۱

اصول بنیادی شمارش

یکایک شمردن یا شمارش، ممکن است به‌عنوان فرایندی آشکار تلقی شود که هر دانشجو در آغاز مطالعهٔ علم حساب فرا می‌گیرد. ولی به‌نظر می‌رسد که پس از آن، به‌تدریج که دانشجو به زمینه‌های «دشوارتر» ریاضیات، چون جبر، هندسه، مثلثات، و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌رسد توجه بسیار کمتری به گسترش بیشتر مفهوم شمارش مبذول می‌شود. به‌همین سبب، این فصل اول باید نکاتی آگاهی‌بخش را دربارهٔ جدی بودن و دشواری شمارشِ «صِرف» فراهم آورد.

یکایک شمردن محدود به حساب نیست. کاربردهایی نیز در زمینه‌هایی چون نظریهٔ کُدگذاری، حساب احتمالات، و آمار (در ریاضیات) و در تحلیل الگوریتمها (در علم کامپیوتر) دارد. در فصلهای بعدی مثالهایی مشخص از این کاربردها ارائه خواهد شد.

به‌تدریج که وارد این شاخهٔ جذاب ریاضیات می‌شویم، با مسائل زیادی مواجه خواهیم شد که در بیان بسیار ساده‌اند ولی راه‌حلی نسبتاً «دشوار» دارند. بدین‌سان، مطمئن شوید که فرمولهای اساسی را فرا گرفته‌اید و آنها را درک کرده‌اید ـ ولی چندان به این فرمولها تکیه نکنید. در واقع، بدون تحلیل هر مسأله، دانستن صِرف فرمولها تقریباً بیهوده است. در عوض، برای حل مسائل غیرمعمول یا حل مسائلی که با مسأله‌هایی که قبلاً دیده‌اید متفاوت‌اند، پیشقدم باشید. راه‌حلهایی را جستجو کنید که مبتنی بر بررسی دقیق خودتان باشد، و نگران نباشید که با راه‌حلهای مؤلف یکی است یا نه. غالباً راههای گوناگونی برای حل مسأله‌ای مفروض وجود دارد.

۱.۱ قاعده‌های حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب

مطالعهٔ خود را در ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی با دو اصل اساسی شمارش آغاز می‌کنیم: قاعده‌های حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب. بیان این قاعده‌ها و کاربردهای اولیهٔ آنها نسبتاً ساده به‌نظر می‌رسد. هنگام تحلیل مسائل پیچیده‌تر، غالباً قادریم مسأله را به بخشهایی قسمت کنیم که با به‌کارگیری این اصول اساسی قابل حل است. هدف ما ایجاد قدرت «تجزیه»ی این‌گونه مسائل و ترکیب راه‌حلهای جزئی برای رسیدن به پاسخ نهایی است. یک راه مناسب برای انجام این امر، تجزیه و تحلیل و حل تعداد زیادی از مسائل گوناگون مربوط به شمردن است، ضمن اینکه تمام مدت باید اصولی را که در راه‌حلها به‌کار می‌روند در نظر داشت. این همان رهیافتی است که ما در اینجا دنبال خواهیم کرد.

اصل نخست شمارش را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

> **قاعدهٔ حاصل‌جمع:** اگر کاری را بتوان به m طریق و کار دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، و اگر این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه این یا آن کار را می‌توان به $m+n$ طریق انجام داد.

Scanned with CamScanner

توجه داشته باشید که وقتی می‌گوییم رویدادی خاص، مثلاً کاری از نوع نخست، می‌تواند به m طریق رخ دهد، فرض بر این است که این m طریق متمایزند، مگر آنکه خلاف آن بیان شود. به‌این نکته در سرتاسر متن کتاب پایبند خواهیم بود.

مثال ۱.۱ کتابخانهٔ دانشکده‌ای ۴۰کتاب درسی دربارهٔ جامعه‌شناسی و ۵۰ کتاب درسی دربارهٔ انسان‌شناسی دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل جمع، دانشجویی که در این دانشکده تحصیل می‌کند، به‌منظور فراگیری بیشتر دربارهٔ این یا آن موضوع، می‌تواند بین $۹۰ = ۵۰ + ۴۰$ کتاب درسی انتخاب به‌عمل آورد.

مثال ۲.۱ قاعدهٔ بالا را می‌توان به بیشتر از دو کار تعمیم داد مشروط بر آنکه هیچ جفتی از کارها را نتوان همزمان انجام داد. به‌عنوان مثال، یک مدرس علم کامپیوتر که در هریک از زمینه‌های اپل[1]، بیسیک[2]، فورترن[3]، و پاسکال[4] مثلاً، پنج کتاب مقدماتی دارد، می‌تواند هریک از این ۲۰ کتاب را به دانشجوی علاقه‌مند به فراگیری نخستین زبان برنامه‌نویسی توصیه کند.

مثال ۳.۱ مدرس علم کامپیوتر مثال ۲.۱ دو همکار دارد. یکی از این همکاران سه کتاب درسی دربارهٔ تحلیل الگوریتمها، و دیگری پنج کتاب درسی در این زمینه دارد. اگر تعداد ماکسیمم کتابهایی مربوط به این موضوع را که مدرس نامبرده می‌تواند از همکارانش قرض بگیرد، با n نشان دهیم، آنگاه $۵ \leqslant n \leqslant ۸$، زیرا ممکن است هردو همکار نسخه‌هایی از کتاب (یا کتابهای) درسی یکسانی داشته باشند.

مثال زیر مدخلی برای معرفی اصل دوم شمارش است.

مثال ۴.۱ مدیر کارخانه‌ای به‌منظور اتخاذ تصمیمی دربارهٔ توسعهٔ کارخانه، ۱۲ نفر از کارمندان خود را در دو گروه گرد می‌آورد. گروه A مرکب از پنج عضو است و بناست دربارهٔ نتایج مساعد احتمالی چنین توسعه‌ای تحقیقاتی به‌عمل آورد. گروه دیگر، یعنی گروه B، که مرکب از هفت کارمند است دربارهٔ نتایج نامساعد احتمالی بررسیهایی را به‌عمل خواهد آورد. اگر، قبل از اتخاذ تصمیم، مدیر نامبرده بخواهد فقط با یکی از این اعضا دربارهٔ تصمیم خود صحبت کند، آنگاه بنابر قانون حاصل‌جمع، می‌تواند ۱۲ کارمند را احضار کند. ولی، به‌منظور قضاوت بی‌طرفانه‌تر، مدیر نامبرده تصمیم می‌گیرد که روز دوشنبه با عضوی از گروه A، و سپس روز سه‌شنبه با عضوی از گروه B صحبت کند تا به اتخاذ تصمیمی نائل گردد. با به‌کارگیری اصل زیر، ملاحظه می‌کنیم که او می‌تواند به $۳۵ = ۷ \times ۵$ طریق دو کارمند متعلق به گروههای دوگانه را برگزیند و با آنها صحبت کند.

> **قاعدهٔ حاصل‌ضرب:** اگر عملی به دو مرحلهٔ اول و دوم تقسیم شود و اگر در مرحلهٔ اول m نتیجهٔ ممکن و برای هریک از این نتایج، n نتیجهٔ ممکن در مرحلهٔ دوم وجود داشته باشد، آنگاه کلِ عمل نامبرده می‌تواند با ترتیب یاد شده، به mn طریق انجام شود.

گاهی این قاعده را اصل انتخاب نیز می‌نامند.

1- APL 2- BASIC 3- FORTRAN 4- Pascal

Scanned with CamScanner

مثال ۵.۱ باشگاه هنرهای نمایشی دانشگاهی برای به صحنه آوردن نمایشنامه‌ای در بهار، آزمونهایی برای انتخاب شخصیتهای نمایش برگزار می‌کند. بین شش مرد و هشت زن که نامزد اجرای نقش مرد و زن اصلی نمایش هستند، کارگردان می‌تواند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، زوج اصلی نمایش را به $۶ \times ۸ = ۴۸$ طریق برگزیند.

مثال ۶.۱ با در نظرگرفتن ساخت پلاکهای اتومبیل که حاوی دو حرف لاتین و سپس چهار رقم است، تعمیمهای گوناگونی از قاعدهٔ بالا را توضیح می‌دهیم.

الف) اگر هیچ حرف یا رقمی تکراری نباشد، آنگاه $۲۶ \times ۲۵ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۳,۲۷۶,۰۰۰$ پلاک متفاوت وجود خواهد داشت.

ب) اگر تکرار حروف و ارقام مجاز باشد، آنگاه وجود $۲۶ \times ۲۶ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۶,۷۶۰,۰۰۰$ پلاک متفاوت امکانپذیر خواهد بود.

پ) اگر مانند قسمت (ب) تکرار مجاز باشد، چند تا از پلاکها فقط حروف صدادار (یعنی A، E، I، O، U) و ارقام زوج دارند؟ (۰ یک عدد صحیح زوج است.)

مثال ۷.۱ اطلاعات در حافظهٔ اصلی کامپیوتر در سلولهای حافظه ذخیره می‌شوند. برای تشخیص سلولها در حافظهٔ اصلی کامپیوتر، به هر سلول نام یکتایی را، که آدرس آن خوانده می‌شود، نسبت می‌دهند. در بعضی از کامپیوترها، آدرس به‌صورت فهرستی مرتب از هشت نماد است، که در آن هر نماد یکی از دو بیت[1] (رقم دودویی) ۰ یا ۱ است. این فهرست حاوی هشت بیت را یک بایت[2] می‌نامند. با به‌کارگیری قاعدهٔ حاصل‌ضرب ملاحظه می‌کنیم که $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۸ = ۲۵۶$ تا از این بایتها وجود دارد. بنابر این، ۲۵۶ آدرس برای سلولهای حافظه، که می‌توان اطلاعاتی را در آنجا ذخیره کرد، دراختیار داریم.

بعضی از ماشینها (از جمله، خانوادهٔ PDP۱۱)[3] آدرسهای دوبایتی به‌کار می‌برند. چنین آدرسی از دو بایت متوالی، یا از ۱۶ بیت متوالی، تشکیل شده است، و از این رو، امکان ذخیره‌کردن تعداد $۲۵۶ \times ۲۵۶ = ۲^۸ \times ۲^۸ = ۲^{۱۶} = ۶۵,۵۳۶$ فقره اطلاعات وجود دارد. کامپیوترهای دیگر (از جمله، خانوادهٔ IBM PC/RT)[4] سیستمهای آدرس‌گذاری چهار بایتی به‌کار می‌برند. در این وضعیت، برای ذخیره‌سازی اطلاعات در سلولهای حافظهٔ ماشین، تعداد $۲^۸ \times ۲^۸ \times ۲^۸ \times ۲^۸ = ۲^{۳۲} = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۶$ آدرس در دسترس است.

مثال ۸.۱ گاهی برای حل مسأله‌ای لازم است اصول شمارش متفاوت را باهم ترکیب کنیم. در اینجا ملاحظه خواهیم کرد که برای رسیدن به جواب، به‌کارگیری هردو قاعدهٔ حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب لازم است.

در برخی از نسخه‌های اولیهٔ زبان برنامه‌نویسی بیسیک، نام متغیر عبارت است از یک حرف $(A، B، C، \ldots)$ یا یک حرف که رقمی در پی دارد. چون کامپیوتر بین حروف بزرگ و کوچک تمایزی قائل نمی‌شود، a و A را نام متغیر واحدی می‌گیرد، همان‌طور که E۷ و e۷ را نیز یکی می‌گیرد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲۶ \times ۱۰ = ۲۶۰$

1- Bit 2- Byte

۳- خانوادهٔ کامپیوترهای PDP ۱۱ محصول Digital Equipment Corporation است.

۴- پردازشگر IBM PC/RT به‌وسیلهٔ International Business Machines Corporation ساخته می‌شود.

Scanned with CamScanner

نام متغیر، مرکب از یک حرف که رقمی در پی دارد، وجود دارد؛ و چون ۲۶ نام متغیر مرکب از یک حرف وجود دارد، بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع، در این زبان برنامه‌نویسی ۲۸۶ = ۲۶۰ + ۲۶ نام متغیر وجود دارد.

۲.۱ جایگشتها

ضمن ادامهٔ بررسی کاربردهای قاعدهٔ حاصل‌ضرب، حال می‌پردازیم به شمردن ترتیبهای خطی اشیا. وقتی اشیا متمایز باشند، این ترتیبها را غالباً جایگشت می‌نامند. برای بررسی این ترتیبهای خطی روشهای قانونمندی را ارائه خواهیم کرد و برای این منظور با مثالی نوعی آغاز می‌کنیم.

مثال ۹.۱ در کلاسی که ۱۰ دانشجو دارد، بناست پنج نفر را برای گرفتن عکسی در یک ردیف بنشانند. چند ترتیب خطی از این نوع امکانپذیر است؟

در اینجا واژهٔ کلیدی عبارت است از ترتیب که بر اهمیت نظم دلالت دارد. اگر A، B، C، ...، I، و J ۱۰ دانشجوی نامبرده را نشان دهد، آنگاه BCEFI، CEFIB، و ABCFG سه تا از این ترتیبهای متفاوت‌اند، باوجود آنکه پنج دانشجوی دو ترتیب نخست یکسان‌اند.

برای پاسخ به‌این پرسش جاها و تعداد ممکن دانشجویانی را که برای پرکردن هرجا می‌توانیم برگزینیم، در نظر می‌گیریم. پرکردن هر جا مرحله‌ای از کارمان است.

