرال روی خم (یا انتگرال خط)

تعریف انتگرال روی خم

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار، و $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری قطعه‌به‌قطعه هموار از خم $\mathcal{C}$ است. فرض کنید که $\operatorname{Im}(\gamma) = \mathcal{C} \subseteq D$.

افراز P از $[a,b]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، طول قطعه‌ای از تصویر γ که بین $\gamma(t_{i-1})$ و $\gamma(t_i)$ قرار می‌گیرد را با Δs_i نمایش می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. حال، مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

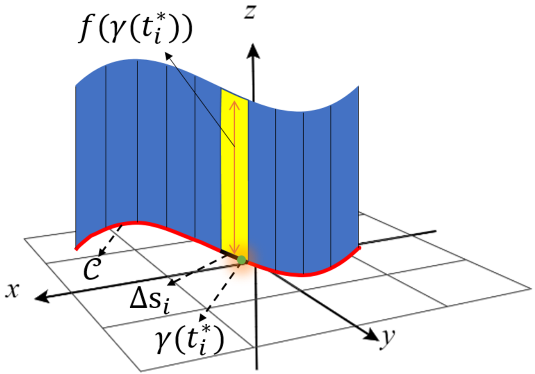
$$R(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))\Delta s_i$$

فرض کنید که:

$$\|P\| = \max\{\Delta s_i : 1 \leq i \leq n\}$$

اگر $\lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$ موجود باشد، آن‌گاه مقدار این حد را با $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ نمایش می‌دهیم، و به آن **انتگرال تابع f روی خم $\mathcal{C}$** گوییم.

شهود انتگرال روی خم



مطابق با شکل، اگر خم $\mathcal{C}$ به موازات صفحه‌ی xy باشد، آنگاه $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ برابر است با مساحت دیواره‌ی ایجادشده روی خم $\mathcal{C}$.

توجه:

انتگرال یک تابع دو متغیره روی یک خم در صفحه، به طور مشابه تعریف می‌شود.

توجه:

انتگرال روی خم $\int_C f\ ds$ را در صورتی که خم C بسته باشد، با نماد $\oint_C f\ ds$ نیز نمایش می‌دهیم.

کاربردی از انتگرال روی خم

فرض کنید که تصویر منحنی $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک سیم $\mathcal{C}$ و $\rho : \operatorname{Im}(\gamma) \to \mathbb{R}$ تابع چگالی این سیم باشد؛ یعنی به‌ازای هر $(x,y,z) \in \operatorname{Im}(\gamma)$، عدد $\rho(x,y,z)$ برابر است با چگالی سیم در نقطه‌ی (x,y,z) از سیم. در این صورت، داریم:

$$\text{جرم سیم} = m = \int_{\mathcal{C}} \rho \, ds$$

به منظور توضیحات بیش‌تر، توجه کنید که:

چنان‌چه توزیع جرم در سیم یک‌نواخت باشد، آن‌گاه نسبت جرم به طول سیم برابر با چگالی سیم تعریف می‌شود. در حالت کلی، اگر توزیع جرم در سیم لزوماً یک‌نواخت نباشد، المان‌های کوچکی از سیم در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها توزیع جرم تقریباً یک‌سان است. بنابراین، در نزدیکی یک نقطه‌ی $\gamma(t^*) = (x,y,z)$ از سیم داریم:

$$dm = \rho(\gamma(t^*))ds \implies m = \int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \rho \, ds$$

قرارداد:

※ از این پس، وقتی می‌گوییم خم $\mathcal{C}$ قطعه‌به‌قطعه هموار است، یعنی یک نمایش پارامتری قطعه‌به‌قطعه هموار دارد. هم‌چنین، در ادامه همه‌ی نمایش‌های پارامتری که برای یک خم قطعه‌به‌قطعه هموار در نظر گرفته می‌شوند، قطعه‌به‌قطعه هموار هستند (بدون اینکه لزوماً این لفظ آورده شود).

قضیه

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کراندار، و $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری از خم $\mathcal{C}$ است، طوری که $\mathcal{C} \subseteq D$. اگر $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ موجود باشد، آنگاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

⋇ قضیه‌ی بالا در حالت $\mathbb{R}^2$ نیز برقرار است؛ یعنی حالتی که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار و γ یک خم در صفحه است.

قضیه

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم است، و $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ توابعی هستند که انتگرال هر یک از آن‌ها روی خم $\mathcal{C}$ موجود است.

۱. $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ به نمایش پارامتری در نظر گرفته‌شده برای $\mathcal{C}$ بستگی ندارد؛ یعنی اگر $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ و $\eta : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ دو نمایش پارامتری از $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt = \int_c^d f(\eta(t))|\eta'(t)|\, dt$$

۲. داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \text{طول } \mathcal{C}$$

۳. به‌ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$، انتگرال $c_1 f + c_2 g$ روی خم $\mathcal{C}$ وجود دارد، و داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} (c_1 f + c_2 g)\, ds = c_1 \int_{\mathcal{C}} f\, ds + c_2 \int_{\mathcal{C}} g\, ds$$

ادامه‌ی قضیه

۴. داریم:

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f\,ds\right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f|\,ds$$

۵. اگر به‌ازای هر $(x,y,z) \in \mathcal{C}$، داشته باشیم $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$، آن‌گاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds \leq \int_{\mathcal{C}} g\,ds$$

۶. اگر $M = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathcal{C}\}$، آن‌گاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds \leq M \times (\text{طول } \mathcal{C})$$

ادامه‌ی قضیه

۷. فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم با نمایش پارامتری $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ است. همچنین، فرض کنید که افراز P از $[a,b]$ به صورت زیر وجود دارد:

$$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$$

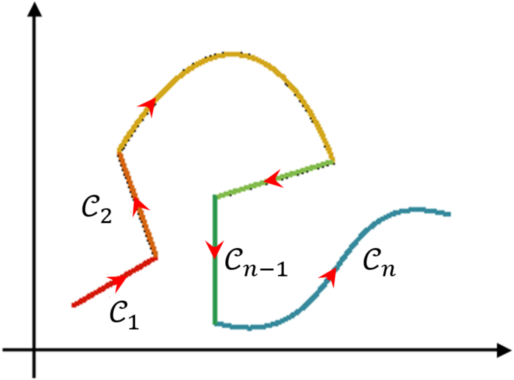
که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، منحنی $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^3$ چنان موجود است که:

$$\mathcal{C}_i := \operatorname{Im}(\gamma_i) = \operatorname{Im}\left(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\right)$$

حال، فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع است با $\mathcal{C} \subseteq D$. در این صورت، انتگرال f روی $\mathcal{C}$ موجود است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، انتگرال f روی $\mathcal{C}_i$ موجود باشد، و در این صورت، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} f\, ds$$

ادامه‌ی قضیه



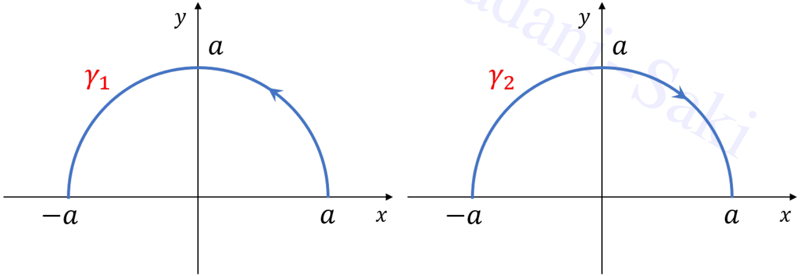
$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$$

مثال

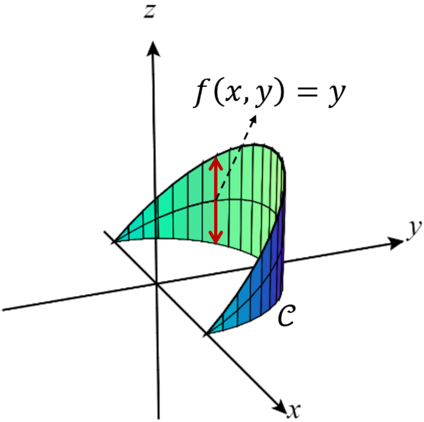
فرض کنید که $a > 0$ و $\mathcal{C}$ نیم‌دایره‌ی بالایی $x^2 + y^2 = a^2$ است. دو نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر بگیرید، و سپس با استفاده از هر دوی این نمایش‌ها، مساحت دیواره‌ی ساخته‌شده روی خم $\mathcal{C}$ به‌وسیله‌ی تابع $f(x, y) = y$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (a\cos(t), a\sin(t)), & 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma_2(t) = (t, \sqrt{a^2 - t^2}), & -a \leq t \leq a \end{cases}$$

پاسخ:



ادامه‌ی مثال



دیواره‌ی بناشده روی خم C به‌وسیله‌ی تابع $f(x, y) = y$

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$\gamma_1'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t)) \implies |\gamma_1'(t)| = a$$

$$\gamma_2'(t) = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \implies |\gamma_2'(t)| = \sqrt{1+\frac{t^2}{a^2-t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(\gamma_1(t))|\gamma_1'(t)|\,dt &= \int_0^\pi af(a\cos(t), a\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^\pi a^2\sin(t)\,dt = a^2\left(-\cos(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2a^2\end{aligned}$$

همچنین، داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(\gamma_2(t))|\gamma_2'(t)|\,dt &= \int_{-a}^a f\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{a^2-t^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = a\int_{-a}^a dt = 2a^2\end{aligned}$$

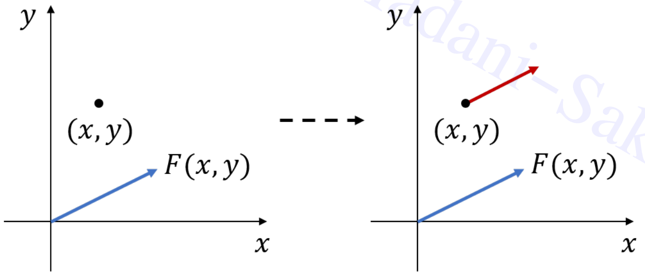
میدان‌های برداری

هر تابع به صورت $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری نامیده می‌شود. بنابراین، یک تابع برداری F روی $\mathbb{R}^n$، به هر بردار $(x_1, \ldots, x_n)$ از دامنه‌اش، برداری به صورت زیر نسبت می‌دهد:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (F_{(1)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{(n)}(x_1, \ldots, x_n))$$

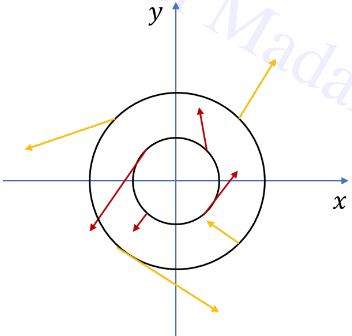
ترسیم میدان‌های برداری

میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به‌ترتیب در صفحه و فضا نمایش داد.
فرض کنید که $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری است. در این صورت، منظور از ترسیم میدان برداری F، نمایش بردارهایی در صفحه است که از بعضی نقاط (x, y) از دامنه‌ی F، به موازات بردار مکان $F(x, y)$ ترسیم می‌شوند. نمایش میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^3$ نیز مشابه است.



استفاده از دایره‌های هم‌مرکز به منظور نمایش میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^2$

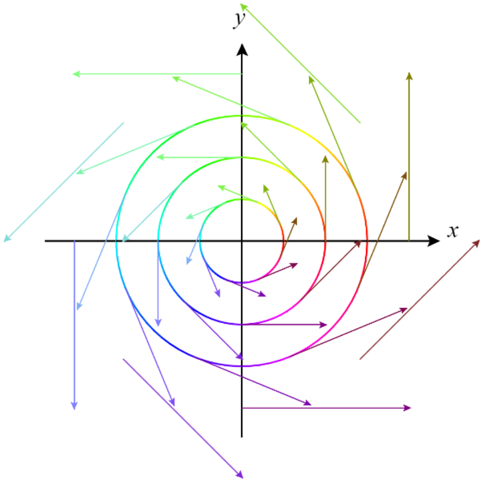
فرض کنید که $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری است. در این صورت، به منظور ترسیم F، می‌توانیم چند دایره‌ی هم‌مرکز با مرکز مبدأ را در صفحه مشخص کنیم، و مانند صفحه‌ی قبل، بردار F را به‌ازای تعدادی نقطه روی هر یک از این دایره‌ها مشخص کنیم. در چند مثالی که جلوتر می‌آیند، بردارهایی که با موازات بردار مکان F رسم می‌کنیم، دقیقاً هم‌اندازه با F هستند.



مثال

میدان برداری $F(x,y) = (-y, x)$ را رسم کنید.

پاسخ:



توجه:

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر است. در این صورت، ∇f یک میدان برداری است. در واقع، داریم:

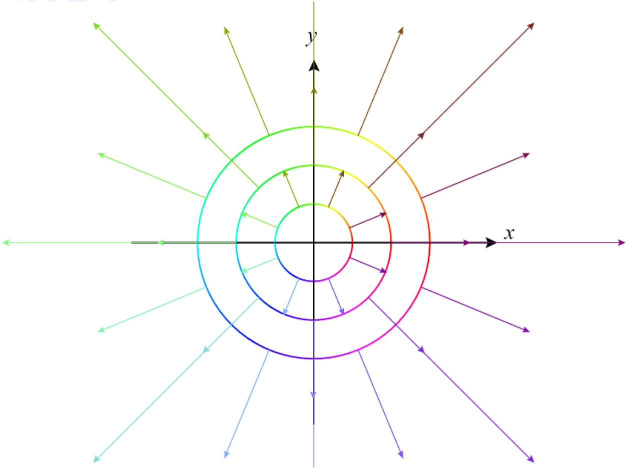
$$\nabla f : E \to E, \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

که در آن E درون D است.

مثال

فرض کنید که $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

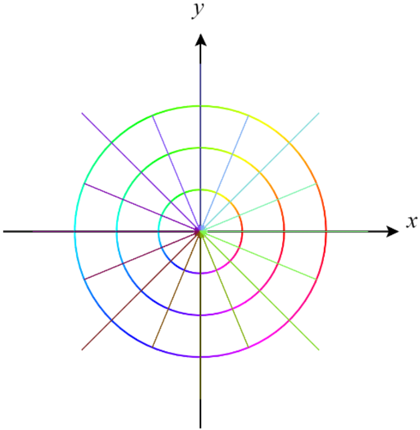
پاسخ: داریم $\nabla f(x,y)=(x,y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم:



مثال

فرض کنید که $f(x,y)=-\frac{x^2+y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

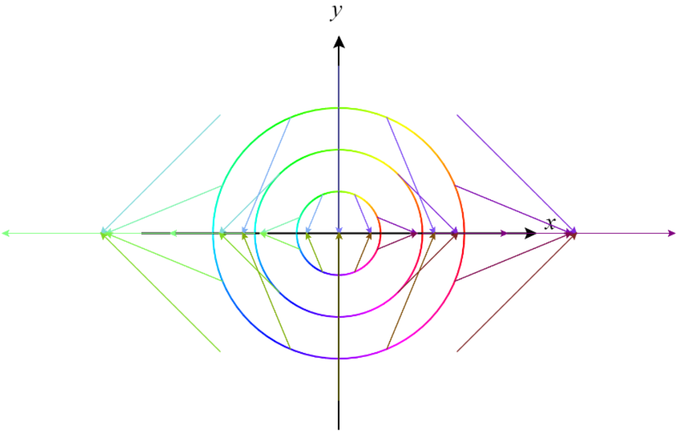
پاسخ: داریم $\nabla f(x,y)=(-x,-y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم (انتهای همه‌ی بردارها مبدأ است):



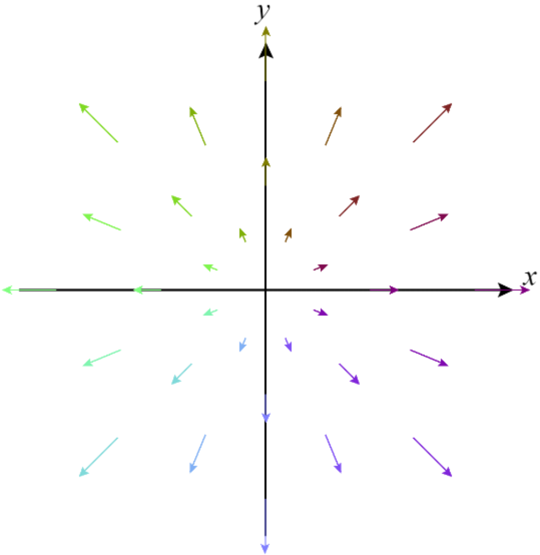
مثال

فرض کنید که $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

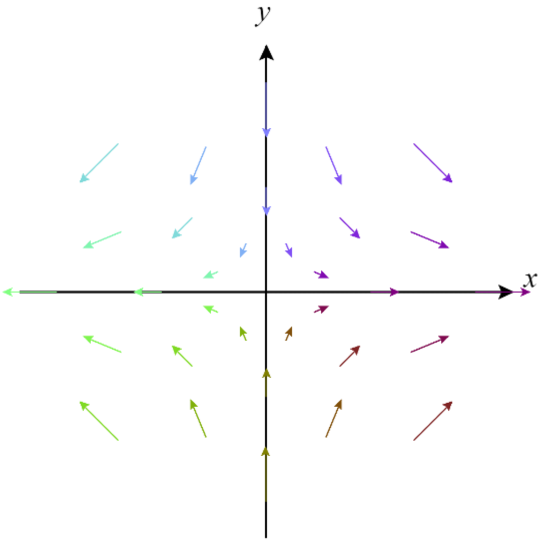
پاسخ: داریم $\nabla f(x,y) = (x,-y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم:



