Year: Month: Day: Subject:

linear equation : $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b$ 1

$(x_1, \ldots, x_n) = (s_1, \ldots, s_n)$

solution set : all possible solutions

same solution $\Longleftrightarrow$ same systems

consistent system : یک یا بی‌نهایت جواب

a system can have
- 0 جواب $\rightarrow$ inconsistent
- 1 جواب } consistent
- ∞ جواب } consistent

coef matrix = ماتریس ضرایب

augmented matrix = $m\left\{\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\text{coef}}^{n} & b \end{array}\right]\right.$ $m \times n$

Elementry row operations
- Replacement : جمع خودش و ضریبی از ردیف دیگه
- interchange
- scaling

row equivalent $\Longleftrightarrow$ same solution set

row operations are reversible.

consistent? $\Longleftrightarrow$ at least one ans

if $0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 = b \neq 0$ $\underset{\text{فقط}}{\Rightarrow}$ inconsistent

تبدیل به فرم نردبانی : هر متغیر در ردیف خودش و ردیف های بالاتر

" ، کاهش یافته : ~~[illegible]~~ بالاهاشون هم صفر بشه و تبدیل به 1.

nonzero row or column : contains at least one nonzero entry

leading entry = leftmost nonzero entry in a nonzero row

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

echelon:
- ردیف های غیر صفر بالای صفر
- پیشرو ها در هر ستون یک یا ۲ دارد راست
- پایین پیشرو ها همه صفر

forward phase ↳ echelon

نه یکتا

reduced echelon:
- پیشرو ها همه یک
- پیشرو یک تنها غیر صفر ستون

backward phase ↳ reduced echelon

unique

leading entry = مقدار

محل موقعیت

pivot position = leading 1 in reduced echolon

pivot column = column containing p.p

در ماتریس نردبانی ← هر ستون حداکثر یک موقعیت محوری

leading entry لزوماً مقدارش یک نیست ولی p.p محل leading entry ای است که مقدارش یک.

نحوه‌ی رسیدن به echolon و

پیدا کردن pivot ها: left top most ردیف اول ← غیرصفر ✓ ← زیرش همه صفر ← سطر و ستونش حذف ← repeat

موقعیت p.p ها را از فرم نردبانی می‌گیریم ولی مقدار از ماتریس اصلی

بعد از رسیدن به echolon برای کاهش یافته: از right most p.p شروع کن:

1. تبدیل به یک
2. بالاهاش 0

basic var = متناظر با ستون pivot

free var = non pivot " "

not unique! ۳۶

parametric description = فرم جواب به صورتی که free var کل بالایی را داده

$x_1 = 5x_3 + 4$

$x_2 = 4x_3 - 1$

x_3 is free

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

solving a system → finding a parametric description
→ solution set is empty ⇒ inconsistent
⇓
no parametric description

system is consistent ⟺ ستون راست ماتریس افزوده pivot col نیست. ⟺ ردیف [0 0 ... 0 b] شامل $b \neq 0$

consistent → یک جواب
→ بی‌نهایت جواب (free var)

حرف بزرگ bold = ماتریس

" کوچک bold = بردار

" " x = اسکالر

zero vector = 0

$u + v = u + v \qquad (u+v)+w = u+(v+w)$

$u + 0 = 0 + u = u \qquad u + (-u) = (-u) + u = 0$

$c(u+v) = cu + cv \qquad (c+d)u = cu + du$

$c(du) = (cd)u \qquad 1u = u$

scalar

ترکیب خطی :

$y = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p$

$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \equiv [a_1 \ \cdots \ a_n \ b]$

Span = set of all linear combinations

span{v} = خط شامل نقطه v و نقطه 0 (مضاربش)

span{u, v} → u و v مستقل → span = صفحه در $\mathbb{R}^n$
→ ترکیب خطی هم (مضرب هم) → span = خط

Subject:

ترکیب خطی ستون های ماتریس = ضرب ماتریس در بردار

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \underbrace{[a_1\ a_2 \cdots a_n]}_{\text{بردارها}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{اسکالرها (ضرایب)}}$$

اسکالرها ⟵ بردار

بردارها ⟵ ماتریس

matrix equation : $Ax = b \underset{\text{same solution}}{\Longleftrightarrow} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \Longleftrightarrow$

aug matrix : $[a_1\ a_2 \cdots a_n\ b]$

$Ax=b$ جواب دارد ⟺ b ترکیب خطی از ستون های A باشد.

