سینا شریفی ۹۹۳۱۴۷۲ گروه ۱:

تمرین تحویلی دوم : برای حل این سوال می‌دانیم که

$$T' = \kappa N \quad , \quad N' = \tau B - \kappa T$$

$$\Rightarrow T'' = \kappa' N + \kappa N' \qquad \Rightarrow N'' = \tau' B + \tau B' - \kappa' T - \kappa T'$$

$$\Rightarrow T''' = \kappa'' N + 2\kappa' N' + \kappa N''$$

حال چیزهایی را که به دست آوردیم در معادله قرار می‌دهیم

$$T' \cdot (T'' \times T''') = \kappa N \cdot \big((\kappa' N + \kappa N') \times (\kappa'' N + 2\kappa' N' + \kappa N'') \big)$$

$$= \kappa N \cdot \Big(\underbrace{\kappa'\kappa'' (N \times N)}_{0} + 2(\kappa')^2 (N \times N') + \kappa\kappa' (N \times N'') + \kappa\kappa'' (N' \times N) +$$

$$\underbrace{2\kappa\kappa' (N' \times N')}_{0} + \kappa^2 (N' \times N'') \Big)$$

و حال κN را به داخل پرانتز می‌بریم و داریم که

$$\underbrace{\cancel{2\kappa(\kappa')N \cdot (N \times N')}}_{0} + \underbrace{\kappa'\kappa N \cdot (N \times N'')}_{0} + \underbrace{\kappa^2 \kappa'' (N' \times N)}_{0} + \kappa^3 N (N' \times N'')$$

$$= \kappa^3 N \cdot (N' \times N'')$$

حال باید آن چیزهایی که بالاتر در مورد N به دست آوردیم را جایگذاری کنیم

$$\kappa^3 N (N' \times N'') = \kappa^3 N \Big((\tau B - \kappa T) \times (\tau B' + \tau' B - \kappa' T - \kappa T') \Big) =$$ ضرب خارجی کنیم داریم که $\rightarrow$

$$\Rightarrow \kappa^3 N \cdot \Big(-\tau'\kappa' (B \times T) - \kappa \tau' (T \times B) \Big) = \kappa^4 (\tau'\kappa - \tau\kappa')$$

$$= \kappa^5 \times \frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2} = \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \longrightarrow$$ و حکم ثابت شد

(گروه ۱۰۰) ۹۹۳۱۰۷۲ تمرین 1 . ل سینا شریعتی

$$a(t)=\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i+\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat k$$

$$a'(t)=-\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i+\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{2}\hat k \Longrightarrow |a'(t)|=\sqrt{\frac{2}{4}\underbrace{\left(\sin^2\frac{\sqrt2}{2}t+\cos^2\frac{\sqrt2}{2}t\right)}_{1}+\frac{2}{4}}=1$$

$$a''(t)=-\frac12\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac12\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+0$$

$$a'''(t)=\frac{\sqrt2}{4}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{4}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+0$$

حال T و N و B را به ترتیب به دست بیاوریم:

$$T(t)=\frac{a'(t)}{|a'(t)|}=a'(t)=-\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i+\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{2}\hat k$$

$$T'(t)=-\frac12\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac12\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j$$

$$|T'(t)|=\sqrt{\frac14\left(\cos^2\frac{\sqrt2}{2}t+\sin^2\frac{\sqrt2}{2}t\right)}=\frac12$$

$$N(t)=-\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j$$

$$a'(t)\times a''(t)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{\sqrt2}{2}t & \frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\sqrt2}{2}t & \frac{\sqrt2}{2}\\ -\frac12\cos\frac{\sqrt2}{2}t & -\frac12\sin\frac{\sqrt2}{2}t & 0\end{vmatrix}=\frac{\sqrt2}{4}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{4}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{4}\hat k$$

$$|a'(t)\times a''(t)|=\sqrt{\frac{2}{16}\left(\sin^2\frac{\sqrt2}{2}t+\cos^2\frac{\sqrt2}{2}t\right)+\frac{2}{16}}=\sqrt{\frac14}=\frac12$$

$$B(t)=\frac{a'(t)\times a''(t)}{|a'(t)\times a''(t)|}=\frac{\frac{\sqrt2}{4}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{4}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{4}\hat k}{\frac12}=\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{2}\hat k$$

