ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

انتگرال سه‌گانه

تعریف انتگرال سه‌گانه

فرض کنید که $B = [a,b] \times [a',b'] \times [a'',b''] \subseteq \mathbb{R}^3$ یک مکعب و $f : B \to \mathbb{R}$ تابعی کران‌دار است. افرازهای زیر را از $[a,b]$، $[a',b']$ و $[a'',b'']$ در نظر می‌گیریم:

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

$$P_2 = \{a' = y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m = b'\}$$

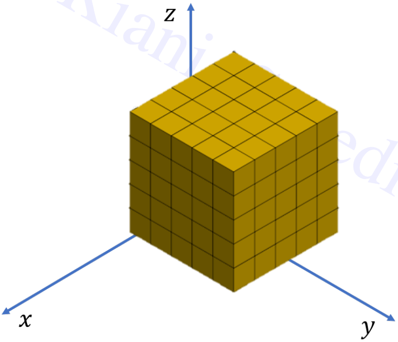
$$P_3 = \{a'' = z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}, z_p = b''\}$$

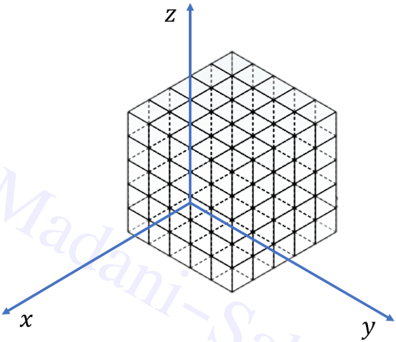
در این صورت، افراز P از مکعب B را می‌توان متشکل از mnp مکعب زیر در نظر گرفت:

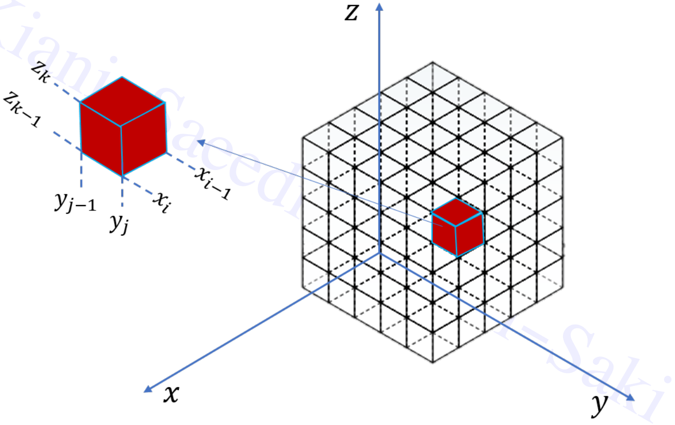
$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

که در آن:

$$i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, p$$


z
x
y


z
x
y


z
z_k
z_{k-1}
x_{i-1}
x_i
y_{j-1}
y_j
x
y

حال، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $1 \le j \le m$ و $1 \le k \le p$:

$$(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

قرار می‌دهیم:

$$R(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) V_{ijk}$$

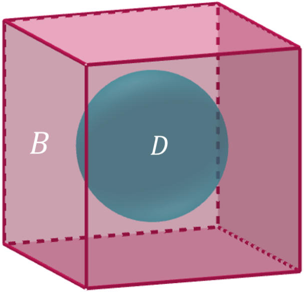
که در آن، به‌ازای هر i، j و k، V_{ijk} حجم مکعب B_{ijk} است. حال، فرض می‌کنیم که $\|P\|$ ماکسیمم قطرهای اصلی همه‌ی مکعب‌های B_{ijk} است؛ یعنی:

$$\|P\| = \max\left\{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_k^2} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le p\right\}$$

چنان‌چه $\lim_{\|P\|\to 0} R(P, f)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌گوییم f انتگرال‌پذیر است، و مقدار انتگرال f روی B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\iiint_B f\, dV := \lim_{\|P\|\to 0} R(P, f)$$

در حالت کلی، فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیه‌ی بسته و کران‌دار است. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار باشد، آن‌گاه مکعب $B \subseteq \mathbb{R}^3$ وجود دارد که D را در بر می‌گیرد.



حال، تعریف می‌کنیم:

$$\widehat{f} : B \to \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & , (x, y, z) \in D \\ 0 & , (x, y, z) \in B \backslash D \end{cases}$$

در این صورت، انتگرال f روی D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iiint_D f \, dV := \iiint_B \widehat{f} \, dV$$

تعبیری از انتگرال سه‌گانه

فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ یک جسم بسته و کران‌دار است. اگر $\rho : D \to \mathbb{R}$ تابع چگالی D باشد؛ یعنی به‌ازای هر $(x, y, z) \in D$، عدد $\rho(x, y, z)$ برابر با چگالی D در نقطه‌ی (x, y, z) باشد، آن‌گاه داریم:

$$\text{جرم } D = m = \iiint_D \rho \, dV$$

به منظور توضیحات بیش‌تر، توجه کنید که:

چنان‌چه توزیع جرم در جسم D یک‌نواخت باشد، آن‌گاه نسبت جرم به حجم D برابر با چگالی D تعریف می‌شود. در حالت کلی، اگر توزیع جرم در D لزوماً یک‌نواخت نباشد، المان‌های کوچکی از D در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها توزیع جرم تقریباً یک‌سان است. بنابراین، در نزدیکی یک نقطه‌ی (x, y, z) داریم:

$$dm = \rho(x, y, z) dV \implies m = \iiint_D dm = \iiint_D \rho \, dV$$

قضیه

فرض کنید که D یک زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^3$ است، $f, g : D \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر هستند و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. در این صورت:

۱. اگر حجم D صفر باشد، آن‌گاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = 0$$

۲. اگر به‌ازای هر $(x,y,z) \in D$، داشته باشیم $f(x,y,z) = 1$، آن‌گاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = D \text{ حجم}$$

۳. اگر به‌ازای هر $(x,y,z) \in D$ داشته باشیم $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$، آن‌گاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV \leq \iiint_D g\, dV$$

