$= |A^T|$ $\quad |KA| = K^n|A|$

det ماتریس قطری/ مثلثی = ضرب عناصر روی قطر

Day: Month: Subject:

* اگر ماتریس ۲ سطر/ ستون برابر $\longrightarrow$ $\det A = 0$
* "در" " سطر/ستون مضربی از سطر/ ستون دیگر باشد $\longleftarrow$ $\det A = 0$

* $A_{n \times n} \longrightarrow \det A = \det A^T$

بسط cofactor روی ستون اول = بسط cofactor روی سطر اول

* $A_{n\times n}, B_{n\times n} \longrightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$

* if A is not invertible $\longrightarrow$ AB is not invertible $\longrightarrow \det A = \det AB = 0$

---

* قاعده کرامر: $i = 1, 2, \dots, n$

$Ax = b \xrightarrow[x]{\text{unique جواب}}$ $\boxed{x_i = \dfrac{\det A_i(b)}{\det A}}$

$\hookrightarrow A_{n\times n}$

به جای ستون i ام ماتریس A، b رو قرار بده.

A = ماتریس ضرائب در دستگاه معادلات خطی

* $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\text{adj}A} \Longrightarrow \boxed{\det A = \text{adj}A \times A}$

adj A = transpose of the matrix of the cofactors

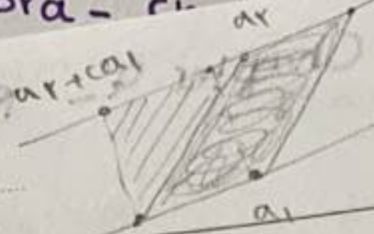
کافیه سطر اول adjA رو در ستون اول A ضرب کنیم.

* if A
  - $2\times 2 \rightarrow$ متوازی الاضلاع $\longrightarrow$ area = |A|
  - $3\times 3 \rightarrow$ متوازی السطوح $\longrightarrow$ volume = |A|

* عملیات ستونی column replacement، |A| رو تغییر نمیده، نه علامت رو.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ARYA



Year: ...... Month: ...... Day: ...... Subject: ......

* نکته مساحت: عملیات ستونی، $|A|$، مساحت رو تغییر نمیده.
(column replacement)

$[a_1 \;\; a_2] \xrightarrow[\text{column replacement}]{} [a_1 \;\; a_2 + ca_1] \longrightarrow$ مساحت این ۲ تا ماتریس باهم برابره.

* برای پیدا کردن مساحت متوازی الاضلاع با نقاط داده شده:

۱- نقاط را طوری تغییر بده که متوازی الاضلاع روی مبدأ قرار بگیره.

2- $\sqrt{\det}$ دو بردار تشکیل دهنده متوازی الاضلاع.

* $\{\text{area of } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{area of } S\}$

تبدیل خطی با ماتریس تبدیل A

متوازی الاضلاع قدیمی

$\{\text{volume of } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{volume of } S\}$

* $p+S$: متوازی الاضلاعی که از مبدأ شروع نمیشه

" " " " " میشه.

$\{\text{area of } T(p+S)\} = |\det A| \cdot \{\text{area of } p+S\}$

خطی با ماتریس A

ARYA

* **Vector Space**

→ addition & multiplication by scalar is defined on it

→ axioms : 1. $u+v$ is in V

2. $u+v = u+v$

3. $(u+v)+w = u+(v+w)$

4. $\exists 0$, $u+0=u$ → unique

5. for each u, $u+(-u)=0$ → unique

6. cu is in V (c: scalar)

7. $c(u+v) = cu+cv$

8. $(c+d)u = cu+du$

9. $c(du) = (cd)u$

10. $1u = u$ (1: scalar)

$0u = 0$, $c0 = 0$, $-u = (-1)u$

* **Subspace** (H of V)
  → 1. zero vector of V is in H
  → 2. addition
  → 3. multiplication by scalar

* { Every subspace is a vector space.
  { Every vector space is a subspace (of itself & larger ones)

* **Zero subspace** $= \{0\}$ (only vector 0)
  → dimension $=0$

* **Subspace spanned / generated by $\{v_1, \dots, v_p\}$**

if $v_1, \dots, v_p$ in V ⟶ $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ is a subspace of V.

ARYA

transpose properties :
$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
$(AB)^T = B^T A^T$
$(KA)^T = KA^T$
$(A^T)^T = A$

Year: Month: Day: Subject:

generating / spanning set

مجموعه‌ی مولد برای H = $\{v_1, \dots, v_p\}$ ⟵ اعضا

* Null Space :
$A_{m\times n} \longrightarrow$ Nul $A = \{x : x \text{ is in } \mathbb{R}^n \text{ and } Ax = 0\}$
تعداد ستون‌ها

NulA is a subset of $\mathbb{R}^n$.