حال برای حل قسمت دوم نیاز به K و τ داریم که:

$$K(t)=\frac{|a'(t)\times a''(t)|}{|a'(t)|^3}=\frac{\frac12}{1}=\frac12$$

$$\tau(t)=\frac{\left(a'(t)\times a''(t)\right)\cdot a'''(t)}{|a'(t)\times a''(t)|^2}=\frac{\left(\frac{\sqrt2}{4}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{4}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat j+\frac{\sqrt2}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt2}{4}\sin\frac{\sqrt2}{2}t\,\hat i-\frac{\sqrt2}{4}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\right)}{\frac14}=$$

$$\frac{\frac18}{\frac14}=\frac12$$

گروه ۱ ۹۹۳۱۰۷۲ سینا ستوده

ادامه تمرین اول

تست دوم: با توجه به اینکه شماره دانشجویی من ۹۹۳۱۰۷۲ است پس $\begin{cases} a=0 \\ b=7 \\ c=2 \end{cases}$ خواهیم بود و داریم که

$$\beta(t) = \sqrt{2}\, T(t) + \left(7+\tfrac{1}{2}\right) N(t) + \sqrt{2}\left(2+\tfrac{1}{2}\right) B(t)$$

پس داریم که

$$\beta(t) = \left(-\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{i} + \cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{j} + 1\hat{k}\right) + \left(-\tfrac{15}{2}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{i} - \tfrac{15}{2}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{j}\right)$$

$$+ \tfrac{5}{2}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{i} - \tfrac{5}{2}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\,\hat{j} + \tfrac{5}{2}\hat{k}$$

حال جمع بزنیم و داریم که

$$\beta(t) = \left(\tfrac{3}{2}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t - \tfrac{15}{2}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{i} - \left(\tfrac{3}{2}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t + \tfrac{15}{2}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{j} + \tfrac{7}{2}\hat{k}$$

$$\beta'(t) = \left(\tfrac{3\sqrt{2}}{4}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t + \tfrac{15\sqrt{2}}{4}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{i} - \left(\tfrac{15\sqrt{2}}{4}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t - \tfrac{3\sqrt{2}}{4}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\beta''(t) = \left(\tfrac{15}{4}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{i} + \left(\tfrac{15}{4}\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}t + \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\hat{j} + 0 \,''$$

حال برای به دست آوردن τ و κ ابتدا $\beta' \times \beta''$ را محاسبه کنیم و چون در واقع یک دترمینان را حساب می‌کنیم که ستون آخر آن $\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است پس در واقع حاصل دترمینان برابر (عدد و ۰ و ۰) می‌شود و حال می‌توانیم بگوییم که اندازه $|\beta'(t)\times\beta''(t)|$ برابر همان عدد است و پس κ برابر تقسیم ۲ بردار به هم می‌شود که ثابت است.

حال از طرفی برای τ داریم که $\tau = \dfrac{\beta'''\cdot(\beta'\times\beta'')}{|\beta'\times\beta''|^2}$ که با توجه به ویژگی‌های ضرب داخلی برابر صفر می‌شود پس $\tau = 0$ است حال:

$\left.\begin{array}{l} \tau = 0 \\ \kappa = \text{مقدار ثابت} \end{array}\right\}$ نمودار دایره‌ای است.

جواب تمرین سوم: با توجه به اینکه شماره دانشجویی من عدد ۹۹۳۱۰۷۲ است پس $\begin{cases} a=0 \\ b=7 \\ c=2 \end{cases}$ است. و حال اگر ضابطه‌ی f را دوباره از اول بنویسیم داریم که:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-8}\sin(x^4 y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

حال برای پیوستگی در مبدا نیاز داریم که حد این تابع را حول مبدا به دست آوریم که داریم:

$$0 \leq \left| \frac{e^{x-8}\sin x^4 y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{e^{x-8} x^4 y}{x^2+y^2} \right| = \left| e^{x-8} x^2 y \right| \times \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq \left| e^{x-8} x^2 y \right|$$

حال بدیهی است که:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{x-8} x^2 y = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-8}\sin x^4 y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