میتوانیم متغیر آزاد داشته باشیم

* pivot in every row ⟶ حداقل یک جواب
* pivot in every column ⟶ حداکثر یک جواب — پس دیگه متغیر آزاد نداریم.
* both ⟶ ماتریس مربعی ⟶ unique solution

$A_{m\times n}$ matrix

A has pivot in every row ⟺ به ازای هر b، $Ax=b$ جواب دارد ⟺ ستون های A فضای $\mathbb{R}^m$ را span می کنند. ⟺ هر b، ترکیب خطی ستون های A است.

ضرب برداری : $x_1 [\ \ ] + \dots + x_n [\ \ ]$

$A_{m\times n}$ matrix
u, v : vector
↳ in $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $A(u+v) = Au + Av$
$A(cu) = c(Au)$

پس همه‌ی ردیف‌ها غیرصفر ⟹ ردیف $[0\ 0 \dots 0\ \overset{\neq 0}{b}]$ نداریم ⟹ ماتریس نردبانی کاهش یافته consistent ⟹ A consistent

دستگاه همگن : $\underset{m\times n}{A}x = \underset{\text{in } \mathbb{R}^m}{0}$ - consistent - حداقل یک جواب $x=0$
↓
trivial

when the ans is described with vectors

Year: Month: Day: Subject:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{x_3}_{\text{free var}} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \overset{\text{in } \mathbb{R}}{x_3}\, v$$

فرم پارامتری بردارهای جواب :

L, $x = su + tv$

s, t: in IR u, v : بردار

* بردار صفر در اسپن هر برداری هست

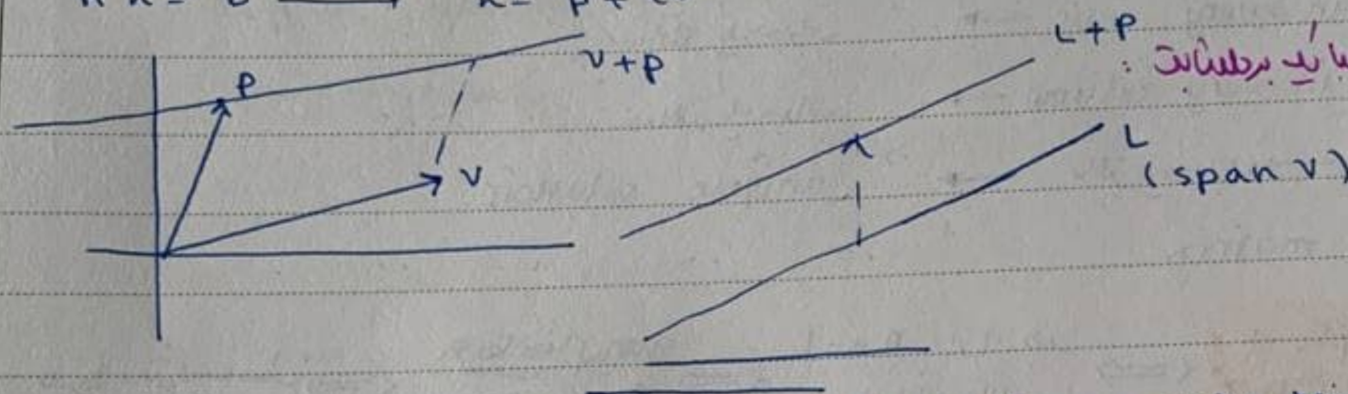
دستگاه ناهمگن : جواب ⇐

$x = \underbrace{p}_{\text{بردار ثابت}} + \overset{\text{in IR}}{t\,v}$ خود یک جواب از $Ax=b$ بردار   جواب همگن

