ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

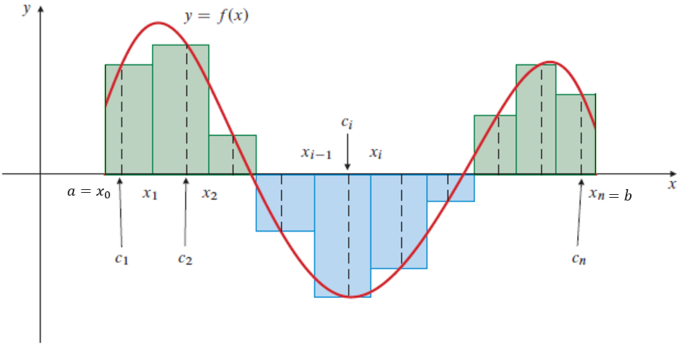
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

انتگرال دوگانه

یادآوری:

فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کران‌دار و $P=\{a=x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n=b\}$ یک افراز از $[a,b]$ است. قرار می‌دهیم:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad i=1,\ldots,n,\qquad \|P\| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$



در این صورت، f انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر انتخاب $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$، حد زیر موجود و متناهی باشد:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

اگر f انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار حد بالا برابر با انتگرال f تعریف و با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش داده می‌شود.

انتگرال دوگانه

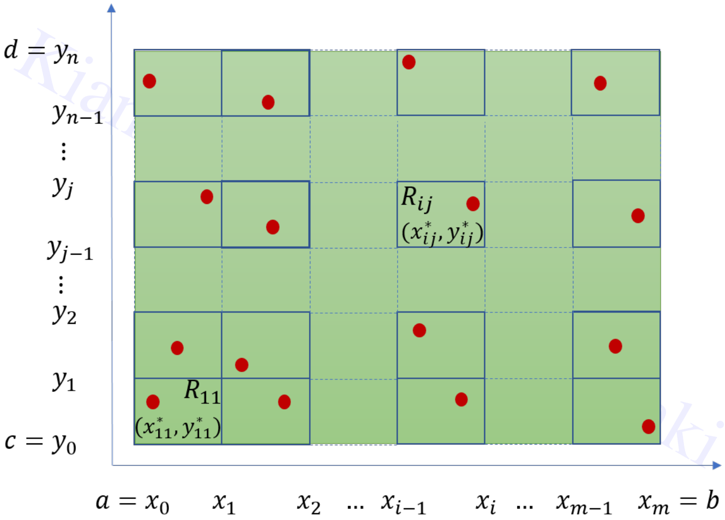
فرض می‌کنیم که $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مستطیل بسته و $f : R \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار است. افرازهای زیر را برای بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

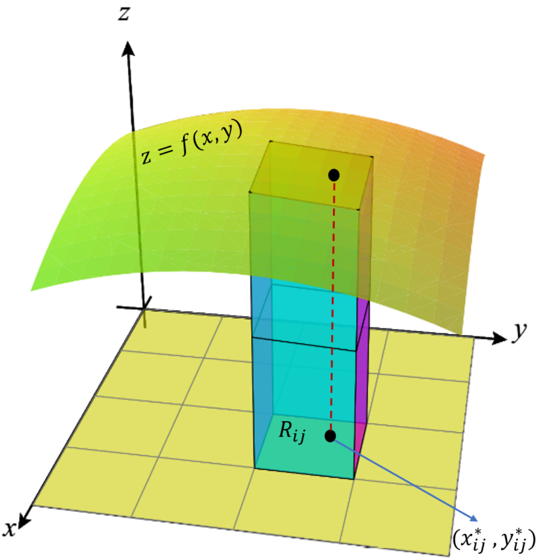
$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b\}$$
$$P_2 = \{c = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = d\}$$

در این صورت، افراز P از مستطیل R را می‌توان متشکل از mn مستطیل زیر در نظر گرفت:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

هم‌چنین، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.


$d = y_n$
y_{n-1}
$\vdots$
y_j
y_{j-1}
$\vdots$
y_2
y_1
$c = y_0$
R_{ij}
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
R_{11}
(x_{11}^*, y_{11}^*)
$a = x_0$ x_1 x_2 … x_{i-1} x_i … x_{m-1} $x_m = b$


z
$z = f(x,y)$
y
x
R_{ij}
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)

قرار می‌دهیم:

$$R(P,f)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)A_{ij}$$

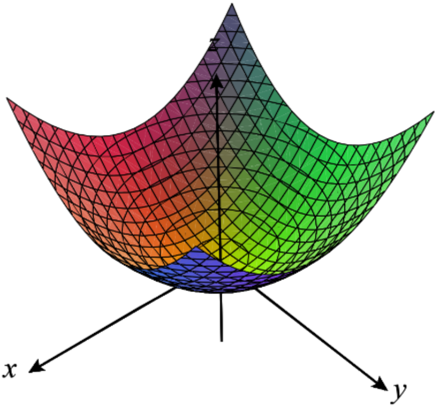
که در آن به‌ازای هر i و j، A_{ij} مساحت R_{ij} است. حال، فرض می‌کنیم که $\|P\|$ ماکسیمم قطرهای همه‌ی مستطیل‌های R_{ij} است؛ یعنی:

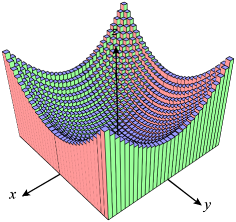
$$\|P\|=\max\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2} : 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n\right\}$$

چنان‌چه $\lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم:

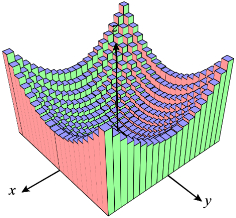
$$\iint_R f\ dA := \lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$$

در شکل زیر، نمودار $f(x,y)=x^2+y^2$ به‌ازای $-1\le x,y\le 1$ ترسیم شده است.
در اسلایدهای بعدی، $R(P,f)$ به عنوان مجموع حجم‌های مکعب‌های نشان داده شده،
به‌ازای چند افراز مختلف P برای مستطیل $[-1,1]\times[-1,1]$ نمایش داده شده است.

