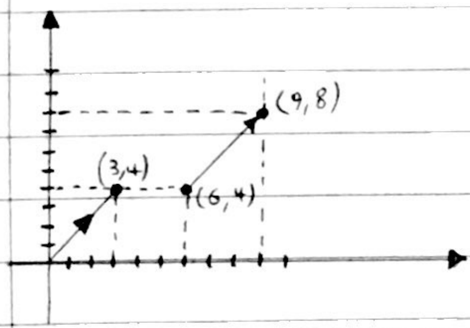
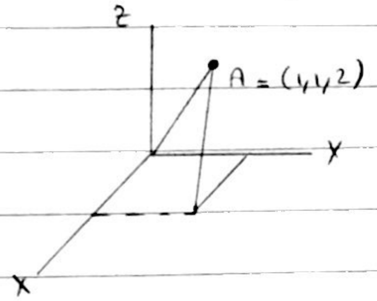
$$f^{(m)}(0) = (m!)\left(-m-(1/2)^{m+1}\right)$$

ریاضی عمومی ۲:

$\mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ y\in\mathbb{R} \end{matrix} \right\}$ $\quad \mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R} \}$ $\quad \mathbb{R}^n = \{ (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \mid x_1,x_2,\dots x_n\in\mathbb{R} \}$





نُرم: $\quad \|(x_1,x_2,\dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ $\quad$ If: $p = (x_1,x_2,\dots x_n) \longrightarrow \|p\| = |p| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$

فاصله‌ی بین P_1, P_2: $\quad \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots (x_n-y_n)^2}$

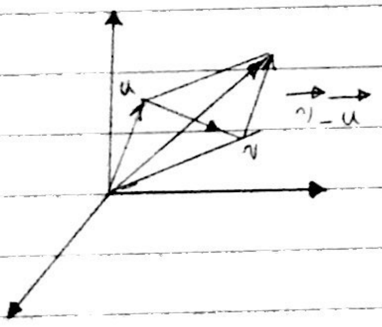
ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$: $\quad$ If $v = (x_1,x_2,\dots x_n)$ $u = (y_1,y_2,\dots,y_n) \longrightarrow uv = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

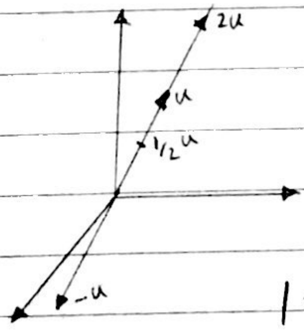
توجه: $\mathbb{R}^n$ با جمع و ضرب اسکالر زیر در نظر گرفته می‌شود:

$u = (u_1,u_2,\dots u_n)$ $\quad v = (v_1,\dots,v_n)$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots u_n+v_n)$ $\quad t\vec{u} = (tu_1, tu_2, \dots, tu_n)$

شهود جمع و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^3$



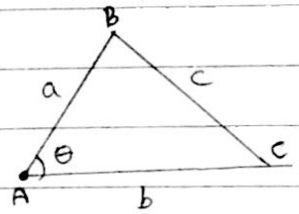


توجه: اگر $v\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$ داریم:

$$|tu| = |t||u|$$

قانون کسینوس‌ها:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

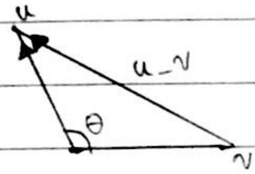


خواص ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$: $(u,v,w\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R})$

1) $u\cdot u=|u|^2$

2) $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$ 3) $(t\vec{u}\cdot v)=u\cdot(tv)=t(u\cdot v)$ 4) $u\cdot v=v\cdot u$

گزاره: اگر u, v در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند و زاویه‌ی بینشان برابر θ باشد، داریم: $u\cdot v=|u||v|\cos\theta$



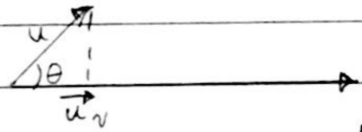
$$\underbrace{|u-v|^2=|u|^2+|v|^2-2|u||v|\cos\theta}_{\mathrm{I}} \qquad |u-v|^2=(u-v)\cdot(u-v)=$$

$$u\cdot u+v\cdot v-2u\cdot v=\underbrace{|u|^2+|v|^2-2u\cdot v}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{II}\longrightarrow u\cdot v=|u||v|\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{u\cdot v}{|u||v|} \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{u\cdot v}{|u||v|}\right)$$

توجه: اگر $v\in\mathbb{R}^n$، $\hat{v}$ بردار هم‌راستای v باشد و $|\hat{v}|=1$ داریم: $\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|v|}$ $\quad |\hat{v}|=\frac{1}{|v|}|\vec{v}|=1$

تصویر بردار u روی بردار v را که آن را با $\vec{u}_v$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر به دست می‌آید:



$$|\vec{u}_v|=|u|\cos\theta\longrightarrow u_v=|u_v|\,\hat{v} \qquad \vec{u}_v=|u|\cos\theta\frac{\vec{v}}{|v|}=\frac{|v||u|\cos\theta}{|v|^2}\vec{v}$$

$$\longrightarrow u_v=\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\vec{v}$$

ضرب خارجی در $\mathbb{R}^3$:

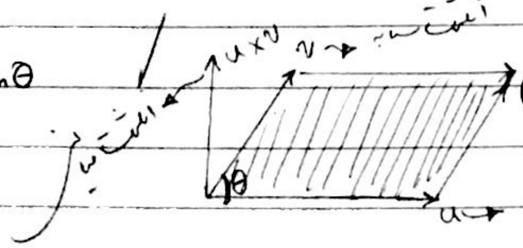
If $u,v\in\mathbb{R}^3$ $\quad u\times v=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \vec{u}_1&\vec{u}_2&\vec{u}_3\\ \vec{v}_1&\vec{v}_2&\vec{v}_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_1v_3-v_1u_3)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

خواص ضرب خارجی: اگر $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ ، $t\in\mathbb{R}$

1) $u\times u=0$ 2) $u\times v=-v\times u$

3) $u\times(v+w)=u\times v+u\times w$ 4) $t\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times(t\vec{v})=t(\vec{u}\times\vec{v})$ 5) $u\cdot(u\times v)=v(u\times v)=0$

6) $|u\times v|=|u||v|\sin\theta$

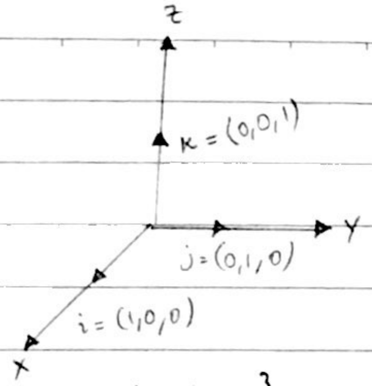


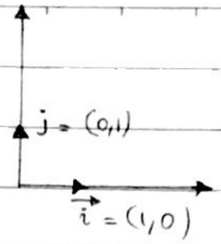
مساحت متوازی‌الاضلاع $=|u\times v|$

نتیجه به دست آمده از u, v, u×v را یک

نتیجه با دست راست درست می‌شوند

پایه استاندارد در $\mathbb{R}^n$:





$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow (a,b)=a\vec{i}+b\vec{j}$

$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad (a,b,c)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

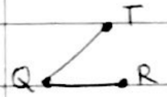
$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

پایه استاندارد در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر است : $e_1=(1,0,0,\dots 0)$ $e_2=(0,1,0,\dots 0)$, $e_i=(0,0,\dots,\underset{\text{مولفه iام}}{1},\dots 0)$ $e_n=(0,0,\dots,1)$

$(x_1,\dots,x_n)=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+\dots+x_n\vec{e_n}$

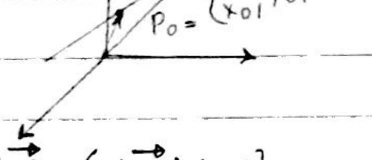
معادله‌ی صفحه و خط در $\mathbb{R}^3$: معادله صفحه P در حالتی که $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in P$ و $\vec{n}=(A,B,C)$ بر صفحه P عمود است به صورت :

$\vec{n}\cdot(Q-P_0)=0 \quad P=\{Q=(x,y,z)\mid \vec{n}\cdot(Q-P_0)=0\} \quad P=\{(x,y,z)\mid Ax+By+Cz=D=Ax_0+By_0+Cz_0\}$



توجه: اگر Q , R , T سه نقطه غیر هم‌راستا در P باشند. معادله صفحه P به صورت زیر به دست می‌آید:

$\vec{n}=TQ\times RQ \quad P=\{(x,y,z)\mid n\cdot((x,y,z)-Q)=0\}$



$l=\{P=P_0+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}=P_0+\underbrace{\langle\vec{v}\rangle}_{\text{ناوردار}}$

که در آن منظور از مجموعه $\langle v\rangle$ یعنی

$\langle\vec{v}\rangle=\{t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$

اگر $v=(a,b,c)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $P\in l$ هرگاه P به صورت $P=(x,y,z)=P_0+t\vec{v}=(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)$

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \longrightarrow \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$:

← چرا می‌گوییم پایه؟ چون با حاصل دو بردار مستقل خطی می‌توان کل $\mathbb{R}^2$ را ساخت

در $\mathbb{R}^2$: دو بردار ناصفر a , b که هم‌راستا نیستند را مستقل خطی گوییم (مضربی از همدیگر نیستند) ← دو بردار عمود بر هم مستقل خطی هستند

عبارت: $\underbrace{\langle A,B\rangle}_{\text{فضای تولید شده توسط } A,B} := \{\underbrace{tA+sB}_{\text{یک ترکیب خطی از } B,A} : t,s\in\mathbb{R}\}$

فرض کنید B , A دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ باشند. ادعا: $\langle A,B\rangle=\mathbb{R}^2$ ثابت می‌شود

← هر دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ گفته می‌شود

مثال: $\{i,j\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ تشکیل می‌دهد. B , A مستقل خطی‌اند، اگر و فقط اگر $\Leftrightarrow (xa+yb=0 \Rightarrow x=y=0)$

در $\mathbb{R}^3$: 3 بردار ناصفر A,B,C را مستقل خطی گوییم در $\mathbb{R}^3$ ، هرگاه حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط آن 3 بردار ناصفر باشد

مثال: i , j , k در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی هستند.

معادلاً: اگر $xA+yB+zC=0$ ، ادعا $x=y=z=0$

← هر 3 بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ ، یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ گوییم. (مثل $\{i,j,k\}$ برای $\mathbb{R}^3$ پایه است) ثابت می‌شود $\Rightarrow \langle A,B,C\rangle=\mathbb{R}^3$

توابع برداری و خم‌ها (منحنی‌ها) : $x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$ $r=r(t)$ تابع اسکالر $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x(t)i+y(t)j+z(t)k$ ، $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

تعریف: تابع $\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ که $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\dots,\gamma_n(t))$ برای هر $t\in I$ یک تابع برداری گوییم.

$\forall i=1,2,\dots,n \quad \gamma_i: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع اسکالر

مثال: $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ ، $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$

$x^2+y^2=R^2$

$$\begin{cases}\gamma_1(t)=R\cos t\\ \gamma_2=R\sin t\end{cases}$$

← شکل حاصل، یک دایره به مرکز مبدأ رسم می‌شود

متغیر آزاد: متغیری که در معادله ذکر نشده (نیامده)

نمودار: $\{(t, R\cos t, R\sin t) : t\in\mathbb{R}\}$ $\quad y^2+z^2=R^2$ $\quad x$ آزاد

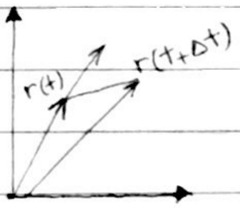
$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ ، $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

حد و پیوستگی: تابع برداری $\gamma(t)$ را در نظر بگیرید ($\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$) در این صورت: $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$ اگر و تنها اگر

"$\lim_{t\to t_0}\gamma_i(t)=l_i$"

$\gamma(t)$ را در $t=t_0$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=\gamma(t_0)$ یا معادلاً داریم: $\gamma(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر $\gamma_i(t)$ ها در $t=t_0$ پیوسته باشند.

مشتق‌پذیری:



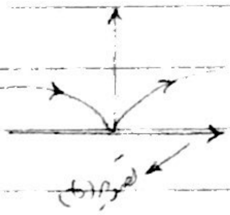
در صورت وجود، $r'(t)$ یا $\frac{dr}{dt}$ یا $v(t)$ نمایش داده می‌شود و به آن بردار سرعت می‌گوییم. $\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$

تندی: $v(t)=|v(t)|$ (سرعت)

شتاب: $a(t)=v'(t)=r''(t)=\frac{d^2r}{dt}$

* $\gamma(t)$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از $\gamma_i(t)$ ها در $t=t_0$ مشتق‌پذیر باشند، داریم: $\gamma'(t_0)=(\gamma_1'(t_0),\dots,\gamma_n'(t_0))$

مثال: فرض کنید
$$\begin{cases}\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ \gamma(t)=(t^3,t^2)\end{cases}$$
مشتق‌پذیر است، داریم. $\gamma'(t)=(3t^2,2t)$



خم هموار: خم $\gamma(t)$ را روی I مشتق‌پذیر است و مشتق آن پیوسته است و برای هر $t\in I$، $\gamma'(t)\neq 0$ را یک خم هموار گوییم.

