1)

الف) خیر اگر eigenvalue های A که

درایه های قطری A در فرم نردبانی مثبت برابر یا کمتر از ۰ باشند (نه لزوماً همه آنها با

حتی یکی از آنها این شکل باشد) آنگاه SVD با قطری سازی عمودی برابر

نیست

ب) بله چون تمامی eigenvalue ها مثبت و بزرگ‌تر از ۰ هستند

$\forall \lambda \in \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}, \ \lambda > 0$

پ) 1) $\dim W + \dim W^{\perp} = n$

چون $\dim W = p$ ($W = \mathrm{span}(v_1 \dots v_p)$ پس p پایه دارد که span

می‌کنند و $\dim W = p$)

$$\Rightarrow \dim W^{\perp} = n - \dim W \longrightarrow \boxed{\dim W^{\perp} = n-p}$$

2)

اگر هر وکتور x در معادله $Ax=0$ باشد پس $x \in \mathrm{Nul}\,A$ و x بر همه

ردیف های A orthogonal است. پس x نسبت به $\mathrm{Row}\,A$ متعامد

یا orthogonal است (زیرا ردیف های A، $\mathrm{Row}\,A$ را span می‌کنند)

و اگر x نسبت به $\mathrm{Row}\,A$ متعامد باشد پس x نسبت به هر ردیف A متعامد است

و $Ax=0$ پس: $(\mathrm{Row}A)^{\perp} = \mathrm{Nul}A$

و چون عبارت بالا برای A درست است پس برای A^T هم درست است

پس $(\mathrm{Row}A)^{\perp}$ همان $\mathrm{Nul}A^T$ است و داریم $\mathrm{Row}A^T = \mathrm{Col}A$

پس می‌توان گفت

$$(\mathrm{Col}A)^{\perp} = \mathrm{Nul}A^T$$

6 2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} = M$$

$$\det M - \lambda I = \begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (13-\lambda)\begin{vmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 12 & 13-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 34\lambda^2 - 255\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 34\lambda + 225) = -\lambda(\lambda-9)(\lambda-25) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0 \qquad \lambda_2 = 9 \qquad \lambda_1 = 25$$

$$\lambda_1 = 25 \Rightarrow M - \lambda I = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \Rightarrow (M-\lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & -12 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -17 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-50}{3} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-50}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{x_2 = 1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \qquad M - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -32 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_3 = 4} V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow M - \lambda I = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 13 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 12/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 25/13 & -50/13 & 0 \\ 0 & -50/13 & 100/13 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 12/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_3 = 1} v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\sqrt{2}} \; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\sqrt{18} = 3\sqrt{2}} \; \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\sqrt{9} = 3} \right) \rightarrow \text{orthogonal set}$$

نرمال می‌کنیم

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3)
$$A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A = QR \longrightarrow$ Q یک orthonormal برای colA
R یک بالا مثلثی است

+ بدون $\sqrt{2}$ حل می‌کنیم و جواب نهایی را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم. و منظور A را در 2 ضرب می‌کنیم و نهایتا بر 2 تقسیم می‌کنیم که عدد اعشاری از بین رود

$$\cancel{A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = V_2 - \frac{\overset{4}{V_2 u_1}}{\underset{8}{u_1 u_1}} u_1 = V_2 - \frac{1}{2}u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

normalz

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\underset{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow Q = [u_1 \; u_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A' = QR' \rightarrow Q^{-1}A' = R' \xrightarrow[Q^{-1} = Q^T]{QQ^T = I} Q^T A' = R'$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = R'$$

اثر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باید در R ضرب شود زیرا Q یک orthonormal Basis است R

$$A = Q\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}R'}_{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow A = \underset{Q}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^T A x = b x \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\Rightarrow x = ((QR)^T QR)^{-1} (QR)^T b = (R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R)^{-1} R^T Q^T b$$

$$= (R^T R)^{-1} R^T Q^T b = R^{-1} \underbrace{R^{T^{-1}} R^T}_{I} Q^T b = R^{-1} Q^T b$$

$$\Rightarrow x = R^{-1} Q^T b$$

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R^{-1} Q^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} Q^T b = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4)

الف)

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\lim_{k \to \infty} A^k = P \cdot \lim_{k \to \infty} D^k \, P^{-1}$$

$$\lim_{k \to \infty} D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{k \to \infty} \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

اگر همه $|\lambda_i| < 0$ پس $\lim_{k \to \infty} \lambda_i^k = 0$ و $\lim_{k \to \infty} D^k = 0$

و $\boxed{A^k = P0P^{-1} = 0}$

ب) اگر قطری نباشد دیگر $A = PDP^{-1}$ نیست و نمی‌توان $A^k = PD^kP^{-1}$ را گفت و نمی‌توان نتیجه گرفت

5)

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$$

$$P(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A_n$$

$$P(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_n \lambda^n$$

$$P(A) - P(\lambda) I = (c_0 - c_0) + c_1 (A - \lambda) + c_2 (A^2 - \lambda_2) + \dots + c_n (A^n - \lambda^n)$$

$$A - \lambda I = 0 \longrightarrow$$

$$\underbrace{(c_0 - c_0)}_{0} + c_1 \underbrace{(A - \lambda)}_{0} + c_2 \underbrace{(A - \lambda I)}_{0} (A + \lambda I) + \dots + c_n \underbrace{(A - \lambda I)}_{0} (A^{n-1} + \dots)$$

$\Rightarrow P(A) - P(\lambda) I = 0 \longrightarrow$ $P(\lambda)$ مقدار ویژه $P(A)$ است

6)

$A = m \times n$ Matrix

A^TA:

اگر $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک orthonormal Basis برای $\mathbb{R}^n$ باشد که متشکل از eigenvector های A^TA باشد و هر کدام مربوط به $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ eigenvalue باشند

$$0 \leq \|Av_i\|^2 = (Av_i)\cdot(Av_i) = (Av_i)^T Av_i = v_i^T A^T A v_i$$

$$= v_i^T (A^TAv_i) = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i v_i^T v_i$$

$$= \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\text{unit}} = \lambda_i$$

یک

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A^TA$ is positive semi definite

AA^T:

اگر $\{v_1, \ldots, v_m)$ یک orthonormal Basis برای $\mathbb{R}^m$ که متشکل از eigenvector های AA^T مربوط به مقادیر ویژه $\{\lambda \ldots \lambda_m\}$ باشد

$$0 \leq \|A^Tv_i\|^2 = (A^Tv_i)^T A^Tv_i = v_i^T A A^T v_i = v_i^T (AA^Tv_i)$$

$$= v_i^T (\lambda_i v_i) = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i v_i^T v_i$$

$$= \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\text{unit}} = \lambda_i$$

یک

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow AA^T$ is positive semidefinite