به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

درس مبانی یادگیری آماری

استاد نیک‌آبادی

تمرین اول

علیرضا مازوچی

۴۰۰۱۳۱۰۷۵

قسمت تئوری

سوال ۱

رویداد آلوده شدن کامپیوتر اول و دوم را به ترتیب A و B در نظر بگیرید. پس طبق صورت سوال داریم:

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.4$$

الف)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

ب)

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(B) * P(A^c|B)}{0.5} = \frac{0.7 * \left(1 - P(A|B)\right)}{0.5}$$
$$= \frac{0.7 * \left(1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\right)}{0.5} = \frac{0.7 * \left(1 - \frac{0.4}{0.7}\right)}{0.5} = \frac{7}{5} * \frac{3}{7} = 0.6$$

سوال ۲

رویداد دیدن یک طرف سبز رنگ یک کارت را A و رویداد دیدن طرف دیگر کارت به رنگ سبز را B در نظر بگیرید. ما به دنبال $P(B|A)$ هستیم. چون از سه کارت تنها یک کارت دارای دو طرف سبز رنگ است، $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ از طرفی چون از ۶ طرف کارت ۳ طرف سبز است و یک طرف از شش طرف به صورت اتفاقی دیده می‌شود خواهیم داشت $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

سوال ۳

$$f_{X,Y}(x,y) \xRightarrow{\text{مستقل}} f_X(x) * f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الف)

$$r(x,y) = x - y$$

$$F_Z(z) = P_Z(Z \le z) = P_Z(r(X,Y) \le z)$$

با توجه به آنکه باید $X - Y \le z$ باشد و X و Y تنها در بازه ۰ تا ۱ مقدار دارد، اگر z کمتر از ۱- باشد، نمی‌توان برای X و Y مقدار معتبری پیدا کرد و در این شرایط قاعدتا حاصل عبارت بالا صفر می‌شود. پس فرض کنید که z بیشتر از ۱- باشد. برای پیدا کردن انتگرال می‌توان فرض کرد که $\max(-z,0) \le Y \le 1$ و X باید به گونه‌ای تنظیم شود که $0 \le X \le \min(Y+z, 1)$

$$z < -1 \rightarrow \ F_Z(z) = 0$$

$$z \ge \ -1 \rightarrow P_Z(r(X,Y) \le z) = \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\min(y+z,1)} f_{X,Y}(x,y)\, d_x d_y$$

$$= \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\min(y+z,1)} 1\, d_x d_y$$

$$= \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} x \Big|_{0}^{\min(y+z,1)} d_y = \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} (\min(y+z,1)) d_y$$

پیش‌تر فرض شده است که z بیشتر از ۱- است. حال اگر z بیشتر از یک باشد مقدار مینیمم موجود در رابطه همواره یک بر می‌گرداند؛ اگر کمتر از ۰ باشد همواره $y +$ z را بر می‌گرداند و در غیر این صورت از $y = 0$ تا $y = 1 - z$ مقدار $y + z$ و در خارج آن ۱ را بر می‌گرداند. پس داریم:

$$+1 \le z \rightarrow \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} (\min(y+z,1)) d_y = \int_{y=0}^{y=1} 1 d_y = y \Big|_0^1 = 1$$

$$-1 \leq z \leq 0 \rightarrow \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} (\min(y+z,1))d_y = \int_{y=-z}^{y=1} (y+z)d_y$$

$$= \left(\frac{1}{2}y^2 + zy\right)\Big|_{-z}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2 + z + z^2 = \frac{1}{2} + z + \frac{z^2}{2}$$

$$0 \leq z \leq +1 \rightarrow \int_{y=\max(-z,0)}^{y=1} (\min(y+z,1))d_y = \int_{y=0}^{y=1} (\min(y+z,1))d_y$$

$$= \int_{y=0}^{y=1-z} (\min(y+z,1))d_y + \int_{y=1-z}^{y=1} (\min(y+z,1))d_y$$

$$= \int_{y=0}^{y=1-z} (y+z)d_y + \int_{y=1-z}^{y=1} 1d_y = \left(\frac{1}{2}y^2 + zy\right)\Big|_{0}^{1-z} + y\Big|_{1-z}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}(1-z)^2 + z(1-z) + 1 - (1-z) = -\frac{z^2}{2} + z + \frac{1}{2}$$

با جمع‌بندی حالت‌های مختلف به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F_z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ \dfrac{z^2}{2} + z + \dfrac{1}{2} & -1 < z \leq 0 \\ -\dfrac{z^2}{2} + z + \dfrac{1}{2} & 0 < z < 1 \\ 1 & 1 \leq z \end{cases}$$

حال می‌توان با مشتق‌گیری از عبارت فوق چگالی احتمال را هم بدست آورد:

$$f_z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ 1+z & -1 < z \leq 0 \\ 1-z & 0 < z < 1 \\ 0 & 1 \leq z \end{cases}$$

ب)

$$r(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$F_Z(z) = P_Z(Z \le z) = P_Z(r(X,Y) \le z)$$

