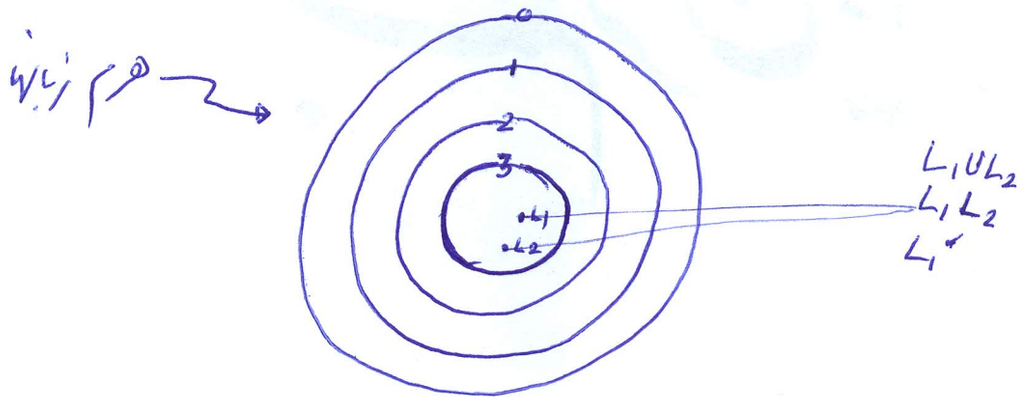
فصل چهارم

خصوصیات زبانهای نوع سوّم (نظم)

- ✓ خصوصیات بنیادی زبانهای نوع سوّم
- ✓ مسائل قابل تصمیم‌گیری برای زبانهای نوع سوّم
- ✓ لم تزریقی

- خصوصیات بستاری زبانهای منظم (Closure Properties of Regular Lang.)

قضیه - خانوادهٔ زبانهای منظم تحت عملگرهای $\cup$ (اجتماع)، Concatenation (پیوند) و ستاره بسته است.



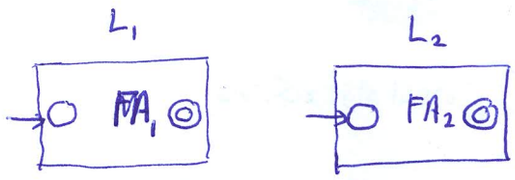
* اگر L_1 و L_2 زبانهای منظم باشند در این صورت $L_1 \cup L_2$ و $L_1 L_2$ و L_1^* هم منظم هستند.

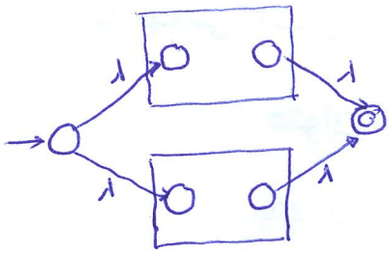
Constructive proof

Given: $FA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ accepting L_1

$FA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ accepting L_2

Construct: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ accepting $L_1 \cup L_2$

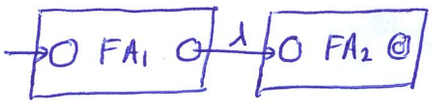




Given: $FA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ accepting L_1

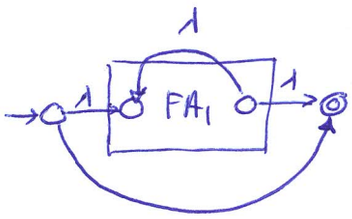
$FA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ accepting L_2

Construct: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ accepting $L_1 L_2$



Given: $FA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ accepting L_1

Construct: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ accepting L_1^*



* اثبات از طریق عبارات منظم :

- اگر فرض شود که زبانهای L_1 و L_2 با استفاده از عبارات منظم r_1 و r_2 نمایش داده شوند، عبارات منظم r_1+r_2 ، r_1r_2 و r_1^* به ترتیب زبانهای $L_1 \cup L_2 = L(r_1+r_2)$ ، $L_1L_2 = L(r_1r_2)$ و $L_1^* = L(r_1^*)$ را توصیف می کنند، بنابراین زبانهای منظم تحت عملگرهای اجتماع، الحاق و ستاره بسته اند.

