Kiani-Saeedi Madani-Saki

ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

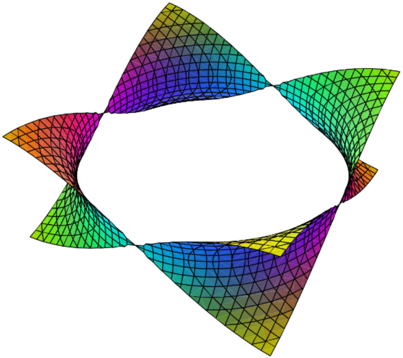
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

انتگرال روی سطح

Kiani-Saeedi Madani-Saki

رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

یک رویه یا سطح در $\mathbb{R}^3$ به طور شهودی حاصل از تغییر شکل دادن (مثل کشیدن یا خم کردن) یک ناحیه‌ی هم‌بند، کران‌دار و بسته از صفحه است.



Kiani-Saki

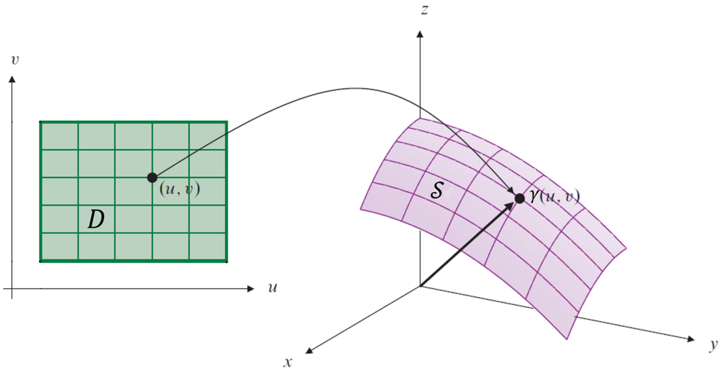
قبلاً با رویه‌هایی که به فرم مجموعه‌های تراز توابعی تعریف‌شده روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ بودند، آشنا شدیم. به‌خصوص، اگر $G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که $G(x, y, z) = 0$، تشکیل یک رویه در $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. در ادامه، با رده‌ی دیگری از رویه‌ها با عنوان رویه‌های پارامتری آشنا می‌شویم.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

رویه‌های پارامتری در $\mathbb{R}^3$

مجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{R}^3$ را یک رویه‌ی پارامتری یا سطح پارامتری می‌نامیم، هرگاه تابع پیوسته‌ی $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ موجود باشد که $\operatorname{Im}(\gamma) = S$. در این صورت، γ را یک نمایش پارامتری یا یک پارامتری‌سازی برای S می‌نامیم. توجه کنید که داریم:

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



مثال

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ پیوسته است. در این صورت، نمودار f یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است.

پاسخ: تابع $\gamma : D \to \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

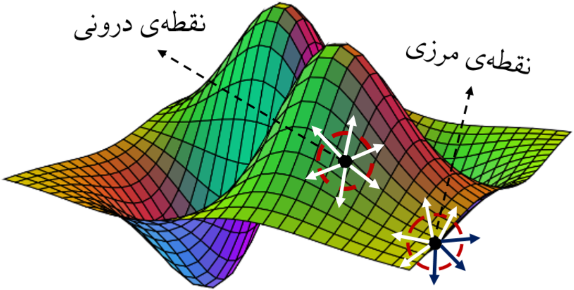
$$\gamma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

در این صورت، از پیوستگی تابع f و توابع $x(u, v) = u$ و $y(u, v) = v$ ، پیوستگی γ نتیجه می‌شود. پس، تصویر γ یعنی نمودار f یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است.

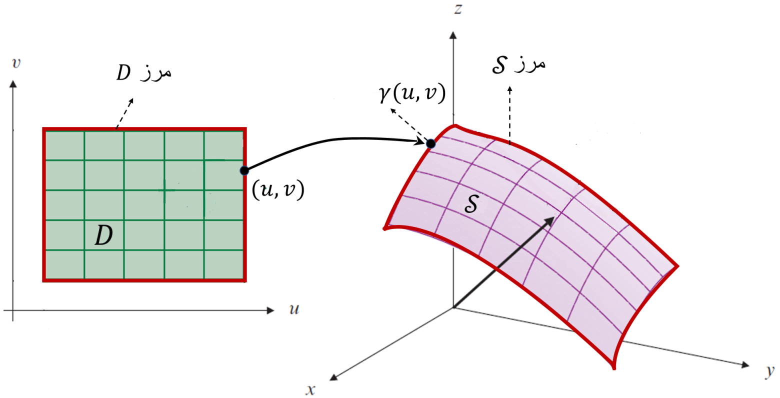
Hani Saeedi Madani Saki

نقاط مرزی و درونی یک رویه در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید S رویه‌ای در $\mathbb{R}^3$ است و $P \in S$. در این صورت، P را یک **نقطه‌ی درونی** S می‌نامیم، هرگاه وقتی در نقطه‌ی P روی S ایستاده‌ایم، بتوانیم در هر طرف روی S حرکت کنیم. نقطه‌ی P را یک **نقطه‌ی مرزی** S می‌نامیم، هرگاه یک نقطه‌ی درونی S نباشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط مرزی و مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی S به‌ترتیب **مرز** و **درون** S نامیده می‌شوند.



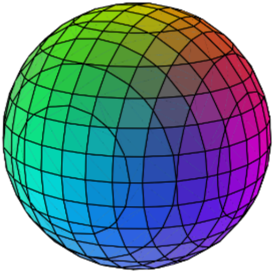
فرض کنید S رویه‌ای پارامتری در $\mathbb{R}^3$ و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S است. در این صورت، نقاط مرزی S تصاویر نقاط مرزی D تحت γ هستند.



رویه‌های بسته در $\mathbb{R}^3$

رویه‌ی S در $\mathbb{R}^3$ یک رویه‌ی بسته نامیده می‌شود، هرگاه هیچ نقطه‌ی مرزی نداشته باشد.

به طور مثال، کره یک رویه‌ی بسته است.