۱۰	×	۹	×	۸	×	۷	×	۶
جای نخست		جای دوم		جای سوم		جای چهارم		جای پنجم

جای نخست این ردیف را هریک از ۱۰ دانشجو می‌تواند اشغال کند. چون در اینجا تکرار امکانپذیر نیست، برای پرکردن جای دوم می‌توانیم فقط یکی از ۹ دانشجوی دیگر را برگزینیم. اگر به‌همین روش ادامه دهیم، ملاحظه می‌کنیم که برای پرکردن جای پنجم و نهایی، فقط از بین ۶ دانشجو باید یکی را برگزینیم. بنابر این، تعداد کل ترتیبهای پنج دانشجوی منتخب از کلاس ۱۰ نفری مورد بحث، ۳۰,۲۴۰ است.

اگر جاها را در جهت مخالف پرکنیم، دقیقاً همان پاسخ به‌دست می‌آید (۱۰ × ۹ × ۸ × ۷ × ۶). اگر نظم مورد نظر عبارت باشد از سوم، نخست، چهارم، پنجم، و دوم (یعنی، در آغاز جای سوم، و سپس جاهای اول، چهارم، پنجم، و دوم را پرکنیم)، آنگاه پاسخ ۷ × ۸ × ۱۰ × ۶ × ۹ است.

همان‌طورکه در مثال ۹.۱ دیده شد، غالباً بعضی از حاصل‌ضربهای اعداد صحیح مثبت متوالی در مسائل مربوط به شمارش نقش بازی می‌کنند. در نتیجه، وقتی با چنین مسائلی سروکار داریم، نمادگذاری زیر سودمند است. این نمادگذاری غالباً به ما امکان می‌دهد تا جوابها را به‌صورتی مناسبتر بیان کنیم.

تعریف ۱.۱ به‌ازای عددصحیحی مانند n، $n \geqslant 0$ فاکتوریل (که با $n!$ نشان داده‌می‌شود) چنین تعریف‌می‌شود:

Scanned with CamScanner

$$0! = 1$$

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1), \qquad n \geqslant 1 \text{ به‌ازای}$$

ملاحظه می‌شود که $1 = 1!$، $2 = 2!$، $6 = 3!$، $24 = 4!$، و $120 = 5!$. علاوه برآن، به‌ازای هر $n \geqslant 0$، $(n+1)! = (n+1)(n)!$.

باید آگاه باشیم که مقادیر $n!$ با چه سرعتی افزایش می‌یابند. از این‌رو، قبل از ادامهٔ سخن، سعی می‌کنیم تا درک بهتری از سرعت افزایش $n!$ به‌دست آوریم. محاسبه نشان می‌دهد که $10! = 3,628,800$، و این درست برابر است با تعداد ثانیه‌ها در شش هفته. در نتیجه، $11!$ از تعداد ثانیه‌ها در یک سال و $12!$ از تعداد ثانیه‌ها در ۱۲ سال تجاوز می‌کند، و $13!$ از تعداد ثانیه‌ها در یک قرن به‌مراتب فراتر می‌رود.

و اینک اگر نمادگذاری فاکتوریل را به‌کار گیریم، می‌بینیم که می‌توان پاسخ مثال ۹.۱ را به‌صورت فشرده‌تر زیر بیان کرد:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{5!}$$

تعریف ۲.۱ گردایه‌ای از n شیء متمایز مفروض است. هر ترتیب (خطی) این اشیا را یک جایگشت گردایهٔ نامبرده می‌نامند.

اگر با حروف a، b، c کار کنیم ملاحظه می‌شود که شش طریق برای مرتب کردن، یا جای گردانی، همهٔ این حروف وجود دارد: abc، acb، bac، bca، cab، cba. اگر هر بار به مرتب کردن فقط دو تا از حروف علاقمند باشیم، آنگاه ۶ تا از این جایگشتهای دو حرفی برای گردایهٔ نامبرده خواهیم داشت: ab، ba، ac، ca، bc، cb.

به‌طورکلی، اگر n شئ متمایز که با a_1، a_2، $\cdots$، a_n نشان داده می‌شوند، داشته باشیم و اگر r عددی صحیح باشد به‌طوری که $1 \leqslant r \leqslant n$، آنگاه بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد جایگشتهای r تایی از n شئ نامبرده عبارت است از

$$\underset{\text{جای نخست}}{n} \times \underset{\text{جای دوم}}{(n-1)} \times \underset{\text{جای سوم}}{(n-2)} \times \cdots \times \underset{\text{جای r ام}}{(n-r+1)} =$$

$$(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

این عدد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $r = 0$، $P(n,0) = 1 = n!/(n-0)!$؛ از این‌رو، $P(n,r) = n!/(n-r)!$، که در آن $0 \leqslant r \leqslant n$. مثال ۹.۱ حالت خاصی از این نتیجه است که در آن $n = 10$، $r = 5$، و $P(10,5) = 30,240$. وقتی همهٔ n شیء واقع در گردایهٔ مفروض را جای گردانی می‌کنیم، داریم $r = n$ و ملاحظه می‌کنیم که $P(n,n) = n!/0! = n!$.

Scanned with CamScanner

به‌عنوان مثال، اگر $n \geqslant ۲$، آنگاه $P(n,۲) = n!/(n-۲)! = n(n-۱)$. وقتی $n > ۳$، می‌بینیم که $P(n,n-۳) = n!/[n-(n-۳)]! = n!/۳! = (n)(n-۱)(n-۲)\cdots(۵)(۴)$.

تعداد جایگشتهای r تایی، $۰ \leqslant r \leqslant n$، از گردایه‌ای که n شیء دارد، برابر است با $P(n,r) = n!/(n-r)!$. (به‌خاطر داشته باشید که $P(n,r)$ تعداد ترتیبهای (خطی) را که در آنها اشیا نمی‌توانند تکرار شوند، می‌شمرد.) ولی اگر تکرار مجاز باشد، آنگاه بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، و با فرض $r \geqslant ۰$، n^r ترتیب ممکن وجود دارد.

مثال ۱۰.۱ تعداد جایگشتهای حروف واژهٔ COMPUTER برابر با !۸ است. اگر فقط چهارتا از حروف به‌کار رود، تعداد جایگشتها (چهارتایی) $P(۸,۴) = ۸!/(۸-۴)! = ۸!/۴! = ۱۶۸۰$ است. اگر تکرار حروف مجاز باشد، تعداد دنباله‌های ۱۲ حرفی ممکن $۸^{۱۲} \doteq ۶{,}۸۷۲ \times ۱۰^{۱۰}$ است.[۱]

مثال ۱۱.۱ برخلاف مثال ۱۰.۱، تعداد ترتیبهای (خطی) چهار حرف واژهٔ BALL برابر است با ۱۲، و نه !۴ یا ۲۴. زیرا این چهار حرف متمایز نیستند. برای به‌دست آوردن ۱۲ ترتیب نامبرده، می‌توانیم آنها را، همان‌طور که در جدول ۱.۱ (الف) نشان داده شده است، فهرست کنیم.

اگر دو L را با نوشتن $L_۱$، $L_۲$، از یکدیگر متمایز کنیم، آنگاه می‌توانیم ایده‌های قبلی خود را دربارهٔ جایگشتهای اشیای متمایز به‌کار ببریم؛ با چهار نماد متمایز B، A، $L_۱$، $L_۲$، $۲۴ = !۴$ جایگشت داریم. این جایگشتها در جدول ۱.۱(ب) فهرست شده‌اند. جدول ۱.۱ این نکته را آشکار می‌سازد که به‌ازای هر ترتیبی که در آن Lها غیرقابل تمیزند، جفتی از جایگشتهای دارای Lهای متمایز، متناظر می‌شود. در نتیجه،

$$(\text{تعداد جایگشتهای نمادهای } L_۲, L_۱, A, B) = (\text{تعداد ترتیبهای نمادهای } L, L, A, B) \times ۲$$

جدول ۱.۱

(ب)		(الف)
$ABL_۱L_۲$	$ABL_۲L_۱$	$ABLL$
$AL_۱BL_۲$	$AL_۲BL_۱$	$ALBL$
$AL_۱L_۲B$	$AL_۲L_۱B$	$ALLB$
$BAL_۱L_۲$	$BAL_۲L_۱$	$BALL$
$BL_۱AL_۲$	$BL_۲AL_۱$	$BLAL$
$BL_۱L_۲A$	$BL_۲L_۱A$	$BLLA$
$L_۱ABL_۲$	$L_۲ABL_۱$	$LABL$
$L_۱AL_۲B$	$L_۲AL_۱B$	$LALB$
$L_۱BAL_۲$	$L_۲BAL_۱$	$LBAL$
$L_۱BL_۲A$	$L_۲BL_۱A$	$LBLA$
$L_۱L_۲AB$	$L_۲L_۱AB$	$LLAB$
$L_۱L_۲BA$	$L_۲L_۱BA$	$LLBA$

و پاسخ مسألهٔ اصلی، یعنی تعداد همهٔ ترتیبهای چهار حرف واژهٔ BALL، عبارت است از $۱۲ = ۴!/۲$.

۱- نماد «$\doteq$» خوانده می‌شود «تقریباً برابر است با».

Scanned with CamScanner

مثال ۱۲.۱ با به‌کارگیری ایدهٔ ارائه شده در مثال ۱۰۱، اینک ترتیبهای همهٔ شش حرف واژهٔ PEPPER را در نظر می‌گیریم.

برای هر ترتیبی که در آن P ها متمایز نشده باشند، ۶ = !۳ ترتیب وجود دارد که در آنها P ها متمایز شده‌اند. به‌عنوان مثال، $P_1EP_2P_3ER$، $P_1EP_3P_2ER$، $P_2EP_1P_3ER$، $P_2EP_3P_1ER$، $P_3EP_1P_2ER$، و $P_3EP_2P_1ER$ همگی متناظر با PEPPER هستند مشروط برآنکه زیرنویسهای Pها را برداریم. علاوه برآن، وقتی Eها را متمایز بگیریم، متناظر با ترتیب $P_1EP_2P_3ER$، دو جایگشت $P_1E_1P_2P_3E_2R$ و $P_1E_2P_2P_3E_1R$ را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه،

(تعداد ترتیبهای حروف واژهٔ PEPPER)(!۳)(!۲)

= (تعداد جایگشتهای نمادهای $R, E_2, P_3, P_2, E_1, P_1$)

از این‌رو، تعداد ترتیبهای شش حرف واژهٔ PEPPER برابر با ۶۰ = [(!۳)(!۲)]/!۶ است.

پیش از بیان اصلی کلی برای محاسبهٔ تعداد ترتیبهای حاوی نمادهای تکراری، توجه داشته باشید که در دو مثال پیشین مسأله‌ای از نوعی جدید را با مرتبط کردن با اصول شمارش قبلی حل کردیم. به‌طورکلی در ریاضیات، این کاری متداول است و هنگام اشتقاق فرمولهای گسسته و ترکیبیاتی غالباً پیش می‌آید.

> به‌طورکلی، اگر n شیء حاوی n_1 تا از نوع نخست، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_r تا از نوع rام وجود داشته باشد، که در آن $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$، آنگاه $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ ترتیب (خطی) برای n شیء مفروض وجود دارد. (اشیای هم نوع غیرقابل تمیزند).

مثال ۱۳.۱ MASSASAUGA یک مار سمی قهوه‌ای و سفید بومی امریکای شمالی است. اگر همهٔ حروف واژهٔ MASSASAUGA را مرتب کنیم، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{10!}{4!3!1!1!1!} = 25,200$$

ترتیب ممکن وجود دارد. بین این ترتیبها،

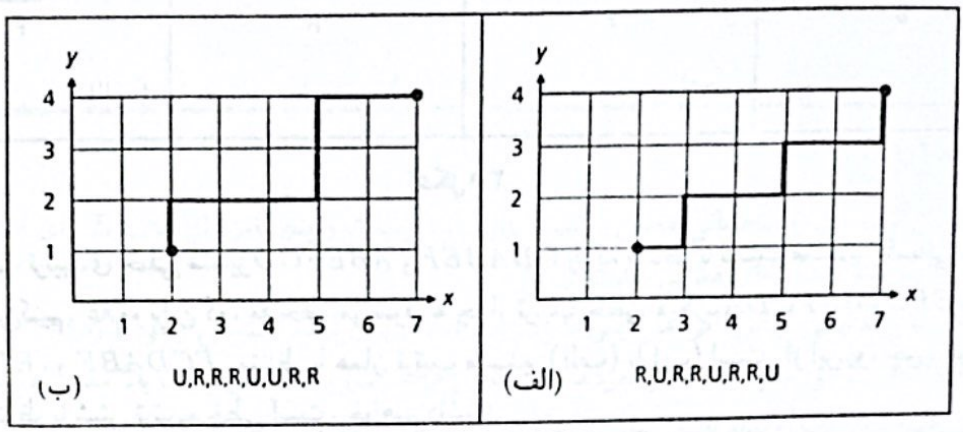
$$\frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$$

ترتیب وجود دارد که در آنها هر چهار A کنار هم‌اند. برای به‌دست آوردن نتیجهٔ اخیر، همهٔ ترتیبهای هفت نماد AAAA (یک نماد)، S، S، M، U، G را در نظر گرفتیم.

مثال ۱۴.۱ تعداد مسیرهای (پلکانی) واقع در صفحهٔ xy از (۱,۲) به (۴,۷) را تعیین کنید که هر مسیر از پله‌هایی تشکیل شده است که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U) می‌روند. خطوط پر در شکل ۱۰۱ دوتا از این مسیرها را نشان می‌دهد.

