تمرین تحویلی شماره۱۳

فرض کنید که S بخشی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می گیرد. هم چنین، فرض کنید N بردار قائم یکه بر S ، به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

(الف) $\iint_{S} F.N\,dS$ را بیابید.

(ب) $\oint_{C} F.dr$ را بیابید.

حل الف: سطح S قسمتی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار دارد. برای استفاده از قضیه دیورژانس سطح $S_۱$ ، قسمتی از صفحه $z=۰$ را که به رویه S محدود شده است را اضافه می کنیم. از طرفی برای استفاده از قضیه دیورژانس قائم یکه باید روبه خارج سطح بسته مورد نظر باشد. بردار N که طبق فرض اینگونه است. بنابراین بردار $N_۱$ را روی سطح $S_۱$ روبه پایین می گیریم، در واقع داریم $N_۱=-k$. بعلاوه ناحیه مشخص شده توسط $S_۱$ عبارتست از تمام نقاط صفحه xy که $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$. حال با استفاده از قضیه دیورژانس داریم :

$$\iint_{S} F.NdS+\iint_{S_۱} F.N_۱dS=\iiint_{V} divFdV \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)=(P,Q,R)$$

$$\Rightarrow divF=\nabla.F=P_x+Q_y+R_z=۰ \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\iint_{S} F.NdS+\iint_{S_۱} F.N_۱dS=۰\Rightarrow \iint_{S} F.NdS=-\iint_{S_۱} F.(-k)dS \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\iint_{S} F.NdS=-\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(xz\sin y-z\cos x+۱).(-۱)dxdy$$

$$=\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۱} dxdy=\pi. \qquad \text{(۲ نمره)}$$

در تابع داخل انتگرال $z=۰$ قرار داده شده است.

حل ب: S' رویه $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$ است. و بردار قائم یکه آن $N=(۰,۰,۱)$ است. (۱ نمره)

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_{C} F.dr=\iint_{S'} curlF.NdS=\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(h,g,Q_x-P_y).(۰,۰,۱)dxdy \qquad \text{(۲ نمره)}$$

$$=\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۱}(cosy-cosy-۱)dxdy=-\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۱} dxdy=-\pi. \qquad \text{(۲ نمره)}$$