

به نام خدا

تمرین اول درس ریاضیات گسسته فصل ۱ - اصول بنیادی شمارش

پاییز ۱۴۰۰

1. پاسخ تمرین‌ها را به صورت تایپ شده یا نوشتاری خوانا و تمیز در قالب یک فایل pdf (برای کل تمرین) تحویل دهید.
2. فایل تحویلی به قالب DM1_Name_StudentNumber (به عنوان مثال، DM1_BardiaArdakanian_9831072) نامگذاری شده باشد.
3. ددلاین تمرین تا روز ۱۷ مهرماه ساعت ۲۳:۵۵ می‌باشد و این مهلت به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد.
4. در صورت کشف تقلب، نمره تمرین صفر در نظر گرفته می‌شود.
5. در صورت هرگونه ابهام و سوال، می‌توانید با ایمیل تدریس یاری درس در ارتباط باشید.

DM.aut.ac@gmail.com

تمرینات ۱.۱ و ۲.۱

سوال ۱

اتومبیلهای بیوک در ۴ مدل، ۱۲ رنگ، ۳ اندازه متفاوت برای موتور، و ۲ نوع جعبه دنده به بازار می‌آیند.
الف) چند بیوک متمایز می‌توان ساخت؟
ب) اگر یکی از رنگهایی که در دسترس است آبی باشد، چند بیوک آبی متفاوت می‌توان ساخت؟

سوال ۲

الف) هیأت مدیره یک شرکت داروسازی ۱۰ عضو دارد. برای تصویب فهرست جدیدی از اعضای هیأت رئیسه شرکت (که از بین ۱۰ عضو هیأت مدیره برگزیده می‌شوند) اجلاسی از سهامداران پیشبینی شده است. این هیأت مدیره چند فهرست مختلف، مرکب از یک رئیس، یک معاون، یک منشی، و یک خزانه‌دار می‌تواند برای تصویب به مجمع سهامداران پیشنهاد کند؟
ب) سه نفر از اعضای هیأت مدیره (ی قسمت الف)) پزشک هستند. در چندتا از فهرستهای نامزدهای قسمت الف)،
(یک) یک پزشک برای ریاست در نظر گرفته شده است؟
(دو) یک پزشک هست؟
(سه) حداقل یک پزشک هست؟

سوال ۳

دانش‌آموزی ۱۵ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند کتابهایش را در دو قفسه بگذارد به طوری که در هر قفسه حداقل یک کتاب باشد؟ (به هر ترتیب دلخواه که کتابها کنارهم چیده شوند، در هر قفسه کتاب نخست را کتاب طرف چپ بگیرید.)

سوال ۴

به چند طریق می‌توان نمادهای a, b, c, d, e, e, e, e, e را مرتب کرد به طوری که هیچ e ای کنار e دیگری قرار نگیرد؟

سوال ۵

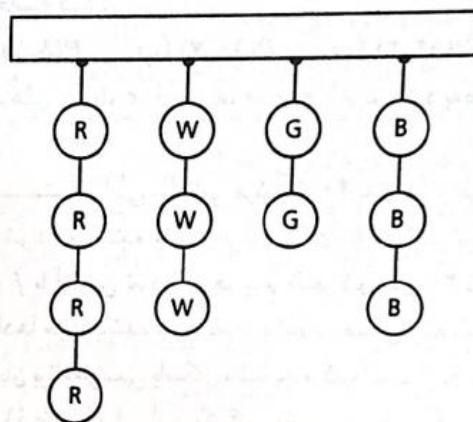
برای ارسال پیامها در یک سیستم ارتباطی، الفبایی مرکب از ۴۰ نماد به کار می رود. اگر در هر پیام (فهرستی از نمادها) نمادها بتوانند تکرار شوند، فرستنده چند پیام ۲۵ نمادی را می تواند تولید کند؟ اگر ۱۰ تا از ۴۰ نماد بتوانند فقط به عنوان نخستین و / یا آخرین نمادهای هر پیام ظاهر شوند، و ۳۰ نماد دیگر بتوانند هر جای دیگر ظاهر شوند، و اگر تکرار همه نمادها مجاز باشد، آنگاه تعداد پیامهای ممکن چندتاست؟

سوال ۶

به چند طریق می توانیم حروف واژه POLYUNSATURATED را مرتب کنیم به طوری که ترتیب حضور حروف صدا دار در این واژه حفظ شود؟