طبیعتا برای این قسمت z نباید منفی باشد چون در این صورت به ازای تقسیم دو عدد مثبت نمی‌توان به آن رسید. در ادامه Y هر مقداری می‌تواند اتخاذ کند و بر اساس مقدار Y می‌دانیم که $\frac{X}{Y} \le z \to X \le Yz$ در عین حال می‌دانیم که $0 \le X \le 1$ پس نهایتا $0 \le X \le \min(1, Yz)$

$$z < 0 \to \ F_Z(z) = 0$$

$$z \ge \ 0 \to P_Z(r(X,Y) \le z) = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\min(1,yz)} f_{X,Y}(x,y)\, d_x d_y$$
$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\min(1,yz)} 1\, d_x d_y = \int_{y=0}^{y=1} \left(x \Big|_{0}^{\min(1,yz)} \right) d_y$$
$$= \int_{y=0}^{y=1} \min(1,yz)\, d_y$$

اگر z کمتر از یک باشد مینیمم عبارت فوق همواره برابر با yz می‌شود. در غیر این صورت از ۰ تا $\frac{1}{z}$ مقدار مینیمم برابر با yz و پس از آن برابر با ۱ خواهد شد.

$$1 \ge z \ge \ 0 \to \int_{y=0}^{y=1} \min(1,yz)\, d_y = \ \int_{y=0}^{y=1} \mathrm{yz} d_y = \frac{zy^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{z}{2}$$

$$z \ge 1 \to \int_{y=0}^{y=1} \min(1,yz)\, d_y = \int_{y=0}^{y=\frac{1}{z}} \min(1,yz)\, d_y + \int_{y=\frac{1}{z}}^{y=1} \min(1,yz)\, d_y$$
$$= \int_{y=0}^{y=\frac{1}{z}} \mathrm{yz} d_y + \int_{y=\frac{1}{z}}^{y=1} 1 d_y = \frac{zy^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{z}} + y \Big|_{\frac{1}{z}}^{1} = \frac{1}{2z} + 1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z}$$

با جمع‌بندی حالت‌های مختلف به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F_z(z) = \begin{cases} 0 & 0 > z \\ \dfrac{z}{2} & 1 > z \geq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2z} & z \geq 1 \end{cases}$$

حال می‌توان با مشتق‌گیری از عبارت فوق چگالی احتمال را هم بدست آورد:

$$f_z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0 & 0 > z \\ \dfrac{1}{2} & 1 > z \geq 0 \\ \dfrac{1}{2z^2} & z \geq 1 \end{cases}$$

سوال ۴

$$V(X) = 0 \to E((X - \mu_X)^2) = 0 \to \int (x - \mu_X)^2 f_X(x) d_x = 0$$

در رابطه فوق $f_X(x)$ برای نقاط x که قابل تولید باشد مقدار مثبت دارد و $(x - \mu_X)^2$ نیز همواره نامنفی است پس باید x در هر نقطه با میانگین برابر باشد. با توجه به آنکه میانگین یک عدد ثابت است پس تمام نقاط باید با هم برابر باشند که بدین ترتیب یک جرم احتمال با احتمال یک شکل می‌گیرد؛ این همان $P(X = c) = 1$ را می‌رساند.

سوال ۵

الف)

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=2} f(x,y) d_y = \int_{y=0}^{y=2} \frac{3}{16} x y^2 d_y = \frac{xy^3}{16}\Big|_0^2 = \frac{x}{2} \quad 0 < x < 2$$

$$E(X) = \int_{x=0}^{x=2} x f_X(x) d_x = \int_{x=0}^{x=2} \frac{x^2}{2} d_x = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6}$$

ب)

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{x=2} f(x,y) d_x = \int_{x=0}^{x=2} \frac{3}{16} xy^2 d_x = \frac{3x^2y^2}{32}\Big|_0^2 = \frac{3y^2}{8} \quad 0 < y < 2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \int_{y=0}^{y=2} y^2 f_Y(y) d_y - \left(\int_{y=0}^{y=2} y f_Y(y) d_y\right)^2$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} y^2 f_Y(y) d_y - \left(\int_{y=0}^{y=2} y f_Y(y) d_y\right)^2$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \frac{3y^4}{8} d_y - \left(\int_{y=0}^{y=2} \frac{3y^3}{8} d_y\right)^2 = \frac{3y^5}{40}\Big|_0^2 - \left(\frac{3y^4}{32}\Big|_0^2\right)^2$$

$$= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0.15$$

سوال ۶

$$r(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\text{استقلال}} f_{X_1}(x_1) * \dots * f_{X_n}(x_n) = 1 \quad 0 \le x_i \le 1$$

$$F_{Y_n}(y_n) = P(Y_n \le y_n) = P(r(X_1, \dots, X_n) \le y_n) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le y_n)$$

اگر y_n بیشتر از یک باشد مقدار احتمال به وضوح برابر یک است و اگر مقدار y_n کمتر از صفر باشد احتمال مذکور برابر با یک می‌شود. پس با فرض آنکه $0 \le y_n \le 1$ محاسبه احتمال را ادامه می‌دهیم:

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le y_n) = \int_{x_n=0}^{x_n=y_n} \dots \int_{x_1}^{x_1=y_n} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) d_{x1} \dots d_{x_n}$$
$$= \int_{x_n=0}^{x_n=y_n} \dots \int_{x_1=0}^{x_1=y_n} 1 * d_{x1} \dots d_{x_n}$$
$$= \int_{x_n=0}^{x_n=y_n} \dots \int_{x_2}^{x_2=y_n} y_n * d_{x2} \dots d_{x_n}$$
$$= y_n \int_{x_n=0}^{x_n=y_n} \dots \int_{x_2}^{x_2=y_n} 1 * d_{x2} \dots d_{x_n} = y_n^n$$

