۱. جواب عمومی ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ: برای پیدا کردن جواب عمومی کافی است سیستم را حل کنید و متغیرهای مستقل را بر حسب متغیرهای آزاد بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \to R2 = 2 \times R1 + R2 \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \to$$

$$R2 = R2/-2 \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to$$

$$R1 = R1 + R2 \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2 \\ x_2 \; is \; free \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

۲. برای k مقداری پیدا کنید تا سیستم زیر:

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases}$$

الف) جواب نداشته باشد.

ب) بی‌نهایت جواب داشته باشد.

ج) تنها یک جواب داشته باشد و جواب‌ها را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix} \to R2 = -k \times R1 + R2 \to \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 - k^2 & 1 - k \end{bmatrix} \to R2 = R2/(1-k) \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 + k & 1 \end{bmatrix}$$

الف)

$$1 - k^2 = 0 \quad and \quad 1 - k \neq 0$$
$$k = -1$$

ب)

$$1 - k^2 = 0 \quad and \quad 1 - k = 0$$
$$k = 1$$

ج)

$$k \neq -1,1$$
$$x = \frac{1}{k+1}, \quad y = \frac{1}{k+1}$$

3. **ماتریسی 3×3 بسازید که به فرم echelon نباشد و ستون های آن R^3 را Span کنند. نشان دهید ماتریس ساخته شده ویژگی موردنظر را داراست.**

پاسخ:

ابتدا یک ماتریس 3×3 مانند M به فرم echelon می سازیم که در هر سطر خود این ماتریس یک pivot دارد. سپس عملیات های سطری را مانند جابجایی دو سطر یا row interchange را روی ماتریس اعمال می کنیم و ماتریسی جدید مانند A خواهیم داشت که همان مجموعه جواب M را دارا خواهد بود؛ چون می دانیم عملیات سطری روی مجموعه جواب تاثیری نخواهد داشت و درواقع دو ماتریس A و M معادل سطری هستند. بنابراین A همان فضایی را Span خواهد کرد که M، Span می کند.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **اگر A یک ماتریس 4×3 باشد و v_1 و v_2 بردارهایی در R^3 باشند و همچنین داشته باشیم $w = v_1 + v_2$. فرض کنید $v_1 = Au_1$ و $v_2 = Au_2$ که u_1 و u_2 بردارهایی در R^4 می بشند. ثابت کنید $Ax = w$ سازگار است.**

پاسخ:

$$w = v_1 + v_2 = Au_1 + Au_2$$

$$w = A(u_1 + u_2)$$

بنابراین بردار $x = u_1 + u_2$ یک جواب برای $Ax = w$ می باشد و درنتیجه این سیستم سازگار است. (حداقل یک جواب دارد)

5. **معادله پارامتریک خط M را که از $q = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ می گذرد بدست آورید.**

پاسخ:

خطی که از p و q می گذرد، موازی بردار q-p خواهد بود.

$$q - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = p + t(q - p) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6. ماتریسی 2×2 مانند A بیابید که مجموعه جواب معادله $Ax = 0$، خطی در R^2 باشد که از نقاط (4, 1) و (0, 0) می گذرد. سپس برداری مانند b را در R^2 بیابید که مجموعه جواب $Ax = b$، یک خط، موازی مجموعه جواب $Ax = 0$ نباشد. (توضیح دهید چرا این مساله تئوری ششم فصل 1 کتاب را نقض نمی کند)

پاسخ:

ماتریس A را به صورت زیر درنظر می گیریم که a_1 و a_2 ستون های این ماتریس هستند.

$$A = [a_1 \quad a_2]$$

از آنجا که (4, 1) در معادله $Ax = 0$ صدق می کند، معادله برداری را به صورت زیر می نویسیم:

$$4a_1 + a_2 = 0 \rightarrow a_2 = -4a_1$$

فرض کنیم $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ آنگاه A خواهد شد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

طبق تئوری ششم می دانیم مجموعه جواب $Ax = b$ همان مجموعه جواب $Ax = 0$ خواهد بود که به اندازه ی بردار p (یک جواب بخصوص) منتقل شده است. درواقع اگر مجموعه جواب $Ax = 0$ برابر با خط L شود، مجموعه جواب $Ax = b$ خط $L + p$ خواهد بود که موازی خط L است.