* اثبات از طریق گرامر

Given : $G_1 = (V_1, T, S_1, P_1)$ defining L_1

$G_2 = (V_2, T, S_2, P_2)$ defining L_2

Construct $G = (V, T, S, P)$ defining $\boxed{L_1 \cup L_2}$ ✓

$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

$S = S$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$

G_1:

$S_1 \to aA \mid bB$
$A \to aA \mid a$
$B \to b$

G_2:

$S_2 \to abC \mid a$
$C \to bC \mid a$

$S \to S_1 \mid S_2$

$S_1 \to aA \mid bB$
$A \to aA \mid a$
$B \to b$

$S_2 \to abC \mid a$
$C \to bC \mid a$

$\to$ defining $L_1 \cup L_2$

Given : $G_1 = (V_1, T, S_1, P_1)$ defining L_1

$G_2 = (V_2, T, S_2, P_2)$ defining L_2

Construct: $G = (V, T, S, P)$ $\boxed{\text{defining } L_1 L_2}$ ✓

$V = V_1 \cup V_2$

$S = S_1$

P:

- تمامی قواعد تولید P_1 و P_2 را به P اضافه کرده و
سپس هر قاعدهٔ $A \to x$ (برای $A \in V_1$ ، $x \in T^*$)
در P را با $A \to xS_2$ جایگزین کنید.

G_1: $S_1 \to aA \mid bB$
$A \to aA \mid a$
$B \to b$

G_2: $S_2 \to abC \mid a$
$C \to bC \mid a$

P_1:
$S_1 \to aA \mid bB$
$A \to aA \mid a$
$B \to b$

P_2:
$S_2 \to abC \mid a$
$C \to bC \mid a$

$P_1 \cup P_2$

$\Longrightarrow$

G:
$S_1 \to aA \mid bB$
$A \to aA$, $\boxed{A \to aS_2}$
$\boxed{B \to bS_2}$
$S_2 \to abC \mid a$
$C \to bC \mid a$

$\Longleftarrow$ defining $L_1 L_2$

Given: $G_1 = (V_1, T, P_1, S_1)$ defining L_1

Construct: $G = (V, T, P, S)$ $\boxed{\text{defining } L_1^*}$ ✓

$V = V_1$

$S = S_1$

$P = ?$

- تمامی قواعد در P_1 را به مجموعهٔ P قرار داده و
سپس هر قاعده‌ای در P به شکل $A \to x$
$(A \in V_1 , x \in T^*)$ را با قاعده $A \to xS_1$
جایگزین کرده و قاعدهٔ $S_1 \to \lambda$ را نیز به P
اضافه کنید.

G_1:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 \to aA \mid bB \\ A \to aA \mid a \\ B \to b \end{array}}$$

$\Rightarrow$

G:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 \to aA \mid bB \\ A \to aA, \boxed{A \to aS_1} \\ \boxed{B \to bS_1} \\ \boxed{S_1 \to \lambda} \end{array}}$$

$\leftarrow$ defining L_1^*

قضیه: خانواده زبانهای منظم (نوع سوم) تحت مکمل بستن بسته است.

- اگر L یک زبان منظم باشد در این صورت $\bar{L}$ هم از نوع سوم است.
(منظم)