پس خواهیم داشت:

$$F_{Y_n}(y_n) = \begin{cases} 0 & y_n < 0 \\ y_n^n & 0 \le y_n \le 1 \\ 1 & 1 < y_n \end{cases}$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$f_{Y_n}(y_n) = F'_{Y_n}(y_n) = \begin{cases} 0 & y_n < 0 \\ n y_n^{n-1} & 0 \le y_n \le 1 \\ 0 & 1 < y_n \end{cases}$$

$$E(Y_n) = \int_{y_n=0}^{y_n=1} y_n f_{Y_n}(y_n) d_{y_n} = \int_{y_n=0}^{y_n=1} y_n * n * y_n^{n-1} d_{y_n} = \int_{y_n=0}^{y_n=1} n * y_n^n d_{y_n}$$
$$= \frac{n}{n+1} y_n^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

سوال ۷

$$r(x) = e^x$$

$$E(Y) = E(r(x)) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} r(x) f_X(x) d_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^x f_X(x) d_x$$
$$= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^x d_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2+x} d_x$$
$$= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}} d_x = \sqrt{e} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} d_x$$

حاصل انتگرال برابر با یک می‌شود چراکه عملا تابع چگالی یک توزیع نرمال با میانگین ۱ و واریانس ۱ است. پس:

$$E(Y) = \sqrt{e}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$E(Y^2) = E(e^{2x}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{2x} f_X(x) d_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{2x} d_x$$
$$= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2+2x} d_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)} d_x$$
$$= e^2 \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} d_x = e^2$$

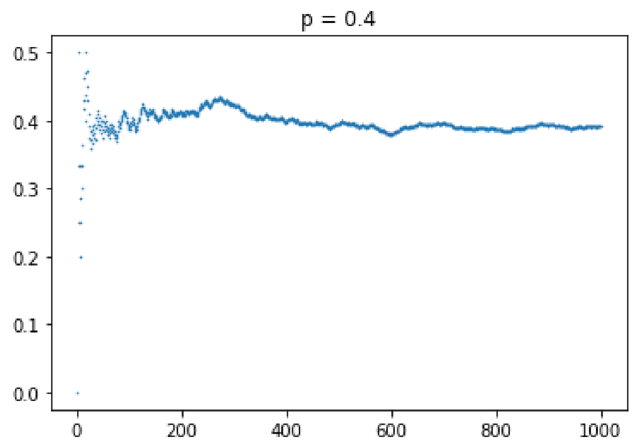
در اینجا هم مشابه با قسمت قبل با یک توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۰ مواجه بودیم. نهایتا خواهیم داشت:

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = e^2 - e$$

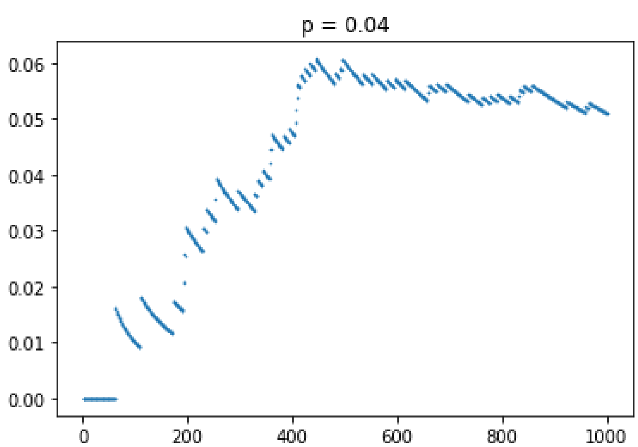
قسمت پیاده‌سازی

سوال ۱

در تصویر ۱ تغییرات میانگین نمونه‌ها برای p=0.4 و در نمودار ۲ تغییرات میانگین نمونه‌ها برای p=0.04 آورده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n مقدار میانگین نمونه‌ها به p که میانگین توزیع نزدیک می‌شود.



تصویر ۱ – سوال ۱



تصویر ۲ – سوال ۱

سوال ۲

برای میانگین‌گرفتن از X، هزار مرتبه X را برای هر حالت بدست آوردم و میانگین آن را حساب کردم. میانگین X برای سه n خواسته‌شده به ترتیب برابر شد با ۳.۹۶، ۴۰.۱۹ و ۴۰۰.۴۱ که این سه عدد بسیار نزدیک به سه عدد np مورد انتظار یعنی ۴، ۴۰ و ۴۰۰ است.

سوال ۳

برای بدست آوردن احتمالات یک مجموعه ده هزار نمونه‌ای ایجاد کردم و احتمالات را تا سه رقم بعد اعشار گرد کردم. نتایج عملی به این شرح است:

$$P(A) \approx 0.502, P(B) \approx 0.657, P(A \cap B) \approx 0.330, P(A) * P(B) \approx 0.330$$
$$\rightarrow P(A \cap B) \approx P(A) * P(B)$$

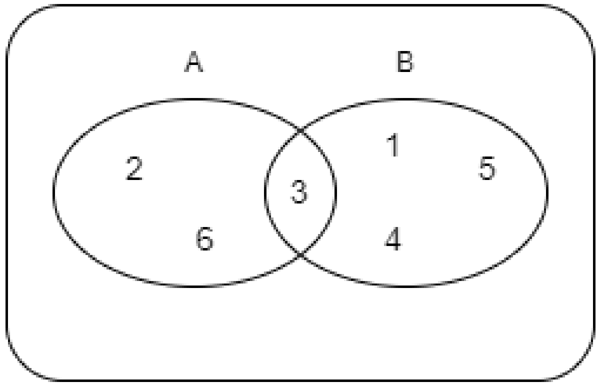
لذا مطابق نتایج عملی رابطه سوال یعنی $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ با تقریب قابل قبولی برقرار است و دو مجموعه A و B از هم مستقل هستند.

