ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

قضایای دیورژانس و استوکس

آنالیز برداری

در ادامه، چند عمل‌گر مهم که به منظور بیان قضایای استوکس و دیورژانس اهمیت دارند را بیان می‌کنیم.

عمل‌گر دیفرانسیل

عمل‌گر دیفرانسیل یک بردار نمادین به صورت زیر است:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

این عمل‌گر، عمل‌گر نابلا نیز نامیده می‌شود.

دیورژانس یک میدان برداری

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری است که $F = (P, Q, R)$. در این صورت، دیورژانس F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(F) : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

که در آن Ω درون U است.

تعبیر دیورژانس یک میدان برداری

به بیان نادقیق، مقدار دیورژانس یک میدان برداری $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ای مثل $P \in U$، میزان واگرایی یا پخش F از P را می‌سنجد.

کرل یک میدان برداری

فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری است که $F = (P, Q, R)$.
در این صورت، کرل F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}(F) = \nabla \times F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

تعبیر کرل یک میدان برداری

به بیان نادقیق، مقدار کرل یک میدان برداری هموار $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ای مثل $P \in U$، وسعت گردش F حول P را می‌سنجد.

ارتباط بین پایستاری میدان برداری F و $\mathrm{curl}(F)$

فرض کنیم که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک میدان برداری هموار است که $F = (P, Q, R)$.
می‌دانیم شرط لازم برای پایستاری F به صورت زیر است:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

این شرط لازم، به وضوح معادل است با $\mathrm{curl}(F) = (0, 0, 0)$. بنابراین، داریم:

میدان برداری $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ پایستار است، اگر و تنها اگر U باز، همبند و فاقد حفره باشد، و همچنین داشته باشیم $\mathrm{curl}(F) = 0$.

دیورژانسِ کرل یک میدان برداری

فرض کنید که $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک میدان برداری است که $F = (P, Q, R)$. همچنین، فرض کنید که P، Q و R دارای مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته هستند. در این صورت، داریم $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(F)) = 0$؛ زیرا:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{curl}(F)) &= \operatorname{div}(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\
&= (R_{yx} - Q_{zx}) + (P_{zy} - R_{xy}) + (Q_{xz} - P_{yz}) \\
&= (R_{yx} - R_{xy}) + (Q_{xz} - Q_{zx}) + (P_{zy} - P_{yz}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

⋇ مطلب بالا را می‌توان به طور نادقیق به صورت $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ بیان کرد.

قضیه‌ی دیورژانس

فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$، و مرز D یک رویه‌ی بسته و قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌دار مثل S با بردار قائم یکه‌ی N است، که رو به خارج D است. همچنین، فرض کنید که F یک میدان برداری هموار روی D است. در این صورت، داریم:

$$\oiint_S F \cdot N \, dS = \oiint_S F \cdot d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$$

⁎ به بیان نادقیق، $\iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$ مجموع میزان پخش F از D را می‌سنجد. پس، بنابر قضیه‌ی دیورژانس، این مجموع برابر با شار میدان برداری F عبوری از S است.

⁎ بنابر قضیه‌ی دیورژانس، اگر $\operatorname{div}(F) = 0$، آن‌گاه شار میدان برداری F عبوری از S برابر با 0 است.

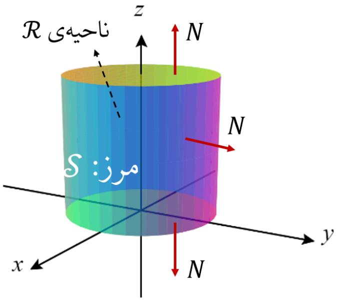
مثال

فرض کنید که $\mathcal{R}$ استوانه‌ی توپر $x^2+y^2 \leq a^2$ به‌ازای $0 \leq z \leq b$ است. هم‌چنین، فرض کنید که رویه‌ی S مرز $\mathcal{R}$ است، N بردار قائم یکه‌ی رو به خارج $\mathcal{R}$ است، و میدان برداری $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ به صورت زیر مفروض است:

$$F = (bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$$

حاصل انتگرال $\oiint_S F.N\, dS$ را بیابید.

پاسخ:



از آنجا که S متشکل از یک رویه‌ی استوانه‌ای و دو دیسک بسته است، استفاده از قضیه‌ی دیورژانس مناسب‌تر از محاسبه‌ی مستقیم $\oiint_S F \cdot N\, dS$ است.

