Chapter 5 - Review Notes

* row reduction مسئله مقادیر (دقیقاً بردار) های ویژه رو تبدیل میکنیم.

* دو شرط برای بردار ویژه: 1- $Ax = \lambda x$ 2- x غیرصفر

Eigen vector & Eigen value :

A : مربعی

x: غیرصفر → بردار ویژه

λ: صفر یا غیرصفر → مقدار ویژه

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

به ازای هر مقدار ویژه بی‌نهایت بردار ویژه داریم. (بی‌نهایت بردار ویژه متناظر با یک مقدار ویژه)

λ مقدار ویژه برای A است. $\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ جواب غیربدیهی (غیرصفر) داشته باشد.

چون یک جواب صفر داریم برای اینکه غیرصفر بشه باید بیش از یک جواب داشته باشیم. ⇝ دستگاه free var داشته باشد.

در واقع برای پیدا کردن بردارهای ویژه، ما به دنبال nullspace $A - \lambda I$ به غیر از بردار صفر هستیم.

Eigenspace :

مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با λ به علاوه‌ی بردار صفر.
= null space of $A - \lambda I$

* برای اثبات اینکه یک λ مقدار ویژه است ← $A - \lambda I$ رو تشکیل بده ← آخرش:
- ستون‌هاش وابسته خطی باشن ⟸ جواب nontrivial ✓ ⟸ OK ✓
- " مستقل " ⟸ جواب trivial ✗ ⟸ fail ✗

* پیدا کردن پایه‌ی eigenspace ← در واقع می‌خواهیم پایه‌ی null پیدا کنیم ←
augmented matrix for $(A - \lambda I)x = 0$ ← فرم برداری ← پایه = بردارهای ضریب free vars

* مقادیر ویژه ماتریس مثلثی = مقادیر روی قطر اصلی

* ماتریس وارون‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ صفر مقدار ویژه‌اش نباشد.

* بردارهای ویژه‌ی $v_1, \dots, v_r$ متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_r$، مستقل خطی هستند.

* جواب برای رابطه بازگشتی با استفاده از مقدار و بردار ویژه:

$\boxed{x_{k+1} = A x_k}$ $\Longrightarrow$ solution $\Rightarrow$ $\boxed{x_k = \lambda^k x_0}$

$k = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad$ $k = 0, 1, 2, \dots$

ARYA

* x_0 : بردار ویژه برای A متناظر با λ (1)
λ : مقدار ویژه‌ی A

$|A| = (-1)^r (u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn})$

(square) ~~only~~ using (r) row interchanges | جابجایی row replacement

if $A: n \times n$ $\quad A \longrightarrow U \rightarrow$ echolon form

* $\det A = \begin{cases} (-1)^r \times [\text{product of pivots in } U] & A \text{ is invertible} \\ 0 & A \text{ is not invertible} \end{cases}$

* U فقط با استفاده از row replacement & interchange بدست آمده.

* ادامه‌ی INT:

$A_{n\times n}$ is invertible $\Longleftrightarrow$ • 0 is not an eigenvalue of A

" $\Longleftrightarrow$ • $|A| \neq 0$

* تاثیر row replacement • بدون تغییر
row interchang روی det $\longrightarrow$ • det $\times (-1)$
row scaling • det $\times (k)$

Characteristic equation: $\det(A - \lambda I) = 0$

λ is an eigen value of $A_{n\times n}$ $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$

$\boxed{\boxed{\quad\quad} = 0}$

چندجمله‌ای مشخصه ↲ ↳ characteristic equation

* • det (ماتریس مثلثی) = ضرب عناصر روی قطر
• $\det A^T = \det A$
• $\det(AB) = \det A \det B$

* $A_{n\times n} \longrightarrow$ معادله مشخصه از درجه n (چندجمله‌ای مشخصه از درجه n)

* ماتریس $n \times n \Rightarrow$ معادله مشخصه حداکثر n ریشه $\Rightarrow$ حداکثر n مقدار ویژه‌ی متمایز

Similarity: برای ماتریس های مربعی

$P^{-1} A P = B \Longrightarrow A$ is simialr to B.
$P B P^{-1} = A \Longrightarrow B$ is similar to A.
} A & B are similar

$P^{-1} = Q \rightarrow Q^{-1} B Q = A$

similarity transformation: chaning $A \overset{\text{to}}{\Rightarrow} P^{-1}AP$

Year: Month: Day: Subject:

* Similarity $\neq$ row equivalence

تعمیم یک طرفه هست!