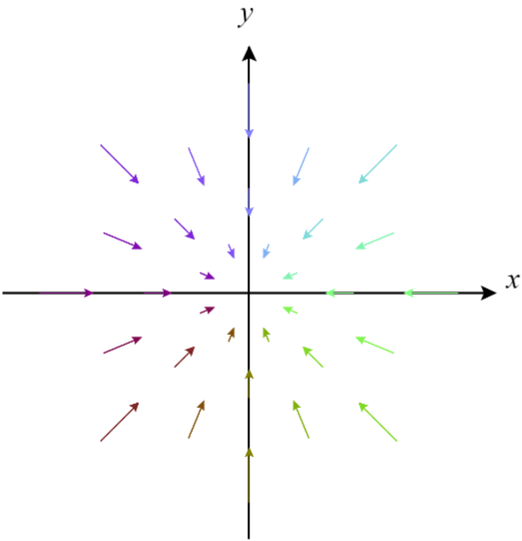
توجه: گاهی به منظور نمایش بهتر تغییرات بردارهای ترسیم‌شده‌ی یک میدان برداری، یک مقیاس در نظر می‌گیرند، و طول همه‌ی بردارهای ترسیم‌شده را در آن مقیاس ضرب می‌کنند، و سپس بردار را ترسیم می‌کنند. در ادامه، میدان‌های برداری مثال‌های قبل با مقیاس 0.25 ترسیم شده‌اند.



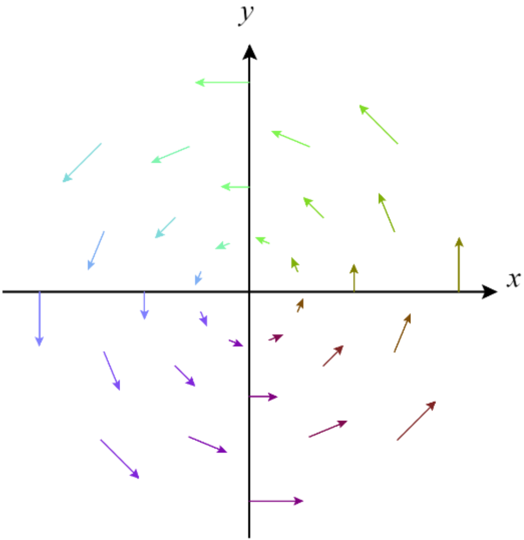
میدان برداری $F(x,y) = (x,y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y) = (x,-y)$ بامقیاس 0.25



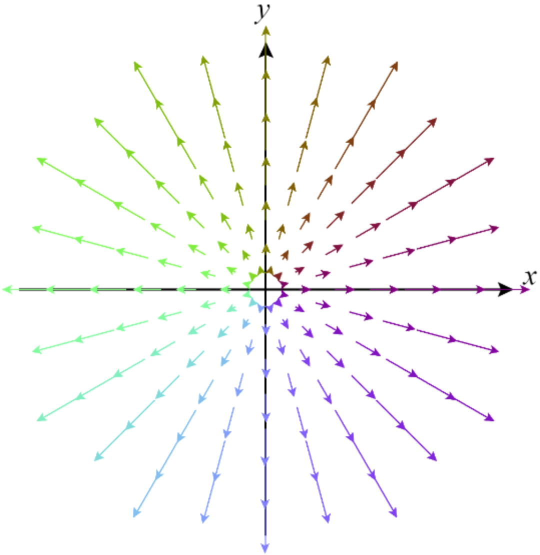
میدان برداری $F(x,y) = (-x,-y)$ بامقیاس 0.25



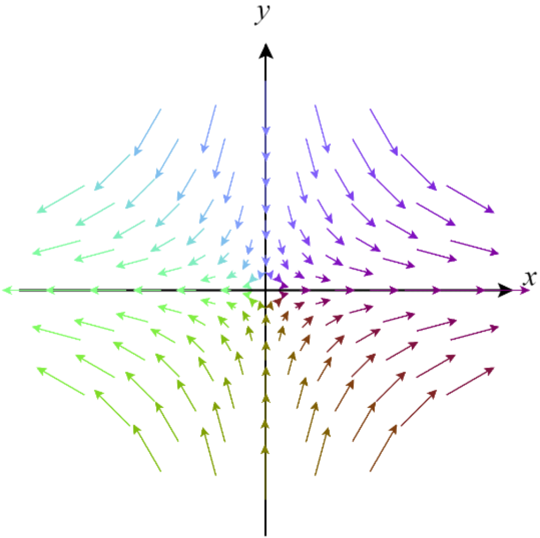
میدان برداری $F(x,y)=(-y,x)$ بامقیاس 0.25

توجه:

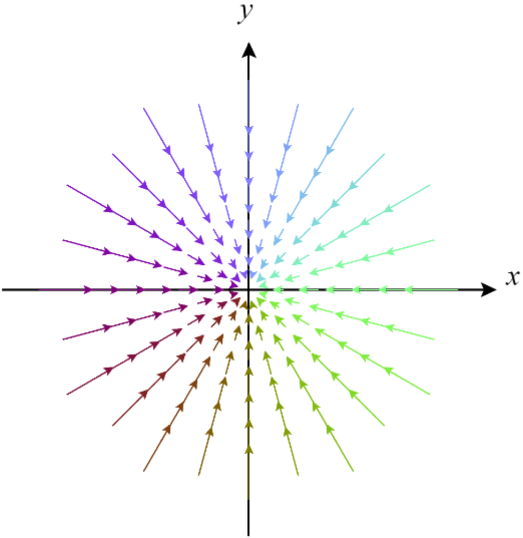
علاوه بر در نظر گرفتن یک مقیاس به منظور ترسیم یک میدان برداری، می‌توان تعداد دایره‌های هم‌مرکز و تعداد بردارهای نمایش داده‌شده روی هر دایره را افزایش داد تا تغییرات میدان برداری بهتر دیده شود. در چند صفحه‌ای که در ادامه می‌آیند، مثال‌هایی از میدان برداری که قبل‌تر ترسیم شدند، این‌بار با در نظر گرفتن تعداد دایره‌های هم‌مرکز بیش‌تری و تعداد بردارهای بیش‌تری روی هر دایره، ترسیم می‌شوند.



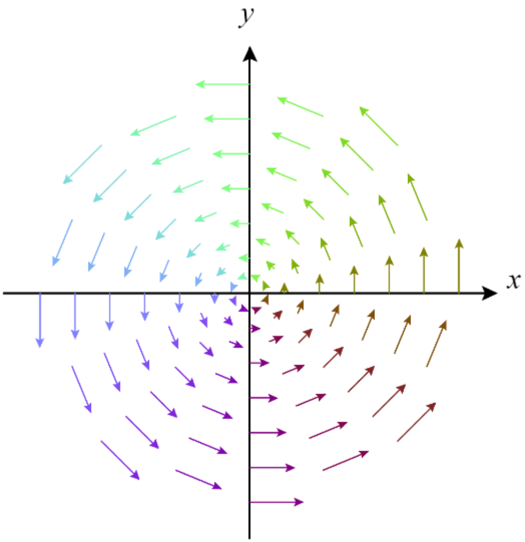
میدان برداری $F(x,y)=(x,y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y)=(x,-y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y)=(-x,-y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x, y) = (-y, x)$ بامقیاس 0.25

میدان‌های برداری پایستار

فرض کنید که $U \subseteq \mathbb{R}^n$ باز است. در این صورت، میدان برداری $F : U \to \mathbb{R}^n$ را پایستار گوییم، هرگاه تابع اسکالر $\phi : U \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\nabla\phi = F$. در این صورت، تابع ϕ را تابع پتانسیل F می‌گوییم.

مثال

میدان‌های برداری

$$F(x,y) = (x,y), \quad G(x,y) = (-x,-y), \quad H(x,y) = (x,-y)$$

همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدیم، همگی پایستار هستند.