Kiani-Saeedi Madani-Saki

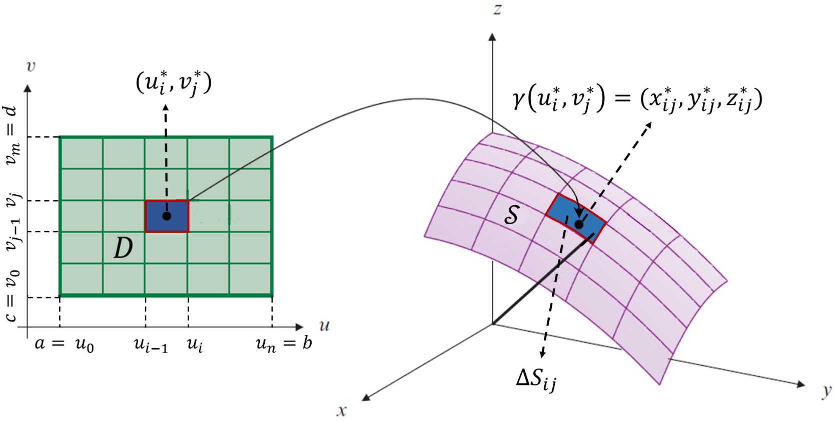
سطوح هموار و قطعه‌به‌قطعه هموار در $\mathbb{R}^3$

رویه‌ی S در $\mathbb{R}^3$ را هموار می‌نامیم، هرگاه S در هر نقطه‌ی درونی خود دارای یک صفحه‌ی مماس منحصربه‌فرد باشد. به‌ویژه، به‌ازای هر نقطه‌ی درونی P از یک رویه‌ی هموار، بردار ناصفر $n(P)$ موجود است که بر رویه در نقطه‌ی P عمود است.

رویه‌ی S در $\mathbb{R}^3$ را قطعه‌به‌قطعه هموار می‌نامیم، هرگاه بتوان S را به صورت اجتماع رویه‌هایی هموار در $\mathbb{R}^3$ نوشت که حداکثر در مرزهای‌شان با هم اشتراک دارند.

Hani-Saeedi-Madani-Saki

تعریف انتگرال روی سطح



فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری با نمایش پارامتری $\gamma : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ است، که در آن $R = [a,b] \times [c,d]$ یک مستطیل است. همچنین، فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار است، طوری که $\operatorname{Im}(\gamma) = S \subseteq U$. افرازهای زیر را به‌ترتیب برای $[a,b]$ و $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

$$P_1 = \{a = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = b\}$$

$$P_2 = \{c = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m = d\}$$

حال، افراز P از مستطیل R را متشکل از mn مستطیل زیر در نظر می‌گیریم:

$$R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq m$، فرض کنید که نقطه‌ی (u_i^*, v_j^*) از R_{ij} انتخاب شده است، و داریم:

$$\gamma(u_i^*, v_j^*) = (x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq m$، فرض کنید که:

$$\Delta S_{ij} = \gamma(R_{ij}) = \{\gamma(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in R_{ij}\}$$

هم‌چنین، قرار دهید:

$$\|P\| = \max\{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} : 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

و مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$R(P,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*)\Delta S_{ij}$$

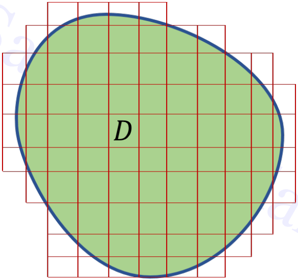
حال، اگر $\lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$ موجود باشد، آن‌گاه تابع f را بر رویه‌ی S انتگرال‌پذیر گوییم، و مقدار آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\iint_S f\, dS$$

در صورتی که S بسته باشد، آن‌گاه انتگرال f روی S را با $\oiint_S f\, dS$ نیز نمایش می‌دهیم.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

حال، فرض کنید که $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک نمایش پارامتری از رویه‌ی S است، که در آن D بسته و کران‌دار است و لزوماً یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^2$ نیست. در این صورت، می‌توان یک تقسیم‌بندی مانند شکل زیر برای D در نظر گرفت:



اگر تقسیم‌بندی بالا را کوچک و کوچک‌تر کنیم، به نحوی که مساحت‌های نواحی کوچک به صفر میل کنند، آن‌گاه می‌توان به طور مشابه با قبل، انتگرال روی سطح را به‌ازای γ نیز تعریف کرد.

Kiani-Saki

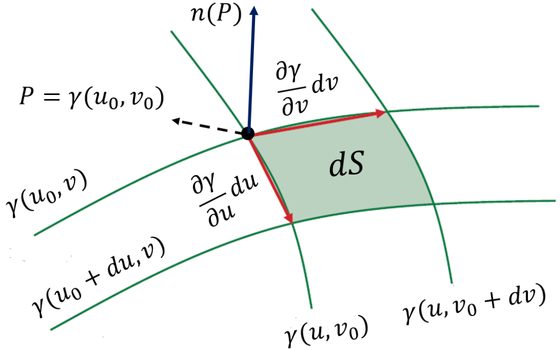
قرارداد:

از این پس، همه‌ی نمایش‌هایی پارامتری که از یک رویه‌ی پارامتری در نظر گرفته می‌شوند، دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

محاسبه‌ی المان سطح (dS)

فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است، و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S است.



فرض کنید که $(u_0, v_0) \in D$ و $P = \gamma(u_0, v_0)$. با محاسبه‌ی دیفرانسیل خم‌های $\gamma(u, v_0)$ و $\gamma(u_0, v)$ داریم:

$$d\gamma(u, v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u} du, \qquad d\gamma(u_0, v) = \frac{\partial \gamma}{\partial v} dv$$

مطابق با شکل می‌توان dS را یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع قاعده‌ی $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)du$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)dv$ در نظر گرفت. پس، با فرض اینکه $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ موازی نیستند، داریم:

$$\begin{aligned} dS &= \left| \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) du \right) \times \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) dv \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \right| du dv \end{aligned}$$

توجه کنید که $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ در نقطه‌ی P بر S مماس هستند. بنابراین، بردار زیر در نقطه‌ی P بر S عمود است:

$$n(P) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

حال، فرض کنید که $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\gamma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
\gamma_u \times \gamma_v &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} k \\
&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} k
\end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

در نتیجه، داریم:

$$\gamma_u \times \gamma_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

بنابراین، داریم:

$$|\gamma_u \times \gamma_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(-\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

از این‌رو، داریم:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

قضیه

فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است، و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S است، طوری که:

$$\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

همچنین، فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ روی S انتگرال‌پذیر است، و داریم $S \subseteq U$. در این صورت، داریم:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, |\gamma_u \times \gamma_v|\, dudv$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

قضیه

فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است، و $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ توابعی هستند که انتگرال هر یک از آن‌ها روی سطح S موجود است.