There is no implicit definiton of NulA.

* نحوه به دست آوردن Null space spanning set :
(Or basis for null space)
1- $Ax=0$

2 - نوشتن فرم برداری در حسب متغیرهای آزاد

when NulA contains non zero vectors.

* تعداد بردارهای پایه‌ی Null Space = تعداد متغیرهای آزاد = Null Space Dimension

* Column Space : set of all linear combinations of columns.
$A_{m\times n} \longrightarrow$ columnspace $\subseteq \mathbb{R}^m$ تعداد سطرها
$\text{Col}A = \{b : b = Ax \text{ for some } x \text{ in } \mathbb{R}^n\}$
can be seen as a linear trans : $x \mapsto Ax$, range = A

* Know if u is in NulA ⟶
1. Check if it is in $\mathbb{R}^n$
2. " " $Au=0$

" " " " " ColA ⟶
1. " " " " $\mathbb{R}^m$
2. $Ax=u \longrightarrow [A\ u] \xrightarrow{\text{reduce}}$ consistent or not

* Linear Transformation : $T: V \longrightarrow W$
1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(cu) = cT(u)$

* $\text{Nul}A = \{0\} \iff x \mapsto Ax$ is onetoone $\iff Ax=0$ ha[s] trivial an[s]
$\text{Col}A = \mathbb{R}^m \iff x \mapsto Ax$ maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^m \iff Ax=b$ has ans for each

ARYA

sub of V

Kernel of T : $\{u : T(u) = 0\}$ = null space

Range of T : Set of all vectors in W of the form $T(x)$ for some x in V

(برد)

sub of W

Range = Col Space   dimension of range = rank

Codomain = n

$\{v_1, \dots, v_p\}$ وابسته خطی $\Longleftrightarrow$ اگر v_j به صورت ترکیب خطی قبلیاش

* $\boxed{\text{Basis}}$: $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ of V is a basis for H if:

1. مستقل خطی
2. span H   if $V \neq H \rightarrow b_1, \dots, b_p$ should be in H.

* $\boxed{\text{Standard Basis}}$: $\{e_1, \dots, e_n\}$ is standard basis for $\mathbb{R}^n$

← ستون های $I_{n\times n}$

* if $H = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ ، v_k ترکیب خطی از بقیه ← با حذف v_k ← still spans H.

* پیدا کردن پایه فضای Col space:

1. فرم نردبانی کاهش یافته
2. جواب = ستون‌های pivot cols در فرم نردبانی رو برداشته از ماتریس اصلی ستون‌های متناظر رو برمی‌داریم

* عملیات ریفی رابطه وابستگی و استقلال رو تغییر نمی‌ده ← dim فضای ستونی رو تغییر نمی‌ده.

* عملیات ریفی فضای ستونی رو تغییر می‌ده.

ARYA

* 2 views of basis
- a basis is a spanning set as small as possible.
- a basis is a linearly independent set as large as possible.

* بردارها در زیرفضا رو می‌تونیم به صورت unique، ترکیب خطی از بردارهای basis بنویسیم

* $\boxed{\text{Coordinate vector of } X \text{ Relative to } B}$:

$$B = \{b_1, \dots, b_n\} \longrightarrow x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$$

↳ unique

$$\longrightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

* پیدا کردن $[x]_B$: حل معادله‌ی $[b_1, \dots, b_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = x$

* $\boxed{P_B}$: $\underbrace{P_B}_{n \times n} = [b_1, \dots, b_n]$

- وارون پذیر
- ستون ها مستقل چون basis

ماتریس تغییر مختصات

change of coordinates matrix

x بدن و $[x]_B$ بخوان

$$x = P_B [x]_B \longrightarrow P_B^{-1} x = [x]_B$$

$x \longmapsto [x]_B$: produced by P_B^{-1}

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, one to one, linear!

$$\text{*} \ [c_1 u_1 + \dots + c_p u_p]_B = c_1 [u_1]_B + \dots + c_p [u_p]_B$$

* $\boxed{\text{isomorphism}}$:

a one-to-one linear transform vector space V to W is called isomorphism from V onto W.

Month: .... Day: .... Subject: ....

* vector space with basis $B=\{b_1,\dots,b_n\}$, any set of vectors containing $p>n$ vectors ⟶ وابسته.

* بردارها در پایه B وابسته $\Longleftrightarrow$ در پایه استاندارد وابسته.

* a basis in V has n vectors ⟶ every basis has n vectors.

