

۱. با استفاده از قانون کرامر

الف) مقادیر x, y, z را در دستگاه I تعیین کنید.

ب) مقدار z را با شرط $a \neq \pm b$ و $a \neq 2b$ در دستگاه II بیابید.

$$\text{I) } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} ax - ay + bz = a + b \\ bx - by + az = 0 \\ -ax + 2by + 3z = a - b \end{cases}$$

۲. فرض کنید T تبدیل خطی از R^3 به R^3 با ماتریس تبدیل $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ باشد و a, b, c اعدادی مثبت باشند. همچنین فرض کنید S کره‌ی واحد با معادله‌ی رویه‌ی $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ باشد.

الف) نشان دهید $T(S)$ بیضی با معادله‌ی رویه‌ی $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ است.

ب) می‌دانیم حجم کره واحد برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حجم بیضی محصور شده توسط رویه بالا را بدست آورید.

۳. توضیح دهید چرا نقطه‌ی (x, y) روی خط گذرنده از $(2, 8)$ و $(4, 7)$ است اگر

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad x + 2y - 18 = 0$$

۴. فرض کنید ماتریس A ، 3×3 و بردارهای x, y, z سه بردار مستقل خطی و ۳ بعدی هستند. فرض کنید

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Ay = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Az = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۵. حجم متوازی السطوحی که با بردارهای $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ساخته می‌شود را بدست آورید.