برای قسمت دوم سوال فرض کنید A={1, 2, 3} و B={4, 5, 6} طبیعتا این دو مجموعه مجزا و وابسته هستند. آزمایش را با شرایط قسمت قبل تکرار کردیم که نتایج زیر حاصل شد:

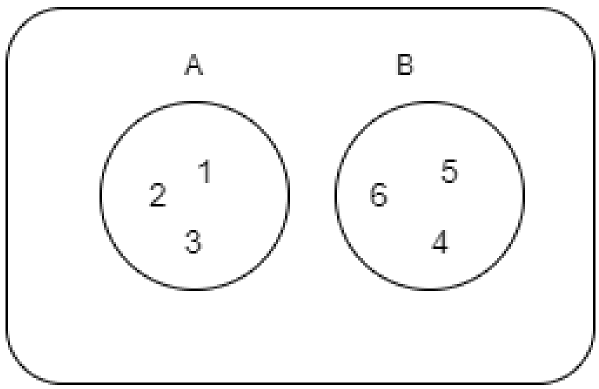
$$P(A) \approx 0.495, P(B) \approx 0.504, P(A \cap B) \approx 0.000, P(A) * P(B) \approx 0.249$$
$$\rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$$

مطابق نتایج عملی دو مجموعه معرفی‌شده مستقل نیستند که مورد انتظار بود. چراکه از نظر تئوری و برای یک تاس سالم باید $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ باشد که تقریبا همین مقدار بدست آمده است. از طرف دیگر چون A و B مجزا هستند باید $P(A \cap B)$ برابر صفر شود که شده است. $P(A) * P(B) = \frac{1}{4}$ هم برقرار است.

تصویر ۳ نمودار ون قسمت اول سوال و تصویر ۴ نمودار ون قسمت دوم سوال را نشان می‌دهد.



تصویر ۳ – نمودار ون بخش اول سوال ۳



تصویر ۴ – نمودار ون بخش دوم سوال ۳

سوال ۴

بعد از پیاده‌سازی شبیه‌ساز و اجرای بازی متناسب با شرایط سوال، مشاهده شد که نرخ برد در حالتی که بازیکن بر پاسخ خود مصر باشد برابر است با ۰.۳۳۲ و در حالتی که پیشنهاد مجری را بپذیرد برابر با ۰.۶۶۶ می‌شود که متناسب با چیزی است که از نظر تئوری انتظار داشتیم.

در حالتی که در را تغییر ندهیم قاعدتا از هر سه انتخاب یک انتخاب درست داریم که نرخ پیروزی برابر می‌شود با $\frac{1}{3}$. اما اگر قصد داشته باشیم در را تغییر دهیم شرایط متفاوت می‌شود. در این حالت اگر ابتدا پاسخ درست انتخاب شده باشد (که احتمالش $\frac{1}{3}$ است)، با تغییر پاسخ برد از دست می‌رود؛ ولی اگر پاسخ درست انتخاب نشده باشد

(که احتمالش $\frac{2}{3}$ است)، قطعا پاسخ درست انتخاب خواهد شد. چراکه از دو جواب دیگر یکی توسط مجری حذف می‌شود و گزینه باقی‌مانده قطعا صحیح است. پس می‌توان به سادگی دید که نرخ پیروزی به $\frac{2}{3}$ افزایش می‌یابد.

سوال ۵

نتایج زیر بدست آمده است.

