

به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

درس تحلیل شبکه‌های پیچیده
استاد حقیرچهرقانی

تمرین دوم

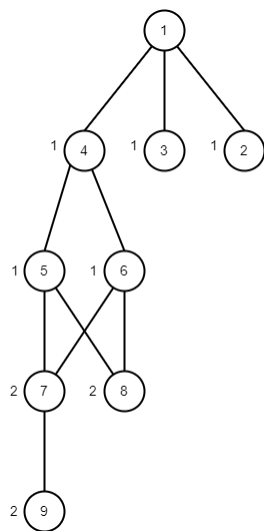
علیرضا مازوچی

۴۰۰۱۳۱۰۷۵

سوال ۱

(الف) ابتدا باید برای هر گره یک BFS تولید کرد و سپس امتیاز وابستگی (dependency score) گره به تمام یال‌های باقی‌مانده در BFS را محاسبه کرد. طبیعتاً گره ریشه در BFS دارای وابستگی صفر به یال‌های غایب در درخت خواهد بود.

در قسمت‌های بعد محاسبات مربوط به هر BFS به ترتیب برای تمام گره‌ها آورده شده است:



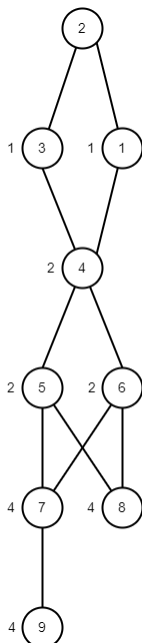
$$\delta_1(9) = 0$$

$$\delta_1(79) = 1, \delta_1(7) = 1, \delta_1(8) = 0$$

$$\delta_1(57) = \delta_1(67) = 1, \delta_1(58) = \delta_1(68) = 0.5, \delta_1(5) = \delta_1(6) = 1.5$$

$$\delta_1(45) = \delta_1(46) = 2.5, \delta_1(4) = 5, \delta_1(3) = \delta_1(2) = 0$$

$$\delta_1(14) = 6, \delta_1(13) = 1, \delta_1(12) = 1, \delta_1(1) = 8$$



$$\delta_2(9) = 0$$

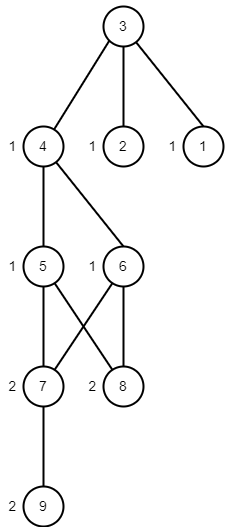
$$\delta_2(79) = 1, \delta_2(7) = 1, \delta_2(8) = 0$$

$$\delta_2(57) = \delta_2(67) = 1, \delta_2(58) = \delta_2(68) = 0.5, \delta_2(5) = \delta_2(6) = 1.5$$

$$\delta_2(45) = \delta_2(46) = 2.5, \delta_2(4) = 5$$

$$\delta_2(34) = \delta_2(14) = 3, \delta_2(3) = \delta_2(1) = 3$$

$$\delta_2(23) = \delta_2(12) = 4, \delta_2(2) = 8$$



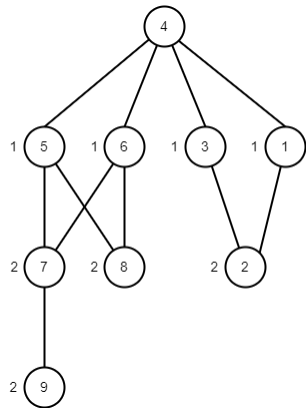
$$\delta_3(9) = 0$$

$$\delta_3(79) = 1, \delta_3(7) = 1, \delta_3(8) = 0$$

$$\delta_3(57) = \delta_3(67) = 1, \delta_3(58) = \delta_3(68) = 0.5, \delta_3(5) = \delta_3(6) = 1.5$$

$$\delta_3(45) = \delta_3(46) = 2.5, \delta_3(4) = 5, \delta_3(2) = \delta_3(1) = 0$$