Scanned with CamScanner

زیر هر مسیر در شکل ۱.۱، پله‌ها را فهرست کرده‌ایم. به عنوان مثال، در قسمت (الف)، فهرست R، U، R، R، U، R، R، U نشان می‌دهد که با شروع از نقطهٔ (۲, ۱)، نخست یک واحد به راست [به (۳, ۱)]، سپس یک واحد به بالا [به (۳, ۲)]، به‌دنبال آن دو واحد به راست [به (۵, ۲)]، و غیره، می‌رویم تا به نقطهٔ (۷, ۴) برسیم. این مسیر از ۵ تا R برای حرکت به راست و ۳ تا U برای حرکت به بالا تشکیل شده است.



شکل ۱.۱

مسیر نشان داده شده در قسمت (ب) شکل نیز از ۵ تا R و ۳ تا U تشکیل شده است. به‌طورکلی، تمامی سفر، از (۲, ۱) به (۷, ۴)، به ۵ = ۲ − ۷ حرکت افقی به‌طرف راست و ۳ = ۱ − ۴ حرکت قائم به طرف بالا نیاز دارد. در نتیجه، هر مسیر مورد نظر متناظر با فهرستی از ۵ تا R و ۳ تا U است، و تعداد این مسیرها برابر است با تعداد ترتیبهای ۵ تا R و ۳ تا U، یعنی ۵۶ = (!۳!۵)/!۸.

مثال ۱۵.۱ حال کاری کمی مجردتر انجام می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر n و k اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری که $n = ۲k$، آنگاه $n!/۲^k$ عددی صحیح است. چون استدلالمان متکی بر شمارش است، پس این مثالی از یک اثبات ترکیبیاتی است.

n نماد $x_۱$، $x_۱$، $x_۲$، $x_۲$، ...، x_k، x_k را در نظر می‌گیریم. تعداد طرقی که می‌توانیم همهٔ این $n = ۲k$ نماد را مرتب کنیم عددی صحیح است و عبارت است از

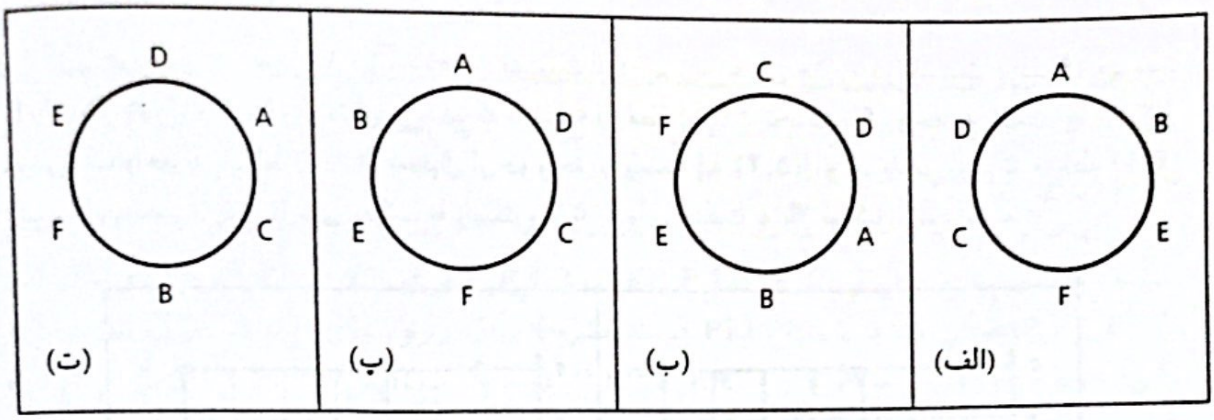
$$\frac{n!}{\underbrace{۲!۲!\cdots ۲!}_{k \text{ عامل } ۲!}} = \frac{n!}{۲^k}$$

سرانجام، آنچه را تا اینجا آموخته‌ایم در مورد وضعیتی که در آن ترتیبها خطی نباشند به‌کار خواهیم برد.

مثال ۱۶.۱ اگر شش نفر، که با A، B، ...، F نشان داده شده‌اند، دور میزگردی بنشینند، و اگر ترتیبهایی را که یکی از دوران دیگری به‌دست می‌آید، یکی بگیریم، چند ترتیب مستدیر متفاوت امکانپذیر است؟ (در شکل ۲.۱، ترتیبهای (الف) و (ب) یکسان تلقی می‌شوند، درحالی‌که، (ب)، (پ) و (ت) سه ترتیب متمایزند.)

همانند بسیاری از موقعیتهای جدید، می‌کوشیم که این مسأله را با مسائلی که قبلاً دیده‌ایم مربوط کنیم. اگر شکلهای ۲.۱ (الف) و ۲.۱ (ب) را در نظر بگیریم، و اگر از بالای دایره شروع و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

Scanned with CamScanner



شکل ۲.۱

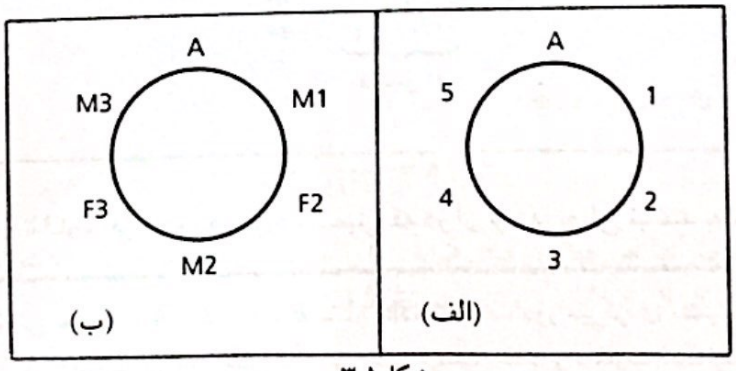
حرکت کنیم، ترتیبهای خطی متمایز $ABEFCD$ و $CDABEF$ را، که متناظر با ترتیب مستدیر یکسانی هستند، فهرست می‌کنیم. علاوه براین دو، ملاحظه می‌شود که چهار ترتیب خطی دیگر ـ $BEFCDA$، $DABEFC$، $EFCDAB$، و $FCDABE$ ـ متناظر با همان ترتیب مستدیر (الف) یا (ب) است. از این‌رو، چون هر ترتیب مستدیر متناظر با شش ترتیب خطی است، خواهیم داشت:

$$۶! = (\text{تعداد ترتیبهای خطی } A، B، \ldots، F) = (\text{تعداد ترتیبهای مستدیر } A، B، \ldots، F) \times ۶$$

در نتیجه، $۶!/۶ = ۵! = ۱۲۰$ ترتیب برای A، B، ...، F دور این میزگرد وجود دارد.

مثال ۱۷.۱ حال فرض کنیم شش نفر مثال ۱۶۰۱ سه زن همراه با شوهرانشان، و A، B، و C زنها باشند. می‌خواهیم این شش نفر را دور همان میز به گونه‌ای بنشانیم که زنان و مردان یک در میان قرار گیرند. (تکرار می‌کنیم، ترتیبهایی را که یکی از دوران دیگری به‌دست می‌آید یکی می‌گیریم.)

قبل از اینکه این مسأله را حل کنیم، مسأله ۱۶۰۱ را با روشی دیگر حل می‌کنیم و این ما را در حل مسألهٔ حاضر یاری خواهد داد. اگر A را به‌صورت نشان داده شده در شکل ۳۰۱ (الف) پشت میز بنشانیم، پنج جا (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و ابتدا از A) باید پر شود. پرکردن این جاها با B، C، ...، F همان مسألهٔ مرتب کردن خطی B، C، ...، F است و این‌را هم می‌توان به $۵! = ۱۲۰$ طریق انجام داد.



شکل ۳.۱

برای حل مسأله جدید، یعنی یک در میان نشستن زنان و مردان روشی را که در شکل ۳۰۱ (ب) نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. A (یک زن) همانند قبل قرار می‌گیرد. جای بعدی، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و ابتدا از A، با $M_۱$ (مرد ۱) نشان داده شده است و می‌توان آن‌را به سه طریق پرکرد. اگر در جهت حرکت

Scanned with CamScanner

عقربه‌های ساعت و ابتدا از A ادامه دهیم، جای $F_۲$ (زن ۲) را می‌توان به دو طریق پر کرد. اگر به همین منوال پیش رویم، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، به $۱۲ = ۱ \times ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۳$ طریق می‌توان این شش نفر را چنان مرتب کرد که هیچ دو مرد یا دو زنی کنار هم قرار نگیرند.

Scanned with CamScanner

۵۲ مهره به رنگهای سبز، زرد، قرمز، و آبی از هر رنگ ۱۳ مهره به شماره‌های از ۱ تا ۱۳ در کیسه‌ای وجود دارد. اگر از ما خواسته شود که، متوالیاً و بدون دیدن مهره‌ها، سه مهره بیرون آوریم، آنگاه بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ = \frac{۵۲!}{۴۹!} = P(۵۲, ۳)$$

امکان وجود دارد که یکی از این امکانات عبارت است از، مثلاً، مهرهٔ قرمز به شمارهٔ ۱ (R۱)، مهرهٔ سبز به شمارهٔ ۹ (G۹)، مهرهٔ زرد به شمارهٔ ۱۳ (Y۱۳). در عوض، اگر هر بار همزمان سه مهره از کیسه انتخاب کنیم به‌طوری‌که ترتیب انتخاب مهره‌ها برایمان مهم نباشد، آنگاه شش جایگشت Y۱۳ – G۹ – R۱، G۹ – R۱ – Y۱۳، R۱ – Y۱۳ – G۹، G۹ – Y۱۳ – R۱، Y۱۳ – G۹ – R۱ و Y۱۳ – R۱ – G۹ همگی متناظر با فقط یک انتخاب (نامرتب) هستند. در نتیجه، هر انتخاب، یا هر ترکیب سه مهره، بدون توجه به ترتیب، متناظر با !۳ جایگشت همان سه مهره است. این مطلب به زبان معادلات به‌صورت زیر ترجمه می‌شود:

(تعداد انتخابهای سه‌تایی از کیسهٔ ۵۲ مهره‌ای بالا)×!۳

تعداد جایگشتهای ۵۲ مهره سه‌به‌سه=

$$= P(۵۲, ۳) = \frac{۵۲!}{۴۹!}$$

در نتیجه، از ۵۲ مهرهٔ بالا، بدون دیدن مهره‌ها، می‌توان به ۲۲,۱۰۰ = (!۴۹!۳)/!۵۲ طریق سه‌مهره بیرون کشید.

Scanned with CamScanner

به‌طورکلی، اگر با n شیء متمایز آغاز کنیم، هر انتخاب یا ترکیب r تا از این اشیا، بدون توجه به ترتیب، متناظر با $r!$ جایگشت r تایی این n شیء است. بدین‌سان، تعداد ترکیبهای r تایی گردایه‌ای از n شیء، که با $C(n,r)$ نشان داده شده می‌شود و در آن $0 \leqslant r \leqslant n$، در $(r!) \times C(n,r) = P(n,r)$ صدق می‌کند و

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 0 \leqslant r \leqslant n$$

علاوه بر $C(n,r)$ نماد $\binom{n}{r}$ نیز غالباً به‌کار می‌رود. هریک از دو نماد $C(n,r)$ و $\binom{n}{r}$ را گاهی چنین می‌خوانند «انتخاب r تایی از n». توجه داشته باشید که $C(n,0) = 1$.

سخنی برای گوش شنوا! وقتی با مسأله‌ای دربارهٔ شمارش مواجه می‌شویم، باید از خود بپرسیم که ترتیب در این مسأله درنظر گرفته می‌شود یا نه. وقتی ترتیب مدنظر باشد، فکر خود را برحسب جایگشتها و ترتیبها و قاعدهٔ حاصل‌ضرب تنظیم می‌کنیم. وقتی ترتیب مدنظر نباشد، ممکن است ترکیب نقش کلیدی در حل مسألهٔ مورد بحث داشته باشد.

مثال ۱۸.۱ بانوی نیکوکاری ضیافت شامی به افتخار تعدادی از اعضای مؤسسهٔ خیریه‌اش ترتیب داده است. به سبب کمی امکانات، فقط می‌تواند ۱۱ نفر از ۲۰ نفر عضو مؤسسه را دعوت کند. در اینجا ترتیب مهم نیست؛ از این‌رو، او می‌تواند «۱۱ خوش‌شانس» را به $C(20,11) = \binom{20}{11} = 20!/(11!9!) = 167,960$ طریق دعوت کند. ولی، به‌محض ورود این ۱۱ نفر، چگونه نشاندن آنان دور میز ناهارخوری مستطیل شکل خانه‌اش، مسأله‌ای مربوط به ترتیبهاست. متأسفانه، هیچ قسمتی از نظریهٔ ترکیبها و جایگشتها نمی‌تواند خانم میزبان ما را، در برخورد با «نه نفر آزرده‌خاطری» که دعوت نشده‌اند، یاری دهد.

مثال ۱۹.۱

الف) از دانشجویی که در امتحان تاریخ شرکت کرده است، خواسته شده است که به هفت‌تا از ۱۰ پرسش تشریحی پاسخ دهد. در اینجا هیچ نکته‌ای دربارهٔ ترتیب مطرح نشده است؛ از این‌رو، دانشجو می‌تواند امتحان خود را به

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

طریق پاسخ دهد.

ب) اگر دانشجو موظف باشد که به سه پرسش از پنج‌تای نخست و به چهار پرسش از پنج‌تای دیگر پاسخ دهد، آنگاه می‌تواند به $\binom{5}{3} = 10$ طریق سه پرسش از پنج‌تای نخست و به $\binom{5}{4} = 5$ طریق چهار پرسش دیگر را برگزیند. در نتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، دانشجو می‌تواند به $\binom{5}{3}\binom{5}{4} = 10 \times 5 = 50$ طریق امتحان خود را به‌پایان رساند.