الف) ۰.۵۸۷

ب) ۰.۶۷۷

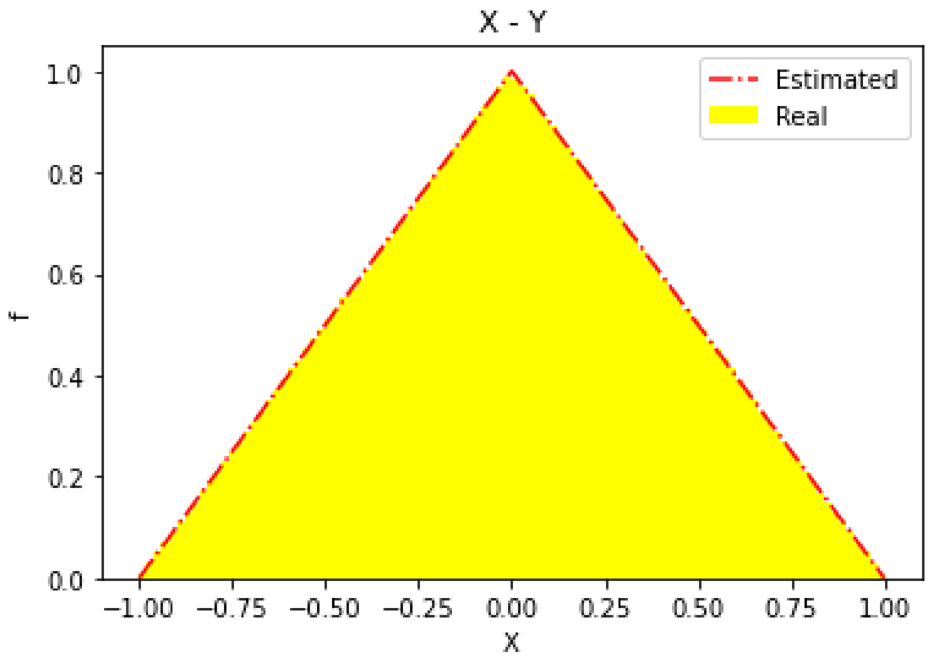
ج) ۳۴.۶۳۵

د) ۰.۰۸۷

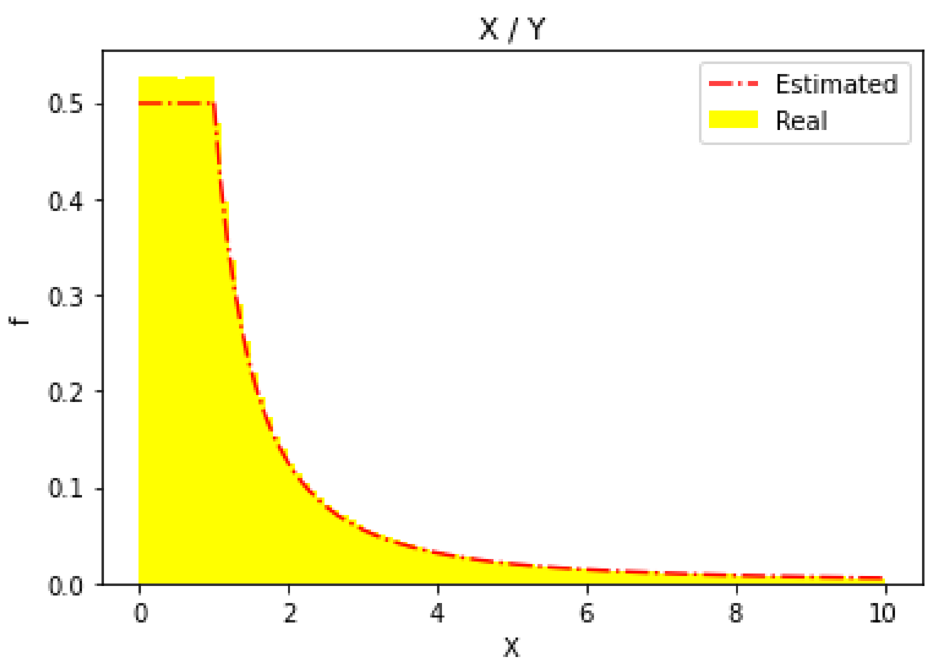
ه) ۳۶.۷۸۷ ±

سوال ۶

در تصویر ۶ نتایج عملی با رنگ زرد و نتایج تئوری با رنگ قرمز برای قسمت الف سوال ۳ آورده شده است. برای این نتایج ده میلیون نمونه تولید شده است. در تصویر ۷ آزمایش مشابهی برای قسمت ب ترتیب داده شده است. همانطور که مشخص است برای هر دو قسمت نتایج تئوری و آنچه که در عمل رخ داده است تطبیق بسیار خوبی دارد.



تصویر ۶ – سوال ۶ قسمت اول



تصویر ۷ – سوال ۶ قسمت دوم

سوال ۷

نتایج بدست آمده عبارت است از:

$$mean = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.009 \end{bmatrix}, Covariance = \begin{bmatrix} 0.520 & 1.048 \\ 0.336 & 0.520 \end{bmatrix}$$

مطابق این نتایج میانگین تقریبا برابر با صفر است، واریانس دو متغیر تقریبا برابر با ۰.۵ است و کواریانس دو متغیر به ترتیب نزدیک به ۱ و $\frac{1}{3}$ است. تمام این‌ها چیزی است که انتظار داشتیم مشاهده کنیم.