$$\delta_3(34) = 6, \delta_3(23) = \delta_3(13) = 1, \delta_3(3) = 8$$



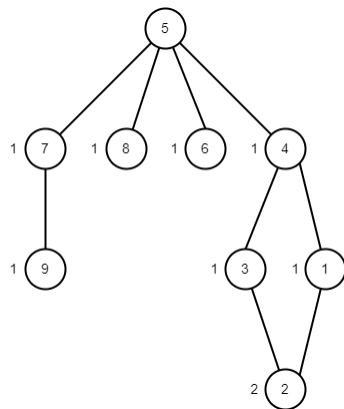
$$\delta_4(9) = 0$$

$$\delta_4(79) = 1, \delta_4(7) = 1, \delta_4(8) = \delta_4(2) = 0$$

$$\delta_4(57) = \delta_4(67) = 1, \delta_4(58) = \delta_4(68) = 0.5, \delta_4(5) = \delta_4(6) = 1.5$$

$$\delta_4(23) = \delta_4(12) = 0.5, \delta_4(1) = \delta_4(3) = 0.5$$

$$\delta_4(45) = \delta_4(46) = 2.5, \delta_4(34) = \delta_4(14) = 1.5, \delta_4(4) = 8$$

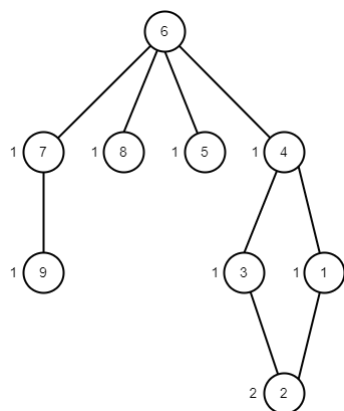


$$\delta_5(2) = 0$$

$$\delta_5(23) = \delta_5(12) = 0.5, \delta_5(1) = \delta_5(3) = 0.5, \delta_5(9) = 0$$

$$\delta_5(79) = 1, \delta_5(34) = \delta_5(14) = 1.5, \delta_5(7) = 1, \delta_5(4) = 3, \delta_5(6) = \delta_5(8) = 0$$

$$\delta_5(57) = 2, \delta_5(56) = \delta_5(58) = 1, \delta_5(45) = 4, \delta_5(5) = 8$$

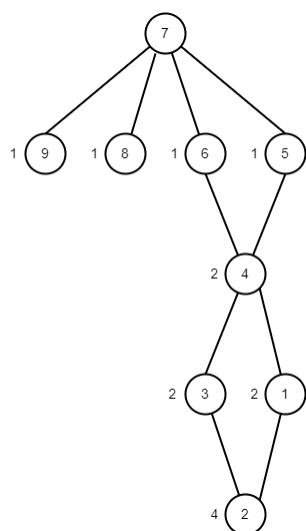


$$\delta_6(2) = 0$$

$$\delta_6(23) = \delta_6(12) = 0.5, \delta_6(1) = \delta_6(3) = 0.5, \delta_6(9) = 0$$

$$\delta_6(79) = 1, \delta_6(34) = \delta_6(14) = 1.5, \delta_6(7) = 1, \delta_6(4) = 3, \delta_6(5) = \delta_6(8) = 0$$

$$\delta_6(67) = 2, \delta_6(56) = \delta_6(68) = 1, \delta_6(46) = 4, \delta_6(6) = 8$$



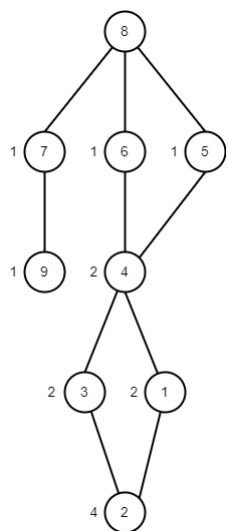
$$\delta_7(2) = 0$$

$$\delta_7(23) = \delta_7(12) = 0.5, \delta_7(1) = \delta_7(3) = 0.5$$

$$\delta_7(34) = \delta_7(14) = 1.5, \delta_7(4) = 3$$

$$\delta_7(46) = \delta_7(45) = 2, \delta_7(5) = \delta_7(6) = 2, \delta_7(8) = \delta_7(9) = 0$$

$$\delta_7(79) = \delta_7(78) = 1, \delta_7(67) = \delta_7(57) = 3, \delta_7(7) = 8$$