پ) سرانجام، اگر در این امتحان از دانشجو خواسته شده‌باشد که به هفت تا از ۱۰ پرسش، که حداقل سه‌تای آنها از پنج‌تای نخست برگزیده شوند، پاسخ دهد آنگاه سه حالت را باید در نظر گرفت:

یک) این دانشجو به سه‌تا از پنج پرسش نخست و چهارتا از پنج‌تای آخر پاسخ می‌دهد: بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، مانند قسمت (ب)، این به $\binom{5}{3}\binom{5}{4} = 10 \times 5 = 50$ طریق رخ می‌دهد.

Scanned with CamScanner

دو) این دانشجو چهارتا از پنج پرسش نخست و سه تا از پنج پرسش آخر را برمی‌گزیند: باز بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این به $\binom{5}{4}\binom{5}{3} = 5 \times 10 = 50$ طریق رخ می‌دهد.

سه) این دانشجو تصمیم می‌گیرد که به هر پنج پرسش نخست و به دوتا از پنج‌تای آخر پاسخ دهد: قاعدهٔ حاصل‌ضرب به ما می‌گوید که این حالت آخر به $\binom{5}{5}\binom{5}{2} = 1 \times 10 = 10$ طریق می‌تواند رخ دهد.

از ترکیب نتایج حالات (یک)، (دو)، و (سه)، بنابر قاعدهٔ حاصل جمع می‌بینیم که این دانشجو می‌تواند

$$\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 50 + 50 + 10 = 110$$

انتخاب هفت‌پرسشی (از بین ۱۰ تا) انجام دهد به‌طوری‌که هر انتخاب حاوی حداقل سه‌تا از پنج پرسش نخست باشد.

مثال ۲۰.۱

الف) در دبیرستانی معلم ورزش باید برای تیم والیبال، نه دختر از کلاسهای سوم و چهارم دبیرستان انتخاب کند. اگر ۲۸ نفر در کلاسهای سوم و ۲۵ نفر در کلاسهای چهارم دبیرستان باشند، آنگاه این معلم می‌تواند به $\binom{53}{9} = 4,431,613,550$ طریق انتخاب خود را انجام دهد.

ب) اگر دو نفر از دانش‌آموزان کلاسهای سوم و یک نفر از دانش‌آموزان کلاسهای چهارم بهترینها در آبشار زدن باشند و حضورشان در تیم الزامی‌باشد،آنگاه افراد دیگر تیم را می‌توان به $\binom{50}{6} = 15,890,700$ طریق برگزید.

پ) به‌منظور شرکت در یک مسابقه، تیم مورد بحث باید از چهار دانش‌آموز کلاسهای سوم و پنج دانش‌آموز کلاسهای چهارم تشکیل شود. معلم می‌تواند چهار دانش‌آموز کلاسهای سوم را به $\binom{28}{4}$ طریق انتخاب کند. در مقابل هریک از این انتخابها، $\binom{25}{5}$ طریق برای برگزیدن پنج دانش‌آموز کلاسهای چهارم پیش روی دارد. در نتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب این معلم می‌تواند به $\binom{28}{4}\binom{25}{5} = 1,087,836,750$ طریق تیم خود را برای شرکت در مسابقهٔ مورد نظر انتخاب کند.

برخی از مسائل را می‌توان، بسته به نحوهٔ تحلیل موقعیت، هم از دیدگاه ترتیبها و هم از دیدگاه ترکیبها مورد بررسی قرار داد. مثال زیر این نکته را روشن می‌سازد.

مثال ۲۱.۱ معلم ورزش مثال ۲۰.۱ باید چهار تیم والیبال نه نفره از بین ۳۶ نفر دختر سال اول کلاس تربیت‌بدنی، تشکیل دهد. او به چند طریق می‌تواند این چهار تیم را انتخاب کند؟ تیمها را A، B، C، و D می‌نامیم.

الف) معلم برای تشکیل تیم A می‌تواند به $\binom{36}{9}$ طریق نه دختر از ۳۶ نفر ثبت‌نام شده را انتخاب کند. برای تشکیل تیم B، فرایند انتخاب $\binom{27}{9}$ امکان را فراهم می‌آورد. در نتیجه، برای انتخاب تیمهای C و D، به‌ترتیب $\binom{18}{9}$ و $\binom{9}{9}$ طریق ممکن وجود خواهد داشت. از این‌رو، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، چهار تیم را می‌توان به

$$\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \left(\frac{36!}{9!27!}\right)\left(\frac{27!}{9!18!}\right)\left(\frac{18!}{9!9!}\right)\left(\frac{9!}{9!0!}\right)$$

$$= \frac{36!}{9!9!9!9!} = 2,145 \times 10^{19}$$

طریق برگزید.

Scanned with CamScanner

ب) برای ارائهٔ راه‌حلی دیگر، فرض کنیم ۳۶ دانش‌آموز کلاس تربیت بدنی به‌صورت زیر در یک صف قرار گرفته باشند:

دانش‌آموز	دانش‌آموز	...	دانش‌آموز	دانش‌آموز	دانش‌آموز
۳۶ام	۳۵ام		سوم	دوم	نخست

به‌منظور انتخاب چهار تیم مورد نظر، باید نه‌تا A، نه‌تا B، نه‌تا C، و نه تا D را در این ۳۶ خانه توزیع کنیم. تعداد طرقی که برای انجام این کار پیش روی داریم برابر است با تعداد ترتیبهای ۳۶ حرف به‌طوری که هر ترتیب حاوی نه‌تا از هریک از چهار حرف A، B، C، و D باشد. حال این همان مسأله آشنای ترتیبهای اشیای نامتمایز است، و پاسخ عبارت است از

$$\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$$

یعنی همان پاسخی که در قسمت (الف) به‌دست آوردیم.

دو مثال بعدی نشان می‌دهند که چگونه حل برخی از مسائل به هر دو مفهوم ترتیب و ترکیب نیاز دارد.

مثال ۲۲.۱ تعداد ترتیبهای حروف واژهٔ TALLAHASSEE برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!۱!۱!} = ۸۳۱,۶۰۰$$

چندتا از این ترتیبها فاقد Aهای متوالی است؟ وقتی A ها را کنار می‌گذاریم،

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!۱!۱!} = ۵۰۴۰$$

طریق برای مرتب کردن حروف دیگر داریم. یکی از این ۵۰۴۰ طریق در شکل زیر، که در آن پیکانهای رو به بالا اشاره به نه جای ممکن برای سه‌تا A دارند نشان داده شده است.

$$\uparrow E \uparrow E \uparrow S \uparrow T \uparrow L \uparrow L \uparrow S \uparrow H \uparrow$$

سه‌تا از این جاها را می‌توان به $\binom{۹}{۳} = ۸۴$ طریق انتخاب کرد؛ و چون این امر برای همهٔ ۵۰۳۹ ترتیب دیگر حروف E، E، S، T، L، L، S، H امکانپذیر است، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۵۰۴۰ \times ۸۴ = ۴۲۳,۳۶۰$ ترتیب فاقد Aهای متوالی برای حروف واژهٔ TALLAHASSEE وجود دارد.

قبل از ادامه، نیاز به معرفی روشی اختصاری برای نوشتن حاصل جمع فهرستی از $n + ۱$ جمله مانند a_m، $a_{m+۱}$، $a_{m+۲}$، ...، a_{m+n} داریم که در آن m و n اعدادی صحیح‌اند و $n \geqslant ۰$. این نمادگذاری را نمادگذاری سیگما می‌نامند، زیرا حاوی حرف بزرگ $\sum$ از الفبای یونانی است؛ این نماد را به صورت زیر برای نوشتن حاصل‌جمع این جمله‌ها به‌کار می‌گیریم:

$$a_m + a_{m+۱} + a_{m+۲} + \cdots + a_{m+n} = \sum_{i=m}^{m+n} a_i$$

Scanned with CamScanner

در اینجا حرف i را اندیس جمعبندی می‌نامند، و این اندیس جای همهٔ اعداد صحیحی را می‌گیرد که از حد پایینی m شروع می‌شوند و تا حد بالایی $m+n$ (و خود آن) ادامه می‌یابند.

این نمادگذاری را به‌صورت زیر به‌کار می‌گیریم:

۱) (زیرا حرف i هیچ ویژگی خاصی ندارد.)

$$\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \sum_{j=3}^{7} a_j$$

۲) (زیرا $0^2 = 0$)

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \sum_{k=0}^{4} k^2$$

۳)

$$\sum_{i=11}^{100} i^3 = 11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 100^3 = \sum_{j=12}^{101} (j-1)^3 = \sum_{k=10}^{99} (k+1)^3$$

۴)

$$\sum_{i=7}^{10} 2i = 2(7) + 2(8) + 2(9) + 2(10) = 68 = 2(34) = 2(7+8+9+10) = 2\sum_{i=7}^{10} i$$

۵)

$$\sum_{i=3}^{3} a_i = a_3 = \sum_{i=4}^{4} a_{i-1} = \sum_{i=2}^{2} a_{i+1}$$

۶)

$$\sum_{j=7}^{10} a_j = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{j=0}^{3} a_{j+7} = \sum_{j=1}^{4} a_{6+j} = \sum_{j=0}^{3} a_{10-j}$$

۷)

$$\sum_{i=3}^{5} b_{2i} = b_{2\cdot 3} + b_{2\cdot 4} + b_{2\cdot 5} = b_6 + b_8 + b_{10} = \sum_{j=2}^{4} b_{2j+2} = \sum_{k=5}^{7} b_{2k-2}$$

۸)

$$\sum_{i=1}^{5} a = a + a + a + a + a = 5a$$

گذشته از این می‌بینیم که، با استفاده از این نمادگذاری جمعبندی، می‌توان پاسخ قسمت (پ) از مثال ۱۹.۱ را به‌صورت

$$\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i}\binom{5}{7-i} = \sum_{j=2}^{4} \binom{5}{7-j}\binom{5}{j}$$

بیان کرد.

در مثال بعدی و در بسیاری از جاهای دیگر در ادامهٔ کتاب حاضر، کاربرد این نمادگذاری جدید را خواهیم دید.

مثال ۲۳.۱ در مطالعات مربوط به نظریهٔ کدگذاری جبری و نظریهٔ زبانهای کامپیوتری، ترتیبهایی از الفبای معینی از نمادها را، به‌نام رشته‌ها، در نظر می‌گیریم. اگر الفبای معین مورد بحث از نمادهای، مثلاً، ۰، ۱، و ۲ تشکیل شده باشد، آنگاه ۰۱، ۱۱، ۲۱، ۱۲، و ۲۰ پنج‌تا از نه رشتهٔ دارای طول دو هستند. تعدادی از ۲۷ رشتهٔ دارای طول سه عبارت‌اند از ۰۰۰، ۰۱۲، ۲۰۲، و ۱۱۰.

به‌طورکلی، اگر n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، آنگاه بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، برای الفبای ۰، ۱، و ۲، تعداد رشته‌های دارای طول n، 3^n است. اگر $x = x_1x_2x_3\cdots x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، آنگاه وزن x را،

Scanned with CamScanner

که با $wt(x)$ نشان می‌دهیم، به‌وسیلهٔ $wt(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ تعریف می‌کنیم. مثلاً، به‌ازای حالت $n = 2$، $wt(12) = 3$ و $wt(22) = 4$؛ به‌ازای $n = 3$، $wt(101) = 2$، $wt(210) = 3$، و $wt(222) = 6$.

بین 3^{10} رشتهٔ دارای طول ۱۰، می‌خواهیم تعداد رشته‌هایی را که وزنشان زوج است تعیین کنیم. چنین رشته‌ای دقیقاً وقتی که تعداد ۱ های واقع در آن زوج باشد، وزنی زوج دارد.

شش حالت مختلف باید در نظر بگیریم. اگر رشتهٔ x حاوی هیچ ۱ای نباشد، آنگاه هریک از ۱۰ جای واقع در x را می‌توان با هریک از نمادهای ۰ یا ۲ پر کرد، و بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، 2^{10} تا از این نوع رشته‌ها وجود دارد. وقتی رشتهٔ مورد بحث حاوی دوتا ۱ باشد، جاهای ممکن برای این دو تا ۱ را به $\binom{10}{2}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. به‌محض آنکه این دو جا مشخص شدند، 2^8 طریق برای قراردادن ۰ یا ۲ در هشت جای دیگر وجود دارد. بنابر این، $2^8\binom{10}{2}$ رشتهٔ دارای وزن زوج و حاوی دوتا ۱ وجود دارد. تعداد رشته‌ها در چهار حالت دیگر در جدول ۲.۱ داده شده است.

جدول ۲.۱

تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ ها	تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ ها
$2^2\binom{10}{8}$	۸	$2^6\binom{10}{4}$	۴
$\binom{10}{10}$	۱۰	$2^4\binom{10}{6}$	۶

در نتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع، تعداد رشته‌های دارای طول ۱۰ که وزنی زوج دارند عبارت است از

$$2^{10} + \binom{10}{2}2^8 + \binom{10}{4}2^6 + \binom{10}{6}2^4 + \binom{10}{8}2^2 + \binom{10}{10} = \sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n}$$

غالباً باید مواظب اضافه شماری باشیم ـ و این وضعیتی است که به نظر می‌رسد در مسائلی شمارشی که ممکن است نسبتاً آسان تلقی شوند، پیش می‌آید. مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه ممکن است اضافه شماری رخ دهد.