مثال:
$$\begin{cases}\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ \gamma(t)=(t,t^2)\end{cases}$$
$\gamma'(t)=(1,2t)\neq(0,0)\ \forall t\in\mathbb{R}$

هموار است

مثال:
$$\begin{cases}\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ \gamma(t)=(t^3,t^2)\end{cases}$$
$\gamma'(t)=(3t^2,2t)$ → γ در $t=0$ (در نقطه $(0,0)$) هموار نیست

$\gamma'(0)=(0,0)$

* اگر خم در تعداد متناهی نقطه ناهموار باشد، آن را خم قطعه قطعه هموار می‌گوییم

قضیه: (قواعد مشتق‌پذیری برای توابع برداری): فرض کنید $u(t)$ و $v(t)$ توابع برداری مشتق‌پذیر باشند و $\lambda(t)$ یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر باشد. آنگاه

$u(t)+v(t)$ ، $\lambda(t)u(t)$ ، $u(t)\cdot v(t)$ ، $\underbrace{u(t)\times v(t)}_{\text{فقط در } \mathbb{R}^3}$ ، $u(\lambda(t))$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

① $\left(u(t)+v(t)\right)'=u'(t)+v'(t)$

③ $\left(u(t)\cdot v(t)\right)'=u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t)$

ترتیب ضرب مراعات شود

② $\left(\lambda(t)u(t)\right)'=\lambda'(t)u(t)+\lambda(t)u'(t)$

④ $\left(u(t)\times v(t)\right)'=u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

⑤ $\left(u(\lambda(t))\right)'=\lambda'(t)u'(\lambda(t))$

⑥ $\left(|u(t)|\right)'=\dfrac{u(t)\cdot u'(t)}{|u(t)|}$

مثال: نشان دهید سرعت یک ذره متحرک روی یک بازه ثابت است اگر و تنها اگر شتاب و سرعت در سراسر بازه بر هم عمود باشند؟

(سرعت) $\nu(t)=|v(t)|=\overset{\text{ثابت}}{|\gamma'(t)|} \longleftrightarrow |\gamma'(t)|^2=c$ ثابت $\longleftrightarrow \gamma'(t)\cdot\gamma'(t)=c \xleftrightarrow{\text{مشتق}} 2\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)=0 \longleftrightarrow \gamma'(t)\cdot\gamma''(t)=0$

$\longleftrightarrow \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{سرعت}} \perp \underbrace{\gamma''(t)}_{\text{شتاب}}$

مثال: درباره حرکت یک ذره در لحظاتی که معادله سرعت آن در رابطه $r\cdot v>0$ صدق می‌کند چه می‌توان گفت؟ در حالت $r\cdot v<0$ چطور؟

جهت حرکت

$\dfrac{d|r(t)|}{dt} \overset{?}{>} 0 \qquad \dfrac{r(t)\cdot \overset{v(t)}{r'(t)}}{|r(t)|} > 0 \longrightarrow$ پس $|v(t)|$ صعودی است پس حرکت ذره از مبدأ در حال دور شدن است.

در حالت دوم، برعکس حالت اول اتفاق می‌افتد.

انتگرال‌پذیری: خم γ را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه همه γ_iها انتگرال‌پذیر باشند و به علاوه داریم: $\int_a^b \gamma(t)dt=\left(\int_a^b \gamma_1(t)dt,\dots,\int_a^b \gamma_n(t)dt\right)$

مثال: $\gamma(t)=(t^3,t^2)$ $\qquad \int_0^1 \gamma(t)d(t)=\left(\int_0^1 t^3dt,\int_0^1 t^2dt\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

مثال:

① $r_1(t)=(\sin t)i+(\cos t)j \quad -\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2}$

② $r_2(t)=(t-1)i+\sqrt{2t-t^2}\,j \quad 0\le t\le 2$

③ $r_3(t)=\left((t\sqrt{2-t^2}\,i)+(1-t^2)j\right) \quad -1\le t\le 1$

① $y=\sqrt{1-x^2}$ (پارامتری سازی) ② $y=\sqrt{1-x^2}$: $x^2=t^2-2t+1 \longrightarrow 1-x^2=2t-t^2 \longrightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{2t-t^2}=y$

هر سه r_1, r_2, r_3 ، پارامتری سازی هایی برای خم C هستند. $v=(\cos t)i+(\sin t)j \quad 0\le t\le \pi \rightarrow$ مشابه قبلی فقط جهت عوض می شود.

مثال: یک معادله پارامتری برای بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بنویسید؟

$$\begin{cases} x=a\sin t \\ y=b\cos t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi \rightarrow r(t)=(b\cos t)j+(a\sin t)i$$

پارامتری سازی منحنی فصل مشترک دو سطح (رویه):

مثال: منحنی فصل مشترک صفحه $x+2y+4z=4$ و استوانه بیضوی $x^2+4y^2=4$ را پارامتری کنید؟

$x^2+4y^2=4 \xrightarrow{\div 4} \frac{x^2}{4}+y^2=1$ ← شعاع ها 2 و 1 است

از معادله ای که از z مستقل است شروع می کنیم. ، $\begin{cases} x=2\cos t \\ 0\le t\le 2\pi \\ y=\sin t \end{cases}$

$z=1-x/4-y/2=1-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t$

$r(t)=\left(2\cos t, \sin t, 1-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\right) \quad 0\le t\le 2\pi$

نمایش قطبی یک منحنی در $\mathbb{R}^2$:

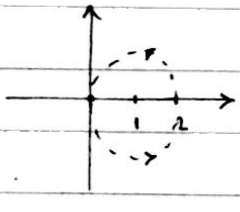
$r=g(\theta) \quad \gamma(\theta)=(g(\theta)\cos\theta, g(\theta)\sin\theta)$

$r,\theta \quad r=g(\theta) \quad \begin{cases} \gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2 \\ \gamma(\theta)=(g(\theta)\cos\theta, g(\theta)\sin\theta) \end{cases}$

اگر r منفی شود، به جای رسم (r,θ) در $\mathbb{R}^2$، $(-r,\theta+\pi)$ را رسم می کنیم.

مثال: $r=2\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ ، 2 دور دایره را می چرخد

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2 → $(2,2\pi)$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2



$r=2\cos\theta \xrightarrow{\times r} r^2=2r\cos\theta \rightarrow x^2+y^2=2x \rightarrow (x-1)^2+y^2=1$ ← اینها دایره بودن

$$\begin{cases} \gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2 \\ \gamma(\theta)=(2\cos^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(\theta)=g(\theta-\theta_0) \\ h(\theta+\theta_0)=g(\theta) \end{cases}$$

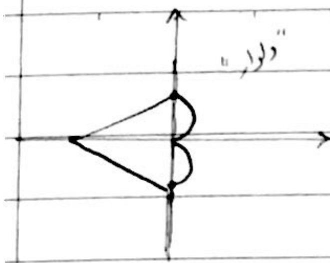
* $r=g(\theta-\theta_0)$ دوران یافته $r=g(\theta)$ به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی است.

مثال: $r=2\cos(\theta-\pi/2)$: دایره ای به مرکز $(0,1)$ و شعاع 1

مثال: فرض کنید $r = a(1-\cos\theta)\ ,\ a>0$

$$\begin{cases} \gamma:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(\theta) = \big(a(1-\cos\theta)\cos\theta\ ,\ a(1-\cos\theta)\sin\theta\big) \end{cases}$$

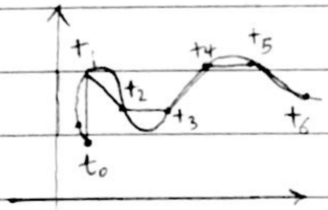
θ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	a
π	$2a$
$\frac{3\pi}{2}$	a
2π	0



تمرین ۱: فرض کنید $a,b>0$ \ $r = a+b\cos\theta$ را رسم کنید $(a<b\ ,\ a>b\ ,\ a=b)$

طول منحنی:

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P = \sum_{i=1}^{6} |\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$$



قضیه: فرض کنید $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک خم هموار (مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته) باشد، در این صورت $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ = طول منحنی γ از a تا b

نتیجه ۱: فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد، آنگاه $\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ = طول منحنی $y=f(x)$ از a تا b

اثبات: $\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$: طول منحنی از a تا b $\xleftarrow{\text{از قضیه قبل}}$ $\gamma'(t)=(1,f'(t)) \longleftarrow \gamma(t)=(t,f(t))$ \ $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$

نتیجه ۲: فرض کنید $r=g(\theta)$ معادله قطبی یک خم در $\mathbb{R}^2$ باشد، به طوری که $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد، در این صورت

$\int_\alpha^\beta \sqrt{(g(\theta))^2+(g'(\theta))^2}\,d\theta$ = طول منحنی این خم در بازه $[\alpha,\beta]$

اثبات: $\gamma:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ \ $\gamma(\theta)=(g(\theta)\cos\theta\ ,\ g(\theta)\sin\theta) \longrightarrow \gamma'(\theta)=(g'(\theta)\cos\theta-g(\theta)\sin\theta\ ,\ g'(\theta)\sin\theta+g(\theta)\cos\theta)$

پیوسته

از قضیه قبل: طول منحنی مطلوب $=\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt = \sqrt{g(\theta)^2+g'(\theta)^2}$

پارامتری سازی برحسب طول منحنی:

$$\begin{cases} \gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n \\ \gamma=\gamma(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} s:[a,b]\longrightarrow[0,l] \\ s(t)=\int_a^t |\gamma'(u)|\,du \end{cases}$$

$l \rightarrow \int_a^b |\gamma'(u)|\,du$

چون $s(a)=0$ ، $s(b)=l$ و s پیوسته است، پس از قضیه مقدار میانی s پوشاست. $\frac{ds}{dt}=|\gamma'(t)|>0 \rightarrow$ پس s اکیداً صعودی $\longrightarrow$ یک به یک $\longrightarrow$

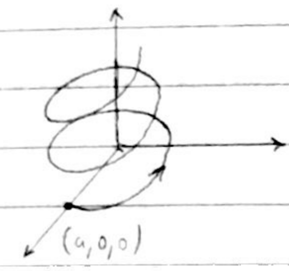
$\longrightarrow$ پس s وارون دارد $\longleftarrow$ فرض کنید وارون آن α باشد

$$\begin{cases} \alpha:[0,\ ]\longrightarrow[a,b] \\ \alpha(s)=t \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}:[0,l]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ \ $\tilde{\gamma}(s)=\gamma(\alpha(s))$

$|\tilde{\gamma}'(s)| = |(\gamma(\alpha(s)))'| = |\alpha'(s)||\gamma'(\alpha(s))| = |\frac{dt}{ds}||\frac{ds}{dt}| = 1$

مثال: مارپیچ مستدیر $\gamma(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ را برحسب طول قوس از نقطه $(a,0,0)$ و در جهت افزایش t، پارامتری سازی کنید $(a,b>0)$



$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $[0,\infty)$ $s'(t)=\frac{ds}{dt}=|\gamma'(t)|$ $\gamma'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$

$|\gamma'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$ $s(t)=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,du = \sqrt{a^2+b^2}\,t \to t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s)$ پارامتری$) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

بردار مماس یکه: قبلاً دیدیم که $\gamma'(t)$ در t بردار مماس است $\hat{T}:=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ بردار مماس یکه

اگر α برحسب طول قوس پارامتری شده باشد داریم: $T(s)=\gamma'(s)$

توجه: از اینجا به بعد فرض می‌کنیم که خم‌ها علاوه بر منظم بودن، تا 3 مرتبه مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشند. فعلاً خم‌ها پارامتری شده برحسب طول قوس هستند.

بعداً پارامتری‌های دیگر را خواهیم دید. $C \to \gamma(s) \to \gamma'(s)=T(s)$ یکه $T(s).T(s)=1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2T(s).\frac{dT}{ds}=0 \to T(s)\perp\frac{dT}{ds}$

انحنا: (kappa)

$\kappa(s) = |\frac{dT}{ds}| \geq 0$

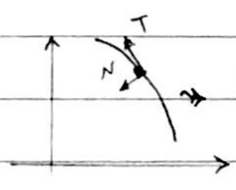
شعاع انحنا: اگر $\kappa(s)=0 \to \rho(s)=\infty$

$\rho(s)=\frac{1}{\kappa(s)}, \kappa(s)\neq 0$

یکه و عمود بر T

بردار قائم اصلی یکه: بردار قائم اصلی، عمود بر بردار مماس

$N \perp \hat{N} := \frac{1}{\kappa(s)}\frac{dT}{ds} = \rho(s)\frac{dT}{ds} = \frac{dT/ds}{|dT/ds|}$



$T(s+\Delta s)-T(s)$

در $\mathbb{R}^2$: $\{T,N\}$ یا (T,N) را یک کنج فرنه می‌گویند.