بنابراین تنها راهی که مجموعه جواب $Ax = b$ می تواند موازی خطی که از مبدا و $(4, 1)$ می گذرد نباشد، آن هست که $Ax = b$ جواب نداشته باشد و ناسازگار باشد؛ و برای اینکه چنین چیزی رخ دهد کافی است بردار b را به گونه ای انتخاب کنیم که ترکیب خطی ای از ستون های A نباشد.

همچنین این مساله تئوری 6 را نقض نمی کند چراکه شرط آن تئوری این بود که $Ax = b$ سازگار یا *consistent* باشد.

ص / غ:

7. معادله برداری عبارت $x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ برابربا $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -8 \\ 7 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ می باشد.

پاسخ:

نادرست، معادله بالا معادله ماتریسی عبارت بالا است .

8. یک سیستم همگن با سه معادله ی خطی و چهار متغیر دارای جواب یکتا می باشد.

پاسخ:

نادرست، از آنجا که m < n می باشد، سیستم یا جوابی ندارد یا بی نهایت جواب دارد. از طرفی سیستم ذکر شده همگن (homogeneous) می باشد پس بی نهایت جواب خواهد داشت.

9. اگر بردارهای زیر، بردارهایی در R^3 باشند. مقدار a و b را طوری مشخص کنید که این سه بردار وابسته خطی باشند.

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{bmatrix}1\\a\\5\end{bmatrix} \text{ و } v_3 = \begin{bmatrix}0\\4\\b\end{bmatrix}$$

پاسخ:

معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=0$$

هدف ما در این سوال این است که a و b را طوری پیدا کنیم که معادله بالا جواب nontrivial داشته باشد. پس معادله ماتریسی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & a & 4\\0 & 5 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

اگر با عملیات سطری مقدماتی بخواهیم معادله ماتریسی را حل کنیم خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\2 & a & 4 & 0\\0 & 5 & b & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & a-2 & 4 & 0\\0 & 5 & b & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & a-2 & 4 & 0\\0 & 1 & b/5 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & b/5 & 0\\0 & a-2 & 4 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-(a-2)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & b/5 & 0\\0 & 0 & 4-\frac{b(a-2)}{5} & 0\end{array}\right]$$

حال اگر سطر آخر را برابر صفر باشد می دانیم که x_3 متغیر آزاد خواهد بود و در این شرایط می دانیم که سیستم ما جوابی غیر از صفر دارد پس وابسته خطی است به شرط زیر:

$$4-\frac{b(a-2)}{5}=0 \qquad => \qquad b(a-2)=20$$

حال اگر درایه ی سوم سطر آخر صفر نباشد خواهیم داشت:

$$x_1 = x_2 = x_3$$

که این مورد باعث می شود این سه بردار مستقل خطی باشند.

10. فرض کنیم T یک تبدیل خطی ماتریس است. ماتریس A را از رابطه ی T(x) = Ax طوری بدست آورید که شرط زیر در آن برقرار باشد.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$$

پاسخ: با استفاده از $T\ (e_1)$ و $T(e_2)$ میتوانیم بگوییم:

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad => \quad C_1 = 3 , C_2 = -1$$

$$e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad => \quad C_1 = -2 , C_2 = 1$$

$$T(e_1) = T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = T(3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix})$$

چون T تبدیل خطی است می توانیم بگوییم:

$$= \ 3T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+(-1)T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-11\end{bmatrix}$$

به همین صورت برای $T(e_2)$:

$$T(e_2) = T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = (-2)\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\9\end{bmatrix}$$

می دانیم:

$$A=[T(e_1) \qquad T(e_2)]=\begin{bmatrix}5 & -4\\-11 & 9\end{bmatrix}$$