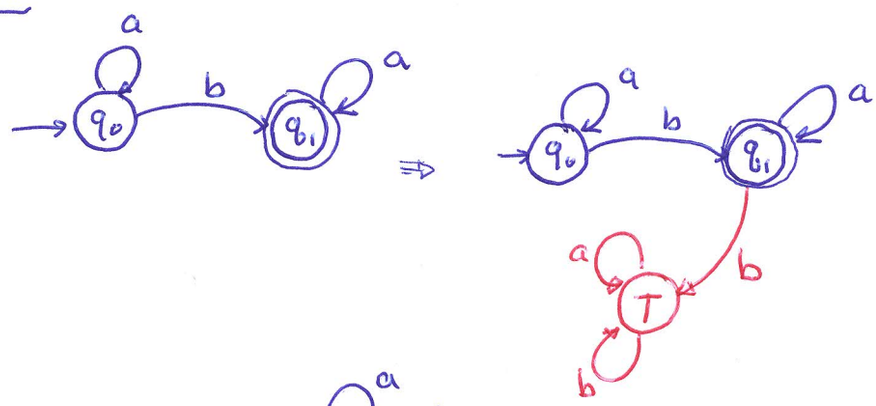
Given: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ accepting L

Construct: $\overline{FA} = (\bar{Q}, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$ accepting $\bar{L}$

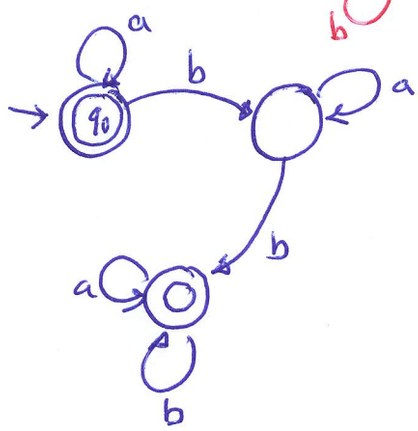
$$\bar{Q} = Q$$
$$\bar{q}_0 = q_0$$
$$\bar{\delta} = \delta$$
$$\bar{F} = Q - F$$

Example

FA:



$\overline{FA}$:



قضیه: خانواده زبانهای منظم تحت عملگر $\cap$ (اشتراک) بسته است.

- اگر L_1 و L_2 منظم باشند در این صورت $L_1 \cap L_2$ هم منظم است.

- اثبات ۱ (با استفاده از قانون دومورگان)

$$\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$$

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

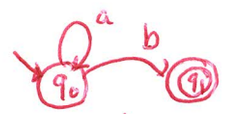
- اثبات ۲

Given: $FA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ accepting L_1

$FA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ accepting L_2

Construct: $FA = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ accepting $L_1 \cap L_2$

FA_1 :



$L_1 = \{a^n b \mid n \geq 0\}$

FA_2 :

$L_2 = \{b a^n \mid n \geq 0\}$

$L_1 \cap L_2 = \{b\}$

✓ $Q = Q_1 \times Q_2 = \{[q_0, p_0], [q_0, p_1], [q_1, p_0], [q_1, p_1]\}$

✓ $F = \{[r, s] \mid r \in F_1 \text{ and } s \in F_2\} = \{[q_1, p_1]\}$

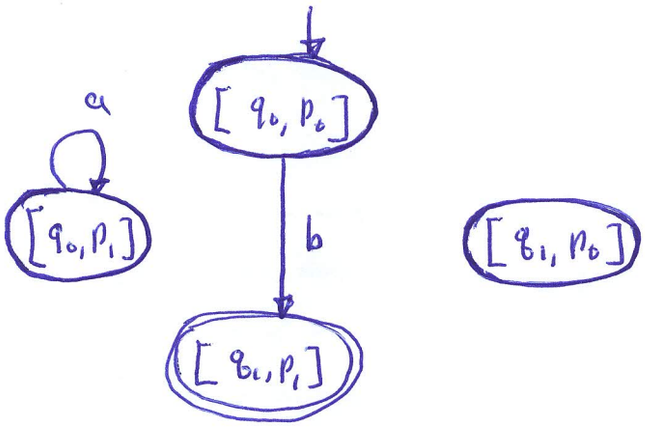
✓ δ: $\delta([r, s], a) = [r', s']$ iff $\delta_1(r, a) = r'$ and $\delta_2(s, a) = s'$