قضیه (شرط لازم پایستاری)

فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری پایستار است، طوری که $F = (F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})$، و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $F_{(i)}$ مشتقات جزیی اول پیوسته دارد. در این صورت، داریم:

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n \qquad \frac{\partial F_{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{(j)}}{\partial x_i}$$

⋇ در حالت دوبعدی، فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری پایستار است، طوری که $F = (P, Q)$، و توابع اسکالر P و Q مشتقات جزیی اول پیوسته دارند. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

※ در حالت سه‌بعدی، فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری پایستار است، طوری که $F = (P, Q, R)$، و توابع اسکالر P، Q و R مشتقات جزیی اول پیوسته دارند. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

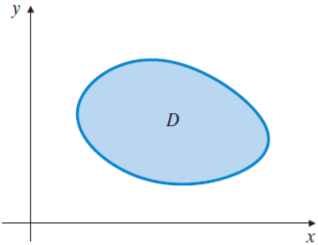
مثال

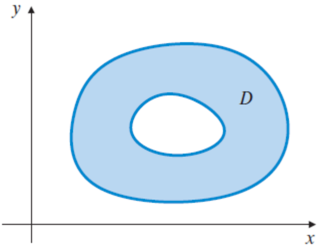
تابع $F(x, y) = (-y, x)$ پایستار نیست؛ زیرا داریم:

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

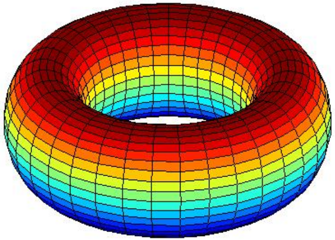
توجه:

شرط لازم یادشده در قضیه‌ی اخیر درباره‌ی پایستاری میدان‌های برداری، شرط کافی نیست؛ اما اگر دامنه‌ی میدان برداری مورد بحث همبند باشد و حفره نداشته باشد، آن‌گاه شرط لازم یادشده شرط کافی نیز خواهد بود.





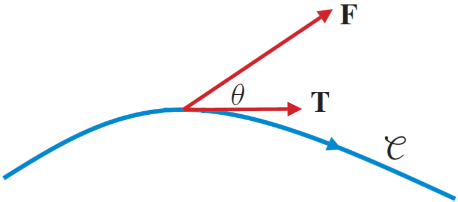
نمونه‌هایی از یک ناحیه‌ی همبند فاقد حفره، و یک ناحیه‌ی همبند دارای حفره



چنبره، به عنوان یک ناحیه‌ی دارای حفره در $\mathbb{R}^3$

انتگرال میدان‌های برداری در امتداد خم‌ها

فرض کنید که $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری و $\mathcal{C}$ یک خم است، و $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ یک نمایش پارامتری از $\mathcal{C}$ است، و داریم $\mathrm{Im}(r) = \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. همچنین، فرض کنید که به‌ازای هر $t \in [a, b]$، $T(t)$ بردار یکه‌ی مماس بر $\mathcal{C}$ در نقطه‌ی $r(t)$ است. در این صورت، انتگرال F در امتداد خم $\mathcal{C}$ برابر با انتگرال روی خم $\mathcal{C}$ به‌ازای تابع تصویر F روی T تعریف می‌شود؛ یعنی انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot T\, ds$ را داریم.



فرض کنید که به یک ذره نیروی ثابتی وارد می‌شود، و بر اثر این نیروی ثابت، ذره مسافتی را روی خط راست می‌پیماید. در این صورت، داریم:

$$(\text{بردار تغییر مکان ذره}) \cdot (\text{نیروی واردشده}) = \text{کار انجام‌شده به‌وسیله‌ی نیروی واردشده}$$

حال، فرض کنید که نیروی وارد بر ذره در هر نقطه‌ی (x, y, z) از فضای $\mathbb{R}^3$ تابعی از (x, y, z) است، و هم‌چنین مسیر حرکت ذره روی یک خم است. بنابراین، می‌توان فرض کرد که نیروی وارد بر ذره یک میدان برداری $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ است، و بر اثر این نیرو، ذره روی خمی مثل $\mathcal{C}$ حرکت می‌کند. فرض کنید که $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای خم $\mathcal{C}$ با متغیر زمان است. در این صورت، وقتی که ذره تغییر مکان کوچک dr را می‌دهد، می‌توان فرض کرد که حرکت ذره روی خط راست است. بنابراین، اگر dw کار انجام‌شده به‌وسیله‌ی نیروی F در این تغییر مکان باشد، آن‌گاه داریم:

$$dw = F \cdot dr$$

توجه کنید که $dr = r'dt$. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} dw &= F\cdot(r'dt) = F\cdot(|r'|Tdt) \\ &= F\cdot\left(\frac{ds}{dt}Tdt\right) = (F\cdot T)ds \\ &= |F|\underbrace{|T|}_{1}\cos(\theta) = |F|\cos(\theta) \end{aligned}$$

که در آن θ زاویه‌ی بین F و T است. بنابراین، داریم:

$$w = \int_{\mathcal{C}} dw = \int_{\mathcal{C}} F\cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F\cdot T\,ds = \int_{\mathcal{C}} |F|\cos(\theta)\,ds$$

فرض کنید که $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. پس، داریم $dr = (dx, dy, dz)$. حال، اگر $F = (P, Q, R)$، آن‌گاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot T\,ds = \int_{\mathcal{C}} F\cdot dr = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$$

مثال

فرض کنید که $F = (y^2, 2xy)$ و $\mathcal{C}$ خمی با نقطه‌ی ابتدایی $(0,0)$ و نقطه‌ی انتهایی $(1,1)$ است. انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ را در هر یک از حالت‌های زیر بیابید:

۱. خم $\mathcal{C}$ در امتداد $y = x$ است.

۲. خم $\mathcal{C}$ در امتداد $y = x^2$ است.

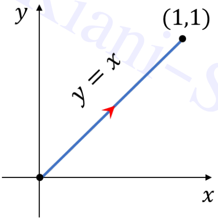
۳. خم $\mathcal{C}$ متشکل از پاره‌خط واصل $(0,0)$ به $(0,1)$، و پاره‌خط واصل $(0,1)$ به $(1,1)$ است.

به‌علاوه، اگر $\mathcal{C}'$ خمی از $(1,1)$ به $(0,0)$ و در امتداد $y = x$ باشد، آنگاه $\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr$ را بیابید.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۱:

نمایش پارامتری زیر را برای C در نظر می‌گیریم:



$$r(t) = (x(t), y(t)) = (t, t),$$

$$0 \leq t \leq 1$$

پس، داریم:

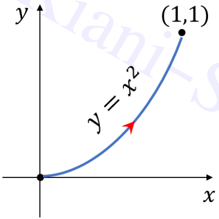
$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\, dx + \int_C Q\, dy = \int_C y^2\, dx + \int_C 2xy\, dy$$

$$= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\, dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^2)\, dt = \int_0^1 (3t^2)\, dt = (t^3)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1$$

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۲:



نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم:

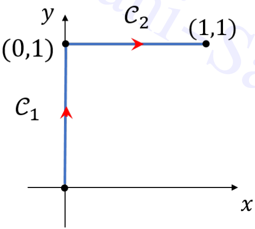
$$r(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}} P\, dx + \int_{\mathcal{C}} Q\, dy = \int_{\mathcal{C}} y^2\, dx + \int_{\mathcal{C}} 2xy\, dy \\
&= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\, dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 (t^4 + 2t^3(2t))\, dt = \int_0^1 5t^4\, dt = \left(t^5\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1
\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۳:



داریم $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. نمایش‌های پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}_1 : \quad r_1(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathcal{C}_2 : \quad r_2(t) = (t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

پس، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr$$

ادامه‌ی مثال

حال، داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} F\cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_1} Q\,dy\\ &= \int_{\mathcal{C}_1} y^2 \underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_1} 2\underbrace{x}_{0} y\,dy = 0+0=0\end{aligned}$$

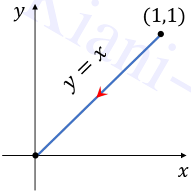
هم‌چنین، داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2} F\cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} Q\,dy\\ &= \int_{\mathcal{C}_2} y^2\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} 2xy \underbrace{dy}_{0} = \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1\end{aligned}$$

پس، در این حالت نیز داریم $\int_{\mathcal{C}} F\cdot dr = 1$.

ادامه‌ی مثال

پاسخ «به‌علاوه ...»:



نمایش پارامتری زیر را برای C' در نظر می‌گیریم:

$$r(t) = (1-t, 1-t), \quad 0 \le t \le 1$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{C'} F \cdot dr &= \int_{C'} P\,dx + \int_{C'} Q\,dy = \int_{C'} y^2\,dx + \int_{C'} 2xy\,dy \\
&= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(-(1-t)^2 - 2(1-t)^2\right)\,dt \\
&= \int_0^1 -3(1-t)^2\,dt = \left((1-t)^3\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = -1
\end{aligned}$$

توجه:

در مثال قبل، خم $\mathcal{C}$ در قسمت (۱) و خم $\mathcal{C}'$ هر دو در امتداد $y = x$ اما در خلاف جهت هم بودند، و دیدیم که انتگرال‌های $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ و $\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr$ قرینه شدند.