سوال ۷

دوازده هدف سفالی (یک شکل) همان طور که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است، در چهار ستون معلق مرتب شده اند. در ستون نخست (از چپ) چهار هدف قرمز، در ستون دوم سه هدف سفید، در ستون سوم دو هدف سبز، و در ستون چهارم سه هدف آبی وجود دارد. برای ملحق شدن به تیم تیراندازی دانشکده باید هر ۱۲ هدف را (با استفاده از یک تیانه و فقط ۱۲ گلوله) مورد اصابت قرار داد و هنگام انجام این کار همواره باید به هدف واقع در انتهای یک ستون زد. تحت این شرایط، به چند طریق متفاوت می توان هر ۱۲ هدف را مورد اصابت قرار داد؟



شکل ۵.۱

سوال ۸

چند مسیر متفاوت در صفحه xy از $(0, 0)$ به $(7, 7)$ وجود دارد، در صورتی که هر مسیر متشکل از پله‌هایی باشد که هر پله حرکتی به اندازه یک واحد به طرف راست (R) یا حرکتی به اندازه یک واحد به طرف بالا (U) باشد؟

چندتا از این نوع مسیرها از $(2, 7)$ به $(9, 14)$ وجود دارد؟ آیا می‌توانید گزاره‌ای کلی بیان کنید که دربرگیرنده این دو نتیجه باشد؟

سوال ۹

الف) چند مسیر متمایز در فضای سه بعدی اقلیدسی از $(-1, 2, 0)$ به $(1, 3, 7)$ وجود دارد، در صورتی که هر حرکت یکی از انواع زیر باشد؟

$$(H) : (x, y, z) \rightarrow (x + 1, y, z); \quad (V) : (x, y, z) \rightarrow (x, y + 1, z);$$

$$(A) : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1).$$

ب) چندتا از این نوع مسیرها از $(1, 0, 5)$ به $(8, 1, 7)$ وجود دارد؟
پ) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را تعمیم دهید.

سوال ۱۰

الف) مطلوب است تعیین مقدار متغیر صحیح Counter پس از اجرای قطعه برنامه پاسکال زیر (در اینجا i ، j ، و k متغیرهایی صحیح‌اند).

```
counter := 0;
For i := 1 to 12 do
    counter := counter + 1;
For j := 5 to 10 do
    counter := counter + 2;
For k := 15 downto 8 do
    counter := counter + 3;
```

ب) در قسمت (الف) کدام اصل شمارش نقش بازی می‌کند؟

سوال ۱۱

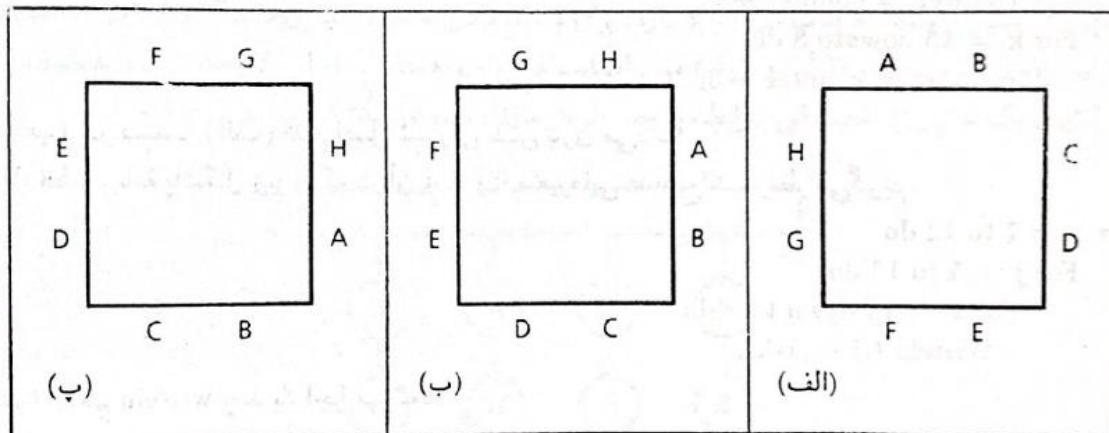
قطعه برنامه پاسکال زیر را، که در آن i ، j و k متغیرهایی صحیح اند در نظر می گیریم.

```
For i := 1 to 12 do
  For j := 5 to 10 do
    For k := 15 down to 8 do
      Writeln ((i - j)*k);
```