$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

و (T,N,B) در $\mathbb{R}^3$ کنج فرنه می‌گویند.

$B(s)=T(s)\times N(s)$

بردار عمود بر T و N

انحنا میزان چرخش منحنی را نشان می‌دهد.

$\kappa(s)=|\frac{d\theta}{ds}|=\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}|$

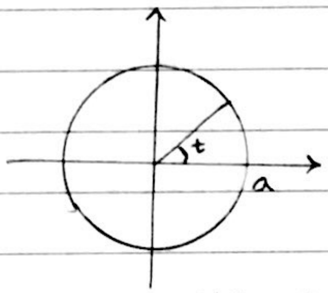
صفحه‌ای که گذرنده از $\gamma(s)$ است و شامل 2 بردار T و N می‌باشد را صفحه‌ی بوسان منحنی در $\gamma(s)$ می‌گوییم.

در IR^2، صفحه‌ی بوسان کل صفحه‌ی IR^2 است و در IR^3، صفحه‌ی بوسان ممکن است از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر کند.

بردار B، بردار نرمال صفحه‌ی بوسان است.

اگر $k(s)=0$ ⟵ N تعریف نمی‌شود ⟵ صفحه‌ی بوسان تعریف نمی‌شود.

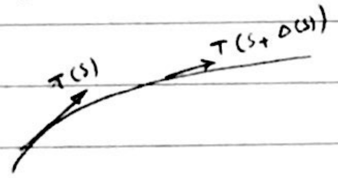
مثال: فرض کنید $a>0$ و منحنی C به معادله‌ی $\gamma(t)=a\cos t\, i + a\sin t\, j$ داده شده است. منحنی را برحسب طول قوس پارامتری کنید و سپس انحنا، شعاع انحنا و بردارهای مماس یکه و قائم اصلی را در یک نقطه‌ی دلخواه C بیابید.

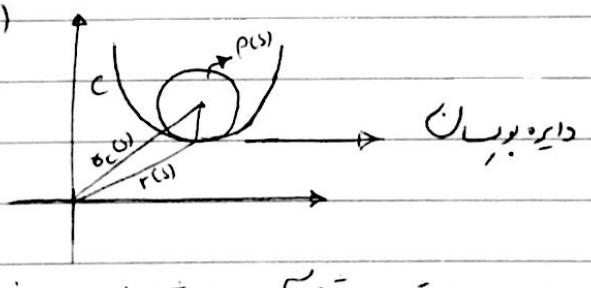


حل: $|\gamma'(t)|=a \quad 0\le t\le 2\pi \quad s=at \to t=\frac{s}{a} \quad 0\le s\le 2\pi a$

پارامتری برحسب طول قوس: $\gamma(s)=a\cos(s/a)\,i+a\sin(s/a)\,j \quad T(s)=\gamma'(s)=-\sin(s/a)\,i+\cos(s/a)\,j$

$$\frac{dT}{ds}=-\frac{1}{a}\cos(s/a)\,i-\frac{1}{a}\sin(s/a)\,j \quad k(s)=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{1}{a} \quad \rho(s)=a \quad N=-\cos(s/a)\,i-\sin(s/a)\,j=-\frac{1}{a}\gamma(s)$$





دایره بوسان، دایره‌ای است که از $\gamma(s)$ می‌گذرد و در صفحه‌ی بوسان قرار دارد و شعاع آن، همان شعاع انحنای C، یعنی $\rho(s)$ است

بردار انحنای منحنی

مرکز دایره بوسان، همان $\gamma_c(s)$ است. $\gamma_c(s)=\gamma(s)+\rho(s)N$

1

$B\perp\frac{dB}{ds}$ ⟵ چون مشتق بردار یکه، بر همان بردار یکه عمود است.

دایره بوسان هر دایره در هر نقطه، خود دایره بوسان است

2

$$B=T\times N \quad \frac{dB}{ds}=\frac{d(T\times N)}{ds}=\frac{dT}{ds}\times N+T\times\frac{dN}{ds}=T\times\frac{dN}{ds} \quad T\perp\frac{dB}{ds}\longrightarrow\frac{dB}{ds}\parallel N$$

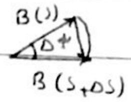
تعریف: برای هر s که $k(s)\neq 0$، تابع اسکالری مانند $\tau(s)$ موجود است که $\frac{dB}{ds}=-\tau(s)N$

tau

تاب منحنی C در $\gamma(s)$ برابر $\tau(s)$ تعریف می‌شود. تاب می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

$$|\tau(s)| = \left|\frac{dB}{ds}\right|$$

تاب میزان پیچش منحنی را می‌سنجد.



$$\Delta B = B(s+\Delta s) - B(s) \qquad |\Delta B| \approx |\Delta\psi|$$

خم مسطح: خم مسطح یا مسطحه، خمی است که تاب آن برابر صفر است.

مثال: مارپیچ مستدیر $r(s) = a\cos(cs)\,i + a\sin(cs)\,j + bcs\,k$ که در آن $c = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است را در نظر بگیرید. مطلوبست توابع انحنا و تاب و هم‌چنین بردارهای کنج فرنه در هر نقطهٔ $r(s)$

$$T(s) = -ac\sin(cs)\,i + ac\cos(cs)\,j + bc\,k \qquad \frac{dT}{ds} =$$

$$-ac^2\cos(cs)\,i - ac^2\sin(cs)\,j \qquad K(s) = \left|\frac{dT}{ds}\right| = ac^2 \qquad N = \frac{1}{ac^2}\frac{dT}{ds} = -\cos(cs)\,i - \sin(cs)\,j \qquad B = T\times N =$$

$$bc\cos(cs)\,i - bc\sin(cs)\,j + ac\,k \qquad \frac{dB}{ds} = bc^2\cos(cs)\,i + bc^2\sin(cs)\,j \longrightarrow \frac{dB}{ds} = (-bc^2)\,N \longrightarrow \tau(s) = bc^2 = \frac{b}{a^2+b^2} > 0$$

فرمول‌های فرنه:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = KN \\[2ex] \dfrac{dB}{ds} = -\tau N \\[2ex] \dfrac{dN}{ds} = \dfrac{d}{ds}(B\times T) = \dfrac{dB}{ds}\times T + \dfrac{dT}{ds}\times B = -\tau N\times T + B\times KN = \tau B - KT \end{cases}$$

انحنا و تاب برای پارامتری‌سازی‌های کلی:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} \qquad \mathbf{v}(t) = \gamma'(t) = v(t)\,T(t)$$

$$a(t) = \mathbf{v}'(t) = \gamma''(t) = \frac{dv}{dt}T + v\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} \longrightarrow \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{KN}\times\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} \qquad = \Big(\frac{dv}{dt}\Big)T + (Kv^2)\,N$$

شتاب قائم a_N

شتاب مماسی a_T

$$\mathbf{v}(t)\times a(t) = (vT)\times\Big(\frac{dv}{dt}T + Kv^2N\Big) = \underbrace{\Big(vT\times\frac{dv}{dt}T\Big)}_{\text{صفر}} + \big(vT\times Kv^2N\big) = Kv^3(T\times N) = Kv^3B$$

پس B و $\mathbf{v}\times a$ هم‌جهت‌اند

$$B(t) = \frac{\mathbf{v}(t)\times a(t)}{|\mathbf{v}(t)\times a(t)|}$$

$$\mathbf{v}(t)\times a(t) = Kv^3B \longrightarrow |\mathbf{v}(t)\times a(t)| = |Kv^3B| = |K||v^3||B| = Kv^3 \longrightarrow K = \frac{|\mathbf{v}(t)\times a(t)|}{v^3}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{ds}\times\frac{ds}{dt}=KN\nu \qquad \left|\frac{dT}{dt}\right|=K\nu \qquad N=\frac{\frac{dT}{dt}}{K\nu}=\frac{dT/dt}{|dT/dt|}$$

$$\tau(t)=\frac{(v\times a)\cdot\frac{da}{dt}}{|v\times a|^2} \circledast =\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\cdot\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}.$$

تمرین: (2) فرمول * را به دست آورید.

مثال: انحنا، تاب و کنج فرنه را در یک نقطه دلخواه از منحنی به دست آورید

$$\gamma(t)=(t+\cos t)i+(t-\cos t)j+\sqrt{2}\sin t\,k$$

$$v(t)=(1-\sin t)i+(1+\sin t)j+\sqrt{2}\cos t\,k \longrightarrow v(t)=2 \quad a(t)=-\cos t\,i+\cos t\,j-\sqrt{2}\sin t\,k \longrightarrow$$

انحنا

$$K=\frac{|v\times a|}{v^3}=? \quad v\times a=-\sqrt{2}(1+\sin t)i-\sqrt{2}(1-\sin t)j+2\cos t\,k \quad |v\times a|=2\sqrt{2} \longrightarrow K=\frac{2\sqrt{2}}{2^3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$T=\frac{v}{v}=\tfrac{1}{2}(1-\sin t)i+\tfrac{1}{2}(1+\sin t)j+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,k \quad B=\frac{v\times a}{|v\times a|}=-\tfrac{1}{2}(1+\sin t)i-\tfrac{1}{2}(1-\sin t)j+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,k$$

$$N=B\times T=-\tfrac{1}{2}\cos t\,i+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,j-\sin t\,k \quad \frac{da}{dt}=\sin t\,i-\sin t\,j-\sqrt{2}\cos t\,k$$

نتیجه: (انحنای نمودار یک تابع یک متغیره): انحنای منحنی (خم) مسطح به معادله $y=f(x)$ در نقطه دلخواه $(x, f(x))$ روی منحنی با این فرمول

زیر به دست آورید (می‌آید)

$$K=\frac{|f''(t)|}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}}$$

اثبات:

$$\gamma(t)=(t,f(t)) \longrightarrow v(t)=(1,f'(t)) \longrightarrow a(t)=(0,f''(t)) \quad v\times a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & f'(t) & 0\\ 0 & f''(t) & 0\end{vmatrix}=f''(t)k$$

$$v=\sqrt{1+(f'(t))^2} \qquad K=\frac{|v\times a|}{v^3}=\frac{|f''(t)|}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}}$$

مثال: نشان دهید به ازای هر s، داشته باشیم $\tau(s)=0$، آنگاه خم $r=r(s)$ در یک صفحه قرار می‌گیرد.

مثال:

$$\frac{dB}{ds}=\underbrace{(-\tau(s))}_{\text{صفر}}N \longrightarrow \frac{dB}{ds}=0 \longrightarrow B(s)=\text{ثابت} \longrightarrow \forall s,\ B(s)=B(0) \circledast$$

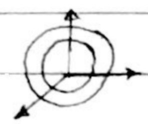
نشان می‌دهیم خم $r=r(s)$ در صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $r(0)$ و با بردار نرمال $B(0)$ قرار می‌گیرد (؟) کافی است نشان دهیم به ازای هر s

$(r(s)-r(0))\cdot B(0)\overset{?}{=}0$ کافی است نشان دهیم: $f(s):=(r(s)-r(0))\cdot B(0)$ می‌خواهیم نشان دهیم به $\forall s,\ f(s)=0$

$$f'(s) = r'(s)\cdot B(0) - \underbrace{T(s)\cdot B(0)}_{\text{طبق ۱}} = T(s)\cdot B(s) \overset{T\perp B}{=} 0$$

پس $f(s)$ ثابت است و داریم:

$$f(0) = \underbrace{(r(0) - r(0))}_{\text{صفر}} \cdot B(0) = 0 \longrightarrow \forall s,\ f(s) = f(0) = 0$$



مثال: صفحه‌ی $x+y+z=1$، کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ را در دایره‌ای مانند C قطع می‌کند.

الف) مرکز C و شعاع آن را بیابید. ب) دو بردار یکه عمود بر هم مانند v_1، v_2 موازی صفحه بیابید. ج) با استفاده از نتایج فوق، یک پارامتری سازی برای C بیابید.