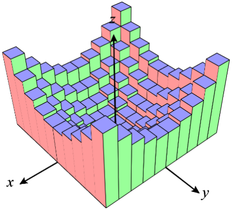




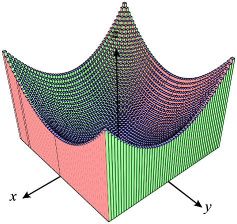
$m = n = 30$



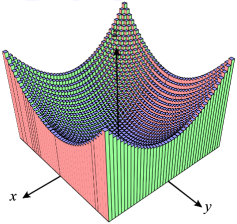
$m = n = 20$



$m = n = 10$

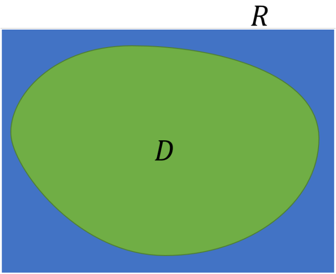


$m = n = 50$



$m = n = 40$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)



در حالت کلی، فرض کنید که D یک ناحیه‌ی بسته و کران‌دار است. اگر $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار باشد، آن‌گاه مستطیل $R \subseteq \mathbb{R}^2$ وجود دارد که D را در بر می‌گیرد.

حال، تعریف می‌کنیم:

$$\widehat{f} : R \to \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$

در این صورت، انتگرال f روی D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_D f \, dA := \iint_R \widehat{f} \, dA$$

قضیه

فرض کنید که D یک زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ است، $f, g : D \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر هستند و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. در این صورت:

۱. اگر مساحت D صفر باشد، آن‌گاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = 0$$

۲. اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داشته باشیم $f(x, y) = 1$، آن‌گاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \text{مساحت } D$$

۳. اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داشته باشیم $f(x, y) \geq 0$، آن‌گاه داریم:

$$V = \iint_D f\, dA$$

که در آن V حجم ناحیه‌ای از فضا است که به طور قائم بالای D و زیر نمودار $f(x, y)$ قرار می‌گیرد.

ادامه‌ی قضیه

۴. اگر به‌ازای هر $(x,y) \in D$، داشته باشیم $f(x,y) \leq 0$، آن‌گاه داریم:

$$-V = \iint_D f\,dA$$

که در آن V حجم ناحیه‌ای از فضا است که به طور قائم زیر D و بالای نمودار $f(x,y)$ قرار می‌گیرد.

۵. تابع $c_1 f + c_2 g$ انتگرال‌پذیر است، و داریم:

$$\iint_D (c_1 f + c_2 g)\,dA = c_1 \iint_D f\,dA + c_2 \iint_D g\,dA$$

۶. اگر به‌ازای هر $(x,y) \in D$ داشته باشیم $f(x,y) \leq g(x,y)$، آن‌گاه داریم:

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA$$

ادامه‌ی قضیه

۷. داریم:

$$\left|\iint_D f\,dA\right| \leq \iint_D |f|\,dA$$

۸. اگر $D_1, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی در $\mathbb{R}^2$ باشند که حداکثر در مرزهایشان اشتراک دارند، آن‌گاه داریم:

$$\iint_{\bigcup_{i=1}^n D_i} f\,dA = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f\,dA$$

۹. فرض کنید که D نسبت به مبدأ متقارن است، و به‌ازای هر $(x,y) \in D$ داریم $f(-x,-y) = -f(x,y)$. در این صورت، داریم:

$$\iint_D f\,dA = 0$$

ادامه‌ی قضیه

۱۰. فرض کنید که D نسبت به محور x متقارن است، و به‌ازای هر $(x,y) \in D$ داریم $f(x,-y) = -f(x,y)$. در این صورت، داریم:

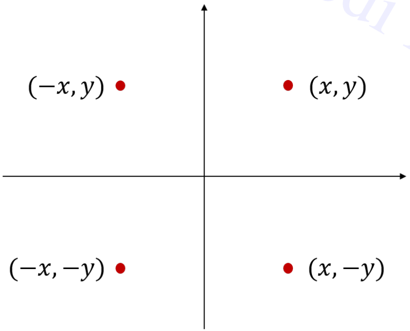
$$\iint_D f\, dA = 0$$

۱۱. فرض کنید که D نسبت به محور y متقارن است، و به‌ازای هر نقطه‌ی $(x,y) \in D$ داریم:

$$f(-x,y) = -f(x,y)$$

در این صورت، داریم:

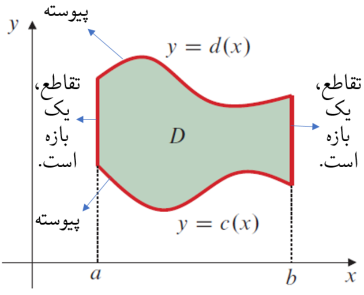
$$\iint_D f\, dA = 0$$



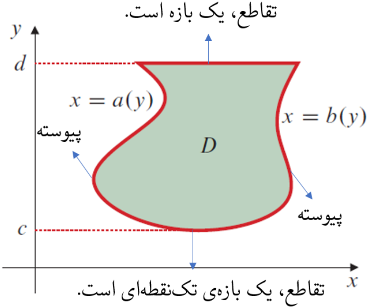
قضیه

فرض کنید که D ناحیه‌ای بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ است. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است.