ادامه‌ی مثال

بنابر قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$I = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot N \, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$$

توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = by^2 + bx^2 + 2z(x^2+y^2) = (b+2z)(x^2+y^2)$$

در مختصات استوانه‌ای، ناحیه‌ی $\mathcal{R}$ دارای کران‌های زیر است:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq r \leq a, \qquad 0 \leq z \leq b$$

بنابراین، داریم:

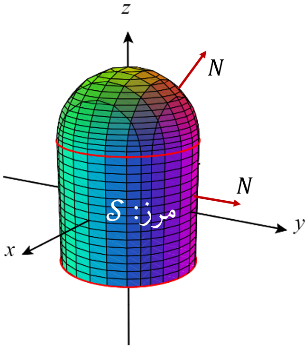
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{b} (b+2z) r^2 \, r dz dr d\theta = 2\pi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} \left(bz + z^2\right)\Bigg|_{z=0}^{z=b}$$

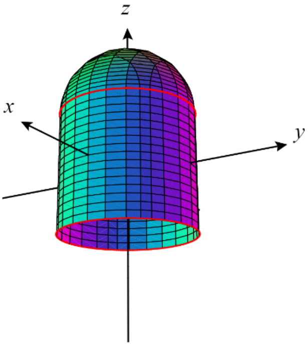
$$= \pi a^4 b^2$$

مثال

فرض کنید که S_1 سطح جانبی استوانه‌ی $x^2+y^2 \leq 4$ به‌ازای $-3 \leq z \leq 3$، و S_2 کره‌ی $x^2+y^2+(z-3)^2=4$ است. همچنین، فرض کنید که $S = S_1 \cup S_2$، و N بردار قائم یکه‌ی رو به خارج S است. مقدار انتگرال $\iint_S (0, 2yz, -z^2) \cdot N \, dS$ را بیابید.

پاسخ:

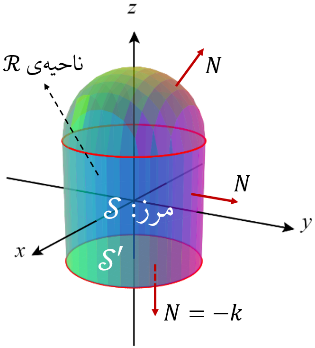




ادامه‌ی مثال

با اضافه کردن دیسک $\mathcal{S}'$ به $\mathcal{S}$، به صورت $x^2+y^2 \leq 4$ به‌ازای $z=-3$، یک سطح بسته خواهیم داشت. حال، فرض کنیم که $\mathcal{R}$ ناحیه‌ی محصورشده به $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ است. با فرض $F=(0, 2yz, -z^2)$، بنابر قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} F \cdot N \, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$$



ادامه‌ی مثال

توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = 0 + 2z - 2z = 0$$

بنابراین، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} F \cdot N\, dS = \iint_{\mathcal{S}} F \cdot N\, dS + \iint_{\mathcal{S}'} F \cdot N\, dS = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} F \cdot N\, dS = -\iint_{\mathcal{S}'} F \cdot N\, dS = -\iint_{\mathcal{S}'} (0, 2yz, -z^2) \cdot (-k)\, dS$$
$$= -\iint_{\mathcal{S}'} z^2\, dS \overset{z=-3}{=} -9 \iint_{\mathcal{S}'} dS = -9 \times (\text{مساحت } \mathcal{S}') = -36\pi$$

قضیه‌ی استوکس

فرض کنید که $\mathcal{S}$ یک رویه‌ی قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌دار با بردار قائم یکه‌ی N است. هم‌چنین، فرض کنید که $\mathcal{C}$ مرز $\mathcal{S}$، متشکل از یک یا چند خم قطعه‌به‌قطعه هموار بسته با جهت القایی از $\mathcal{S}$ است. اگر $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری هموار باشد، طوری که U باز است و $\mathcal{S} \subseteq U$، آن‌گاه داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma$$

به عبارتی دیگر، داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\mathcal{S}} (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot \underbrace{N \, dS}_{d\sigma}$$

نکاتی درباره‌ی قضیه‌ی استوکس

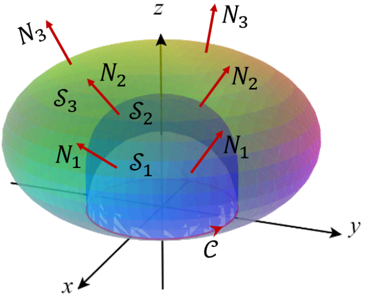
※ بنابر قضیه‌ی استوکس، کاری که میدان برداری F در امتداد $\mathcal{C}$ انجام می‌دهد، برابر است با شار $\operatorname{curl}(F)$ عبوری از S، که در آن $\mathcal{C}$ مرز S با جهت القایی از S است، و F روی یک مجموعه‌ی باز شامل S تعریف شده است.