- الف) حکم writeln چند بار اجرا می شود؟
ب) در قسمت (الف) کدام اصل شمارش به کار می رود؟

سوال ۱۲

- الف) به چند طریق هشت نفر، که با A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و H نشان داده شده اند، می توانند دور میزی مربعی شکل که در شکل ۶۰۱ نشان داده شده است بنشینند، با این فرض که شکل های ۶۰۱ (الف) و ۶۰۱ (ب) یکی گرفته می شوند ولی با ۶۰۱ (پ) متفاوت اند؟
ب) اگر دو نفر از هشت نفر نامبرده، مثلاً A و B ، با یکدیگر ناسازگار باشند، چند طریق متفاوت برای نشستن امکان پذیر است، مشروط بر آنکه A و B کنار هم نباشند؟
پ) در چند تا از طرق نشستن قسمت (ب)، A و B مقابل یکدیگر در دو طرف میز قرار نمی گیرند؟



شکل ۶۰۱

تمرینات ۳.۱

سوال ۱۳

در دستگاه بریل^۱ هر نماد، مانند یک حرف کوچک الفبا، یک نشانه نقطه‌گذاری، یک پسوند، و غیره، با برجسته کردن حداقل یکی از نقاط ترتیب شش نقطه‌ای نشان داده شده در قسمت (الف) شکل ۸.۱، به دست می‌آید. (در این قسمت از شکل، شش مکان بریل نامگذاری شده‌اند). مثلاً، در قسمت (ب) این شکل نقاط واقع در مکانهای ۱ و ۴ برجسته شده‌اند و این ترتیب شش نقطه‌ای حرف c را نمایش می‌دهد. در قسمت‌های (پ) و (ت) این شکل، به ترتیب، نمایش‌های حروف m و t را داریم. حرف تعریف «the» در قسمت (ث) شکل نشان داده شده است، در حالی که قسمت (ج) نمایش پسوند «ow» است. سرانجام نماد «؛»، به وسیله ترتیب شش نقطه‌ای قسمت (چ) داده شده است که در آن نقطه‌های ۲ و ۳ برجسته شده‌اند.

• •	• •	• •	• •	• •	• •	1 • •4
• •	• •	• •	• •	• •	• •	2 • •5
• •	• •	• •	• •	• •	• •	3 • •6
(ج) "؛"	(ج) "ow"	(ث) "the"	(ت) "t"	(پ) "m"	(ب) "c"	(الف)

شکل ۸.۱

- الف) چند نماد مختلف را می‌توانیم در دستگاه بریل نمایش دهیم؟
 ب) در چند نماد دقیقاً سه نقطه برجسته شده‌اند؟
 پ) در چند نماد تعدادی زوج از نقاط برجسته شده‌اند؟
 ت) در چند نماد حداقل چهار نقطه برجسته شده‌اند؟

سوال ۱۴

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد و $n > 1$ ، ثابت کنید که $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}$ مجذور کامل است.

سوال ۱۵

قرار براین است که گروهی ۱۲ نفری از بین ۱۰ مرد و ۱۰ زن انتخاب شود. به چند طریق می‌توان این انتخاب را به عمل آورد در صورتی که (الف) هیچ قیدی در کار نباشد؟ (ب) شش مرد و شش زن در این گروه باشند؟ (پ) تعداد زنان حاضر در گروه زوج باشد؟ (ت) تعداد زنان در گروه بیشتر از مردان باشد؟ (ث) حداقل هشت مرد در گروه باشد؟

سوال ۱۶

به چند طریق می‌توان ۱۲ کتاب متفاوت را بین چهار کودک توزیع کرد به طوری که (الف) هر کودک سه کتاب بگیرد؟ (ب) دو کودک بزرگتر هر یک چهار کتاب و دو کودک کوچکتر هر یک دو کتاب بگیرند؟

سوال ۱۷

(الف) پانزده نقطه، که هیچ سه‌تای آنها بر یک استقامت نیستند، در صفحه‌ای قرار دارند. این نقاط چند خط راست را تعیین می‌کنند؟
(ب) بیست و پنج نقطه، که هیچ چهارتای آنها در یک صفحه نیستند، در فضا داده شده‌اند. این نقاط چند مثلث پدید می‌آورند؟ چند صفحه؟ چند چهاروجهی (اجسام فضایی هرمی شکل که دارای چهار وجه مثلثی شکل هستند)؟