نواحی x–ساده و y–ساده در صفحه



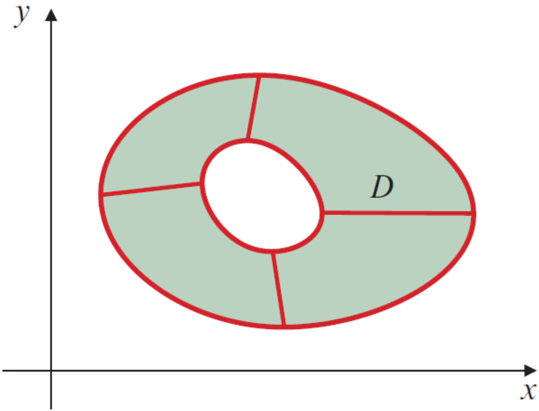
ناحیه‌ی y–ساده



ناحیه‌ی x–ساده

نواحی منتظم در صفحه

ناحیه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را منتظم گوییم هرگاه اجتماعی از ناحیه‌هایی باشد که هر یک x–ساده و y–ساده هستند، و این ناحیه‌ها حداکثر در مرزهای‌شان اشتراک دارند.



قضیه‌ی فوبینی

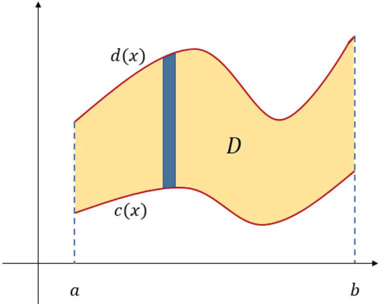
فرض کنید که D یک ناحیه‌ی بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ است و $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته است.

۱. اگر

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

که در آن $c, d : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند، آن‌گاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy dx$$



(توجه کنید که ناحیه‌ی D یک ناحیه‌ی y–ساده است.)

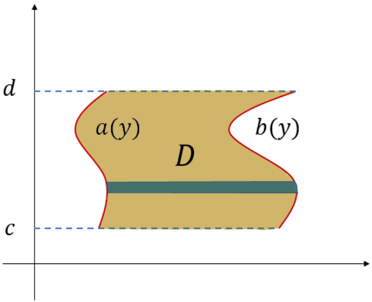
ادامه‌ی قضیه‌ی فوبینی

۲. اگر

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

که در آن $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند، آن‌گاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx dy$$

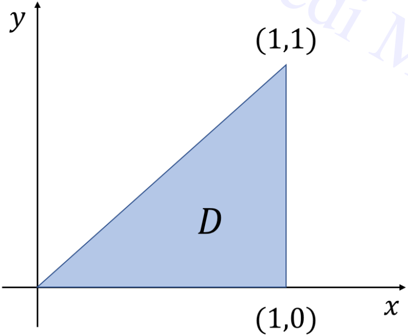


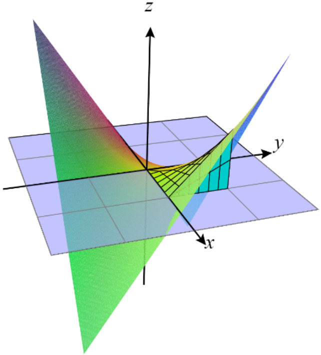
(توجه کنید که ناحیه‌ی D یک ناحیه‌ی x-ساده است.)

مثال

فرض کنید که D یک ناحیه‌ی مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ است. انتگرال $\iint_D xy\,dA$ را حساب کنید.

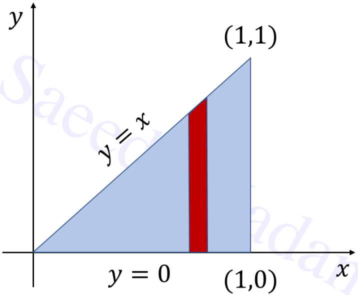
پاسخ:





ادامه‌ی مثال

راه اول:

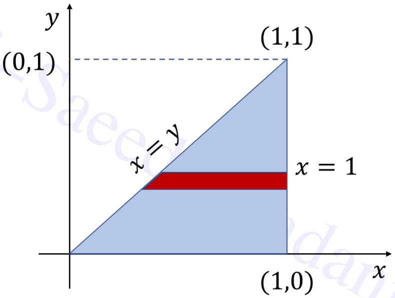


$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_0^x xy\,dydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left(\frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

ادامه‌ی مثال

راه دوم:



$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_y^1 xy\,dx dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2}\right)\Big|_{x=y}^{x=1} dy$$