※ قضیه‌ی گرین را می‌توان از قضیه‌ی استوکس، نتیجه گرفت؛ زیرا اگر $F=(P,Q,0)$ یک میدان برداری تعریف شده روی ناحیه‌ی بسته‌ی $D\subseteq\mathbb{R}^2$ باشد، و $\mathcal{C}$ مرز قطعه‌به‌قطعه هموار D با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D باشد، آن‌گاه جهت $\mathcal{C}$ نسبت به D القایی است، و لذا با توجه به اینکه $N=k$، بنابر قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} F\cdot dr &= \oint_{\mathcal{C}} P\,dx+Q\,dy=\iint_D \operatorname{curl}(F)\cdot N\,dS\\ &=\iint_D\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot N\,dS=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA_{x,y}\end{aligned}$$

※ اگر چند رویه با مرز مشترک داشته باشیم که جهت یکسانی روی مرز القا می‌کنند، آن‌گاه در قضیه‌ی استوکس، هر یک از این رویه‌ها را می‌توان استفاده کرد. به طور مثال، در شکل زیر هر سه رویه دارای مرز مشترک $\mathcal{C}$ و با جهت القایی یکسانی روی $\mathcal{C}$ هستند. پس:

$$\oint_{\mathcal{C}} F\cdot T\,ds=\iint_{\mathcal{S}_1}\operatorname{curl}(F)\cdot N_1\,dS=\iint_{\mathcal{S}_2}\operatorname{curl}(F)\cdot N_2\,dS$$
$$=\iint_{\mathcal{S}_3}\operatorname{curl}(F)\cdot N_3\,dS$$



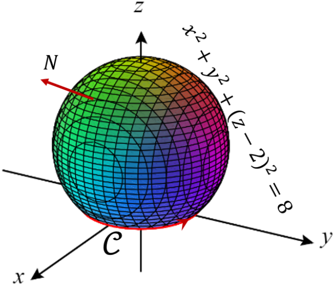
مثال

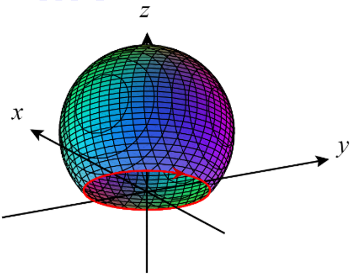
فرض کنید که S بخشی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ است که بالای صفحه‌ی xy قرار می‌گیرد. همچنین، فرض کنید که N بردار قائم یکه‌ی رو به خارج S است. میدان برداری F به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(y^2\cos(xz), x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$$

مقدار انتگرال $\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot N\,dS$ را بیابید.

پاسخ:



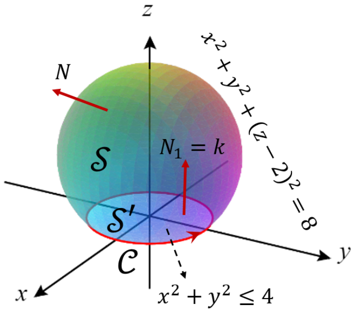


ادامه‌ی مثال

فضای محصور به خم $\mathcal{C}$ در صفحه‌ی xy را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا با قراردادن $z=0$ در معادله‌ی کره‌ی داده‌شده، معادله‌ی $\mathcal{C}$ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2+(z-2)^2=8, \quad z=0 \implies x^2+y^2=4$$

بنابراین، $\mathcal{S}'$، فضای محصور به $\mathcal{C}$ در صفحه‌ی xy، مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ است که $x^2+y^2\leq 4$.



ادامه‌ی مثال

بردار قائم یکه‌ی $N_1 = k$ بر S' را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $\mathcal{C}$ مرز مشترک دو رویه‌ی S و S' است، و جهت‌های القایی این دو رویه بر $\mathcal{C}$ هر دو یکسان و مثلثاتی است.

پس، بنابر قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$I = \iint_S \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds = \iint_{S'} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1 \, dS$$

با توجه به اینکه $N_1 = k$، کافی است که مؤلفه‌ی سوم $\operatorname{curl}(F)$ را بیابیم. این مؤلفه برابر است با:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 e^{yz} - 2y \cos(xz)$$

پس، داریم:

$$I = \iint_{S'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dS = \iint_{S'} \left(3x^2 e^{yz} - 2y \cos(xz) \right) \, dS$$

ادامه‌ی مثال

حال، با توجه به اینکه روی S' داریم $z=0$، می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{S'} \left(3x^2-2y\right)\, dA_{x,y} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (3(r\cos(\theta))^2 - 2(r\sin(\theta))\, r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^4}{4}\cos^2(\theta) - \frac{2r^3}{3}\sin(\theta)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(12\cos^2(\theta) - \frac{16}{3}\sin(\theta)\right)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6(\cos(2\theta)+1) - \frac{16}{3}\sin(\theta)\right)\, d\theta \\
&= \left(3\sin(2\theta) + 6\theta + \frac{16}{3}\cos(\theta)\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

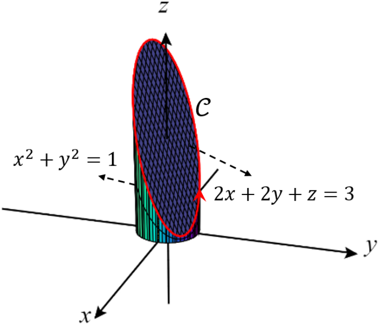
مثال

فرض کنید که C خم فصل مشترک استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحه‌ی $2x+2y+z=3$ است. همچنین، فرض کنید که جهت C طوری است که تصویر آن روی صفحه‌ی xy در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. میدان برداری F به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(-y^3,x^3,-z^3)$$

مقدار انتگرال $\oint_C F\cdot dr$ را بیابید.