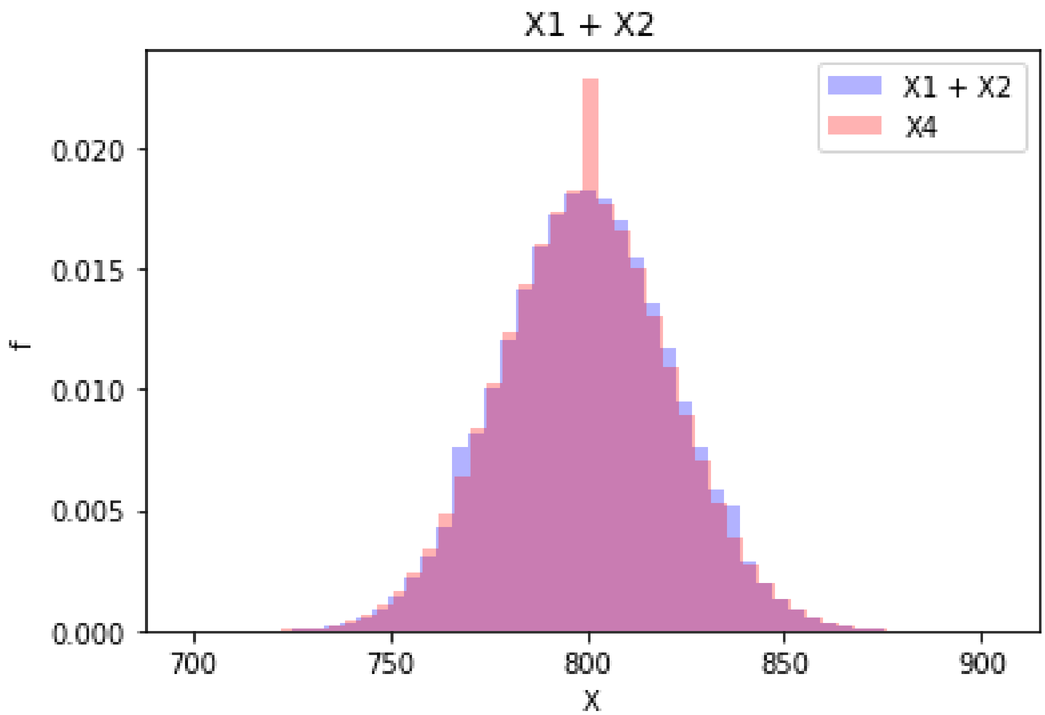
سوال ۸

مقدار فاصله برابر با ۱.۲۵۳ بدست آمد. این مقدار نزدیک به واریانس توزیع یعنی یک بوده است که قابل توجیه است.

سوال ۹

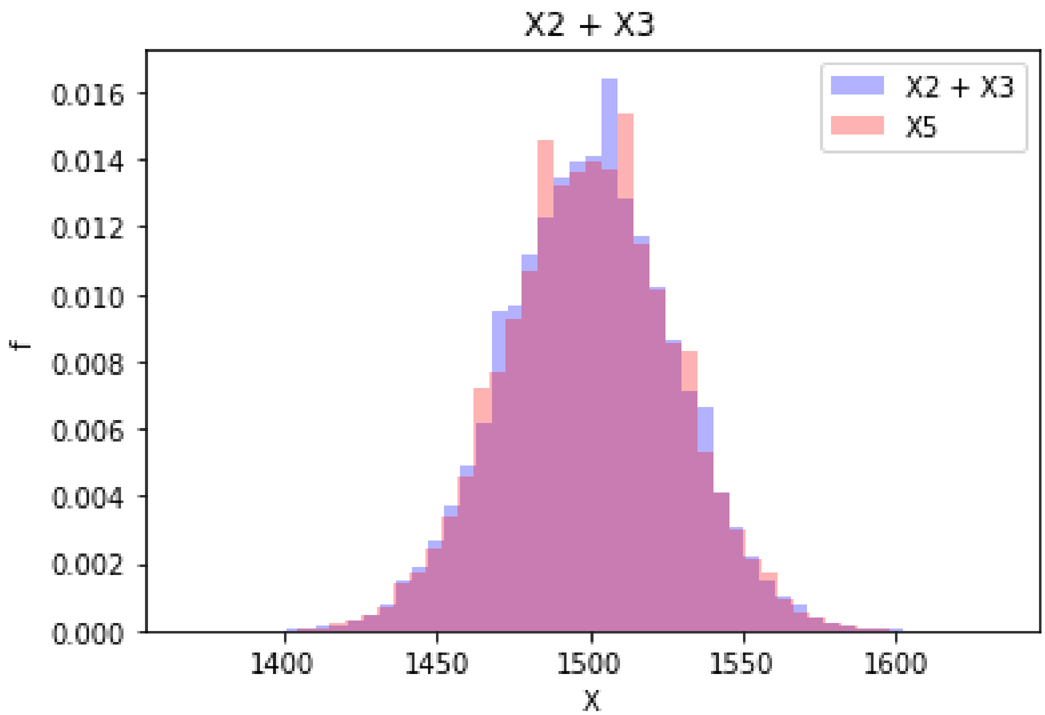
میدانیم میانگین یک توزیع دوجمله‌ای برابر با np و واریانس آن برابر با np(1-p) است. لذا با استفاده از میانگین و واریانس می‌توان n و p توزیع دو جمله‌ای حاصل را بدست آورد؛ البته اگر واقعا توزیع خروجی از نوع دوجمله‌ای باشد. پس برای سنجش این مورد مطابق با روشی که گفته شد n و p توزیع جدید را بدست آوردیم و بعد بر اساس آن برای یک توزیع دو جمله‌ای جدید داده تولید کردیم و خروجی دو نمودار را با هم مقایسه کردیم.

در تصویر ۸ خروجی $X_1 + X_2$ و X_4 ترسیم شده است. X_4 یک توزیع دو جمله با $n = 1881$ و $p = 0.42$ که از روی $X_1 + X_2$ بدست آمده است. همانطور که مشخص است نتایج دو توزیع بر هم منطبق است پس $X_1 + X_2$ یک توزیع دو جمله‌ای است. انتظار داشتیم در شرایطی که n برابر باشد، خروجی n برابر با دو برابر n سابق و p نیز میانگین دو p پیشین باشد که تقریبا و نه کاملا برآورده شده است.