و تابع پیوسته است

گروه: ۱ ۹۹۳۱۰۷۲ سینا شریفی

تمرین سوم ،

تست دوم سوال ، ابتدا $f(n,1400n)$ را جایگذاری می کنیم و داریم که ،

$$f(n,1400n) = \left\{ \frac{e^{n-8}\sin(1400n^5)}{n^2(1400^2+1)} \right.$$

حال باید حد را در $n=0$ بدست آوریم که به صورت زیر عمل می کنیم ، ،

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^{n-8}\sin(1400n^5)}{n^2(1400^2+1)} = \left[\frac{0}{0}\right]^H \longrightarrow \frac{e^{n-8}\sin(1400n^5) + 7000\,e^{n-8}n^4\cos(1400n^5)}{2\times(1400^2+1)\times n}$$

حال دوباره باز هم حاصل $\frac{0}{0}$ می شود و باید یک بار دیگر هوپیتال بزنیم و داریم که

$$\frac{e^{n-8}\sin(1400n^5) + 7000\,e^{n-8}n^4\cos(1400n^5) + \left(7000\,e^{n-8}n^4 + 28000\,e^{n-8}n^3\right)\cos(1400n^5) - 49\times10^6\,e^{n-8}n^8\sin(1400n^5)}{2\times(1400^2+1)}$$

حال چون مخرج دیگر صفر نمی شود دیگر لازم نیست هوپیتال بگیریم و به این دلیل که در هر تست از صورت یک sin یا cos داریم و مقدار آنها در $n=0$ برابر صفر است دیگر جواب حد برابر صفر می شود.

البته نکته مهم اینجاست که : اشتباه خودمان را در گرفتن مشتق گیری برای بار دوم از صورت می گیریم و فقط به این نکته توجه می کردیم که مدام است هر دو جمله sin و cos ها می خواهد بود و پس جواب صفر می شود اما من برای کامل بودن راه حل حاصل مشتق را هم نوشتم.

$$\lim_{n\to 0} f(n,1400n) = 0$$

سینا شریفی ۹۹۳۱۰۷۲ گروه: ۱

ج ٤ (تمرین های تحویلی شماره ی ٤):

الف) همانطور که در بالا هم نوشته شده است شماره دانشجویی بنده ۹۹۳۱۰۷۲ است که $\begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases}$ می شود حال با توجه به شرایط سوال داریم که :

$$\frac{\delta f}{\delta x}(2a,0,a^2) \xrightarrow{a=7} \frac{\delta f}{\delta x}(14,0,49) \xrightarrow{b=2} 1$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(2a,0,49) \xrightarrow{a=7} \frac{\delta f}{\delta y}(14,0,49) \xrightarrow{b=2} 2$$

$$\frac{\delta f}{\delta z}(14,0,49) \xrightarrow{a=7} \frac{\delta f}{\delta z}(14,0,49) \xrightarrow{b=2} 3$$

حال اگر توجه کنید در نقطه $u=v=a$ جواب را به دست بیاوریم باید اول ببینیم مشتق جزئی های بالا اصلا به درد مان می خورند یا نه ؟

$$x = x(u,v) = u+v \xrightarrow{u=v=a} 2a = 14$$

$$y = y(u,v) = u-v \xrightarrow{u=v=a} 0 \implies f(x,y,z) = f(2a,0,a^2) = f(14,0,49)$$

$$z = z(u,v) = u.v \xrightarrow{u=v=a} a^2 = 49$$

پس داریم که (معادله ساده است نیاز به کشیدن درخت نداریم) و نقطه ها هم همان است که در بالا آمده است دیگر از نوشتن آن در پایین خودداری می کنم

$$\frac{\delta f}{\delta v} = \frac{\delta f}{\delta x} \times \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta f}{\delta y} \times \frac{\delta y}{\delta v} + \frac{\delta f}{\delta z} \times \frac{\delta z}{\delta v}$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = u = a = 7$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 7 = \underline{\underline{24}}$$

بقیه‌ی راه حل: تست ب) با توجه به صورت سوال و ذهن دانشوری من داریم که: $\begin{cases} a=0 \\ b=7 \\ c=2 \end{cases}$ خواهد بود که:

$$e^{axyz} + bxz + (c+1)yz = 2c+3 \xrightarrow[c=2]{a=0,\ b=7} 1 + 7xz + 3yz = 7$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = 7xz + 3yz - 6$$

حال گرادیان را در P به دست آوریم و داریم که:

$$\nabla f(0,1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2),\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 7z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 7x + 3y$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,1,2) = (7z,\ 3z,\ 7x+3y)\Big|_{\substack{x=0\\ y=1\\ z=2}} = (14, 6, 3)$$