ادامه‌ی قضیه

۴. تابع $c_1 f + c_2 g$ انتگرال‌پذیر است، و داریم:

$$\iiint_D (c_1 f + c_2 g)\, dV = c_1 \iiint_D f\, dV + c_2 \iiint_D g\, dV$$

۵. داریم:

$$\left| \iiint_D f\, dV \right| \leq \iiint_D |f|\, dV$$

۶. اگر $D_1, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی در $\mathbb{R}^3$ باشند که حداکثر در مرزهایشان اشتراک دارند، آن‌گاه داریم:

$$\iiint_{\bigcup_{i=1}^n D_i} f\, dV = \sum_{i=1}^n \iiint_{D_i} f\, dV$$

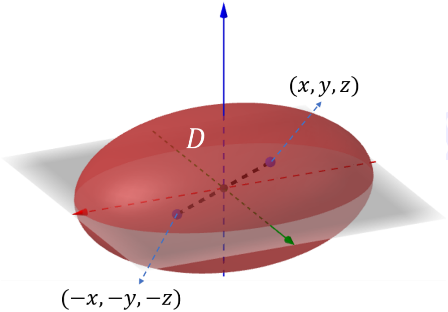
ادامه‌ی قضیه

۷. اگر D نسبت به مبدأ متقارن باشد و

$$\forall\,(x,y,z)\in D \qquad f(-x,-y,-z)=-f(x,y,z)$$

آن‌گاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV=0$$



ادامه‌ی قضیه

۸. اگر D نسبت به صفحه‌ی xy متقارن باشد و

$$\forall\ (x,y,z)\in D \qquad f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV=0$$

۹. اگر D نسبت به صفحه‌ی xz متقارن باشد و

$$\forall\ (x,y,z)\in D \qquad f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV=0$$

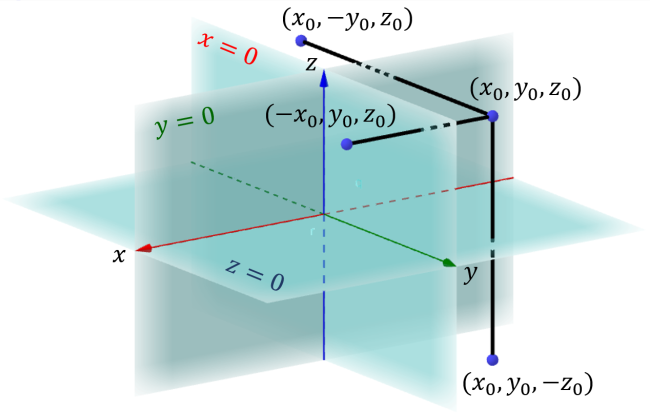
۱۰. اگر D نسبت به صفحه‌ی yz متقارن باشد و

$$\forall\ (x,y,z)\in D \qquad f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV=0$$

ادامه‌ی قضیه



قرینه‌ی نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) نسبت به صفحه‌ی xy، xz و yz

قضیه

اگر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ بسته و کران‌دار و $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $\iiint_D f \, dV$ موجود است.

مثال

مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq r^2} (x^3 + x^2y^2\sin(z^5) + 3)\, dV$$

پاسخ: فرض کنید که D گوی (کره‌ی توپر) به مرکز مبدأ و شعاع r است. داریم:

$$I = \iiint_D x^3\, dV + \iiint_D x^2y^2\sin(z^5)\, dV + 3\iiint_D dV$$

زیرا D بسته و کران‌دار است، و $f(x,y,z) = x^3$ و $g(x,y,z) = x^2y^2\sin(z^5)$ پیوسته هستند. توجه کنید که D نسبت به مبدأ متقارن است، و f و g توابعی فرد هستند. پس، داریم:

$$\iiint_D x^3\, dV = 0 = \iiint_D x^2y^2\sin(z^5)\, dV = 0$$

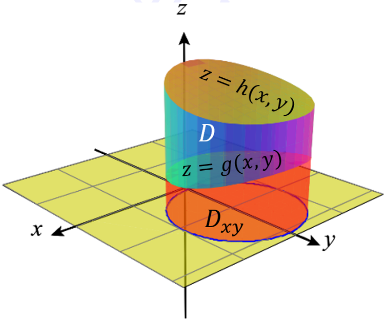
حال، با توجه به اینکه $\iiint_D dV$ برابر با حجم D است، داریم:

$$I = 3 \times (\text{حجم } D) = 4\pi r^3$$

مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای انتگرال سه‌گانه

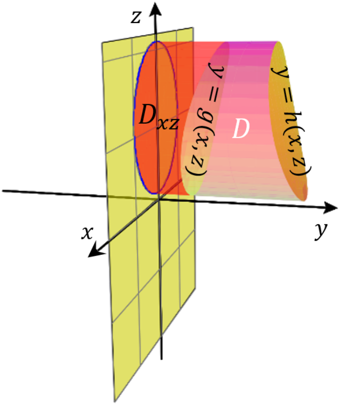
فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ و D_{xy} تصویر D بر صفحه‌ی xy است. همچنین، مطابق شکل توابع $g, h : D_{xy} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، ناحیه‌ی D برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که:

$$(x, y) \in D_{xy}, \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$$



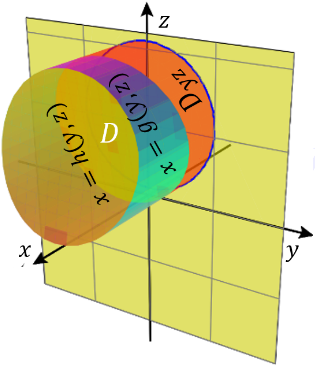
مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای انتگرال سه‌گانه

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D_{xz},\ \ g(x,z) \le y \le h(x,z)\}$$



مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای انتگرال سه‌گانه

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz},\quad g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\}$$



قضیه‌ی فوبینی برای انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کران‌دار و $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. در این صورت، اگر

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$$

که در آن $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ و $g, h : D_{xy} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند، آن‌گاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

⁎ توجه کنید که قضیه‌ی فوبینی دارای 5 حالت دیگر هم هست (چراکه dx، dy و dz به 6 طریق قابل مرتب کردن هستند).

مثال

حجم ناحیه‌ی D واقع در زیر صفحه‌ی $z = 3 - 2y$ و بالای سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ را بیابید.