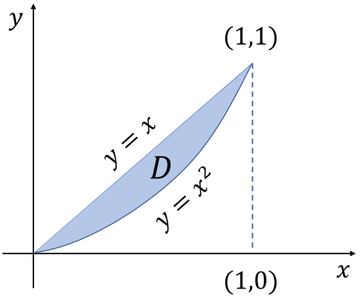
$$= \int_0^1 \frac{y-y^3}{2}\,dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{8}$$

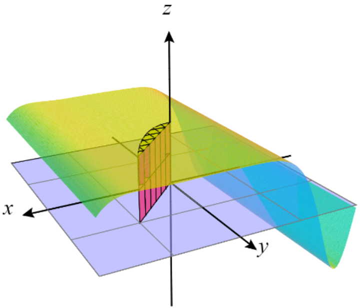
مثال

اگر D ناحیه‌ی بین $x=\sqrt{y}$ و $x=y$ باشد، آنگاه مطلوب است مقدار انتگرال زیر:

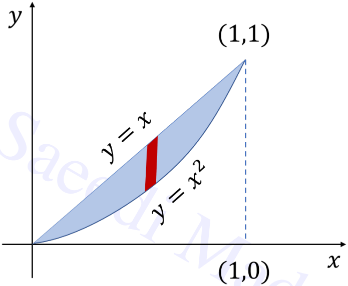
$$I=\iint_D \cos\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\,dA$$

پاسخ:





ادامه‌ی مثال



داریم:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \, dy dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \left(y\right)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2) \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \, dx$$

ادامه‌ی مثال

حال، تغییر متغیر $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ را اعمال می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} du = (x - x^2)\, dx \\ x = 0 \implies u = 0 \\ x = 1 \implies u = \frac{1}{6} \end{cases}$$

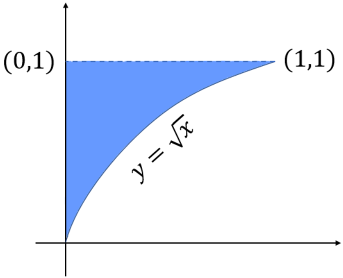
بنابراین، داریم:

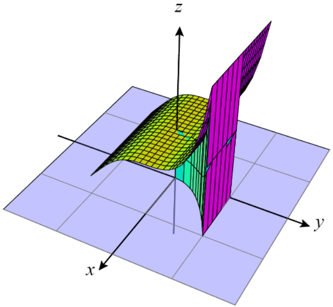
$$I = \int_0^{\frac{1}{6}} \cos(u)\, du = \left(\sin(u)\right)\Big|_{u=0}^{u=\frac{1}{6}} = \sin\left(\frac{1}{6}\right)$$

مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال زیر:

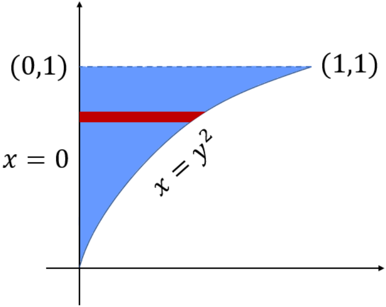
$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dydx$$

پاسخ: با توجه به اینکه e^{y^3} تابع اولیه‌ی متعارفی ندارد، انتگرال داخلی به راحتی قابل محاسبه نیست. از این‌رو، با مشخص کردن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری در صفحه، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.





ادامه‌ی مثال



بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx dy = \int_0^1 e^{y^3} \Big(x \Big)\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy$$

$$= \left(\frac{e^{y^3}}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{3}$$

انتگرال‌های ناسره (مجازی)

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع است. اگر D ناحیه‌ای بی‌کران باشد، یا f تابعی بی‌کران باشد، آن‌گاه $\iint_D f\, dA$ را یک انتگرال ناسره یا مجازی می‌گوییم. در این صورت، اگر مقدار این انتگرال، عددی حقیقی باشد، آن‌گاه انتگرال ناسره را همگرا، و در غیر این صورت، واگرا گوییم.

※ توجه کنید که اگر به‌ازای هر $D \ni (x, y)$ داشته باشیم $f(x, y) \geq 0$، آن‌گاه $\iint_D f\, dA$ همگرا به عددی حقیقی و نامنفی است یا واگرا به $+\infty$.

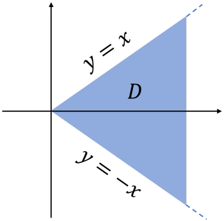
※ اگر به‌ازای هر $D \ni (x, y)$ داشته باشیم $f(x, y) \leq 0$، آن‌گاه $\iint_D f\, dA$ همگرا به عددی حقیقی و نامثبت است یا واگرا به $-\infty$.

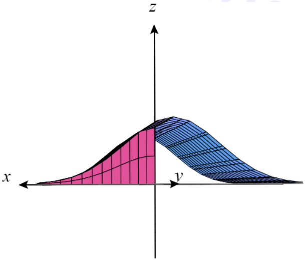
مثال

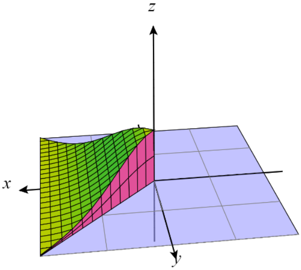
فرض کنید D ناحیه‌ای است که $x \ge 0$ و $-x \le y \le x$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_D e^{-x^2}\, dA$$