حل: الف) فرض کنید $r_0 = (a,b,c)$ مرکز دایره‌ی C باشد و r شعاع آن، به وضوح r_0 روی صفحه مان قرار می‌گیرد، یعنی $a+b+c=1$

چون i و j و K روی فصل مشترک صفحه و کره قرار دارند، پس روی C نیز قرار دارند، پس داریم:

$$|r_0 - i|^2 = |r_0 - j|^2 = |r_0 - K|^2 = r^2 \longrightarrow$$

$$(a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-1)^2 = r^2 \quad a=b=c=1/3,\ r = \sqrt{2/3} \quad r_0 = (1/3, 1/3, 1/3) \text{ مرکز}$$

ب) بردار نرمال صفحه P: $(1,1,1)$

$$V_1 = (1,-1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

دو بردار عمود بر هم است و موازی صفحه P

ج) $P = r_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ ← فضای ان صفحه

$$P_0 = \{r_0 + \mu v_1 + \lambda v_2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$$ (ضرب ترکیب ارائه می‌شود)

$\circledast' \rightarrow$ ساده می‌کنیم

فرض کنید $r = r(t)$ معادله‌ی خم C باشد، چون $\gamma(t)$ در P قرار دارد، لذا $\circledast'$ داریم:

$$\circledast'' \quad r(t) = r_0 + \mu(t)V_1 + \lambda(t)v_2$$

لذا طرفین، چون $r = r(t)$ معادله دایره است، داریم:

$$2/3 = |r(t) - r_0|^2 \overset{\circledast''\text{ لذا}}{=} |\mu(t)v_1 + \lambda(t)v_2|^2 = (\mu(t)v_1 + \lambda(t)v_2)\cdot(\mu(t)v_1 + \lambda(t)v_2)$$

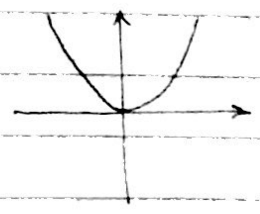
$$= (\mu(t))^2 + (\lambda(t))^2$$

حال: کافی است $\mu(t)$، $\lambda(t)$ را پارامتری کنیم:

$$\begin{cases} \mu(t) = \sqrt{2/3}\cos t \\ \lambda(t) = \sqrt{2/3}\sin t \end{cases}$$

با جایگذاری در $\circledast''$ داریم:

$$r(t) = (1/3, 1/3, 1/3) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \sqrt{2/3}\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$



مثال: دایره‌ی بوسان نمودار $y = x^2$ را در $(0,0)$ بیابید.

$K(0) = \dfrac{|y''(0)|}{(1+(y'(0))^2)^{3/2}} = 2 \quad y'(x) = 2x \to y''(x) = 2 \to y''(0) = 2 \quad y'(0) = 0 \quad \rho(0) = 1/2$ شعاع دایره بوسان

$T(0) = (1,0)$ بردار یکه $\gamma(t) = (t, t^2) \to \gamma'(t) = (1, 2t) \to \gamma'(0) = (1,0) \to N(0) = (0, \pm 1)$

با توجه به نمودار منحنی

مرکز انحنا : $\gamma(0) + \rho(0) N(0) = (0,0) + \frac{1}{2}(0,1) = (0, 1/2)$ مرکز دایره $\to x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$ معادله دایره بوسان

راه دیگر برای پیدا کردن $N(0)$ (کلی‌تر)

$\gamma(x) = (x, x^2, 0) \to \gamma'(x) = (1, 2x, 0) \to \gamma'(0) = (1,0,0) = v(0)$, $\gamma''(x) = (0,2,0) \to \gamma''(0) = (0,2,0) = a(0)$

$B(0) = \dfrac{v(0) \times a(0)}{|v(0) \times a(0)|}$ $\quad v(0) \times a(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2k \to |v(0) \times a(0)| = 2$

$N(0) = B(0) \times T(0) = k \times i = j$

توابع چندمتغیره:

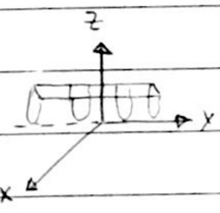
سطوح درجه 2 :

① کره : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

② استوانه

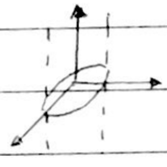
قائم : $x^2 + y^2 = a^2$ (z متغیر آزاد است) $z = k$

روی محور z ها است

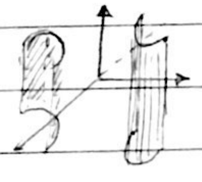


سهموی : $z = x^2$

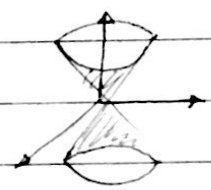
بیضوی : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (z آزاد)



هذلولوی : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (z آزاد)

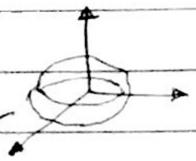


مخروط : $z^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$



$x = 0 \to z^2 = y^2/b^2 \quad z = \pm y/b$

بیضی‌گون : $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

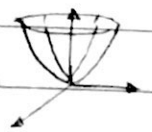


توپ راگبی

سهمی گون :

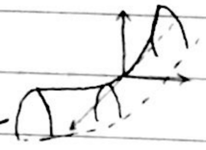
(1) سهمی گون بیضوی :

$z = x^2/a^2 + y^2/b^2 \quad x=0 \to z = y^2/b^2 \quad y=0 \to z = x^2/a^2$



(2) سهمی گون هذلولوی :

$z = x^2/a^2 - y^2/b^2 \quad x=0 \to z = -y^2/b^2 \quad y=0 \to z = -x^2/a^2$



زین اسب

هذلولی گون :

(1) هذلولی گون یک پارچه :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

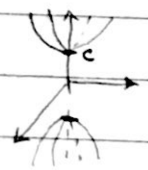
$x=0 \to \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ هذلولی

$y=0 \to \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ هذلولی

$z=0 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ بیضی (دایره)

(2) هذلولی گون دو پارچه :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



$x=0 \to \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Rightarrow$ هذلولی

$y=0 \to \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Rightarrow$ هذلولی

$z=0 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow \emptyset$

دو تکه

در بازه $(-c,c)$ چیزی نداریم.

تعریف: تابع f از $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را به صورت $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(f_1(x_1,\dots x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ که $m\geq 1$, $n\geq 2$

را یک تابع چند متغیره می گوییم. _ معمولاً با $m=1$ کار می کنیم.

تعریف: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت، مجموعه تراز مربوط به $c\in\mathbb{R}$ را با f نمایش می دهند.

$$f^{-1}(c) := \{\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\text{یک سطح}} : f(x_1,\dots x_n)=c\}$$

نمودار تابع چند متغیره f : $(f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

$$\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) : \underbrace{x_{n+1}}_{\in\mathbb{R}} = f(x_1,\dots,x_n)\} \quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

مثال: مطلوب است مجموعه های تراز توابع زیر:

(1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y)=x^2/a^2 + y^2/b^2$

$c<0$ ←

$$f^{-1}(c)=\{(x,y): f(x,y)=c\}=\emptyset \quad \underbrace{x^2/a^2+y^2/b^2}_{\geq 0}=\underbrace{c}_{<0} \Rightarrow \text{تهی میشود}$$

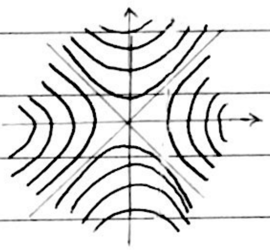
$c=0$: $f^{-1}(0)=\{(x,y): f(x,y)=x^2/a^2+y^2/b^2=0\}=\{(0,0)\}$

$c>0$: $f^{-1}(c)=\{(x,y): x^2/a^2+y^2/b^2=c\}$ یک بیضی

$z=f(x,y)=x^2/a^2+y^2/b^2$ نمودار f $=\{(x,y,z): z=x^2/a^2+y^2/b^2\}\subseteq\mathbb{R}^3$

مثال: ② $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x^2-y^2=z$

$c<0$ ⟵ $f^{-1}(c)=\{(x,y): x^2-y^2=c<0\}$ $f^{-1}(0)=\{(x,y): x^2=y^2 \;\; y=\pm x\}$



$f^{-1}(c)=\{(x,y): x^2-y^2=c>0\}$

نمودار: $\{(x,y,z): z=x^2-y^2\}$

تمرین ③: مطلوبست منحنی‌های تراز توابع زیر:

① $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=3(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y)$

② $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

حد توابع چند متغیره: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ، $(a_1,\dots,a_n)=a\in\mathbb{R}^n$ ، $l\in\mathbb{R}$ گوییم f در $(x_1,\dots,x_n)=(a_1,\dots,a_n)$ $x=a$

حد دارد و حد آن برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=l$

هرگاه: ① هر همسایگی محذوف a دارای نقاطی از دامنه‌ی f (غیر از a) باشد. ② $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x=(x_1,\dots,x_n)\ |x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon$

نرم $\mathbb{R}^n$ $=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<\delta$

حد در صورت وجود یکتاست.

قضیه: فرض کنید $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ، $\lim_{x\to a}f(x)=l$ ، $\lim_{x\to a}g(x)=M$ در این صورت:

① $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l\pm M$

② $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=lm$

③ اگر $M\neq0\to\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l/m$

قضیه: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ، $\lim_{x\to a}f(x)=l$ به علاوه $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $t=l$ پیوسته باشد. آنگاه $\lim_{x\to a}F(f(x))=F(l)$

قضیه فشردگی: فرض کنید $f,g,h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ، $\delta>0$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر x به $0<|x-a|<\delta$ داشته باشیم $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ،

$\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$ آنگاه $f(x)$ نیز در $x=a$ حد دارد و داریم. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

* اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ داریم $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0 \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

تعریف: f را در $x=a$ پیوسته گوییم، هرگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

گزاره: فرض کنید $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ توابعی باشند که در $x=a$ پیوسته هستند. در این صورت $f\pm g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq0)$ نیز در $x=a$ پیوسته هستند.

قضیه: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در $x=a$ پیوسته باشد، $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $t=f(a)$ پیوسته باشد در این صورت $F(f(x))$ در $x=a$ پیوسته است و داریم $\lim\limits_{x\to a}F(f(x))=F(f(a))$

مثال: فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ، $f(x,y,z)=x$ ثابت کنید این تابع در $\mathbb{R}^3$ پیوسته است.

فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ دلخواه، نشان می‌دهیم f در $x=a$ پیوسته است. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3)}f(x,y,z)=a_1 \xrightarrow[\text{نیم}]{\text{پیوسته}} f(a_1,a_2,a_3)=a_1$

فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه باشد $\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}<\delta \to |f(x,y,z)-a_1|<\varepsilon \to |(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)|<\delta$: $\delta=?$

کافیست قرار دهیم $\delta\le\varepsilon$ $\Rightarrow |x-a_1|\le\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}<\delta\le\varepsilon \Rightarrow$

نتیجه: توابع چندجمله‌ای (n متغیره) روی کل $\mathbb{R}^n$ پیوسته می‌باشند.

مثال: ① $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(2x-y^2)=-5$ ② $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/3,2)}y\sin\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}\times2=1$

مثال: $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=?$

$D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ، از مسیر $y=0$: $A=\lim\frac{2x\times0}{x^2+0}=0$

از مسیر $y=x$: $A=\lim\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1 \Rightarrow 1\neq0$ ✗ ، f حد ندارد در $(0,0)$

مثال: $f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ ، $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ ، از مسیر $x=0$: $A=0$ ، از مسیر $y=x^2$: $A=\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^4}{x^4+x^4}=1$

$K \neq 0 \quad y = kx$ مسیر: $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2kx}{x^2 + k^2} = 0$

مثال: $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ $\quad \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = ?$

$y = x$ مسیر $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + x^2} = \dfrac{x}{2} = 0$

$y = x^2$ مسیر $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^2} = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 0$

از قضیه فشردگی استفاده می‌کنیم:

$0 \leq \left| \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y|$

صفر $\quad$ صفر $\quad$ صفر

تابع وسطی به سمت صفر میل می‌کند پس حد آن هم به سمت صفر میل می‌کند.

مثال: فرض کنید $m, n > 0$ اعداد صحیح باشند. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^m y^n}{x^2 + y^2}$ را بررسی نمایید.