✓ $q_0 = [q_0, p_0]$

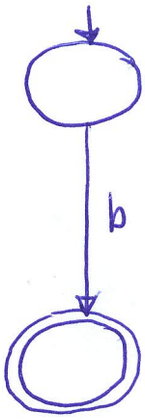
FA_1:

FA_2:

	a	b
$[q_0, p_0]$	–	$[q_1, p_1]$
$[q_0, p_1]$	$[q_0, p_1]$	–
$[q_1, p_0]$	–	–
$[q_1, p_1]$	–	–

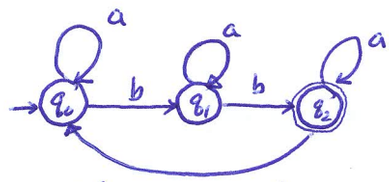


$\Downarrow$

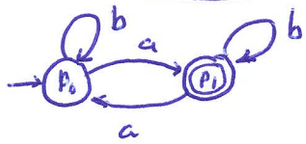


- یک ماشین تناهی بسازید که اشتراک زبانهای ماشین‌های تناهی M_1 و M_2 را بپذیرد:

M_1 :



M_2 :

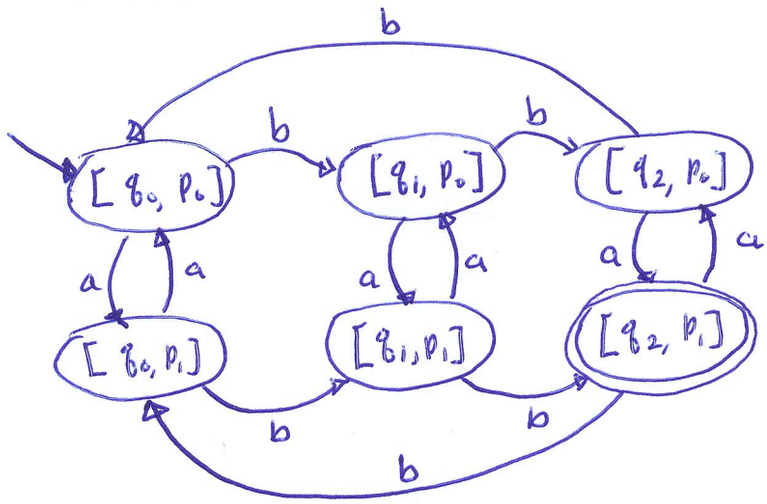


$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{[q_0,p_0], [q_0,p_1], [q_1,p_0], [q_1,p_1], [q_2,p_0], [q_2,p_1]\}$

$F = \{[q_2,p_1]\}$

$q_0 = [q_0,p_0]$



قضیه: خانواده زبانهای منظم تحت عملگر تفریق بسته است.

- اگر L_1 و L_2 زبانهای منظم باشند در این صورت $L_1 - L_2$ هم منظم است.

$$L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

- خانواده زبانهای منظم تحت عملگر معکوس بسته است.
- معکوس یک زبان منظم، یک زبان منظم است.

* $\boxed{\text{اثبات از طریق گرامر}}$

Given : $G = (V, T, P, S)$ defining L

Construct $G' = (V', T, P', S')$ defining L^R

$V' = V$

$S' = S$

P' : if $A \to \alpha$ is in P then add $A \to \alpha^R$ to P'

G:

$S \to abA \mid bbB$

$A \to bA \mid ab$

$B \to bbB \mid ba$

$S \Rightarrow abA \Rightarrow abbA$
$\Rightarrow abbbA$
$\Rightarrow abbbab$

G':

$S \to Aba \mid Bbb$

$A \to Ab \mid ba$

$B \to Bbb \mid ab$

$S \Rightarrow Aba \Rightarrow Abba$
$\Rightarrow Abbba$
$\Rightarrow babbba$

$(abbbab)^R = babbba$

* $\boxed{\text{اثبات از طریق پذیرنده}}$

- از FA زبان منظم L می‌توان FA غیرزبان L^R رسید به این صورت که حالت‌های نهایی و اولیه را جابجا کرد و همچنین جهت یال‌ها را معکوس کرد.