در حالت کلی، اگر $\mathcal{C}$ یک خم در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشد و $-\mathcal{C}$ همان $\mathcal{C}$ باشد اما در خلاف جهت آن، آنگاه داریم:

$$\int_{-\mathcal{C}} F \cdot dr = -\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$$

توابع اسکالر هموار و میدان‌های برداری هموار

※ تابع اسکالر $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را **هموار** گوییم، هرگاه مشتقات جزیی اول f موجود و پیوسته باشند.

※ میدان برداری $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را هموار گوییم، هرگاه با فرض

$$F = (F_{(1)}, \dots, F_{(n)})$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، تابع اسکالر $F_{(i)} : D \to \mathbb{R}$ هموار باشد.

قضیه

فرض کنید که U یک ناحیه‌ی همبند و باز در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ است، و F یک میدان برداری هموار بر U است. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. F روی U پایستار است.

۲. به‌ازای هر خم بسته‌ی $\mathcal{C}$ در U، داریم $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$.

۳. به‌ازای هر دو نقطه‌ی P_0 و P_1 در U، انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ به‌ازای همه‌ی خم‌های $\mathcal{C}$ در U از P_0 به P_1، مقدار یکسانی دارد (یعنی این انتگرال فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی $\mathcal{C}$ بستگی دارد).

تعمیم قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

با شرایط قضیه‌ی قبل، اگر F پایستار باشد، یعنی تابع اسکالر ϕ وجود داشته باشد که $\nabla\phi = F$، آن‌گاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot dr = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

که در آن $\mathcal{C}$ یک خم از P_0 به P_1 است. به‌خصوص، اگر $\mathcal{C}$ بسته باشد (یعنی $P_0 = P_1$)، آن‌گاه داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$$

مثال

فرض کنید که

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0\}$$

و میدان برداری $F: D\to\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x,y,z)=\left(xy-\sin(z),\frac{x^2}{2}-\frac{e^y}{z},\frac{e^y}{z^2}-x\cos(z)\right)$$

همچنین، فرض کنید که $\mathcal{C}$ خمی با نمایش پارامتری زیر است:

$$r(t)=\left(e^{\sin(t)+\cos(t)},2^{\sin(t)\cos^2(t)},1+t\right),\quad 0\leq t\leq\pi$$

مقدار انتگرال $\int_{\mathcal{C}}F\cdot dr$ را بیابید.

ادامه‌ی مثال

توجه کنید که C کاملاً بالای صفحه‌ی xy قرار دارد. بنابراین، می‌توانیم دامنه‌ی F را به ناحیه‌ی زیر محدود کنیم:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که U یک ناحیه‌ی باز و همبند است، و شامل هیچ حفره‌ای نیست. به‌علاوه، F تابعی هموار روی D است. همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\cos(z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{e^y}{z^2} \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$.

داریم:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

مثال

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = xy - \sin(z) & (1) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{e^y}{z} & (2) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{e^y}{z^2} - x\cos(z) & (3) \end{cases}$$

حال، از دو طرف رابطه‌ی (1) به صورت زیر بر حسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int (xy - \sin(z))\, dx = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) + g(y, z)$$

سپس، از دو طرف رابطه‌ی بالا به صورت زیر نسبت به y مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (2)، داریم:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$$

مثال

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{e^y}{z}$$

از دو طرف رابطه‌ی بالا به صورت زیر نسبت به y انتگرال می‌گیریم:

$$g(y,z) = \int -\frac{e^y}{z}\,dy = -\frac{e^y}{z} + h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + h(z)$$

سپس، از دو طرف رابطه‌ی بالا به صورت زیر نسبت به z مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + h'(z)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (3)، داریم:

$$-x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + h'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)$$

مثال

بنابراین، داریم $h'(z) = 0$، پس عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. در نهایت، نشان دادیم که F پایستار است، و داریم:

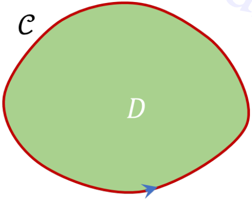
$$F = \nabla\phi, \qquad \phi(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + c$$

در نهایت، بنابر تعمیم قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم:

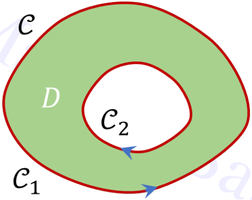
$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \phi(r(\pi)) - \phi(r(0)) = \phi(e^{-1}, 1, 1+\pi) - \phi(e, 1, 1)$$

جهت‌گذاری مثبت مرز یک ناحیه در صفحه نسبت به آن ناحیه

فرض کنید که D ناحیه‌ای در صفحه و $\mathcal{C}$ مرز آن است. می‌گوییم $\mathcal{C}$ دارای جهت‌گذاری مثبت نسبت به D است، هرگاه وقتی روی $\mathcal{C}$ و در جهت $\mathcal{C}$ حرکت می‌کنیم، ناحیه‌ی D در سمت چپ ما قرار بگیرد.



خم $\mathcal{C}$ با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D



خم $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D

قضیه‌ی گرین

فرض کنید که D ناحیه‌ای بسته و منتظم در $\mathbb{R}^2$ است با مرز $\mathcal{C}$ متشکل از یک یا چند خم قطعه‌به‌قطعه هموار که خودشان را قطع نمی‌کنند. اگر جهت‌گذاری $\mathcal{C}$ نسبت به D مثبت باشد، و $F = (P, Q)$ یک میدان برداری هموار روی D باشد، آن‌گاه داریم:

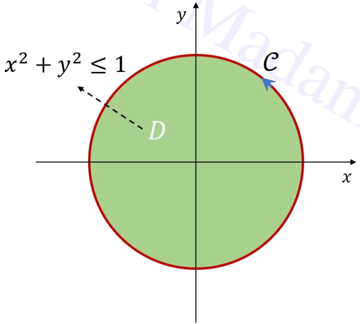
$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA_{x,y}$$

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ دایره‌ی یکه با جهت مثلثاتی است. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(7y + \sin(x^{100})\right) dx + \left(4x - \sqrt[100]{27 + y^2}\right) dy$$

پاسخ: فرض کنید که D دیسک یکه‌ی بسته است. در این صورت، $\mathcal{C}$ مرز D است، و جهت مثلثاتی برای $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت است.



ادامه‌ی مثال

قرار می‌دهیم:

$$F = (P, Q) = (7y + \sin(x^{100}), 4x - \sqrt[100]{27 + y^2})$$

در این صورت، F یک میدان برداری هموار روی D است. پس، بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} (7y + \sin(x^{100}))dx + \left(4x - \sqrt[100]{27 + y^2}\right) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y}$$

داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 7$$

بنابراین، داریم:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y} = \iint_D (4 - 7) dA_{x,y} = -3 \times (\text{مساحت } D)$$

بنابراین، انتگرال داده‌شده برابر است با -3π.

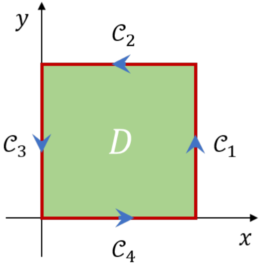
مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ مربعی با رئوس $(0,0)$، $(2,0)$، $(0,2)$ و $(2,2)$، و در جهت مثلثاتی است. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(2xy + e^{\cos(x^2)}\right) dx + \left(4x^2 + e^{\sin(y^2)}\right) dy$$

پاسخ: فرض کنید که D ناحیه‌ی مربعی بسته با رئوس بالا است. در این صورت، $\mathcal{C}$ مرز D است، و جهت مثلثاتی برای $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت است.

مطابق با شکل، $\mathcal{C}$ اجتماع چهار پاره‌خط است.