حال معادله‌ی ابرصفحه‌ی مماس برابر است با:

$$\big((x,y,z) - (0,1,2)\big) \cdot (14,6,3) = 0 \Rightarrow (x,\ y-1,\ z-2)\cdot(14,6,3) = 0$$

$$\Rightarrow 14x + 6(y-1) + 3(z-2) = 0 \to 14x + 6y - 6 + 3z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{14x + 6y + 3z = 12}$$

صفیه شریعتی

گروه: 1

۹۹۴۳۱۰۷۲

ج ۵) (تعیین تحویل شماره تمرین): همانگونه که در بالا هم نوشته شده شماره دانشجویی من ۹۹۴۳۱۰۷۲ است پس $\begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases}$ می شود و صورت سوال را اگر دوباره بنویسیم داریم که:

$$f(x,y)=\begin{cases} (x-7)(y+3) & |x-7| \leq |y-2| \\ -(x-7)(y+3) & |x-7| > |y-2| \end{cases}$$

الف) برای به دست آوردن مشتق سوی چون ۲ ضابطه داریم برای ۲ تکه ی دامنه بهترین راه این است که در هر قسمت به صورت جدا مشتق سوی را بدست بیاوریم بعداً با توجه به دامنه شرایط را تعیین کنیم که v_1 و v_2 باید چطور باشند تا آن ضابطه صدق کند.

پس برای حالت اول داریم که:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2)-f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cancel{7}+hv_1-\cancel{7})(2+hv_2+3)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(hv_1)(5+hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} (v_1)(5+hv_2) = v_1 \times 5 = 5v_1$$

حال برای دامنه داریم که:

$$|x-7| \leq |y-b| \iff |\cancel{7}+hv_1-\cancel{7}| \leq |\cancel{2}+hv_2-\cancel{2}| \iff \cancel{h}|v_1| \leq \cancel{h}|v_2|$$

$$\iff |v_1| \leq |v_2| \iff$$

برای حالت دوم داریم که

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2)-f(a,b)}{h} = -\frac{(\cancel{7}+hv_1-\cancel{7})(2+hv_2+3)}{h} - 0$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(hv_1)(hv_2+5)}{h} = \lim_{h\to 0} -v_1(hv_2+5) = -5v_1$$

برای دامنه داریم که:

$$|x-7| > |y-b| \iff |\cancel{7}+hv_1-\cancel{7}| > |\cancel{2}+hv_2-\cancel{2}| \iff \cancel{h}|v_1| > \cancel{h}|v_2|$$

$$\iff |v_1| > |v_2|$$

ادامه‌ی جواب سوال ۲

قسمت ب : می‌دانیم که اگر تابع مشتق‌پذیر باشد باید در رابطه‌ی زیر صدق کند .

$$D_v f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot v$$

پس داریم که [اول باید ∇f را به دست بیاوریم و از تعریف استفاده می‌کنیم چون به مرزها نزدیک هستیم .]

فقط بعد x پیشروی شود

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(۷+h, ۲) - f(۷,۲)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(۷+h-۷)(\cancel{\ \ }) - ۰}{h} = \frac{-۵h}{h} = -۵$$

فقط بعد y زیاد

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(۷,۲+h) - f(۷,۲)}{h} = \frac{(۷-۷)(۲+h+۳) - ۰}{h} = ۰$$

حال داریم که $\nabla f = (-۵, ۰)$ است حال داریم که

$$\nabla f \cdot v = (-۵, ۰)(v_1, v_2) = -۵v_1 + ۰ = -۵v_1$$

حال با توجه به جواب قسمت قبل دیدیم که به ازای هر v_1 و v_2 ای این برابری درست نمی‌شود پس در واقع می‌توان ادعا کرد که تابع مشتق‌پذیر نیست .

سینا شریعتی ۹۹۳۱۰۷۲ گروه: ۱

ج۴ (تمرین تحویلی شماره ۹):

الف) برای این که حکم سوال را ثابت کنیم باید از قضیه مشتق ضمنی استفاده کنیم پس داریم که

$$\begin{cases} u - x^2 - y^2 = 0 \\ v - y^2 - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,y,u,v) = u - x^2 - y^2 = 0 \\ g(x,y,u,v) = v - y^2 - xy = 0 \end{cases} \qquad P = (1,1,2,2)$$

اگر قرار باشد حکم درست باشد باید $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \neq 0$ پس داریم که

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x & -2y \\ -y & -2y - x \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0$$

پس بنابه قضیه تابع ضمنی توان x و y را بر حسب u، v در همسایگی P نوشت.