پاسخ:

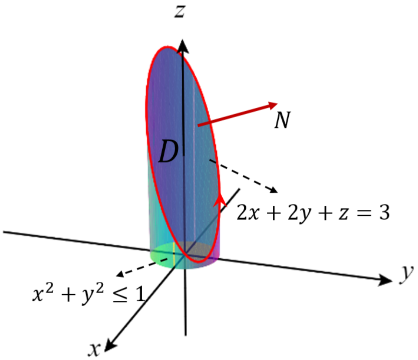


ادامه‌ی مثال

بنابر قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$I=\oint_C F\cdot dr=\iint_D \mathrm{curl}(F)\cdot d\sigma, \qquad d\sigma=\pm N\, dS$$

که در آن N بردار قائم یکه‌ی D مطابق شکل است.



ادامه‌ی مثال

قرار می‌دهیم $G(x,y,z) = 2x + 2y + z - 3$. در این صورت، D بخشی از صفحه‌ی $G(x,y,z) = 0$ است. بنابراین، $N = \nabla G$، و داریم:

$$d\sigma = \pm\,(\nabla G)\; dA_{x,y} = \pm(2,2,1)\, dA_{x,y}$$

با توجه به شکل، $N = \nabla G = (2,2,1)$ قابل قبول است. از طرفی، داریم:

$$\operatorname{curl}(F) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{bmatrix} = \left(0, 0, 3(x^2 + y^2)\right)$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(0,0,3(x^2+y^2)\right)\cdot(2,2,1)\,dA_{x,y} \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} 3(x^2+y^2)\,dA_{x,y} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\,r\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{3r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

مثال

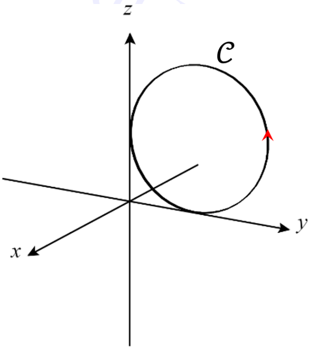
فرض کنید که خم C دارای نمایش پارامتری زیر است:

$$r(t) = (0, 2+2\cos(t), 2+2\sin(t)), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

انتگرال زیر را بیابید:

$$\oint_C e^{5z}\, dx + \cos(y^3)\, dy + 3y\, dz$$

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

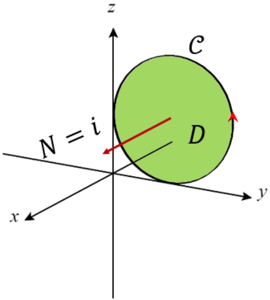
قرار می‌دهیم:

$$F(x,y,z) = (P,Q,R) = \left(e^{5z}, \cos(y^3), 3y\right)$$

فرض کنید که D ناحیه‌ی محصورشده به‌وسیله‌ی $\mathcal{C}$ در صفحه‌ی yz است. بنابر قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma$$

که در آن $\mathcal{C}$ دارای جهت القایی از D است. بنابراین، مطابق شکل، داریم $N = i$.



ادامه‌ی مثال

از این‌رو، داریم:

$$d\sigma = N\, dA_{y,z} = i\, dA_{y,z}$$

که با فرض اینکه L مؤلفه‌ی اول $\operatorname{curl}(F)$ است، نتیجه می‌دهد:

$$I = \iint_D L\, dA_{y,z}$$

در حالی‌که:

$$L = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 3 - 0 = 3$$

پس، در نهایت داریم:

$$I = 3 \iint_D dA_{y,z} = 3 \times (\text{مساحت } D) = 12\pi$$

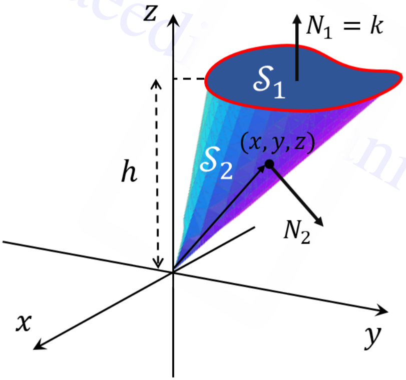
زیرا واضح است که D دیسک $(y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$ در صفحه‌ی yz است.

