①

الف) $X \leftarrow$ $V = \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \right\}$

چون طرفه نیست . اگر V_1 مستقل خطی باشد پس تمامی $V=0$ هستند
ولی برعکس این عبارت درست نیست

ب) ✓

$$C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$ نردبانی کاهش یافته

ج) X از آنجا که R_m را span نمی‌کند پس تعداد pivot ها
کمتر از m است پس در هر سطر pivot نمی‌توان داشت.

②

الف) $\underbrace{\underline{cT(x)} = T(cx) = \underline{cx_1 - 2cx_2, cx_1 - 3, 2cx_1 - 5cx_2}}_{\neq}$

خطی نیست

ب) تمامی R^3

ج)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \checkmark$$

3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 9+k & 2g+h+1 \end{bmatrix}$$

الف) $k \neq -9$

ب) $1+2g+h = 0 , \quad k = -9$

ج) $1+2g+h \neq 0 , \quad k = -9$

4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 + 5x_3 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - 5x_3$$

$$x_2 + 4x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 - 4x_3$$

$$x_3 \rightarrow \text{free}$$

جواب بدیهی Trivial دارد پس $Ax=b$ ← هر 2 جوابشان بله

5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}$$

چون در تمامی ردیف ها pivot pos نداریم پس $Ax=b$ به ازای هر b دارای جواب نیست

(I) اگر در $Ax=b$ ، b_4 مخالف ۰ باشد جواب inconsistent است.

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \cancel{\text{I}}$$

چون $0=2$ جواب inconsistent است.

⑥ تعداد pivot های A هم اندازه rank(A) است

از آنجایی که اگر $m \times n$ باشد حداکثر n تا pivot داریم پس ستون های

A نمی‌تواند فضای $\mathbb{R}^m$ را span کند.

⑦ چون inconsistent است برای حالت b ما حداقل یک سطر

در ماتریس جواب داریم که همه درایه های آن 0 باشد،

در این صورت اگر جواب آن 0 باشد بی‌نهایت جواب داریم و

در غیر این صورت حالت inconsistent می‌شود پس حالت جواب یکتا وجود ندارد.

⑧

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس ضرایب سطری نداریم که همه درایه ها 0 باشد امکان inconsistent

ب) ... نیست.

حفظ است

⑨

الف)

$$L\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$$

ب)

$$L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow T(e_1) = \begin{vmatrix}1\\1\\2\end{vmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{vmatrix}1\\1\\2\end{vmatrix} + y\begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$$

---

⑩

الف) بله چون $A = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$ پس همواره جواب دارد.

ب)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\1 & 2 & b\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\0 & 1 & b-a\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -b+2a\\0 & 1 & b-a\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}x = 2a-b\\y = b-a\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2a-b\\b-a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\text{یک به یک است}}$$

چون هر یک جواب است

(11)

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \_\_\_ + c_K x_K = 0$$

$$T(c_1 x_1) + T(c_2 x_2) + \_\_\_ + T(c_K x_K) = T(0)$$

$$\Rightarrow c_1 T(x_1) + \_\_\_ + c_K T(x_K) = T(0)$$

پس $T(x_i)$ ها مستقل خطی هستند؛ $c_1 = c_2 = c_3 = \_\_\_ = c_K = 0$

وجود دارد که جواب x_i باشد پس x_i ها هم مستقل خطی اند