* $\boxed{\text{Dimension}}$: تعداد اعضای هر basis ⟶ finite-dimensional / infinite- "
  - ↳ of zero vector space $\{0\}$ $=0$

* $\boxed{\text{Spanning Set Theorem}}$: بردارهای وابسته رو حذف می‌کنیم تا به basis برسیم.

* H subspace of f-d V ⟶ $\dim H \leq \dim V$
  - ⟶ هر مجموعه بردار مستقل خطی دلخواه در H قابل تبدیل به basis برای H است. (با expansion)

* V: p dimensional vector space ($p \geq 1$)
  - ⟶ هر مجموعه‌ای که p عضوی و مستقل خطی باشن، یک پایه برای V تشکیل میدن. (span رو نمی‌خواد چک کنیم.)
  - ⟶ هر مجموعه‌ای که p عضوی باشن و span اشون $=V$، پایه است.

* وقتی میگه P-dimensional یعنی پایه P تا عضو داره.

* Dimension of Nul A : number of free variables in equation $Ax=0$.

  Dimension of Col A : number of pivot columns in A.

ARYA

$\boxed{\text{Row Space}}$: all linear combinations of the rows $- \subseteq \mathbb{R}^n$

$A_{m \times n}$

Row A = Col A^T dim Row A = dim Col A^T

if A and B are row equivalent $\Longrightarrow$ row spaces are the same. *

* $A \xrightarrow[\text{form}]{\text{row echolon}} B \longrightarrow$ ردیف های غیر صفر در B = پایه هستند و همین طوره ردیف ها در A هم پایه هستند. (برای فضای ردیفی A و B (که یکسانند))

* عملیات ردیفی → در ستون ها → روابط وابستگی و مستقل → تغییر نمی‌کند.
فضای ستونی → " می‌کند.

* عملیات ردیفی → در ردیف ها → روابط وابستگی و مستقل → ممکنه تغییر کند.
فضای ردیفی → تغییر نمی‌کند

* در پله‌ای کردن → پایه‌ی row space → خود ردیف های دارای عنصر نردبانی بردار.
پایه‌ی col " → " نیست .

* $\begin{cases} \text{for col } A \text{ \& Row } A \longrightarrow \text{echolon form} \\ \text{for Nul} A \longrightarrow \text{Reduced echolon form} \end{cases}$

* $\boxed{\text{Rank}}$: dim of A col Space = dim of A^T row Space

* dim A row space = Rank A^T

* $\boxed{\text{Nullity}}$ = dim Null Space

* $\boxed{\text{Rank Theorem}}$: Dim col A = Dim row A = Rank A
= number of pivot columns

$$\text{rank} A + \dim \text{Nul} A = n$$

Month: Day: Subject:

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$
$C = \{c_1, \dots, c_n\}$ $\longrightarrow$ in vector space V : $\boxed{\text{C به B ماتریس تبدیل پایه از}}$ *
$\boxed{\text{Change of coordinates matrix from B to C}}$

$$[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P} \, [x]_B$$

unique $n \times n$ matrix

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \big[[b_1]_C \; \cdots \; [b_n]_C \big] \longrightarrow \text{ستون ها مستقل خطی}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "P_C^{-1}x = {[x]_C}"'] \arrow[dr, "P_B^{-1}x = {[x]_B}"] & \\ {[x]_C} & & {[x]_B} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$$\underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B = [x]_C$$

* پایه های B مستقل $\longrightarrow$ در دستگاه C هم مستقل اند.

* $\underset{C \leftarrow B}{P}$ وارون پذیر است.

* تبدیل پایه $\underset{C \leftarrow B}{P}$

- حرکت در جهت فلش $\longrightarrow$ ضرب از چپ در $\underset{C \leftarrow B}{P}$
$$\underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B = [x]_C$$
- در خلاف جهت فلش " $\longrightarrow$ ضرب از چپ در $\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1}$
$$\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} [x]_C = [x]_B$$

$$\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \underset{B \leftarrow C}{P}$$

standard basis: ε *

$$[b_1]_\varepsilon = b_1, \dots, [b_n]_\varepsilon = b_n$$

Changing coordinates
- from nonstandard to nonstandard (توضیحات بالا)
- from standard to nonstandard and vice versa:

from B to ε
$$\underset{\varepsilon \leftarrow B}{P} = P_B \longrightarrow P_B [x]_B = x$$

from ε to B $\longrightarrow$ $P_B^{-1} x = [x]_B$

Year: Month: Day: Subject:

پیدا کردن b_1 و b_2 relative to C :

$$b_1 = x_1 c_1 + x_2 c_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = y_1 c_1 + y_2 c_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$