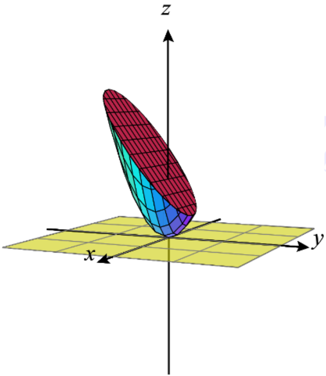
پاسخ:

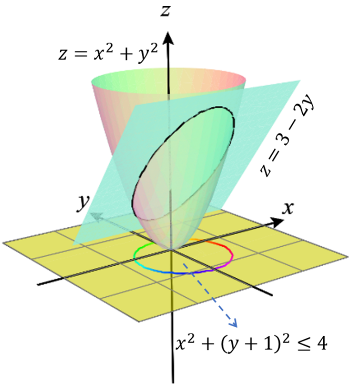
ابتدا D_{xy} را می‌یابیم. برای این منظور، داریم:

$$z = x^2+y^2, \; z = 3-2y \implies 3-2y = x^2+y^2 \implies x^2+(y+1)^2 = 4$$

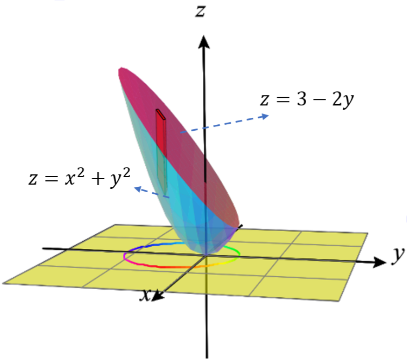
معادله‌ی بالا، معادله‌ی تصویر خم فصل مشترک صفحه و سهمی‌گون داده‌شده بر صفحه‌ی xy است. از این‌رو، D_{xy} (یعنی تصویر D بر صفحه‌ی xy) مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$.

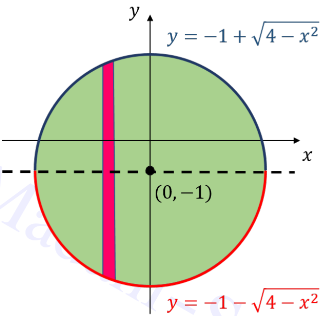
ادامه‌ی مثال





ادامه‌ی مثال





داریم:

$$\text{حجم ناحیه‌ی } D = V = \iiint_D dV = \int_{-2}^{2} \int_{-1-\sqrt{4-x^2}}^{-1+\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz dy dx$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-1-\sqrt{4-x^2}}^{-1+\sqrt{4-x^2}}\left((3-2y)-(x^2+y^2)\right)\,dydx$$

حال، انتگرال دوگانه‌ی بالا را به دو طریق حل می‌کنیم. راه اول –که دشوارتر است– بر اساس اطلاعات انتگرال یگانه است؛ در حالی‌که راه دوم بر اساس تغییر متغیر قطبی است.

راه اول:

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{2}\left(3y-y^2-x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1-\sqrt{4-x^2}}^{y=-1+\sqrt{4-x^2}}dx\\&=\int_{-2}^{2}\left(8\sqrt{4-x^2}-2x^2\sqrt{4-x^2}-\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx\\&=8\underbrace{\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx}_{I_1}-2\underbrace{\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx}_{I_2}-\frac{2}{3}\underbrace{\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}_{I_3}\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

حال، با تغییر متغیر $x = 2\cos(\theta)$، داریم:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\pi}^{2\pi} -4\sin(\theta)|\sin(\theta)|\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 4\sin^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2(1-\cos(2\theta))\,d\theta = (2\theta - \sin(2\theta))\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\pi}^{2\pi} -16\sin(\theta)\cos^2(\theta)|\sin(\theta)|\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 4\sin^2(2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2(1-\cos(4\theta))\,d\theta = \left(2\theta - \frac{\sin(4\theta)}{2}\right)\Bigg|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

مجدداً با تغییر متغیر $x = 2\cos(\theta)$ داریم:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\pi}^{2\pi} -16\sin(\theta)|\sin^3(\theta)|\, d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^4(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^2(\theta)(1-\cos^2(\theta))\, d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \left(8(1-\cos(2\theta)) - 4\sin^2(2\theta)\right) d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} (8(1-\cos(2\theta)) - 2(1-\cos(4\theta)))\, d\theta \\
&= \left((8\theta - 4\sin(2\theta)) - \left(2\theta - \frac{\sin(4\theta)}{2}\right)\right)\Bigg|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 6\pi
\end{aligned}$$

در نهایت، داریم:

$$V = 8(2\pi) - 2(2\pi) - \frac{2}{3}(6\pi) = 8\pi$$

ادامه‌ی مثال

راه دوم: داریم:

$$V=\iint_{x^2+(y+1)^2\leq 4}\left(4-(x^2+(y+1)^2)\right)\,dxdy$$

حال، تغییر متغیر $u=x$ و $v=y+1$ را اعمال می‌کنیم. در این صورت، داریم:

$$V=\iint_{u^2+v^2\leq 4}(4-(u^2+v^2))\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{=1}dudv$$

در ادامه، با تغییر متغیر قطبی داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)\,rdrd\theta=2\pi\int_0^2(4r-r^3)\,dr$$

$$=2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}=8\pi$$

قضیه‌ی تغییر متغیر برای انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^3$. هم‌چنین، فرض کنید که $\Phi : S \to D$ یک تبدیل یک‌به‌یک به صورت

$$\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

است، و مشتقات جزیی اول توابع $x(u,v,w)$، $y(u,v,w)$ و $z(u,v,w)$ موجود و پیوسته هستند. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد، و $g : S \to \mathbb{R}$ به صورت

$$g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

تعریف شود، آن‌گاه g نیز تابعی انتگرال‌پذیر است، و داریم:

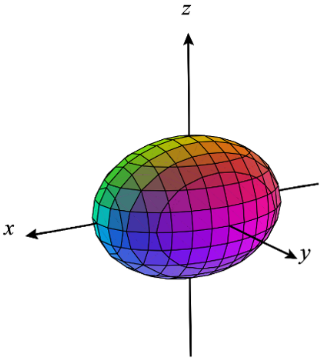
$$\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_S g(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

مثال

حجم بیضی‌گون زیر را بیابید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$$

پاسخ:



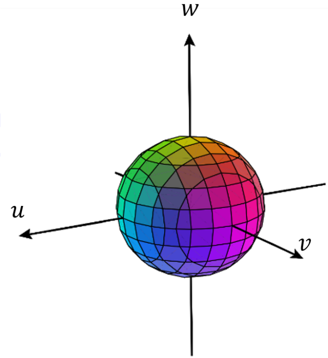
تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u=\frac{x}{a}, \quad v=\frac{y}{b}, \quad w=\frac{z}{c}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$x=au, \quad y=bv, \quad z=cw$$

ادامه‌ی مثال



فرض کنید که D ناحیه‌ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$، و S ناحیه‌ی $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ است. بنابراین، داریم:

$$\text{حجم ناحیه‌ی } D = \iiint_D dV_{x,y,z} = \iiint_S \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dV_{u,v,w}$$

ادامه‌ی مثال

توجه کنید که:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc$$

در نهایت، داریم:

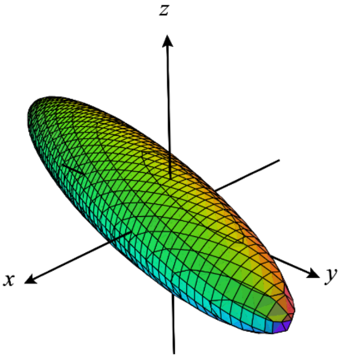
$$\text{حجم ناحیه‌ی } D = abc \iiint_S dV_{u,v,w} = abc \times (\text{حجم ناحیه‌ی } S) = \frac{4}{3}abc\pi$$

مثال

حجم ناحیه‌ی محصور به رویه‌ی $(-5x-2y+z)^2+(y-3z+2)^2+(3+5z)^2=64$ را بیابید.