مثال ۲۴.۱

الف) فرض کنیم که از یک کیسهٔ محتوی ۵۲ مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز، و آبی و با شماره‌های از ۱ تا ۱۳ پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب فاقد مهرهٔ سبز باشد؟ در اینجا به شمارش همهٔ انتخابهای پنج مهره‌ای نظیر آنچه در پی می‌آید علاقمندیم:

یک) $R1$، $B3$، $B4$، $Y6$، و $Y11$.

دو) $B5$، $B7$، $B10$، $Y7$، و $Y13$.

سه) $Y2$، $Y3$، $Y6$، $Y10$، و $Y11$.

(برای اختصار سبز را با G، زرد را با Y، قرمز را با R، و آبی را با B نشان داده‌ایم.)

اگر این‌را با دقت بیشتری بررسی کنیم می‌بینیم که مقیدیم پنج مهره را از ۳۹ مهرهٔ حاصل از کنار گذاشتن مهره‌های سبز، انتخاب کنیم. در نتیجه، می‌توانیم انتخاب خود را به $\binom{39}{5}$ طریق انجام دهیم.

Scanned with CamScanner

ب) حال فرض کنیم می‌خواهیم تعداد آن انتخابهای پنج مهره‌ای را بشمریم که حداقل یک مهرهٔ سبز دارند. اینها دقیقاً آن انتخابهایی هستند که در قسمت (الف) شمرده نشدند، و چون روی هم $\binom{۵۲}{۵}$ دستهٔ ۵ مهره‌ای وجود دارد، می‌بینیم که

$$\binom{۵۲}{۵} - \binom{۳۹}{۵} = ۲,۵۹۸,۹۶۰ - ۵۷۵,۷۵۷ = ۲,۰۲۳,۲۰۳$$

دسته از کل دسته‌های پنج مهره‌ای حداقل یک مهرهٔ سبز دارند.

پ) آیا می‌توانیم نتیجهٔ قسمت (ب) را به طریقی دیگر به‌دست آوریم؟ به‌عنوان مثال، چون می‌خواهیم در دستهٔ پنج مهره‌ای حداقل یک مهرهٔ سبز باشد، فرض کنیم که نخست یک مهرهٔ سبز انتخاب شود. این کار را می‌توان به $\binom{۱۳}{۱}$ طریق انجام داد. حال دربارهٔ چهار مهرهٔ دیگر نگرانی نداریم. از این‌رو، هنگامی‌که مهرهٔ سبز انتخاب شده را از کل مهره‌ها کنار می‌گذاریم، می‌توانیم چهار مهرهٔ دیگر را به $\binom{۵۱}{۴}$ طریق انتخاب کنیم. بنابراین، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد انتخابهای خود را

$$\binom{۱۳}{۱}\binom{۵۱}{۴} = ۱۳ \times ۲۴۹۹۰۰ = ۳۲۴۸۷۰۰$$

می‌پنداریم. در اینجا قطعاً چیزی نادرست است. این پاسخ از پاسخ قسمت (ب) به‌اندازهٔ بیشتر از یک میلیون دسته بزرگتر است. آیا در قسمت (ب) مرتکب اشتباهی شدیم؟ یا در استدلال حاضر چیزی نادرست است؟

به‌عنوان مثال، فرض کنیم که نخست $G۳$ و سپس $G۵$، $G۱۳$، $Y۷$، و $B۱۱$ را انتخاب کرده باشیم. اگر نخست $G۵$ و سپس $G۳$، $G۱۳$، $Y۷$، و $B۱۱$ را انتخاب کنیم، آیا حقیقتاً این انتخاب با انتخاب قبلی متفاوت است؟

متأسفانه، خیر! و اگر نخست $G۱۳$ و در پی آن $G۳$، $G۵$، $Y۷$، و $B۱۱$ را انتخاب کنیم، باز این انتخاب با دو انتخاب قبلی متفاوت نیست.

در نتیجه، این رهیافت نادرست است، زیرا با متمایز گرفتن انتخابهای یکسان، اضافه‌شماری کرده‌ایم

ت) ولی آیا راه دیگری برای رسیدن به پاسخ قسمت (ب) وجود دارد؟ بله. چون هر یک از دسته‌های پنج مهره‌ای باید شامل حداقل یک مهرهٔ سبز باشد، پنج حالت باید در نظر بگیریم. این حالات در جدول ۳۰۱ داده شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۳۰۱ می‌بینیم که، مثلاً $\binom{۳۹}{۲}\binom{۱۳}{۲}$ دستهٔ پنج مهره‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو مهرهٔ سبز است. اگر به‌داشتن دقیقاً سه مهره سبز در یک دستهٔ پنج مهره‌ای علاقه‌مند باشیم، آنگاه نتایج این جدول نشان می‌دهد که $\binom{۳۹}{۲}\binom{۱۳}{۳}$ تا از این دسته‌ها وجود دارد.

چون هیچ دو حالتی در جدول ۳۰۱ دستهٔ پنج مهره‌ای مشترکی ندارند، تعداد دسته‌های حاوی حداقل یک مهرهٔ سبز که می‌توان انتخاب کرد برابر است با

$$\binom{۱۳}{۱}\binom{۳۹}{۴} + \binom{۱۳}{۲}\binom{۳۹}{۳} + \binom{۱۳}{۳}\binom{۳۹}{۲} + \binom{۱۳}{۴}\binom{۳۹}{۱} + \binom{۱۳}{۵}\binom{۳۹}{۰}$$
$$= \sum_{i=۱}^{۵}\binom{۱۳}{i}\binom{۳۹}{۵-i}$$

Scanned with CamScanner

$$= (۱۳)(۸۲,۲۵۱) + (۷۸)(۹۱۳۹) + (۲۸۶)(۷۴۱) + (۷۱۵)(۳۹) + (۱۲۸۷)(۱)$$
$$= ۲,۰۲۳,۲۰۳$$

جدول ۳.۱

تعداد مهره‌های سبز	تعداد طرق انتخاب این تعداد مهرهٔ سبز	تعداد مهره‌هایی که سبز نیستند	تعداد طرق انتخاب این تعداد مهرهٔ غیرسبز
۱	$\binom{۱۳}{۱}$	۴	$\binom{۳۹}{۴}$
۲	$\binom{۱۳}{۲}$	۳	$\binom{۳۹}{۳}$
۳	$\binom{۱۳}{۳}$	۲	$\binom{۳۹}{۲}$
۴	$\binom{۱۳}{۴}$	۱	$\binom{۳۹}{۱}$
۵	$\binom{۱۳}{۵}$	۰	$\binom{۳۹}{۰}$

این بند را با سه نتیجهٔ مربوط به مفهوم ترکیبها به‌پایان می‌رسانیم.

نخست ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای اعداد صحیح n و r و با فرض $n \geqslant r \geqslant ۰$، $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. این‌را می‌توان به‌طور جبری از فرمول مربوط به $\binom{n}{r}$ به‌دست آورد، ولی ما ترجیح می‌دهیم که چنین عمل کنیم: مشاهده می‌کنیم که وقتی با انتخاب r تا از n شیء متمایز سروکار داریم، فرایند انتخاب $n - r$ شیٔ را برجای می‌گذارد. در نتیجه، $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ تناظری بین انتخابهای r تایی (اشیای انتخاب شده) و انتخابهای $n - r$ تایی (اشیایی که برجای مانده‌اند) را بیان می‌کند. مثالی از این تناظر در جدول ۳.۱ نشان داده شده است، که در آن $r = ۲$، $n = ۵$ و اشیای متمایز عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵. این نوع تناظرها را به‌طور صوریتر در فصل ۵ تعریف خواهیم کرد و آنها را در موقعیتهای شمارشی دیگری به‌کار خواهیم برد.

جدول ۴.۱

انتخابهای دارای اندازهٔ $r = ۲$ (اشیای انتخاب شده)		انتخابهای دارای اندازهٔ $n - r = ۳$ (اشیای برجای مانده)	
۱. ۱,۲	۶. ۲,۴	۱. ۳,۴,۵	۶. ۱,۳,۵
۲. ۱,۳	۷. ۲,۵	۲. ۲,۴,۵	۷. ۱,۳,۴
۳. ۱,۴	۸. ۳,۴	۳. ۲,۳,۵	۸. ۱,۲,۵
۴. ۱,۵	۹. ۳,۵	۴. ۲,۳,۴	۹. ۱,۲,۴
۵. ۲,۳	۱۰. ۴,۵	۵. ۱,۴,۵	۱۰. ۱,۲,۳

نتیجهٔ دوم قضیه‌ای است که از تجربیات پیشین خود در جبر آموخته‌ایم.

Scanned with CamScanner

قضیهٔ ۱.۱ (قضیهٔ دو جمله‌ای) اگر x و y دو متغیر و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots$$

$$+ \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

قبل از ارائهٔ اثبات کلی این قضیه، حالتی خاص را بررسی می‌کنیم. اگر $n = 4$، ضریب x^2y^2 در حاصل‌ضرب

$$\underset{\text{عامل نخست}}{(x+y)}\underset{\text{عامل دوم}}{(x+y)}\underset{\text{عامل سوم}}{(x+y)}\underset{\text{عامل چهارم}}{(x+y)}$$

برابر است با تعداد طرقی که می‌توانیم دو x از چهار تا x را، که هریک در یکی از عوامل ضرب قرار دارد، انتخاب کنیم. (گرچه همهٔ xها ظاهراً یکسان‌اند، ولی بین آنها با عنوان x عامل نخست، x عامل دوم، ...، و x عامل چهارم تمایز قائل می‌شویم. همچنین ملاحظه می‌شود که وقتی دو x انتخاب می‌کنیم، دو عامل ضرب را به‌کار می‌گیریم، و در نتیجه، دو عامل دیگر باقی می‌ماند که می‌توانیم دو y مورد نیاز را از آنها برگزینیم.) مثلاً، بین همهٔ امکانات، می‌توانیم x(۱) را از دو عامل نخست و y را از دو عامل آخر انتخاب کنیم یا x(۲) را از عوامل نخست و سوم و y را از عوامل دوم و چهارم انتخاب کنیم. شش انتخاب ممکن در جدول ۵.۱ خلاصه شده است.

جدول ۵.۱

عاملهایی که برای x انتخاب می‌شوند		عاملهایی که برای y انتخاب می‌شوند	
(۱)	۱, ۲	(۱)	۳, ۴
(۲)	۱, ۳	(۲)	۲, ۴
(۳)	۱, ۴	(۳)	۲, ۳
(۴)	۲, ۳	(۴)	۱, ۴
(۵)	۲, ۴	(۵)	۱, ۳
(۶)	۳, ۴	(۶)	۱, ۲

در نتیجه، ضریب x^2y^2 در بسط $(x+y)^4$ برابر است با $\binom{4}{2} = 6$، یعنی تعداد طرق انتخاب دو شیء متمایز از گردایه‌ای مرکب از چهار شیء متمایز.

حال می‌پردازیم به ارائهٔ اثبات در حالت کلی.

اثبات: در بسط حاصل‌ضرب

$$\underset{\text{عامل نخست}}{(x+y)}\underset{\text{عامل دوم}}{(x+y)}\underset{\text{عامل سوم}}{(x+y)}\underset{\text{عامل چهارم}}{(x+y)}$$

Scanned with CamScanner

ضریب $x^k y^{n-k}$، که در آن $0 \leqslant k \leqslant n$، برابر است با تعداد طرق متفاوتی که می‌توان k تا x (و در نتیجه $(n-k)$ تا y) را از n عامل موجود انتخاب کرد. (مثلاً، یکی از این طرق عبارت است از انتخاب x از k عامل نخست و y از $n-k$ عامل دیگر.) تعداد کلّ این نوع انتخابهای k تایی از گردایه‌ای n تایی برابر با $C(n,k) = \binom{n}{k}$ است، و قضیهٔ دو جمله‌ای از این نتیجه می‌شود.

به‌سبب این قضیه، $\binom{n}{k}$ را غالباً ضریب دوجمله‌ای می‌نامند. توجه داشته باشید که نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱ را می‌توان به‌صورت

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

نیز بیان کرد.

مثال ۲۵.۱

الف) از قضیهٔ دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب $x^5 y^2$ در بسط $(x+y)^7$ برابر با $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$ است.

ب) ضریب $a^5 b^2$ در بسط $(2a-3b)^7$ برابر با $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$ است. این نتیجه را از قراردادن $x = 2a$ و $y = -3b$ در قضیهٔ دو جمله‌ای به‌دست می‌آوریم.

فرع ۱.۱ به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$،

الف) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ب) $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

اثبات: اگر در قضیهٔ دوجمله‌ای قرار دهیم $x = y = 1$ قسمت (الف) به‌دست می‌آید. قسمت (ب) از $x = -1$ و $y = 1$ نتیجه می‌شود.

سومین و آخرین نتیجه‌ای که می‌خواستیم بیان کنیم، تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای است و قضیهٔ بسجمله‌ای نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۲.۱ به‌ازای اعداد صحیح مثبت n و t، ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_t^{n_t}$ در بسط $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_t)^n$ برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_t!}$$

که در آن، به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant t$، n_i عددی صحیح است به‌طوری که $0 \leqslant n_i \leqslant n$ و $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_t = n$.

اثبات: همانند اثبات قضیهٔ دوجمله‌ای، ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_t^{n_t}$ برابر است با تعداد طرقی که می‌توانیم x_1 را

Scanned with CamScanner

از n_1 عامل بین n عامل، x_2 را از n_2 عامل بین $n - n_1$ عامل باقیمانده، x_3 را از n_3 عامل بین $n - n_1 - n_2$ عاملی که اینک باقی‌مانده است، $\cdots$، و x_t را از n_t عامل بین $n - n_1 - n_2 - n_3 - \cdots - n_{t-1} = n_t$ عامل باقیمانده انتخاب کنیم. مانند قسمت (الف) در مثال ۲۱.۱، این انتخاب را می‌توان به

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

طریق انجام داد. جزئیات اثبات این امر را که عبارت اخیر با

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$$

برابر است به خواننده واگذار می‌کنیم. عبارت اخیر به‌صورت

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t}$$

نیز نوشته می‌شود و آن‌را ضریب بسجمله‌ای می‌نامند.