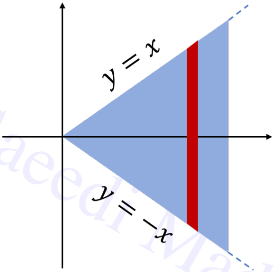
پاسخ:







ادامه‌ی مثال



توجه کنید که D ناحیه‌ای بی‌کران است. بنابراین، I یک انتگرال ناسره است. داریم:

$$I = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dydx = \int_0^\infty e^{-x^2} \Big(y \Big) \Big|_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\, dx$$

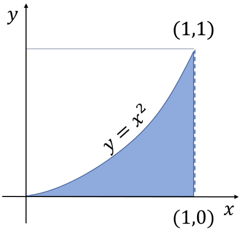
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2xe^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-x^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=R} = \lim_{R\to\infty} 1 - e^{-R^2} = 1$$

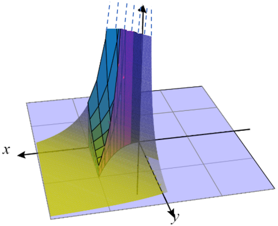
مثال

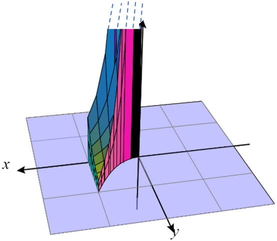
فرض کنید D ناحیه‌ای است که $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le x^2$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_D \frac{dA}{(x+y)^2}$$

پاسخ:







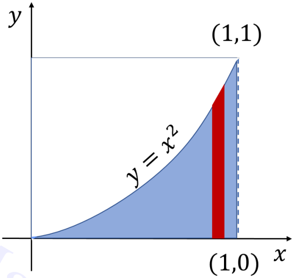
ادامه‌ی مثال

توجه کنید که D ناحیه‌ای کران‌دار است،

اما داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x+y)^2} = \infty$$

پس، I یک انتگرال ناسره است. داریم:



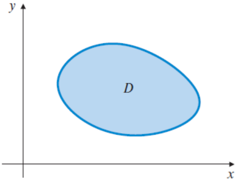
$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy dx$$

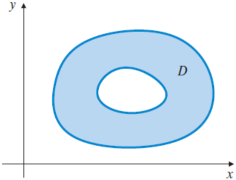
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{x(x+1)}\, dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{x}{x(x+1)}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx$$

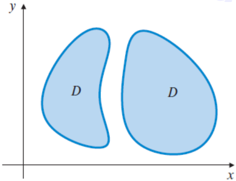
$$= \Big(\ln(x+1)\Big)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \ln(2)$$

نواحی هم‌بند و ناهم‌بند در صفحه





شکل ۱: مثال‌هایی از نواحی هم‌بند در صفحه



شکل ۲: مثالی از یک ناحیه‌ی ناهم‌بند در صفحه

قضیه‌ی مقدار میانگین انتگرال‌های دوگانه

فرض کنید که D یک ناحیه‌ی بسته، کران‌دار و هم‌بند در صفحه است. در این صورت، اگر $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $(x_0, y_0) \in D$ وجود دارد که:

$$\iint_D f\,dA = \text{مساحت } D \times f(x_0, y_0)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

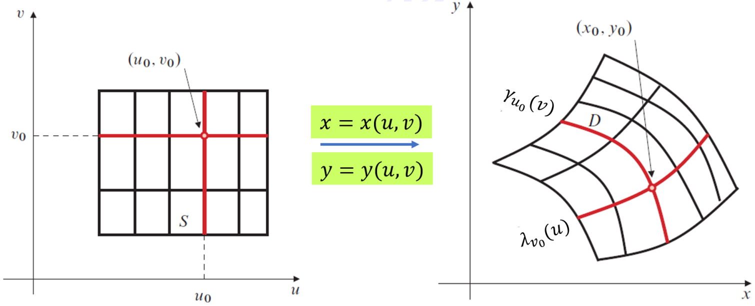
تبدیل‌های یک‌به‌یک در صفحه

فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^2$. یک تبدیل یک‌به‌یک بین S و D، تابعی دوسویی مثل $\Phi : S \to D$ است. فرض کنید که $(u_0, v_0) \in S$. قرار می‌دهیم:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \quad \Phi(u_0,v_0) = (x_0, y_0)$$

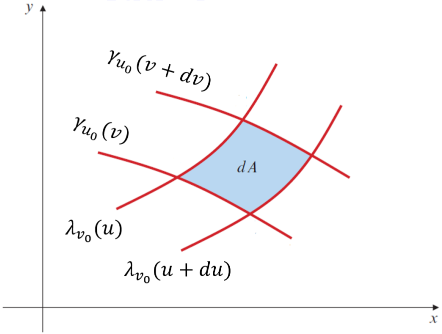
همچنین، خم‌های λ_{v_0} و γ_{u_0} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_{v_0}(u) = \Phi(u, v_0), \quad \gamma_{u_0}(v) = \Phi(u_0, v)$$



حال، المان سطح در ناحیه‌ی S را بر حسب المان سطح در ناحیه‌ی D می‌یابیم. با توجه به شکل، به‌ازای du و dv کوچک، المان سطح در ناحیه‌ی S را می‌توان متوازی‌الاضلاع در نظر گرفت. پس، داریم $dA = |d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}|$. توجه می‌کنیم که:

$$\lambda_{v_0}(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0)), \quad \gamma_{u_0}(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v))$$