سوال ۱۸ (مثال ۲۳.۱ در pdf فصل اول و همینطور فصل اول کتاب مرجع وجود دارد)

... بین رشته‌های به طول ۱۰ در مثال ۲۳.۱، چند تا (الف) چهار تا ۰، سه تا ۱، و سه تا ۲ دارند؟ (ب) حداقل هشت تا ۱ دارند، (پ) دارای وزن ۴ هستند؟

سوال ۱۹

... گردایه همه رشته‌های به طول ۱۰ را که از الفبای ۰، ۱، ۲، و ۳ تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. چندتا از این رشته‌ها دارای وزن ۳ هستند؟ چندتا دارای وزن ۴ هستند؟ چندتا دارای وزن زوج هستند؟

سوال ۲۰

مطلوب است تعیین ضریب $x^4 y^2$ در بسط (الف) $(x+y)^{12}$ ، (ب) $(x+2y)^{12}$ ، و (پ) $(2x-3y)^{12}$.

سوال ۲۱

ضریب $w^2 x^2 y^2 z^2$ را در بسط (الف) $(w+x+y+z+1)^{10}$ ؛ (ب) $(2w-x+3y+z-2)^{12}$ ؛ و (پ) $(v+w-2x+y+5z+3)^{12}$ بیابید.

سوال ۲۲

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، حاصل جمع

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^k\binom{n}{k} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$$

را به دست آورید.

تمرینات ۴.۱

سوال ۲۳

• به چند طریق می توان 10^0 سکه (یکسان) را بین پنج کودک توزیع کرد در صورتی که (الف) هیچ قیدی در کار نباشد؟ (ب) هر کودک حداقل یک سکه بگیرد؟ (پ) بزرگترین کودک حداقل دو سکه بگیرد؟

سوال ۲۴

(الف) به چند طریق می توانیم پنج سکه از گردایه ای 10^0 سکه ای مرکب از یک سکه یک پنی، یک سکه پنج سنتی، یک سکه ده سنتی، یک سکه بیست و پنج سنتی، یک سکه نیم دلاری و پنج سکه یک دلاری (یکسان) انتخاب کنیم؟

(ب) به چند طریق می توانیم n شی را از گردایه ای $2n$ تایی، مرکب از n شی متمایز و n شی یکسان، انتخاب کنیم؟

سوال ۲۵

تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ را تعیین کنید در صورتی که

- | | |
|--|--|
| (الف) $1 \leq i \leq 4, x_i \geq 0$ | (ب) $1 \leq i \leq 4, x_i > 0$ |
| (پ) $x_1, x_2 \geq 7, x_3, x_4 \geq 5$ | (ت) $1 \leq i \leq 4, x_i \geq 8$ |
| (ث) $1 \leq i \leq 4, x_i \geq -2$ | (ج) $0 < x_1 \leq 25, x_2, x_3, x_4 > 0$ |

سوال ۲۶

تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$ را تعیین کنید در صورتی که

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| (الف) $1 \leq i \leq 5, x_i \geq 0$ | (ب) $1 \leq i \leq 5, x_i \geq -3$ |
|-------------------------------------|------------------------------------|

سوال ۲۷

الف) ضریب $v^2 w^2 x z$ را در بسط $(3v + 2w + x + y + z)^4$ بیابید.
ب) در بسط قسمت (الف) چند جمله متمایز وجود دارد؟

سوال ۲۸

به چند طریق می‌توان ۲۴ کتاب مختلف را در چهار قفسه گذاشت به طوری که در هر قفسه حداقل یک کتاب باشد؟ (به ازای هر یک از این ترتیبات، کتابهای هر قفسه را کنار هم در نظر بگیرید به طوری که کتاب نخست کتاب طرف چپ قفسه باشد.)

سوال ۲۹

به ازای کدام عدد صحیح مثبت n ، معادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{11} = n \quad (1)$$

و

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{12} = n \quad (2)$$

تعدادی یکسان جواب صحیح مثبت خواهند داشت؟

سوال ۳۰

به چند طریق می‌توان یک سکه بیست و پنج سنتی، یک سکه ده سنتی، یک سکه پنج سنتی، و ۲۵ سکه یک پنی را بین پنج کودک توزیع کرد در صورتی که (الف) هیچ قیدی در کار نباشد؟ (ب) بزرگترین کودک ۲۰ سنت یا ۲۵ سنت بگیرد؟

سوال ۳۱

حکم Writeln چند بار در قطعه برنامه پاسکال زیر اجرا می‌شود؟ (در اینجا i ، j ، k ، و m متغیرهایی صحیح‌اند.)