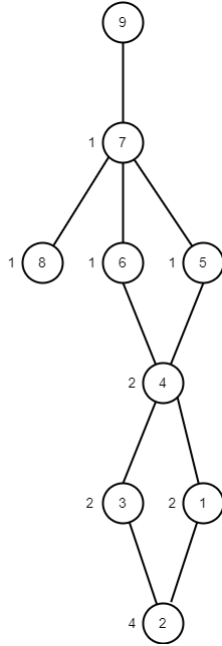
$$\delta_8(2) = 0$$

$$\delta_8(23) = \delta_8(12) = 0.5, \delta_8(1) = \delta_8(3) = 0.5$$

$$\delta_8(34) = \delta_8(14) = 1.5, \delta_8(4) = 3, \delta_8(9) = 0$$

$$\delta_8(46) = \delta_8(45) = 2, \delta_8(5) = \delta_8(6) = 2, \delta_8(79) = 1, \delta_8(7) = 1$$

$$\delta_8(78) = 2, \delta_8(58) = \delta_8(68) = 3, \delta_8(8) = 8$$



$$\delta_9(2) = 0$$

$$\delta_9(23) = \delta_9(12) = 0.5, \delta_9(1) = \delta_9(3) = 0.5$$

$$\delta_9(34) = \delta_9(14) = 1.5, \delta_9(4) = 3$$

$$\delta_9(45) = \delta_9(46) = 2, \delta_9(5) = \delta_9(6) = 2, \delta_9(8) = 0$$

$$\delta_9(78) = 1, \delta_9(57) = \delta_9(67) = 3, \delta_9(7) = 7$$

$$\delta_9(79) = 8, \delta_9(9) = 8$$

با تجميع نتایج خواهیم داشت:

$$bc(e) = \sum_{v \in V} \delta_v(e)$$

$$bc(12) = 1 + 4 + 0 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 8$$

$$bc(13) = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$$

$$bc(14) = 6 + 3 + 0 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 18$$

$$bc(23) = 0 + 4 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 8$$

$$bc(34) = 0 + 3 + 6 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 18$$

$$bc(45) = 2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 + 4 + 0 + 2 + 2 + 2 = 20$$

$$bc(46) = 2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 + 0 + 4 + 2 + 2 + 2 = 20$$

$$bc(56) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$$

$$bc(57) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 0 + 3 + 0 + 3 = 12$$

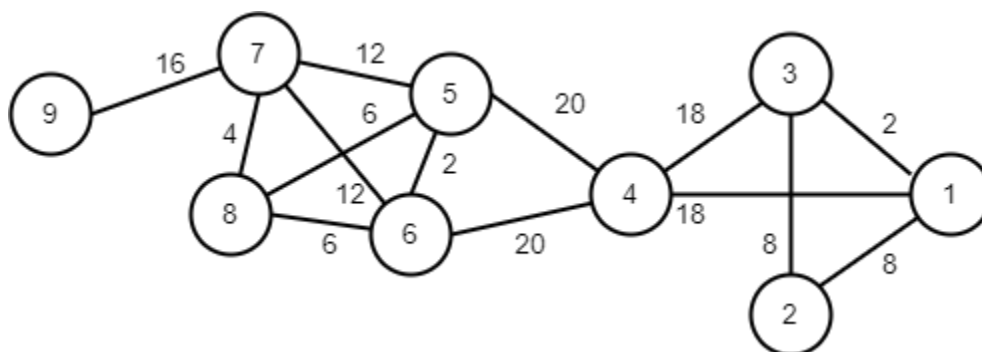
$$bc(58) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1 + 0 + 0 + 3 + 0 = 6$$