ادامه‌ی مثال

قرار می‌دهیم:

$$F=(P,Q)=\left(2xy+e^{\cos(x^2)},4x^2+e^{\sin(y^2)}\right)$$

در این صورت، F یک میدان برداری هموار روی D است. پس، بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}}\left(2xy+e^{\cos(x^2)}\right)dx+\left(4x^2+e^{\sin(y^2)}\right)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA_{x,y}$$

داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=8x,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x$$

بنابراین، داریم:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA_{x,y}=\iint_D(8x-2x)dA_{x,y}=\int_0^2\int_0^2 6x\,dxdy$$

$$=2\left(3x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=24$$

کاربرد قضیه‌ی گرین در محاسبه‌ی مساحت

فرض کنید که D ناحیه‌ای بسته و منتظم در صفحه است، و $\mathcal{C}$ مرز D است، که به طور مثبت نسبت به D جهت‌گذاری شده است. در این صورت، اگر میدان برداری $F = (P, Q)$ را روی D چنان در نظر بگیریم که

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

آن‌گاه بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$\text{مساحت } D = \iint_D dA_{x,y} = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$$

به طور مثال، میدان‌های برداری زیر در شرط بالا صدق می‌کنند:

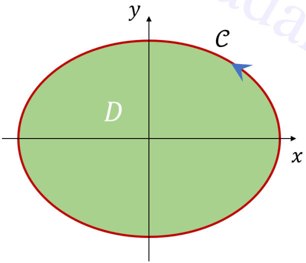
$$F(x,y) = (0, x), \quad F(x,y) = (-y, 0), \quad F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

مثال

مساحت محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید که $\mathcal{C}$ بیضی داده‌شده، و D ناحیه‌ی محدودشده به $\mathcal{C}$ است. خم $\mathcal{C}$ را با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D در نظر بگیرید. اگر $F(x,y)=(P,Q)=(0,x)$، آن‌گاه بنابر کاربرد قضیه‌ی گرین در محاسبه‌ی مساحت داریم:

$$\text{مساحت } D=\oint_{\mathcal{C}} Pdx+Qdy=\oint_{\mathcal{C}} xdy$$



ادامه‌ی مثال

نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر بگیرید:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (a\cos(t), b\sin(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در این صورت، داریم:

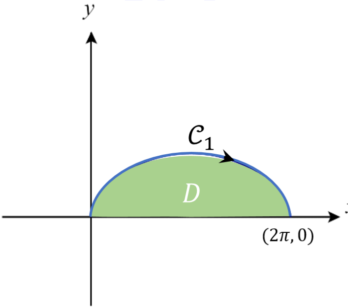
$$\begin{aligned} D \text{ مساحت} &= \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (a\cos(t))(b\cos(t))\,dt \\ &= ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = ab\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = \pi ab \end{aligned}$$

مثال

مساحت محدود به خم r به معادله‌ی زیر و محور x را بیابید.

$$r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\qquad r(t)=(t-\sin(t),1-\cos(t))$$

پاسخ: فرض کنید که $\mathcal{C}_1$ تصویر r، و D ناحیه‌ی محدودشده به $\mathcal{C}_1$ و محور x است.

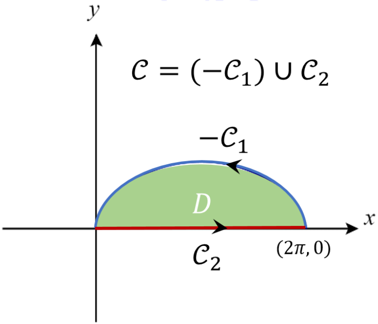


ادامه‌ی مثال

اگر $(-y,0) = (P,Q) = F(x,y)$، آن‌گاه بنابر کاربرد قضیه‌ی گرین در محاسبه‌ی مساحت داریم:

$$\text{مساحت } D = \oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\, dx$$

که در آن $\mathcal{C}$ خمی است که با اضافه‌کردن پاره‌خط واصل $(0,0)$ به $(2\pi,0)$ به دنبال $-\mathcal{C}_1$، به‌دست می‌آید.



ادامه‌ی مثال

به منظور استفاده از قضیه‌ی گرین، باید خمی که روی آن انتگرال می‌گیریم، بسته باشد. از این‌رو خم $\mathcal{C}_2$ را به دنبال $-\mathcal{C}_1$ اضافه کردیم تا خم بسته‌ی $\mathcal{C}$ به‌دست آید. توجه کنید که خم $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت دارد. نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:

$$r_2(t) = (t, 0), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$D \text{ مساحت} = -\oint_{-\mathcal{C}_1} y\,dx - \oint_{\mathcal{C}_2} \underbrace{y}_{0}\,dx = \oint_{\mathcal{C}_1} y\,dx$$

در حالی‌که:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} y\,dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\,dt$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

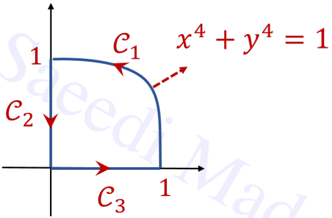
$$\oint_{\mathcal{C}_1} y\,dx = \left(t - 2\sin(t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = 3\pi$$

در نهایت، داریم:

$$\text{مساحت } D = 3\pi$$

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ خم بسته‌ی زیر است.



$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{3}y^3 + e^{\cos(x^2)}\right) dx + (x^4 + y^2 x + 3y) dy$$

ادامه‌ی مثال

پاسخ: فرض کنید که D ناحیه‌ی محصورشده به‌وسیله‌ی خم $\mathcal{C}$ است. واضح است که $\mathcal{C}$ نسبت به D دارای جهت‌گذاری مثبت است. اگر

$$F = (P, Q) = (\frac{1}{3}y^3 + e^{\cos(x^2)}, x^4 + y^2x + 3y)$$

آن‌گاه F تابعی هموار روی D است. پس، بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA_{x,y}$$

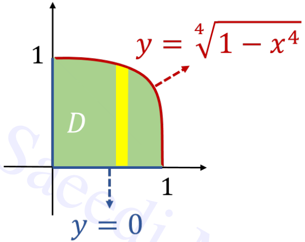
اما داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 + y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$$

پس، داریم:

$$I = \iint_D (4x^3 + y^2 - y^2)\, dA_{x,y} = \iint_D 4x^3\, dA_{x,y}$$

ادامه‌ی مثال



مطابق با شکل، D مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ است که:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$$

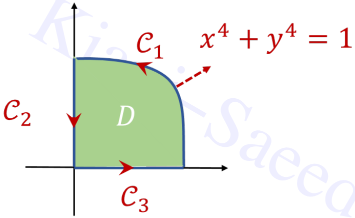
بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} 4x^3 \, dy dx = \int_0^1 4x^3 \sqrt[4]{1-x^4} \, dx$$

$$= \left(-\frac{4}{5} \sqrt[4]{(1-x^4)^5} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{5}$$

در ادامه، یک سؤال تستی آورده می‌شود که از مثال قبل استخراج شده است.

مثال



$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به خم $\mathcal{C}$ مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه توصیف ناحیه‌ی D است؟

۱. $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$

۲. $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $0 \le y \le \sqrt[4]{1-x^4}$

۳. $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \sqrt[4]{1-x^4}$

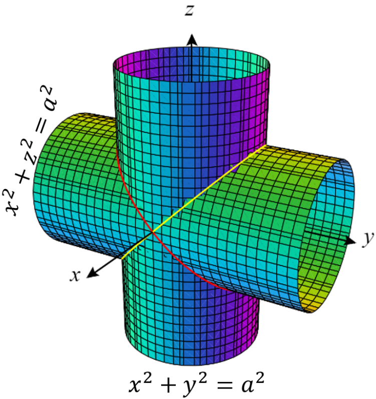
۴. $0 \le x \le \sqrt[4]{1-y^4}$ و $0 \le y \le \sqrt[4]{1-x^4}$

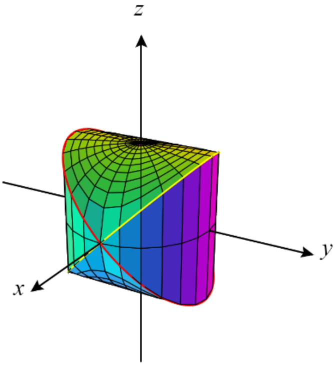
مثال‌های تکمیلی

مثال

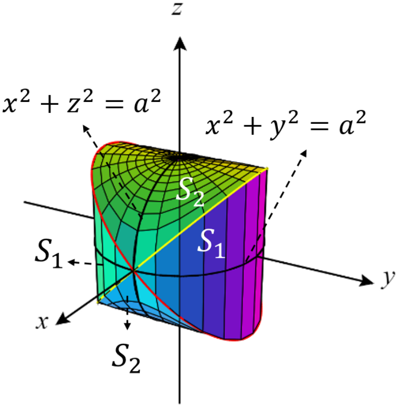
فرض کنید که $a > 0$. مساحت جانبی ناحیه‌ی محصور به دو استوانه‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

پاسخ:



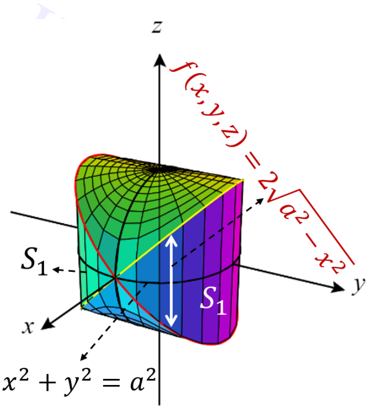


ادامه‌ی مثال



فرض کنید که S سطح جانبی ناحیه‌ی محصور به دو استوانه‌ی داده‌شده است. مطابق با شکل، می‌توان S را به دو ناحیه‌ی S_1 و S_2 تقسیم کرد، طوری که S_1 و S_2 دیواره‌هایی بناشده بر خم‌های به‌ترتیب $x^2 + y^2 = a^2$ (در صفحه‌ی xy) و $x^2 + z^2 = a^2$ (در صفحه‌ی xz) هستند.