$\not\Leftarrow$

$A_{n\times n}$ & $B_{n\times n}$ are similar $\Longrightarrow$ (چندجمله ای مشخصه) معادله مشخصه های یکسانی دارن، نتیجتاً مقادیر ویژه ی یکسانی دارن.

* Row operations on a matrix usually change its eigenvalues

قطری سازی

* $\boxed{\text{Diagonalization}}$:

A (square) is diagonalizable if A is similar to a diagonal matrix

* همه ی مربعی ها قابل قطری سازی نیستن!

$\Longrightarrow A = PDP^{-1}$

(دارای پذیرا ستون های مستقل) — قطری

* for $k \geq 1 \longrightarrow A^k = PD^kP^{-1}$

قطری سازی:

A قابل قطری سازی است. $\Longleftrightarrow$ A n تا بردار ویژه ی مستقل داره.

$\Longleftrightarrow$ به اندازه ی کافی بردار ویژه برای تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ داریم.

که به آن پایه، eigenvector basis برای $\mathbb{R}^n$ میگیم.

* همه ی ماتریس های مربعی قابل قطری سازی نیستند.

A قابل قطری سازی است. $\Longleftrightarrow$ A دارای n تا بردار ویژه ی مستقل خطی باشد.

$\downarrow$

تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ میدهند.

$\downarrow$

eigenvector basis

* فضای بردارای ویژه ی برای یک مقدار ویژه ۳ بعدی است ← یعنی به ازای آن مقدار ویژه ۳ تا بردار ویژه ی مستقل خطی داریم.

Month: Day: Subject:

* مراحل قطری سازی ماتریس مربعی $A_{n\times n}$:

1: پیدا کردن مقادیر ویژه ی A (معادله مشخصه)

2: پیدا کردن n تا بردار ویژه ی مستقل

3: ساختن P با بردارهای ویژه $[v_1 \; \cdots \; v_n]$

4: ساختن D با مقادیر ویژه ی به ترتیب متناظر با بردارهای ویژه ی P

5: verify $AP = PD$

* ماتریس $A_{n\times n}$ ، n تا مقدار ویژه ی متمایز دارد $\Longrightarrow$ A قابل قطری سازی است. $\not\Longleftarrow$ لزوما

P به طور اتوماتیک وارون پذیر است.

$A_{n\times n}$ has p distinct eigen values : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

$\Downarrow$

a. for each λ_K $(1 \le K \le p)$ $\longrightarrow$ $\dim$ eigenspace $\lambda_K \le$ مرتبه ی λ_K

b. A is diagonalizable $\Longleftrightarrow$ n = حاصل جمع dim های eigenspace ها

$\Longleftrightarrow$ مرتبه هر مقدار ویژه = dim eigenspace جبری

c. A is diagonalizable & B_K is a basis for the eigenspace corresponding to λ_K for each K $\Longrightarrow$ $B_1, \dots, B_p$ forms an eigenvector basis for $\mathbb{R}^n$

linear

$\boxed{\text{matrix for } T \text{ relative to the bases } B \text{ and } C:}$

(ماتریس تبدیل خطی T نسبت به C و B)

$$M = \left[[T(b_1)]_C \quad [T(b_2)]_C \quad \cdots \quad [T(b_n)]_C \right]$$

تبدیل : $[x]_B \longrightarrow [T(x)]_C$ $\qquad [T(x)]_C = M[x]_B$

* اگر B و C هر دو برای یک زیرفضا باشند $\longrightarrow$ $[T(b_i)]_C = [b_i]_C$ (درواقع تبدیل همانی باشد)

$x = P_B[x]_B$ $\qquad P_B = [b_1, \dots, b_n]$ $\longrightarrow$ $P_B^{-1}x = [x]_B$

(۴)

$[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P}[x]_B$

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

* common case :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(x) \arrow[d] \\ {[x]_B} \arrow[r, "\times [T]_B"] & {[T(x)]_B} \end{tikzcd}$$