حل: از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.
$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$A = \lim_{r \to 0} \frac{r^{m+n} \cos^m\theta \sin^n\theta}{r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^{m+n-2} \cos^m\theta \sin^n\theta}{1}$$

حالات زیر را بررسی می‌کنیم: ① $m + n > 2 \longrightarrow A =$ کراندار × صفر $= 0$

② $m + n = 2 \quad A = \lim\limits_{r \to 0} \cos^m\theta \sin^n\theta$ $\begin{cases} \theta = 0 & \text{صفر} \\ \theta = \pi/4 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1/2 \end{cases}$ $\quad 0 \neq 1/2$ پس حد ندارد

③ $m + n < 2 \longrightarrow m + n = 1$ یا صفر $\longrightarrow A = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{1}{r^2} = +\infty \longleftarrow (m = 0, n = 1 \; , \; m = 1, n = 0)$

$A = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\cos\theta}{r}$ $\begin{cases} \theta = 0 & \lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{r} = \infty \\ \theta = \pi/2 & 0 \end{cases}$ پس حد ندارد

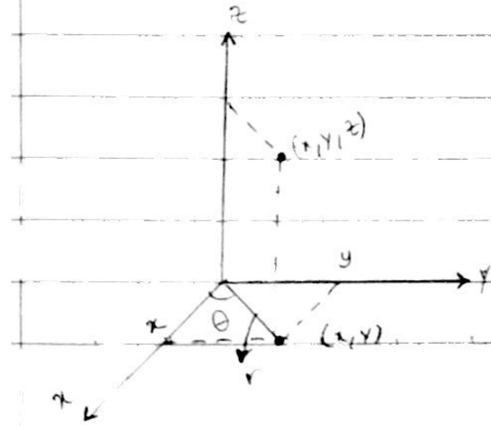
مثال: $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{y^2}{x - y} = ?$

$$\begin{cases} x = 0 : \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^2}{-y} = 0 \\ x = y + y^2 \Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^2}{y^2} = 1 \end{cases}$$

تکنیک‌ها: فهمیدن حد داشتن یا نداشتن: صورت و مخرج را برابر قرار می‌دهیم

همیشه جواب نمی‌دهد باید بررسی شود. (تحلیل دامنه)

مختصات استوانه‌ای:

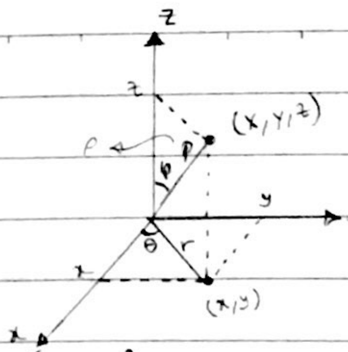


$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad tg\theta = y/x$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

z



مختصات کروی : $r, \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad r^2 = x^2 + y^2$

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad r = \rho \sin\varphi \Rightarrow x = \rho \sin\varphi \cos\theta \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta \quad z = \rho \cos\varphi$

مثال : $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} =$

در کروی $\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \rho \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\varphi = 0 \times$ کراندار $= 0$

مشتق :

مشتق های جزئی : فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی چند متغیره باشد. در این صورت مشتق های جزئی اول تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ نسبت به متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ به ترتیب تابع های $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ هستند که به صورت زیر تعریف می شوند

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots x_n)}{h} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

اگر حد فوق موجود باشد آنگاه گوییم مشتق جزئی اول نسبت به متغیر x_i وجود دارد و برابر مقدار حد است

مثال : $f(x,y) = x^2 \sin y$ $\quad f_1(x,y) = 2x \sin y \quad f_2(x,y) = x^2 \cos y$

کاربرد : $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ مشتق جزئی اول نسبت به متغیر x_i را به صورت های زیر نیز نشان می دهیم : $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$

$= f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = D_i f(x_1, \ldots, x_n) \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1, \ldots, f_m)$

توجه کنید همه قواعد متعارف مشتق گیری در توابع یک متغیره در این جا نیز برقرار هستند. (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، ترکیب)

مثال : فرض کنید f تابعی یک متغیره و در همه جا مشتق پذیر باشد. نشان دهید $z = f(x/y)$ در رابطه زیر صدق می کند $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

حل : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x/y) \quad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad g(x,y) = x/y \Rightarrow z = f(g(x,y)) = f(x/y) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x/y)(1/y) \xrightarrow{\times(x)}$

$x/y \, f'(x/y) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x/y)\left(\frac{-x}{y^2}\right) \xrightarrow{\times y} -x/y \, f'(x/y) \Rightarrow \text{Sum} = 0$

برخلاف توابع یک متغیره، وجود تمام مشتقات جزئی اول یک تابع چند متغیره، پیوستگی تابع را نتیجه نمی دهد.

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2xy}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ در مبدأ پیوسته نیست ولی $f_1(0,0)$, $f_2(0,0)$ موجودند.

حل: پیوسته نبودن

$$y=x+x^2/2 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2-x^3}{-x^2/2}=4 \qquad x=0 \quad \lim_{y\to 0} f(x,y)=0$$

صفر صفر

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-\overset{\text{صفر}}{f(0,0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3/h}{h}=0 \qquad f_2(0,0)=\lim\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & o.w\end{cases}$ در مورد پیوستگی f در مبدأ و مشتقات جزئی اول در این نقطه بحث کنید. آیا $f_1(x,y,z)$ در مبدأ پیوسته است؟

حل: پیوستگی f:

$$x=0 \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0 \qquad x=y=z: \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{3x^4}=1/3$$

f در مبدأ حد ندارد پس پیوسته نیست. مشابه f_1

$$f_1(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=0 \qquad f_2(0,0,0)=f_3(0,0,0)=0$$

$$f_1(x,y,z)=\begin{cases}\circledast & \neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

پس همه مشتقات جزئی اول f موجودند (در مبدأ) و برابر صفر می‌باشند.

$$\circledast=\frac{y^2z(x^4+y^4+z^4)-4x^3(xy^2z)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \quad (x=y=z) \quad \lim_{x\to 0} f_1(x,y,z)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^7-4x^7}{9x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{9x}=\pm\infty$$

مشتقات جزئی از مرتبه‌های بالاتر:

نمادگذاری: $Z=f(x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=f_{ii}(x_1,\dots,x_n)=f_{x_ix_i}(x_1,\dots,x_n)$$

مشتق جزئی دوم نسبت به x_1

مشتق جزئی t ام نسبت به x_i:

$$\frac{\partial^t z}{\partial x_i^t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{t-1}z}{\partial x^{t-1}}\right)=f_{\underbrace{i\dots i}_{t\text{ بار}}}(x_1,\dots,x_t)=f_{x_i\dots x_i}(x_1,\dots,x_n)$$

مشتق جزئی مخلوط نسبت به x_i , x_j:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_1}=f_{ij}(x_1,\dots,x_n)=f_{x_ix_j}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1\partial x_3^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)\right)$$

مثال: فرض کنید $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ، $f(x,y,z,w)=xyzw^3$ ، f_{xz} ، f_{zx} را بیابید

$f_x = yzw^3$, $f_{xz} = yw^3$ $f_z = xyw^3$ $f_{zx} = yw^3$

$f_{xy} = zw^3$ $f_{xyz} = w^3$ $f_{xyzw} = 3w^2$ $f_{xzw} = 3yw^3$ $f_{xzwy} = 3w^2$ $f_{xyzw} = ?$, $f_{xzwy} = ?$

قضیه: فرض کنید دو مشتق جزئی n ام مخلوط تابع f، مشتق گیری های یکسان ولی با ترتیب مختلف باشند. اگر این مشتق های جزئی در نقطه P پیوسته باشند،

به علاوه، f و همه مشتق های جزئی آن از مرتبه کمتر از m در همسایگی P پیوسته باشند آنگاه دو مشتق جزئی مخلوط m ام مورد نظر، در نقطه P هم

مساوی خواهند بود.

در مثال قبل، شرایط قضیه برقرار بود

مثال:
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & O.W \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
نشان دهید f_1 ، f_2 ، f_{12} ، f_{21} در $(0,0)$ موجودند ولی $f_{12}(0,0) \neq f_{21}(0,0)$

قاعده ی زنجیری:

صورت اول قاعده ی زنجیره ای: فرض کنید $z=f(x,y)$ ، مشتقات جزئی اول f پیوسته باشند، $x=x(t)$, $y=y(t)$ مشتق پذیر باشند در این صورت داریم:

$z = f(x(t), y(t))$ $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $z = f(\gamma(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

در حالت کلی تر: اگر $y=f(x_1,\dots,x_n)$ و مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد و هر $x_i = x_i(t)$ ، $i=1,2,\dots,n$ مشتق پذیر باشند آنگاه

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

تعریف: بردار گرادیان f :
$$\nabla f(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)\right)$$

$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\gamma'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right) \longrightarrow \frac{dy}{dt}(t) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) \cdot \gamma'(t)$

ضرب داخلی

حالت دیگر از قاعده زنجیره‌ای: فرض کنید $z=f(x,y)$ با مشتقات جزئی اول پیوسته، $x=x(s,t)$ ، $y=y(s,t)$ با مشتقات جزئی اول پیوسته، آنگاه داریم:

$$z = f(x,y) = f(x(s,t), y(s,t)) \qquad f(x,y) = x^2+y^2 \to \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\begin{cases} x(s,t) = s+t & \dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \\[2ex] y(s,t) = s+2t & \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

در حالت کلی: اگر $y = f(x_1, \dots, x_n)$ با مشتقات جزئی پیوسته، $x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$ ، $i = 1, \dots, n$ با مشتقات جزئی اول پیوسته. آنگاه داریم: $y = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial t_1} \quad \frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\underset{1\times n}{\nabla f(x_1, \dots, x_n)} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{bmatrix}_{n\times m} = \left[\frac{\partial y}{\partial t_1}, \dots \dots \frac{\partial y}{\partial t_m}\right]_{1\times m}$$

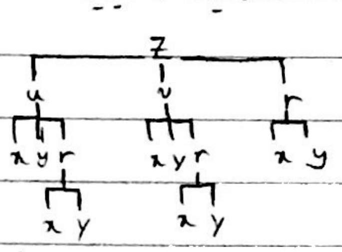
مثال: فرض کنید $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی بر حسب متغیرهای x, y, z, t به علاوه فرض کنید x, y, z توابعی بر حسب t باشند و همچنین $T(x,y,z,t)$ ، $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$

مشتقات جزئی اول پیوسته مطلوب است: $\frac{dT}{dt}$

ممکن است پیوستگی را نگوییم ولی فرض می‌کنیم.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

مثال: $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در $z = z(u, v, r)$ ، $u = u(x,y,r)$ ، $v = v(x,y,r)$ ، $r = r(x,y)$ با قاعده زنجیره‌ای را بنویسید.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x}$$

توابع همگن: تابع $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را بطور مثبت همگن از درجه k گوییم، هرگاه برای هر نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ و هر عدد حقیقی $t>0$ داشته باشیم:

$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$

مثال : آیا $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ همگن است ؟ $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ همگن درجه 2

مثال : " $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ " " ؟ همگن درجه 1

ناهمگن $f(x,y) = x^2 + y$ درجه $\sqrt{2}$ $f(x,y) = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}}$ درجه 1- $f(x,y,z) = \dfrac{x-y+5z}{yz-z^2}$ درجه صفر $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

قضیه اویلر: اگر $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته و به علاوه به طور مثبت همگن از درجه K باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(a_1, \dots, a_n) = K f(a_1, \dots, a_n)$$ برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

مثال : $f(x,y,z) = \sin\left(\cos\left(e^{\frac{x^8+y^8+x^4y^4}{z^8}}\right)\right)$ آنگاه $x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) = ?$ را بیابید.

$= 0 \cdot f(x,y,z) = 0$ قانون اویلر

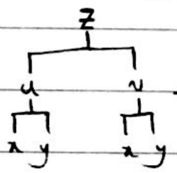
مثال : $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^8+y^8+z^8}}{yz} \sin(x/y)^{\cos(x/z)}$ نقطه $A = (\pi/4, 1, 1)$

همگن از درجه $3/2$

$\pi/4 \, f_1(A) + f_2(A) + f_3(A) = 3/2 \, f(A)$

مثال : $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2-y^2, xy)$ را برحسب مشتقات جزئی تابع f حساب کنید. (مشتق های جزئی اول و دوم وجود f پیوسته اند)

$z = f(u,v)$ $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = ?$



$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = ?$

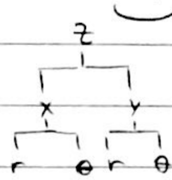
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \times \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \times \dfrac{\partial v}{\partial y} = (-2y) z_u + x z_v$ $\quad \dfrac{\partial z_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-2y z_u + x z_v\right) = \left(-2y \dfrac{\partial z_u}{\partial x}\right) +$

$\overset{\shortparallel}{z_y}$ $\left(z_v + x \dfrac{\partial z_v}{\partial x}\right) = \left(-2y\left(\dfrac{\partial z_u}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z_u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \left(z_v + x\left(\dfrac{\partial z_v}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z_v}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right) =$

$-2y(2x z_{uu} + y z_{uv}) + (z_v + x(2x z_{vu} + y z_{vv})) = -4xy z_{uu} + z_v + xy z_{vv} + 2(x^2-y^2) z_{uv}$

$z_{uv} = z_{vu} \rightarrow$ اینجا

مثال: فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی پیوسته و دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد، معادلهٔ $r^2 z_{rr} + z_\theta = 0$ را برحسب مختصات دکارتی بیان نمایید.



$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \Rightarrow x_r = \cos\theta \quad y_r = \sin\theta$

$x_\theta = -r\sin\theta \overset{=-y}{,} \quad y_\theta = +r\cos\theta = x \qquad z_\theta = \frac{\partial z}{\partial\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial\theta} = -y z_x + x z_y$

$z_r = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\, z_x + \sin\theta\, z_y \quad z_{rr} = \frac{\partial z_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\, z_x + \sin\theta\, z_y) =$

$\cos\theta \frac{\partial z_x}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial z_y}{\partial r} = \cos\theta(z_{xx}\underbrace{x_r}_{\cos\theta} + z_{xy}\underbrace{y_r}_{\sin\theta}) + \sin\theta(z_{yx}\underbrace{x_r}_{\cos\theta} + z_{yy}\underbrace{y_r}_{\sin\theta}) =$

$\cos^2\theta\, z_{xx} + \cos\theta\sin\theta\, z_{xy} + \sin\theta\cos\theta\, z_{yx} + \sin^2\theta\, z_{yy} \xrightarrow{\times(r^2)} x^2 z_{xx} + 2xy\, z_{xy} + y^2 z_{yy} = z_\theta + r^2 z_{rr} = 0$

تقریب خطی مشتق پذیر دیفرانسیل ها:

$f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

حول a — معادله خط مماس در a

تعریف: اگر $f(x_1,\dots,x_n)$ تابعی n متغیره و $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ نقطه‌ای فرض شود،

تقریب خطی f حول a بصورت زیر تعریف می‌گردد: $L(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(a_1,\dots,a_n) + f_1(a_1,\dots,a_n)(x_1-a_1) + \dots +$

$f_n(a_1,\dots,a_n)(x_n-a_n) \Rightarrow L(x) = f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a) \quad L(x)\approx f(x)$

حالت خاص دو متغیره: $z=f(x,y) \quad L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

در نقطه (a,b)

مثال: یک مقدار تقریبی را برای تابع $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ در نقطه $(2.2,-0.2)$ بیابید.