ب) با توجه به تعریف f داریم که:

$$f(x,y) = x^3 + y\cos(\pi x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\frac{\partial x}{\partial u}(P) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\,\frac{\partial y}{\partial u}(P)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = \left(3x^2 - y\pi\sin(\pi x)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + (\cos \pi x)\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{(I)}$$

حال ما نیاز داریم که مقادیر $\frac{\partial y}{\partial u}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ را بدست آوریم پس از معادلات اصلی بر حسب u مشتق میگیریم و داریم که

$$\begin{cases} u - x^2 - y^2 = 0 \longrightarrow 1 - 2x\frac{\partial x}{\partial u} - 2y\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ v - y^2 - xy = 0 \longrightarrow 0 - 2y\frac{\partial y}{\partial u} - x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases} 2\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \\ 2\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

ادامه راه حل: اگر تغییر متغیرهای $\begin{cases} X = \frac{\delta u}{\delta v} \\ Y = \frac{\delta y}{\delta v} \end{cases}$ را برای سادگی در نوشتن بر هم داریم که

$$\begin{cases} 2X + 2Y = 1 \\ 3Y + X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2X} + 2Y = 1 \\ -6Y - \cancel{2X} = 0 \end{cases} \Rightarrow -4Y = 1 \longrightarrow \boxed{Y = -\frac{1}{4} \Rightarrow X = \frac{3}{4}}$$

حال باید جواب های به دست آمده را همراه نقطه P در معادله (I) جایگذاری کنیم:

$$\left(3 - \pi \cancel{\sin(\pi)}\right) \frac{3}{4} - \cos(\pi) \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{10}{4}}$$

گروه ۱:

سینا شریعتی

۹۹۳۱۰۷۲

ج ۷ (تمرین تحویلی شماره‌ی هفت) ، ابتدا باید ∇f را به دست بیاوریم و سپس آن را برابر صفر قرار دهیم پس داریم که

$$f(x,y) = x^2 - x^2y + 2y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2xy,\ 4y - x^2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2xy = 0 \\ 4y - x^2 = 0 \longrightarrow y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 2x\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0 \longrightarrow \frac{x^3}{4} - x = 0 \longrightarrow x^3 - 4x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 2 \to y = 1 \\ x = -2 \to y = 1 \end{cases}$$

حال نتیجه می‌شود که کاندیداهای نقطه‌ی بحرانی بودن نقاط $\begin{cases} P_1 = (0,0) \\ P_2 = (2,1) \\ P_3 = (-2,1) \end{cases}$ هستند حال چون تابع f دو متغیره است می‌توان از راه حل کوتاه‌تر یعنی ماتریس H استفاده کرد و جواب را به دست آورد

$$f_1 = 2x - 2xy \quad , \quad f_2 = 4y - x^2$$

$$A = f_{11} = 2 - 2y \qquad B = f_{12} = -2x \qquad C = f_{22} = 4$$

حال برای هرکدام از نقاط داریم که

$$P_1 = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = 4 \end{cases} \Rightarrow 8 - 0 > 0 \Rightarrow$$

نقطه‌ی P_1 یک min نسبی است

$$P_2 = (2,1) \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -4 \\ C = 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \times 4 - (-4)^2 < 0 \Rightarrow$$

نقطه‌ی P_2 یک max نسبی است

$$P_3 = (-2,1) \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 4 \\ C = 4 \end{cases} \Rightarrow AC - B^2 = 0 - 16 < 0 \Rightarrow$$

نقطه‌ی P_3 یک max نسبی است

حال چون هیچکدام از P_1 و P_2 و P_3 ~~نقطه‌ی~~ $AC - B^2 = 0$ نشده است پس هر سه بحرانی نیز هستند

گروه ۱۰ ۹۹۳۱۰۷۲ ۵ سینا شریفی

ج ۸ (جواب تمرین تحویلی شماره هشت)

با توجه به اینکه دو شرط داریم و میخواهیم از روش ضرایب لاگرانژ سوال را حل کنیم داریم که:

از طرفی با توجه به شماره دانشجویی من $a=7$ و $b=2$ خواهد بود

$F(x,y,z) = x + 8y + 3z$

$g_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$

$g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

حال تابع لاگرانژین را تشکیل میدهیم و ادامه راه حل را پیش میبریم:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 8y + 3z + \lambda_1(x-y+z-1) + \lambda_2(x^2+y^2-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} & 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} & 8 - \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta z} & 3 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_1} & x - y + z - 1 = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_2} & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 x = 2 \Rightarrow \lambda_2 x = 1 \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{x} \\ 2\lambda_2 y = -11 \rightarrow 2(\frac{1}{x}) y = -11 \quad \mathrm{I} \\ x - y + z - 1 = 0 \quad \mathrm{III} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-11}{2} \rightarrow 2y = -11x \Rightarrow y = \frac{-11}{2}x$$

$$x^2 + \left(\frac{-11}{2}x\right)^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{-2\sqrt{5}}{25} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{-11}{\cancel{2}} \times \frac{-\cancel{2}\sqrt{5}}{25} = \frac{+11\sqrt{5}}{25}$$

$$y = \frac{-11}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{25} = \frac{-11\sqrt{5}}{25}$$

ادامه حل

$$\text{III} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25} \quad y = \dfrac{11\sqrt{5}}{25} \Longrightarrow z = 1 + \dfrac{13}{25}\sqrt{5} \\ \\ x = \dfrac{2\sqrt{5}}{25}, \quad y = \dfrac{-11\sqrt{5}}{25} \Longrightarrow z = 1 - \dfrac{13}{25}\sqrt{5} \end{cases}$$

حال باید max و min را با قرار دادن این نقاط به دست آمده در تابع بررسی کنیم که می‌شود

$$P_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{25}, \frac{11\sqrt{5}}{25}, 1 + \frac{13}{25}\sqrt{5}\right) = \frac{-2\sqrt{5}}{25} + \frac{88\sqrt{5}}{25} + 3 + \frac{99}{25}\sqrt{5} = \frac{185\sqrt{5}}{25} + 3$$

$$P_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{25}, \frac{-11\sqrt{5}}{25}, 1 - \frac{13}{25}\sqrt{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{25} - \frac{88\sqrt{5}}{25} + 3 - \frac{99}{25}\sqrt{5} = -\frac{185\sqrt{5}}{25} + 3$$

پس نقطه P_1 همان max تابع است. و جواب سوال خواهد برد.

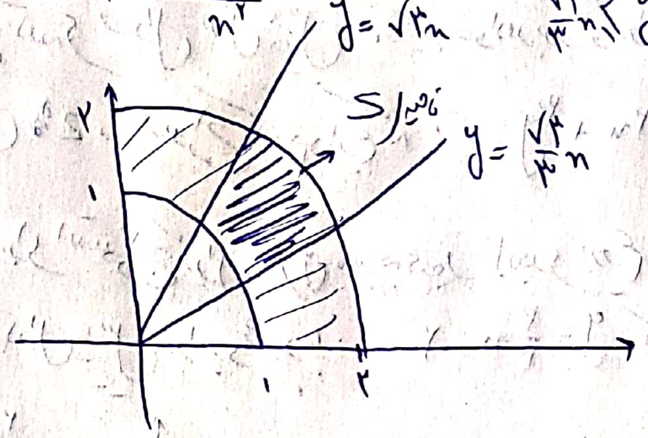
گروه ۱:   ۹۹۳۱۰۷۲   سینه شریعتی

ج ۹- این سوال بهتر است که با انتگرال سه گانه حل شود زیرا تمام حدود تغییرات را به راحتی داریم:

$0 < z < \frac{(x^2+y^2)^3}{x^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x$

برای x هم داریم که: $1 < x < 2$



در نتیجه حجم مورد نظر برابر است با:

$$V = \iiint_S dz\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{3}x} \int_0^{\frac{(x^2+y^2)^3}{x^4}} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{3}x} \frac{(x^2+y^2)^3}{x^2}\,dy\,dx$$

حال برای حل این انتگرال دوگانه بهتر است که از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم که

$1 < r < 2$: $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \frac{r^6}{r^2\cos^2\theta}\, r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \frac{r^4}{\cos^2\theta}\, r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r^5\,dr\, \sec^2\theta\,d\theta =$$

