

(6)

(a) اگر سیستم ما دارای ردیفی باشد $[b | 0 \dots 0]$ باشد که $b \neq 0$ \Rightarrow inconsistency است

است و جواب ندارد ، rank هم تعداد pivot ها در فرآیند استیل (echelon) است

اگر ماتریس افزوده $[A \ B]$ را بگردانیم ای باشد که B و pivot باشد پس جواب

وجود ندارد و $\text{rank}[A \ B] > \text{rank} A$

ولی اگر جواب داشته باشیم یعنی $Ax = b$ consistency باشد یعنی قرین

خطی \Rightarrow ستونهای A به b می رسد یعنی $b \in \text{span} A$ ~~rank A~~

و $\text{rank}[A \ b] = \text{rank} A$

$$\text{Range } A = \mathbb{R}^m \rightarrow \text{col } A = \text{Range } A = \text{row } A = \mathbb{R}_m^m$$

$$\dim \text{col } A = m \Rightarrow \text{rank } A = m$$

$$\boxed{\text{rank}[A \ b] = \text{rank} A = m}$$

(b)

$$AB = 0 \rightarrow \text{ردیف های } B \text{ در } \text{null } A \text{ هستند} \rightarrow \text{col } B \in \text{Null } A$$

$$\Rightarrow \text{rank } B = \dim \text{col } B \leq \dim \text{Null } A$$

$$\xrightarrow{\text{nullity } A + \text{rank } A = n} \text{rank } B + \text{rank } A \leq \dim \text{null } A + \text{rank } A = n$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rank } B + \text{rank } A \leq n}$$