بنابراین، داریم:

$$d\lambda_{v_0} = (dx|_{v=v_0}, dy|_{v=v_0}) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) du$$

$$d\gamma_{u_0} = (dx|_{u=u_0}, dy|_{u=u_0}) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

پس، می‌توان نوشت:

$$|d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}| = \left|\det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{bmatrix}\right| dudv = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| dudv$$

از این‌رو، داریم:

$$dA = |d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$$

قضیه‌ی تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^2$. همچنین، فرض کنید که $\Phi : S \to D$ یک تبدیل یک‌به‌یک به صورت $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ است، و مشتقات جزیی اول توابع $x(u,v)$ و $y(u,v)$ موجود و پیوسته هستند. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد، و $g : S \to \mathbb{R}$ به صورت $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ تعریف شود، آن‌گاه g نیز تابعی انتگرال‌پذیر است، و داریم:

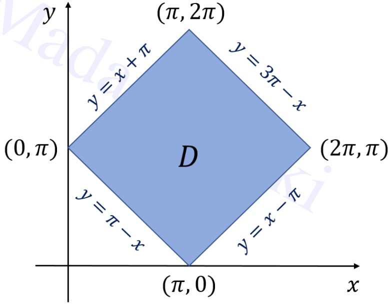
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_S g(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

مثال

فرض کنید که D متوازی‌الاضلاعی با رئوس $(0,\pi)$، $(\pi,2\pi)$، $(2\pi,\pi)$ و $(\pi,0)$ است.
انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$$

پاسخ:



ناحیه‌ی D مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ است که:

$$\pi \le x+y \le 3\pi, \quad -\pi \le y-x \le \pi$$

ادامه‌ی مثال

حال، تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u = x + y, \qquad v = y - x$$

بنابراین، تحت این تغییر متغیر، ناحیه‌ی D به مستطیل زیر تصویر می‌شود:

$$S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq u \leq 3\pi,\ -\pi \leq v \leq \pi\}$$

حال، بنابر قضیه‌ی تابع وارون داریم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، با فرض $f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y)$، از قضیه‌ی تغییر متغیر نتیجه می‌شود که:

$$I = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 \sin^2(u)\, dv du$$

ادامه‌ی مثال

در نتیجه، داریم:

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(u)\, du\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} v^2\, dv\right)$$

در حالی‌که:

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(u)\, du = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2}\, du = \left(\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right)\Bigg|_{u=\pi}^{u=3\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^2\, dv = \left(\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{v=-\pi}^{v=\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

از این‌رو، داریم:

$$I = \frac{1}{2}(\pi)\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^4}{3}$$

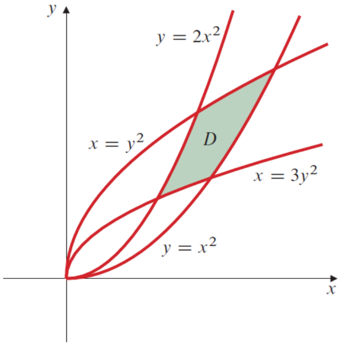
مثال

مساحت ناحیه‌ی محدود به چهار سهمی $y = x^2$، $y = 2x^2$، $x = y^2$ و $x = 3y^2$ را بیابید.

پاسخ:

تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = \frac{x}{y^2}$$



حال، اگر D ناحیه‌ی محدود به چهار سهمی داده‌شده باشد، آن‌گاه فرض می‌کنیم که D تحت تغییر متغیر بالا به ناحیه‌ی S تبدیل می‌شود. توجه می‌کنیم که S مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ است که $1 \leq u \leq 2$ و $1 \leq v \leq 3$.

ادامه‌ی مثال

داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}} = \frac{x^2y^2}{3}$$

توجه می‌کنیم که $\frac{1}{x^2y^2} = u^2v^2$. بنابراین، $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3u^2v^2}$. در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned} D \text{ مساحت } &= \iint_D dxdy = \iint_S \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_1^2\int_1^3 \frac{dvdu}{3u^2v^2} \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_1^2 u^{-2}\,du\right)\left(\int_1^3 v^{-2}\,dv\right) = \frac{1}{3}\left(-u^{-1}\right)\Big|_{u=1}^{u=2}\left(-v^{-1}\right)\Big|_{v=1}^{v=3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

تغییر متغیر قطبی

فرض کنید که D ناحیه‌ای در صفحه با مختصات دکارتی است و تحت تغییر متغیر قطبی به ناحیه‌ی S با مختصات قطبی تبدیل می‌شود. داریم:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

بنابراین، از قضیه‌ی تغییر متغیر نتیجه می‌شود که:

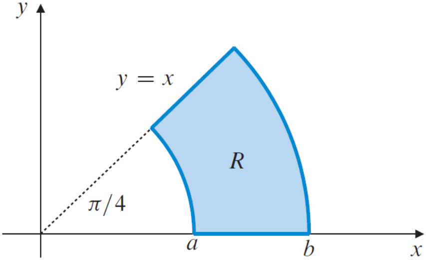
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,rdrd\theta$$

مثال

فرض کنید که $0 < a < b$، و R بخشی از ناحیه‌ی $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ است که زیر خط $y = x$ و در ربع اول قرار می‌گیرد. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$$

پاسخ:



فرض کنید که R در مختصات قطبی به ناحیه‌ی S تبدیل می‌شود. توجه کنید که S مجموعه‌ی همه‌ی نقاط (r, θ) است که:

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$I = \iint_S \frac{(r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2}\, r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_a^b r\tan^2(\theta)\, dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\theta)\, d\theta\right)\left(\int_a^b r\, dr\right)$$

در حالی‌که:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+\tan^2(\theta)\right) - 1\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(\theta))\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = (\tan(\theta))\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

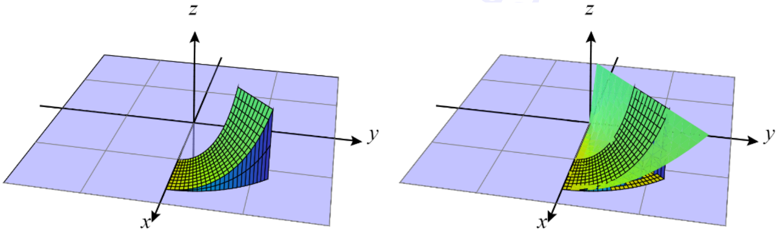
ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$\int_a^b r\,dr = \left(\frac{r^2}{2}\right)\bigg|_{r=a}^{r=b} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

در نهایت، داریم:

$$I = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$



مثال‌های تکمیلی

مثال

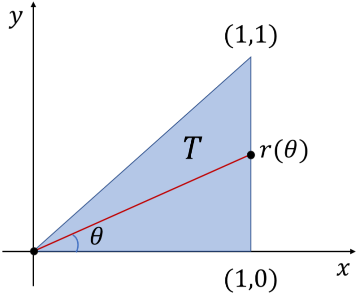
فرض کنید که T یک ناحیه‌ی مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ است. کران‌های انتگرال $I=\iint_T g(x,y)\,dA$ را در مختصات قطبی،

۱. به صورت $I=\iint g(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,rdrd\theta$ بیان کنید.

۲. به صورت $I=\iint g(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,rd\theta dr$ بیان کنید.

پاسخ ۱:

فرض کنید که T در مختصات قطبی به ناحیه‌ی D تبدیل می‌شود. در این قسمت از سؤال، باید کران‌های θ را ثابت، و کران‌های r را بر حسب θ تعیین کنیم. وتر T نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات دکارتی است، پس داریم $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$.



ادامه‌ی مثال

توجه کنید که بنابر شکل، r از 0 تا $r(\theta)$ تغییر می‌کند، در حالی‌که $r(\theta)$ به‌ازای $x = 1$ به‌دست آمده است. بنابراین، داریم:

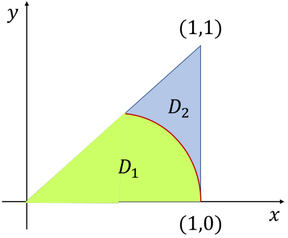
$$1 = x = r(\theta)\cos(\theta) \implies r(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

از این‌رو، داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r dr d\theta$$

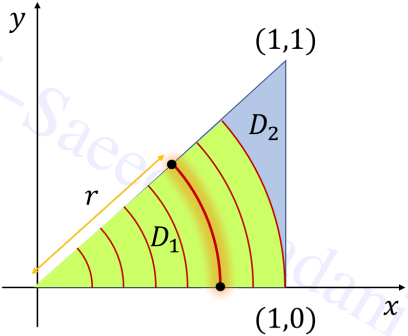
پاسخ ۲:

باید کران‌های r را ثابت، و کران‌های θ را بر حسب r تعیین کنیم. با توجه به توضیحاتی که در ادامه خواهد آمد، لازم است که مطابق شکل (۱) ناحیه‌ی D را به دو ناحیه‌ی D_1 و D_2 تقسیم کنیم.



شکل ۱: $D = D_1 \cup D_2$

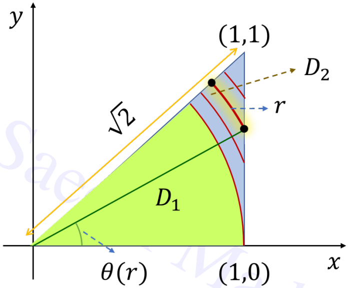
ادامه‌ی مثال



شکل ۲: تعیین کران‌های θ بر حسب r در ناحیه‌ی D_1

مطابق با شکل (۲)، در ناحیه‌ی D_1 داریم $0 \leq r \leq 1$، و به‌ازای یک مقدار ثابت r، مقدار θ از 0 تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند.

ادامه‌ی مثال



شکل ۳: تعیین کران‌های θ بر حسب r در ناحیه‌ی D_2

مطابق با شکل (۳) در ناحیه‌ی D_2، داریم $1 \leq r \leq \sqrt{2}$، و به‌ازای یک مقدار ثابت r، اگر $\theta(r)$ به‌ازای $x = 1$ به‌دست آید، آنگاه داریم $\theta(r) \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. حال، $\theta(r)$ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x = 1 \implies r\cos(\theta(r)) = 1 \implies \theta(r) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ادامه‌ی مثال

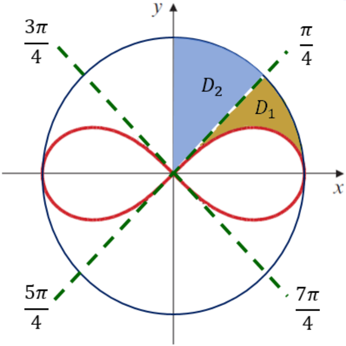
بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr + \iint_{D_2} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr \\
&+ \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)}^{\frac{\pi}{4}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr
\end{aligned}
$$