۱. $\iint_S f\, dS$ به نمایش پارامتری در نظر گرفته‌شده برای S بستگی ندارد؛ یعنی اگر $\gamma : D_1 \to \mathbb{R}^3$ و $\eta : D_2 \to \mathbb{R}^3$ دو نمایش پارامتری از S باشند، آن‌گاه داریم:

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_1} f(\gamma(u,v))|\gamma_u \times \gamma_v|\, dudv = \iint_{D_2} f(\eta(u,v))|\eta_u \times \eta_v|\, dudv$$

۲. داریم:

$$\iint_S dS = S \text{ مساحت}$$

۳. به‌ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$، انتگرال $c_1 f + c_2 g$ روی سطح S وجود دارد، و داریم:

$$\iint_S (c_1 f + c_2 g)\, dS = c_1 \iint_S f\, dS + c_2 \iint_S g\, dS$$

۴. داریم:

$$\left| \iint_S f\, dS \right| \leq \iint_S |f|\, dS$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی قضیه

۵. اگر به‌ازای هر $(x,y,z) \in \mathcal{S}$، داشته باشیم $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$، آن‌گاه داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, dS \le \iint_{\mathcal{S}} g\, dS$$

۶. اگر $M = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathcal{S}\}$، آن‌گاه داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, dS \le M \times (\text{مساحت } \mathcal{S})$$

۷. فرض کنید که $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i$، و $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ حداکثر در مرزهای‌شان اشتراک دارند. در این صورت، تابع f روی $\mathcal{S}$ انتگرال‌پذیر است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \le i \le n$، تابع f روی $\mathcal{S}_i$ انتگرال‌پذیر باشد، و در این صورت، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathcal{S}_i} f\, dS$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

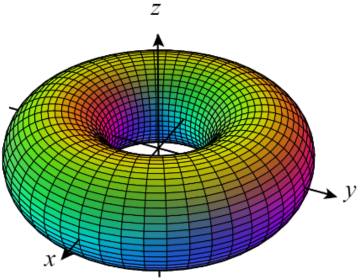
مثال

یک چنبره‌ی دوار S با پارامترهای a با $0 < b < a$ با نمایش پارامتری زیر به‌دست می‌آید:

$$r(u,v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u))$$

که در آن $0 \leq u, v \leq 2\pi$. مساحت جانبی S را به‌دست آورید.

پاسخ:



باید $\iint_S dS$ را به‌دست آوریم.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$r_u = (-b\sin(u)\cos(v), -b\sin(u)\sin(v), b\cos(u))$$

$$r_v = (-(a+b\cos(u))\sin(v), (a+b\cos(u))\cos(v), 0)$$

داریم:

$$r_u \times r_v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -b\sin(u)\cos(v) & -b\sin(u)\sin(v) & b\cos(u) \\ -(a+b\cos(u))\sin(v) & (a+b\cos(u))\cos(v) & 0 \end{bmatrix}$$

از این‌رو، $r_u \times r_v$ برابر است با:

$$\underbrace{b(a+b\cos(u))\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -\sin(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$A = \det\begin{bmatrix} -\sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ \cos(v) & 0 \end{bmatrix} i - \det\begin{bmatrix} -\sin(u)\cos(v) & \cos(u) \\ -\sin(v) & 0 \end{bmatrix} j$$

$$+\det\begin{bmatrix} -\sin(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) \\ -\sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} k$$

$$= -(\cos(u)\cos(v))i - (\cos(u)\sin(v))j - \sin(u)k$$

بنابراین، داریم:

$$|A| = \sqrt{(-\cos(u)\cos(v))^2 + (-\cos(u)\sin(v))^2 + (-\sin(u))^2} = 1$$

در نتیجه، داریم:

$$|r_u \times r_v| = |b(a + b\cos(u))| = b(a + b\cos(u))$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |r_u \times r_v|\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos(u))\, dudv$$

$$= 2\pi\left(b(au + b\sin(u))\right)\Big|_{u=0}^{u=2\pi} = 4\pi^2 ab$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

المان سطح نمودار یک تابع دو متغیره

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است. می‌دانیم نمایش پارامتری زیر از نمودار f وجود دارد:

$$\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

داریم:

$$\gamma_u = (1, 0, f_1), \qquad \gamma_v = (0, 1, f_2)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\gamma_u \times \gamma_v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \end{bmatrix} = (-f_1, -f_2, 1)$$

لذا، داریم:

$$dS = \sqrt{(-f_1)^2 + (-f_2)^2 + 1^2}\, dudv = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\, dudv$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

توجه:

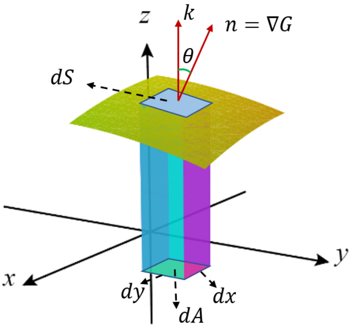
در اسلاید قبل، به منظور به‌دست آوردن بردار نرمال n، می‌توانستیم بردار گرادیان تابع $g(x,y,z)=z-f(x,y)$ را به‌دست آوریم؛ زیرا از قبل می‌دانیم که ∇g بر نمودار f عمود است، و در واقع بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر نمودار f است.

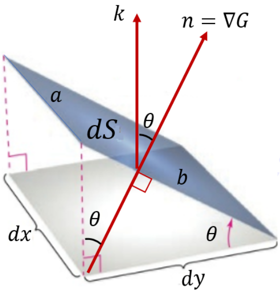
Kiani-Saeedi Madani-Saki

المان سطح برای رده‌ی گسترده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید که $G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است. می‌دانیم همه‌ی نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ با $G(x, y, z) = 0$ تشکیل یک رویه‌ی S در $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. فرض کنید n بردار نرمال S است.

Kiani–Saeedi





فرض کنید که dS المان سطح رویه‌ی یادشده است، طوری که تقریباً مستطیل‌شکل است، و یکی از اضلاع آن (که با طول a مشخص شده است) با محور x موازی است. فرض کنید که طول ضلع دیگر برابر است با b. در این صورت، داریم $dS = ab$. حال، با فرض اینکه θ زاویه‌ی حاده‌ی بین n و k است، داریم:

$$dy = b|\cos(\theta)| \implies b = \frac{dy}{|\cos(\theta)|}$$

اما توجه کنید که:

$$n \cdot k = |n||k|\cos(\theta) = |n|\cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{n \cdot k}{|n|}$$

می‌دانیم بردار نرمال رویه‌ی $G(x, y, z) = 0$، همان ∇G است. بنابراین، داریم:

$$n = \nabla G = (G_x, G_y, G_z)$$

که نتیجه می‌دهد $|n| = |\nabla G|$ و $n.k = G_z$. از این‌رو، اگر $G_z \neq 0$، آنگاه داریم:

$$dS = ab = dx \frac{dy}{|\cos(\theta)|} = \frac{|\nabla G|}{|G_z|} dxdy$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

به طور مشابه، داریم:

$$G_x \neq 0 \implies dS = \frac{|\nabla G|}{|G_x|} dydz$$

$$G_y \neq 0 \implies dS = \frac{|\nabla G|}{|G_y|} dxdz$$

توجه:

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته است. علاوه بر روشی که قبلاً به منظور به‌دست آوردن المان سطح نمودار f توضیح داده شد، می‌توانیم با در نظر گرفتن توصیف $G(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ از نمودار f، المان سطح نمودار f را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|} dxdy = |(-f_1, -f_2, 1)| dxdy = \left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\right) dxdy$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

فرض کنید که S سطح مخروط $\phi = \frac{\pi}{6}$ به‌ازای $0 \le z \le 1$ است. انتگرال $\iint_S z\, dS$ را بیابید.