$M = [T]_B = \left[[T(b_1)]_B \; \cdots \; [T(b_n)]_B \right]$

matrix for T relative to B / B-matrix for T

$\Rightarrow T: V \longrightarrow V \quad : \quad [T(x)]_B = [T]_B [x]_B$

* B matrix for $x \longrightarrow Ax$ when $A = PDP^{-1}$: $x = P[x]_B$

$(n \times n)$ قطری

$\left(P = [b_1 \; \cdots \; b_n] \quad \{b_1, \dots, b_n\} = B \right) \Rightarrow [x]_B = P^{-1} x$ (*)

if $T(x) = Ax \xrightarrow{A = PDP^{-1}} M = [T]_B = P^{-1}AP = D$

برای اینکه ماتریس تبدیل، قطری باشه، باید x در پایه ی P تعریف بشه. (*)

$M = [T]_B = D$ → قطری

* Complex eigenvalues :

$\exists$ complex scalar λ that [redacted] $\Longleftrightarrow$ $\exists x$ (nonzero) in $\mathbb{C}^n$ such that

det $(A - \lambda I) = 0$ $Ax = \lambda x$

λ = complex eigenvalue x = " eigenvector

* وقتی ماتریس مت برطلد عوض کنه ← مقدار ویژه ی حقیقی نداره. ← چون $Ax = \lambda x$ جواب نداره.

ولی مقدار ویژه و بردار ویژه ی مختلط داره.

* Conjugate (مزدوج عدد مختلط) of a complex num :

$c = a + ib$ (real: a, im: b)

$\bar{c} = a - ib$

(منفی کن دحش موهومی را)

ARYA

Month: .... Day: .... Subject: ....

x: complex vector

$\boxed{Re\ x}$ = قسمت حقیقی بردار x $\boxed{Im\ x}$ = قسمت موهومی بردار x

* A = real 2×2 matrix, has complex eigenvalue : $\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$
and associated eigenvector v in C^2

$\Longrightarrow$ $A = PCP^{-1}$ $P = [\,Re\,v \quad Im\,v\,]$, $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

* هر بردار دلخواه در حوزه‌ی مختلط داشته باشیم، اگر $Re\,v, Im\,v \neq 0$ $\Longrightarrow$ $Im\,v, Re\,v$
از هم مستقل خطی هستند.

* v = a vector in C^n , A = real $n\times n$ matrix

- $\Longrightarrow$ $Re(Av) = A\,Re(v)$, $Im(Av) = A\,Im(v)$
- $\Longrightarrow$ $Re(v)$ and $Im(v)$ are linearly independent.
- $\Longrightarrow$ v & $\bar{v}$ are linearly independent.

* $Re(v) = Re(\bar{v})$ $Im(\bar{v}) = -Im(v)$

ماتریس حرکت

* Trajectory of a dynamic system: graph of $x_0, x_1, \dots$
in $x_{k+1} = Ax_k$ (solution $\Rightarrow$ $x_{k+1} = A^k x_0$)
repeatedly doing $x \longmapsto Ax$

Ploting several trajectories of the dynamic system $x_{k+1} = Ax_k$:
$A : 2\times2$ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$
$x_0 = c_1v_1 + c_2v_2$ بردارهای ویژه: v_1, v_2

ابتدا x_0 را به صورتی از مضارب بردارهای ویژه می‌نویسیم

$x_k = A^k x_0 = c_1\cdot(a)^k\cdot v_1 + c_2(b)^k\cdot v_2 = A^k x_0$

۲ حالت
- $\longrightarrow$ $0 < a, b < 1$ $\longrightarrow$ origin as attractor
- $\longrightarrow$ $a, b > 1$ $\longrightarrow$ repller (دفع‌کننده)

$c_1, c_2 \longrightarrow x_0 = c_1v_1 + c_2v_2$ (بستگی دارد)
a, b همان مقادیر ویژه A متناظر با v_1, v_2 $\longrightarrow$ چون $A^k x_0 = \lambda^k x_0$

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

* $\boxed{\text{strictly dominant eigenvalue}}$ = بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ قدر مطلق

$\underbrace{}_{*}$ → for estimating strictly dominant λ eigenvalue

* **Power Method**: for $A_{n\times n}$ (مربعی!) with * λ_1

1. select initial vector x_0 → باید بزرگترین عنصر آن از لحاظ قدر مطلق برابر ۱ باشد.