$Ax = 0 \longrightarrow x = tv$

$Ax = b \longrightarrow x = p + tv$

جمع بردارها یک بردار ثابت :



linearly independent : $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0 \longrightarrow$ only trivial ans

برای تشخیص وابستگی یا استقلال خطی ، با نوشتن $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$ ، جواب صفر

(که داریم حالا باید ببینیم آیا free var داریم؟ ← اگر آره ← وابسته خطی

* $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0 \longrightarrow$ با $c_i \neq 0 \longrightarrow$ linear relation

ستون های A مستقل خطی $\Longleftrightarrow$ trivial تنها جواب $Ax = 0$ داشته باشد.

* a set which has only one vector v
- $v \neq 0 \longrightarrow$ مستقل خطی
- $v = 0 \longrightarrow$ وابسته خطی

* Set containing 0 vector $\longrightarrow$ وابسته $\longrightarrow$ چون می شه نوشت

$(1)0 + 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$ غیرصفر

← یعنی این جواب رو حتما داریم پس فقط $x=0$ جواب نیست

(حداقل یکی از c_i ها غیرصفر ← بردارها وابسته خطی)

Year: Month: Day: Subject:

۲ بردار ⟵ ① یکی صفر ⟸ وابسته

② ضریب از هم باشن ⟸ وابسته

③ otherwise ⟸ مستقل

$S = \{v_1, \dots, v_p\}$ is linearly dependent $\iff$ $\exists\, j > 1$, v_j is a linear comb of $v_1, \dots, v_{j-1}$

$v_1 \neq 0$

حداقل یکی داریم.

$\{v, v, w\}$ وابسته خطی است. $\iff$ w در فضای span $\{v, v\}$ باشد.

set contains vectors more than num of entries $\Rightarrow$ وابسته خطی.

* ترکیب خطی رو با وابسته خطی قاطی نکنید!

تبدیل خطی :

$T : \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{domain}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\text{codomain}}$

$x \longrightarrow \underbrace{x(T)}_{\text{image of } x}$ $\Longrightarrow$ Set of all images = range = تمامی ترکیب های خطی ستون A

$T(x) \equiv x \longmapsto Ax$ $\quad A: m \times n \quad x \in \mathbb{R}^n$

* $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ shear transformation

خط را به خط map می کند.

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T(cu) = cT(u)$ تبدیل خطی

$T(0) = 0$ ⟵ ۰ ⟵ بردار ۰ * ⟵

$\Rightarrow T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$

* $T(x) = rx$

$0 < r < 1 \longrightarrow$ contraction / فشرده

$r > 1 \longrightarrow$ dilation / انبساط

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

matrix of linear transformation: $A \longrightarrow$ unique $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{bmatrix}$ $e_j =$ زای یک درایه صفر
ستون ژام ماتریس I

= standard matrix

		Matrix
Reflections	نسبت به محور x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
	y "	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$y = x$ "	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	$y = -x$ "	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
	مبدا " (هر دوی x و y)	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Contractions & Expansions	افقی	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	عمودی	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
	افقی shear	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	عمودی shear	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$
Projection	محور x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	محور y	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تبدیل پوشا:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ is onto $\mathbb{R}^m$

for each b in $\mathbb{R}^m$ exists at least one x in $\mathbb{R}^n$

that $T(x) = b$. $\Longrightarrow$ codomain = Range

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

تبدیل یک به یک:

for each b in $\mathbb{R}^m$ exists at most one x in $\mathbb{R}^n$ that $T(x) = b$.

Domain $= \mathbb{R}^n$ Codomain $= \mathbb{R}^m$

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

* چک کردن پوشا بودن: در هر ردیف p.p داشته باشیم.