$$bc(67) = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 2 + 3 + 0 + 3 = 12$$

$$bc(68) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 = 6$$

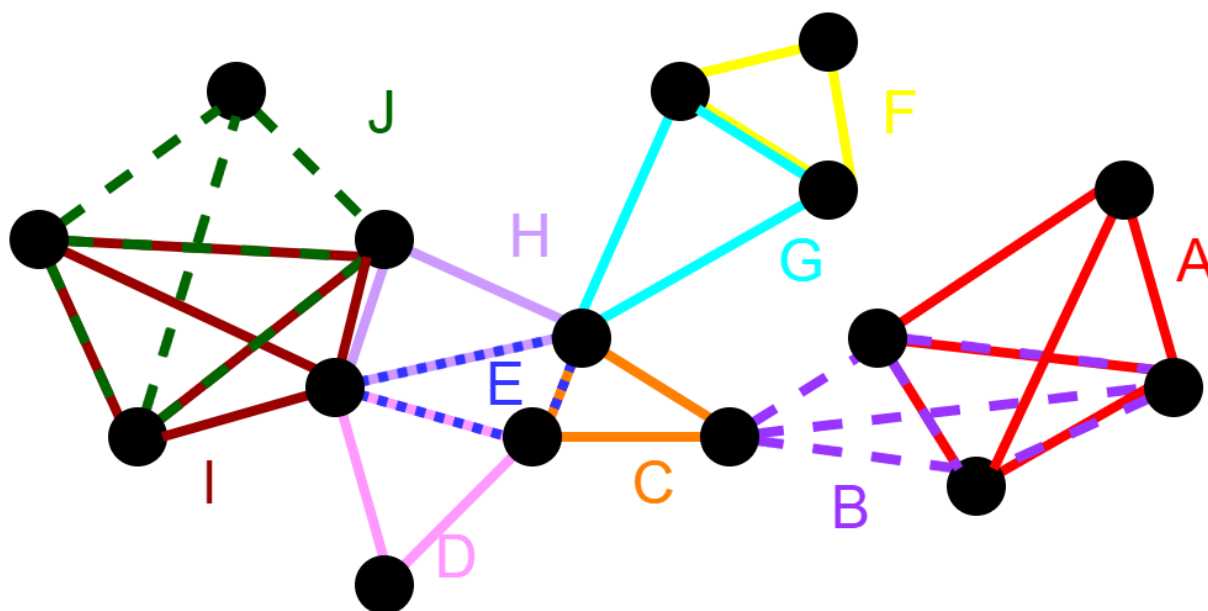
$$bc(78) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 + 1 = 4$$

$$bc(79) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 8 = 16$$



حال اگر به عنوان مثال حد آستانه را ۲۰ در نظر بگیریم، یک اجتماع با گره‌های ۱ تا ۴ و یک اجتماع با گره‌های ۵ تا ۹ خواهیم داشت. قطعا پس از این تقسیم مقدار میانگی (betweenness) تمام گره‌ها بیشتر نمی‌شود. پس فرآیند سلسله مراتبی همینجا می‌تواند پایان بیابد.

ب) ابتدا باید cliquesهای ماکسیمال را پیدا کرد که در تصویر زیر نشان داده شده است:



سپس تعداد گره مشترک بین هر دو clique را در جدول زیر وارد می‌کنیم:

J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
○	○	○	○	○	○	○	○	۳	۴	A
○	○	○	○	○	○	○	۱	۴	۳	B
○	○	۱	۱	○	۲	۱	۳	۱	○	C
○	۱	۱	○	○	۲	۳	۱	○	○	D
○	۱	۲	۱	○	۳	۲	۲	○	○	E
○	○	○	۲	۳	○	○	○	○	○	F
○	○	۱	۳	۲	۱	○	۱	○	○	G
۱	۲	۳	۱	○	۲	۱	۱	○	○	H
۳	۴	۲	○	○	۱	۱	○	○	○	I
۴	۳	۱	○	○	○	○	○	○	○	J