مثال ۲۶.۱

الف) از قضیهٔ بسجمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب $x^2y^2z^3$ در بسط $(x+y+z)^7$ برابر است با $\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!} = 210$، درحالی‌که ضریب xyz^5 برابر است با $\binom{7}{1,1,5} = 42$ و ضریب x^3z^2 برابر است با $\binom{7}{3,0,2} = \frac{7!}{3!0!4!} = 35$.

ب) فرض کنیم نیاز به دانستن ضریب $a^2b^3c^2d^5$ در بسط $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$ داریم. اگر v را به‌جای a، w را به‌جای $2b$، x را به‌جای $-3c$، y را به‌جای $2d$، و z را به‌جای ۵ قرار دهیم، آنگاه می‌توانیم قضیهٔ بسجمله‌ای را دربارهٔ $(v+w+x+y+z)^{16}$ به‌کار ببریم و ضریب $v^2w^3x^2y^5z^2$ را به‌صورت $\binom{16}{2,3,2,5,2} = 302,702,400$ بیابیم. ولی

$$\binom{16}{2,3,2,5,4}(a)^2(2b)^3(-3c)^2(2d)^5(5)^2 =$$

$$\binom{16}{2,3,2,5,4}(1)^2(2)^3(-3)^2(2)^5(5)^2(a^2b^3c^2d^5) =$$

$$435,891,456,000,000a^2b^3c^2d^5$$

Scanned with CamScanner

۴.۱ ترکیبهای با تکرار: توزیعها

وقتی تکرار مجاز باشد، دیدیم که برای n شیء متمایز، ترتیبی r تایی از بین این اشیا را می‌توان به n^r طریق، به‌ازای عدد صحیح $r \geqslant 0$ به‌دست آورد. حال می‌پردازیم به مسألهٔ مشابهی در مورد ترکیبها و یک بار دیگر مسأله‌ای به‌دست می‌آوریم که حل آن از اصول شمارش قبلی نتیجه می‌شود.

مثال ۲۷.۱ هفت دانش‌آموز سال اول دبیرستان در بازگشت از مدرسه به خانه، در یک ساندویچ فروشی توقف می‌کنند و هریک از آنان یکی از انواع ساندویچهای زیر را سفارش می‌دهد: مغز، سوسیس، کالباس، یا مرغ. خرید به چند طریق متفاوت امکانپذیر است؟

جدول ۶.۱

(الف)	(ب)
۱. c,c,h,h,t,t,f	۱. xx|xx|xx|x
۲. c,c,c,c,h,t,f	۲. xxxx|x|x|x
۳. c,c,c,c,c,c,f	۳. xxxxxx|||x
۴. h,t,t,f,f,f,f	۴. |x|xx|xxxx
۵. t,t,t,t,t,f,f	۵. ||xxxxx|xx
۶. t,t,t,t,t,t,t	۶. ||xxxxxxx|
۷. f,f,f,f,f,f,f	۷. |||xxxxxxx

فرض کنیم c، h، t، و f به ترتیب، ساندویچ مغز، سوسیس، کالباس، و مرغ را نمایش دهند. در اینجا ما با تعداد خریدهایی که از هر فقره می‌شود مواجهیم، نه با ترتیبی که چنین خریدهایی طبق آن انجام می‌گیرد، از این‌رو، مسألهٔ مورد بحث مسأله‌ای مربوط به انتخاب یا ترکیب با تکرار است.

در جدول ۶.۱، برخی از خریدهای ممکن را در ستون (الف) و طریقهٔ دیگر نمایش هر خرید را در ستون

Scanned with CamScanner

(ب) فهرست کرده‌ایم.

برای هریک از خریدهای نشان داده شده در ستون (ب) جدول ۶۰۱، ملاحظه می‌کنیم که هر x واقع در طرف چپ خط قائم نخست (۱)، یک c را نمایش می‌دهد، هر x بین خطوط قائم نخست و دوم، یک h را نمایش می‌دهد، xهای واقع بین خطوط قائم دوم و سوم جای tها نشسته‌اند، و هر x واقع در طرف راست خط قائم سوم جای یک f نشسته است. مثلاً، خرید سوم دارای سه خط قائم متوالی است، زیرا هیچ‌یک از دانش‌آموزان ساندویچ سوسیس یا کالباس نخریده است؛ خط قائم واقع در آغاز خرید چهارم به‌این امر دلالت دارد که در این خرید، هیچ ساندویچ مغزی نبوده است.

یک بار دیگر تناظری بین دوگردایه از اشیا برقرار شده است، ضمن اینکه می‌دانیم چگونه تعداد اشیای واقع در یکی از این دوگردایه را بشمریم. در مورد نمایشهای نشان داده شدهٔ ستون (ب) جدول ۶۰۱، ما همهٔ ترتیبهای ۱۰ نماد، مرکب از هفت تا x و سه تا ۱، را می‌شمریم و از این‌رو، بنابر تناظر یاد شده، تعداد سفارشهای متفاوت نشان داده شده در ستون (الف) برابر است با

$$\frac{۱۰!}{۷!۳!} = \binom{۱۰}{۷}$$

در این مثال ملاحظه می‌کنیم که هفت‌تا x (هرکدام برای یک دانش‌آموز) متناظر با اندازهٔ هر انتخاب است و به‌منظور جداسازی ۴ = ۱ + ۳ فقره غذای ممکن که می‌توان انتخاب کرد، آن سه خط قائم مورد نیاز هستند.

به‌طورکلی، وقتی می‌خواهیم، با مجاز دانستن تکرار، r تا از n شیٔ متمایز را انتخاب کنیم، (همانند جدول ۶۰۱) ملاحظه می‌کنیم که همهٔ ترتیبهای r تا x و $n-۱$ تا | مدنظرند و بنابر این، تعدادشان برابر است با

$$H(n,r) = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\,r!} \quad \frac{(n+r-۱)!}{r!(n-۱)!} = \binom{n+r-۱}{r}$$

در نتیجه، تعداد ترکیبهای r تایی n شیء با مجاز دانستن تکرار، عبارت است از $C(n+r-۱, r)$.

(در مثال ۲۷۰۱، $n = ۴$ و $r = ۷$، از این‌رو، وقتی تکرار مجاز است، این امکان وجود دارد که r بزرگتر از n باشد.)

مثال ۲۸.۱ در یک شیرینی فروشی ۲۰ نوع شیرینی عرضه می‌شود. با این فرض که وقتی وارد شیرینی فروشی می‌شویم از هر نوع شیرینی حداقل ۱۲ عدد در مغازه باشد به $C(۲۰+۱۲-۱, ۱۲) = C(۳۱, ۱۲) = ۱۴۱۱۲۰۵۲۵$ طریق می‌توانیم ۱۲ عدد شیرینی انتخاب کنیم. (در اینجا $n = ۲۰$، $r = ۱۲$.)

مثال ۲۹.۱ رئیس مؤسسه‌ای چهار معاون دارد. او مایل است، به‌عنوان هدیهٔ کریسمس، بین آنها ۱۰۰۰ دلار، به‌صورت چک توزیع کند. مبلغ هر چک مضربی از ۱۰۰ دلار است.

الف) اگر وضعیتی که یک یا چند معاون هدیه‌ای نگیرد مجاز باشد، رئیس مؤسسه انتخابی ۱۰تایی (هرکدام برای یک واحد ۱۰۰ دلاری) از گردایه‌ای حاوی ۴ شیء (چهار معاون مورد بحث)، همراه با تکرار، به عمل می‌آورد. این عمل را می‌تواند به $C(۴+۱۰-۱, ۱۰) = C(۱۳, ۱۰) = ۲۸۶$ طریق انجام دهد.

ب) اگر بنا باشد هیچ یک از معاونها رنجیده‌خاطر نشود، هر معاون باید حداقل ۱۰۰دلار بگیرد. با این قید، اینک

Scanned with CamScanner

رئیس مؤسسه انتخابی ۶تایی (شش واحد ۱۰۰ دلاری باقیمانده) از همان گردایهٔ حاوی ۴ شیء را پیش روی دارد، و تعداد این انتخابها برابر با $C(۴+۶-۱,۶) = C(۹,۶) = ۸۴$ است. [مثلاً، در اینجا انتخاب ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ به‌این شرح تعبیر می‌شود: اولی چیزی اضافه بر ۱۰۰ دلار نمی‌گیرد - زیرا هیچ ۱ ای در این انتخاب وجود ندارد. وجود یک ۲ در این انتخاب بر این امر دلالت دارد که دومی یک ۱۰۰ دلاری اضافی می‌گیرد. سومی ۲۰۰ دلار اضافی دریافت می‌کند (۱۰۰ دلار به‌ازای هر یک از دوتا ۳ ای که در انتخاب به‌عمل آمده وجود دارد). به‌سبب وجود سه‌تا ۴، مبلغ کل چکهای دریافتی چهارمی $۱۰۰ + ۳(۱۰۰) = ۴۰۰$ دلار خواهد بود.]

پ) اگر قرار باشد هر معاون الزاماً حداقل ۱۰۰ دلار بگیرد و چهارمی به‌عنوان معاون اجرایی، حداقل ۵۰۰ دلار بگیرد، آنگاه تعداد طرقی که رئیس مؤسسه می‌تواند چکهای اهدایی خود را توزیع کند برابر است با

$$\underbrace{C(۳+۲-۱,۲)}_{\text{چهارمی دقیقاً ۵۰۰ دلار می‌گیرد}} + \underbrace{C(۳+۱-۱,۱)}_{\text{چهارمی دقیقاً ۶۰۰ دلار می‌گیرد}}$$

$$+ \underbrace{C(۳+۰-۱,۰)}_{\text{چهارمی دقیقاً ۷۰۰ دلار می‌گیرد}} = ۱۰ = \underbrace{C(۴+۲-۱,۲)}_{\text{با استفاده‌از روش قسمت (ب)}}$$

حال که چند مثال دربارهٔ ترکیبهای همراه با تکرار حل کردیم، دو مثال حاوی اصول شمارش دیگر را ارائه می‌کنیم.

مثال ۳۰.۱ به چند طریق می‌توانیم هفت سیب و شش پرتقال را بین چهار کودک چنان توزیع کنیم که هر کودک حداقل یک سیب دریافت کند؟

اگر به هر کودک یک سیب بدهیم $C(۴+۳-۱,۳) = ۲۰$ طریق برای توزیع سه سیب دیگر و $C(۴+۶-۱,۶) = ۸۴$ طریق برای توزیع شش پرتقال مورد بحث داریم. از این‌رو، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲۰ \times ۸۴ = ۱۶۸۰$ طریق برای توزیع میوه‌ها، تحت شرایط بیان شده، وجود دارد.

مثال ۳۱.۱ قرار است از طریق یک کانال ارتباطی، پیامی مرکب از ۱۲ نماد مختلف ارسال شود. علاوه براین ۱۲ نماد، دستگاه فرستنده روی هم ۴۵ فاصله (ی خالی) را نیز بین نمادها ارسال می‌کند، به‌طوری‌که بین هر جفت از نمادهای متوالی حداقل سه فاصله وجود دارد. دستگاه فرستنده به چند طریق می‌تواند چنین پیامی را ارسال کند؟

!۱۲ طریق برای مرتب کردن ۱۲ نماد مختلف وجود دارد، و برای هر یک از این ترتیبها ۱۱ موضع بین ۱۲ نماد موجود است. چون باید بین نمادهای متوالی حداقل سه‌فاصله باشد، ۳۳ تا از ۴۵ فاصله به‌کار برده می‌شود و اینک باید ۱۲ فاصلهٔ باقیمانده را در محلهایی قرار دهیم. حال این انتخابی ۱۲تایی (۱۲ فاصله)، همراه با تکرار، از گردایه‌ای دارای اندازهٔ ۱۱ (موضع) است، و این‌را می‌توان به $C(۱۱+۱۲-۱,۱۲) = ۶۴۶,۶۴۶$ طریق انجام داد.

در نتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، دستگاه فرستندهٔ بالا می‌تواند، با توجه به فاصله‌های مورد نظر، به $(۱۲!)\binom{۲۲}{۱۲} = ۳/۰۹۷ \times ۱۰^{۱۲}$ طریق پیام را ارسال کند.

Scanned with CamScanner

در مثال بعدی ایده‌ای را معرفی می‌کنیم که بیشتر به نظریهٔ اعداد مربوط است تا به‌ترکیبها یا ترتیبها. باوجود این، حل این مسأله با شمردن ترکیبهایی همراه با تکرار، هم‌ارز خواهد بود.

مثال ۳۲.۱ مطلوب است تعیین همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

که در آن، به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $x_i \geqslant 0$.