〃 یک به یک بودن: متغیر آزاد نداشته باشیم.

* T: linear $\Rightarrow$ T(x)=0 تنها جواب x=0 (trivial) را داشته باشد $\Longleftrightarrow$ T تبدیل یک به یک است.

* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (linear)

standard matrix $= A$ | $Ax = b$

ستون های A، R^m را span می‌کنند. $\Longleftrightarrow$ T پوشا

چون به ازای هر b، جواب دارد.

ستون های A مستقل خطی هستند. $\Longleftrightarrow$ یک به یک

چون هر ستون p.p باید داشته باشد تا متغیر آزاد نداشته باشیم.

Chapter 2

* sum فقط برای ماتریس های با سایز برابر تعریف شده است.

$A + B = B + A \;|\; (A+B)+C = A+(B+C) \;|\; A + 0 = A$

$r(A+B) = rA + rB \;|\; (r+s)A = rA + sA \;|\; r(sA) = (rs)A$

$A(Bx)$ ترکیب خطی بردارهای $Ab_1, \ldots, Ab_p$ هست با وزن xها $x_1, \ldots, x_p$

$\boxed{A(Bx) = (AB)x} = [Ab_1 \;\ldots\; Ab_p]\, x$

$T = A(Bx)$, standard matrix $= \overbrace{[Ab_1 \;\cdots\; Ab_p]}^{*}$

ضرب ۲ ماتریس را می‌توان یک تبدیل خطی با ماتریس * تعریف کرد

$A(BC) = (AB)C \;|\; A(B+C) = AB + AC \;|\; (B+C)A = BA + CA \;|$

$r(AB) = (rA)B = A(rB) \;|\; I_m A_{m\times n} = A = A I_n$

ARYA

$AB = BA \iff A$ & B commute with one another.

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$!

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ or $B = 0$

Transpose: $A_{m \times n} \longrightarrow A^T_{n \times m}$

$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $\qquad I^T = I$

$(rA)^T = rA^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

A is invertible $\iff \det(A) \neq 0$

$\iff$ for each b in $\mathbb{R}^n$, $Ax = b$'s **only** solution is $x = A^{-1}b$.

$(A^{-1})^{-1} = A$ | $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ | $\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$

A is invertible $\iff$ A is row equivalent to I

E = elementary matrix = after applying one single row operation on I.

invertible

A is invertible $\Rightarrow$ به‌ازای هر b جواب $Ax=b$ unique دارد. $\Rightarrow$ has pivot pos in every row.

شروع

$(E_p \dots E_1)\, A = I \implies A = (E_p \cdots E_1)^{-1}$

$A^{-1} = E_p \cdots E_1$

شروع

$[A \;\; I] \xrightarrow{\text{row reduce}}$ if $A \sim I \Rightarrow \checkmark \Rightarrow [I \;\; A^{-1}]$: چک کردن وارون‌پذیر بودن

Year: Month: Day:

Subject:

invertible = nonsingular

noninvertible = singular

IMT

A is invertible.

has pivot position in every row.

$x \mapsto Ax$ پوشا

$A \sim I_n$

$Ax = b$ has at least 1 ans for each b

has n p.p

ستون ها span کنند $\mathbb{R}^n$ را.

$Ax = 0$ has only trivial ans

A^T is invertible

ستون ها مستقل

$x \mapsto Ax$ one-to-one

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

T is invertible $\iff$ A is invertibe

$\hookrightarrow T^{-1} = S(x) = A^{-1}x$

$S(T(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$T(S(x)) = x \quad$ ''

---

col-row expansion : $AB = \begin{bmatrix} col_1(A) & \cdots & col_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_1(B) \\ \vdots \\ row_n(B) \end{bmatrix}$

$A_{m \times n} \quad B_{n \times p}$

block diagonal matrix is invertible if (بلوک های قطری وارون پذیر باشند).