ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مقدمه‌ای بر جبر خطی

فضاهای برداری روی $\mathbb{R}$

مجموعه‌ی V به همراه دو عمل دوتایی «$+$» و «$\cdot$» (که ضرب اسکالر نامیده می‌شود) را یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

- خواص جمعی:

به‌ازای هر $a, b, c \in V$، داشته باشیم:

۱. $a + b \in V$ (بسته‌بودن تحت عمل جمع)

۲. $a + b = b + a$ (جابه‌جایی)

۳. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (شرکت‌پذیری)

۴. عنصر $0 \in V$ وجود داشته باشد که $a + 0 = 0 + a = a$
(عنصر 0، عضو خنثی عمل جمع نامیده می‌شود. می‌توان دید که عضو خنثی عمل جمع یکتا است.)

۵. عنصر $a' \in V$ وجود داشته باشد که $a + a' = a' + a = 0$
(عنصر a' با $-a$ نمایش داده و وارون جمعی یا قرینه‌ی a نامیده می‌شود. می‌توان دید که قرینه‌ی یک عنصر یکتا است.)

- خواص ضرب اسکالر:

بەازای هر $a, b \in V$ و هر $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ داریم:

۱. $\lambda \cdot a \in V$ (بسته‌بودن تحت ضرب اسکالر)

۲. $\eta \cdot (\lambda \cdot a) = (\eta\lambda) \cdot a$ (سازگاری ضرب اسکالر و ضرب اعداد حقیقی)

۳. $\lambda \cdot (a + b) = (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot b)$ (سازگاری عمل‌های جمع و ضرب اسکالر V)

۴. $(\lambda + \eta) \cdot a = (\lambda \cdot a) + (\eta \cdot a)$ (سازگاری ضرب اسکالر و جمع اعداد حقیقی)

۵. $1 \cdot a = a$

قرارداد:

※ توجه کنید که آزادانه ممکن است ضرب اسکالر را از چپ یا راست اثر دهیم؛ یعنی داریم:

$$\lambda \cdot a = a \cdot \lambda$$

※ به منظور سادگی، معمولاً از نوشتن نماد «·» صرف‌نظر می‌کنیم؛ یعنی به جای $\lambda \cdot a$، فقط می‌نویسیم λa یا $a\lambda$.

مثال

فرض کنید که $V = \mathbb{R}^n$. در این صورت، V همراه با عمل‌های جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

توجه کنید که در این فضای برداری، $(0, \ldots, 0) \in V$ عنصر خنثی عمل جمع است، و همچنین $(-a_1, \ldots, -a_n) \in V$ قرینه‌ی $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ است.

مثال

فرض کنید که $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی است. در این صورت، V همراه با عمل‌های جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ & \ddots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & \lambda a_{ij} & \vdots \\ & \ddots & \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که در این فضای برداری، ماتریس $m \times n$ با درایه‌های 0، عنصر خنثی عمل جمع است، و همچنین $(-a_{ij}) \in V$ قرینه‌ی $(a_{ij}) \in V$ است.

زیرفضاهای برداری

فرض کنید که V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و $\emptyset \neq W \subseteq V$. در این صورت، W یک زیرفضای برداری V یا یک زیرفضای V نامیده می‌شود، هرگاه W همراه با همان عمل‌های جمع و ضرب اسکالر روی V یک فضای برداری باشد.

قضیه

فرض کنید که V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و $\emptyset \neq W \subseteq V$. در این صورت، W یک زیرفضای V است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a, b \in W$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $a + \lambda b \in W$.

مثال

فرض کنید که:

$$W = \{(x+y, 2y-x, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

نشان دهید که W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است.

پاسخ: از قضیه‌ی قبل استفاده می‌کنیم. واضح است که $(0,0,0) \in W$، و لذا $W \neq \emptyset$.
حال، فرض کنید که $a, b \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. باید نشان دهیم که $a + \lambda b \in W$. توجه کنید که $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ وجود دارند که:

$$a = (x_1 + y_1, 2y_1 - x_1, 3y_1), \qquad b = (x_2 + y_2, 2y_2 - x_2, 3y_2)$$

بنابراین، داریم:

$$a+\lambda b = ((x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2), 2(y_1+\lambda y_2)-(x_1+\lambda x_2), 3(y_1+\lambda y_2))$$

حال، با فرض $x_3 = x_1 + \lambda x_2$ و $y_3 = y_1 + \lambda y_2$، داریم:

$$a + \lambda b = (x_3 + y_3, 2y_3 - x_3, 3y_3) \in W$$

پس، W یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

استقلال خطی

فرض کنید که V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و $S \subseteq V$. در این صورت، مجموعه‌ی S را مستقل خطی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $a_1, \ldots, a_n \in S$ و هر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ از تساوی

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

بتوان نتیجه گرفت که:

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

اگر S مستقل خطی نباشد، آن‌گاه آن را وابسته‌ی خطی می‌نامیم.

※ در تعریف بالا، $\lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_n a_n$ یک ترکیب خطی از $a_1, \ldots, a_n$ نامیده می‌شود.

مثال

فرض کنید که:

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-امین}}, 0, \ldots, 0)$$

نشان دهید که $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

پاسخ: فرض کنید که $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ چنان هستند که $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \vec{0}$.

در این صورت، داریم:

$$\lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \lambda_i(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-امین}}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \lambda_n(0, \ldots, 0, 1) = \vec{0}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$$

بنابراین، داریم $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. پس، S مستقل خطی است.

مثال

فرض کنید که:

$$a = (1,1,1), \quad b = (1,-1,1), \quad c = (2,1,-1)$$

آیا $S = \{a, b, c\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی فضای برداری $\mathbb{R}^3$ است؟

پاسخ: فرض کنید که $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ چنان هستند که $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \vec{0}$.

در این صورت، داریم:

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1) + \lambda_3(2,1,-1) = 0$$

و از این‌رو:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0)$$

که دستگاه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$(2)+(3): \quad 2\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = 0$$

با جای‌گذاری مقدار λ_1 در دو معادله‌ی اول دستگاه یادشده، داریم:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

جمع‌زدن دو طرف نظیر دو معادله‌ی بالا نتیجه می‌دهد که $3\lambda_3 = 0$، و از این‌رو $\lambda_3 = 0$. حال، با جای‌گذاری مقدار λ_3 در یکی از دو معادله‌ی بالا، داریم $\lambda_2 = 0$. در نهایت، نشان دادیم که $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. پس، S مستقل خطی است.

مثال

فرض کنید که:

$$u_1 = (1,1,2,1), \quad u_2 = (1,1,1,1), \quad u_3 = (2,2,3,2)$$

آیا $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی فضای برداری $\mathbb{R}^4$ است؟

پاسخ: خیر؛ زیرا داریم:

$$u_1 + u_2 - u_3 = \vec{0}$$

زیرفضاهای تولیدشده

فرض کنید که V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و $a_1, \ldots, a_n \in V$. در این صورت، زیرفضای تولیدشده به‌وسیله‌ی $a_1, \ldots, a_n$ با نماد $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

مثال

داریم:

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$