تقریب در نقطه $(2,0)$: $L(x,y)=? \quad f(2,0)=3 \quad f_1(x,y) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \to f_1(2,0) = 4/3$

$f_2(x,y) = \frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \to f_2(2,0) = 1/3 \to L(x,y) = 3 + 4/3(x-2) + 1/3(y-0)$ در نقطه $(2,0)$ $L(x,y)\approx f(x,y)$

$L(2.2,-0.2) = 3 + 4/3\overbrace{(2.2-2)}^{0.2} + 1/3(-0.2) = 3.2$

$f: U\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $a\in U$ مشتق‌پذیر $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-L(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)\overbrace{(x-a)}^{h}}{h} =$

$x=a+h$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$$

تعریف: مشتق پذیری تابع دو متغیره: فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. گوییم f در نقطه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h f_1(a,b) - k f_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$(a+h, b+k)$, (a,b)

$(a,b) + (h,k)$

در حالت کلی:

تعریف: تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ که $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را در نقطه $a = (a_1, \dots, a_n)$ مشتق پذیر گوییم هرگاه:

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n) \to (0,0,\dots,0)} \frac{f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) - h_1 f_1(a_1,\dots,a_n) - \dots - h_n f_n(a_1,\dots,a_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0$$

به عبارتی اگر $h = (h_1, \dots, h_n)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h}{|h|} = 0$$

بردار صفر

* اگر $f(x_1, \dots, x_n)$ در $a = (a_1, \dots, a_n)$ مشتق پذیر باشد آنگاه داریم $f'(a) = \nabla f(a)$

مثال: فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

نشان دهید $f(x,y)$ در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

$$f_1(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2)}{h} = 0$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{0-0}{h} = 0 \qquad \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h f_1(0,0) - h f_2(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \underset{\substack{k = r\sin\theta \\ h^2+k^2 = r^2}}{\overset{h = r\cos\theta}{=}} \lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos^2\theta \sin \frac{1}{r^2}}{r} = 0$$

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

مثال: آیا $f_1(x,y)$ در مثال قبل در $(0,0)$ پیوسته است؟ چرا؟ (اثبات کنید)

دیفرانسیل: $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\quad dz=df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=f_1(x_1,\dots,x_n).dx_1+\dots+f_n(x_1,\dots,x_n).dx_n$

$$=\nabla f(x_1,x_2,\dots,x_n).\underbrace{(dx_1,\dots,dx_n)}_{dx}$$

اگر f در x مشتق‌پذیر باشد آنگاه: $\lim\limits_{dx_i\to 0}\frac{\Delta f-df}{\sqrt{(dx_1)^2+\dots+(dx_n)^2}}=0$ ← تعریف مشتق‌پذیری در $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f=f(x_1+dx_1,\dots,x_n+dx_n)-f(x_1,\dots,x_n)$$

مثال: فرض کنید $T=2\pi\sqrt{L/g}$ درصد تغییر T را در صورتی که L به اندازه 2% افزایش و g به اندازه 0.6 کاهش می‌یابد.

$$\begin{cases}dL=\frac{2}{100}L\\ dg=\frac{6}{1000}g\end{cases}\Rightarrow d=?\quad dT=T_L\,dL+T_g\,dg=\frac{2\pi}{100}\sqrt{L/g}+\frac{6\pi}{1000}\sqrt{L/g}=2\pi\sqrt{L/g}\left(\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}\right)=T\left(\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}\right)=$$

$$\begin{cases}T_L=\frac{\pi}{\sqrt g}\cdot\frac{1}{\sqrt L}\\ T_g=-\pi\sqrt L\cdot g^{-3/2}\end{cases}$$

$\frac{1}{100}T+\frac{3}{1000}T=\frac{13}{1000}T\Rightarrow$ درصد تغییر $T=1.3\%$

تابع f در x مشتق‌پذیر است هرگاه همه‌ی مولفه‌های آن $f^{(i)}$ ها در x مشتق‌پذیر باشند.

$f: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad f^{(i)}: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad i=1,2,\dots,m$

$$f(x)=(\underset{y_1}{f^{(1)}(x)},\dots,\underset{y_m}{f^{(m)}(x)})\qquad Df(x)=\begin{pmatrix}\nabla f^{(1)}(x)\\ \vdots\\ \nabla f^{(m)}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

به عبارتی اگر $h=(x_1,\dots,x_n)$ اگر $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-\nabla f(a).h}{|h|}=0$ ، $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ در $a=(a_1,\dots,a_n)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه داریم: $f'(a)=\nabla f(a)$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & o.w\end{cases}$ نشان دهید $f(x,y)$ در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin(1/h^2)}{h}=0$$

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0 \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_1(0,0)-kf_2(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[k=r\sin\theta]{h=r\cos\theta}$$

$$h^2+k^2=r^2 \quad \lim_{r\to 0}\frac{r^{\cancel{2}}\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\cancel{r}}=0 \rightsquigarrow$$ f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است

مثال: آیا در مثال قبل، $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f_1(x,y)=\underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{صفر}}+\underbrace{\left(\frac{-2x^y}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{x=y} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}\xrightarrow{\cos=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}}-\sqrt{\pi x}=-\infty$$

پس $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

قضیه: اگر $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات:

$$\lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a)\right)\overset{?}{=}0 \quad \lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a)\pm\nabla f(a).h\right)=\lim\left(\left(f(a+h)-f(a)-\nabla f(a).h\right)\times\frac{|h|}{|h|}+\nabla f(a).h\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\Bigg(\underbrace{\left(\frac{f(a+h)-f(a)-\nabla f(a).h}{|h|}\right)}_{\text{مشتق‌پذیر}}|h|+\underbrace{\nabla f(a).h}_{\text{پیوسته}}=0$$

قضیه (مقدار میانگین): هرگاه $f(x,y)$ تابعی باشد که $f_1(x,y)$ ، $f_2(x,y)$ در همسایگی نقطه (a,b) پیوسته باشند و قدر مطلق h ، k به اندازه کافی کوچک

باشند. آنگاه اعدادی مانند θ_1 ، $\theta_2 < 1$ و $0 <$ موجودند که:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_1(a+\theta_1 h,b+k)+kf_2(a+h,b+\theta_2 k)$$

تمرین 7: قضیه قبل را ثابت کنید.

قضیه: اگر $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ، $f_1(x,y)$ ، $f_2(x,y)$ هر دو در همسایگی نقطه (a,b) پیوسته باشند، آنگاه f در نقطه a مشتق‌پذیر است.

* در مثال قبل دیدیم که عکس این قضیه لزوماً درست نیست.

این ماتریس را ماتریس ژاکوبی یا ژاکوبین (Jacobian) تابع f در x گوییم. به عبارت دیگر، f در a مشتق‌پذیر است، آنگاه $f'(a)=Df(a)$

$$\begin{cases} g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k \\ Z=g(y_1,\dots,y_m)=(z_1,\dots,z_k)\end{cases}$$

NAHAL

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{k\times m} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k\times n}$$

$$D(g\circ f)(x) = Dg(f(x))\,Df(x)$$

مثال: ماتریس ژاکوبی $Df(1,0)$ را برای تابع بیابید.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y) = (xe^y + \cos(xy),\ x^2,\ x - e^y) \end{cases}$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - x\sin(xy) \\ 2x & 0 \\ 1 & -e^y \end{pmatrix}_{3\times 2} \longrightarrow Df(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f(x) = (y_1, \dots, y_m)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}_{n\times 1}}_{dx} = \underbrace{\begin{pmatrix} dy_1 \\ \\ dy_m \end{pmatrix}_{m\times n}}_{dy}$$

$df(x) = Df(x)\,dx$

"دیفرانسیل f"

معادله تقریبی f در یک نقطه x نزدیک به a:

$$f(x) \simeq f(a) + df(x) = f(a) + Df(a)\,dx$$

مثال: معادله تقریبی با تابع مثال قبل، در نقطه $(1.02, 0.01)$ بیابید.

$$a = (1,0) \quad f(1,0) = (2,1\ \ ) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1.0\ , 0.01) \simeq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 2.03 \\ 1.04 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

قضیه: فرض کنید $f(x_1, \dots, x_n)$ $(f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$ تعریف شده در $a = (a_1, \dots, a_n)$ مشتق‌پذیر است، $\nabla f(a) \neq 0$ باشد،

آنگاه $\nabla f(a)$ بر سطح تراز f در بر دارنده نقطه a عمود است. به عبارتی، اگر مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ را در نظر بگیریم $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

یک منحنی باشد در $f^{-1}(c)$ که از a می‌گذرد (یعنی: $\gamma(t_0) = a$, $f(r(t)) = c$) آنگاه داریم $\nabla f(a) \cdot r'(t) = 0$.

اثبات:

$$c = f(r(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{نسبت به } t} 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt} = \nabla f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot r'(t)$$

$\xrightarrow{2 \to 3} \nabla f(a) \cdot r'(t_0) = 0$

مثال: بردار قائم بر نمودار تابع مشتق‌پذیر $z = f(x,y)$ را بیابید.

f نمودار $= \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$

تعریف می‌کنیم: $g(x,y,z) := f(x,y) - z$ $\quad g^{-1}(0) = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\} =$ نمودار f $\quad f(x,y) - z = 0$

از قضیه قبل می‌دانیم $\nabla g(x,y,z)$ بر $g^{-1}(0)$ در (x,y,z) عمود است پس بر نمودار f نیز در (x,y,z) عمود است. بردار قائم مورد نظر ما

$(f_1(x,y), f_2(x,y), -1)$

در حالت کلی‌تر: $(f_1(x), \dots, f_n(x), -1)$ عمود بر نمودار f است. $\quad z = f(\overbrace{x_1, \dots, x_n}^{x})$

خط قائم بر نمودار مشتق‌پذیر f در نقطه $(a,b,f(a,b))$: بردار هادی: $=\nabla g(a,b,f(a,b)) = (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$

$l: (a,b,f(a,b)) + \langle (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)\rangle$ یا $l: \dfrac{x-a}{f_1(a,b)} = \dfrac{y-b}{f_2(a,b)} = \dfrac{z-f(a,b)}{-1}$

صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع مشتق‌پذیر f در $(a,b,f(a,b))$: بردار نرمال: $n = (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$

$n\cdot(x-a, y-b, z-f(a,b)) = 0 \longrightarrow z = f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + f(a,b)$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار $z = \sin xy - \cos xy$ را در نقطه $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},1)$ بیابید. $(a,b) = (\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$

$f(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = 1 \quad f_1(x,y) = y\cos xy + y\sin xy \Rightarrow f_1(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi} \quad f_2(x,y) = x\cos xy + x\sin xy \Rightarrow f_2(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی مورد نظر بر نمودار f: $z = -\sqrt{\pi}(x-\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}(y-\sqrt{\pi}) + 1$

توجه کنید اگر $f(x,y,z) = 0$ معادله‌ی یک رویه با نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) است و f مشتق‌پذیر است، آنگاه معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر این رویه در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) عبارت است از: بردار نرمال: $n = \nabla f(x_0,y_0,z_0)$

معادله‌ی صفحه: $n\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$

مثال: فرض کنید $\sin z = x^2 - 2xy + y^2x$. مطلوب است صفحه‌ی مماس بر این رویه در نقطه $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$

$\underbrace{x^2 - 2xy + y^2x - \sin z}_{f(x,y,z)} = 0$ بردار نرمال: $\nabla f(x,y,z) = (2x - 2y + y^2, -2x + 2xy, -\cos z)$

بردار نرمال $= n = \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-2}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

معادله‌ی صفحه: $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}(y-0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

تعریف: فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. مشتق جهتی f در نقطه‌ی a در جهت بردار یکه‌ی $v \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_v f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

مشتقات جزئی اول، حالات خاصی از مشتق‌های جهتی هستند: $D_1 f(a) = f_1(a) = f_{x_1}(a) = D_{e_1} f(a)$

مثال: فرض کنید $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = |x+y| \end{cases}$ ، $v=(v_1,v_2)$ برای بردار $D_v f(0,0)$ کنید.