پاسخ: تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u=-5x-2y+z, \quad v=y-3z+2, \quad w=3+5z$$



ادامه‌ی مثال

فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به رویه‌ی داده شده است. در این صورت، تحت تغییر متغیر یادشده، D به ناحیه‌ی S به صورت $u^2+v^2+w^2 \leq 64$ تبدیل می‌شود. پس، بنابر قضیه‌ی تغییر متغیر داریم:

$$\text{حجم ناحیه‌ی } D = V = \iiint_D dxdydz = \iiint_S \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

در حالی‌که:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = -25$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = -\frac{1}{25}$$

ادامه‌ی مثال

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{25}\iiint_S dV_{u,v,w} &= \frac{1}{25} \times (\text{حجم کره‌ی با شعاع } 8) \\ &= \frac{1}{25}\left(\frac{4}{3}(8^3)\pi\right) \\ &= \frac{2048}{75}\pi \end{aligned}$$

المان حجم در مختصات استوانه‌ای

داریم:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z$$

بنابراین، اگر dV عنصر حجم در مختصات استوانه‌ای باشد، آنگاه داریم:

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dzdrd\theta = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}\right| dzdrd\theta$$

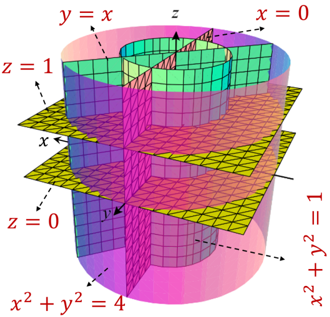
$$= \left|\det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| dzdrd\theta = rdzdrd\theta$$

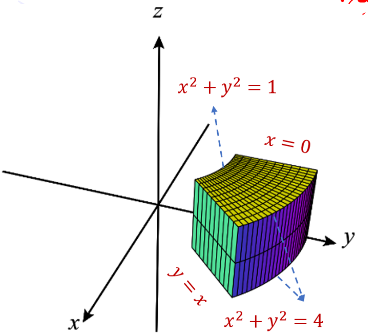
مثال

فرض کنید که D ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$، و صفحات $z=0$، $z=1$، $x=0$ و $x=y$ در یک‌هشتم اول دستگاه مختصات است. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

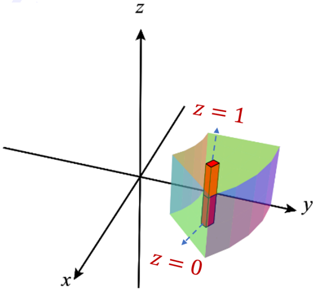
$$I=\iiint_D (x^2+y^2)\,dV$$

پاسخ:

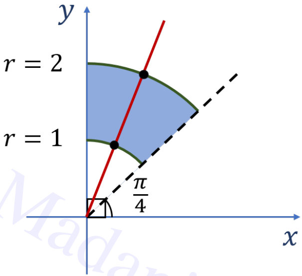




ادامه‌ی مثال



المان انتگرال‌گیری نسبت به z

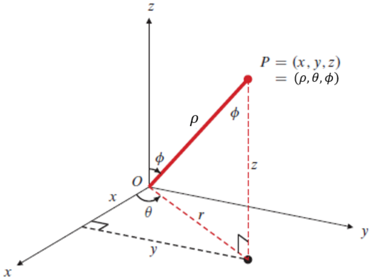


تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

با استفاده از تغییر متغیر استوانه‌ای داریم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} r^2\, r dz dr d\theta=\frac{\pi}{4}\int_{1}^{2} r^3\, dr=\frac{\pi}{4}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=1}^{r=2}=\frac{15\pi}{16}$$

المان حجم در مختصات کروی



در مختصات کروی داریم:

$$x = x(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = y(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$z = z(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos(\phi)$$

$$r = \rho \sin(\phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

بنابراین، اگر dV عنصر حجم در مختصات کروی باشد، آن‌گاه داریم:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \right| d\rho d\phi d\theta = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right| d\rho d\phi d\theta$$

پس، داریم:

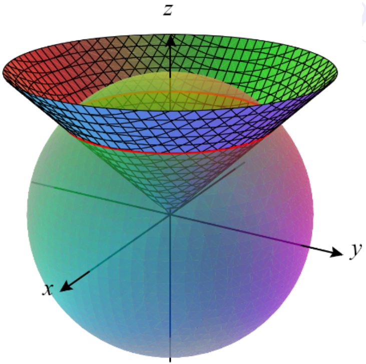
$$dV = \left| \det \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \right| d\rho d\phi d\theta$$

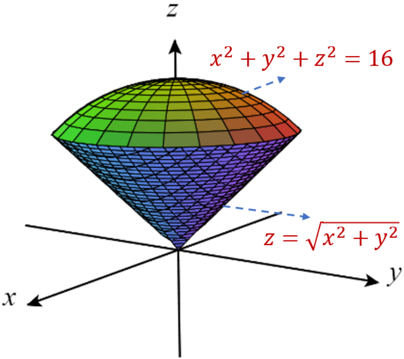
$$= \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho d\phi d\theta$$

مثال

حجم ناحیه‌ی D محصور به کره‌ی $x^2+y^2+z^2=16$ و مخروط $\phi=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

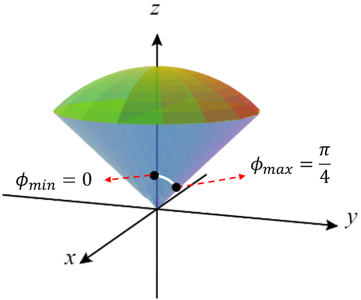
پاسخ: از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم. از رابطه‌ی $\tan(\phi)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$، نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مختصات دکارتی $\phi=\frac{\pi}{4}$ است.