2. for $k = 0, 1, \dots$

   a) compute Ax_k

   normalizing:

   b) Let μ_k be an entry in Ax_k whose absolute value is large as possible (بزرگترین خونه از لحاظ قدر مطلق در x_{k+1})

   c) compute $x_{k+1} = \left(\frac{1}{\mu_k}\right) A x_k$

3. $\forall x_0 \longrightarrow \{\mu_k\} \xrightarrow{\text{می‌رسیم}}$ بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ قدر مطلق ⊛

   $\{x_k\} \xrightarrow{\text{//}}$ بردار ویژه‌ی متناظر با آن

   ↓ (بردار ویژه‌ی متناظر با ⊛) ، بردار v_1 ، $A^k x$ به مرور به سمت با افزایش k ،

* **Inverse Power Method**: → for estimating an eigenvalue λ of A

1. Select an initial estimate close to $\lambda = \alpha$

2. x_0 مثل گام اول (بزرگترین خانه‌اش از لحاظ قدر مطلق = ۱)

3. for $k = 0, 1, \dots$

   a) solve $(A - \alpha I) y_k = x_k$ for y_k

   b) Let μ_k be an entry in y_k → از لحاظ قدر مطلق بزرگترین

   c) Compute $v_k = \alpha + \left(\frac{1}{\mu_k}\right)$

   d) compute $x_{k+1} = \left(\frac{1}{\mu_k}\right) y_k$

4. $\{v_k\} \longrightarrow$ eigenvalue λ of A

   $\{x_k\} \longrightarrow$ بردار ویژه‌ی متناظر با λ

« Extra Notes »

Year: Month: Day: Subject:

* برای اینکه نشون بدیم یه عددی مقدار ویژه هست:

تشکیل $A - \lambda I$ ← اگر ستون ها وابسته خطی ⟸ جواب nontrivial $\boxed{\checkmark}$

یا اگر معادله $(A-\lambda I)x=0$ ، free var داره.

* برای بدست آوردن پایه‌ی eigenspace :

در واقع پایه‌ی nullspace توی $(A-\lambda I)x=0$ رو باید به دست بیاریم ← که می‌شه

ضرایب freevars توی فرم برداری جواب.

* free var ← متناظر با ستون nonpivot

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\times P_B^{-1}"'] & T(x) \arrow[d, "\times P_C^{-1}"] \\ {[x]_B} \arrow[r, "\times M"'] & {[T(x)]_C} \end{tikzcd}$$

$P_B^{-1}x = [x]_B$

$P_C^{-1}T(x) = [T(x)]_C$

$[T(x)]_C = M[x]_B$

* $\underbrace{P_B}_{\varepsilon \leftarrow B}[x]_B = x$, $P_{C\leftarrow B}[x]_B = [x]_C$

ARYA

Chapter 6 Review Notes

Year: Month: (?) $u^T v = I$ ← اگر u و v دو ماتریس عمود باشن (نه بردار) Subject:

$v, u : n\times 1$ $u^T : 1\times n$ $u^T v : 1\times 1$ (scalar)

$\boxed{\text{inner product / dot "}}$: $u \cdot v = u^T v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

$\boxed{\text{Theorem 1}}$: $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, c: scalar

a. $u \cdot v = v \cdot u$

b. $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v \cdot w$

c. $(cu)\cdot v = c(u\cdot v) = u \cdot (cv)$

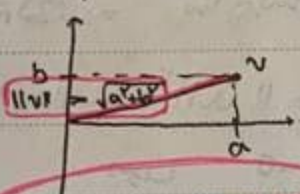
d. $u \cdot u \geq 0$, $u\cdot u = 0 \iff u = 0$

$\xrightarrow{b,c}$ * $(c_1 u_1 + \dots + c_p u_p)\cdot w = c_1(u_1 \cdot w) + \dots + c_p(u_p \cdot w)$

$\boxed{\text{Length / Norm}}$: $= \|v\|$

$\|v\| = \sqrt{v\cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \longrightarrow \|v\|^2 = v \cdot v$

$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



قدر مطلق !!

* $\|cv\| = |c|\,\|v\|$

قدر مطلق !

$\boxed{\text{unit vector}}$: vector which its length = 1.

* سایز / اندازه (= تعداد مؤلفه‌ها) $\neq$ نرم/طول

$\boxed{\text{Normalizing}}$: → unit vector in the same direction as v

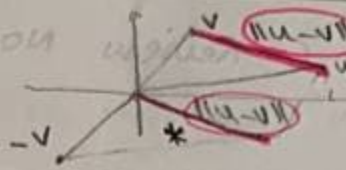
خونه‌های بردار مورد نظر را بر $\|v\|$ تقسیم می‌کنیم. ($\times \frac{1}{\|v\|}$)

$\rightarrow$ norm $= \frac{1}{\|v\|} \times \|v\| = 1$

* normalized vector ⟶ same direction as v.