For $i := 1$ to 20 do

For $j := 1$ to i do

For $k := 1$ to j do

For $m := 1$ to k do

writeln $((i * j) + (k * m));$

سوال ۳۲

مقدار متغیر sum را پس از اجرای قطعه برنامه پاسکال زیر بیابید. (در اینجا i ، j ، k ، increment و sum متغیرهایی صحیح اند.)

```
increment := 0 ;
sum := 0 ;
For i := 1 to 10 do
  For j := 1 to i do
    For k := 1 to j do
      Begin
        increment := increment + 1;
        sum := sum + increment
      End;
```

سوال ۳۳

الف) به ازای اعداد صحیح مثبت مفروض n و m به طوری که $m \geq n$ ، نشان دهید که تعداد طرقی که می‌توان m شیء یکسان را بین n ظرف متمایز چنان توزیع کرد که هیچ ظرفی خالی نماند، برابر است با $C(m-1, m-n) = C(m-1, n-1)$.

ب) نشان دهید که تعداد آن توزیعهای قسمت الف) که در هر ظرف حداقل r شیء ($m \geq nr$) قرار می‌دهند، برابر است با $C(m-1 + (1-r)n, n-1)$.

تمرینات تکمیلی

سوال ۳۴

ماشینی نه صفحه شماره گیر مختلف، که هریک دارای پنج تنظیم با برچسبهای ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ است، دارد. (الف) به چند طریق می توان همه صفحات شماره گیر را روی این ماشین تنظیم کرد؟ (ب) اگر هر نه صفحه شماره گیر در یک ردیف و بالای ماشین مرتب شوند، به چند طریق می توان ماشین را تنظیم کرد به طوری که هیچ دو شماره گیر مجاور تنظیم یکسان نداشته باشند؟

سوال ۳۵

برای انجام مراسمی در کلیسا، رهبر سرودخوانان باید شش سرود مذهبی انتخاب کند. او سه کتاب سرود در اختیار دارد که هریک از آنها حاوی ۲۵ سرود است (روی هم ۷۵ سرود مختلف). او به چند طریق می تواند سرودها را انتخاب کند در صورتی که بخواهد (الف) از هر کتاب دو سرود انتخاب کند؟ (ب) از هر کتاب حداقل یک سرود انتخاب کند؟

سوال ۳۶

چند طریق برای نصب ۲۵ پرچم مختلف بر ۱۰ دیرک پرچم شماره گذاری شده وجود دارد در صورتی که ترتیب پرچمها بر هر دیرک (الف) مورد نظر نباشد؟ (ب) مورد نظر باشد؟ (پ) مورد نظر باشد و قرار باشد بر هر دیرک حداقل یک پرچم به اهتزاز درآید؟

سوال ۳۷

سکه ای را ۶۰ بار پرتاب می کنیم و در نتیجه ۴۵ بار نقش و ۱۵ بار خط می آید. به چند طریق این وضعیت می تواند پیش آید در صورتی که هیچ دو خط متوالی نداشته باشیم؟

سوال ۳۸

چند دنباله n رقمی می توان با چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳ تشکیل داد که دارای دقیقاً r تا ۱ باشد؟

سوال ۳۹

کودکی مجموعه‌ای از 180° قطعه چوبی و پلاستیکی متمایز در سه اندازه (کوچک، متوسط، بزرگ)، پنج رنگ (قرمز، سفید، آبی، زرد، سبز)، و شش شکل (مثلثی، مربعی، مستطیلی، شش ضلعی، هشت ضلعی، گرد) دارد. چندتا از قطعه‌های این مجموعه

الف) دقیقاً از نظریک ویژگی (جنس، اندازه، رنگ، شکل) با قطعه مربعی چوبی قرمز کوچک متفاوت است؟ (مثلاً، قطعه مربعی پلاستیکی قرمز کوچک یک چنین قطعه‌ای است.)

ب) دقیقاً از نظر دو ویژگی با قطعه شش ضلعی پلاستیکی آبی بزرگ متفاوت است؟ (مثلاً، قطعه هشت ضلعی پلاستیکی قرمز کوچک یک چنین قطعه‌ای است.)