پاسخ:

راه اول:

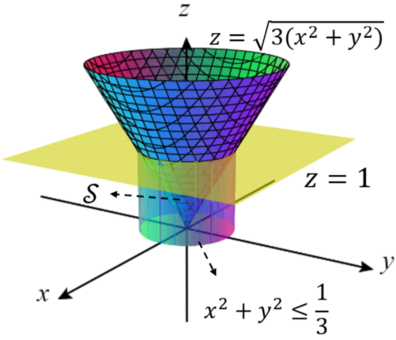
می‌دانیم که در مختصات کروی، داریم:

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

بنابراین، S برابر با نمودار تابع زیر است:

$$z = f(x,y) = \sqrt{3(x^2+y^2)}$$

که در آن f بر تصویر S روی صفحه‌ی xy تعریف شده است.



Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

از این‌رو، المان سطح S برابر است با:

$$dS = \left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\right) dxdy$$
$$= \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\right) dxdy = 2dxdy$$

حال، فرض کنید که D تصویر S بر صفحه‌ی xy است. در واقع، D فضای داخل خم فصل مشترک مخروط یادشده و صفحه‌ی $z = 1$ است. داریم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$

بنابراین، D مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}$.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

از این‌رو، داریم:

$$\iint_S z\,dS = \iint_D z(x,y)\,2dxdy = 2\iint_D \sqrt{3(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2\sqrt{3}r^2\,drd\theta = 4\sqrt{3}\pi\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4\pi}{9}$$

راه دوم:

توجه کنید که هر نقطه در مختصات دکارتی بر حسب مختصات کروی دارای نمایش زیر است:

$$(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$$

بنابراین، نقاط مخروط داده‌شده، با توجه به $\phi = \frac{\pi}{6}$، به صورت زیر هستند:

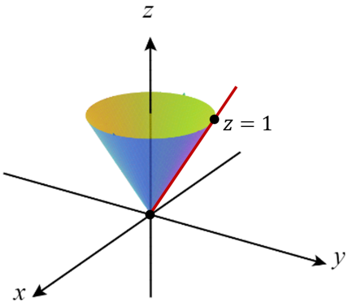
$$\left(\frac{1}{2}\rho\cos(\theta), \frac{1}{2}\rho\sin(\theta), \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

واضح است که به‌ازای مخروط داده‌شده، داریم $0 \le \theta \le 2\pi$. حال، محدوده‌ی ρ را به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\rho_{min} = 0$، در حالی‌که ρ_{max} در محل تقاطع مخروط داده‌شده و صفحه‌ی $z = 1$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$z = 1, \quad \phi = \frac{\pi}{6} \implies 1 = \rho_{max} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_{max} \implies \rho_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



ادامه‌ی مثال

بنابراین، نمایش پارامتری زیر از مخروط S را می‌توان در نظر گرفت:

$$\gamma(\rho,\theta)=\left(\frac{1}{2}\rho\cos(\theta),\frac{1}{2}\rho\sin(\theta),\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$$

که در آن $0\leq\theta\leq 2\pi$ و $0\leq\rho\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$. داریم:

$$dS=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2}d\rho d\theta$$

در حالی‌که داریم:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho,\theta)}=\det\begin{bmatrix} y_\rho & y_\theta \\ z_\rho & z_\theta \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(\theta) & \frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\cos(\theta)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\rho,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\rho & x_\theta \\ z_\rho & z_\theta \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta) & -\frac{1}{2}\rho\sin(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta) & -\frac{1}{2}\rho\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) & \frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\rho$$

بنابراین، داریم:

$$dS = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\sin(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\rho\right)^2}\, d\rho d\theta = \frac{\rho}{2} d\rho d\theta$$

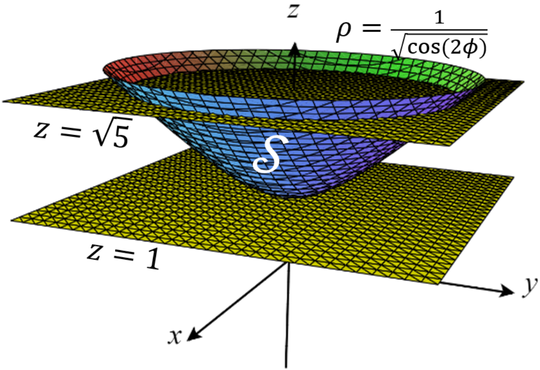
در نهایت، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} z\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\rho}{2}\,\frac{\rho}{2} d\rho d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{4\pi}{9}$$

مثال

فرض کنید که رویه‌ی S با معادله‌ی $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}$ به‌ازای $\sqrt{5} \leq z \leq 1$ داده شده است. انتگرال $\iint_S z\,dS$ را بیابید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

راه اول: تبدیل به $G(x,y,z)=0$:

داریم:

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \rho^2=\frac{1}{\cos(2\phi)}=\frac{1}{2\cos^2(\phi)-1}$$

بنابراین، داریم:

$$2\rho^2\cos^2(\phi)-\rho^2=1 \implies 2z^2-(x^2+y^2+z^2)=1$$

لذا رویه‌ی S بخشی از رویه‌ی زیر است:

$$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1=0$$

از این‌رو، داریم:

$$\nabla G=(G_x,G_y,G_z)=(2x,2y,-2z)$$

پس داریم:

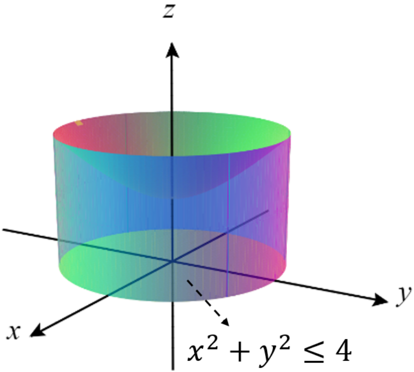
$$\underbrace{|G_z|=2z,}_{\neq 0} \quad |\nabla G|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-2z)^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

حال، تصویر S را بر صفحه‌ی xy به‌دست می‌آوریم، و آن را D می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2-1 \\ 1\leq z\leq \sqrt{5} \end{cases} \implies x^2+y^2\leq 4$$



Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} z\,dS = \iint_D z\,\frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dA_{x,y} = \iint_{x^2+y^2\le 4} z\,\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}\,dA_{x,y}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{2x^2+2y^2+1}\,dA_{x,y}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2r^2+1}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{(2r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = \frac{26\pi}{3}$$

راه دوم: استفاده از نمایش پارامتری کروی $\mathcal{S}$:

با توجه به اینکه $\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}$، نمایش پارامتری زیر با استفاده از مختصات کروی برای $\mathcal{S}$ قابل تعریف است:

$$\gamma(\phi,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\sin(\phi)\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\sin(\phi)\sin(\theta), \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\cos(\phi)\right)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

حال، کران‌های ϕ و θ را برای S می‌یابیم. توجه می‌کنیم که توصیف داده‌شده از S در صورت مثال، مستقل از θ است. بنابراین، از آنجا که در مختصات کروی داریم $0 \le \theta \le 2\pi$، می‌توان گفت که برای S نیز داریم $0 \le \theta \le 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را می‌یابیم. داریم:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \cos(2\phi) > 0 \iff 0 \le \phi < \frac{\pi}{4}$$

حال، داریم:

$$1 \le z \le \sqrt{5} \iff 1 \le \rho\cos(\phi) \le \sqrt{5} \iff 1 \le \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \le \sqrt{5}$$

که معادل است با:

$$1 \le \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{2\cos^2(\phi) - 1}} \le \sqrt{5} \iff 9\cos^2(\phi) - 5 \ge 0,\ \cos^2(\phi) \le 1$$

و از این‌رو، داریم:

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \le \cos(\phi) \le 1 \iff 0 \le \phi \le \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

در نهایت، کران‌های ϕ و θ را به صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$0 \leq \phi \leq \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

حال، باید $|\gamma_\phi \times \gamma_\theta|$ را بیابیم. با توجه به اینکه $x_\theta = -y$ و $y_\theta = x$، داریم:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} y_\phi & y_\theta \\ z_\phi & 0 \end{bmatrix} = -y_\theta z_\phi = -x z_\phi$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\phi & x_\theta \\ z_\phi & 0 \end{bmatrix} = -x_\theta z_\phi = y z_\phi$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\phi & x_\theta \\ y_\phi & y_\theta \end{bmatrix} = y_\theta x_\phi - x_\theta y_\phi = x x_\phi + y y_\phi$$

از طرفی داریم $y = x\tan(\theta)$، که نتیجه می‌دهد $y_\phi = x_\phi \tan(\theta)$.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = xx_\phi + (x\tan(\theta))(x_\phi\tan(\theta)) = xx_\phi(1+\tan^2(\theta)) = \frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} dS &= \left(\sqrt{(-xz_\phi)^2 + (yz_\phi)^2 + \left(\frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}\right)^2}\right) d\phi d\theta \\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{xz_\phi}{\cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}\right)^2}\right) d\phi d\theta \\ &= \left(\frac{|x|}{\cos^2(\theta)}\sqrt{\cos^2(\theta)z_\phi^2 + x_\phi^2}\right) d\phi d\theta \end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

توجه می‌کنیم که:

$$z_\phi = \rho' \cos(\phi) - \rho \sin(\phi), \quad x_\phi = (\rho' \sin(\phi) + \rho \cos(\phi)) \cos(\theta)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\cos^2(\theta) z_\phi^2 + x_\phi^2 = \cos^2(\theta)(\rho^2 + \rho'^2)$$

پس، داریم:

$$dS = \left(\rho \sin(\phi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right) d\phi d\theta$$

در حالی‌که داریم:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \rho' = \frac{\sin(2\phi)}{\sqrt{\cos^3(2\phi)}} \implies \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{1}{\sqrt{\cos^3(2\phi)}}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

لذا، می‌توان نوشت:

$$dS = \left(\frac{\sin(\phi)}{\cos^2(2\phi)}\right) d\phi d\theta$$

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} z\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \frac{\cos(\phi)\sin(\phi)}{\cos^{\frac{5}{2}}(2\phi)}\, d\phi d\theta \\
&= \pi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \frac{\sin(2\phi)}{\cos^{\frac{5}{2}}(2\phi)}\, d\phi \\
&= \frac{\pi}{3} \left(\cos^{-\frac{3}{2}}(2\phi)\right)\Bigg|_{\phi=0}^{\cos^{-1}\left(\phi=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \\
&= \frac{\pi}{3} \left(\cos^{-\frac{3}{2}}\left(2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

حال، فرض کنیم که $0 \leq \alpha \leq \pi$ چنان است که $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. باید $\cos(2\alpha)$ را بیابیم. داریم:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = \frac{1}{9}$$

از این‌رو، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} z\, dS = \frac{\pi}{3}(27 - 1) = \frac{26\pi}{3}$$

Kian-Saeedi-Madani-Saki

المان سطح در مختصات کروی به‌ازای ρ ثابت

فرض کنید رویه‌ی S در $\mathbb{R}^3$، قسمتی از سطح کره‌ی به شعاع a است. در این صورت، می‌توان نمایش پارامتری زیر را برای S در نظر گرفت:

$$\gamma : D \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(\phi, \theta) = (a\sin(\phi)\cos(\theta), a\sin(\phi)\sin(\theta), a\cos(\phi))$$

با محاسباتی ساده، می‌توان دید که:

$$dS = (|\gamma_\phi \times \gamma_\theta|)\, d\phi d\theta = (a^2\sin(\phi)) d\phi d\theta$$

البته در خلال راه دوم از مثال قبل هم نشان دادیم که:

$$dS = \left(\rho\sin(\phi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right) d\phi d\theta$$

که در آن فرض شده است ρ تابعی از ϕ است. پس، به‌ازای $\rho = a$، داریم $\rho' = 0$، و لذا:

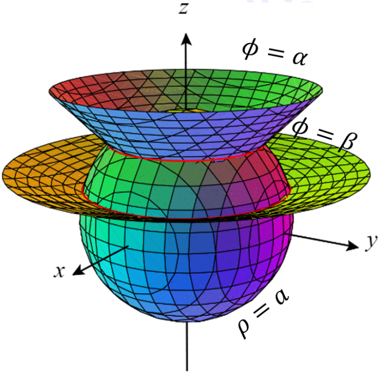
$$dS = (a^2\sin(\phi)) d\phi d\theta$$

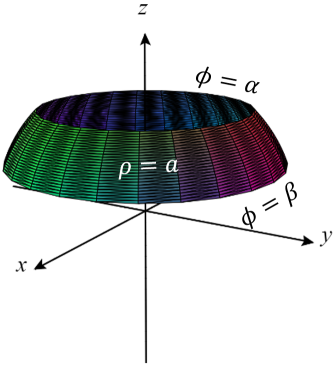
Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

فرض کنید که $0 < \alpha < \beta$. مساحت رویه‌ی محصور بین مدارهای $\phi = \alpha$ و $\phi = \beta$ را در کره‌ی $\rho = a$ بیابید.