$u - v = u + (-v)$

Month: Day: Subject:



Distance between u & v: $dest(u,v)$ = norm of $u-v$

$dist(u,v) = \| u-v \|$

* $dist(u,v) = dist(u-v, 0)$

** *

* u , v عمود برهم $\iff dist(u,v) = dist(u,-v)$

$\|u-v\| = \|u-(-v)\|$

* $\|x\| = \|-x\|$ (طبق $\|cu\| = |c|\,\|u\|$)

Orthogonal Vectors: * orthogonal $v, u \iff u \cdot v = 0$

$u, v \in \mathbb{R}^n$

نکته ① = بردار صفر بر هر برداری عمود ($0 \cdot u = \underset{0}{0^T} u = 0$ ✓)

نکته ② = تنها برداری که بر خودش عموده.

* u, v are orthogonal $\iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(چون $u \cdot v = 0$

Orthogonal vector to a subspace:

یک بردار بر تمام بردارهای یک زیرفضا عمود است.

orthogonal complement of W / W perp / W perpendicular:

$W^{\perp}$ = مجموعه همه ی بردارهایی که بر زیرفضا عمود هستند.

* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

* $(W^{\perp})^{\perp} = W$

* $W^{\perp}$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3: $A: m \times n$

$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A$

$(\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^T$

$(\underbrace{\text{Row } A^T}_{\text{Col } A})^{\perp} = \text{Nul } A^T$

$\text{Nul } A^{\perp} = \text{Row } A$

★ $\text{Col } A = \text{Row } A^T$

چون به دنبال xهایی هستیم

$Ax = 0 \longrightarrow$ null space

Orthogonal set: set of vectors $\{v_1, \dots, v_p\} \in \mathbb{R}^n$ that for each $i \neq j \longrightarrow u_i \cdot u_j = 0$

Theorem 4:

if $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ is orthogonal $\Longrightarrow$ S = مستقل خطی

بردارهای غیر صفر $\subset \mathbb{R}^n$

یک پایه برای زیرفضایی است که توسط S ، span شده.

* مجموعه بردار عمود ، مستقل خطی هم هست ولی مجموعه بردار مستقل خطی ، لزوماً عمود نیست.

Orthogonal Basis: یک پایه برای W است که علاوه بر پایه بودن ، عمود هم هست.

Theorem 5:

$\{u_1, \dots, u_p\}$ = Orthogonal basis for subspace W of $\mathbb{R}^n$

for each y in W that : $y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$

orthogonal basis

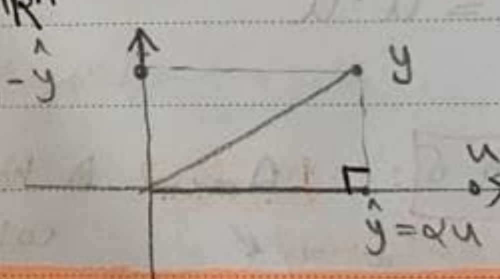
if $\{u_1, \dots, u_p\}$ is orthogonal basis $\Longrightarrow$ $c_j = \dfrac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$ $(j = 1, \dots, p)$

Orthogonal Projection: $y, u \in \mathbb{R}^n$

$y = \hat{y} + z$ $\quad z = y - \hat{y}$

$z \longrightarrow$ بردار عمود بر u

$\hat{y} = \alpha u$ (مضرب از u)



اگر u مضرب دلخواه c ای بشه ، جای $\hat{y}$ تغییری نمی‌کنه.

$\alpha = \dfrac{y \cdot u}{u \cdot u}$ $\qquad \hat{y} = \dfrac{y \cdot u}{u \cdot u} u$ ضرب! نه dot!

$\hat{y}$ = orthogonal projection of y onto u (تصویر عمودی)

z = component of y orthogonal to u

or $\hat{y} = \text{proj}_L y$ = orthogonal projection of y onto L

L: subspace spanned by u

Month: Day: Subject:

$\hat{y} = \mathrm{proj}_L\, y = \dfrac{y \cdot u}{u \cdot u}\, u$

* تصویر عمودی نسبت به زیرفضای span شده توسط u تعریف می‌کنیم، نه u با!