ادامه‌ی مثال



ابتدا مساحت S_1 را محاسبه می‌کنیم.

مطابق با شکل، طولی که در نقطه‌ی (x, y, z) بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ بناشده است، برابر است با:

$$f(x, y, z) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

زیرا این طول فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی برخورد دو استوانه‌ی داده‌شده است، و با توجه به اینکه این فاصله قائم است، برابر است با تفاضل مقادیر z در نقاط برخورد. بنابراین، داریم:

$$f(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$S_1 \text{ مساحت} = \int_{x^2+y^2=a^2} f(x,y,z)\,ds$$

حال، نمایش پارامتری زیر را از دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ در نظر می‌گیریم:

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), 0), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), 0) \implies |\gamma'(t)| = a$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} S_1 \text{ مساحت} &= \int_0^{2\pi} f(a\cos(t), a\sin(t), 0)|\gamma'(t)|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t)}\,dt = 2a^2\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,dt \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

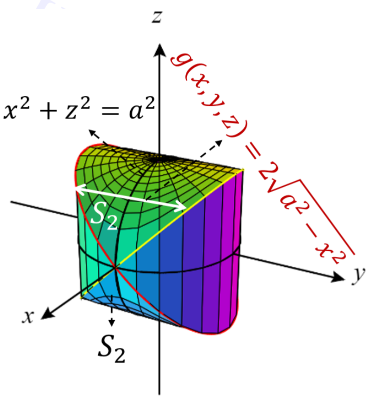
توجه کنید که:

$$\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(t)\,dt$$
$$= (-\cos(t))\Big|_{t=0}^{t=\pi} + (\cos(t))\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi}$$
$$= 2 + 2 = 4$$

در نتیجه، داریم:

$$S_1 \text{ مساحت} = 8a^2$$

ادامه‌ی مثال



حال، مساحت S_2 را محاسبه می‌کنیم.

مطابق با شکل، طولی که در نقطه‌ی (x, y, z) بر دایره‌ی $x^2 + z^2 = a^2$ بناشده است، برابر است با:

$$g(x, y, z) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

زیرا این طول فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی برخورد دو استوانه‌ی داده‌شده است، و با توجه به اینکه این فاصله صرفاً در راستای محور y است، برابر است با تفاضل مقادیر y در نقاط برخورد. بنابراین، داریم:

$$g(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

بنابراین، داریم:

$$\text{مساحت } S_2 = \int_{x^2+z^2=a^2} g(x,y,z)\, ds$$

حال، نمایش پارامتری زیر را از دایره‌ی $x^2 + z^2 = a^2$ در نظر می‌گیریم:

$$\eta(t) = (a\cos(t), 0, a\sin(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$\eta'(t) = (-a\sin(t), 0, a\cos(t)) \implies |\eta'(t)| = a$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\text{مساحت } S_2 &= \int_0^{2\pi} g(a\cos(t), 0, a\sin(t), 0)|\eta'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t)}\, dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} |\sin(t)|\, dt = 8a^2\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$S_{\text{مساحت}} = S_{1\,\text{مساحت}} + S_{2\,\text{مساحت}} = 8a^2 + 8a^2 = 16a^2$$

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم با یک نمایش پارامتری به صورت زیر است:

$$r(t) = (e^{t^2+\sin(t)}, \pi(1-t)e^{\sin(t)}, (1-t)e^{\sin(t^2)}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

همچنین، فرض کنید که میدان برداری F به صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌شود:

$$F(x, y, z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

مقدار $\int_{\mathcal{C}} F \cdot T\, ds$ را بیابید.

پاسخ: نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که F تابعی هموار روی $\mathbb{R}^3$ است. همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = z \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = x - \sin(yz) - zy\sin(yz) \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$.

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = yz & (1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = xz - z\sin(yz) & (2) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = xy - y\sin(yz) & (3) \end{cases}$$

حال، از دو طرف رابطه‌ی (1) به صورت زیر بر حسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int yz\,dx = xyz + g(y,z)$$

سپس، از دو طرف رابطه‌ی قبل به صورت زیر نسبت به y مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = xz + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ادامه‌ی مثال

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (2)، داریم:

$$xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - z\sin(yz)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -z\sin(yz)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به y از تساوی بالا، داریم:

$$g(y,z) = \cos(yz) + h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = xyz + \cos(yz) + h(z)$$

سپس، از دو طرف رابطه‌ی قبل به صورت زیر نسبت به z مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy - y\sin(yz) + h'(z)$$

ادامه‌ی مثال

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (3)، داریم:

$$xy - y\sin(yz) + h'(z) = xy - y\sin(yz)$$

پس، داریم $h'(z) = 0$. لذا عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. از این‌رو، داریم:

$$\phi = xyz + \cos(yz) + c$$

حال، بنابر تعمیم قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot T ds = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \phi(r(1)) - \phi(r(0))$$

توجه کنید که:

$$r(0) = (1, \pi, 1), \qquad r(1) = (e^{1+\sin(1)}, 0, 0)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot T ds = \phi(e^{1+\sin(1)}, 0, 0) - \phi(1, \pi, 1) = 1 - (\pi - 1) = 2 - \pi$$

در ادامه، دو سؤال تستی آورده می‌شوند که از مثال قبل استخراج شده‌اند.

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم با یک نمایش پارامتری به صورت زیر است:

$$r(t) = (e^{t^2+\sin(t)}, \pi(1-t)e^{\sin(t)}, (1-t)e^{\sin(t^2)}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

همچنین، فرض کنید که میدان برداری F به صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌شود:

$$F(x,y,z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

مقدار $\int_{\mathcal{C}} F \cdot T\, ds$ کدام است؟

۱. 0

۲. $1-\pi$

۳. $2-\pi$

۴. $3-\pi$

مثال

فرض کنید که میدان برداری F به صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌شود:

$$F(x, y, z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

در این صورت، کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = 0$، که در آن $\mathcal{C}_1$ خم $x^2 + 3y^2 = 1$ است.

۲. $\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = \pi$، که در آن $\mathcal{C}_2$ خم $x^4 + y^4 = 1$ است.

۳. $\int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr = 0$، که در آن $\mathcal{C}_3$ خم $x^2 + y^2 = 4$ است.

۴. F پایستار است.

مثال

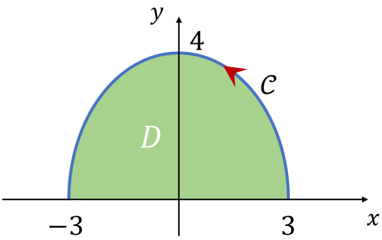
فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم و r یک نمایش پارامتری $\mathcal{C}$ به صورت زیر است:

$$r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(t) = (3\cos(t), 4\sin(t))$$

انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \left(e^{2x} - y - \frac{1}{2}\sin(2y) \right) dx + \left(e^{2y} + 2x\sin^2(y) \right) dy$$

پاسخ: فرض کنید D ناحیه‌ی محدودشده به $\mathcal{C}$ و محور x است.

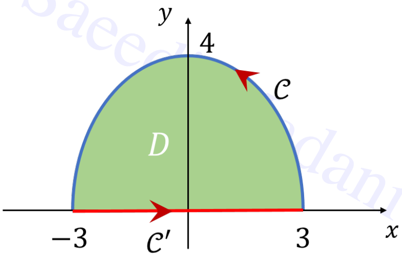


داریم $x = 3\cos(t)$ و $y = 4\sin(t)$،
که نتیجه می‌دهد $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.
بنابراین، D مجموعه‌ی همه‌ی نقاط
$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 1, \quad y \ge 0$$

ادامه‌ی مثال

از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم. بنابراین، باید خمی که روی آن انتگرال می‌گیریم، بسته باشد. از این‌رو خم $\mathcal{C}'$ را به دنبال $\mathcal{C}$ اضافه می‌کنیم تا خم بسته‌ی $\mathcal{C}''$ به‌دست آید. توجه کنید که خم $\mathcal{C}''$ مرز D است، و نسبت به D جهت‌گذاری مثبت دارد.



$$\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$$

داریم:

$$F(x,y) = (P,Q) = (e^{2x} - y - \frac{1}{2}\sin(2y), e^{2y} + 2x\sin^2(y))$$

ادامه‌ی مثال

بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}''} F\cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y}$$

در حالی‌که:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\sin^2(y),\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1-\cos(2y)$$