تصویر ۸ – سوال ۹ $X_1 + X_2$

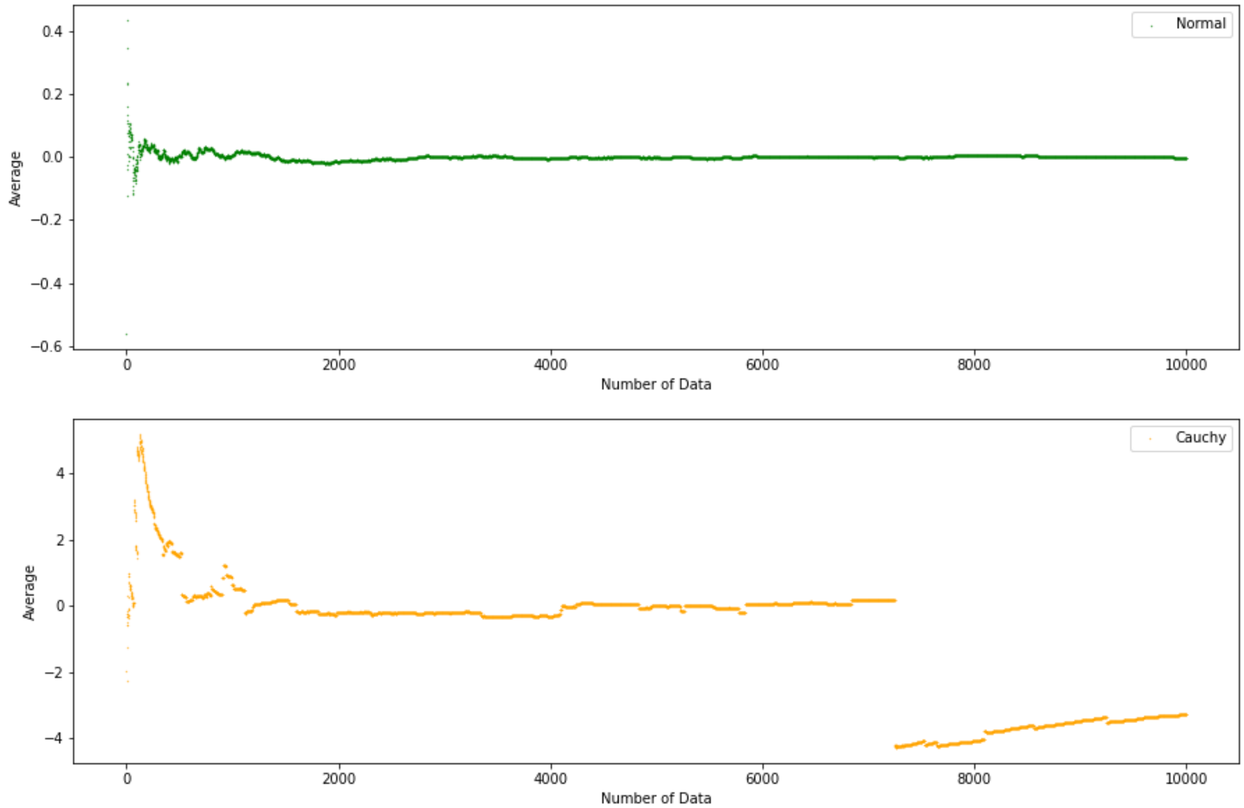
در تصویر ۹ خروجی $X_2 + X_3$ و X_5 ترسیم شده است. X_5 یک توزیع دو جمله با $n = 3000$ و $p = 0.4999$ که از روی $X_2 + X_3$ بدست آمده است. در این حالت هم نتایج دو حالت بسیار مشابه است که نشان می‌دهد $X_2 + X_3$ هم یک توزیع دو جمله‌ای است. در حالتی که p دو توزیع دوجمله‌ای برابر باشد به وضوح انتظار می‌رود که n جدید جمع n های سابق و p هم تغییر نکند که در این جا به خوبی این مقادیر بدست آمده است.



تصویر ۹ – سوال ۹ $X_2 + X_3$

سوال ۱۰

در تصویر ۱۰ میانگین نمونه‌ها برای توزیع نرمال و کوشی با تغییر تعداد نمونه آورده شده است. به وضوح می‌توان دید که میانگین نمونه‌ها در توزیع نرمال پس از دو هزار گام به عدد صفر همگرا شده است. این در حالی است که در توزیع کوشی و در شرایطی که به یک ثبات رسیده‌ایم، به واسطه یک داده میانگین به شدت جابجا می‌شود و همگرایی به معنای ریاضیاتی بدست نمی‌آید.