* برای چک کردن جواب: $z \cdot \hat{y} = 0$ ← orthogonal set $= \{\hat{y}, z\}$

$\underset{(y-\hat{y})}{z}$

* نزدیک‌ترین نقطه از زیرفضای L (span شده توسط u) به y $= \hat{y}$

$\hat{y}$ = closest point of L to y

$\boxed{\text{Orthonormal Set}}$: $\{u_1, \dots, u_p\}$ = orthogonal set of unit vectors

$\boxed{\text{Orthonormal Basis}}$: basis that is orthonormal

ex: standard basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ for $\mathbb{R}^n$

* هر زیرفضا از $\{e_1, \dots, e_n\}$ ← orthonormal

* چک کردن orthonormal basis : 1- عمود بودن ۲ به ۲ ✓ ← پس مستقل خطی هم OK میشه

2- unit vectors ✓

* تبدیل orthogonal به orthonormal ، normalization

* $u \cdot u = u^T u$

هر کدوم از u_i ها یک ستون‌اند

$U = [u_1 \; u_2 \; u_3] \longrightarrow U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Theorem 6}}$: $U_{m\times n}$ has orthonormal columns $\Longleftrightarrow U^T U = I$

پس لزوماً مربعی نیست

$\boxed{\text{Theorem 7}}$: $U_{m\times n}$ has orthonormal columns $\Rightarrow$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

a. $\|Ux\| = \|x\|$

b. $(Ux)\cdot(Uy) = x \cdot y$

c. $(Ux)\cdot(Uy) = 0 \Longleftrightarrow x \cdot y = 0$

a&c → d. $x \longrightarrow Ux \longrightarrow$ طول و عمود بودن رو حفظ می‌کنه.

ARYA

Slide 6.3-5: $A\,(u \cdot u) \overset{?}{=} (Au)\cdot u$

Subject:

Year: Month: Day:

* for each y, $\hat{y}$ and $z = y - \hat{y}$ are unique!
  ↳ تصویر عمودی نسبت به زیرفضای W.

Orthogonal Decomposition Theorem :

$W \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ can be written uniquely as

$$y = \hat{y} + z$$

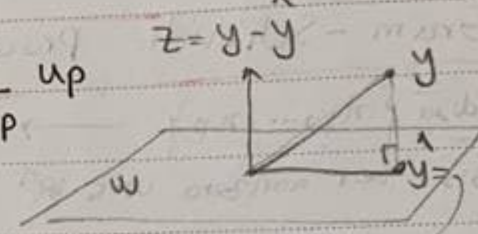
$$\hat{y} \in W, \; z \in W^{\perp}$$

فقط درصورتی که u پایه‌ی عمود باشه این رابطه برقراره

if $\{u_1, \dots, u_p\}$ is an orthogonal basis of W

$$\Longrightarrow \quad \hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

$$z = y - \hat{y}$$



* $\hat{y}$ = orthogonal projection of y onto W $= \mathrm{proj}_W y$
* uniqueness of $\hat{y}$ ⇒ y تنها به W بستگی داره و به پایه‌ی مشخص W بستگی نداره

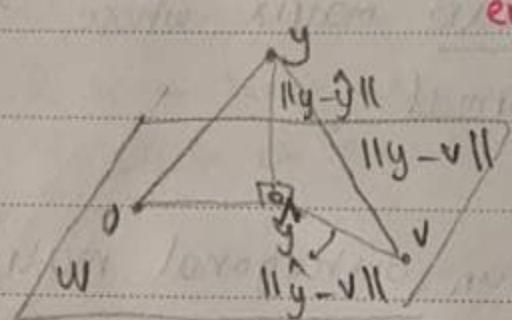
* if y is in $W = \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$ $\Longrightarrow \mathrm{proj}_W y = y$
  ↳ در این صورت می‌شه همین سؤال 5 توی ص 3.