قضیه: خانوادهٔ زبانهای منظم تحت همومورفیزم (همریختی) (Homomorphism) بسته است.

$$h : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2^*$$

$$\Sigma_1 = \{a, b\}, \quad \Sigma_2 = \{0, 1\}$$

$$h(a) = 00$$
$$h(1) = 10$$

$$h(aaba) = h(a)\,h(a)\,h(b)\,h(a)$$
$$= 00001000$$

$$h(L) = \{ h(x) \mid x \in L \}$$

✓ $L = \{abb, ba, bb\}$

✓ $h(L) = \{001010, 1000, 1010\}$

✓ $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

✓ $h(L) = \{(00)^n (10)^n \mid n \geq 0\}$

- اگر L از نوع منظم باشد در این صورت $h(L)$ هم از نوع منظم است.

L		$h(L)$	
$S \to abA$		$S \to h(a)h(b)A$	$S \to 0010A$
$A \to bbA \mid aB$	$\Rightarrow$	$A \to h(b)h(b)A \mid h(a)B$	$A \to 1010A \mid 00B$
$B \to aB \mid b$		$B \to h(a)B \mid h(b)$	$B \to 00B \mid 10$

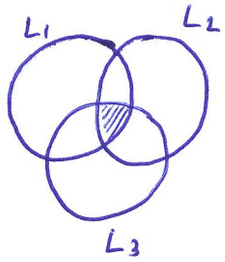
- خانوادهٔ زبانهای منظم تحت اجتماع محدود و اشتراک محدود بسته است.

- اگر L_1، L_2، ... ، L_n زبانهای منظم باشند در این صورت

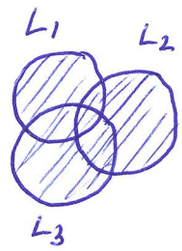
$\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ ، $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ هم منظم هستند.

$$L = \underline{L_1 \cup L_2} \cup \dots \cup L_n$$

$$L = \underline{L_1 \cap L_2} \cap \dots \cap L_n$$



$L_1 \cap L_2 \cap L_3$

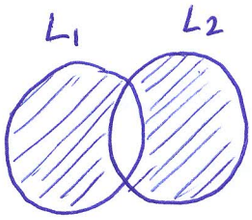


$L_1 \cup L_2 \cup L_3$

- خانواده زبان‌های منظم تحت عملگر تفریق قرینه (Symmetric Diff.) بسته می‌باشد.

$$L_1 \ominus L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ or } x \in L_2 \text{ but not in both}\}$$

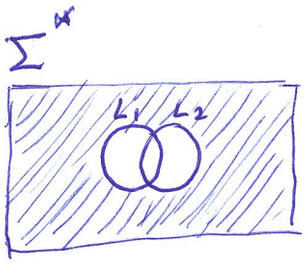
$$= L_1 \cup L_2 - L_1 \cap L_2$$



- خانواده زبان‌های منظم تحت عملگر nor بسته می‌باشد.

$$nor(L_1, L_2) = \{x \mid x \in L_1 \text{ and } x \in L_2\}$$

$$= \boxed{\Sigma^* - (L_1 \cup L_2)}$$



$$\boxed{nor(L_1, L_2) = \overline{L_1 \cup L_2}}$$

- اگر L یک زبان منظم است نشان دهید که

$$L_1 = \{uv \mid u \in L,\ v \in L^R\}$$

هم یک زبان منظم است.

$$L_1 = \underbrace{L}_{\text{نوع سوم}} . \underbrace{L^R}_{\text{نوع سوم}}$$

- اگر L یک زبان منظم باشد در این صورت زبان زیر هم یک زبان منظم است.

$$L_1 = \{uv \mid u, v \in \{a,b\}^*,\ u \in L,\ |v| = 2\}$$

$$L_1 = \underbrace{L}_{\text{نوع سوم}} . \underbrace{\{aa, ab, bb, ba\}}_{\text{نوع سوم}}$$