در گام بعد باید مقدار k را مشخص کنیم و متناسب با آن درایه‌های بیشتر مساوی k -
 1 را برابر با ۱ و مابقی را برابر با صفر قرار دهیم. چون مقدار k در صورت سوال مشخص
 نشده است به صورت شهودی آن را برابر با ۳ در نظر می‌گیریم و داریم:

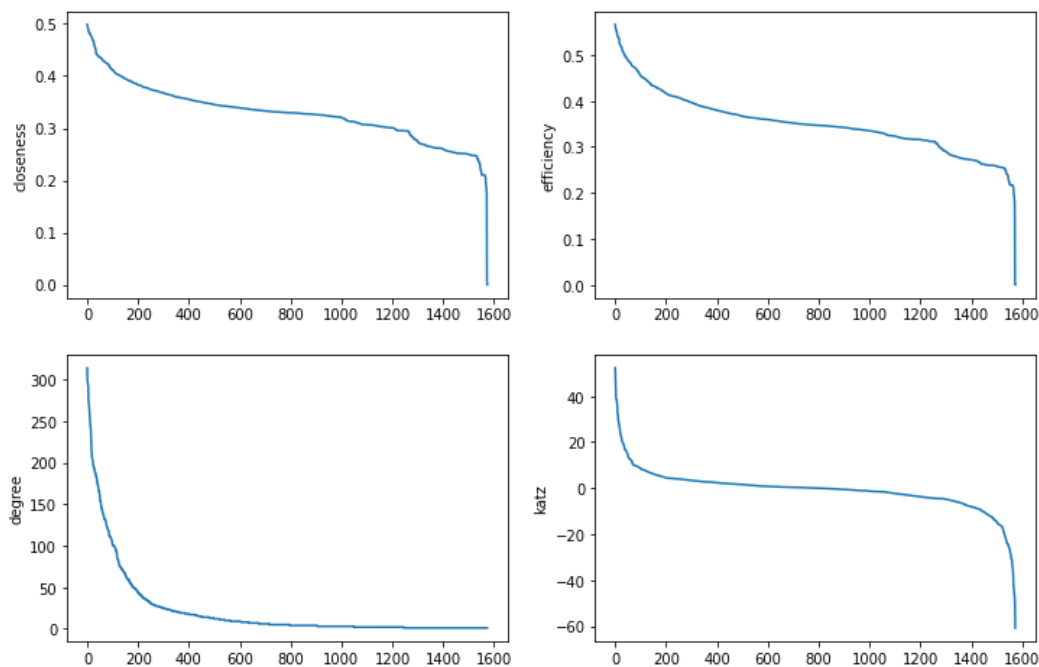
J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	
○	○	○	○	○	○	○	○	۱	۱	A
○	○	○	○	○	○	○	○	۱	۱	B
○	○	○	○	○	۱	○	۱	○	○	C
○	○	○	○	○	۱	۱	○	○	○	D
○	○	۱	○	○	۱	۱	۱	○	○	E
○	○	○	۱	۱	○	○	○	○	○	F
○	○	○	۱	۱	○	○	○	○	○	G
○	۱	۱	○	○	۱	○	○	○	○	H
۱	۱	۱	○	○	○	○	○	○	○	I
۱	۱	○	○	○	○	○	○	○	○	J

متناسب با این ماتریس A و B در یک اجتماع (Community)، F و G در یک اجتماع
 و مابقی در یک اجتماع دیگر قرار دارند.