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$$\left(\int_1^2 r^5\,dr\right)\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\,d\theta\right) = \frac{r^6}{6}\Big|_1^2 \times (\tan\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right)\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{63}{6}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{126\sqrt{3}}{12}$$

گروه 1:

۹۹۳۱۰۷۲

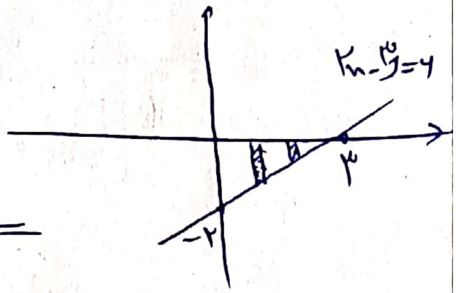
ج ۱۰- برای اینکه سوال را حل کنیم اول باید کران ها را به دست بیاوریم. برای به دست آوردن کران ها از z شروع می کنیم و داریم که:

- طبق گفته ی خود سوال کران پایین $z=0$ خواهد بود و کران بالا صفحه $2x-3y+z=6$ خواهد بود

که اگر z را در آن استخراج کنیم داریم که $0 \le z \le 6-2x+3y$

- حال برای y به فضای ۲ بعدی رویم و در آن $z=0$ خواهد بود پس داریم که

$$2x-3y+z=6 \xrightarrow{z=0} 2x-3y=6$$



$\Longleftarrow$ که اگر المان گیری برای dy را انجام دهیم باید المان عمودی انتخاب کنیم پس از پایین المان به خط می خورد و از بالا به محور ها پس کران های y هم مشخص می شود:

$$\frac{2}{3}x-2 \le y \le 0$$

- حال برای dx هم المان ها باید افقی باشد و دیگر بدیهی است که $0 \le x \le 3$ خواهد بود پس داریم که:

$$\iiint_W y\,dV = \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x-2}^{0} \int_0^{6-2x+3y} y\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x-2}^{0} y(6-2x+3y)\,dy\,dx = \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x-2}^{0} 6y\,dy\,dx \quad \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x-2}^{0} 2xy\,dy\,dx$$

$$+ \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x-2}^{0} 3y^2\,dy\,dx = \int_0^3 (3y^2)_{\frac{2}{3}x-2}^{0}\,dx + \int_0^3 x\,(y^2)_{\frac{2}{3}x-2}^{0}\,dx$$

$$+ \int (y^3)_{\frac{2}{3}x-2}^{0}\,dx = \int_0^3 3\left(\frac{2}{3}x-2\right)^2 dx + \int_0^3 x\left(\frac{2}{3}x-2\right)^2 dx \quad \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x-2\right)^3 dx$$

$$= \boxed{-3} \rightarrow$$ جواب کار

سینا شریفی   ۹۹۳۱۰۷۲   گروه ۱۰۰

ج ۱۱) تمرین تحویلی شماره ۱۱):

با توجه به مطالب بیان شده در این سوال چیزی که نیاز داریم این است که بتوانیم کار را با توجه به قضیه بنیادی حساب کنیم ... اول باید ثابت کنیم که تابع پایستار است و با توجه به ویژگی های پایستاری بگوییم که

$$\int_c F.dr = \varphi(\text{نقطه‌ی انتها}) - \varphi(\text{نقطه‌ی ابتدا})$$

حال اول باید ثابت کنیم که تابع پایستار است برای اینکه داریم که

$$\frac{\delta F_x}{\delta y} = \frac{\delta F_y}{\delta x} \Longleftrightarrow \text{تابع پایستار است}$$

$$\frac{\delta F_x}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(x^2 - x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\delta F_y}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(2xy - ye^y) = 2y$$

$\Longrightarrow$ پس تابع پایستار است.