حد: فرض $v_1+v_2=0$ اگر ← $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|hv_1+hv_2|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h||v_1+v_2|}{h}$

اگر $v_1+v_2\neq 0$ $\xrightarrow{h\to 0^+} |v_1+v_2|$ ، $\xrightarrow{h\to 0^-} -|v_1+v_2|$ ⟵ $\neq$ ← حد موجود نیست

پس $\neq$ $D_v f(0,0)$ موجود نیست

نکته: فرض کنید $f(x_1,\dots,x_n)$ در a مشتق‌پذیر باشد، برای هر بردار $v\in\mathbb{R}^n$ داریم: $D_v f(a) = \dfrac{d}{dh}\big(f(a+hv)\big)\Big|_{h=0}$

$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(h) := f(a+hv) \end{cases}$

$g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+hv)-f(a)}{h} = D_v f(a)$ موجود ← مشتق جهتی

اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $D_v f(a)$ برای هر بردار یکه v در $\mathbb{R}^n$ موجود است. بنابراین اگر برای حداقل یک v در $\mathbb{R}^n$، $D_v f(a)$ موجود نباشد، نتیجه می‌گیریم که f در نقطه a مشتق‌پذیر نیست.

قضیه: (استفاده از گرادیان برای یافتن مشتق‌های جهتی): هرگاه $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ در $a\in U$ $(a_1,\dots,a_n)$ مشتق‌پذیر باشد و $v=(v_1,\dots,v_n)$

برای یکه باشد، آنگاه داریم $D_v f(a) = v\cdot\nabla f(a)$

اثبات: از توضیحات قبل از قضیه داریم: ① $D_v f(a) = g'(0)$ $g(h) = f(a+hv) = f(a_1+hv_1,\dots,a_n+hv_n) = f(\gamma(h))$

$\gamma(h) := (a_1+hv_1,\dots,a_n+hv_n)$ $\gamma(0)=a$ $\gamma'(h) = (v_1,\dots,v_n) = v$ $g'(h) = \nabla f(\gamma(h))\cdot\gamma'(h) \xrightarrow{h=0}$

$g'(0) = \nabla f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0) = \nabla f(a)\cdot v$ ②

از ①، ② حکم به دست می‌آید.

اگر به ازای $v\in\mathbb{R}^n$ یکه داشته باشیم: $D_v f(a) \neq \nabla f(a)\cdot v$ آنگاه f در a مشتق‌پذیر نیست.

اگر v بر سطح تراز تابع در نقطه a مماس باشد، آنگاه $D_v f(a) = 0$

مثال: میزان تغییر $f(x,y)=y^4+2xy^3+x^2y^2$ را در $(0,1)$ در هریک از راستاهای زیر بیابید.

الف) $i+2j$ ب) $j-2i$

$D_v f(0,1)=?$ $v=\frac{i+2j}{|i+2j|}=\frac{1}{\sqrt5}i+\frac{2}{\sqrt5}j$

f مشتق‌پذیر است چون f_1, f_2, f پیوسته هستند. چون f مشتق‌پذیر است از قضیه بالا استفاده می‌کنیم $D_v f(0,1)=v\cdot\nabla f(0,1)$

$\nabla f(x,y)=(2y^3+2xy^2,\ 4y^3+6xy^2+2x^2y)$, $\nabla f(0,1)=(2,4)$ پس

$D_v f(0,1)=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)\cdot(2,4)=\frac{2}{\sqrt5}+\frac{8}{\sqrt5}=\frac{10}{\sqrt5}$

خواص هندسی بردار گرادیان:

گزاره: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در a مشتق‌پذیر است و u یک بردار یکه در $\mathbb{R}^n$ است. آنگاه داریم:

$-|\nabla f(a)|\le D_u f(a)\le|\nabla f(a)|$ و علاوه f در a در جهت $u=\frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ بیشترین افزایش را دارد و در جهت $u=\frac{-\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ بیشترین کاهش را دارد.

اثبات: $D_u f(a)=u\cdot\nabla f(a)=|u||\nabla f(a)|\cos\theta$, $-1\le\cos\theta\le1$ $\;-|\nabla f(a)|\le\underbrace{|\nabla f(a)|\cos\theta}_{D_u f(a)}\le|\nabla f(a)|$

اگر $\theta=0 \to D_u f(a)=|\nabla f(a)|$ & $u=\frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$

اگر $\theta=\pi \to D_u f(a)=-|\nabla f(a)|$ & $u=\frac{-\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

الف) معادله صفحه مماس بر رویه $x^2+y^2+z^2=6$ را در $(1,-1,2)$ بیابید.

ب) میزان بیشترین افزایش f در $(1,-1,2)$ را بیابید.

ج) میزان تغییر f در $(1,-1,2)$ در راستای بردار بین نقطه $(1,-1,2)$ به $(3,1,1)$ است چقدر است؟

الف) به وضوح نقطه‌ی مورد نظر، سطح تراز برای f است. (مسیر به $c=6$) پس از قضیه می‌دانیم $\nabla f(1,-1,2)$ بردار نرمال در $(1,-1,2)$ است

معادله‌ی صفحه‌ی مماس

$2(x-1)-2(y+1)+4(z-2)=0$ (بردار نرمال $\nabla f(1,-1,2)=(2,-2,4)$ $\Leftarrow$ $\nabla f(x,y,z)=(2x,2y,2z)$

ب) از قضیه می‌دانیم: $|\nabla f(1,-1,2)| =$ بیشترین افزایش $= \sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}$

ج) $v=(3,1,1)-(1,-1,2)=(2,2,-1) \longrightarrow u=\frac{v}{|v|}=(2/3,2/3,-1/3) \Rightarrow D_u f(1,-1,2) \overset{\text{مشتق برداری}}{=} u\cdot\nabla f(1,-1,2)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$

توابع ضمنی: F_1 , F_2 در (a,b) پیوسته $F(x,\varphi(x))=0$ حول (a,b) ، $\varphi(x)=b$ ، $y=y(x)=\varphi(x)$ ، $F(a,b)=0$ ، $F(x,y)=0$

$\xrightarrow[\text{x از طرفین}]{\text{مشتق جزئی نسبت به}} F_1+F_2\frac{dy}{dx}=0 \longrightarrow dy/dx(a)=-\frac{F_1(a,b)}{F_2(a,b)}$ اگر $F_2(a,b)\neq 0$

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ x & & y \end{array}$$

قرارداد: اگر x تابعی از متغیرهای مستقل y,z,t,w به انضمام متغیرهای ... $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{y,t,w}$ مشتق جزئی x نسبت به z است که در آن y,t,w ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

مثال: معادلات $F(x,y,z,w)=0$, $G(x,y,z,w)=0$ داده شده‌اند که در آنها F,G توابعی دارای مشتقات جزئی اول پیوسته‌اند و x,y هر یک تابعی از دو متغیر z,w اند. مطلوب است.

$$\begin{cases} x=x(z,w) \\ y=y(z,w) \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & F,G & & \\ x & y & z & w \end{array}$$

از طرفین $F=0$, $G=0$ مشتق گیری جزئی انجام می‌دهیم نسبت به z

$$\begin{cases} \xrightarrow{\times(-G_2)} F_1\frac{\partial x}{\partial z}+F_2\frac{\partial y}{\partial z}+F_3=0 \\ \xrightarrow{\times(F_2)} G_1\frac{\partial x}{\partial z}+G_2\frac{\partial y}{\partial z}+G_3=0 \end{cases}$$

$$-F_1G_2\frac{\partial x}{\partial z}-F_3G_2+F_2G_1\frac{\partial x}{\partial z}+F_2G_3=0 \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{F_3G_2-F_2G_3}{F_2G_1-F_1G_2} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{-\det\begin{pmatrix}F_3 & F_2\\ G_3 & G_2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}F_1 & F_2\\ G_1 & G_2\end{pmatrix}}$$

قرارداد: فرض کنید $F(1),\dots,F(n)$ توابعی از متغیرهای $z_1,\dots,z_n$ به انضمام ... ، تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial(F_{(1)},\dots,F_{(n)})}{\partial(z_1,\dots,z_n)} := \det\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_n}\end{pmatrix}}_{n\times n}$$

$$-\frac{\det\begin{pmatrix}F_3 & F_2\\ G_3 & G_2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}F_1 & F_2\\ G_1 & G_2\end{pmatrix}}$$

قضیه تابع ضمنی: دستگاه n معادله و $m+n$ متغیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \end{cases}$$

فرض کنید $P_0=(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)$ نقطه‌ای باشد که در دستگاه فوق صدق کند. به علاوه، فرض کنید که هر یک از $F_{(i)}$ ها $(i=1,2,\dots,n)$ نسبت به هر یک از متغیرهای x_j $(j=1,2,\dots,m)$ ، y_K $(K=1,2,\dots,n)$ مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد (حول P_0) هم‌چنین فرض کنید

$\frac{\partial(F_{(1)},\dots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\dots,y_n)}(P_0)\neq 0$ در این صورت، دستگاه را می‌توان در مجاورت P_0 نسبت به $y_1,\dots,y_n$ به عنوان توابعی از $x_1,\dots,x_n$ حل نمود. یعنی توابعی مانند $\phi(x_1,\dots,x_m),\dots,\phi(x_1,\dots,x_m)$ موجودند که $\phi_j(a_1,\dots,a_m)=b_j$ ، $\forall j=1,2,\dots,n$ و معادلات زیر برای هر $(x_1,\dots,x_m)$ در نزدیکی $(a_1,\dots,a_m)$ برقرارند.

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,\dots,x_m,\phi_1(x_1,\dots,x_m),\dots,\phi_n(x_1,\dots \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,\dots,x_m,\phi(x_1,\dots,x_m),\dots,\phi_n(x_1,\dots,x_m \end{cases}$$

به علاوه

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)},\dots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\dots,x_j,y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)},\dots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\dots,y_n)}}$$

مثال: دو معادله‌ی

$$\begin{cases} xe^y-y^2ze^w=1 \\ 2x+x^3z^5-x^2yw+z^2w^4=2 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید $p(x,y,z,w)=(1,0,-1,1)$

الف) نشان دهید x,z را می‌توان برحسب w,y در مجاورت p نوشت.

ب) اگر $f(x,z)=x^2+z^2$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ را در نقطه‌ی $(1,0,-1,1)$ بیابید.

الف) اولاً به وضوح p در معادلات فوق صدق می‌کند. ثانیاً به راحتی می‌بینیم که مشتقات جزئی

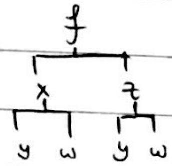
$$\circledast\begin{cases} F_{(1)}(w,y;x,z)=xe^y-y^2ze^w-1=0 \\ F_2(w,y;x,z)=2x+x^3z^5-x^2yw+z^2w^4-2=0 \end{cases}$$

اول $F_{(1)},F_{(2)}$ نسبت به همه‌ی متغیرها پیوسته‌اند.

$$\frac{\partial(F_{(1)},F_{(2)})}{\partial(x,z)}(p)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial F_{(2)}}{\partial z}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} e^y & -y^2e^w \\ 2+3x^2z^5-2xyw & 5x^3z^4+2zw^4\end{pmatrix}$$

پس طبق قضیه تابع ضمنی، نتیجه می‌شود که متغیرهای x, z را می‌توان برحسب متغیرهای y, w نوشت. $\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=1,y=0\\ z=-1,w=1}} = 3 \neq 0$

(حل ب)

ب) 

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$

از ⊗ با مشتق‌گیری جزئی نسبت به y داریم:

$$\begin{cases} x_y e^y + x e^y - 2yze^w - y^2 z_y e^w = 0 \\ 2x_y + 3x^2 x_y z^5 + 5x^3 z^4 z_y - 2x x_y y w - x^2 w + 2 z z_y w^4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[z=-1,\, w=1]{x=1,\, y=0} \begin{cases} x_y + 1 = 0 \\ 2x_y - 3x_y + 5z_y - 1 - 2z_y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_y = -1 \\ z_y = 0 \end{cases} \longrightarrow f_y = -2x$$

قضیه تابع وارون: فرض کنید
$$\begin{cases} y_1 = \varphi_{(1)}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = \varphi_{(n)}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$
که $\varphi_{(i)}$ها حول p توابعی هستند دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته حول $p = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$. اگر $\frac{\partial(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(n)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p) \neq 0$ آنگاه $x_1, \dots, x_n$ را می‌توان برحسب $y_1, \dots, y_n$ حول p نوشت و علاوه داریم:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}$$

تمرین 5: در چه نقاطی (r, θ) را می‌توان به عنوان توابعی از x, y بیان نمود؟

فرم‌های درجه دوم:

تعریف: فرض کنید $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی باشد، $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ بردار متغیر در $\mathbb{R}^n$ باشد، قرار می‌دهیم $Q(x) := x^T A x \in \mathbb{R}$

الف) اگر برای هر بردار ناصفر x، $Q(x) > 0$ آنگاه A را معین مثبت گوییم.

ب) " " " " " $Q(x) < 0$ " " معین منفی گوییم.