یکی از جوابهای این معادله عبارت است از $x_1 = 3$، $x_2 = 3$، $x_3 = 0$، $x_4 = 1$. (این جواب با جواب $x_1 = 1$، $x_2 = 0$، $x_3 = 3$، $x_4 = 3$ تفاوت دارد، باوجود اینکه در هر دو جواب چهار عدد صحیح یکسان به‌کار رفته است.) یکی از تعبیرهای ممکن برای جواب $x_1 = 3$، $x_2 = 3$، $x_3 = 0$، $x_4 = 1$، این‌است که تصور کنیم می‌خواهیم هفت سکه (اشیای یکسان) را بین چهار کودک (ظرفهای متمایز) توزیع کنیم، و در اینجا به هریک از دو کودک نخست سه سکه داده‌ایم، به کودک سوم چیزی نداده‌ایم، و آخرین سکه را به کودک چهارم داده‌ایم. اگر همچنان این تعبیر را مد نظر داشته باشیم، ملاحظه می‌کنیم که هر جواب صحیح نامنفی معادلهٔ مورد بحث متناظر با انتخابی ۷تایی (سکه‌های یکسان) همراه با تکرار، از گردایه‌ای دارای اندازهٔ ۴ (کودکان متمایز) است؛ از این‌رو، $C(4+7-1, 7) = 120$ جواب وجود دارد.

در این مرحله بسیار اساسی است که به هم‌ارزی موارد زیر واقف شویم:

الف) تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad x_i \geqslant 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ب) تعداد انتخابهای r تایی، همراه با تکرار، از گردایه‌ای دارای اندازهٔ n.

پ) تعداد طرقی که‌می‌توان r شیء یکسان را بین n ظرف متمایز توزیع کرد.

اگر مسأله توزیع را در نظر بگیریم، قسمت (پ) فقط وقتی معتبر است که r شیئی که قرار است توزیع شوند، یکسان و n ظرف مفروض متمایز باشند. وقتی‌که هم r شیء و هم n ظرف مفروض متمایزند، آنگاه می‌توانیم هریک از n ظرف را برای هر یک از اشیا برگزینیم و در نتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، n^r طریق برای توزیع به‌دست می‌آوریم.

وقتی‌که اشیا متمایزند ولی ظروف یکسان‌اند، مسألهٔ مورد بحث را با استفاده از اعداد استرلینگ نوع دوم (فصل ۵) حل خواهیم کرد. برای حالت آخر، یعنی وقتی‌که هم اشیا و هم ظروف یکسان‌اند، نظریهٔ افراز اعداد صحیح (فصل ۹، جلد دوم) بعضی از نتایج لازم را فراهم خواهد آورد.

مثال ۳۳.۱ به چند طریق می‌توان ۱۰ مهرهٔ سفید (یکسان) را بین شش ظرف متمایز توزیع کرد؟

حل این مسأله هم‌ارز است با یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 10$. این تعداد هم برابر است با تعداد انتخابهای ۱۰ تایی، همراه با تکرار، از گردایه‌ای دارای اندازهٔ ۶. بنابر این، جواب

Scanned with CamScanner

عبارت است از $C(۶+۱۰-۱,۱۰)=۳۰۰۳$.

اینک دو مثال دیگر را در ارتباط با موضوع این بند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۳۴.۱ در مثال ۳۳.۱ دیدیم که ۳۰۰۳ جواب صحیح نامنفی برای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱۰$ وجود دارد. چندتا از این نوع جوابها برای نابرابری $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶<۱۰$ وجود دارد؟

یکی از رهیافتهایی که برای حل این نابرابری عملی به‌نظر می‌رسد، عبارت است از یافتن تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=k$، که در آن k عددی صحیح است و $۰\leqslant k\leqslant ۹$. گرچه در مورد حاضر این رهیافت عملی است، اگر به‌جای ۱۰ عددی نسبتاً بزرگتر، مثلاً ۱۰۰، را بگذاریم، این رهیافت غیرواقع بینانه خواهد بود. در مثال ۱۱.۳ ی فصل ۳، اتحادی ترکیبیاتی را ثابت خواهیم کرد که ما را یاری خواهد داد تا راه‌حل دیگری برای مسألهٔ حاضر ارائه دهیم.

فعلاً با توجه به تناظر موجود بین جوابهای صحیح نامنفی

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_۶<۱۰ \qquad (۱)$$

و جوابهای صحیح

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_۶+x_۷=۱۰ \quad , \quad ۰\leqslant x_i \quad , \quad ۱\leqslant i\leqslant ۶ \quad , \quad ۰<x_۷ \qquad (۲)$$

مسألهٔ مورد بحث را به‌صورتی دیگر می‌آوریم.

تعداد جوابهای صحیح (۲) با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_۱+y_۲+\cdots+y_۶+y_۷=۹$، که در آن، به‌ازای هر $۱\leqslant i\leqslant ۶$، $y_i=x_i$ و $y_۷=x_۷-۱$، یکی است. این تعداد برابر است با $C(۷+۹-۱,۹)=۵۰۰۵$.

مثال بعدی ما را به بسطهای دوجمله‌ای و بسجمله‌ای باز می‌گرداند.

مثال ۳۵.۱ در بسط دوجمله‌ای برای $(x+y)^n$، هر جمله به‌صورت $\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$ است؛ از این‌رو، تعداد کل جمله‌های این بسط برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $n_۱+n_۲=n$ ($n_۱$ توان x، $n_۲$ توان y است). این تعداد برابر با $C(۲+n-۱,n)=n+۱$ است.

شاید به نظر رسد که برای یافتن این نتیجه، استدلالی نسبتاً طولانی به‌کار برده‌ایم. بیشتر ما تمایل داریم که این نتیجه را براساس تجارب خود در بسط $(x+y)^n$ به‌ازای مقادیر کوچک گوناگون n، بپذیریم.

گرچه در شناخت الگوها، تجربه ارزش بسیار دارد، ولی همیشه برای یافتن اصلی کلی کفایت نمی‌کند. در اینجا، اگر بخواهیم بدانیم که در بسط $(w+x+y+z)^{۱۰}$ چند جمله وجود دارد، تجربه ارزش کمی دارد.

در اینجا هر جمله به‌صورت $\binom{۱۰}{n_۱,n_۲,n_۳,n_۴}w^{n_۱}x^{n_۲}y^{n_۳}z^{n_۴}$ است که در آن، به‌ازای هر $۱\leqslant i\leqslant ۴$، $۰\leqslant n_i$ و $n_۱+n_۲+n_۳+n_۴=۱۰$. معادلهٔ اخیر را به $C(۴+۱۰-۱,۱۰)=۲۸۶$ طریق می‌توان حل کرد و از این‌رو، در بسط $(w+x+y+z)^{۱۰}$، ۲۸۶ جمله وجود دارد.

و اینک بار دیگر بسط دو جمله‌ای وارد صحنه خواهد شد، زیرا خود را موظف به استفاده از قسمت (الف) فرع ۱.۱ می‌یابیم.

Scanned with CamScanner

مثال ۳۶.۱

الف) با توجه به ترتیب عوامل جمع، می‌خواهیم همهٔ طرق مختلفی را که می‌توانیم عدد ۴ را به‌صورت حاصل جمعی از اعداد صحیح مثبت بنویسیم، تعیین کنیم. این نمایشها را ترکیبهای ۴ می‌نامند و می‌توان آنها را به‌صورت زیر فهرست کرد:

۱)	۴	۵)	۲ + ۱ + ۱
۲)	۳ + ۱	۶)	۱ + ۲ + ۱
۳)	۱ + ۳	۷)	۱ + ۱ + ۲
۴)	۲ + ۲	۸)	۱ + ۱ + ۱ + ۱

در اینجا حاصل‌جمعی را نیز که فقط از یک عامل جمع، یعنی ۴، تشکیل شده است گنجانده‌ایم. می‌بینیم که برای عدد ۴ روی هم هشت ترکیب وجود دارد. (اگر خود را مقید به‌ترتیب عوامل جمع ندانیم، آنگاه نمایشهای (۲) و (۳) دیگر متفاوت نیستند ـ نمایشهای (۵)، (۶)، و (۷) نیز متفاوت نیستند. با این شرایط می‌بینیم که پنج افراز برای عدد ۴ وجود دارد ـ یعنی ۴؛ ۱ + ۳؛ ۲ + ۲؛ ۱ + ۱ + ۲؛ و ۱ + ۱ + ۱ + ۱. در بند ۳ ی فصل ۹ (جلد دوم) مطالب بیشتری دربارهٔ افرازهای اعداد صحیح مثبت خواهیم آموخت.)

ب) حال فرض کنیم بخواهیم تعداد ترکیبهای عدد ۷ را بشمریم. در اینجا نمی‌خواهیم همهٔ امکانات را ـ که از آن جمله‌اند ۷؛ ۱ + ۶؛ ۶ + ۱؛ ۲ + ۵؛ ۴ + ۲ + ۱؛ ۱ + ۴ + ۲؛ و ۱ + ۲ + ۱ + ۳ ـ فهرست کنیم. برای شمردن همهٔ این ترکیبها، تعداد عوامل جمع ممکن را در نظر می‌گیریم.

یک) به‌ازای یک عامل جمع، فقط یک ترکیب وجود دارد ـ یعنی ۷.

دو) اگر دو عامل جمع (مثبت) وجود داشته باشد، می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$w_1 + w_2 = 7$$

را، که در آن $w_1, w_2 > 0$، بیابیم. این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 = 5$$

که در آن $x_1, x_2 \geqslant 0$. تعداد چنین جوابهایی $\binom{6}{5} = \binom{2+5-1}{5}$ است.

سه) کار را با حالت بعدی ادامه می‌دهیم و ترکیبهای دارای سه‌عامل جمع (مثبت) را بررسی می‌کنیم. از این‌رو، اینک می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح مثبت

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7$$

را بشمریم. این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$z_1 + z_2 + z_3 = 4$$

و این تعداد برابر است با $\binom{6}{2} = \binom{3+4-1}{2}$.

حالات (یک)، (دو)، و (سه)، و چهار حالت دیگر را در جدول ۷.۱ خلاصه کرده‌ایم، ضمن اینکه یادآوری

Scanned with CamScanner

می‌کنیم که برای حالت (یک)، $\binom{۶}{۶} = ۱$.

جدول ۷.۱

$n =$ (تعداد عاملهای جمع در یک ترکیب ۷)		تعداد ترکیبهای ۷ که دارای n عامل جمع‌اند	
(یک)	$n = ۱$	(یک)	$\binom{۶}{۶}$
(دو)	$n = ۲$	(دو)	$\binom{۶}{۵}$
(سه)	$n = ۳$	(سه)	$\binom{۶}{۴}$
(چهار)	$n = ۴$	(چهار)	$\binom{۶}{۳}$
(پنج)	$n = ۵$	(پنج)	$\binom{۶}{۲}$
(شش)	$n = ۶$	(شش)	$\binom{۶}{۱}$
(هفت)	$n = ۷$	(هفت)	$\binom{۶}{۰}$

بنابر این، نتایج ارائه شده در طرف راست جدول ۷.۱ به ما می‌گویند که تعداد (کل) ترکیبهای ۷ عبارت است از

$$\binom{۶}{۶} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۳} + \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۱} + \binom{۶}{۰} = \sum_{k=۰}^{۶} \binom{۶}{k}$$

با توجه به قسمت (الف) فرع ۱.۱، این حاصل‌جمع برابر $۲^۶$ است. به‌طورکلی، دیده می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت دلخواه مانند m، $\sum_{k=۰}^{m-۱} \binom{m-۱}{k} = ۲^{m-۱}$ ترکیب برای m وجود دارد.

دو مثال آخرمان در این بند کاربردهایی را در زمینهٔ علم کامپیوتر به‌دست می‌دهد. علاوه برآن، مثال پایانی ما را به یک فرمول جمعبندی مهم، که آن‌را در بسیاری از فصلهای بعدی به‌کار خواهیم گرفت، هدایت می‌کند.

مثال ۳۷.۱ قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را، که در آن i، j، و k متغیرهایی صحیح‌اند، در نظر می‌گیریم.

```
For i := 1 to 20 do
    For j := 1 to i do
        For k := 1 to j do
            Writeln (i * j + k) ;
```

گزارهٔ Writeln چند بار در این قطعه برنامه تکرار می‌شود؟

بین انتخابهای ممکن برای i، j، و k (به‌ترتیب، i ـ نخست، j ـ دوم، k ـ سوم) که به اجرای حکم Writeln منجر می‌شود، (۱) ۱، ۱، ۱؛ (۲) ۲، ۱، ۱؛ (۳) ۱۵، ۱۰، ۱؛ و (۴) ۱۵، ۱۰، ۷ را فهرست می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $i = ۱۰$، $j = ۱۲$، $k = ۵$ از جمله انتخابهایی نیست که در نظر گرفته شود، زیرا $j = ۱۲ > ۱۰ = i$؛ این از شرطی که در حلقهٔ دوم For منظور شده است تخطی می‌کند. هریک از چهار انتخاب بالا، که در آن حکم Writeln اجرا می‌شود، در شرط $۱ \leqslant k \leqslant j \leqslant i \leqslant ۲۰$، صدق می‌کند. در واقع هر انتخاب ۳تایی مانند a، b، c ($a \leqslant b \leqslant c$) با مجاز دانستن تکرار، از فهرست ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰ به یکی از انتخابهای درست منجر

Scanned with CamScanner

می‌شود: در اینجا $k = a$، $j = b$، $i = c$. در نتیجه، حکم Writeln

$$\binom{۲۰+۳-۱}{۳} = \binom{۲۲}{۳} = ۱۵۴۰$$

بار اجرا می‌شود.

اگر به‌جای سه، $r(\geqslant ۱)$ حلقهٔ For وجود می‌داشت، حکم Writeln، $\binom{۲۰+r-۱}{r}$ بار تکرار می‌شد.