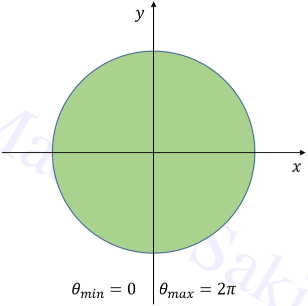


ادامه‌ی مثال

مطابق شکل‌هایی که در ادامه می‌آیند، کران‌های ρ، ϕ و θ را می‌یابیم.



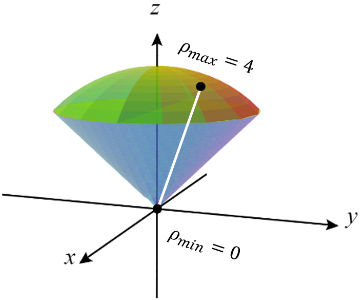
$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$



تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy،

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ادامه‌ی مثال



$$0 \leq \rho \leq 4$$

بنابراین، حجم ناحیه‌ی D برابر است با:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = 2\pi \left(-\cos(\phi)\right)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=4}$$

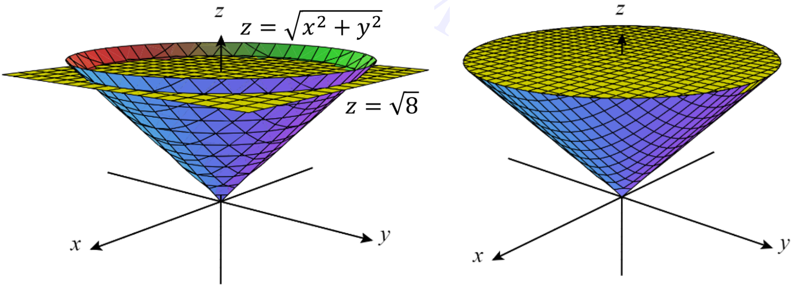
$$= \frac{64(2-\sqrt{2})\pi}{3}$$

مثال‌های تکمیلی

مثال

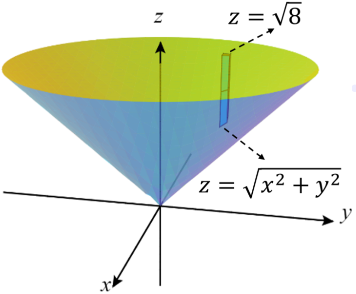
فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=\sqrt{8}$ است. در این صورت، کران‌های انتگرال $I=\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ را در هر سه مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی بنویسید.

پاسخ:

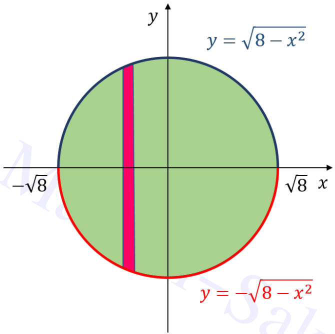


ادامه‌ی مثال

مختصات دکارتی:



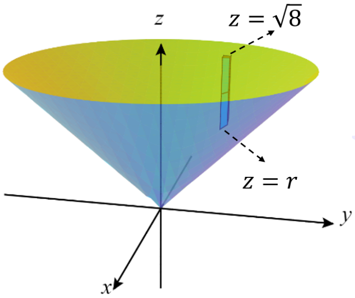
المان انتگرال‌گیری نسبت به z



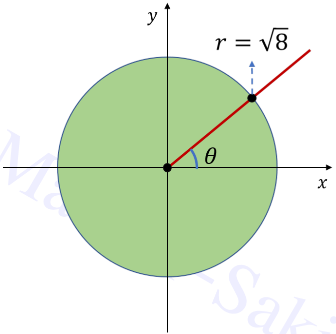
تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

$$I = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dzdydx$$

مختصات استوانه‌ای:



المان انتگرال‌گیری نسبت به z

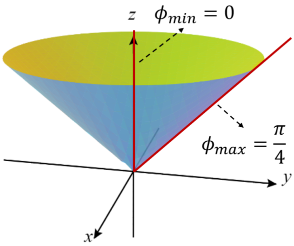


تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

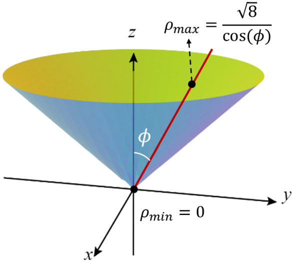
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_r^{\sqrt{8}}\sqrt{r^2+z^2}\,rdzdrd\theta$$

ادامه‌ی مثال

مختصات کروی:



کران‌های ϕ



کران‌های ρ

واضح است که تصویر D بر صفحه‌ی xy یک دیسک است، و از این‌رو $0 \le \theta \le 2\pi$.
حال، کران‌های ρ را بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\rho_{min} = 0$. هم‌چنین، ρ_{max} به‌ازای صفحه‌ی $z = \sqrt{8}$ به‌دست می‌آید. پس، داریم:

$$z = \sqrt{8} \implies \rho_{max}\cos(\phi) = \sqrt{8} \implies \rho_{max} = \frac{\sqrt{8}}{\cos(\phi)}$$

ادامه‌ی مثال

به‌علاوه، واضح است که $\phi_{min} = 0$. همچنین، ϕ_{max} به‌ازای رویه‌ی $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ به‌دست می‌آید. روی این رویه، داریم:

$$\tan(\phi_{max}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \implies \phi_{max} = \frac{\pi}{4}$$

پس، در ناحیه‌ی D داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{8}}{\cos\phi} \end{cases}$$

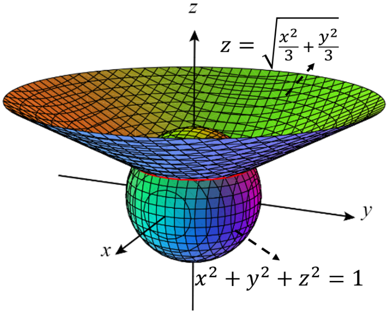
بنابراین، داریم:

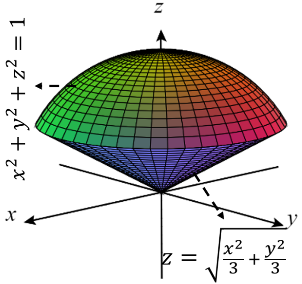
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{8}}{\cos(\phi)}} \rho \, \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta$$

مثال

فرض کنید D داخل کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و بالای مخروط $z=\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}$ است. در این صورت، کران‌های انتگرال $I=\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیابید.