مثال‌های تکمیلی

مثال

با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و میدان برداری $F(x,y,z) = (x,y,z)$، حجم یک مخروط با ارتفاع h و مساحت قاعده‌ی A را بیابید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

فرض کنید D فضای داخل مخروط است. مطابق شکل و قضیه‌ی دیورژانس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} F\cdot d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z}$$

توجه کنید که $\operatorname{div}(F) = 1+1+1 = 3$. بنابراین، داریم:

$$\iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z} = 3 \times (\text{حجم مخروط})$$

از طرفی، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} F\cdot d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} F\cdot N_1\, dS + \iint_{\mathcal{S}_2} F\cdot N_2\, dS$$

توجه کنید که $F\cdot N_2 = 0$؛ زیرا N_2 بر $\mathcal{S}_2$ عمود است، و لذا به‌ازای هر $(x,y,z)\in\mathcal{S}_2$، داریم $(x,y,z)\cdot N_2 = 0$، در حالی‌که $F=(x,y,z)$. پس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} F\cdot d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} F\cdot \underbrace{N_1}_{k}\, dS = \iint_{\mathcal{S}_1} z\, dS = h\iint_{\mathcal{S}_1} dS = hA$$

در نهایت، نشان دادیم که:

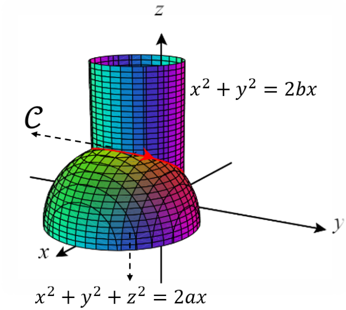
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}hA$$

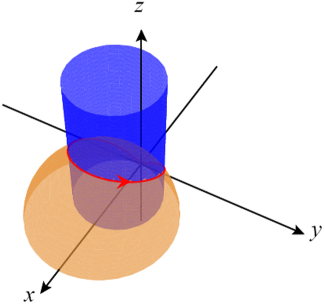
مثال

فرض کنید که $0<b<a$ و $\mathcal{C}$ خم فصل مشترک نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2ax$ با $z\geq 0$، و استوانه‌ی $x^2+y^2=2bx$ است. همچنین، فرض کنید که جهت $\mathcal{C}$ به گونه‌ای است که تصویر این خم بر صفحه‌ی xy دارای جهت پادساعتگرد است. نشان دهید که:

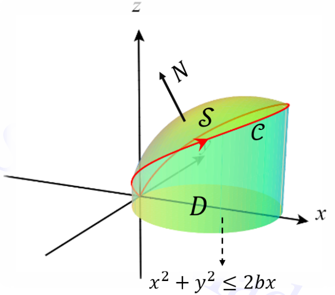
$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz=2\pi ab^2$$

پاسخ:





ادامه‌ی مثال



فرض کنید S بخشی از کره است که $\mathcal{C}$ مرز آن است. اگر N بردار یکه‌ی قائم رو به خارج کره باشد، آن‌گاه جهت $\mathcal{C}$ القایی از S خواهد بود. قرار دهید:

$$F = (P, Q, R) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$$

در این صورت، بنابر قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{S} \mathrm{curl}(F) \cdot d\sigma$$

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$\operatorname{curl}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$$

حال، به منظور به‌دست آوردن $d\sigma$ قرار می‌دهیم:

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax$$

در این صورت، نقاط رویه‌ی S در معادله‌ی $G(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} \, dA_{x,y}$$

در حالی‌که روی S داریم:

$$\nabla G = (2x - 2a, 2y, 2z), \qquad G_z = 2z > 0 \quad (\text{مگر در مرز } S)$$

از آنجا که N رو به خارج کره است، علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$d\sigma = \frac{(2x - 2a, 2y, 2z)}{2z} \, dA_{x,y} = \frac{(x - a, y, z)}{z} \, dA_{x,y}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$I = \iint_D (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)\cdot\frac{(x-a,y,z)}{z}\, dA_{x,y}$$
$$= \iint_D \left(2a - 2a\frac{y}{z}\right) dA_{x,y} = \iint_D \left(2a - 2a\frac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}\right) dA_{x,y}$$

حال، از آنجا که D نسبت به محور x متقارن است و تابع $\frac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}$ نسبت به مؤلفه‌ی y فرد است، داریم:

$$\iint_D -2a\frac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}\, dA_{x,y} = 0$$

و از این‌رو، داریم:

$$I = 2a\iint_D dA_{x,y} = 2a\times(\text{مساحت } D) = 2a(\pi b^2) = 2\pi ab^2$$

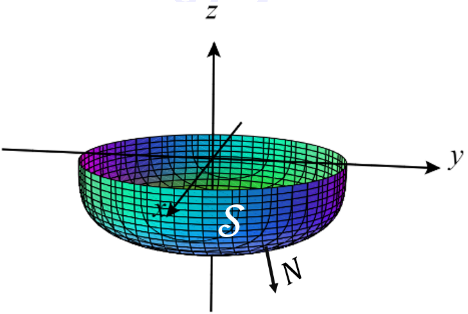
مثال

فرض کنید که S رویه‌ی $x^2+y^2+3z^4=1$ با $z\leq 0$ است، و N بردار قائم یکه‌ی رو به خارج ناحیه‌ی محصور به‌وسیله‌ی S است. اگر