پاسخ:





Kiani-Sae

ادامه‌ی مثال

فرض کنیم که $\mathcal{S}$ رویه‌ی یادشده در صورت مثال است. از آنجا که $\mathcal{S}$ بخشی از کره‌ی $\rho = a$ است، المان سطح برای $\mathcal{S}$ به صورت $dS = \rho^2 \sin(\phi) d\phi d\theta$ است. پس، در مختصات (ϕ, θ)، رویه‌ی $\mathcal{S}$ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\alpha \leq \phi \leq \beta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \mathcal{S} &= \iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin(\phi)\, d\phi d\theta \\ &= 2\pi a^2 \left(-\cos(\phi)\right)\Big|_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} = 2\pi a^2 \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\right) \end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

المان سطح یک استوانه

فرض کنید که رویه‌ی S بخشی از استوانه‌ی $x^2+y^2=a^2$ است. در ادامه، dS را به دو روش به‌دست می‌آوریم.

روش اول:

قرار می‌دهیم $G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2=0$. داریم $G_x\neq 0$، و از این‌رو داریم:

$$dS=\frac{|\nabla G|}{|G_x|}dydz=\frac{|(2x,2y,0)|}{|2x|}dydz=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}dydz=\frac{a}{|x|}dydz$$

بنابراین، داریم:

$$dS=\begin{cases}\dfrac{a}{x}\,dydz, & x>0\\ -\dfrac{a}{x}\,dydz, & x<0\end{cases}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

روش دوم:

می‌دانیم هر نقطه در مختصات دکارتی بر حسب مختصات استوانه‌ای نمایشی به صورت $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ دارد. استوانه‌ی $x^2+y^2=a^2$، دارای معادله‌ی $r=a$ در مختصات استوانه‌ای است. پس، استوانه‌ی یادشده دارای نمایشی پارامتری به صورت زیر است:

$$\gamma : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(\theta, z) = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), z)$$

داریم $dS = |\gamma_\theta \times \gamma_z| d\theta dz$؛ در حالی‌که:

$$\gamma_\theta \times \gamma_z = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -a\sin(\theta) & a\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), 0)$$

پس، $|\gamma_\theta \times \gamma_z| = a$، که نتیجه می‌دهد:

$$dS = a d\theta dz$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

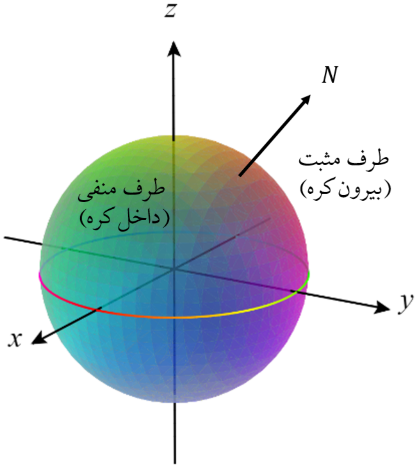
رویه‌های جهت‌دار

فرض کنید که S یک رویه‌ی هموار در $\mathbb{R}^3$ است. در این صورت، S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه یک میدان برداری یکه مثل $N(P)$ بر S موجود باشد که با تغییر P روی S، به طور پیوسته تغییر کند، و همه‌جا بر S عمود باشد. (یعنی میدان برداری پیوسته‌ی $N : S \to \mathbb{R}^3$ موجود باشد، که به‌ازای هر $P \in S$، بردار $N(P)$ بر S عمود باشد).

⋇ فرض کنید که S یک رویه‌ی جهت‌پذیر در $\mathbb{R}^3$ است. در این صورت، در یک همسایگی از هر نقطه‌ی $P \in S$، رویه‌ی S دارای دو طرف خواهد بود؛ طرفی که $N(P)$ به آن اشاره دارد، و طرف مخالف آن. طرفی که $N(P)$ به آن اشاره دارد را طرف مثبت و طرف مخالف آن را طرف منفی S در همسایگی یادشده می‌نامیم.

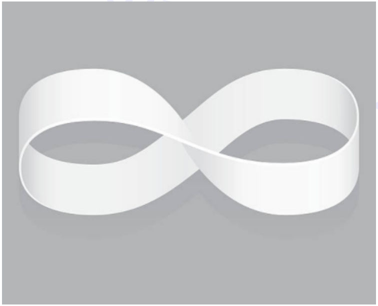
Kiani-Saeedi Madani-Saki

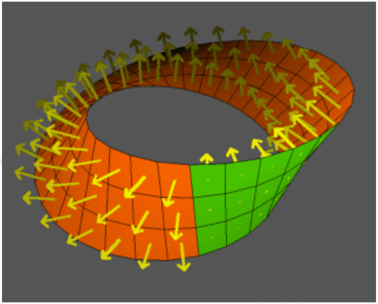
کره مثالی از یک رویه‌ی جهت‌پذیر است.



Kian Saki

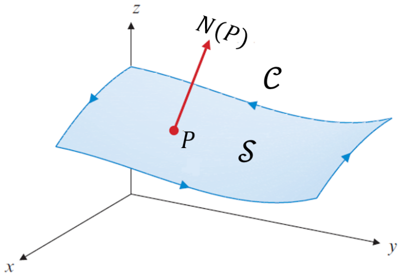
نوار موبیوس مثالی از یک رویه‌ی جهت‌ناپذیر است.

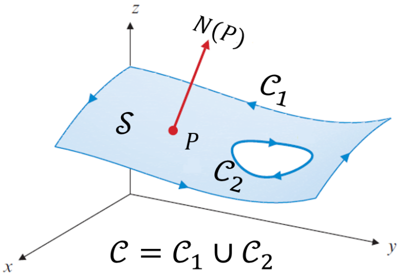




جهت القایی مرز یک رویه‌ی جهت‌دار

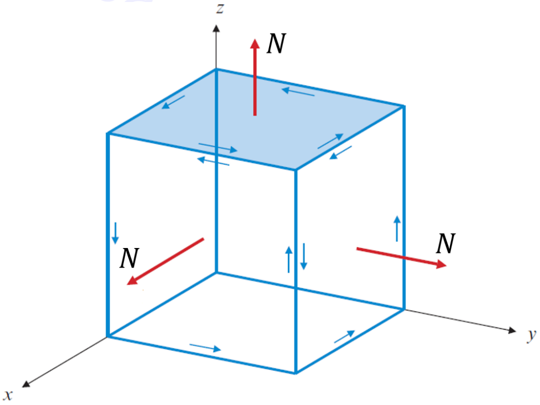
فرض کنید که S یک رویه‌ی جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ است. در این صورت، S بر هر یک از خم‌های مرزی خود یک جهت القا می‌کند، طوری که اگر جهت انگشت شست دست راست را در جهت خم مرزی قرار دهیم، آن‌گاه نوک چهار انگشت دیگر در اولین برخورد با S، جهت N را مشخص می‌کنند. به عبارت دیگر، اگر در طرف مثبت S ایستاده باشیم و روی خم مرزی و در جهت خم حرکت کنیم، لازم است که S در سمت چپ ما قرار گیرد.