حال باید φ را پیدا کنیم که $\nabla\varphi = F$ که φ شرایط را داریم که

$$\nabla\varphi = F \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\delta\varphi}{\delta x} = F_x \\ \frac{\delta\varphi}{\delta y} = F_y \end{cases} \longrightarrow \varphi(x,y) = \int F_x dx + g(y) = \int (x^2 - x + y^2)dx + g(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\varphi}{\delta y} = 2xy + g'(y) = F_y = 2xy - ye^y \Longrightarrow g'(y) = -ye^y$$

$$\Rightarrow g(y) = -\int ye^y dy = -e^y y + e^y + c$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xy^2 - e^y y + e^y + c$$

$$\Rightarrow \int_c F.dr = \varphi(r(\pi)) - \varphi(r(0))$$

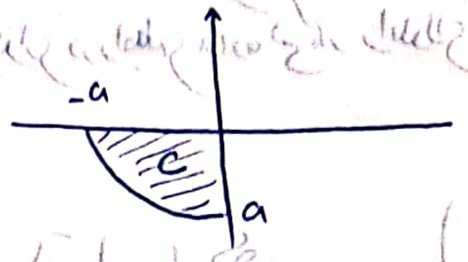
$$\Rightarrow \begin{cases} r(\pi) = (-2,0) \\ r(0) = (2,0) \end{cases} \Rightarrow \varphi(-2,0) - \varphi(2,0) = -\frac{8}{3} - \cancel{2} + \cancel{1} - \frac{8}{3} + \cancel{2} - \cancel{1} = \frac{-16}{3}$$

جواب نهایی

گروه ۱:   ۹۹۳۱۰۷۲   سینا کردعلی

ج ۱۲ (تمرین تحویلی شماره ۱۲):

اگر ناحیه C را در نظر بگیریم داریم که و در واقع انتگرال خواسته شده توسط صورت سوال



همان $\oint_C F.dr$ است پس داریم که:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\delta f_y}{\delta x} - \frac{\delta f_x}{\delta y}\right) dxdy$$

$$\begin{cases} \frac{\delta f_y}{\delta x} = 12x^2 \\ \frac{\delta f_x}{\delta y} = -12y^2 \end{cases} \Longrightarrow = \iint_D (12x^2 + 12y^2)\, dxdy$$

حال به سیستم استوانه‌ای می‌رویم و داریم که

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\int_{-a}^{0} (12r^2\cos^2\theta + 12r^2\sin^2\theta)\, r\,dr\,d\theta = 12\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\int_{-a}^{0} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 12 \times \left(\frac{r^4}{4}\right)_{-a}^{0} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{6\pi a^4}{4} = \boxed{-\frac{3\pi a^4}{2}}$$

سینا تدینی

۹۹۳۱۰۷۲

ج ۱۳) تمرین تکوینی ۱۳) : الف) به اینکه S یک رویه تکه تکه هموار است که جهت‌دار است و بردار قائم N رو به بیرون آن است پس تمام شرایط قضیه دیورژانس را داریم پس داریم که:

$$\iint_S F.N.ds = \iiint_V (\nabla . F) dV \qquad F = (\sin y + \sin x + y \,,\, x\cos y \,,\, xz\sin y - z\cos x + 1)$$

$$\nabla . F = \frac{\delta F_x}{\delta x} + \frac{\delta F_y}{\delta y} + \frac{\delta F_z}{\delta z}$$

$$= \frac{\delta}{\delta x}(\sin y + \sin x + y) + \frac{\delta}{\delta y}(x\cos y) + \frac{\delta}{\delta z}(xz\sin y - z\cos x + 1)$$

$$= \cancel{\cos x} - \cancel{x\sin y} + \cancel{x\sin y} - \cancel{\cos x} = 0$$

$$\Longrightarrow \iiint_V (\nabla . F) . dV = \iiint_V 0 \cdot dv = 0 \rightarrow$$ جواب نهایی

قسمت ب) اگر C مرز رویه S در صفحه xoy باشد داریم که

$$\oint F.dr = \iint_{S'} (\nabla \times F) . n d\sigma$$

$$\Rightarrow (\nabla \times F) . n = (\nabla \times F) . \hat{k} = \frac{\delta F_y}{\delta x} - \frac{\delta F_x}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta x}(x\cos y) - \frac{\delta}{\delta y}(\sin y + \sin x + y).$$

در صفحه xoy فقط n مولفه k دارد

$$= \cancel{\cos y} - \cancel{\cos y} - 1 = -1$$

$$\Rightarrow \oint F.dr = \iint_{S'} -1 dx dy$$

حال با پیدا کردن S' را پیدا کنیم و داریم که

$$S' : x^2 + y^2 + z^{1400} = 1 \xrightarrow{z=0} x^2 + y^2 = 1$$

$$\iint_{S'} -1 dx dy = -\iint_{S'} dA = -1 \times (\text{مساحت دایره}) = -1 \times 1^2 \times \pi = \boxed{-\pi}$$