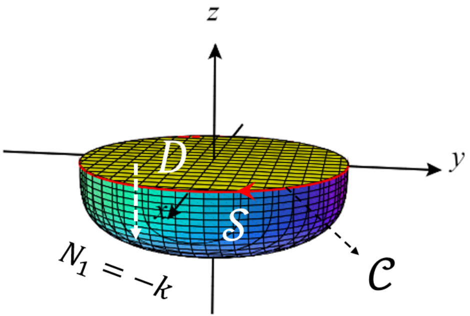
$$F = yi - xj + zx^3y^2k$$

آن‌گاه $\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot N\, dS$ را بیابید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال



فرض کنید که $\mathcal{C}$ مرز S است. در این صورت، جهت القایی S روی $\mathcal{C}$ در جهت عقربه‌های ساعت است. توجه کنید که $\mathcal{C}$ دایره‌ی $x^2+y^2=1$ در صفحه‌ی xy است. فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به $\mathcal{C}$ در صفحه‌ی xy است. اگر $N_1=-k$ به عنوان بردار قائم یکه‌ی D انتخاب شود، آنگاه جهت القایی از D بر $\mathcal{C}$ همان جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

ادامه‌ی مثال

بنابر قضیه‌ی استوکس داریم:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1 \, dS$$
$$= \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot (0,0,-1) \, dS = \iint_{D} -L \, dS$$

که در آن L مؤلفه‌ی سوم $\operatorname{curl}(F)$ است. داریم:

$$L = Q_x - P_y = -1 - 1 = -2$$

پس، داریم:

$$I = 2 \iint_{D} dS = 2 \times (\text{مساحت } D) = 2\pi$$

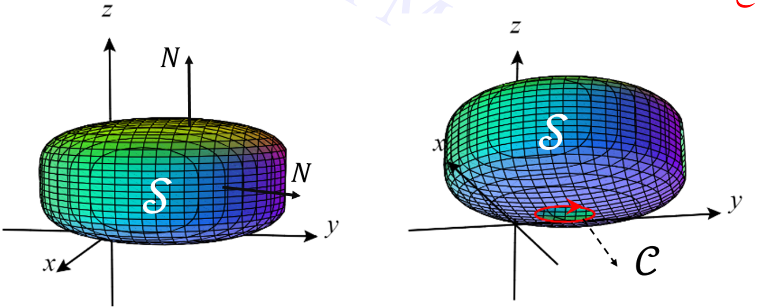
مثال

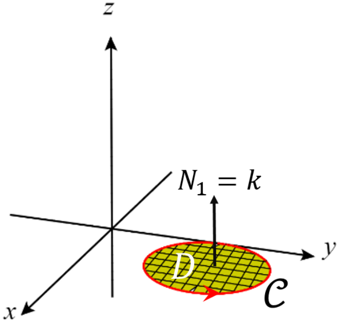
فرض کنید که S رویه‌ی $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^4=17$ با $z\geq 0$ است، و N بردار قائم یکه‌ی رو به خارج ناحیه‌ی محصور به‌وسیله‌ی S است. اگر

$$F=yi+3xj+\sin(z^2)e^{\sin(x^2+y^2)}k$$

آن‌گاه $\iint_S \mathrm{curl}(F)\cdot N\,dS$ را بیابید.

پاسخ:





فرض کنید که $\mathcal{C}$ مرز S است. در این صورت، جهت القایی S روی $\mathcal{C}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. توجه کنید که $\mathcal{C}$ دایره‌ی $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ در صفحه‌ی xy است. فرض کنید که D ناحیه‌ی محصور به $\mathcal{C}$ در صفحه‌ی xy است. اگر $N_1=k$ به عنوان بردار قائم یکه‌ی D انتخاب شود، آن‌گاه جهت القایی از D بر $\mathcal{C}$ همان جهت خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود.

ادامه‌ی مثال

بنابر قضیه‌ی استوکس داریم:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1 \, dS$$
$$= \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot (0,0,1) \, dS = \iint_{D} L \, dS$$

که در آن L مؤلفه‌ی سوم $\operatorname{curl}(F)$ است. داریم:

$$L = Q_x - P_y = 3 - 1 = 2$$

پس،داریم:

$$I = 2 \iint_{D} dS = 2 \times (\text{مساحت } D) = 2\pi$$

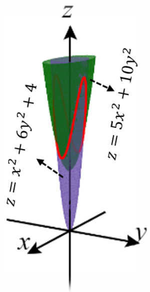
مثال

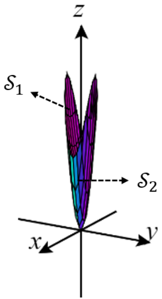
فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ از پایین و بالا به‌ترتیب محصور به رویه‌های $z = 5x^2 + 10y^2$ و $z = x^2 + 6y^2 + 4$ است. همچنین فرض کنید که رویه‌ی S مرز D است، و N میدان برداری قائم یکه‌ی S و رو به خارج D است. اگر $F(x, y, z) = (x, y, z - x)$، آن‌گاه:

۱. $\oiint_S F \cdot N \, dS$ را از راه مستقیم بیابید.

