6)

$A = m \times n$ Matrix

A^TA :

اگر $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک orthonormal Basis برای $\mathbb{R}^n$ باشد که تشکیل از eigenvectorهای A^TA باشد و هرکدام مربوط به eigenvalue $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ باشند

$$0 \leq \|Av_i\|^2 = (Av_i)\cdot(Av_i) = (Av_i)^T Av_i = v_i^T A^T A v_i$$

$$= v_i^T (A^TAv_i) = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i v_i^T v_i$$

$$= \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\text{unit یکه}} = \lambda_i$$

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A^TA$ is positive semidefinite

AA^T :

اگر $\{v_1, \ldots, v_m)$ یک orthonormal Basis برای $\mathbb{R}^m$ که تشکیل از eigenvector های AA^T مربوط به مقادیر ویژه $\{\lambda \ldots \lambda_m\}$ باشد

$$0 \leq \|A^Tv_i\|^2 = (A^Tv_i)^T A^Tv_i = v_i^T AA^T v_i = v_i^T (AA^Tv_i)$$

$$= v_i^T(\lambda_i v_i) = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i v_i^T v_i$$

$$= \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\text{unit یکه}} = \lambda_i$$

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow AA^T$ is positive semidefinite