subject :
Year : Month : Date :

(1)

$A^2 + C_1 A + C_0 I = \emptyset$

الف)

$C_0 \neq 0 \rightarrow A^2 + C_1 A = -C_0 I$

$\rightarrow A(A + C_1 I) = -C_0 I \rightarrow A \times \underbrace{\frac{-1}{C_0}(A + C_1 I)}_{A^{-1}} = I$

$\rightarrow C_0 \neq 0$

A^{-1} //

ب)

$A(A + C_1 I) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = -C_1 I \end{cases}$

اگر $A=0$ معکوس ناپذیر است ولی اگر $A=-C_1I$ معکوس پذیر. پس غ

(2)

Let $P = A + B \rightarrow B = P - A$

$\Rightarrow \underbrace{A(A+B)^{-1}B} = \underbrace{B(A+B)^{-1}A}$

$AP^{-1}(P-A) = AP^{-1}P - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$

$B(A+B)^{-1}A = (P-A)P^{-1}A = PP^{-1}A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$

we Just proved $A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$ so

the given expression is True.

subject :

Year : Month : Date :

3

$$B(I-AB) = (I-BA)B$$

$$\rightarrow I-AB = B^{-1}(I-BA)B \rightarrow (I-AB) = [B^{-1}(I-BA)B^{-1}]^{-1}$$

$$\rightarrow (I-AB)^{-1} = B^{-1}(1-BA)^{-1}B$$

$\Rightarrow$ $I-BA$ معکوس پذیر است

اگر $I-AB$ نیز معکوس پذیر باشد

4 الف)

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

subject :

Year : Month : Date :

$a \neq 0 \quad b \neq a \quad c \neq b \quad d \neq c$ ب)

5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 3 \qquad y_2 = 10 - 2y_1 \qquad y_3 = 20 - 3y_1 - 2y_2$

$y_2 = 4 \qquad y_3 = 3$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\cancel{x_1 + x_2}\ x_3 = 1 \qquad 2x_2 = 4 - 2x_3 \qquad x_1 = 3 - x_2 - x_3$

$x_2 = 2 - x_3 \qquad x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

subject :
Year : Month : Date :

6

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

الف) True

$\mathrm{I}:$ $V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓ بردار 0 در صفحه برداری هست

$\mathrm{II}:$ $U = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} \in V$

$\cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}$ $U + V = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 + b_2' \\ b_3 + b_3' \end{bmatrix} \in V$ ✓

$\mathrm{III}:$ $\begin{bmatrix} 0 \\ ab_2 \\ ab_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in V$ ✓

ب) false

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{I}:$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V$

ج) True

$b_2 b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 0 \ \| \ b_3 = 0$

$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{I}:$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$ ✓ $U = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{II}:$ $\begin{bmatrix} b_1 + b_1' \\ b_2 + b_2' \\ 0 \end{bmatrix} \in V$ $V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$U + V \in V$ ✓

subject :

Year : Month : Date :

III , $aV = \begin{bmatrix} a b_1 \\ a b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$ ✓

$V \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v & 1v \\ 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$ (د

True (ه

$V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 - 3b_1 \end{bmatrix}$

$b_3 = b_2 - 3b_1$

I , $b_1 = b_2 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$ ✓

II , $U = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 - 3b_1 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_2' - 3b_1' \end{bmatrix}$

$U + V = \begin{bmatrix} b_1 - b_1' \\ b_2 - b_2' \\ b_2 - b_2' - 3b_1 + 3b_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 - 3c_1 \end{bmatrix} \in V$

III , $rU = \begin{bmatrix} rb_1 \\ rb_2 \\ r(b_2 - 3b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 - 3c_1 \end{bmatrix} \in V$

subject :

Year : Month : Date :

(7)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x_3 - 2x_4 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{U} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V}$$

$$\text{Null}\, A = \text{Span}(U, V)$$

subject : Row $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Year : Month : Date :

ب)

ج)

Range $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ستون های ۱و۲ A

د)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \alpha = 9, \ \beta = -3$$

$$9 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

---

subject :

Year : Month : Date :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = 2, \ y = 1$$

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۵

الف) اگر هر span در $\mathbb{R}^n$ شامل $W=(w_1, w_2, \ldots, w_K)$ باشد

اگر $K+1$ بردار داشته باشد استقلال خطی خود را از دست می‌دهد.

حال اگر B یک Basis برای V باشد، $B'=\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ یک

Basis و span از $\mathbb{R}^n$ باشد، اگر $m+1$ عضو داشته باشد استقلال

برهم می‌خورد و چون B یک Basis است و مستقل خطی است،

$K \leq m$ است و برعکس $m \leq K$

$$m \leq K, \; K \leq m \rightarrow K=m$$

subject :
Year : Month : Date :

$n=3$, $m=5$ (ب

Nullity $= 2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$
Rank $= 3-2=\boxed{1}$

9

$CA = I_{n\times n} \rightarrow$ left inverser
(each row has a pivot)

$AD = I_{m\times m} \rightarrow$ right inverser
(each column has a pivot)

— in every Col and Row of A there is a pivot, Thus A is a square matris

$\Rightarrow m=n$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n\times n} = I_{m\times m}$$

$$CAD = (CA)D = ID = D$$
$$CAD = C(AD) = CI = C$$

$$\underbrace{CAD}_{C} = \underbrace{CAD}_{D} \rightarrow C = D$$