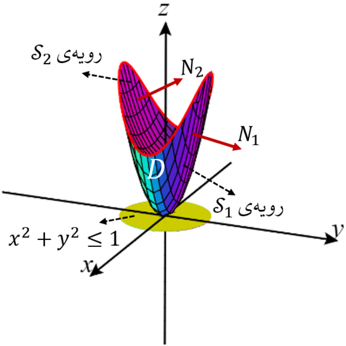
۲. $\oiint_S F \cdot N \, dS$ را با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس بیابید.

پاسخ:





ادامه‌ی مثال



ناحیه‌ی D با تغییر مقیاس واحدهای محورهای x و y

داریم $S = S_1 \cup S_2$، که در آن S_1 و S_2 مطابق شکل و به‌ترتیب بخشی از رویه‌های $z = 5x^2 + 10y^2$ و $z = x^2 + 6y^2 + 4$ هستند.

ادامه‌ی مثال

پاسخ (۱): داریم:

$$I=\oiint_{S} F\cdot N\,dS=\underbrace{\iint_{S_1} F\cdot N_1\,dS}_{I_1}+\underbrace{\iint_{S_2} F\cdot N_2\,dS}_{I_2}$$

در حالی‌که S_1 و S_2 به‌ترتیب نمودارهای توابع $f : D_1 \to \mathbb{R}$ و $g : D_2 \to \mathbb{R}$ با $f(x,y)=5x^2+10y^2$ و $g(x,y)=x^2+6y^2+4$ هستند، که در آن D_1 و D_2 به‌ترتیب تصاویر S_1 و S_2 بر صفحه‌ی xy هستند. توجه می‌کنیم که $D_1=D_2$ و برابر با ناحیه‌ی محصور شده به‌وسیله‌ی تصویر خم فصل مشترک دو رویه‌ی یادشده بر صفحه‌ی xy هستند. بنابراین، تصویر خم فصل مشترک دو رویه بر صفحه‌ی xy را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$z=5x^2+10y^2,\quad z=x^2+6y^2+4 \implies x^2+y^2=1$$

ادامه‌ی مثال

پس تصویر خم فصل مشترک دو رویه، $x^2+y^2=1$، و از این‌رو $D_1=D_2$ دیسک یکه‌ی بسته‌ی $x^2+y^2\leq 1$ است. پس، داریم:

$$N_1\,dS=\pm(-f_1,-f_2,1)\,dA_{x,y}=\pm(-10x,-20y,1)\,dA_{x,y}$$

$$N_2\,dS=\pm(-g_1,-g_2,1)\,dA_{x,y}=\pm(-2x,-12y,1)\,dA_{x,y}$$

حال، با توجه به اینکه N_1 و N_2 به‌ترتیب رو به پایین و رو به بالا هستند، داریم:

$$N_1\,dS=-(-10x,-20y,1)\,dA_{x,y},\qquad N_2\,dS=(-2x,-12y,1)\,dA_{x,y}$$

از آنجا که روی $\mathcal{S}_1$، داریم $z=5x^2+10y^2$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_{D_1}(x,y,z-x)\cdot(10x,20y,-1)\,dA_{x,y}\\&=\iint_{D_1}\left(10x^2+20y^2+x-z\right)\,dA_{x,y}\\&=\iint_{D_1}\left(10x^2+20y^2+x-\left(5x^2+10y^2\right)\right)\,dA_{x,y}\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

پس، داریم:

$$I_1 = \iint_{D_1} \left(5x^2 + 10y^2 + x\right)\, dA_{x,y}$$

همچنین، از آنجا که روی S_2، داریم $z = x^2 + 6y^2 + 4$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_1} (x, y, z - x) \cdot (-2x, -12y, 1)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-2x^2 - 12y^2 + z - x\right)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-2x^2 - 12y^2 + \left(x^2 + 6y^2 + 4\right) - x\right)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-x^2 - 6y^2 + 4 - x\right)\, dA_{x,y} \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \iint_{D_1} \left(5x^2 + 10y^2 + x\right)\, dA_{x,y} + \iint_{D_1} \left(-x^2 - 6y^2 + 4 - x\right)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_{D_1} \left(4x^2 + 4y^2 + 4\right)\, dA_{x,y} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(4r^2 + 4\right)\, r dr d\theta \\
&= 2\pi \left(r^4 + 2r^2\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = 6\pi
\end{aligned}
$$