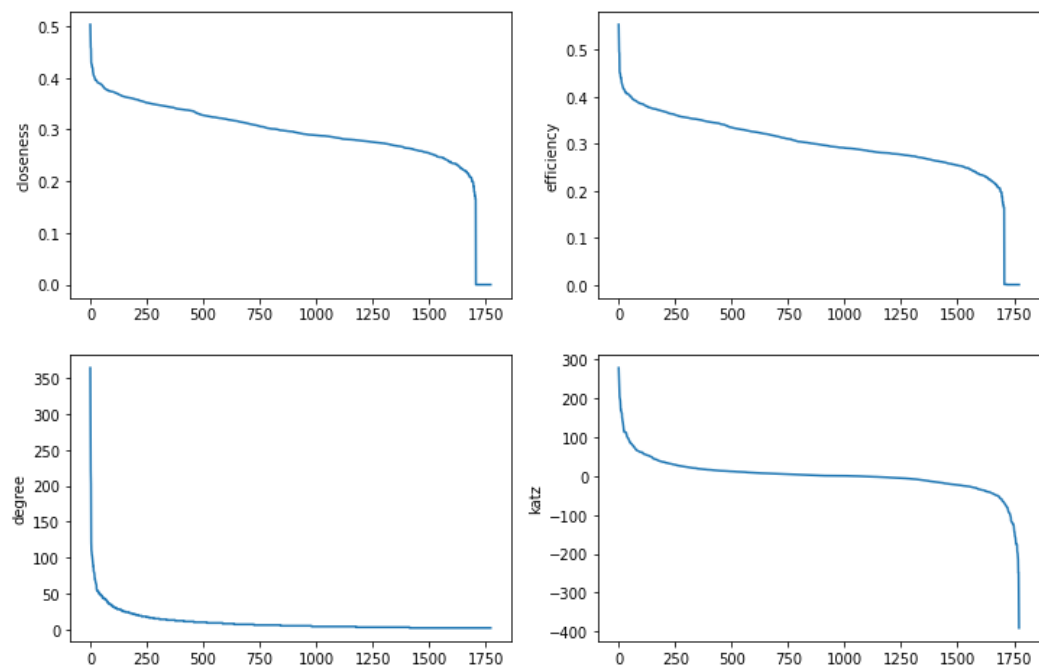
سوال ۲

ب) به ترتیب برای دو گراف Airport و Bible داریم:

Graph Airport



Graph Bible



ج) می‌توان نکات زیر را از نمودارها متوجه شد:

- شاخص مرکزیت Degree با سه شاخص دیگر تفاوت بسیار زیادی دارد ولی سه تای دیگر رفتار کلی مشابهی داشته‌اند.
- در سه شاخص Closeness، Efficiency و Katz می‌بینیم که تعداد بسیار کمی از گره‌ها مرکزیت بسیار بالایی دارند و به وضوح از مابقی جدا شده‌اند و در حین حال تعداد هم بسیار مرکزیت پایینی دارند ولی اکثریت قریب به اتفاق مقداری نزدیک به هم داشته‌اند.
- در شاخص مرکزیت Degree گره‌ها با درجه مرکزیت پایین که متفاوت از عموم گره‌ها باشد دیده نمی‌شود.
- در معیار Katz مقدار صفر برای اکثر گره‌ها بدست آمده است که می‌تواند یک حدآستانه مشخص باشد و اعداد منفی هم دیده می‌شود ولی چنین چیزی در سایر شاخص‌ها دیده نمی‌شود.

د) نتایج گراف Bible در جدول زیر آورده شده است.

Katz		Degree		Efficiency		Closeness		ردیف
امتیاز	نام	امتیاز	نام	امتیاز	نام	امتیاز	نام	
277	benjamin	364	israel	0.553	Israel	0.503	israel	۱
255	elam	254	judah	0.511	Judah	0.471	judah	۲
219	shem	221	david	0.495	David	0.458	jerusalem	۳
213	shemaiah	202	jerusalem	0.492	jerusalem	0.456	david	۴
202	uz	122	egypt	0.454	Egypt	0.429	egypt	۵
198	aram	110	benjamin	0.450	ephrain	0.428	ephrain	۶
194	arphaxad	108	manasseh	0.449	benjamin	0.425	manasseh	۷
193	meshech	104	ephrain	0.449	manasseh	0.425	benjamin	۸
180	lud	103	saul	0.441	moses	0.420	joseph	۹
169	gether	100	philistines	0.441	joseph	0.420	moses	۱۰

نتایج گراف Airport در جدول زیر آورده شده است.