مثال ۳۸.۱ در اینجا به‌منظور اشتقاق یک فرمول جمعبندی، قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را به‌کار خواهیم برد. در این قطعه برنامه، متغیرهای i، j، n، و counter متغیرهایی صحیح‌اند. فرض می‌کنیم که قبلاً در این برنامه عدد صحیح مثبتی از کاربر خواسته شده باشد؛ این ورودی، مقدار n را معین می‌کند.

```
counter := 0;
For i := 1 to n do
    For j := 1 to i do
        counter := counter + 1;
```

با توجه به نتایج مثال ۳۷.۱ ، پس از آنکه این قطعه اجرا شود، مقدار متغیر counter برابر خواهد بود با $\binom{n+۲-۱}{۲} = \binom{n+۱}{۲}$. (این عدد برابر با تعداد دفعاتی است که حکم

$$\text{counter} := \text{counter} + ۱ \qquad (*)$$

اجرا می‌شود.)

این نتیجه را می‌توان به روش زیر نیز به‌دست آورد: وقتی $i = ۱$، آنگاه j از ۱ تا ۱ تغییر می‌کند و (*) یک بار اجرا می‌شود؛ وقتی به i مقدار ۲ نسبت داده می‌شود، آنگاه j از ۱ تا ۲ تغییر می‌کند و (*) دوبار اجرا می‌شود؛ وقتی به i مقدار ۳ نسبت داده می‌شود، آنگاه j از ۱ تا ۳ تغییر می‌کند و (*) سه‌بار اجرا می‌شود؛ به‌طورکلی، به‌ازای $۱ \leqslant k \leqslant n$، وقتی $i = k$ آنگاه j از ۱ تا k تغییر می‌کند و (*) k بار اجرا می‌شود. روی هم، متغیر counter، $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$ بار نمو می‌یابد [و حکم (*) اجرا می‌شود].

در نتیجه،

$$\sum_{i=۱}^{n} = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \binom{n+۱}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

اشتقاق این فرمول جمعبندی، که حاصل شمارش نتیجه‌ای واحد به دو طریق متفاوت است، نمونه‌ای از یک اثبات ترکیبیاتی است.

Scanned with CamScanner

۵.۱ کاربردی در علم فیزیک (اختیاری)

در این بند یکی از کاربردهای فنون شمارش را که تا اینجا آموخته‌ایم مورد بحث قرار می‌دهیم. این کاربردی در مکانیک آماری و ترمودینامیک آماری است. در این دو شاخه به مسألهٔ تعیین تعداد طرقی که می‌توان r ذرهٔ زیر اتمی را بین n حالت انرژی توزیع کرد علاقه‌مندیم.

در مدل ماکسول[1]ـ بولتسمان[2] ذرات متمایز فرض می‌شوند و هر تعدادی از ذرات ممکن است در هر حالت انرژی باشد. در این صورت، n^r توزیع ممکن به‌دست می‌آوریم، زیرا برای هریک از r ذرهٔ مورد بحث، n حالت انرژی ممکن وجود دارد. (نظریهٔ نوین مکانیک کوانتومی نشان داده است که برای آن ذرات زیر اتمی که تا حال شناخته شده‌اند، این مدل نامناسب است.)

دو مدل موفقتر مدلهای بوز[3]ـ اینشتین[4] و فرمی[5]ـ دیراک[6] است، که از آغاز بر اساس اندازه حرکتهای زاویه‌ای ذاتی ذرات بنا شدند.

در مدل بوزـ اینشتین، r ذره یکسان فرض می‌شوند و هر تعدادی از ذرات ممکن است در هر حالت انرژی باشند. در این‌صورت تعداد توزیعهای متفاوت برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$، و این هم با $C(n + r - 1, r)$ برابر است. ذراتی که دارای اسپین صحیح (برحسب واحد $(h/(2\pi))$، که h ثابت پلانک است) هستند از این مدل پیروی می‌کنند. چنین ذراتی که بوزون[7] نامیده می‌شوند، شامل فوتونها، پی‌مزونها، و جفت الکترونهای رسانشی در مواد ابررسانا، مانند سرب و قلع هستند.

برای ذراتی که دارای اسپین نیم صحیح هستند، مانند پروتونها، الکترونها، و نوترونها، مدل فرمی‌ـ دیراک مناسبتر است، و چنین ذراتی را فرمیون می‌نامند. در این مدل، باز r ذرهٔ مورد بحث یکسان‌اند، ولی هر حالت

1- Maxwell 2- Boltzmann 3- Bose 4- Einstein 5- Fermi 6- Dirac 7- Boson

Scanned with CamScanner

انرژی می‌تواند حداکثر شامل یک ذره باشد. در نتیجه، در اینجا $r \leqslant n$، و تعداد توزیعهای ممکن برابر با $\binom{n}{r}$ است. (این مدل در مطالعهٔ نظریهٔ نوار نیم‌رسانا بسیار سودمند است.)

۶.۱ خلاصه و مروری تاریخی

در این فصل نخست بنیادهای شمارش ترکیبها، جایگشتها و ترتیبها را در پهنهٔ وسیعی از مسائل ارائه کردیم. تجزیهٔ مسائل به بخشهایی که برای حل آنها همان فرمولها یا فرمولهایی دیگر مورد نیاز بود، دیدی کلیدی را برای ورود به قلمرو ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی فراهم آورد. این تا اندازه‌ای نظیر رهیافت بالا به پایین برای ابداع الگوریتمها در یک زبان برنامه‌نویسی ساخت یافته‌ای مانند پاسکال است. در این رهیافت، به‌منظور ابداع الگوریتمی برای حل مسأله‌ای دشوار، نخست زیر مسأله‌های مهم معینی را که باید حل شوند، در نظر می‌گیرند. سپس این زیر مسأله‌ها را ریزتر می‌کنند ـ یعنی آنها را به‌وظایف برنامه‌نویسی عملی‌تری تقسیم می‌کنند. هر مرحله از ریزتر کردن، روشنی، دقت، و جامعیت الگوریتم مورد نظر را بهبود می‌بخشد تا اینکه به‌سادگی قابل ترجمه به کُد زبان برنامه‌نویسی بشود (در فصلهای بعدی مطالب بیشتری دربارهٔ الگوریتمها برای گفتن خواهیم داشت.)

در جدول ۸.۱ خلاصه‌ای از فرمولهای اصلی شمارش که تا اینجا آموخته‌ایم بیان شده است. در اینجا ما با گردایه‌ای مرکب از n شیء متمایز سروکار داریم. این فرمولها تعداد طرقی را که می‌توان r تا از این n شئ را، با تکرار یا بی‌تکرار، انتخاب یا مرتب کرد، به‌دست می‌دهد. خلاصهٔ فصلهای ۵ و ۹ (جلد دوم) نیز حاوی چنین نمودارهایی از فرمولهایی هستند که با گسترش پژوهشهایمان در روشهای دیگر شمارش، به‌دست می‌آیند.

جدول ۸.۱

محل فرمول در کتاب	فرمولها	نوع نتیجه	تکرار مجاز است	ترتیب مدنظر است
صفحهٔ ۶	$P(n,r) = n!/(n-r)!,$ $0 \leqslant r \leqslant n$	جایگشت	نه	بله
صفحهٔ ۷	$n^r, n, r \geqslant 0$	ترتیب	بله	بله
صفحهٔ ۱۹	$C(n,r) = n!/[r!(n-r)!] = \binom{n}{r},$ $0 \leqslant r \leqslant n$	ترکیب	نه	نه
صفحهٔ ۳۵	$\binom{n+r-1}{r}$, $n, r \geqslant 0$	ترکیب با تکرار	بله	نه

به‌تدریج هم که پژوهشهایمان را دربارهٔ اصول دیگری از شمارش، و همچنین دربارهٔ ساختارهای ریاضی گسسته، به‌منظور کاربرد در نظریهٔ کُدگذاری، شمارش، بهینه‌سازی و طرحهای مرتب‌سازی در علم کامپیوتر، ادامه می‌دهیم، بر ایده‌هایی بنیادی که در این فصل معرفی کردیم متکی خواهیم بود.

مفهوم جایگشت را می‌توان در اثر عبری سفر یتزیرا[1] (سفر آفرینش)، که دستنوشته‌ای است از یک صوفی بین سالهای ۲۰۰ و ۶۰۰، یافت. ولی شایان توجه است که، حتی قبل از آن، یکی از نتایجی که زنوکراتس[2] از اهالی کالسدان[3] (۳۹۶ – ۳۱۴ قبل از میلاد مسیح) به‌دست آورده بود احتمالاً حاوی «نخستین تلاش ثبت شده برای حل مسأله‌ای دشوار دربارهٔ ترتیبها و ترکیبها» است. برای جزئیات بیشتر به صفحه ۳۱۹ کتاب تی. اِل. هیث[4] [۳]،

1- Sefer Yetzirah 2- Xenocrates 3- Chalcedon 4-T.L.Heath

Scanned with CamScanner

و همین‌طور به صفحهٔ ۱۱۳ مقالهٔ اِن. اِل بیگز[1] [۱]، که منبعی باارزش دربارهٔ تاریخ شمارش است، مراجعه کنید. نخستین متن درسی که دربارهٔ برخی از مباحثی که ما در این فصل مورد بحث قرار دادیم کتاب فن حدس زدن[2] اثر ریاضیدان سویسی یاکوب برنولی[3] (۱۶۵۴ – ۱۷۰۵)، یکی از هشت ریاضیدان برجستهٔ خانوادهٔ برنولی، است. این کتاب مدتی پس از فوت یاکوب برنولی در ۱۷۱۳ منتشر شد و شامل تجدید چاپ نخستین رسالهٔ صوری دربارهٔ حساب احتمالات بود. این رساله در سال ۱۶۵۷ به‌وسیلهٔ کریستیان هویگنس[4] (۱۶۲۹ – ۱۶۹۵)، فیزیکدان، ریاضیدان، و منجم هلندی‌ای که حلقه‌های دور مشتری را کشف کرد، نوشته شده بود.

قضیهٔ دو جمله‌ای به‌ازای $n = ۲$ در اثر اقلیدس[5] (۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح) دیده می‌شود، ولی عملاً در قرن شانزدهم اصطلاح «ضریب دوجمله‌ای» به‌وسیلهٔ میشل اشتیفل[6] (۴۸۶ – ۱۵۶۷) وضع شد. او در اثرش به‌نام حساب صحیح[7] (۱۵۴۴) ضرایب دو جمله‌ای را تا مرتبهٔ $n = ۱۷$ به‌دست می‌دهد. بلز پاسکال[8] (۱۶۲۳ – ۱۶۶۲) در پژوهشهای خود دربارهٔ حساب احتمالات، در دههٔ ۱۶۵۰ رساله‌ای منتشر کرد که در آن ارتباطهای موجود بین ضرایب دوجمله‌ای، ترکیبها، و چند جمله‌ایها را بررسی می‌کرد. این نتایج را یاکوب برنولی هنگام اثبات صورت کلی قضیهٔ دو جمله‌ای، با روشی مشابه با آنچه ما در این فصل ارائه کردیم، به‌کار برد. استفاده از نماد $\binom{n}{r}$ تا قرن نوزدهم که به‌وسیلهٔ آندره‌آس فُن اتینگهاوزن[9] (۱۷۹۶ – ۱۸۷۸) به‌کار برده شد، هنوز متداول نشده بود.

بلز پاسکال (۱۶۲۳ – ۱۶۶۲)

ولی واقعاً در قرن بیستم بود که ظهور کامپیوتر امکان تحلیل منظم و اصولی فرایندها و الگوریتمهایی را که برای تولید جایگشتها و ترکیبها به‌کار می‌روند، فراهم ساخت. در بند ۱۰.۱۰ (جلد دوم) چنین الگوریتمی را خواهیم دید. نخستین کتاب درسی جامع در مورد مباحث ترکیبها و جایگشتها را و.ا. وایت ورث[10] [۱۰] نوشت. همچنین

1- N.L.Biggs 2- Ars Conjectandi 3- Jacob Bernoulli 4- Christiaan Huygens 5- Euclid
6- Michel Stifel 7- Arithmetica Integra 8- Blaise Pascal 9- Andreas von Ettinghausen
10- W.A. Whitworth

Scanned with CamScanner

فصل ۲ کتاب دی. کوهن[1] [۲]، فصل ۱ کتاب سی.ال.لیو[2] [۴]، فصل ۲ کتاب اف.اس. رابرتس[3] [۶]، فصل ۴ کتاب کِی، اچ.روزن[4] [۷]، فصل ۱ کتاب اِچ.جِی.رایزر[5] [۸]، و فصل ۵ کتاب ا.توکر[6] [۹] نیز به مطالب فصل حاضر پرداخته‌اند. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ ایده‌های مکانیک آماری و ترمودینامیک آماری، به کتاب درسی آر.رید[7] و آر. روی[8] [۵] مراجعه کنید.

مراجع

1. Biggs, Normal L. "The Roots of Combinatorics." *Historia Mathematica* 6 (1979): pp. 109-136.
2. Cohen, Daniel I.A. *Basic Techniques of Combinatorial Theory.* New York: Wiley, 1978.
3. Heath, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*, vol. 1. Reprint of the 1921 edition. New York: Dover Publications, 1981.
4. Liu, C.L. *Introduction to Combinatorial Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1968.
5. Reed, Robert D., and Roy, R.R. *Statistical Physics for students of Science and Engineering.* Scranton,Pa.:Intext Educational Publishers,1971.
6. Roberts, Fred S. *Applied Combinatorics.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.
7. Rosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
8. Ryser, H.J. *Combinatorial Mathematics.* Published by the Mathematical Association of America. New York: Wiley, 1963.
9. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics,* 2nd ed. New York: Wiley, 1985.
10. Whitworth, W.A. *Choice and Chance.* Reprint of the 1901 edition. New York: Hafner, 1965.

Scanned with CamScanner