رویه‌های قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌پذیر

فرض کنید که $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ یک رویه‌ی قطعه‌به‌قطعه هموار در $\mathbb{R}^3$ است. در این صورت، S را جهت‌پذیر می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، دو رویه‌ی هموار S_i و S_j به خم فصل مشترک‌شان جهت‌های مخالف هم القا کنند.



شار یک میدان برداری (انتگرال میدان برداری روی سطح)

فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری پیوسته و S یک رویه‌ی جهت‌دار است، طوری که $S \subseteq U$. شار F عبوری از S یا انتگرال مؤلفه‌ی قائم F روی S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_S F \cdot N \, dS$$

که در آن N بردار قائم یکه بر سطح S است.

با قراردادن $d\sigma = N dS$، شار F عبوری از S به صورت زیر خواهد بود:

$$\iint_S F \cdot d\sigma$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

$d\sigma$ برای رویه‌هایی که مجموعه‌ی تراز یک تابع هموار سه متغیره هستند

فرض کنید که S یک رویه در $\mathbb{R}^3$ و $G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است که $G_z \neq 0$ و $S \subseteq U$. همچنین، فرض کنید که نقاط S در معادله‌ی $G(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند. می‌دانیم:

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|} dA_{x,y}$$

از طرفی، بردار قائم یکه بر S به صورت زیر است:

$$N = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

بنابراین، داریم:

$$d\sigma = N dS = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \left(\frac{|\nabla G|}{|G_z|} dA_{x,y} \right) = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} dA_{x,y}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

در صورتی که جهت رویه‌ی S رو به بالا (به سمت جهت مثبت محور z) باشد، آن‌گاه می‌گوییم که شار عبوری از S رو به بالا است. در غیر این صورت، اگر جهت رویه‌ی S رو به پایین (به سمت جهت منفی محور z) باشد، آن‌گاه می‌گوییم که شار عبوری از S رو به پایین است.

در جدول زیر، چهار حالت ممکن به منظور انتخاب علامت $+$ یا $-$ برای N و در نتیجه $d\sigma$ آورده شده است:

شار \ G_z	$+$	$-$
رو به بالا	$+$	$-$
رو به پایین	$-$	$+$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

به طور مشابه، فرمول‌های زیر را داریم:

$$d\sigma = \pm\frac{\nabla G}{|G_x|}dA_{y,z}, \qquad G_x \neq 0$$
$$d\sigma = \pm\frac{\nabla G}{|G_y|}dA_{x,z}, \qquad G_y \neq 0$$

علامت $+$ یا $-$ در فرمول‌های بالا به طور مشابه با حالت $G_z \neq 0$ تعیین می‌شود.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

$d\sigma$ برای نمودار یک تابع دو متغیره

فرض کنید که رویه‌ی جهت‌دار S نمودار تابع دو متغیره $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ است. در این صورت، نقاط S در معادله‌ی $G(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ صدق می‌کنند. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} dA_{x,y} = \pm \left(-f_1, -f_2, 1\right) dA_{x,y}$$

در فرمول بالا، با توجه به اینکه $G_z = 1 > 0$، در صورتی که شار رو به بالا خواسته شده باشد، علامت $+$، و در صورتی که شار رو به پایین خواسته شده باشد، علامت $-$ را انتخاب می‌کنیم.

Madani-Saeedi Madani-Saki

$d\sigma$ برای یک رویه‌ی پارامتری جهت‌دار

فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ است. نمایش پارامتری زیر از S را در نظر می‌گیریم:

$$\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

می‌دانیم که:

$$dS = |\gamma_u \times \gamma_v| du dv, \qquad N = \pm \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|}$$

بنابراین، داریم:

$$d\sigma = N dS = \pm \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} \left(|\gamma_u \times \gamma_v| du dv\right) = \pm \left(\gamma_u \times \gamma_v\right) du dv$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

فرض کنید که L مؤلفه‌ی سوم $\gamma_u \times \gamma_v$ است. در جدول زیر، چهار حالت ممکن به منظور انتخاب علامت $+$ یا $-$ برای N و در نتیجه $d\sigma$ آورده شده است:

شار \ L	$+$	$-$
رو به بالا	$+$	$-$
رو به پایین	$-$	$+$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

شار رو به بالای میدان برداری $F = (z, 0, x^2)$ گذرنده از رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ با $-1 \leq x, y \leq 1$ را بیابید.

پاسخ:

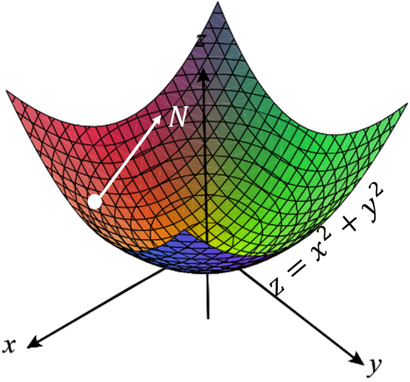
داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y}$$

توجه کنید که شار رو به بالا خواسته شده است، پس علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم.

از این‌رو، داریم:

$$d\sigma = (-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y}$$
$$= (-2x, -2y, 1)dA_{x,y}$$



Kiani-Saki Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

فرض کنیم که D مستطیل $-1 \leq x, y \leq 1$ است. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} F \cdot d\sigma &= \iint_D (z, 0, x^2) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D \left(-2xz + x^2\right)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D \left(-2x(x^2+y^2) + x^2\right)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D (-2\underbrace{x^3}_{\text{فرد}} - 2\underbrace{xy^2}_{\text{فرد}} + x^2)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D x^2\, dA_{x,y} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\, dy dx = 2\int_{-1}^{1} x^2\, dx \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

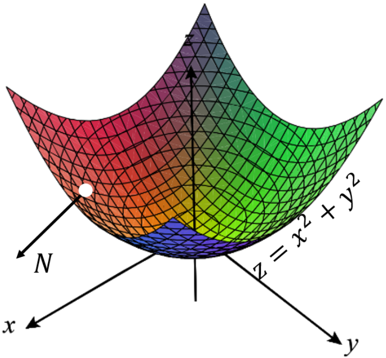
مثال

شار رو به پایین میدان برداری $F:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ با $F=\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2},1\right)$، گذرنده از رویه‌ی S با نمایش پارامتری زیر را بیابید:

$$\gamma:[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\quad \gamma(u,v)=(u\cos(v),u\sin(v),u^2)$$

پاسخ:

داریم:



$$\gamma_u=(\cos(v),\sin(v),2u)$$

$$\gamma_v=(-u\sin(v),u\cos(v),0)$$

Kiani-Saeedi-Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

پس، داریم:

$$
\begin{aligned}
\gamma_u \times \gamma_v &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \sin(v) & 2u \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \sin(v) & 2u \\ u\cos(v) & 0 \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \cos(u) & 2u \\ -u\sin(v) & 0 \end{bmatrix} j \\
&+ \det \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(v) \\ -u\sin(v) & u\cos(v) \end{bmatrix} k \\
&= (-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u)
\end{aligned}
$$