پاسخ:





ادامه‌ی مثال

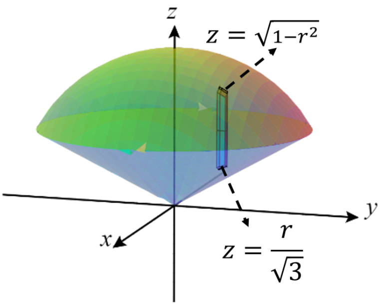
مختصات استوانه‌ای:

خم فصل مشترک مخروط و کره‌ی داده‌شده را به‌دست می‌آوریم. داریم:

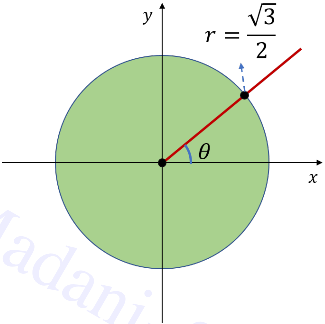
$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$$

از این‌رو، D_{xy} برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$.

ادامه‌ی مثال



المان انتگرال‌گیری نسبت به z



تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r dz dr d\theta$$

ادامه‌ی مثال

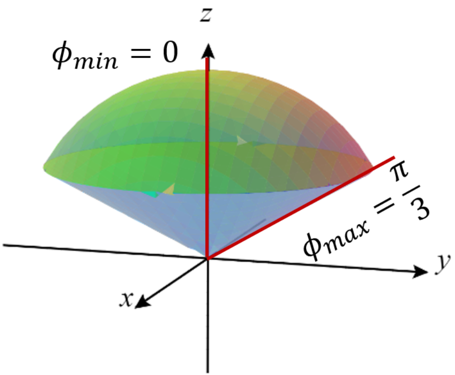
مختصات کروی:

تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy یک دیسک است؛ و از این رو در ناحیه‌ی D داریم $0 \le \theta \le 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیه‌ی D به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{min} = 0$. توجه می‌کنیم که ϕ_{max} روی مخروط $z = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$ حاصل می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\tan(\phi_{max}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \sqrt{3}$$

که نتیجه می‌دهد $\phi_{max} = \frac{\pi}{3}$.

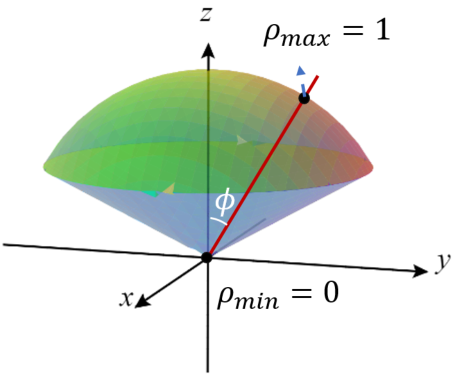
ادامه‌ی مثال



$\phi_{max} = \frac{\pi}{3}$ و $\phi_{min} = 0$

ادامه‌ی مثال

همچنین، واضح است که داریم $0 \leq \rho \leq 1$.



$\rho_{max} = 1$ و $\rho_{min} = 0$

ادامه‌ی مثال

پس، در ناحیه‌ی D داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

در نهایت، داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{1} g(\rho, \phi, \theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta$$

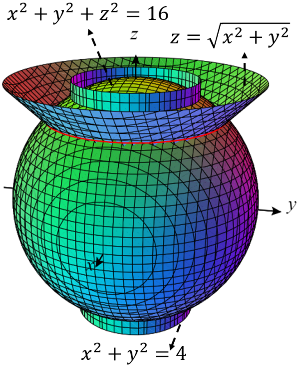
که در آن:

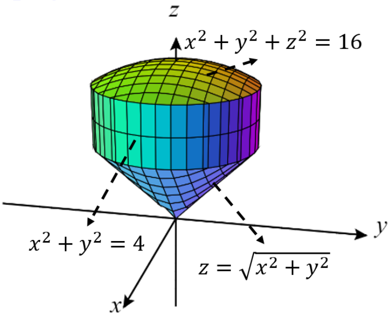
$$g(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$$

مثال

فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به مخروط $\phi = \frac{\pi}{4}$، کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ است. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$ را در مختصات‌های دکارتی، استوانه‌ای و کروی بیابید.

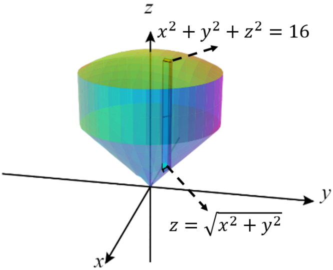
پاسخ:



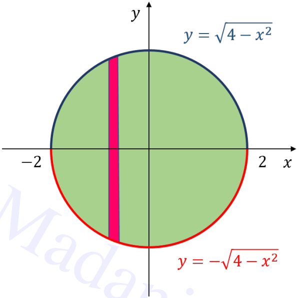


ادامه‌ی مثال

مختصات دکارتی:



المان انتگرال‌گیری نسبت به z



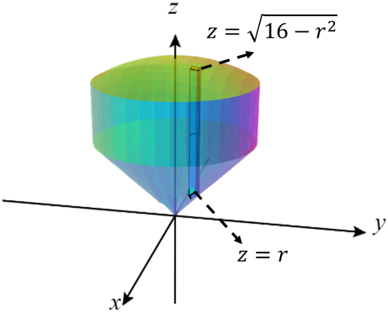
تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

توجه کنید که D_{xy} مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که $x^2 + y^2 \leq 4$. پس، داریم:

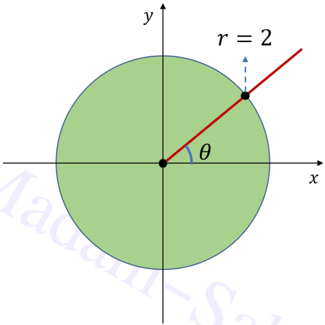
$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dzdydx$$

ادامه‌ی مثال

مختصات استوانه‌ای:



المان انتگرال‌گیری نسبت به z



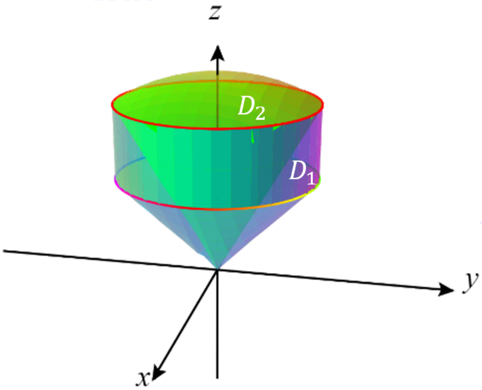
تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_r^{\sqrt{16-r^2}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r dz dr d\theta$$

ادامه‌ی مثال

مختصات کروی:

بنابر توضیحاتی که در ادامه می‌آیند، ناحیه‌ی D را به دو ناحیه‌ی D_1 و D_2 تقسیم می‌کنیم. ناحیه‌های D_1 و D_2 به‌ترتیب نقاطی از D را مشخص می‌کنند که بیرون و درون مخروط ترسیم‌شده قرار می‌گیرند.