Theorem 9 : $W \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\hat{y} = \mathrm{proj}_W y$

$\hat{y}$ = the best approximation to y by elements of W

$\|y - \hat{y}\| < \underbrace{\|y - v\|}_{\text{error}}$ for all v in W distinct from $\hat{y}$

error → min when → $\hat{y} = v$



* $\hat{y} - v \in W$
* $y - \hat{y}$ is orthogonal to $\hat{y} - v$
* $\|y - \hat{y}\|^2 = \|\hat{y} - v\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2$

Year: Month: Day:

Subject:

Theorem 10: $\{u_1, \dots, u_p\}$ = orthonormal basis for $W \subseteq \mathbb{R}^n$

ترتیب دهی از ستون های

$$\text{proj}_W\, y = (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \dots + (y \cdot u_p)u_p$$

if $U = [u_1 \ \ u_2 \ \dots \ u_p] \longrightarrow \boxed{\text{proj}_W\, y = UU^T y}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$

↳ projection ماتریس

↳ ضرب ماتریس در بردار $\longrightarrow = UU^T y$

ماتریس — عناصر ستون

$y \cdot u_1 = u_1 \cdot y = u_1^T y, \ \dots, \ y \cdot u_p = u_p \cdot y = u_p^T y$

Gram-Schmidt Process

تبدیل $\{x_1, \dots, x_p\} \longrightarrow$ orthogonal basis $\{v_1, \dots, v_p\}$

basis for nonzero $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$v_1 = x_1$

تصویر عمودی x_2 بر روی v_1

$v_2 = x_2 - \dfrac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$

$v_3 = x_3 - \dfrac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dfrac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = x_3 - \text{proj}_{W_2} x_3$

$\vdots$ $W_2 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$

$v_p =$

* می‌تونی برای راحت‌تر شدن کار جاهایی که کسری عدد رو یه ... ضرب کنی تا ساده شه.

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$ $1 \leq k \leq p$

* $\boxed{v_{k+1} = x_{k+1} - \text{proj}_{W_k} x_{k+1}}$

* In Linear Algebra, an Orthogonal Matrix or Orthonormal Matrix is a real square matrix whose columns and rows are orthonormal.

$AA^T = I \iff A_{n \times n}$ is an orthogonal matrix.

A is orthogonal $\iff \underbrace{A^T}_{= A^{-1}}$ is orthogonal

A is orthogonal $\implies A$ is invertible, $A^{-1} = A^T$

ARYA

Year: Month: Day: Subject:

QR Factorization : $A_{m\times n}$ با ستون های مستقل خطی $\Rightarrow A = QR$

Q : $m\times n$, columns form orthonormal basis for col A

R : $n\times n$, upper triangular , invertible , قطر اصلی مثبت

نحوه بدست آوردن QR factorization :

۱- ستون های A مستقل خطی باید باشن ← ستون هاش تشکیل پایه ← گرام اشمیت

← به دست آوردن پایه orthogonal

۲- به دست آوردن پایه orthonormal

۳- Q orthonormal $\longrightarrow QQ^T = I \leftarrow$

$R = Q^TA$ $\quad (= Q^T(QR) = Q^TQR = IR = R)$

Least Squares Problem :

$A_{m\times n}$, b is in $\mathbb{R}^m$, $\forall x$ in $\mathbb{R}^n$, $Ax = b$ inconsistent

least square solution : $\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|$

$\forall x \longrightarrow Ax$ is in col A

$\hat{x} \leftarrow$ به دنبال x های هستیم که Ax نزدیک‌ترین نقطه در col A به b باشد

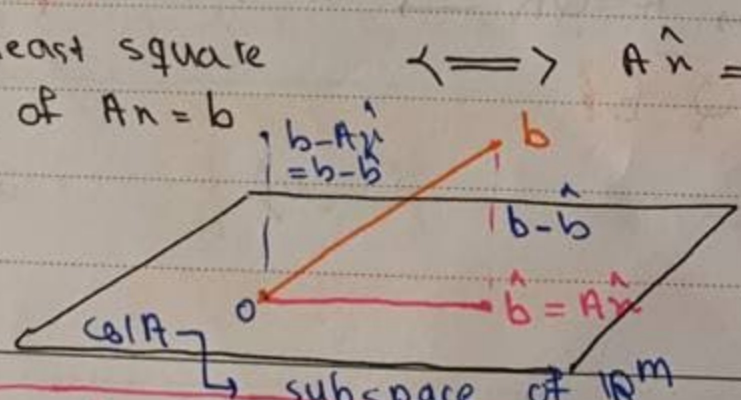
$A\hat{x} = \hat{b}$ همیشه جواب دارد ✓

$\hat{b} = \text{proj}_{\text{col}A}\, b$

$\downarrow$

closest point in col A to b

$\hat{x}$ is a least square solution of $Ax = b$ $\iff A\hat{x} = \hat{b}$



★ نکته مهم: وقتی ستون های A مستقل خطی باشند، جواب حداقل مربعات یکتا هست

ستون های A مستقل خطی if $\longrightarrow$ $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