اگر L یک زبان منظم باشد در این صورت head(L) هم یک زبان منظم است

$$\boxed{head(L) = \{x \mid xy \in L \text{ for some } y \in \Sigma^*\}}$$

$L = \{abb, ba, bb\}$

$head(L) = \{\lambda, \cancel{a}, \cancel{ab}, a, b, \cancel{bb}, ab, ba, bb, abb\}$

$= \{\lambda, a, b, ab, ba, bb, abb\}$

$L \subset head(L)$

- از روی FA پذیرنده زبان منظم L می‌توان به FA پذیرنده head(L) رسید به این صورت که تمام حالات را به حالات نهائی تبدیل می‌کنیم

اگر L یک زبان منظم باشد در این صورت tail(L) هم یک زبان منظم است

$$\boxed{tail(L) = \{x \mid yx \in L \text{ for some } y \in \Sigma^*\}}$$

$tail(L) = \{\lambda, \cancel{a}, \cancel{b}, b, a, \cancel{bb}, bb, ba, \cancel{abb}, abb\}$

$= \{\lambda, a, b, bb, ba, abb\}$

$L \subset tail(L)$

- کدام گزاره نادرست است؟

الف: اشتراک دو زبان منظم روی یک مجموعهٔ الفبای مشخص حتماً منظم است.

ب: هر زبان نامنظم زیرمجموعهٔ یک زبان منظم است.

ج: هر زبان ناتهی حتماً شامل یک زبان ناتهی و منظم است.

د: اجتماع تعداد دلخواهی از زبان‌های منظم حتماً منظم است.

توضیحات: زبان‌های منظم تحت اشتراک بسته‌اند

: هر زبان نامنظم زیرمجموعهٔ Σ^* است و Σ^* یک زبان منظم است.

: برای هر زبان ناتهی می‌توان یک زیرمجموعه متناهی و ناتهی در نظر گرفت و هر مجموعهٔ متناهی یک زبان منظم است.

: زبان‌های منظم تحت اجتماع کدوردسته است ولی تحت اجتماع نامکدوردسته نیست

: زبان‌های منظم تحت اجتماع کدوردسته است.

- مسائل قابل تصمیم گیری برای زبانهای منظم

- یک مسأله قابل تصمیم گیری است اگر الگوریتمی برای آن وجود داشته باشد در حالی که خروجی الگوریتم به ازای هر ورودی بلی یا خیر باشد.

- مسأله عضویت برای زبانهای منظم قابل تصمیم گیری است. ✓

- DFA زبان همان الگوریتم عضویت است. ✓

- این مسأله که یک زبان منظم تهی می باشد یا نه قابل تصمیم گیری است ✓

- اگر در DFA زبان، مسیری از حالت اولیه به حالت نهائی وجود داشته باشد زبان L غیر تهی وگرنه تهی است. ✓

- این مسأله که یک زبان منظم متناهی می باشد یا نه قابل تصمیم گیری است ✓

- اگر در DFA زبان، در مسیری از حالت اولیه به حالت های نهائی دور وجود داشته باشد زبان نامتناهی بوده وگرنه متناهی است. ✓

- مسأله تساوی دو زبان منظم قابل تصمیم گیری است. ✓

$$L_1 = L_2$$

$L_1 \subseteq L_2$

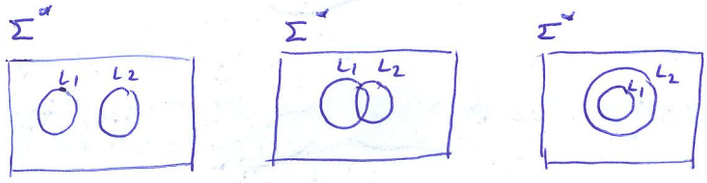
$x \in L_1 \Rightarrow x \in L_2$

$L_2 \subseteq 1$

$x \in L_2 \Rightarrow x \in L_1$

✓ - الگوریتم تصمیم‌گیری برای تساوی دو زبان منظم L_1 و L_2.