مثال

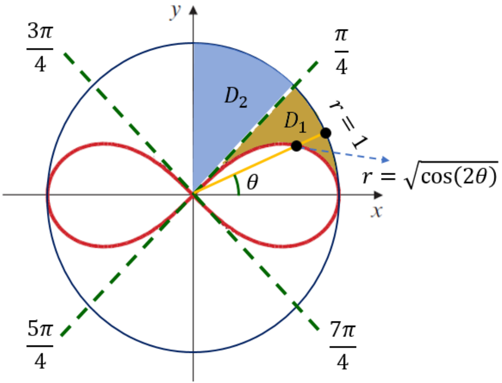
فرض کنید که D ناحیه‌ی درون دایره‌ی $r=1$ و بیرون $r^2=\cos(2\theta)$ و در ربع اول باشد. در این صورت، کران‌های انتگرال $I=\iint_D xy\,dA$ را در مختصات قطبی به هر دو صورت ممکن بیابید.

پاسخ:



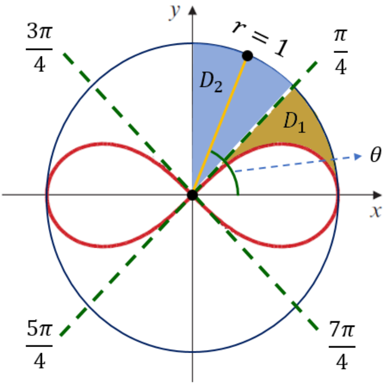
ابتدا کران‌های θ را ثابت در نظر می‌گیریم، و کران‌های r را بر حسب θ می‌یابیم. با توجه به توضیحاتی که در ادامه خواهد آمد، لازم است که مطابق با شکل، ناحیه‌ی D را به دو ناحیه‌ی D_1 و D_2 تقسیم کنیم.

ادامه‌ی مثال



مطابق با شکل، در ناحیه‌ی D_1 داریم $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$، و به‌ازای هر مقدار ثابت θ، داریم $\sqrt{\cos(2\theta)} \leq r \leq 1$.

ادامه‌ی مثال



مطابق با شکل، در ناحیه‌ی D_2 داریم $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$، و به‌ازای هر مقدار ثابت θ، داریم $0 \leq r \leq 1$.

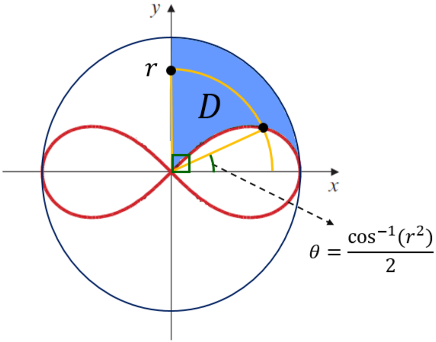
ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} xy\, dA + \iint_{D_2} xy\, dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{\cos(2\theta)}}^1 (r\cos(\theta))(r\sin(\theta))\, r dr d\theta \\
&+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r\cos(\theta))(r\sin(\theta))\, r dr d\theta
\end{aligned}
$$

ادامه‌ی مثال

حال، کران‌های r را ثابت در نظر می‌گیریم، و کران‌های θ را بر حسب r می‌یابیم.



مطابق با شکل، در ناحیه‌ی D داریم $0 \leq r \leq 1$، و به‌ازای هر مقدار ثابت r، داریم $\frac{\cos^{-1}(r^2)}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. بنابراین، داریم:

$$I = \iint_D xy\, dA = \int_0^1 \int_{\frac{\cos^{-1}(r^2)}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos(\theta)(r\sin(\theta))\, r d\theta dr$$

مثال

حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم که انتگرال داده‌شده همگرا است. توجه می‌کنیم که:

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که هر دوی انتگرال‌های بالا همگرا هستند. از آنجا که انتگرال اول با تغییر متغیر $t = -x$ از انتگرال دوم به‌دست می‌آید، کافی است که نشان دهیم انتگرال دوم همگرا است. داریم:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\, dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

ادامه‌ی مثال

انتگرال اولی یک انتگرال معین است، و لذا به دلیل پیوستگی تابع زیر انتگرال، همگرا است. همچنین، به‌ازای $x \geq 1$ داریم $-x^2 \leq -x$، و از این‌رو $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. اما:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=1}^{x=M}$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left(e^{-1} - e^{-M}\right) = e^{-1}$$

پس، بنابر آزمون مقایسه برای انتگرال‌های یک متغیره، انتگرال $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ نیز همگرا است. در نهایت، نشان دادیم که $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ یک انتگرال همگرا است. حال، مقدار این انتگرال را محاسبه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که:

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

حال، با استفاده از تغییر متغیر قطبی و توجه به این مطلب که ناحیه‌ی انتگرال‌گیری کل صفحه است، داریم:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,drd\theta = 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} re^{-r^2}\,dr \\ &= 2\pi \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=M} = 2\pi \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-M^2}}{2} = \pi \end{aligned}$$

بنابراین، $I = \pm\sqrt{\pi}$. از آنجا که e^{-x^2} همواره مثبت است، $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ نامنفی است. پس، نتیجه می‌گیریم که $I = \sqrt{\pi}$.