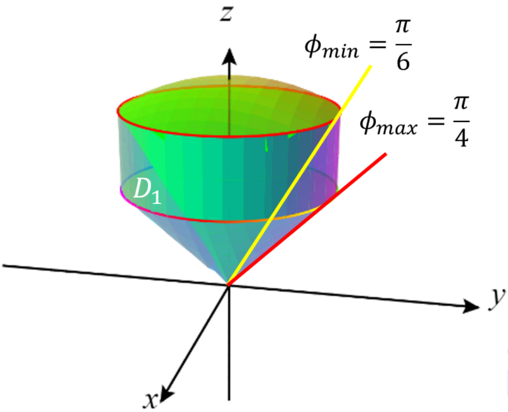
ادامه‌ی مثال

ابتدا کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیه‌ی D_1 مشخص می‌کنیم. تصویر ناحیه‌ی D_1 بر صفحه‌ی xy یک دیسک است؛ و از این رو در ناحیه‌ی D_1 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیه‌ی D_1 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$. توجه می‌کنیم که $\phi_0 = \phi_{min}$ در تقاطع استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ حاصل می‌شود. بنابراین، داریم:

$$x^2 + y^2 = 4 \implies \rho^2 \sin^2(\phi_0) = r^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \implies \rho^2 = 16$$

بنابراین، داریم $\sin^2(\phi_0) = \frac{1}{4}$، و از این‌رو $\sin(\phi_0) = \pm\frac{1}{2}$. اما داریم $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$، که نتیجه می‌دهد $\sin(\phi_0) = \frac{1}{2}$. پس، داریم $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$.

ادامه‌ی مثال

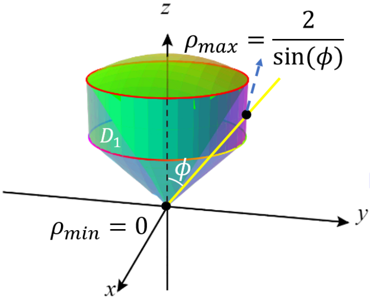


$\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$ و $\phi_{min} = \frac{\pi}{6}$

ادامه‌ی مثال

در ناحیه‌ی D_1، داریم $\rho_{min} = 0$؛ در حالی‌که بیش‌ترین مقدار برای ρ به‌ازای رویه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ به‌دست می‌آید. حال، ρ_{max} را در ناحیه‌ی D_1، به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 4 \implies \rho_{max}^2 \sin^2(\phi) = r^2 = 4 \implies \rho_{max} = \frac{2}{\sin(\phi)}$$



$\rho_{min} = 0$ و $\rho_{max} = \frac{2}{\sin(\phi)}$

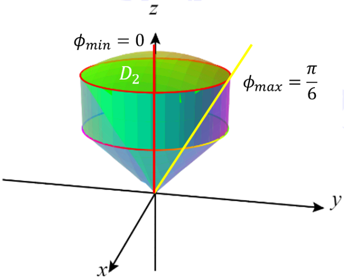
ادامه‌ی مثال

پس، در ناحیه‌ی D_1 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin\phi} \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

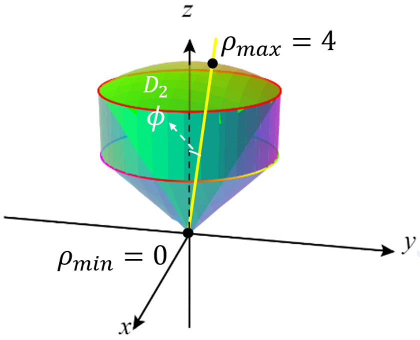
حال، کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیه‌ی D_2 مشخص می‌کنیم. تصویر ناحیه‌ی D_2 بر صفحه‌ی xy یک دیسک است؛ و از این رو در ناحیه‌ی D_2 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیه‌ی D_2 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{min} = 0$. توجه می‌کنیم که ϕ_{max} در تقاطع استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ حاصل می‌شود. قبلاً دیدیم که $\phi_{max} = \frac{\pi}{6}$.



$\phi_{max} = \frac{\pi}{6}$ و $\phi_{min} = 0$

ادامه‌ی مثال

در ناحیه‌ی D_2، واضح است که $\rho_{min} = 0$؛ در حالی‌که بیش‌ترین مقدار ρ به‌ازای کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ به‌دست می‌آید. بنابراین، داریم $0 \leq \rho \leq 4$.



$\rho_{max} = 4$ و $\rho_{min} = 0$

ادامه‌ی مثال

پس، در ناحیه‌ی D_2 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \rho \leq 4 \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\sin(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{4} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

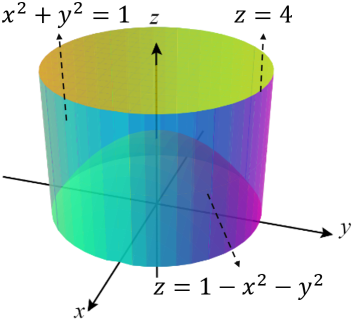
که در آن:

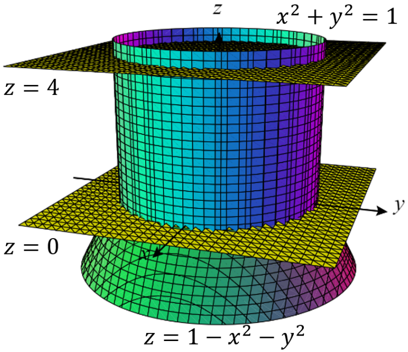
$$
g(\rho,\phi,\theta) = f(\rho \sin(\phi)\cos(\theta), \rho \sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))
$$

مثال

فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی $x^2+y^2=1$، صفحه‌ی $z=0$ و صفحه‌ی $z=4$ است که بالای سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ قرار می‌گیرد. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیابید.