نباشند x $\longrightarrow$ row reduction $\longrightarrow$ augmented matrix

$\boxed{\text{normal equation}}$: $A^TAx = A^Tb$ همیشه جواب دارد

$\downarrow$ solution

$\hat{x}$

جواب های $Ax=b$ leastsqr $\equiv$ جواب های normal eq $A^TAx = A^Tb$

$A^TA =$ همیشه مربعی , متقارن

اگر ستون های A مستقل خطی $\longrightarrow$ A^TA وارون پذیر $\longrightarrow$ جواب یکتا

$\boxed{\text{Theorem 14}}$: $A_{m\times n}$

a) $Ax=b$ has a unique least square solution for $\forall b$ in $\mathbb{R}^m$.

b) ستون های A مستقل خطی

c) A^TA وارون پذیر است

ستون های A مستقل خطی اند $\iff$ ستون های A^TA مستقل خطی هستند.

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

$\boxed{\text{least squares error}}$: $= \| b - \underbrace{A\hat{x}}_{\text{بهترین تخمین برای } b} \|$

Theorem 15 : $A_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

ستون های A مستقل خطی $\longrightarrow$ $A=QR$ $\longrightarrow$ $Ax=b$ has unique least square solution

$\longrightarrow$ $\hat{x} = R^{-1}Q^Tb$

همین مراحل a_1 به a_2 در $\hat{b}$

* $A_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

ستون های A متعامد (orthogonal) $\xrightarrow{A\hat{x}=\hat{b}}$ محاسبه $\hat{b}$ با استفاده از پایه‌ی متعامد ستون های A) $\longrightarrow$ حل $A\hat{x}=\hat{b}$ $\boxed{\text{unique solution}}$

* برای orthogonal proj ، اگر پایه‌ی دلخواه بدن ، اول عمود کنین و بعد proj.

Inner Product: on vector space V . a function gets 2 vectors u, v in V $\longrightarrow$ gives real num

باید شروط زیر را داشته باشد :

a. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

b. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

c. $\langle cu, w\rangle = c\langle u, v\rangle$

d. $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ and $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

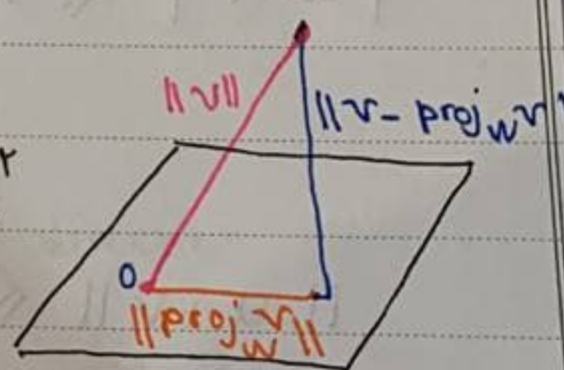
Inner Product Space : vector space with an inner product

norm / length : $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \longrightarrow \|v\|^2 = \langle v, v\rangle$

unit vector : length $=1$

distance between u & v : $\|u - v\|$

orthogonal $\Longleftrightarrow$ $\langle u, v\rangle = 0$



$$\|v\|^2 = \|\text{proj}_W v\|^2 + \|v - \text{proj}_W v\|^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\|\text{proj}_W v\| \leqslant \|v\|}$$

نامساوی کوشی شوارتز : $\boxed{|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|}$

* $\|proj_W v\| \leq \|v\|$

نامساوی مثلث :

$\forall u,v$ in $V \rightarrow \boxed{\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|}$

راه های مختلف برای least-squares

ستون های A مستقل خطی → unique → $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

نباشند // → augmented matrix حل

1. همیشه جواب می دهد. → normal equation

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

2. ستون های A مستقل خطی → unique → $A = QR$

$\hat{x} = R^{-1}Q^Tb$

3. ستون های A، orthogonal →

$\hat{b} = proj_{ColA}\, b = \frac{b\cdot a_1}{a_1\cdot a_1}a_1 + \dots + \frac{b\cdot a_n}{a_n\cdot a_n}a_n$

→ حل $A\hat{x} = \hat{b}$

* ۲ نامساوی مهم

1. کوشی شوارتز

$|u\cdot v| \leq \|u\|\|v\|$

2. نامساوی مثلث

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$