Kiani-Saeedi Madam-Saki

ادامه‌ی مثال

توجه می‌کنیم که:

$$d\sigma = \pm(\gamma_u \times \gamma_v)dudv = \pm(-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u)dudv$$

حال، از آنجا که مؤلفه‌ی سوم $\gamma_u \times \gamma_v$ مثبت است و شار رو به پایین خواسته شده است، در رابطه‌ی بالا علامت $-$ را انتخاب می‌کنیم. روی S، داریم:

$$F = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right) = \left(\frac{2\cos(v)}{u}, \frac{2\sin(v)}{u}, 1\right)$$

بنابراین، با فرض $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$، داریم:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \iint_D \left(\frac{2\cos(v)}{u}, \frac{2\sin(v)}{u}, 1\right) \cdot \left(2u^2\cos(v), 2u^2\sin(v), -u\right) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4u\cos^2(v) + 4u\sin^2(v) - u\right) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3u\, dudv = 2\pi\left(\frac{3u^2}{2}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} = 3\pi$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

توجه:

در مثال قبل، به‌ازای $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq 2\pi$، نمایش پارامتری زیر را داشتیم:

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2)$$

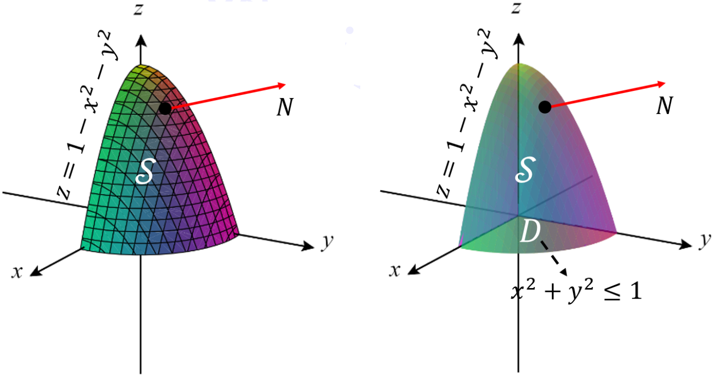
بنابراین، داریم $z = x^2 + y^2$ که $0 \leq z \leq 1$. از این‌رو رویه‌ی S نمودار تابع $f(x,y) = x^2 + y^2$ تعریف‌شده روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$ است. پس، می‌توان با فرمولی که برای المان سطح نمودار یک تابع دو متغیره داشتیم نیز مثال قبل را حل کرد.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

شار رو به بالای میدان برداری $F = (y, -x, 4)$، گذرنده از رویه‌ی S با معادله‌ی $z = 1 - x^2 - y^2$ در یک‌هشتم اول دستگاه مختصات را بیابید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

رویه‌ی S نمودار تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ است، که در آن D بخشی از دیسک یکه‌ی بسته است که در ربع اول دستگاه مختصات قرار می‌گیرد.

پس، داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y} = \pm(2x, 2y, 1)dA_{x,y}$$

از آنجا که شار رو به بالا خواسته شده است، در رابطه‌ی بالا علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم.

بنابراین، داریم:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \iint_D (y, -x, 4) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA_{x,y} = 4 \iint_D dA_{x,y}$$
$$= 4 \times (\text{مساحت } D) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

Klani-Saeedi Madani-Saki

نمایشی برای شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه

فرض کنید که S یک رویه‌ی پارامتری در $\mathbb{R}^3$ و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری از S به صورت زیر است:

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

همچنین، فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری پیوسته است، طوری که $F = (P,Q,R)$ و $S \subseteq U$. در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot d\sigma &= \iint_S (P,Q,R) \cdot \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv \\
&= \iint_S P \tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, dudv + \iint_S Q \tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, dudv + \iint_S P \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv \\
&= \iint_S P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy
\end{aligned}$$

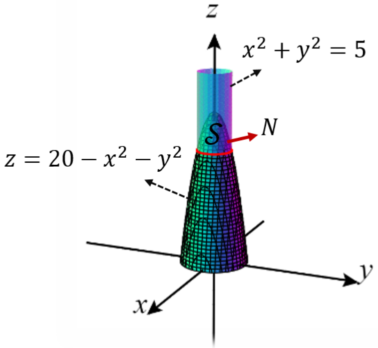
مثال‌های تکمیلی

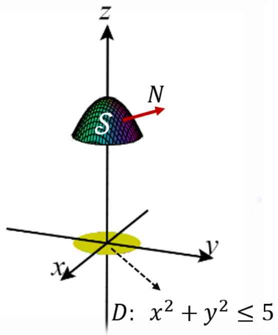
Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویه‌ی $z = 20 - x^2 - y^2$ است که داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$، آنگاه شار رو به بالای F گذرنده از رویه‌ی S را بیابید.

پاسخ: در شکل سمت راست، مقیاس‌های واحدهای x و y بزرگ‌تر شده‌اند.





ادامه‌ی مثال

رویه‌ی S نمودار تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با $f(x,y) = 20 - x^2 - y^2$ است، که در آن D تصویر S بر صفحه‌ی xy است. بنابراین، D دیسک بسته‌ی $x^2 + y^2 \leq 5$ است. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y} = \pm(2x, 2y, 1)dA_{x,y}$$

از آنجا که شار رو به بالا خواسته شده است، در رابطه‌ی بالا علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. با استفاده از مختصات قطبی و توجه به این نکته که روی D داریم $z = 20 - x^2 - y^2$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot d\sigma &= \iint_D (x, y, 2z) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 2z)\, dA_{x,y} = 40 \iint_D dA_{x.y} \\ &= 40 \times (\text{مساحت } D) = 40(5\pi) = 200\pi\end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

در ادامه، دو سؤال تستی آورده می‌شوند که از مثال قبل استخراج شده‌اند.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویه‌ی $z = 20 - x^2 - y^2$ است که داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$، آن‌گاه مقدار شار رو به بالای F گذرنده از رویه‌ی S در کدام گزینه آمده است؟

۱. 2π

۲. 50π

۳. 100π

۴. 200π

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویه‌ی $z = 20 - x^2 - y^2$ است که داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر N میدان برداری قائم یکه‌ی S و رو به بالا باشد، آنگاه $d\sigma = N\, dS$ برابر با عبارت آورده‌شده در کدام گزینه است؟

۱. $(x, y, 1)\, dA_{x,y}$
۲. $(-x, -y, -1)\, dA_{x,y}$
۳. $(-2x, -2y, -1)\, dA_{x,y}$
۴. $(2x, 2y, 1)\, dA_{x,y}$

Kiani-Saeedi Madani-Saki