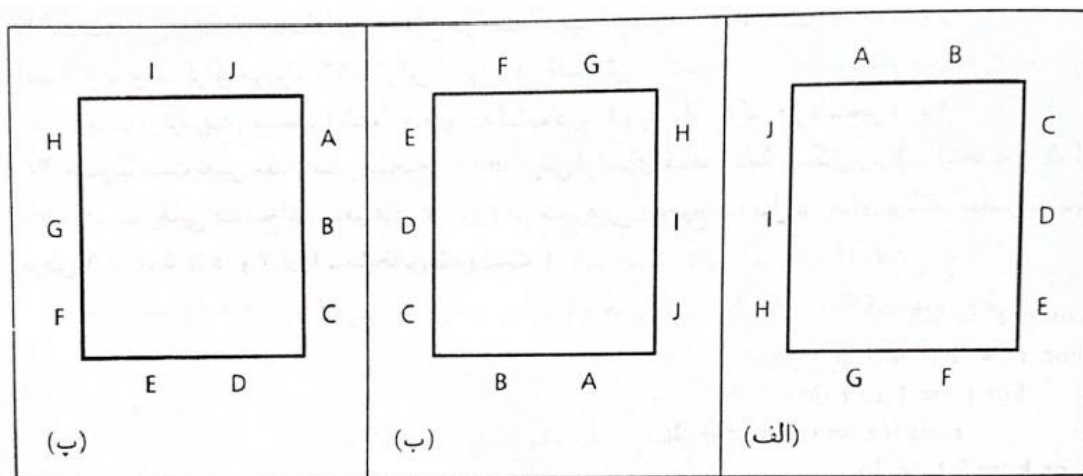
سوال ۴۰

از فهرست اعداد: $5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ چهار عدد انتخاب می‌شود. (الف) به چند طریق می‌توان این انتخابها را انجام داد به طوری که حاصل ضرب آن چهار عدد، مثبت باشد و (یک) این اعداد متمایز باشند؟ (دو) هر عدد را بتوان تا چهار بار انتخاب کرد؟ (سه) هر عدد را بتوان حداکثر سه بار انتخاب کرد؟ (ب) به قسمت (الف)، با این فرض که حاصل ضرب چهار عدد مورد بحث منفی باشد، پاسخ دهید.

سوال ۴۱

الف) به چند طریق می‌توان 10 نفر را، که با A, B, \dots, I, J ، مشخص شده‌اند، دور میزی مستطیلی که در شکل 10.1 نشان داده شده است نشاند، در صورتی که شکل‌های 10.1 (الف) و 10.1 (ب) را یکی بگیریم ولی این دو متفاوت با شکل 10.1 (پ) تلقی شوند؟

ب) در چند تا از ترتیب‌های قسمت (الف)، A و B در مقابل یکدیگر و در طرف ضلع بزرگتر نشسته‌اند؟



شکل ۱۰.۱

سوال ۴۲

الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی جفت معادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 15$$

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 5$$

را بیابید.

ب) به قسمت (الف) در صورتی که به جای معادلات بالا، جفت نابریه‌ای

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_5 \leq 15,$$

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 5$$

را قرار دهیم، پاسخ دهید.

سوال ۴۳

فرض کنیم n فرد باشد. به چند طریق می‌توانیم n تا ۱ و r تا ۰ را چنان مرتب کنیم که ردیفی (فهرستی از نمادهای یکسان کنار هم) حاوی دقیقاً k تا ۱، $1 \leq k < 2k$ ، داشته باشیم؟

سوال ۴۴

مطلوب است تعیین مقدار متغیر صحیح counter پس از اجرای قطعه برنامه پاسکال زیر (در اینجا i, j, k, l, m, n متغیرهایی صحیح‌اند. متغیرهای s, r و t نیز متغیرهایی صحیح‌اند؛ قبل از اجرای برنامه، مقادیر آنها با فرض $1 \leq r \leq 5, s \geq 5$ و $t \geq 7$ مشخص شده است.)

```
counter := 10;
For i := 1 to 12 do
  For j := 1 to r do
    counter := counter + 2;
For k := 5 to s do
  For l := 3 to k do
    counter := counter + 4
For m := 3 to 12 do
  counter := counter + 6;
For n := t down to 7 do
  counter := counter + 8;
```

سوال ۴۵

الف) به چند طریق می‌توان در صفحه xy از $(1, 2)$ به $(5, 9)$ سفر کرد در صورتی که هر حرکت متعلق به یکی از انواع زیر باشد:

$$(H) : (x, y) \rightarrow (x + 1, y) \quad ; \quad (V) : (x, y) \rightarrow (x, y + 1)$$

ب) به قسمت (الف)، در صورتی که حرکت (قطری) سومی مانند $(D) : (x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ نیز امکانپذیر باشد، پاسخ دهید.