پاسخ (۲): بنابر قضیه‌ی دیورژانس، داریم:

$$
I = \oiint_S F \cdot N\, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z}
$$

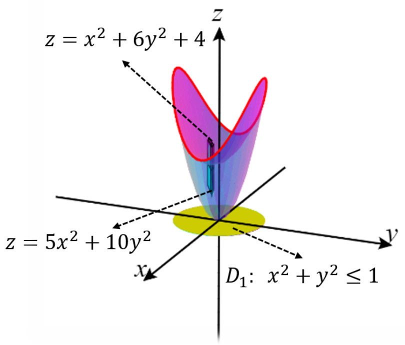
ادامه‌ی مثال

توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = 1 + 1 + 1 = 3$$

پس، با توجه به شکل، داریم:

$$I = 3\iiint_D dV_{x,y,z} = 3\iint_{D_1}\int_{5x^2+10y^2}^{x^2+6y^2+4} dz\,dA_{x,y}$$



ادامه‌ی مثال

لذا، داریم:

$$I = 3 \iint_{D_1} \left(-4(x^2+y^2)+4\right)\, dA_{x,y}$$

از این‌رو، با استفاده تغییر متغیر قطبی، داریم:

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-4r^2+4\right)\, r dr d\theta = 6\pi \left(2r^2 - r^4\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = 6\pi$$

مثال

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ی محصور به رویه‌ی بسته‌ی S است و $S \not\ni (0,0,0)$. اگر N قائم یکه‌ی S و رو به خارج D باشد، و $F : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ با

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

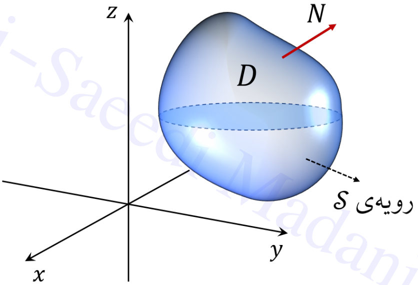
آن‌گاه $\oiint_S F \cdot N \, dS$ را بیابید.

پاسخ: از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F) &= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \\
&+ \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \\
&+ \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = 0
\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

حالت اول: $(0,0,0) \notin D$



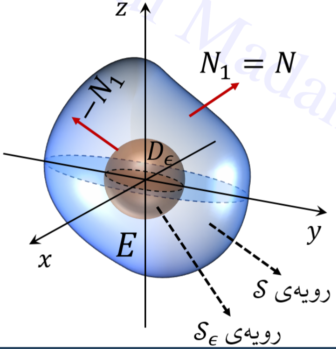
در این صورت، از آنجا که F روی D هموار است، بنابر قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\oiint_S F \cdot N \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z} = 0$$

ادامه‌ی مثال

حالت دوم: $(0,0,0) \in D$

تابع F در مبدأ تعریف نشده است، و از این‌رو روی D هموار نیست. پس، نمی‌توان مستقیماً از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد. توجه کنید که $(0,0,0)$ یک نقطه‌ی درونی D است، و از این‌رو، $\epsilon > 0$ وجود دارد که گوی بسته با شعاع ϵ و مرکز مبدأ نیز کاملاً در D قرار می‌گیرد.



ادامه‌ی مثال

مطابق شکل، فرض کنید که E ناحیه‌ی محصور به رویه‌های $\mathcal{S}_\epsilon$ و $\mathcal{S}$ است، و N_1 میدان برداری قائم یکه‌ی رو به خارج E است. واضح است که $D = E \cup D_\epsilon$. حال، از آنجا که E شامل مبدأ نیست، F روی E هموار است، و لذا بنابر قضیه‌ی دیورژانس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot N_1 \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z} = 0$$

بنابراین، داریم:

$$I = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot N \, dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot (-N_1) \, dS$$

توجه کنید که $-N_1$ قائم یکه‌ی رو به خارج D_ϵ است، و $\mathcal{S}_\epsilon$ مجموعه‌ی نقاطی است که در معادله‌ی $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \epsilon^2 = 0$ صدق می‌کنند. بنابراین، داریم:

$$-N_1 = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm \frac{1}{\epsilon}(x, y, z)$$

ادامه‌ی مثال

از آنجا که $-N_1$ رو به خارج کره است، لازم است که:

$$-N_1 = \frac{1}{\epsilon}(x, y, z)$$

حال، توجه می‌کنیم که روی $\mathcal{S}_\epsilon$ داریم $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$، و از این‌رو، داریم:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\epsilon^3}, \frac{y}{\epsilon^3}, \frac{z}{\epsilon^3}\right)$$

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot (-N_1)\, dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \left(\frac{x}{\epsilon^3}, \frac{y}{\epsilon^3}, \frac{z}{\epsilon^3}\right) \cdot \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon}\right) dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^4} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\epsilon^2} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \times (\text{مساحت جانبی } \mathcal{S}_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}(4\pi\epsilon^2) = 4\pi \end{aligned}$$