Katz		Degree		Efficiency		Closeness		ردیف
امتیاز	نام	امتیاز	نام	امتیاز	نام	امتیاز	نام	
52	LAS	314	ATL	0.566	ATL	0.498	ATL	۱
47	SBN	299	IAD	0.559	LAX	0.495	LAX	۲
40	ECP	296	ORD	0.557	IAD	0.495	MSP	۳
39	ROA	292	LAX	0.554	MSP	0.490	DEN	۴
38	BWI	291	JFK	0.552	JFK	0.490	IAD	۵
38	DTW	274	DEN	0.552	ORD	0.486	JFK	۶
38	CRW	273	EWR	0.552	DEN	0.485	MCO	۷
36	IND	269	MSP	0.546	EWR	0.484	ORD	۸
35	SJU	267	IAH	0.544	IAH	0.482	EWR	۹
32	TOL	261	MIA	0.539	MCO	0.481	IAH	۱۰

توضیحات مربوط به فرودگاه‌های موجود در جدول قبل در این جدول ذکر شده است:

کد	توضیحات
ATL	Atlanta, GA: Hartsfield-Jackson Atlanta International
BWI	Baltimore, MD: Baltimore/Washington International Thurgood Marshall
CRW	Charleston/Dunbar, WV: Yeager
DEN	Denver, CO: Denver International
DTW	Detroit, MI: Detroit Metro Wayne County
ECP	Panama City, FL: Northwest Florida Beaches International
EWR	Newark, NJ: Newark Liberty International
IAD	Washington, DC: Washington Dulles International
IAH	Houston, TX: George Bush Intercontinental/Houston
IND	Indianapolis, IN: Indianapolis International
JFK	New York, NY: John F. Kennedy International
LAS	Las Vegas, NV: McCarran International
LAX	Los Angeles, CA: Los Angeles International
MCO	Orlando, FL: Orlando International
MIA	Miami, FL: Miami International
MSP	Minneapolis, MN: Minneapolis-St Paul International

Chicago, IL: Chicago O'Hare International	ORD
Roanoke, VA: Roanoke Blacksburg Regional Woodrum Field	ROA
South Bend, IN: South Bend International	SBN
San Juan, PR: Luis Munoz Marin International	SJU
Toledo, OH: Toledo Express	TOL

ه) آنچه از نتایج قسمت قبل بر می‌آید شباهت بسیار بالای ده گره برتر در سه روش Closeness، Efficiency و Degree و تفاوت آن با روش Katz است. به طوری که به عنوان مثال برای مجموعه داده Bible دو معیار اول لیست کاملاً یکسان با ترتیب کمی متفاوت از هم دارند. پس به صورت شهودی می‌توان گفت یا سه معیار اول بهتر بوده است یا معیار Katz. از روی اسامی گراف Bible به نظر می‌رسد که اسامی یافت شده در سه معیار اول معروف‌تر و احتمالاً کلیدی‌تر باشد. بنابراین به نظرم سه معیار اول مناسب هستند و بین آن‌ها من تفاوت خاصی را نمی‌توانم در نظر بگیرم.

در مورد گراف Airport هم نتایج سه معیار اول و هم معیار Katz عمدتاً شامل فرودگاه‌های آمریکا است. برای مقایسه فرودگاه ATL به عنوان فرودگاه برتر در سه معیار اول را با فرودگاه LAS به عنوان فرودگاه برتر Katz می‌توان مقایسه کرد. با جستجو در اینترنت متوجه شدم که فرودگاه ATL از LAS بزرگ‌تر است. همچنین در جستجوی دیگر بزرگ‌ترین و شلوغ‌ترین فرودگاه‌ها را پیدا کردم که در این لیست دقیقاً اسامی سه معیار اول دیده می‌شد. به بیان دقیق‌تر سه فرودگاه برتر عبارت بود از: ATL، LAX و ORD که توسط سه معیار اول پیشنهاد شده است. پس برای این مجموعه داده هم سه معیار اول را نسبت به معیار Katz مناسب‌تر می‌دانم.