$$L_3 = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$$



if $L_3 = \emptyset$ then $L_1 = L_2$

else $L_1 \neq L_2$

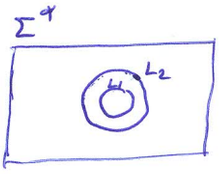
- این است که یک زبان منظم زیرمجموعه‌ای از یک زبان منظم دیگر است قابل تصمیم‌گیری است $\subseteq$

الگوریتم اول

$L_3 = L_1 \cap L_2$

if $L_3 = L_1$ then $L_1 \subseteq L_2$

if $L_3 = L_2$ then $L_2 \subseteq L_1$



الگوریتم دوم

$L_3 = L_1 \cap \overline{L_2}$

if $L_3 = \phi$ then $L_1 \subseteq L_2$

else $L_1 \nsubseteq L_2$

- الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تعیین کند آیا رشته x به زبان منظم L تعلق دارد یا نه

- این مسئله که x عضوی از یک زبان منظم می‌باشد یا نه قابل تصمیم‌گیری است.

- در DFA زبان اگر حالت شروع عضو از مجموعه حالت‌های نهایی باشد، آن‌گاه x به زبان منظم این DFA متعلق است.

- این است که یک زبان منظم L با ستاره ستاره خود (یعنی L^*) برابر است یا نه قابل تصمیم گیری است.

- اگر L منظم باشد، L^* نیز منظم است و می توان از الگوریتم تساوی دو زبان نوع منظم برای تساوی L و L^* استفاده کرد.

- این است که معکوس یک زبان منظم برابر خود زبان می باشد یا نه قابل تصمیم گیری است.

$L_1 = L^R$

if $L_1 = L$ then $L = L^R$

else $L \neq L^R$

- این است که یک زبان نوع سوم یک پالیندروم (palindrome) می باشد یا نه قابل تصمیم گیری است.

- زبان L یک پالیندروم است اگر $L = L^R$

$$palindrome(L) = \{ palindrome(x) \mid x \in L \}$$

- الگوریتمی وجود دارد که می تواند تعیین کند آیا یک زبان منتظم زیرمجموعهٔ محض از یک زبان منتظم دیگر می باشد یا نه؟

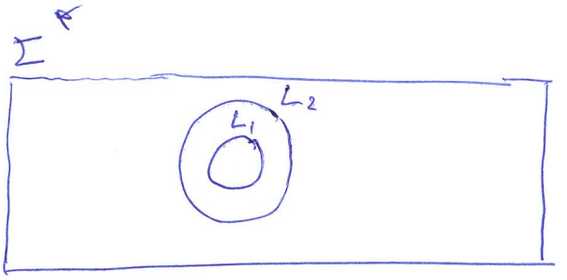
$\subset$

$$L_3 = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

$$L_4 = L_2 - L_1 = L_2 \cap \overline{L_1}$$

if $L_3 = \phi$ and $L_4 \neq \phi$ then

$$L_1 \subset L_2$$



- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف: اگر L_1 و L_2 زبان‌های نامنظم باشند آن‌گاه $L_1 \cup L_2$ نیز نامنظم است.

ب: اگر L_1 و L_2 زبان‌های نامنظم باشند آن‌گاه

$$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*,\ w \in L_1 \text{ and } w^R \in L_2 \}$$

نیز منظم خواهد بود.

ج: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تعیین کند که آیا یک زبان نوع سوم نامتناهی است یا خیر.

د: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تعیین کند که آیا یک زبان نوع سوم تهی است یا خیر.

توضیحات: الف: اجتماع دو زبان نامنظم ممکن است منظم باشد.

$L_1 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$, $L_2 = \{a^n b^m \mid n = m\}$ $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$

ب: $L = L_1 \cap L_2^R$ یک زبان منظم است.

ج: وجود دارد

د: وجود دارد