تمرین تحویلی شماره ۵

فرض کنید ab دو رقم سمت راست شماره دانشجویی شما (با همین ترتیب) باشد.

تابع با ضابطه

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-a)(y+b+1) & |x-a|\le|y-b|\\ -(x-a)(y+b+1) & |x-a|>|y-b|\end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مشتق سویی $f(x,y)$ در (a,b) در جهت بردار یکه (u_1,u_2) را بیابید.

(ب) مشتق پذیری $f(x,y)$ در (a,b) را بررسی کنید.

پاسخ

(الف) قرار می دهیم $u=(u_1,u_2)$. در اینصورت

$$\begin{aligned}D_uf(a,b)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h} \qquad \text{(۱ نمره)}\\ &=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)}{h}\\ &=\begin{cases}\lim_{h\to 0^+}\frac{hu_1(2b+1+hu_2)}{h} & |u_1|\le|u_2|\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{(-hu_1)(2b+1+hu_2)}{h} & |u_1|>|u_2|\end{cases} \qquad \text{(۱ نمره)}\\ &=\begin{cases}u_1(2b+1) & |u_1|\le|u_2|\\ -u_1(2b+1) & |u_1|>|u_2|\end{cases} \qquad \text{(۱ نمره)}\end{aligned}$$

(ب) دقت کنیم که اگر تابع در (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه $D_uf(a,b)=\nabla f(a,b).u$ (۰,۵ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2b+1)}{h}=-(2b+1) \qquad \text{(۰,۵ نمره)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0. \qquad \text{(۰,۵ نمره)}$$

بنابراین برای هر بردار یکه ی $u=(u_1,u_2)$ خواهیم داشت:

$$D_uf(a,b)=(-(2b+1),0).(u_1,u_2)=-u_1(2b+1)$$

اما با توجه به قسمت الف برای تمامی بردارهای یکه $u=(u_1,u_2)$ این تساوی برقرار نیست. لذا تابع در (a,b) مشتق پذیر نیست. (۰,۵ نمره)

راه حل دوم: استفاده از تعریف مشتق پذیری

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_۱(a,b)-kf_۲(a,b)}{\sqrt{h^۲+k^۲}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(a+h,b+k)+h(۲b+۱)}{\sqrt{h^۲+k^۲}} \end{aligned}$$

محاسبه $f_۱(a,b)$ و $f_۲(a,b)$ و رسیدن به تساوی تا این قسمت (۱ نمره)

کافی است مسیر $h=k$ را وقتی $h\to ۰^+$ بررسی کنیم: (۰,۵ نمره)

حد فوق برابر است با:

$$L=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(۲b+۱+h)}{\sqrt{۲}h}=\frac{(۲b+۱)}{\sqrt{۲}}\neq ۰$$

لذا تابع در (a,b) مشتق پذیر نیست. (۰,۵ نمره)