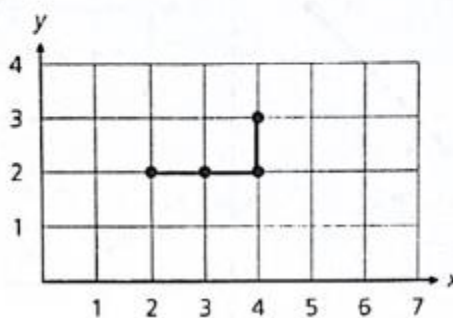
سوال ۴۶ (امتیازی)

الف) به چند طریق نقطه‌ای مادی می‌تواند در صفحه xy از مبدأ به نقطه $(7, 4)$ برود در صورتی که حرکات مجاز عبارت باشند از:

$$H : (x, y) \rightarrow (x + 1, y) \quad ; \quad V : (x, y) \rightarrow (x, y + 1)$$

ب) چند تا از مسیرهای قسمت (الف) قطعه‌ای را که از $(2, 2)$ به $(3, 2)$ ، سپس به $(4, 2)$ و آنگاه به $(4, 3)$ می‌رود و در شکل ۱۱.۱ نشان داده شده است، شامل نمی‌شوند؟

پ) به قسمت‌های (الف) و (ب)، در صورتی که نوع سومی از حرکت، یعنی $(D) : (x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ نیز مجاز باشد، پاسخ دهید.



شکل ۱۱.۱

سوال ۴۷ (امتیازی)

تمرین زیر یک روش شمارش مهم را، به نام اصل بازتاب، توضیح می دهد. در اینجا، نقطه ای مادی حرکتی را در صفحه xy طبق

$$U : (m, n) \rightarrow (m + 1, n + 1) \quad ; \quad L : (m, n) \rightarrow (m + 1, n - 1)$$

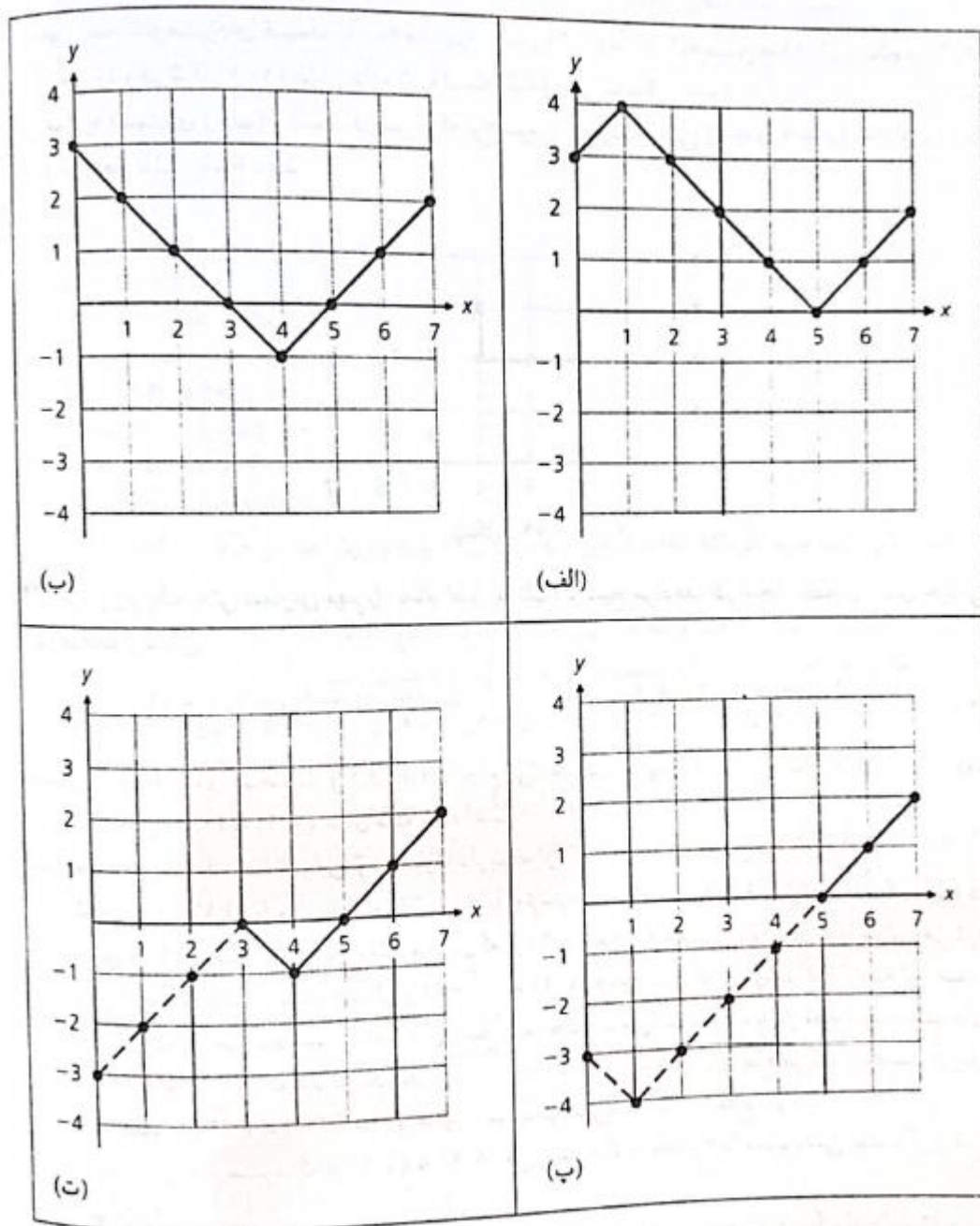
که در آن m و n اعدادی صحیح اند و $m, n \geq 0$ ، انجام می دهد. در شکل های ۱۲۰۱ (الف) و ۱۲۰۱ (ب)، دوتا از این مسیرها از $(0, 3)$ به $(7, 2)$ نشان داده شده است.