و

$$\oint_{\mathcal{C}''} F\cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F\cdot dr + \int_{\mathcal{C}'} F\cdot dr = I + \int_{\mathcal{C}'} F\cdot dr$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathcal{C}'} F\cdot dr + \iint_D \left(2\sin^2(y)+1+\cos(2y)\right) dA_{x,y} \\ &= -\int_{\mathcal{C}'} F\cdot dr + 2\iint_D dA_{x,y} = -\int_{\mathcal{C}'} F\cdot dr + 2\frac{(3)(4)\pi}{2} \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، کافی است که $\int_{C'} F \cdot dr$ را بیابیم. نمایش پارامتری زیر را برای C' در نظر می‌گیریم:

$$r_1(t) = (t, 0), \qquad -3 \le t \le 3$$

لذا، داریم:

$$\int_{C'} F \cdot dr = \int_{C'} P dx + Q \underbrace{dy}_{0} = \int_{-3}^{3} P(x(t), y(t))x'(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{1} e^{2x(t)} x'(t)\, dt = \int_{-3}^{3} e^{2t}\, dt = \left(\frac{e^{2t}}{2}\right)\Bigg|_{t=-3}^{t=3}$$

$$= \frac{e^{6} - e^{-6}}{2}$$

در نهایت، داریم:

$$I = -\int_{C'} F \cdot dr + 12\pi = -\frac{e^{6} - e^{-6}}{2} + 12\pi$$

یادآوری:

یک نمایش پارامتری برای یک پاره‌خط با نقطه‌ی ابتدایی A و نقطه‌ی انتهایی B در $\mathbb{R}^n$، به صورت زیر است:

$$r(t) = A + (B - A)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

مثال

فرض کنید که میدان برداری F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x, y, z) = (yz\cos(xz) - e^z\sin(x), \sin(xz), xy\cos(xz) + e^z\cos(x))$$

۱. مطلوب است تابع اسکالر ϕ که $\nabla\phi = F$.

۲. فرض کنید که میدان برداری G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(x, y, z) = (y + yz\cos(xz) - e^z\sin(x), \sin(xz), x + xy\cos(xz) + e^z\cos(x))$$

مقدار انتگرال $\int_C G \cdot dr$ را بیابید، که در آن C خمی است متشکل از دو پاره‌خط جهت‌دار، اولی از نقطه‌ی $A = (1, 1, 1)$ به نقطه‌ی $B = (1, -1, 1)$، و دومی از نقطه‌ی $B = (1, -1, 1)$ به نقطه‌ی $C = (1, 0, 0)$.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۱: نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که F تابعی هموار روی $\mathbb{R}^3$ است. همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z\cos(xz) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -xyz\sin(xz) - e^z\sin(x) \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x\cos(xz) \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$.

داریم:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = yz\cos(xz) - e^z\sin(x) & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin(xz) & (2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = xy\cos(xz) + e^z\cos(x) & (3) \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

حال، از دو طرف رابطه‌ی (1) به صورت زیر بر حسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int (yz\cos(xz) - e^z\sin(x))\,dx = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + g(y,z)$$

سپس، از دو طرف رابطه‌ی قبل به صورت زیر نسبت به y مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \sin(xz) + \frac{\partial g}{\partial y}$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (2)، داریم:

$$\sin(xz) + \frac{\partial g}{\partial y} = \sin(xz)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \implies g(y,z) = h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + h(z)$$

ادامه‌ی مثال

سپس، از دو طرف رابطه‌ی قبل به صورت زیر نسبت به z مشتق جزیی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy\cos(xz) + e^z\cos(x) + h'(z)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی (3)، داریم:

$$xy\cos(xz) + e^z\cos(x) + h'(z) = xy\cos(xz) + e^z\cos(x)$$

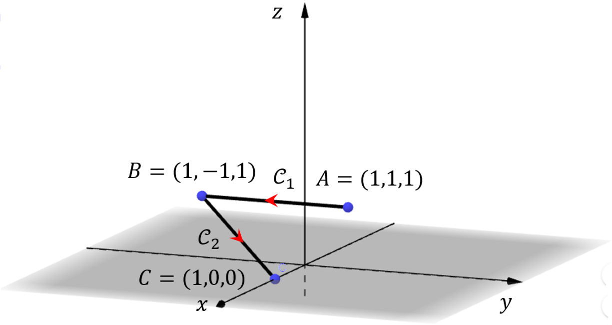
بنابراین، داریم $h'(z) = 0$. پس عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. بنابراین، داریم:

$$\phi = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + c$$

پاسخ ۲: توجه می‌کنیم که $G(x,y,z) = F(x,y,z) + (y,0,x)$. پس، داریم:

$$\int_C G\cdot dr = \int_C F\cdot dr + \int_C (y,0,x)\cdot dr$$

ادامه‌ی مثال



حال، بنابر تعمیم قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \phi(C) - \phi(A) = (1-e)\cos(1) - \sin(1)$$

بنابراین، کافی است که $I = \int_{\mathcal{C}} (y, 0, x) \cdot dr$ را بیابیم.

ادامه‌ی مثال

با توجه به اینکه $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$، داریم:

$$I = \int_{\mathcal{C}_1} (y, 0, x) \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} (y, 0, x) \cdot dr$$

نمایش‌های پارامتری زیر را از $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}_1 : \qquad r_1(t) = A + (B - A)t = (1, -2t + 1, 1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathcal{C}_2 : \qquad r_2(t) = B + (C - B)t = (1, t - 1, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

بنابراین، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}_1} (y, 0, x) \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} y \underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_1} x \underbrace{dz}_{0} = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} (y, 0, x) \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} y \underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_2} x \, dz$$

$$= \int_0^1 -1 \, dt = (-t)\Big|_{t=0}^{t=1} = -1$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم $I = -1$، و از این‌رو:

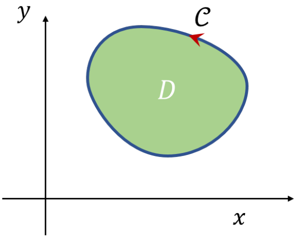
$$\int_{\mathcal{C}} G \cdot dr = (1-e)\cos(1) - \sin(1) - 1$$

مثال

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه‌ی بسته و منتظم در صفحه است، و $\mathcal{C}$ مرز قطعه‌به‌قطعه هموار ناحیه‌ی D است، طوری که $\mathcal{C}$ از مبدأ نمی‌گذرد و دارای جهت‌گذاری مثبت نسبت به D است. اگر E درون D باشد، نشان دهید:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = \begin{cases} 0 & ,(0,0) \notin E \\ 2\pi & ,(0,0) \in E \end{cases}$$

پاسخ:



فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ با $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

حالت اول: $(0,0) \notin E$.

در این صورت، D زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی F است، و F یک میدان برداری هموار است.

ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

در حالی‌که:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

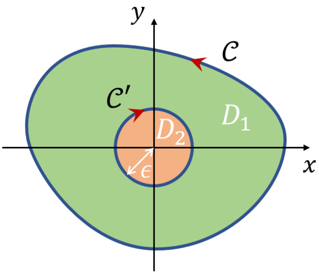
پس، بنابر قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA_{x,y} = 0$$

ادامه‌ی مثال

حالت دوم: $(0,0) \in E$.

تابع F در مبدأ تعریف نشده است، پس روی D هموار نیست. از این‌رو، نمی‌توان مستقیماً از قضیه‌ی گرین استفاده کرد. توجه کنید که $(0,0)$ یک نقطه‌ی درونی D است، و از این‌رو، $\epsilon > 0$ وجود دارد که دیسک بسته با شعاع ϵ و مرکز مبدأ نیز کاملاً در D قرار می‌گیرد.



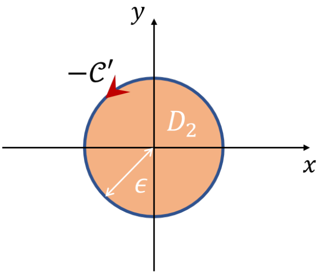
مطابق با شکل، داریم $D = D_1 \cup D_2$، و $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ و $-\mathcal{C}'$ به‌ترتیب مرزهای D_1 و D_2 با جهت‌گذاری‌های مثبت نسبت به D_1 و D_2 هستند. با توجه به اینکه $(0,0) \notin D_1$، بنابر حالت اول داریم:

$$\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} F \cdot dr = 0$$

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$I=\int_{\mathcal{C}} F\cdot dr=\underbrace{\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} F\cdot dr}_{0}+\int_{-\mathcal{C}'} F\cdot dr=\int_{-\mathcal{C}'} F\cdot dr=\int_{-\mathcal{C}'} Pdx+Qdy$$



نمایش پارامتری $r_1:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ را
برای $-\mathcal{C}'$ به صورت در نظر می‌گیریم:

$$r_1(t)=(\underbrace{\epsilon\cos(t)}_{x(t)},\underbrace{\epsilon\sin(t)}_{y(t)})$$

بنابراین، داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(P(r_1(t))x'(t)+Q(r_1(t))y'(t)\right)dt$$

ادامه‌ی مثال

پس، می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon \sin(t)}{\epsilon^2} (-\epsilon \sin(t)) + \frac{\epsilon \cos(t)}{\epsilon^2} (\epsilon \cos(t)) \right) \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$