ج) " " " " " $Q(x) \geq 0$ " " نیمه معین مثبت گوییم.

د) " " " " " " " $Q(x) \leq 0$ " " " نیمه معین منفی "

ه) اگر بردار ناصفر x موجود باشد به $Q(x) > 0$ و بردار ناصفر y موجود باشد به $Q(y) < 0$، آنگاه A را نامعین گوییم.

قضیه: فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ یک ماتریس متقارن حقیقی باشد، فرض کنید $D_i := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}_{i \times i}$ ، $1 \leq i \leq n$

در این صورت داریم:

1) اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $D_i > 0$، آنگاه A معین مثبت است.

2) اگر برای iهای زوج $D_i > 0$ و برای iهای فرد $D_i < 0$، آنگاه A معین منفی است.

3) اگر $D_n \neq 0$ ($\det A =$) و هیچ یک از شرایط (1) و (2) برقرار نباشد آنگاه A نامعین است.

4) اگر $D_n = 0$، آنگاه A نه معین مثبت است و نه معین منفی و ممکن است نیمه معین یا نامعین باشد.

نقاط بحرانی مشتقات جزئی:

تعریف: فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $a \in U$

1) a را نقطه بحرانی گوییم، هرگاه $\nabla f(a) = 0$

2) a را یک نقطه منفرد گوییم هرگاه $\nabla f(a)$ موجود نباشد.

3) a را یک min نسبی یا موضعی گوییم، هرگاه برای هر x در یک همسایگی از a داشته باشیم: $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$ (max)) ⟵ اکسترمم نسبی

4) اگر نامساوی $f(x) \geq f(a)$ برای همه xهای در دامنه f برقرار باشد آنگاه a را یک min مطلق یا سراسری گوییم. (max مطلق) ⟵ اکسترمم مطلق

قضیه: فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $a \in U$ یک اکسترمم نسبی (یا اکسترمم مطلق) باشد. در این صورت یکی از حالات زیر را داریم:

1) a یک نقطه بحرانی است. 2) a یک نقطه منفرد است. 3) a یک نقطه مرزی U است.

$\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 < \varepsilon^2\}$ $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2+x_2^2+x_3^2 < \varepsilon^2\}$ $\{(x_1,\dots,x_n) : x_1^2+\dots+x_n^2 < \varepsilon^2\}$

گوی به مرکز x و شعاع ε : $B_\varepsilon(x)$

تعریف: فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ ، x را یک نقطه مرزی U گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$B_\varepsilon(x) \cap U \neq \emptyset , B_\varepsilon(x) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n - U)}_{U^c} \neq \emptyset$$

مرز مجموعه U عبارت است از مجموعه ی همه ی نقاط مرزی آن

مجموعه U را بسته گوییم، هرگاه شامل مرز خودش باشد. (هر نقطه U که مرزی نباشد را درونی می گوییم)

مجموعه U را کراندار گوییم هرگاه $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\delta > 0$ موجود باشد که $U \subseteq B_\delta(x)$

قضیه: فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و U بسته و کراندار باشد. در این صورت روی f این مجموعه کراندار است و f مقادیر اکسترمم مطلق خود را می گیرد.

تعریف: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، $a \in U$ نقطه بحرانی درونی باشد که max نسبی است و نه min نسبی، آنگاه a را یک نقطه زینی گوییم

توجه کنید به جز حالات توابع دو متغیره نقاط زینی، در نمودارهای به شکل زین اسب نیستند مثلاً $f(x,y) = x^3$

تعریف: فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی دوم پیوسته است. در همسایگی a به $a \in U$ به ازای هر x در مجاورت a ماتریس (شرط اصلی)

هسین (Hessian) به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

قضیه (آزمون مشتق دوم) فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد در همسایگی $a \in U$ ، $a \in U$ که در آن a یک نقطه

بحرانی f است. آنگاه:

① اگر $H(a)$ معین مثبت باشد آنگاه a یک min نسبی است. ③ اگر $H(a)$ نامعین باشد، آنگاه a نقطه زینی است

② اگر $H(a)$ معین منفی باشد " " " max " " " ④ " " در هیچ یک از شرایط بالا نباشد، آنگاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت

مثال: اگر $f(x,y,z)=x^2+12zy+(y-z)^3$ آنگاه مطلوبست نقاط بحرانی تابع f و تعیین نوع آنها:

$$\nabla f=(\underbrace{2x}_{f_1},\underbrace{12z+3(y-z)^2}_{f_2},\underbrace{12y-3(y-z)^2}_{f_3})=0 \longrightarrow x=0 \begin{cases} 12z=-3(y-z)^2 \\ 12y=3(y-z)^2 \end{cases} \Rightarrow z=-y \longrightarrow 12y=3(2y)^2=12y^2 \longrightarrow y=0 \text{ یا } 1$$

نقاط بحرانی: $P=(0,0,0)$, $Q=(0,1,-1)$

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(y-z) & 12-6(y-z) \\ 0 & 12-6(y-z) & 6(y-z) \end{pmatrix} \longrightarrow H(P)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_1=2>0$, $D_2=0$, $D_3=\underbrace{-2(12)^2}_{\neq 0}<0 \longrightarrow$ $H(P)$ نامعین است ← P یک زینی است

$$H(Q)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad D_1=2>0,\ D_2=24>0,\ D_3=2(12)^2>0$$

پس $H(Q)$ معین مثبت است، در نتیجه Q یک min نسبی است

قضیه: (آزمون مشتق دوم برای حالت خاص 2 متغیره) فرض کنید $f: U\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $(a,b)\in U$ یک نقطه بحرانی f باشد و مشتقات جزئی مرتبه دوم f در همسایگی (a,b) پیوسته باشند. به علاوه فرض کنید $A=f_{11}(a,b)$, $B=f_{12}(a,b)=f_{21}(a,b)$, $C=f_{22}(a,b)$

آنگاه داریم: ① اگر $A>0$, $AC-B^2>0$ آنگاه (a,b) یک min نسبی است. ② اگر $AC-B^2>0$, $A<0$ آنگاه (a,b) یک max نسبی است. ③ اگر $AC-B^2<0$ آنگاه (a,b) زینی است. ④ اگر $AC-B^2=0$ آنگاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال: نقاط بحرانی تابع زیر را و نوع آنها را بیابید: $f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$

$\nabla f=(9x^2-9,2y+4)=(0,0)$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=-2 \end{cases} \quad \text{نقاط بحرانی}: \ (-1,-2)=P_1,\ (1,-2)=P_2$$

نقطه P_1: $f_{11}(x,y)=18x$, $f_{12}=0=f_{21}$, $f_{22}=2$: $A=-18$, $B=0$, $C=2$

$AC-B^2=-36<0 \longrightarrow$ زینی: P_1

نقطه P_2: $A=18$, $B=0$, $C=2 \longrightarrow AC-B^2=36>0$, $A>0 \longrightarrow$ min نسبی: P_2

مثال:

مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=2xy$ را در ناحیه بسته $x^2+y^2\le 4$ بیابید. $\nabla f=(2y,2x)=(0,0)$

نقطه بحرانی $=(0,0) \longrightarrow f(0,0)=0$

نقطه‌ی بحرانی نداریم. نقاط مرزی که نقاط روی دایره‌ی $x^2+y^2=4$ هستند: $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$, $0\le\theta\le2\pi$

$\to 0\le 2\theta\le 4\pi$

$f(x,y)=8\sin\theta\cos\theta=4\sin2\theta$

$$\begin{cases} \theta=\frac{\pi}{4} \to x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2},\ f(\sqrt{2},\sqrt{2})=4 \\ \theta=\frac{3\pi}{4} \to x=-\sqrt{2},\ y=\sqrt{2},\ f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-4 \\ \theta=\frac{5\pi}{4} \to x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=4 \\ \theta=\frac{7\pi}{4} \to x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2},\ f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-4 \end{cases}$$

نقطه‌ی $f(0,0)=0$ زینی است چون در همسایگی آن نقاطی با x مثبت، x منفی وجود دارد.

روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی با قید:

$(x_1,\dots,x_n)$

$$\begin{cases} g_{(1)}(x)=0 \\ \vdots \\ g_{(m)}(x)=0 \end{cases}$$

* فرض کنید $f: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد.

* فرض کنید $a=(a_1,\dots,a_n)$ یک اکسترمم نسبی f باشد.

* تعریف می‌کنیم: $L(x_1,\dots x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n):=f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+\lambda_m g_m(x)$

* در این صورت، مقادیر $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ یافت می‌شوند که $(a_1,\dots,a_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ یک نقطه‌ی بحرانی برای L است. یعنی $\nabla L(a,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=0$

* پس باید به حل معادلات زیر بپردازیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=-\lambda_1\frac{\partial g_{(1)}}{\partial x_1}(x)-\dots-\lambda_m\frac{\partial g_{(m)}}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}=-\lambda_1\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}-\dots-\lambda_m\frac{\partial g_{(m)}}{\partial x_n}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m}=0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}=0 \end{cases}$$

* پس برای یافتن مقادیر اکسترمم مطلق f باید مقدار f را در تمام جواب‌های دستگاه‌های اخیر مقایسه و درست را انتخاب کنیم.

مثال: مقادیر max , min مطلق $f(x,y,z)=xy+2z$ را روی دایره‌ای که فصل مشترک صفحه‌ی $x+y+z=0$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=24$

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=x+y+z=0 \\ g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-24=0 \end{cases}$$

جواب: $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2):=(xy+2z)+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-24)$, $n=3$, $m=2$

$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \to y+\lambda_1+2\lambda_2 x=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0\to x+\lambda_1+2\lambda_2 y=0$, $\frac{\partial L}{\partial z}=0\to 2+\lambda_1+2\lambda_2 z=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0\to x+y+z=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=0\to x^2+y^2+z^2-24=0$

$(x-y)-2\lambda_2(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)(1-2\lambda_2)=0 \to x=y$ یا $\lambda_2=1/2$

حالت اول: فرض کنید $x=y$ لذا ① $\to z=-2x$ ② لذا $6x^2=24 \to x=\pm 2$

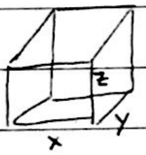
$\to p_1=(2,2,-4) \to f(p_1)=-4 \quad p_2=(-2,-2,4) \to f(p_2)=12$

حالت دوم: فرض کنید $\lambda_2=1/2$ ① لذا $\begin{cases} x+y=1 \\ x=-11/y \end{cases} \to (x+y)^2=1$ ③ لذا $\begin{cases} x+\lambda_1+x=0 \\ z+\lambda_1+z=0 \end{cases} \to \lambda_1=-1=z$

$x^2+y^2+2xy=1 \to xy=-11 \to y=\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2} \to x=\frac{1\mp 3\sqrt{5}}{2} \to \begin{cases} p_3=\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, -1\right) \\ p_4=\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, -1\right) \end{cases}$

$f(p_3)=-13=f(p_4) \to$ نقطه min

مثال: می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. برای سقف و قاعده‌ی آن، می‌خواهیم از ماده‌ای استفاده کنیم که قیمت هر واحد آن دو برابر قیمت ماده‌ای است که برای ساختن دیواره‌های آن بکار می‌بریم. اگر بخواهیم حجم آن مکعب مستطیل $10m^3$ شود. ابعاد آن را چگونه بگیریم که هزینه min شود؟



$f(x,y,z)=\overbrace{xy}^{\text{سقف}}+\overbrace{2xy}^{\text{قاعده}}+2zy+2xz \quad g(x,y,z)=xyz-10=0 \quad L(x,y,z,\lambda)=(3xy+2zy+2xz)+\lambda(xyz-10)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=3y+2z+\lambda yz=0 \quad$ (I) $\frac{\partial L}{\partial y}=3x+2z+\lambda xz=0 \quad$ (III) $\frac{\partial L}{\partial z}=2y+2x+\lambda xy=0$

(II) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=xyz-10=0 \quad 3(y-x)+\lambda z(y-x)=0 \to (y-x)(3+\lambda z)=0 \Rightarrow x=y$ یا $\lambda z=-3 \xrightarrow{\text{(I) لذا}} z=0$ (II با) ✗

پس $x=y \xrightarrow{\text{(III) لذا}} 2x+2x+\lambda x^2=0 \to 4x+\lambda x^2=0 \to x(4+\lambda x)=0 \to x=0$ یا $\lambda x=-4 \to$ (II با) ✗

از (I) داریم: $3x+2z-4z=0 \to 3x=2z \to x=2/3x \xrightarrow[\text{داریم}]{\text{(II) از}} x\cdot x(3/2x)=10 \to 3/2x^3=10$

$x=\sqrt[3]{20/3}=y, \ z=3/2\sqrt[3]{20/3} \quad P\left(\sqrt[3]{20/3}, \sqrt[3]{20/3}, 3/2\sqrt[3]{20/3}\right) \to f(P)=? \to$ نقطه min

چون کافی است ببینیم به ازای $x,y,z \to \infty$ داریم $f(x,y,z) \to \infty$