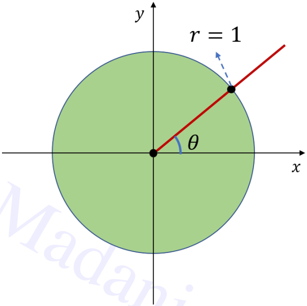
پاسخ:



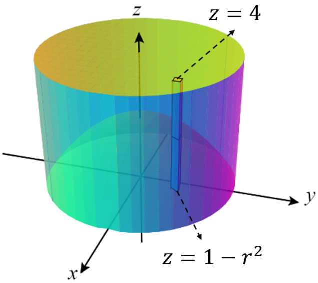


ادامه‌ی مثال

مختصات استوانه‌ای:



تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه‌ی xy



المان انتگرال‌گیری نسبت به z

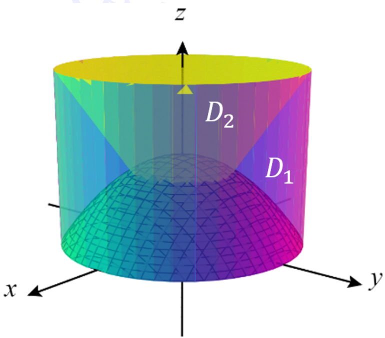
$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \int_{z=1-x^2-y^2}^{4} f(x,y,z)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-r^2}^{4} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r dz dr d\theta$$

ادامه‌ی مثال

مختصات کروی:

بنابر توضیحاتی که در ادامه می‌آیند، ناحیه‌ی D را به دو ناحیه‌ی D_1 و D_2 تقسیم می‌کنیم. ناحیه‌های D_1 و D_2 به‌ترتیب نقاطی از D را مشخص می‌کنند که بیرون و درون مخروط ترسیم‌شده قرار می‌گیرند.

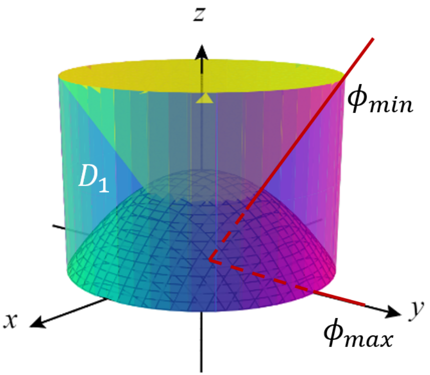


ادامه‌ی مثال

ابتدا کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیه‌ی D_1 مشخص می‌کنیم. توجه کنید که در ناحیه‌ی D_1 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیه‌ی D_1 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{max} = \frac{\pi}{2}$. توجه می‌کنیم که ϕ_{min} در تقاطع صفحه‌ی $z = 4$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ حاصل می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\tan(\phi_{min}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{1}{4} \implies \phi_{min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

ادامه‌ی مثال



$\phi_{max} = \frac{\pi}{2}$ و $\phi_{min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

ادامه‌ی مثال

توجه کنید که در ناحیه‌ی D_1، کم‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویه‌ی $z = 1 - x^2 - y^2$ به‌دست می‌آید؛ در حالی‌که بیش‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ به‌دست می‌آید. به منظور به‌دست آوردن $\rho_0 = \rho_{min}$ در ناحیه‌ی D_1، داریم:

$$z = 1 - x^2 - y^2 \implies \rho_0 \cos(\phi) = 1 - r^2 = 1 - \rho_0^2 \sin^2(\phi)$$

بنابراین، معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر با متغیر ρ_0 به‌دست می‌آید:

$$\sin^2(\phi)\rho_0^2 + \cos(\phi)\rho_0 - 1 = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\rho_0 = \frac{-\cos(\phi) \pm \sqrt{1 + 3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

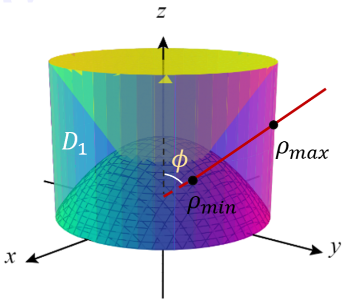
اما با توجه به نامنفی بودن ρ_0، فقط مقدار زیر مورد قبول است:

$$\rho_0 = \frac{-\cos(\phi) + \sqrt{1 + 3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

ادامه‌ی مثال

حال، ρ_{max} را در ناحیه‌ی D_1 بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2=1 \implies \rho_{max}^2\sin^2(\phi)=r^2=1 \implies \rho_{max}=\frac{1}{\sin(\phi)}$$



$$\rho_{max}=\frac{1}{\sin(\phi)} \text{ و } \rho_{min}=\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

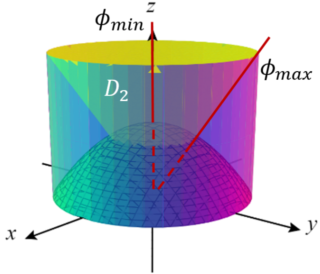
ادامه‌ی مثال

بنابراین، در ناحیه‌ی D_1 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)} \leq \rho \leq \frac{1}{\sin\phi} \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

حال، کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیه‌ی D_2 مشخص می‌کنیم. تصویر ناحیه‌ی D_2 بر صفحه‌ی xy یک دیسک است؛ و از این رو در ناحیه‌ی D_2 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیه‌ی D_2 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{min} = 0$. توجه کنید که ϕ_{max} در تقاطع صفحه‌ی $z = 4$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ حاصل می‌شود. بنابراین، $\phi_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.



$\phi_{min} = 0$ و $\phi_{max} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

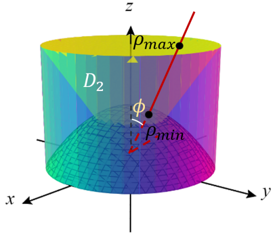
ادامه‌ی مثال

در ناحیه‌ی D_2، کم‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویه‌ی $z = 1 - x^2 - y^2$ به‌دست می‌آید؛ در حالی‌که بیش‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویه‌ی $z = 4$ به‌دست می‌آید. قبلاً دیدیم که:

$$\rho_{min} = \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

حال، ρ_{max} را در ناحیه‌ی D_2 بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$z = 4 \implies \rho_{max}\cos(\phi) = 4 \implies \rho_{max} = \frac{4}{\cos(\phi)}$$



$$\rho_{max} = \frac{4}{\cos(\phi)} \quad \text{و} \quad \rho_{min} = \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، در ناحیه‌ی D_2 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)} \leq \rho \leq \frac{4}{\cos\phi} \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}}^{\frac{4}{\cos(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)} \int_{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}}^{\frac{1}{\sin(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

که در آن:

$$
g(\rho,\phi,\theta) = f(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))
$$