الف) تحت این شرایط، چندتا از این نوع مسیرها داریم که از $(0, 3)$ به $(7, 2)$ می روند؟

ب) شکل های ۱۲۰۱ (پ) و ۱۲۰۱ (ت) ایده زیر را به ترتیب در مورد مسیرهای قسمتهای (الف) و (ب) در شکل ۱۲۰۱ توضیح می دهند. وقتی مسیری که از $(0, 3)$ به $(7, 2)$ می رود، بر محور x مماس می شود یا آن را قطع می کند، مسیری متناظر از $(0, -3)$ به $(7, 2)$ وجود دارد که از بازتاب قطعه اولیه این مسیر، قبل از آنکه بر محور x مماس شود یا آن را قطع کند، به دست می آید. با توجه به این نکته، تعداد مسیرهای از $(0, 3)$ به $(7, 2)$ را که حداقل یک بار بر محور x مماس می شوند یا آن را قطع می کنند، به دست آورید. پ) چند مسیر از $(0, 3)$ به $(7, 2)$ هرگز بر محور x مماس نمی شوند یا آن را قطع نمی کنند؟ ت) چندتا از این نوع مسیرها که از $(1, 1)$ به $(8, 2)$ می روند، هرگز بر محور x مماس نمی شوند یا آن را قطع نمی کنند؟

ث) دو دانشجو به سبب امتیازات تحصیلی برجسته برای تعیین دانشجوی برجسته فیزیک انتخاب شده اند. شورایی مرکب از ۱۴ عضو دانشکده تشکیل شده است و هر عضوی یکی از دو نامزد را انتخاب می کند و نام او را (پس از نوشتن روی ورقه رأی گیری) در صندوق رأی گیری می اندازد. فرض کنیم دانشجوی اول ۹ رأی و دانشجوی دوم ۵ رأی بیاورد. به شرط آنکه هر بار یک رأی از صندوق استخراج شود، به چند طریق می توان

ورقه های رأی گیری را استخراج کرد به طوری که همواره از بین آرای استخراج شده آرای بیشتری به نفع دانشجوی اول باشد؟ این مثال، حالتی خاص از مسأله ای کلی است که، بنابر مناسبتی که دارد مسأله رأی گیری مخفی نامیده می شود. این مسأله به وسیله ژوزف لویی فرانسوا برتران^۱ (۱۸۲۲ - ۱۹۰۰) حل شد.



شکل ۱۲.۱