تصویر ۱۰ – سوال ۱۰

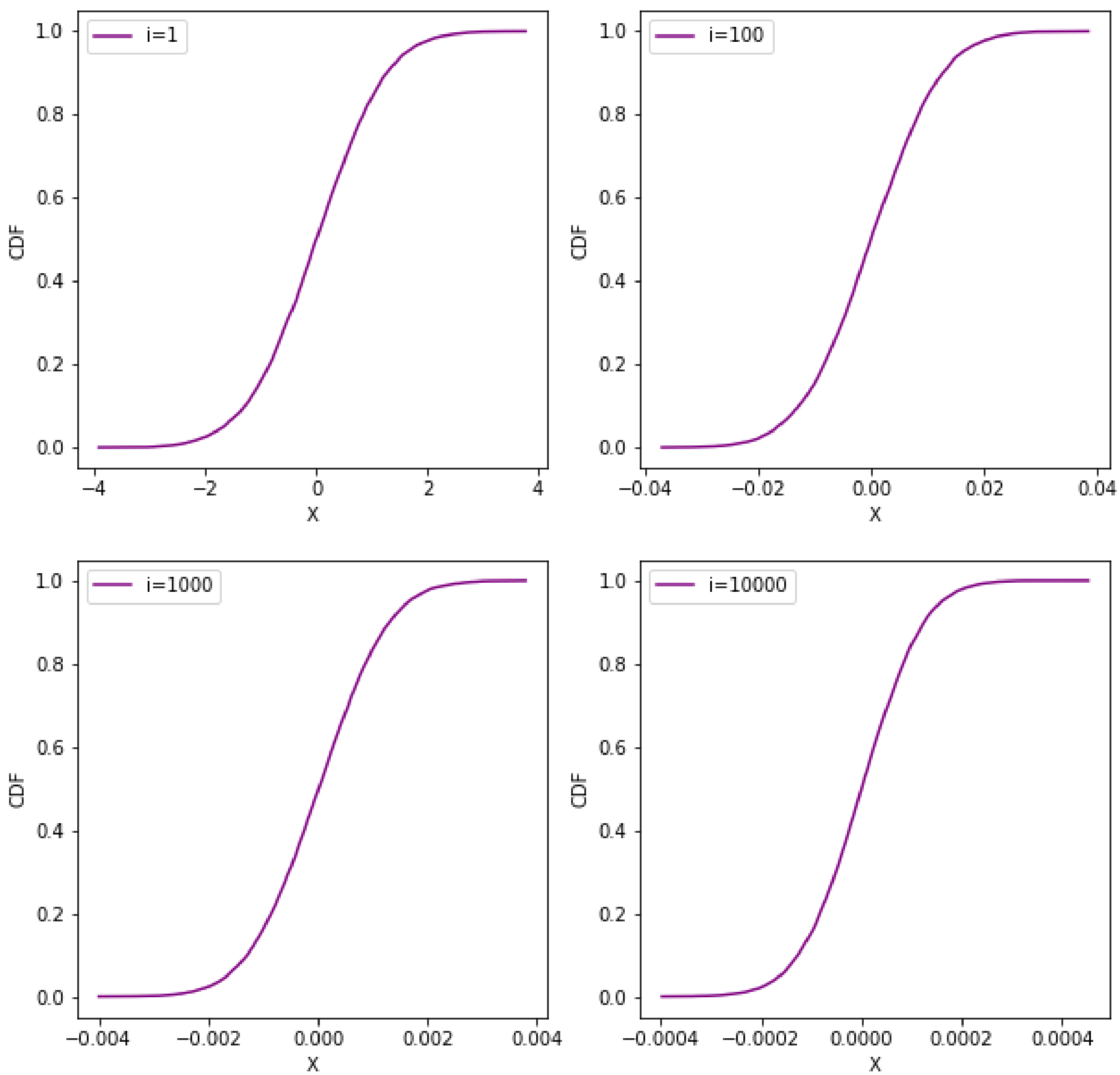
چنین چیزی از نظر تئوری هم قابل پیشبینی بود. توزیع نرمال دارای $E(X)$ است ولی توزیع کوشی میانگین ندارد. در بی‌نهایت $\overline{X_n}$ به مقدار $E(X)$ اگر وجود داشته باشد همگرا می‌شود که چنین چیزی برای توزیع نرمال برقرار است ولی برای کوشی چون وجود ندارد برقرار نخواهد بود.

سوال ۱۱

در تصویر ۱۱ CDF تجربی برای چهار حالت خواسته شده آورده شده است. همانطور که مشخص است هر چه مقدار i بیشتر می‌شود نمودار شبیه یک خط می‌شود و به تابع point mass با نقطه ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

برای بررسی همگرایی، مقدار i را از مقادیر ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ انتخاب کردیم و اپسیلون را برابر با ۰.۰۰۰۱ گرفتیم. در جدول ۱ مشخص است که با افزایش i مقدار احتمال $P(|X| > \epsilon)$ نشان داده شده است که این احتمال به مرور به

صفر میل می‌کند و نهایتا برای ۱۰۰۰۰۰ برابر با صفر می‌شود. بنابراین می‌توان همگرایی در احتمال را به صورت عملی نشان داد و به تبع همگرایی در توزیع هم اثبات خواهد شد.



تصویر ۱۱ – سوال ۱۱

جدول ۱

ا	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰
P	۱.۰	۰.۹۹۹۵	۰.۹۹۱۸	۰.۹۱۸۹	۰.۳۱۱۲	۰.۰

سوال ۱۲

هم برای $p = 0.3$ و $p = 0.5$ مقدار احتمال تخمینی برابر با ۰.۰ بوده است که به وضوح از تمام حدهای تئوری کمتر است. آستانه چبیشف برابر این مسئله برابر با ۱ و آستانه هافدینگ برابر با ۰.۰۰۰۶۷ بوده است. از این اعداد هم می‌توان نتیجه گرفت که حد آستانه هافدینگ چقدر کمتر است و هم آنکه این حدود آستانه رویکردی بدبینانه دارند و در عمل ممکن است با مقادیر واقعی تفاوت جدی داشته باشند.